THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

PARA OS CURSOS

CLÁSSICO e

CIENTÍFICO

3.º ANO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Orlando Bachin... Ctba. 14-9-56.

ao ... Ctiba 11/4/57

MATEMÁTICA

para o

TERCEIRO ANO COLEGIAL

De acôrdo com os novos programas, conforme portarias n.º 966, de 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51

Exemplar **Nº** 0733

1956

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S/A. — Rua Barão de Ladário, 226
Fones: 9-9087 e 9-9932 — São Paulo, Brasil.

THALES MELLO CARVALHO
Catedrático da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas da Universidade do Brasil e do Instituto de Educação do Distrito Federal.

MATEMÁTICA

para o

TERCEIRO ANO COLEGIAL

6.ª EDIÇÃO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

1. *Curiosidades Matemáticas*, 2.ª edição, 1940, esgotado.
2. *Lições de Trigonometria Retilínea*, 6.ª tiragem, 1941, esgotado.
3. *Lições de Matemática*, 2 fascículos, 7.ª tiragem, 1941, esgotados.
4. *Sôbre um sistema de amortização por anuidades variáveis*, Revista Brasileira de Atuária, Julho de 1942.
5. *O número de ouro*, 1945, esgotado.
6. *Sôbre alguns ábacos de alinhamento e sua aplicação ao cálculo da taxa das anuidades*, Tese, 1949.
7. *Acreditação de Escolas Secundárias*. Publicação da CILEME, Ministério da Educação e Cultura, 1954.
8. *Matemática*, para admissão ao Curso Normal, Ed. Conquista, 1954.

OBRAS EDITADAS PELA COMPANHIA EDITORA NACIONAL:

9. *Elementos de Matemática Comercial e Financeira*, 1942, esgotado.
10. *Matemática* para o primeiro ano colegial.
11. *Matemática* para o segundo ano Colegial.
12. *Matemática* para o primeiro ano dos Cursos Comerciais Técnicos.
13. *Matemática* para o segundo ano dos Cursos Comerciais Técnicos.

NOTA: As referências aos nossos volumes *Matemática para o Primeiro Ano Colegial* e *Matemática para o Segundo Ano Colegial* serão feitas, respectivamente, com as indicações *Vol. I* e *Vol. II*.

Ao professor compete fazer do livro um organismo plástico e vivo; compete-lhe escolher o que se pode fazer e o que se pode deixar, o que se pode antepor ou pospor segundo as condições peculiares dos alunos. O que importa muito mais é a aptidão para pensar do que o acúmulo de conhecimentos específicos que haja conseguido fazê-los aprender.

F. SEVERI

CAPÍTULO I

NOÇÕES SÔBRE CONJUNTOS E SUCESSÕES

1. Conjuntos. A observação dos sêres em sua pluralidade no universo leva-nos à idéia intuitiva de *conjunto*, noção considerada como *primitiva*, isto é, não definível à base de outros conceitos matemáticos.

Um conjunto é *definido* ou quando se enumeram individualmente seus elementos (ex.: *o conjunto dos números 1, 2, e 3*) ou quando se estabelece um *critério de pertinência*, isto é, uma condição necessária e suficiente para que um elemento dêle faça parte (ex.: *o conjunto dos números primos*). No segundo caso, não se evidencia necessàriamente, na definição, a totalidade de seus elementos.

Os conjuntos, objeto de estudo matemático, são considerados *abstratos*. Em outras palavras, a *álgebra dos conjuntos* procura estabelecer suas propriedades, independentemente da *natureza* de seus elementos, embora, como recurso didático para a objetivação de sua análise, recorra a considerações intuitivas sôbre conjuntos de elementos concretos.

2. Correspondência. Fundamental na teoria dos conjuntos é a noção de *correspondência*. Dados dois conjuntos A e B, admitamos que seja possível, por um critério seletivo qualquer, associar a cada elemento de A um e sòmente um elemento de B, sem repetição e, recìprocamente, a cada elemento de B um e sòmente um elemento de A, sem repetição. Diz-se, então, que entre os elementos de A e os de B foi estabelecida uma *correspondência biunívoca* ou que êsses conjuntos são *coordenáveis*. Tal ocorre, por exemplo, com os conjun- A e B, indicados na fig. 1.

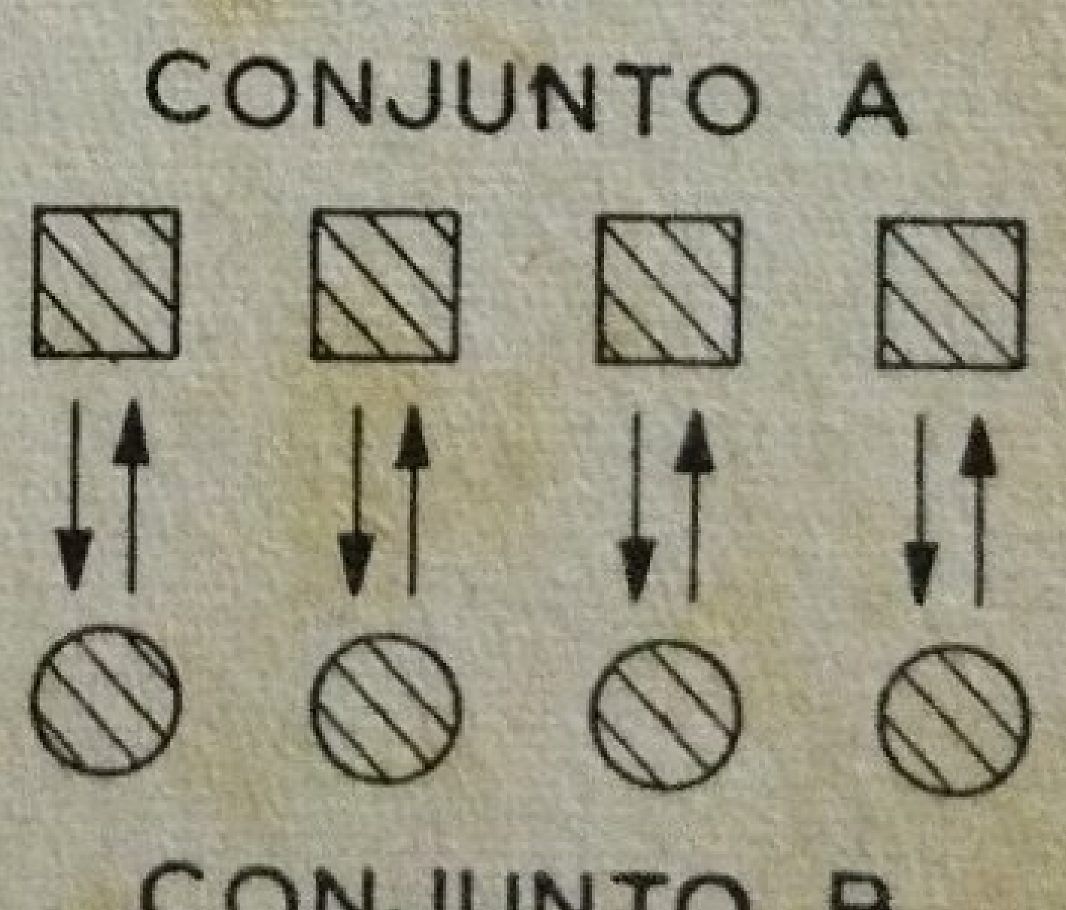

FIG. 1

A noção de *conjuntos coordenáveis* estabelece um conceito de quantidade. Se A e B são coordenáveis, isto nos leva a pensar que *A tem tantos elementos quantos tem B*, ou, em outras palavras, que A e B têm o mesmo *número* de elementos. Assim, a noção de *número*, em seu aspecto primitivo, resulta da comparação de coleções de objetos, que podem ser postos em correspondência biunívoca, abstração feita da natureza dêsses objetos. O *número* de elementos de um conjunto é, portanto, uma *propriedade comum* a todos os conjuntos com êle coordenáveis. Para destacar êsse aspecto quantitativo, diz-se que dois conjuntos coordenáveis são *equivalentes*.

3. Subconjunto. Se todo elemento de um conjunto B é elemento de um conjunto A, diz-se que B é *subconjunto* ou *parte* de A. Por exemplo, o conjunto dos números primos inferiores a 100 é subconjunto do conjunto dos números naturais 1, 2, 3, ... 100.

Dessa definição resulta que todo conjunto é subconjunto de si mesmo. Estabelece-se, então, uma distinção importante com a seguinte definição: um subconjunto B de um conjunto A é *próprio* se há, pelo menos, um elemento de A que não pertence a B, isto é, se A e B não são idênticos. Por exemplo, o conjunto dos números primos inferiores a 100, acima citado, é *subconjunto próprio* do conjunto 1, 2, 3, ... 100.

4. Conjunto vazio. Diz-se que um conjunto é *vazio* se nenhum elemento verifica seu critério de pertinência. Em têrmos mais simples, o conjunto vazio é, aquele que não tem elementos.

Essa ausência de elementos pode provir de uma contradição na definição do conjunto, Por exemplo, é vazio o *conjunto dos números primos divisíveis por 4*.

Por extensão, considera-se um conjunto vazio, como subconjunto de qualquer conjunto.

5. Conjuntos finitos e infinitos. Um conjunto é finito se é vazio ou se, não sendo vazio, existe um número natural n tal que seja possível uma correspondência biunívoca entre seus elementos e os do conjunto 1, 2, 3, ... n. Por exemplo, a fig. 2, dá uma imagem de um conjunto finito e não vazio.

Na associação sucessiva de cada número natural 1, 2, 3, ... n a um elemento do conjunto (sem repetição) consiste a operação de *contagem* de seus elementos. Diz-se, então, que o conjunto finito e não vazio, acima considerado, tem n elementos.

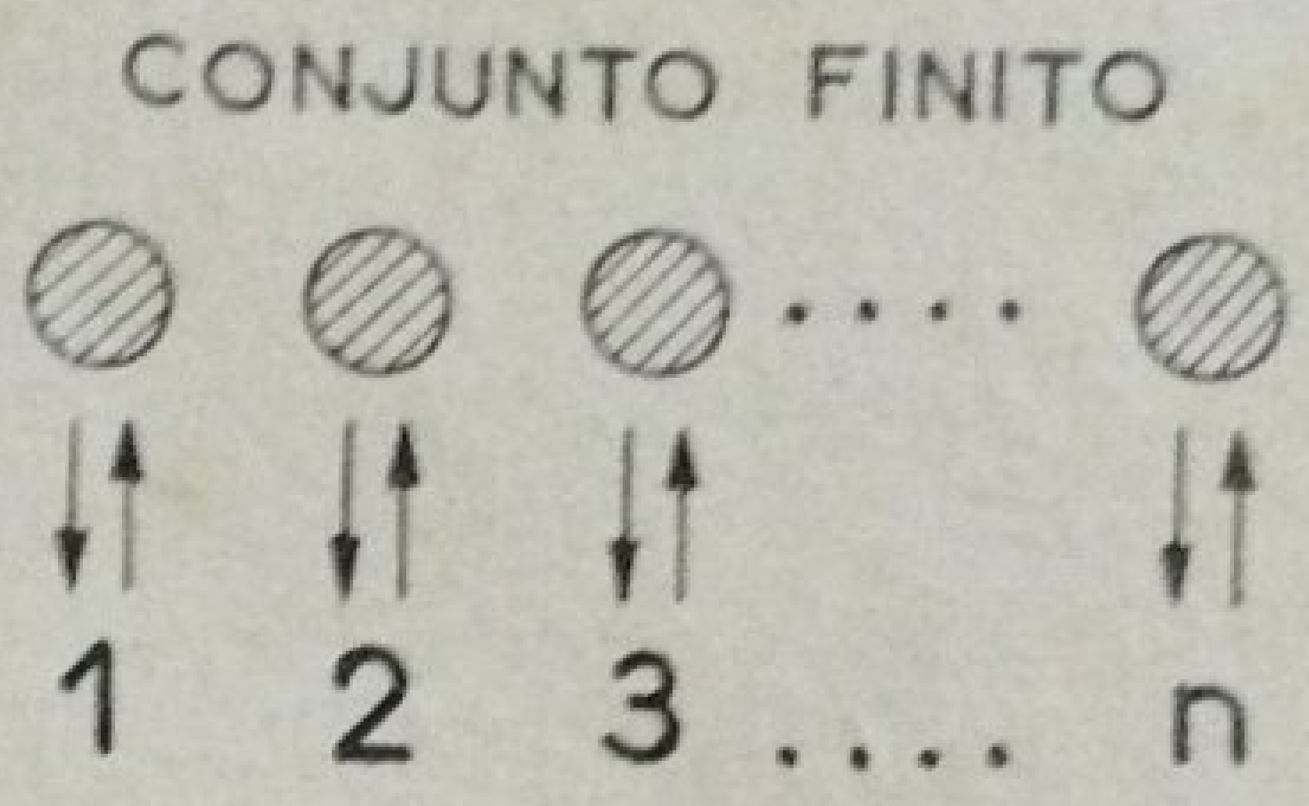

FIG. 2

Um conjunto é *infinito* se não é finito, isto é, se não é vazio e não verifica a condição estabelecida na definição de conjunto *finito*.

6. Possança de um conjunto. A noção de *número cardinal*, resultante da comparação de conjuntos finitos equivalentes, pode ser estendida aos conjuntos infinitos, cuja análise é feita à base da noção de correspondência.

Consideremos, para ilustração, o conjunto N dos números naturais e o conjunto N_2 dos números pares:

Conjunto N: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (1)

Conjunto N_2: $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$

Fàcilmente se comprova uma correspondência biunívoca entre os elementos dêsses conjuntos: a cada número n de N corresponde o número $2n$ de N_2 e recìprocamente. Diz-se, então, que os conjuntos N e N_2 têm a mesma *possança* ou o mesmo *número cardinal transfinito* (*), ou, ainda, que são *cardinalmente equivalentes*.

Pode parecer, à primeira vista, que todos os conjuntos infinitos tenham a mesma possança. Tal não ocorre, porém, como veremos mais adiante (**n.° 14**).

O exemplo acima ilustra, ainda, uma propriedade importante dos conjuntos infinitos, que convém assinalar. Dado um conjunto finito C, se C_1 é subconjunto próprio de C, não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de C e os de C_1. Por exemplo, não se pode estabe-

(*) A teoria dos números transfinitos foi encetada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918). Seus primeiros resultados fundamentais acham-se em duas famosas memórias, publicadas, respectivamente, em 1895 e 1897. Cantor foi, também, o iniciador, da teoria dos conjuntos.

lecer tal correspondência entre o conjunto dos inteiros de 1 a 50 e o conjunto dos números pares de 2 a 50. É possível, todavia, fazê-lo, se o conjunto considerado é infinito, como se deduz do exemplo acima, onde N_2 é parte própria de N.

A propriedade de ser coordenável com um de seus subconjuntos próprios, convenientemente escolhido, caracteriza, pois, os conjuntos infinitos.

7. Conjuntos numeráveis. Um conjunto infinito é *numerável* se tem a mesma possança do conjunto N dos números naturais: 1, 2, 3, ... Por exemplo, são numeráveis: *a*) o conjunto dos números pares (demonstrado no **n.º** 6); *b*) o conjunto dos números ímpares; *c*) o conjunto dos múltiplos de um inteiro; *d*) o conjunto dos números primos, etc.

Os conjuntos numeráveis têm algumas propriedades importantes das quais destacaremos a seguinte:

Todo subconjunto infinito de um conjunto numerável é numerável. Vimos, por exemplo, no **n.º 6,** que o subconjunto infinito N_2 do conjunto numerável N é, também, numerável.

8. Conjuntos ordenados. Um conjunto é *ordenado* se entre seus elementos se verificam as condições:

a) dados dois elementos distintos quaisquer, a e b, é possível estabelecer se a precede b ou b precede a, casos que se excluem mùtuamente;

b) dados três elementos distintos quaisquer, a, b e c, se a precede b e b precede c, então, a precede c.

Por exemplo, o conjunto dos inteiros (relativos), que representaremos por I:

$$\textit{Conjunto I:} \quad \ldots . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots . \qquad (2)$$

é ordenado desde que adotemos a definição: dados dois elementos a e b de I, *a precede b* se $a < b$..

Um conjunto ordenado é *denso*, se entre dois quaisquer de seus elementos há pelo menos um elemento do conjunto, o que equivale a dizer que, entre dois quaisquer de seus elementos há uma infinidade de elementos do conjunto. Um conjunto ordenado e não denso, denomina-se *discreto*. Por exemplo, o conjunto I é discreto.

9. Conjunto dos números racionais. Denomina-se número racional a todo número da forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q inteiros e q diferente de zero. Dêsse modo, o conjunto dos números racionais, que representaremos por Q, pode ser definido a partir do conjunto I dos inteiros.

Assinalemos as duas seguintes propriedades:

1) *O conjunto Q é ordenado.* Basta adotar a definição: o número racional $\frac{p}{q}$ *precede* o número racional $\frac{r}{s}$, se $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$.

2) *O conjunto Q é denso.* De fato, dados dois racionais distintos e quaisquer, entre êles há, pelo menos, um racional, a saber, sua média aritmética.

3) *O conjunto Q* é *numerável.* Observemos inicialmente que o conjunto Q é dado pela totalidade dos números $\frac{p}{q}$, onde p é um elemento de I e q um elemento de N (*). Logo, os elementos de Q podem ser escritos num quadro como o seguinte:

QUADRO DOS NÚMEROS RACIONAIS
(Conjunto Q)

$q \backslash p$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
1	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
2	...	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	...
3	...	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	...
4	...	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	...
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

(*) Por exemplo, para o racional $-\frac{2}{3}$, tem-se $p = -2$ e $q = 3$.

Prolongando-se suficientemente o quadro acima, encontra-se qualquer número racional $\frac{p}{q}$ no cruzamento da linha q com a coluna p.

Tomando, então, os números racionais do quadro acima, na ordem indicada pela linha cheia da fig. 3, e suprimindo os números repetidos, obtemos o conjunto

$$\textit{Conjunto } Q: 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -2,$$

$$-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (3)$$

que contém todos os números racionais.

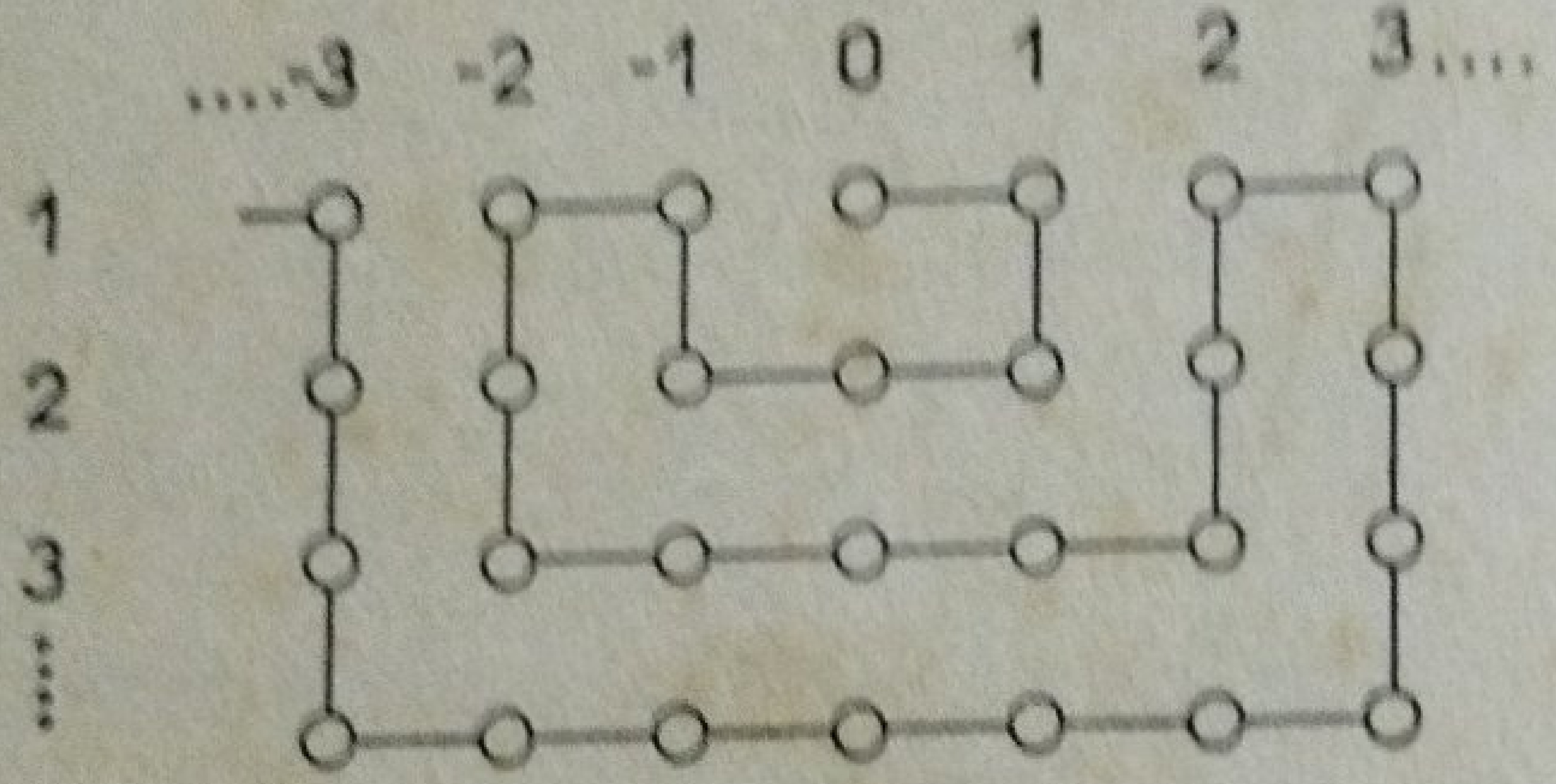

FIG. 3

Logo, entre os elementos de Q e os de N pode ser estabelecida uma correspondência biunívoca:

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Conjunto } Q: & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots & \frac{2}{3} & \ldots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{Conjunto } N: & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 10 & \ldots \end{array}$$

Q *é*, então, um conjunto numerável (n.º 7).

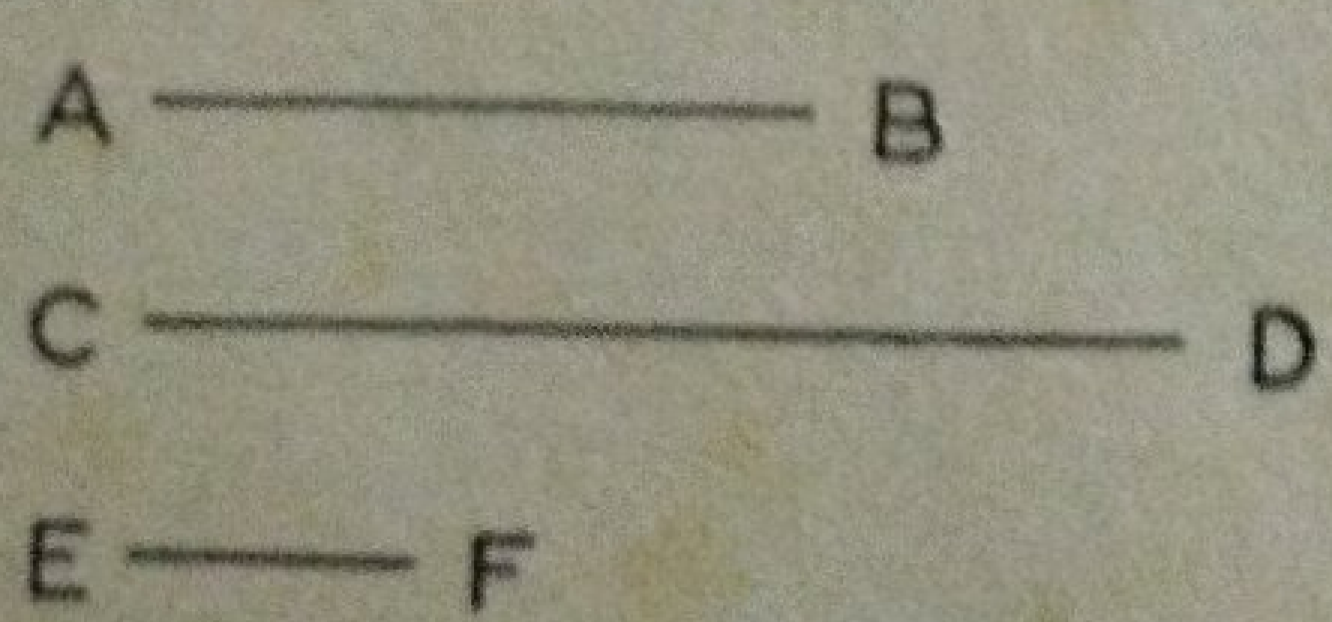

FIG. 4

10. Grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Consideremos dois segmentos de reta, AB e CD (fig. 4), e suponhamos que exista um segmento EF que caiba exatamente m vêzes em AB e p vêzes em CD.

Daí resulta que:

1) as medidas de AB e CD, na *unidade EF*, são, respectivamente, os números naturais m e p;

2) a medida de AB na *unidade CD* é o número racional

$$\frac{m}{p}$$

3) a medida de CD na *unidade AB* é o número racional

$$\frac{p}{m}.$$

Diz-se, então, que os segmentos AB e CD são *comensuráveis* (*).

Se não existe um segmento que caiba exatamente um certo número de vêzes em AB e exatamente um certo número de vêzes em CD, diz-se que AB e CD são *incomensuráveis*. Consideremos, por exemplo, o lado e a diagonal de um quadrado. Suponhamos que sejam comensuráveis, isto é, que haja um segmento de reta (o maior possível) que caiba m vêzes na diagonal e p vêzes no lado. Logo m e p são primos entre si.

Em virtude do teorema de PITÁGORAS, temos $m^2 = 2p^2$. Dessa relação concluimos que m é par; como m e p são primos entre si, p deve ser ímpar. Sendo m par, podemos pôr $m = 2n$, onde n é um inteiro (par ou ímpar). Substituindo êsse valor na igualdade acima, obtemos $4n^2 = 2p^2$ ou $2n^2 = p^2$, donde concluimos ser p um número par. Logo, da hipótese da comensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado resulta uma *contradição*, do que se deduz serem êsses segmentos incomensuráveis (**).

Essa demonstração já era conhecida pela escola pitagórica (***), que, todavia, não soube dela inferir a necessidade

(*) Em particular, AB e EF são, também, comensuráveis, o mesmo ocorrendo com CD e EF.

(**) Mais ràpidamente demonstraríamos o absurdo da igualdade $m^2 = 2p^2$ para m e p números naturais, destacando que $2p^2$ contém o fator primo 2 com expoente ímpar e m^2 só poderá contê-lo com expoente par.

(***) Escola do matemático grego PITÁGORAS (569-500 a. C.) e de seus discípulos e continuadores.

de definir uma nova classe de números, a dos *irracionais*, para a medida das grandezas incomensuráveis. Mesmo no campo da Aritmética tal necessidade se impunha a fim de tornar possível a radiciação, pois a raiz de grau n de um racional $\frac{p}{q}$ (p e q primos entre si) quando p e q não são potências, de expoente n, de inteiros, não tem para resultado um número racional, como fàcilmente se demonstra à luz da teoria dos números primos.

Como, nas aplicações práticas, o número irracional era substituido satisfatòriamente por números racionais aproximados, sua consideração rigorosa não se fez sentir durante muitos séculos. Sòmente na segunda metade do século passado foi ela realizada.

11. Números irracionais. Consideremos o conjunto Q dos números racionais e separemos seus elementos em duas classes não vazias Q_1 e Q_2, tais que:

1) todo número racional pertença a uma e sòmente a uma dessas classes;

2) todo número da primeira classe Q_1 seja inferior a qualquer número da classe Q_2.

Tal separação denomina-se um *corte* no campo racional, isto é, no conjunto Q,

Dois casos podem, então, ocorrer.

Primeiro caso. Existe na classe Q_1 um número racional superior a todos os outros dessa classe ou existe na classe Q_2 um número racional inferior a todos os outros dessa classe, hipóteses que se excluem mùtuamente. Diz-se, então, que o corte define êsse número racional.

Consideremos, por exemplo, o corte caracterizado pelas classes seguintes:

Classe Q_1: todos os racionais $\frac{p}{q}$ *não superiores* a $\frac{2}{3}$ $\left(\text{ou } \frac{p}{q} \leqslant \frac{2}{3}\right)$.

Classe Q_2: todos os racionais $\frac{p}{q}$ *superiores a* $\frac{2}{3}$ $\left(\text{ou } \frac{p}{q} > \frac{2}{3}\right)$.

Logo, há na classe Q_1 o racional $\frac{2}{3}$ maior do que todos os outros dessa classe. Como conseqüência, na classe Q_2, não existe um número racional menor do que todos os outros dessa classe, pois, qualquer que seja um número racional superior a $\frac{2}{3}$ e muito próximo de $\frac{2}{3}$, em virtude da *densidade* do conjunto Q (**n.º 9**) entre êsse número racional e $\frac{2}{3}$ há uma infinidade de números racionais, isto é, números do conjunto Q (*).

Então, o corte considerado define o número racional $\frac{2}{3}$.

Se tivessemos considerado as classes:

Classe Q_1: todos os racionais $\frac{p}{q}$ *inferiores* a $\frac{2}{3}$

$$\left(\text{ou } \frac{p}{q} < \frac{2}{3}\right).$$

Classe Q_2: todos os racionais $\frac{p}{q}$ *não inferiores* a $\frac{2}{3}$

$$\left(\text{ou } \frac{p}{q} \geqslant \frac{2}{3}\right).$$

tal corte definiria igualmente o racional $\frac{2}{3}$, notando-se, porém, que nessa hipótese a classe Q_1 não teria um número maior do que todos os outros dessa classe e a classe Q_2 teria um número $\left(\frac{2}{3}\right)$ inferior a todos os outros dessa classe.

Segundo caso. Não existe na classe Q_1 um número racional superior a todos os outros dessa classe e não existe na classe Q_2 um número racional inferior a todos os outros dessa classe. Então, o elemento de separação das classes Q_1

(*) Como $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots..$ observe-se, por exemplo, que a sucessão *ilimitada* de números racionais

$$0{,}7\,;\ 0{,}67;\ 0{,}667\,;\ 0{,}6667\,;\ \ldots.$$

é constituída de números *superiores* a $\frac{2}{3}$ e *cada vez mais próximos de* $\frac{2}{3}$.

e Q_2 não é um número racional. O corte define, pois, um número irracional, como veremos no exemplo seguinte.

Consideremos o corte caracterizado pelas classes:

Classe Q_1: todos os racionais negativos, zero, e todos os racionais positivos, cujo quadrado seja inferior a 2.

Classe Q_2: todos os racionais positivos cujo quadrado seja superior a 2.

Não há na classe Q_1 elemento superior a todos os outros dessa classe e não há na classe Q_2 elemento inferior a todos os outros dessa classe. O corte define, então, o irracional $+\sqrt{2}$ (*).

Em conclusão, podemos dizer que todo corte no conjunto Q dos números racionais define um número *real*, que será *racional* se houver elemento de separação pertencente a Q (primeiro caso), e *irracional* na hipótese contrária (segundo caso).

Observemos que a representação decimal de um número irracional é ilimitada, porém não periódica. Assim, por exemplo, a parte decimal do número $\pi = 3{,}14159265\ \ldots$ contém uma infinidade de algarismos, não repetidos periòdicamente.

12. Conjuntos contínuos. Seja C um conjunto ordenado. Separemos seus elementos em duas classes não vazias, tais que:

1) todo elemento de C pertença a uma e sòmente a uma dessas classes;
2) todo elemento da primeira classe preceda (segundo o critério de ordem considerado) qualquer elemento da segunda.

(*) Observando, por exemplo, que $+\sqrt{2} = 1{,}414213\ \ldots\ldots$ a sucessão ilimitada de números racionais positivos de Q_1:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots.$$

é constituída de números *inferiores a* $+\sqrt{2}$ *e cada vez mais próximos* de $+\sqrt{2}$. Igualmente, a sucessão ilimitada de números racionais (positivos) de Q_2;

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots.$$

é formada de números *superiores* a $+\sqrt{2}$ *e cada vez mais próximos de* $+\sqrt{2}$.

Se, para qualquer corte, assim realizado em C, existe um elemento de separação dessas classes, pertencente a C, diz-se que o conjunto C é *contínuo*.

Por exemplo, o conjunto Q dos números racionais não é contínuo, porque, como vimos (**n.º 11**), há nêle cortes, cujo elemento de separação das classes não é um número racional. Entretanto, o conjunto dos números reais, que designaremos por R, é contínuo, pois qualquer corte em R define um número real (racional ou irracional). Por essa razão, o conjunto R denomina-se o *continuum real*.

13. O *continuum* linear. Consideremos uma reta sôbre a qual escolhemos arbitràriamente um ponto O e um segmento unitário OU (fig. 5).

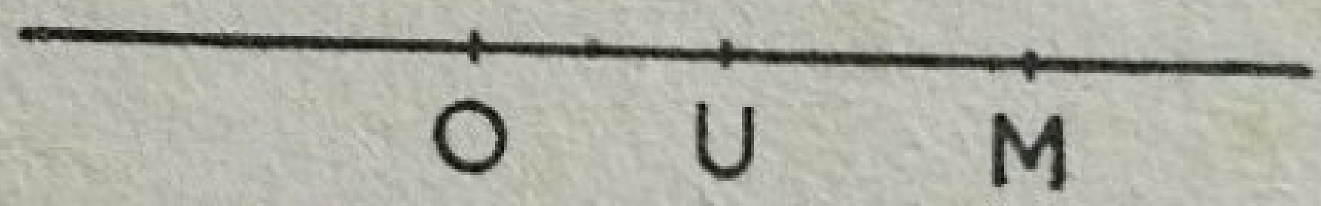

FIG. 5

É possível associar a todo ponto M, arbitràriamente escolhido sôbre a reta, um número real r, denominado *medida* do segmento OM, sendo r positivo ou negativo, conforme M esteja à direita ou à esquerda de O. Para isso, observemos que:

1) Se OM e OU são comensuráveis (**n.º 10**) existem dois números naturais m e p, tais que a *emésima* parte de OU cabe exatamente p vêzes em OM; então, a medida de OM (na unidade OU) é o número racional $\frac{p}{m}$.

2) Se OM e OU são incomensuráveis, a medida de OM (na unidade OU) é um número irracional (*).

Ao ponto O da reta associamos o número *zero*.

Naturalmente, ocorre perguntar se é verdadeira a correspondência recíproca, isto é, se a cada número real r corresponde um e apenas um ponto da reta.

A cada número racional $\frac{p}{m}$ corresponde o ponto M (situado à direita ou à esquerda de O, conforme o racional dado seja positivo ou negativo), tal que o segmento OM contenha p vêzes a *emésima* parte de OU. Ao número 0 cor-

(*) A demonstração envolve considerações que ultrapassam as possibilidades dêste compêndio.

responde o ponto O. Entretanto, a correspondência que associa a cada número irracional um ponto da reta é aceita como um *axioma*, a saber o *axioma da continuidade da reta* ou *axioma de* DEDEKIND.

Por êste axioma, a reta orientada é um conjunto contínuo, isto é, qualquer que seja o corte no conjunto de seus pontos, há um ponto da reta que é o elemento de separação das classes dêsse corte.

Dêsse modo se estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos de uma reta orientada, sôbre a qual se marcaram uma origem e um segmento unitário. Utilizando uma denominação já esclarecida (**n.° 6**) podemos dizer que êsses dois conjuntos têm a mesma possança, ou o mesmo número cardinal transfinito.

14. Possança do *continuum* real ou linear. Já vimos (**n.° 9**) que o conjunto dos números racionais é numerável.

Tal não ocorre, porém, com o conjunto R dos números reais, como o demonstrou CANTOR na forma dada a seguir. Se o conjunto R fôsse numerável também o seria qualquer subconjunto infinito de R (**n.° 7**), em particular, o conjunto dos números reais compreendidos entre 0 e 1. Suponhamos que êsse último fôsse numerável, isto é, que pudessemos escrever numa sucessão todos os seus elementos:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,\ a_1\ b_1\ c_1\ \ldots \\ r_2 &= 0,\ a_2\ b_2\ c_2\ \ldots \\ r_3 &= 0,\ a_3\ b_3\ c_3\ \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\ c_1, c_2, \ldots$ representam algarismos. Então, o número real $0, a'_1\, b'_2\, c'_3 \ldots$, onde $a'_1 \neq a_1$, $b'_2 \neq b_2$, $c'_3 \neq c_3$, ... é diferente de todos os números $r_1, r_2, r_3 \ldots$ (pois de cada um difere, pelo menos, num algarismo) e, portanto, não está incluido na sucessão considerada.

A contradição mostra que R não é numerável. Mais precisamente, podemos dizer que a possança de R, denominada *possança do continuum*, é superior à do numerável.

15. Intervalo. Sejam a e b dois números reais, tais que $a < b$. Chama-se *intervalo fechado* de origem a e extremidade b e representa-se por $[a, b]$ ou $a \vdash\!\!\dashv b$, o conjunto de todos os números reais x, tais que $a \leqslant x \leqslant b$. O conjunto dos números reais x, tais que $a < x < b$, denomina-se *intervalo aberto* de extremidades a e b e representa-se por (a, b) ou $a \text{——} b$.

De modo análogo definem-se o *intervalo semi-aberto à esquerda* $(a, b]$ ou $a \relbar\!\!\dashv b$ (conjunto dos números reais x tais que $a < x \leqslant b$) e o *intervalo semi-aberto à direita* $[a, b)$ ou $a \vdash\!\relbar b$ (conjunto dos números reais x, tais que $a \leqslant x < b$).

16. Entôrno. Seja c um número real. Todo intervalo fechado $[a, b]$, tal que $a < c < b$, denomina-se *entôrno* do ponto c. Em particular, consideram-se com mais freqüência os entôrnos $[c - \lambda, c + \lambda]$ do ponto c, sendo $\lambda > 0$.

Os intervalos $[c, c + \lambda]$ e $[c - \lambda, c]$ chamam-se, respectivamente, *entorno à direita* e *entôrno à esquerda* do ponto c. Por exemplo, o intervalo $[1, 2]$ é um entôrno à direita do ponto 1, e um entôrno à esquerda do ponto 2.

Essa noção de entôrno unilateral estende-se aos pontos impróprios $+\infty$ e $-\infty$ do campo real. Assim, sendo r um número real positivo, todo intervalo $[r, +\infty)$ é um entôrno (à esquerda) do ponto $+\infty$ e todo intervalo $(-\infty, -r]$ é um entôrno (à direita) do ponto $-\infty$.

17. Ponto de acumulação. Dado um conjunto C de números reais, diz-se que um número a é *ponto de acumulação* ou *ponto limite* de C, se, em qualquer entôrno de a, existe, pelo menos, um ponto de C, diferente de a. Isto equivale a dizer que, em qualquer entôrno de a, existe uma infinidade de pontos de c. Um ponto de acumulação pode ou não pertencer ao conjunto. Por exemplo, o conjunto

$$1, \frac{1}{2} \; \frac{1}{3}, \; \ldots, \; \frac{1}{n}, \; \ldots$$

tem o ponto de acumulação *zero*, que a êle não pertence.

Todo ponto de C, que não é de acumulação, chama-se *ponto isolado*.

18. Extremos de um conjunto. Diz-se que um conjunto C de números reais é *limitado superiormente* ou *limitado à direita* se todos os seus elementos são inferiores a um número finito L e é *limitado inferiormente* ou *limitado à esquerda* se todos os seus elementos são superiores a um número finito l. Por exemplo, o conjunto dos números reais negativos é limitado à direita ($L = 0$) e o conjunto dos números reais positivos é limitado à esquerda ($l = 0$).

Um conjunto de números reais, limitado à esquerda e à direita, diz-se *limitado*. Por exemplo, o conjunto indicado no **n.° 17** é limitado.

Chama-se *extremo superior* de um conjunto de números reais, limitado superiormente, um número E tal que:

1) nenhum número do conjunto seja superior a E;
2) em qualquer entôrno à esquerda de E haja, pelo menos um ponto do conjunto (que pode ser o próprio E).

Anàlogamente se define o *extremo inferior* e de um conjunto.

Observemos que E (ou e) pode ser um ponto isolado e nêsse caso pertence necessàriamente ao conjunto. Por exemplo, o conjunto indicado no **n.° 17** tem o extremo superior 1, que é ponto isolado do conjunto. Se o extremo E (ou e) é ponto de acumulação pode não pertencer ao conjunto, como, por exemplo, o extremo inferior *zero* do conjunto citado.

19. Sucessões (*) Consideremos um conjunto C de números reais distintos e suponhamos que seja possível fazer corresponder ùnivocamente a cada número natural n um elemento a_n de C, sem que seja necessàriamente biunívoca essa correspondência. Então, o conjunto numerável de elementos (distintos ou não), pertencentes a C:

$$a_1, a_2, \ldots . a_n, \ldots . \qquad (4)$$

denomina-se uma *sucessão*, da qual o conjunto C é o *suporte* (**).

Se é possível estabelecer uma expressão $f(n)$, que contenha a variável n e tal que, para cada número natural 1, 2, 3, ...

(*) Como nosso estudo está limitado ao campo real, serão consideradas aqui apenas sucessões de números reais.

(**) Lelio Gama, *Introdução à teoria dos conjuntos*, fasc. I.

atribuido a n, se tenha $a_n = f(n)$, diz-se que $f(n)$ é o *têrmo geral* da sucessão (4). Ilustremos as definições dadas.

Exemplo I: A sucessão 1, 3, 5, 7, ... tem para suporte o conjunto dos números ímpares e para têrmo geral $a_n = 2n - 1$, escrevendo-se, então, na forma habitual

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots \tag{5}$$

O suporte é um conjunto numerável e é biunívoca a correspondência indicada na definição de sucessão.

Exemplo II: A sucessão

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \tag{6}$$

cujo têrmo geral está indicado tem para suporte o conjunto dos números racionais absolutos $\dfrac{p}{q}$ para os quais $q = p + 1$. Há igualmente biunivocidade na correspondência que define a sucessão.

Exemplo III: A sucessão

$$1, 0, 1, 0, \ldots, \frac{1-(-1)^n}{2}, \ldots \tag{7}$$

tem para suporte o conjunto finito, constituido de 2 elementos: 0 e 1. Não há, pois, a correspondência biunívoca que vimos nos exemplos anteriores. Observe-se que o numerador do têrmo geral é *zero* quando n é par e *2* quando n é ímpar.

Exemplo IV: A sucessão

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4} \ldots -$$

$$\ldots, \frac{2}{n+2} - \frac{1-(-1)^n}{2}\left[\frac{2}{n+2} - 1\right], \ldots \tag{8}$$

tem para suporte o conjunto numerável $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots,$ não havendo, porém, a correspondência biunívoca assinalada, visto que ao elemento *1* do suporte corresponde uma infinidade de têrmos da sucessão, a saber, os têrmos de ordem ímpar.

20. Sucessões convergentes. Consideremos as sucessões

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots\ldots\ \frac{n}{n+1}\ \ldots\ldots \tag{9}$$

$$2\,,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots\ldots\ \frac{n+1}{n},\ \ldots\ldots \tag{10}$$

$$2\,,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{5},\ \ldots\ldots\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n},\ \ldots\ldots \tag{11}$$

e analisemos as diferenças entre *1* e os têrmos dessas sucessões.

1) Sendo
$$1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1} \tag{12}$$

a diferença entre 1 e o têrmo geral de (9), vemos que, para qualquer número natural n, isto é, para qualquer têrmo de (9), essa diferença é positiva. Em outras palavras, todos os têrmos de (9) são inferiores a 1. Por outro lado, quanto maior fôr n, menor será a diferença (12), isto é, os têrmos de (9) *crescem, aproximando-se de 1.* Destaquemos, então, um fato característico dessa *aproximação:* a diferença (12) pode ser inferior a qualquer número positivo ε para n suficientemente grande. Por exemplo, para que ela seja inferior a 0,01, basta tomar $n \geqslant 100$; para que ela seja inferior a 0,001, basta tomar $n \geqslant 1\,000$, etc. Isto equivale a dizer que todos os têrmos da sucessão (9), a partir do centésimo $\left(\frac{100}{101},\ \frac{101}{102},\ \ldots\right)$, diferem de *1* de menos de 0,01; que todos os têrmos de (9), a partir do milésimo $\left(\frac{1\,000}{1\,001},\ \frac{1\,001}{1\,002},\ \ldots\right)$ diferem de 1 de menos de 0,001, etc.

2) Sendo
$$1-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n} \tag{13}$$

a diferença entre *1* e o têrmo geral de (10), e raciocinando de maneira análoga à anterior, concluimos que:

a) todos os têrmos de (10) são superiores a *1;*

b) a medida que n cresce, os têrmos de (10) decrescem aproximando-se de 1;

c) a diferença (13) pode ser, *em valor absoluto*, inferior a qualquer número positivo ε para n suficientemente grande (*), isto é, a partir de uma ordem n, suficientemente grande, todos os têrmos de (10) diferem de *1* de uma quantidade, em valor absoluto inferior a ε.

3) Observemos que, conforme n seja par ou ímpar, o têrmo de ordem n de (11) será $\dfrac{n}{n+1}$ ou $\dfrac{n+1}{n}$. Logo, a diferença entre 1 e o têrmo geral de (11) será (12) quando n fôr par e (13) quando n fôr ímpar. Utilizando, então, conclusões anteriores, podemos afirmar que:

a) os têrmos de (11) são alternadamente superiores e inferiores a 1;

b) à medida que n cresce, os têrmos de (11) aproximam-se de *1;*

c) o *valor absoluto* da diferença entre *1* e o têrmo de ordem n de (11) pode ser inferior a um número positivo qualquer ε para n suficientemente grande, isto é, a partir de uma ordem n, suficientemente grande, todos os têrmos de (11) diferem de 1 de uma quantidade, em valor absoluto inferior a ε.

Dos resultados anteriores conclui-se que: escolhido arbitràriamente um número positivo ε, é possível fixar, para cada uma das sucessões (9), (10) e (11), um número natural N tal que o valor absoluto da diferença entre 1 e qualquer têrmo de ordem igual ou superior a N seja inferior a ε. Diz-se, então, que as sucessões mencionadas são *convergentes* e *têm para limite 1*.

Pretendemos, dêsse modo, esclarecer a seguinte

DEFINIÇÃO: Diz-se que uma sucessão

$$a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_n,\ \ldots. \qquad (14)$$

(*) Por exemplo, para que o valor absoluto dessa diferença seja inferior a 0,001 é suficiente fazer $n \geqslant 1\,001$, etc.

é convergente e tem para limite L, se, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um número natural N, tal que, para $n \geqslant N$, se tenta $|L - a_n| < \varepsilon$. Esta condição equivale à seguinte: dado um entôrno $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ de L, arbitràriamente escolhido, existe um número natural N, tal que todos os têrmos da sucessão a partir de a_N $(a_N, a_{N+1}, \ldots.)$ estejam contidos naquele entôrno.

21. Sucessões divergentes. Consideremos a sucessão (14) e suponhamos que, escolhido arbitràriamente um número positivo P, seja possível fixar um número natural N tal que, para $n \geqslant N$, se tenha $a_n > P$, ou, em outras palavras, todos os têrmos da sucessão, a partir da ordem N $(a_N, a_{N+1}, \ldots.)$ sejam superiores a P. Isto equivale a afirmar que todos êsses têrmos estão contidos no entôrno (à esquerda) $[P, +\infty)$ do ponto impróprio $+\infty$. Diz-se, então, que a sucessão (14) é *divergente* e *tem para limite* $+\infty$.

Tal ocorre, por exemplo, com a sucessão (5), pois, dado um número positivo qualquer P, a condição $a_n = 2n - 1 > P$ é satisfeita para $n > \dfrac{P+1}{2}$. Por exemplo, escolhido $P = 1\,000$, resulta $n > 500{,}5$, isto é, todos os têrmos a partir do quingentésimo primeiro $(a_{501}, a_{502}, \ldots.)$ são superiores a P (*).

Se, dado um número positivo e arbitrário P, é possível fixar um número natural N, tal que, para $n \geqslant N$, se tenha $a_n < -P$, ou, em outras palavras, todos os têrmos da sucessão, a partir da ordem N $(a_N, a_{N+1}, \ldots.)$, sejam inferiores a $-P$, isto é, estejam contidos no entôrno $(-\infty, -P]$ do ponto impróprio $-\infty$, diz-se que a sucessão é *divergente* e *tem para limite* $-\infty$. Por exemplo, a sucessão

$$0, -3, -8, -15, \ldots, 1 - n^2, \ldots \qquad (15)$$

tem para limite $-\infty$.

22. Sucessões oscilantes. Se uma sucessão tem uma infinidade de têrmos iguais a um número a, diz-se que

---

(*) Para as sucessões cujos têrmos formam uma progressão aritmética crescente (como a do exemplo considerado) essa propriedade já foi demonstrada (Vol. I, Cap. II, nº 12).

a é ponto de repercussão dessa sucessão (*). Por exemplo, a sucessão (8) tem o ponto de repercussão *1* e a sucessão (7) os pontos de repercussão 0 e *1*.

Diz-se que um número real *a* é *ponto-limite* de uma sucessão, se qualquer entôrno de *a* contém uma infinidade de têrmos da sucessão, embora não necessàriamente todos. Por exemplo, a sucessão (8) tem o ponto-limite *zero*, pois qualquer entôrno arbitrário dêsse ponto contém uma infinidade de têrmos da sucessão, a saber, os têrmos de ordem par, a partir de uma certa ordem. A sucessão

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots, (-1)^n \left[\frac{n}{n+1}\right]^{(-1)^{n+1}}, \ldots \quad (16)$$

tem os pontos-limite -1 e $+1$.

Em face dessa definição conclui-se que todo ponto de repercussão é ponto-limite da sucessão.

Conjunto-limite de uma sucessão é o conjunto de seus pontos-limite.

Nas sucessões convergentes ou divergentes o conjunto-limite é constituido de um único elemento: o *limite* (finito ou infinito) da sucessão (**n.º 20**).

Se o conjunto-limite de uma sucessão tem, pelo menos dois elementos (distintos), a sucessão não é nem convergente nem divergente e denomina-se *oscilante* ou *dispersiva*. Tal ocorre, por exemplo, com as sucessões (7) e (8), cujo conjunto-limite é formado pelos pontos-limite 0 e 1.

23. Sucessões monótonas. Diz-se que a sucessão (14) é (*monótona*) *não decrescente* se, qualquer que seja o número natural n, se tem $a_n \leqslant a_{n+1}$. Em particular, se $a_n < a_{n+1}$, diz-se que a sucessão é (*monótona*) *crescente*. Por exemplo, a sucessão

$$1, 5, 5, 9, 9, 13, 13, \ldots, (-1)^n + 2n, \ldots \quad (17)$$

é monótona não decrescente e a sucessão (6) é monótona crescente.

(*) As noções de *suporte, ponto de repercussão, ponto-limite* e *conjunto-limite* de uma sucessão são da autoria do matemático brasileiro, professor Lélio Gama. Adotamos sua orientação por nos parecer precisa e elegante na caracterização das sucessões. (Cfr. Lélio Gama, *Séries Numéricas*, Cap. III).

De modo análogo se definem sucessões (*monótonas*) *não crescentes* e (*monótonas*) *decrescentes*.

24. Exercícios.

1. Considerar os seguintes conjuntos:

   A: conjunto das diagonais de um polígono convexo de n lados;
   B: conjunto dos cubos dos números naturais;
   C: conjunto de todos os números $\frac{n+1}{2}$, sendo n um número primo superior a 2;
   D: conjunto das retas perpendiculares a uma reta dada;
   E: conjunto dos triângulos de mesma base AB, cujos vértices estão situados numa mesma reta paralela a AB;

   e responder, em relação a cada um, às seguintes perguntas: 1) é finito? 2) é numerável? 3) tem a possança do *continuum*?

2. Pode ser estabelecida uma correspondência biunívoca entre os elementos de A e os de B? entre os de B e os de C? entre os de C e os de D? entre os de D e os de E?

3. É denso o conjunto dos números reais? e o dos números naturais?

4. Citar um subconjunto próprio e infinito do conjunto B do ex. 1 e verificar se êle é cardinalmente equivalente a B.

5. É ordenado o conjunto B? Qual o critério de precedência?

6. Considerar o conjunto dos números racionais de numeradores iguais a 1. É subconjunto próprio do conjunto dos números racionais? É cardinalmente equivalente a êsse conjunto?

7. O lado l e a altura h de um triângulo equilátero são comensuráveis? Qual a medida de h na unidade l? Qual a medida de l na unidade h?

   Resp.: não; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. Verificar se 0 e 1 são pontos de acumulação do conjunto $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

   Resp.: são.

9. Qual é o extremo inferior e qual é o extremo superior do conjunto do exercício anterior?

   Resp.: 0 e 1, respectivamente.

10. Mesma questão para o conjunto $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \ldots$

    Resp.: $\frac{1}{5}$ e 1, respectivamente

11. Dar as expressões dos têrmos gerais das sucessões:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \dots$

c) $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots$

d) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$

e) $1, 0, 3, 0, 5, \dots$

Resp.: *a)* $\frac{1}{2^{n-1}}$; *b)* $\frac{n+1}{3n}$; *c)* $\frac{2n+1}{2n+3}$;

d) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; $\frac{n - n(-1)^n}{2}$.

12. Estudar a natureza das sucessões:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

b) $-1, +1, -1, +1, \dots, \cos(n\pi), \dots$

c) $1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots$

d) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, n^{(-1)^n}, \dots$

e) $0, 1+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{4}, \dots, 1+\frac{(-1)^n}{n}, \dots$

Resp.: *a)* Convergente; limite zero.

b) Oscilante; pontos-limite -1 e $+1$ (pontos de repercussão).

c) Divergente; limite $+\infty$.

d) Oscilante; pontos-limite 0 e $+\infty$.

e) Convergente; limite 1.

13. Estudar a natureza da sucessão:

$$a, a+r, a+2r, \dots, a+(n-1)r, \dots$$

cujos têrmos estão em progressão aritmética.

Resp.: 1) $r > 0$: divergente; limite $+\infty$.

2) $r = 0$: convergente; limite a (ponto de repercussão).

3) $r < 0$; divergente; limite $-\infty$.

14. Estudar a natureza da sucessão

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \quad (a > 0)$$

cujos têrmos estão em progressão geométrica.

Resp.: 1) $q > 1$: divergente; limite $+\infty$.
2) $q = 1$: convergente; limite a (ponto de repercussão).
3) $0 < q < 1$: convergente; limite 0.
4) $q = 0$: convergente; limite 0 (ponto de repercussão).
5) $-1 < q < 0$: convergente; limite 0.
6) $q = -1$: oscilante; pontos-limite a e $-a$ (pontos de repercussão).
7) $q < -1$: oscilante; pontos-limite $+\infty$ e $-\infty$.

15. Mostrar que, se a sucessão de números positivos

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

tem para limite zero, a sucessão

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n},\ \ldots$$

tem para limite $+\infty$ e recìprocamente.

16. Mostrar que, se a sucessão

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

tem um limite finito a, a sucessão

$$Ka_1,\ Ka_2,\ \ldots,\ Ka_n,\ \ldots \quad (K \text{ finito})$$

tem para limite Ka. Considerar as hipóteses $K = 0$ e $K = -1$.

17. Mostrar que, se a sucessão

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

tem para limite $+\infty$, a sucessão

$$a^{a_1}\ a^{a_2}\ \ldots,\ a^{a_n},\ \ldots \quad (a>1)$$

tem igualmente para limite $+\infty$.

CAPÍTULO II

FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

1. Variável real. Pela observação dos fenômenos físicos temos uma noção intuitiva de grandeza *variável*, isto é, aquela que pode assumir *diferentes valores*, cada um dos quais define um *estado* dessa grandeza. Por exemplo, a temperatura de uma certa porção de água, em estado líquido, pode assumir um valor qualquer, compreendido entre 0° e 100° centígrados.

Se fizermos abstração da grandeza variável, seremos levados a considerar seu *valor* como um *símbolo*, a que podemos associar cada um dos elementos de um *conjunto numérico*, denominado *domínio* ou *campo de variabilidade*. No exemplo dado acima, o conjunto de tôdas as temperaturas, compreendidas entre 0° e 100° centígrados, representa o domínio da variável *temperatura da água em estado líquido*.

Observe-se, assim, a importância da noção de *domínio* na definição de uma variável; ela precisa o conjunto de valôres que a variável pode assumir.

Assim se esclarece a definição matemática: *variável* é um símbolo que representa os elementos de um conjunto numérico, denominado seu *dominio* ou seu *campo de variabilidade*.

Se seu domínio é o conjunto dos números reais ou um qualquer de seus subconjuntos, a variável denomina-se *real*. Em face da equivalência entre o *continuum real* e o *continuum linear* **(Cap. I, n.° 13)**, podemos representar o domínio de uma variável real por um conjunto de pontos sôbre a reta orientada.

Em particular, denominam-se *variável inteira* e *variável racional* as variáveis reais, cujos domínios são, respectivamente, os conjuntos dos *inteiros* (absolutos ou relativos) e dos *racionais* (absolutos ou relativos). Por exemplo, o número de habitantes de uma cidade é uma variável inteira.

2. Conceito de função. Sejam x e y duas variáveis reais. Se a cada valor do domínio de x se pode fazer corresponder, por um processo qualquer, um e apenas um valor do domínio de y, diz-se que *y é função real unívoca* ou *uniforme* de x. Representa-se por um símbolo do tipo

$$y = f(x) \tag{1}$$

a correspondência funcional entre x e y, denominados, respectivamente, *variável independente* e *variável subordinada*.

Observe-se que a correspondência, acima definida, não é necessàriamente biunívoca, como veremos em exemplos mais adiante.

Se a cada valor do domínio de x corresponde mais de um valor do domínio de y, diz-se que y é função *multívoca* ou *multiforme* de x.

Salvo indicação expressa em contrário, utilizaremos, de agora por diante, o vocábulo *função* no sentido de *função unívoca*, acima definido.

Antes de prosseguirmos, vamos esclarecer com alguns exemplos, os conceitos dados.

Exemplo I: Suponhamos que x e y sejam variáveis inteiras e que o domínio de x seja o conjunto N dos números naturais e o de y o conjunto N_2 dos números naturais pares. A correspondência que a cada número de N associa seu *dôbro* em N_2 define uma função y de x (*) e exprime-se analìticamente pela igualdade $y = 2x$.

Nesse caso, a correspondência é biunívoca, pois a cada valor de y em N_2 corresponde um e apenas um valor de x em N, a saber, sua metade (**Cap. I, n.º 6**).

Exemplo II: Suponhamos que o domínio de x seja o conjunto R dos números reais e o domínio de y o conjunto $R^+ + 0$, formado por zero e pelos números reais positivos. A correspondência que a cada número de R associa seu *quadrado* em $R^+ + 0$ define uma função y de x, cuja expressão analítica é $y = x^2$. Tal correspondência não é, porém, biu-

(*) Por exemplo, x é o número (variável) de sócios quites de um clube, a cada um dos quais foram prometidos 2 convites para uma festa; y é o número de convites que devem ser distribuídos.

nívoca, pois a um mesmo valor de y em $R^+ + 0$ (por exemplo, 4) correspondem dois valores simétricos de x em R ($+2$ e -2).

Exemplo III: Tomemos para domínio de x o conjunto R dos números reais e para domínio de y o conjunto C, constituido de dois números reais a e b, e associemos a cada valor *racional* de x em R o número a e a cada valor *irracional* de x em R o número b. Temos, assim, definida uma função y de x, cuja correspondência não é biunívoca, pois ao número a de C corresponde a infinidade de valores racionais de R e ao número b de c a infinidade de valores irracionais de R. Êste é o exemplo clássico de DIRICHLET para ilustrar seu conceito geral de função, dado anteriormente.

3. Representação analítica de uma função. Utilizamos, sem definição, nos dois primeiros exemplos, o conceito de *representação analitica* de uma função, que nos cumpre agora esclarecer.

Se a correspondência funcional, indicada por $y = f(x)$, pode ser obtida, de modo que cada valor de y seja o resultado de um conjunto definido de operações efetuadas com o valor correspondente de x e constantes, diz-se que a função é representável analìticamente. Tais são, por exemplo, as funções:

$$y = 2x + 1 \tag{2}$$

$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 4} \tag{3}$$

$$y = \sqrt{4 - x^2} \tag{4}$$

$$y = x \log x \tag{5}$$

Observemos, entretanto, que o conceito geral de função de DIRICHLET (correspondência de dois domínios) abrange, também, as funções para as quais não há representação analítica. Assim, a temperatura registrada num ambiente pode ser considerada *função* do tempo, a natalidade num país *função* de sua prosperidade econômica, etc.

É oportuno salientar que, no século XVIII, o conceito de função estava limitado ao de função representável analìticamente. Sua primeira definição geral, devida a JOHANN BERNOULLI (1718): "quantidades compostas, de um modo qualquer, de uma grandeza variável e de constantes", aparece mais tarde, em 1748, repetida por EULER em têrmos mais claros: "função de uma quantidade variável é tôda a expressão analítica composta, de um modo qualquer, com essa quantidade variável e com números ou quantidades constantes". (*)

4. Campo de existência de uma função. *Campo de existência* ou *campo de definição* de uma função real de variável real é o conjunto de valores (reais) da variável independente a que correspondem valores reais e finitos da variável subordinada. Diz-se que a função é *definida* em seu campo de existência.

Por exemplo, o *campo de definição* da função (2) é o *continuum* real, porque, para qualquer valor real e finito de x, y é real e finito; o da função (3) é êsse domínio excetuados os pontos 2 e -2, onde a função não é finita; o da função (4) é o intervalo $[-2, +2]$, porque, para $x < -2$ ou $x > +2$, $4 - x^2$ é negativo e, portanto, y não é real; o da função (5) é o conjunto R^+ dos números reais positivos, visto que $\log x$ só é real e finito para $x > 0$ (**).

5. Classificação das funções. As funções

$$y = f(x) \tag{6}$$

representáveis analìticamente, podem ser classificadas de acôrdo com o seguinte quadro:

$$\text{FUNÇÕES}\ldots\begin{cases}\text{ALGÉBRICAS}\ldots\begin{cases}\textit{Racionais}\ldots\begin{cases}\text{Inteiras}\\\text{Fracionárias}\end{cases}\\\textit{Irracionais}\end{cases}\\\text{TRANSCENDENTES}\end{cases}$$

Diz-se que a função (6) é *algébrica* quando pode ser posta sob a forma

$$F(x, y) = 0 \tag{7}$$

onde $F(x, y)$ é um polinômio racional e inteiro das variáveis x e y. Por exemplo, a função

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4y}} \tag{8}$$

(*) AMOROSO COSTA, *As idéias fundamentais da Matemática*, pág. 144.

(**) Vol. I, Cap. III, n.º 12.

é algébrica, porque pode ser posta sob a forma

$$y^4 - 2xy^2 + 4y = 0 \qquad (9)$$

Uma função não algébrica denomina-se *transcendente*. Por exemplo, é transcendente a função

$$y = x + e^x + \operatorname{sen} x \qquad (10)$$

Uma função algébrica é *racional*, se, posta sob a forma (7), o polinômio $F(x, y)$ é do primeiro grau em y. Em outras palavras, uma função algébrica é racional se pode ser posta sob a forma

$$\varphi(x)y - f(x) = 0 \qquad (11)$$

onde $f(x)$ e $\varphi(x)$ são polinômios inteiros e racionais em x. Dêsse modo, uma função racional é do tipo

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad (12)$$

ou seja, o quociente de dois polinômios inteiros e racionais em x. Se, posta sob a forma (7), o polinômio $F(x, y)$ é de grau não inferior ao segundo em relação a y, a função diz-se *irracional*. Por exemplo, a função (8) é irracional, porque o polinômio do primeiro membro de (9) é do 4.º grau em relação a y.

Se o polinômio $\varphi(x)$ se reduz a uma constante, a função racional (12) denomina-se *inteira*, pois assume a forma $y=f(x)$, onde $f(x)$ é um polinômio inteiro em x. Em caso contrário, a função racional diz-se *fracionária*.

6. Coordenadas cartesianas de um ponto. Consideremos duas retas perpendiculares, $x'x$ e $y'y$ (fig. 6), orientadas de modo que, por uma rotação de 90º da reta $x'x$ em tôrno de seu ponto O de interseção com $y'y$ e no sentido direto, o semi-eixo positivo ox coincida com o semi-eixo positivo oy. Tomemos sôbre $x'x$ e $y'y$ os segmentos iguais OU para unidade.

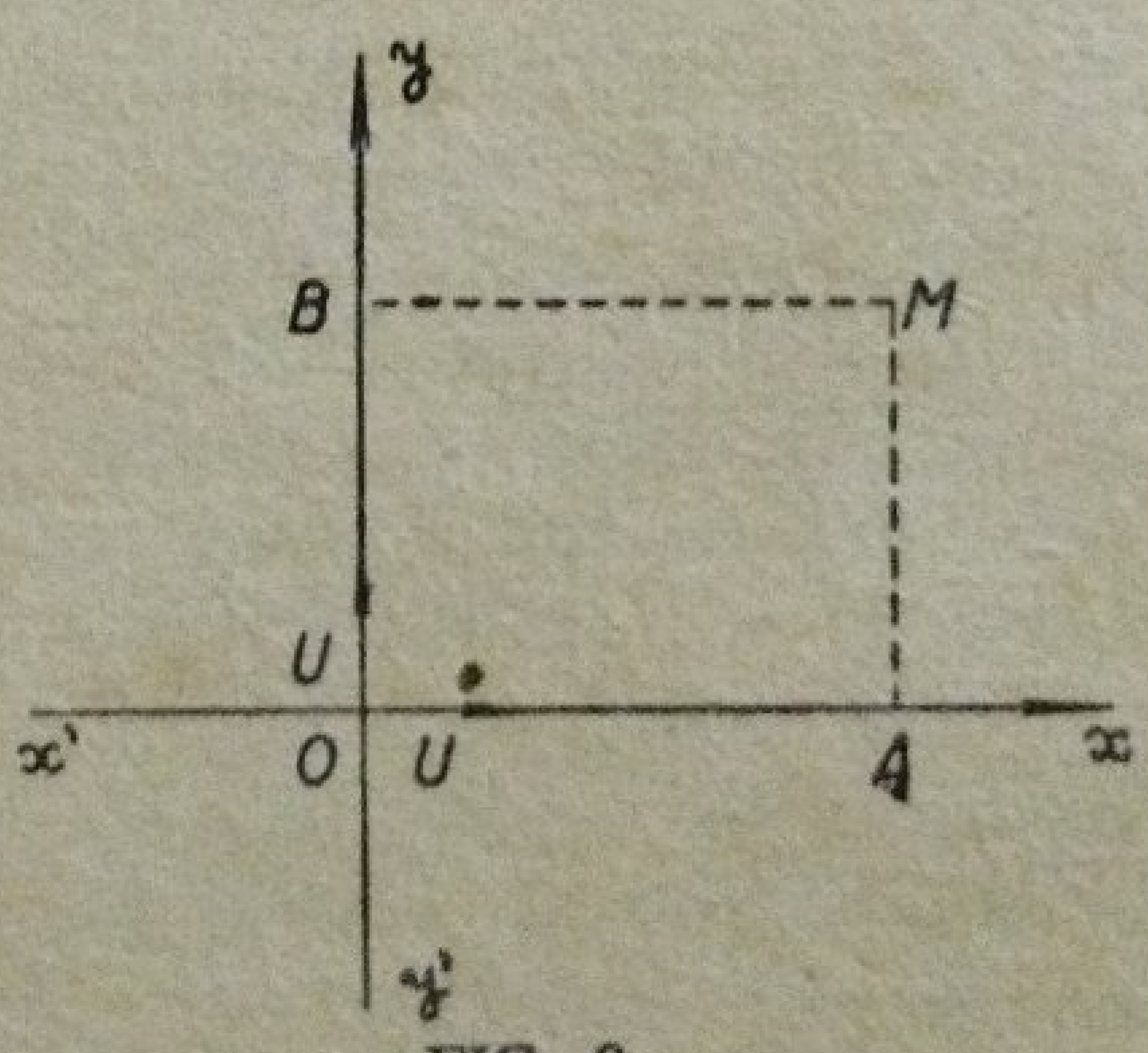

FIG. 6

Sejam a e b dois números reais quaisquer. Em virtude da equivalência entre o *continuum real* e o *continuum linear* **(Cap. I, n.º 13)**, pode-se fazer corresponder ao número a um e apenas um ponto A da reta $x'x$ e ao número b um e apenas um ponto B da reta $y'y$, sendo a e b, respectivamente, as medidas algébricas dos segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, na unidade $\overrightarrow{OU}$. Traçando de A a paralela a $y'y$ e de B a paralela a $x'x$, sua intersecção definirá um ponto M do plano. Dêste modo se faz corresponder a cada *par ordenado de número reais* (a, b) (*) um e apenas um ponto M do plano.

Recíprocamente, a cada ponto M do plano se faz corresponder um único par ordenado de números reais, a saber, as medidas algébricas dos segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, determinados sôbre $x'x$ e $y'y$, respectivamente, pelas paralelas e $y'y$ e a $x'x$, tiradas de M.

Dêste modo se estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos M de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais a e b, denominados *coordenadas cartesianas* do ponto M. Os números a e b chamam-se, respectivamente, *abcissa* e *ordenada* do ponto M.

7. Representação gráfica de uma função. Consideremos a função real de variável real

$$y = f(x) \tag{13}$$

A correspondência funcional, definida por (13), estabelece um conjunto de pares ordenados de números reais (a, b), sendo a elementos do domínio de x e b elementos do domínio de y. Como, escolhido um sistema de eixos coordenados, a cada um dêsses pares corresponde um ponto M do plano, o conjunto de todos êsses pontos constitui o *gráfico* ou a *representação gráfica* da função.

Os gráficos de algumas funções usuais têm formas geométricas simples (linhas retas ou curvas). Já vimos, por exemplo, os gráficos da função exponencial e da função loga-

(*) *Não confundir o par ordenado* (a, b) *com intervalo aberto* (a, b) (Cap. I, n.º 15).

rítmica (**Vol. I, Cap. III**) e os das funções circulares (**Vol. II, Cap. VII**). Para melhor esclarecimento, estudemos agora os gráficos das três funções definidas no **n.º 2**. Outros exemplos serão dados oportunamente nos próximos capítulos.

8. Função de variável inteira $y = 2x$ Sendo o domínio de x o conjunto dos inteiros e o domínio de y o conjunto dos números pares, a correspondência definida por esta função, estabelece uma infinidade de pares ordenados

$$\ldots.\ (-2, -4),\ (-1, -2),\ (0,0),\ (1, 2),\ (2, 4),\ \ldots.$$

aos quais correspondem, respectivamente, os pontos

$\ldots.\ N, M, O, A, B, \ldots.$

que constituem o gráfico da função.

Se, como fizemos no Exemplo I do **n.º 2**, considerarmos como domínio de x o conjunto N dos números naturais (1, 2, 3, ...), a correspondência funcional estabelecerá o conjunto infinito de pares (1, 2), (2, 4), ... aos quais correspondem, respectivamente, os pontos A, B, ..., que constituem o gráfico da função.

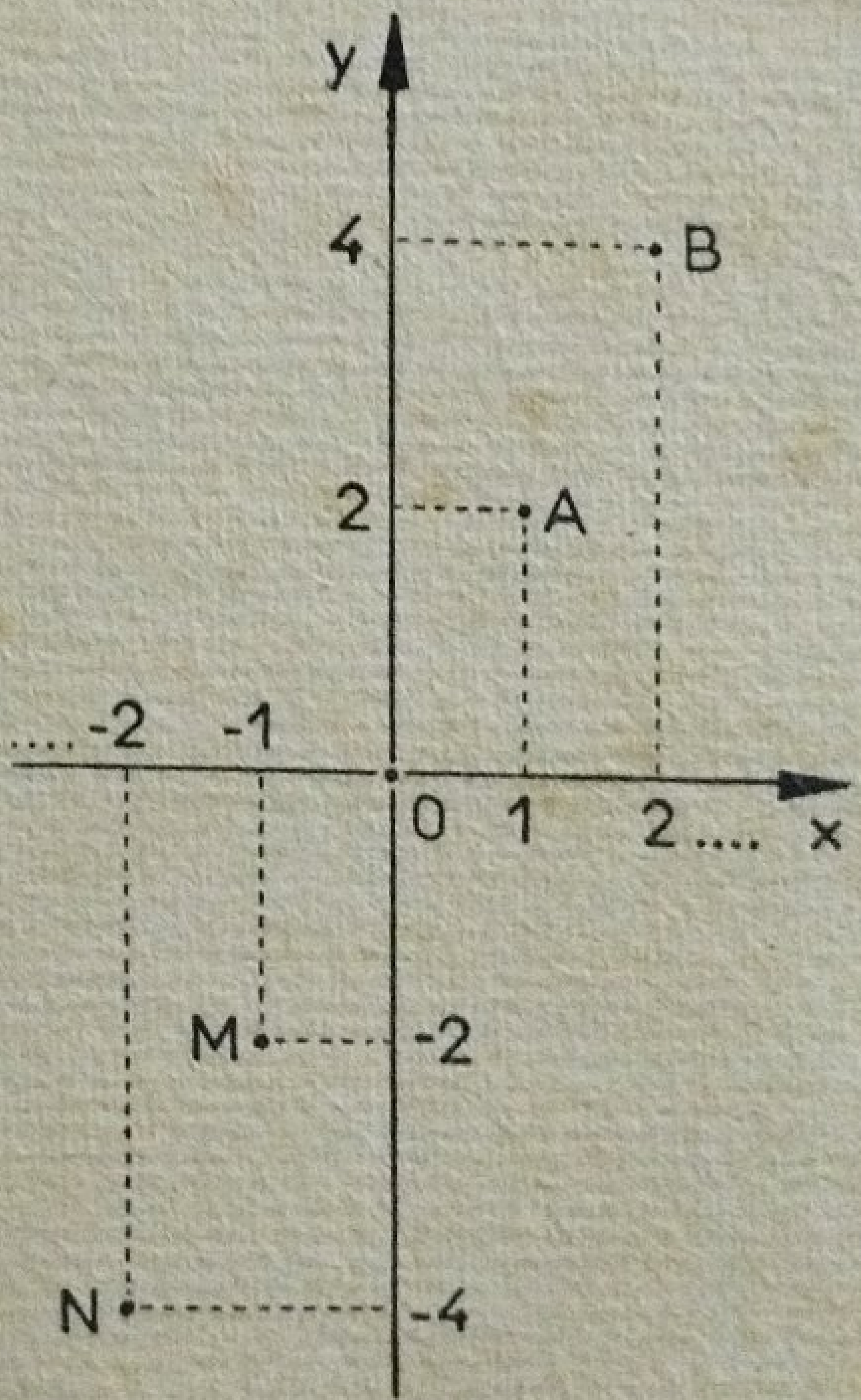

FIG. 7

9. Função $y = x^2$. Vimos no **n.º 2** que, se o domínio de x é o conjunto R dos números reais, o domínio de y é o conjunto $R^+ + 0$, formado por *zero* e pelos números reais positivos. A correspondência funcional estabelece, pois, uma infinidade não numerável de pares ordenados, aos quais correspondem os pontos da curva, indicada na fig. 8, na qual se destacam os pontos $D(-2, 4)$, $C(-1, 1)$, $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ e $B(2, 4)$.

1

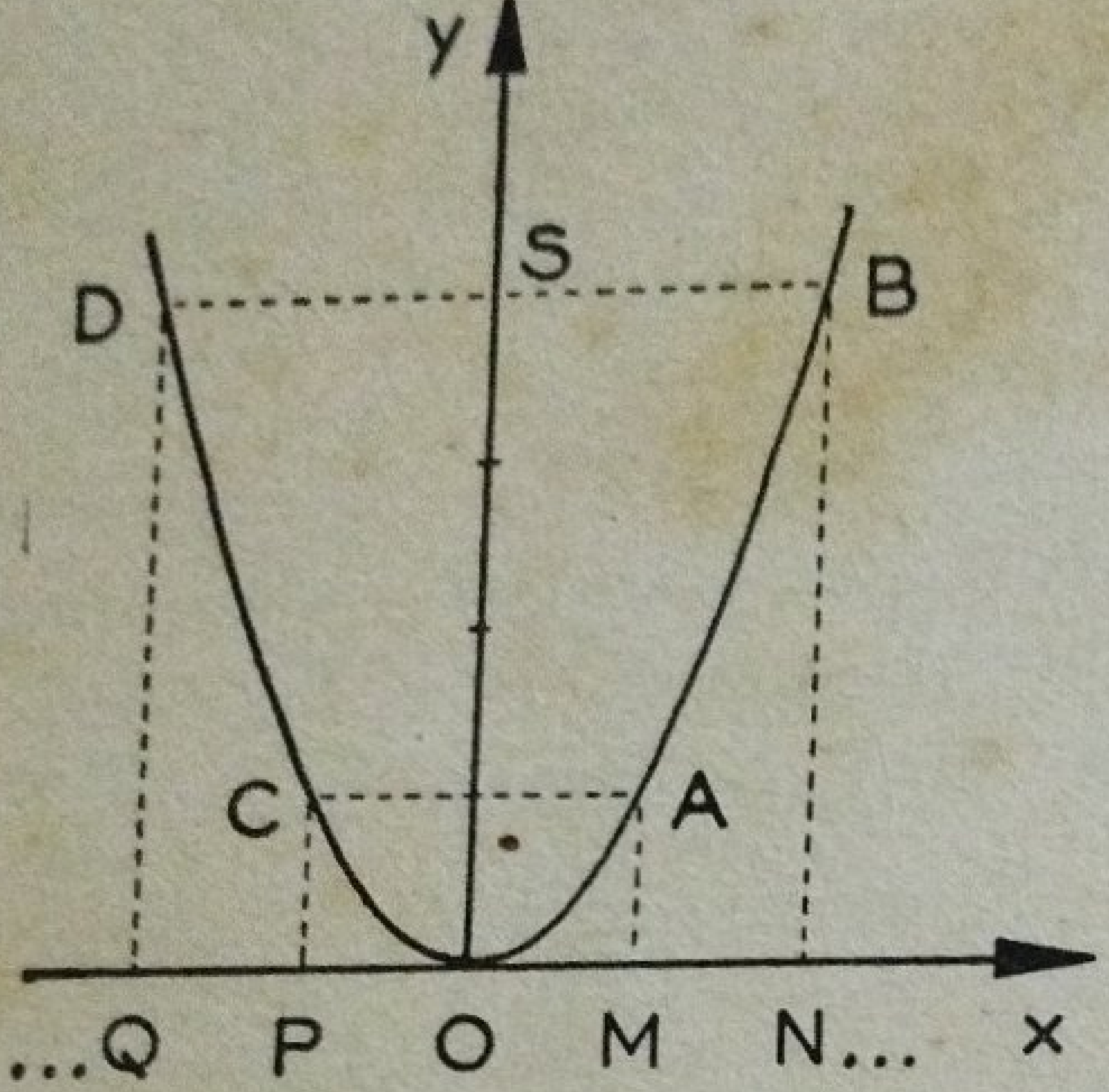

FIG. 8

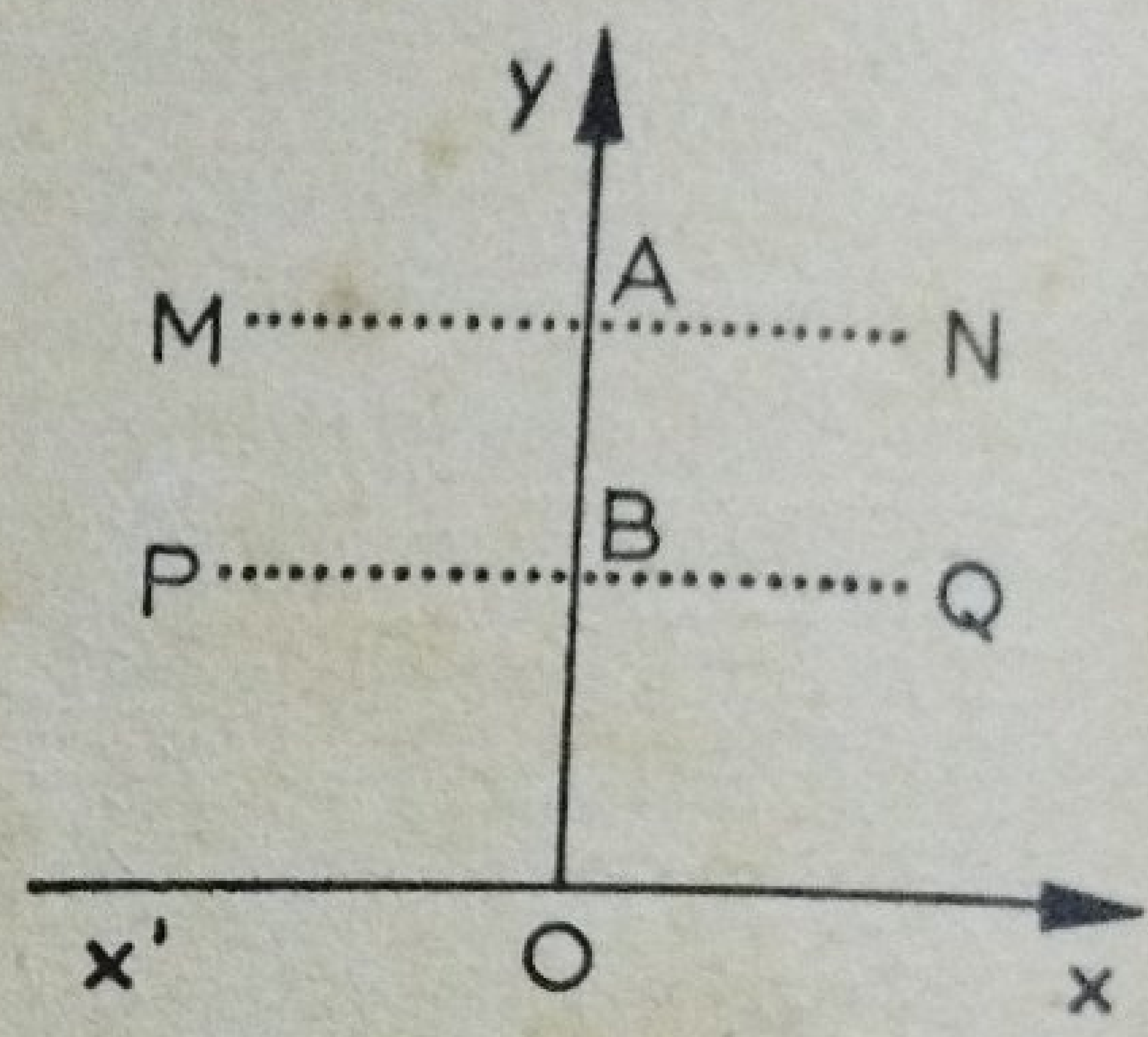

FIG. 9

Como indicamos anteriormente, a correspondência funcional não é biunívoca, pois a cada valor do domínio de y (por exemplo, a medida de $\overline{OS}$) correspondem dois valores simétricos de x (as medidas de $\overline{ON}$ e $\overline{OQ}$).

10. Função de Dirichlet. Recordemos que, nessa função, o domínio de x é o conjunto R dos números reais e que o domínio de y é o conjunto de dois números reais a e b, sendo a função assim caracterizada: a cada valor *racional* de x corresponde o valor a de y e a cada valor *irracional* de x o valor b de y. Se traçarmos as paralelas MN e PQ (fig. 9) ao eixo $x'x$ (tais que as medidas algébricas de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ sejam, respectivamente, a e b), concluiremos que o gráfico da função seria constituído de um conjunto numerável de pontos sôbre MN e um conjunto infinito não numerável de pontos sôbre PQ (*).

11. Funções monótonas. Uma função $f(x)$ é (*monótona) não decrescente* num subconjuto (em particular, num

(*) Observe o leitor que, como êsses conjuntos são densos (Cap. I, n.º 8), sua imagem sôbre a reta não têm *realmente* a aparência da figura, onde todos os pontos são nitidamente *isolados*. O objetivo dessa figura é apenas *sugerir* a representação gráfica da função de Dirichlet, que é impossível realizar com rigor, pois, também, seria imprecisa a representação por duas *retas* paralelas, visto que cada um dos conjuntos mencionados não cobre a totalidade dos pontos da reta.

intervalo) de seu campo de definição, se, quaisquer que sejam dois pontos x_1 e x_2 dêsse conjunto, tais que $x_1 < x_2$, se tenha $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Se, em particular, se tem $f(x_1) < f(x_2)$, a função denomina-se (*monótona*) *crescente*. Exemplos:

1) a função, indicada no **n.º 8**, é *crescente* em todo o seu campo de definição (conjunto dos inteiros);

2) a função, indicada no **n.º 9** é *crescente* no intervalo $[0, +\infty)$ de seu campo de definição;

3) a função $y = \mathrm{I}(x)$, onde $\mathrm{I}(x)$ significa "maior inteiro não superior a x (*), é *não decrescente* em todo o seu campo de definição (*continuum* real).

Se, na definição anterior, substituirmos a condição final por $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ e, em particular, por $f(x_1) > f(x_2)$, teremos caracterizado a função (*monótona*) *não crescente* e, em particular, a função (*monótona*) *decrescente*.

12. Função par e função ímpar. Diz-se que uma função $f(x)$, definida no campo real, é *par* se, qualquer que seja o número real x_1, se tem $f(-x_1) = f(x_1)$. Por exemplo, a função $\cos x$ é par, visto que, qualquer que seja x real, se tem $\cos(-x) = \cos x$ (**).

O gráfico de uma função par é uma figura simétrica em relação ao eixo das ordenadas. Por exemplo, o gráfico da função par $f(x) = x^2$ é a curva, simétrica em relação a êsse eixo, indicada na fig. 8.

Uma função $f(x)$, definida no campo real, é ímpar se, qualquer que seja o número real x_1, se tem $f(-x_1) = -f(x_1)$. São ímpares, por exemplo, as funções $\operatorname{sen} x$, $x^3 - 3x$, etc.

Observemos que uma função, definida no campo real, pode não ser par nem ímpar, como, por exemplo, a função $f(x) = x^3 + x^2$.

13. Função periódica. Diz-se que uma função $f(x)$, definida no campo real, é *periódica*, se existe um número real a tal que $f(x+a) = f(x)$, qualquer que seja x real. O número a

(*) Examinada, mais adiante, no Cap. III, n.º 5.

(**) Vol. II, Cap. VII, n.º 46.

denomina-se *período* da função. Por exemplo, a função sen x periódica e de período 2π, porque, qualquer que seja x real, se tem sen $(x+2\pi)$ = sen x (*).

14. Acréscimo de uma função.

Sejam a e $a+h$ dois pontos do campo de definição de uma função $y = f(x)$.

A diferença
$$f(a+h) - f(a) \tag{14}$$

denomina-se *acréscimo* da função no ponto a, relativo ao acréscimo h da variável independente. Conforme seja $f(a+h)$ superior, igual ou inferior a $f(a)$, o acréscimo da função será positivo, nulo ou negativo.

Conhecida a expressão analítica da função $f(x)$, o desenvolvimento de (14) dá a expressão geral do acréscimo da função no ponto a. Por exemplo, para a função $f(x) = x^2$ teríamos
$$f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - a^2 = (2a+h)h$$

15. Função explícita e função implícita. Diz-se que uma função y da variável x é *explícita* ou *implícita* conforme sua representação analítica seja da forma $y=f(x)$ ou $F(x, y)=0$. Por exemplo, a igualdade (9) (**n.° 5**) define uma função implícita y da variável x. Todos os outros exemplos de funções, definidas por suas expressões analíticas e dadas nêste capítulo, estão sob a forma explícita.

16. Exercicios.

1. Determinar o campo de definição de cada uma das funções seguintes:

$y = x^2 + \dfrac{x}{2}$ *Resp.:* Campo real.

$y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ *Resp.:* Intervalos $(-\infty, -1]$ e $[4, +\infty)$.

$y = \log(6 + x - x^2)$ *Resp.:* Intervalo aberto $(-2, 3)$.

$y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$ *Resp.:* Intervalo $[4, +\infty)$.

$y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}}$ *Resp.:* Intervalos $(-\infty, -4)$ e $[2, +\infty)$.

$y = \text{arc sen}\,\dfrac{x}{4}$ *Resp.:* Intervalo fechado $[-4, +4]$.

(*) Vol. II, Cap. VII, n.° 23.

$y = \log \frac{ax}{x+a}$ $(a>0)$ *Resp.*: Intervalos $(-\infty, -a)$ e $(0, +\infty)$.

2. Dada a função $y = ax + b$, sendo a e b números reais, mostrar que a um conjunto de valores de x em progressão aritmética de razão r corresponde um conjunto de valores de y em progressão aritmética de razão ar. Considerar a hipótese $a = 0$.

3. Dada a função $y = ax^m$, sendo a e m números reais não nulos, mostrar que, a um conjunto de valores de x em progressão geométrica de razão q corresponde um conjunto de valores de y em progressão geométrica de razão q^m.

4. Dada a função exponencial $y = a^x$, sendo $a > 0$, mostrar que, a um conjunto de valores de x em progressão aritmética de razão r corresponde um conjunto de valores de y em progressão geométrica de razão a^r. Considerar a hipótese $a = 1$.

5. Dados os valores:

$$\begin{array}{lll} 0{,}1^3 = 0{,}001 & 0{,}2^3 = 0{,}008 & 0{,}3^3 = 0{,}027 \\ 0{,}4^3 = 0{,}064 & 0{,}5^3 = 0{,}125 & 0{,}6^3 = 0{,}216 \\ 0{,}7^3 = 0{,}343 & 0{,}8^3 = 0{,}512 & 0{,}9^3 = 0{,}729 \\ 1^3 = 1 & 1{,}1^3 = 1{,}331 & 1{,}2^3 = 1{,}728 \\ 1{,}3^3 = 2{,}197 & 1{,}4^3 = 2{,}744 & 1{,}5^3 = 3{,}375 \end{array}$$

traçar, em papel milimetrado, o gráfico da função $y = x^3$ no intervalo

$$\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]$$

6. Dados os seguintes valores da função e^x:

x	e^x	x	e^x
0,1	1,11	— 0,1	0,90
0,2	1,22	— 0,2	0,82
0,3	1,35	— 0,3	0,74
0,4	1,49	— 0,4	0,67
0,5	1,65	— 0,5	0,61
0,6	1,82	— 0,6	0,55
0,7	2,01	— 0,7	0,50
0,8	2,23	— 0,8	0,45
0,9	2,46	— 0,9	0,41
1,0	2,72	— 1,0	0,37

traçar, em papel milimetrado, os gráficos das seguintes funções no intervalo $[-1, +1]$:

a) $y = e^x$

b) $y = e^{-x}$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (cosseno hiperbólico de x)

d) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (seno hiperbólico de x)

7. Mostrar que os gráficos das funções $y = a^x$ e $y = a^{-x}$, sendo $a > 0$, são simétricos em relação ao eixo dos y. Mostrar que isto ocorre, de um modo geral, para as funções $f(x)$ e $f(-x)$.

8. Mostrar que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

9. Calcular as expressões dos acréscimos das funções seguintes, quando x passa do valor a para o valor $a + h$ de seus campos de definição:

a) $y = x^3$ *Resp.:* $3ah\,(a+h) + h^3$

b) $y = \frac{1}{x^2}$ *Resp.:* $-\frac{h\,(2a+h)}{a^2(a+h)^2}$

c) $y = \log x$ *Resp.:* $\log\left(1 + \frac{h}{a}\right)$

d) $y = e^x$ *Resp.:* $e^a\,(e^h - 1)$

e) $y = \text{sen}\; x$ *Resp.:* $2\;\text{sen}\,\frac{h}{2}\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$

10. Dar sob forma explícita as funções:

a) $x^2 + y^2 = a^2$ *Resp.:* $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *Resp.:* $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

c) $y^2 - 2xy + 3 = 0$ *Resp.:* $y = x \pm \sqrt{x^2 - 3}$

11. Representar gràficamente, no intervalo $[-2, +2]$, a função $f(x) = I(x)$, onde $I(x)$ significa *maior inteiro não superior a* x. (*)

12. Representar gràficamente, no intervalo $[-2, +2]$, a função $f(x) = x - I(x)$, onde $I(x)$ tem o mesmo significado do exercício anterior.

13. Representar gràficamente a função, definida por

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x}{|x|} \\ f(o) = 0 \end{cases}$$

14. Mostrar que tôda função $f(x)$ pode decompor-se numa soma de uma função par e uma função ímpar.

(Sugestão: Considerar a identidade $f(x) \equiv \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.)

(*) O leitor encontrará as representações gráficas dessa função e das duas seguintes (exercícios 12 e 13) no Cap. III (n.º 5).

CAPÍTULO III

LIMITES E CONTINUIDADE

1. Limite de uma variável. Suponhamos que uma variável x assuma sucessivamente os valores

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

de um conjunto numerável de elementos de seu domínio C. Se a sucessão (1) é *convergente*, isto é, tem um limite finito a (**Cap. I, n.° 20**) diz-se que a variável x *tem para limite* a e escreve-se

$$\lim x = a \qquad \text{ou} \qquad x \to a \tag{2}$$

Por exemplo, uma variável real, que assuma sucessivamente os têrmos de uma qualquer das sucessões (9), (10) ou (11) do **Cap. I,** tem para limite *1*.

Sem nos prendermos à maneira particular pela qual a variável *se aproxima* do limite, podemos dar a seguinte

Definição : *Uma variável x tem um limite finito a, se o valor absoluto da diferença $a - x$ (ou $x - a$) pode tornar-se inferior a qualquer número positivo ε, arbitràriamente escolhido, ou*

$$|a - x| < \varepsilon \tag{3}$$

A condição (3) caracteriza, pois, o limite (2).

Se a sucessão (1) é *crescente* ou *não decrescente*, diz-se que x tende para o limite a *pela esquerda*; se (1) é *decrescente* ou *não crescente*, diz-se que x tende para o limite a *pela direita*.

Se a sucessão (1) é *divergente*, seu limite poderá ser $+\infty$ ou $-\infty$ (**Cap. I, n.° 21**). Na primeira hipótese será

$$\lim x = +\infty$$

limite êsse caracterizado pela condição de poder x tornar-se superior a qualquer número positivo N, arbitràriamente escolhido, ou

$$x > N$$

Isto equivale a dizer que todos os têrmos da sucessão (1), *a partir de uma certa ordem*, estão contidos no entôrno $(N, +\infty)$ do ponto impróprio $+\infty$ (**Cap. I, n.º 21**), ou que êste entôrno contém uma infinidade de valores de x.

Se o limite da sucessão (1) é $-\infty$, então,

$$\lim x = -\infty$$

sendo êsse limite caracterizado pela condição

$$x < -N$$

sendo N um número positivo, arbitràriamente escolhido, o que equivale a afirmar que todos os têrmos da sucessão (1), a partir de uma certa ordem estão contidos no entôrno $(-\infty, -N]$ do ponto impróprio $-\infty$.

2. Limite de uma função. Consideremos a função

$$f(x) = 2x - 2 \qquad (4)$$

e observemos seus valores quando x tende para um limite finito, como, por exemplo, 3. Admitamos que x tenda para 3, assumindo sucessivamente os valores

$$2{,}9\,;\ 2{,}99\,;\ 2{,}999\,;\ 2{,}9999\,;\ \ldots\,;$$

Então, os valores correspondentes de y constituirão a sucessão crescente

$$3{,}8\,;\ 3{,}98\,;\ 3{,}998\,;\ 3{,}9998\,;\ \ldots.$$

cujo limite é 4.

Se x tender para 3 mediante os valores

$$3{,}1\,;\ 3{,}01\,;\ 3{,}001\,;\ 3{,}0001\,;\ \ldots.$$

os valores correspondentes de y constituirão a sucessão decrescente

$$4{,}2\,;\ 4{,}02\,;\ 4{,}002\,;\ 4{,}0002\,;\ \ldots.$$

cujo limite, também, é 4.

Diz-se, então, que o limite da função (4), quando x tende para 3, é 4 e escreve-se

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4 \qquad (5)$$

Vejamos como caracterizar, com mais rigor, o limite (5).

Consideremos o valor absoluto da diferença entre o limite 4 e a função $f(x)$, isto é, $|4-(2x-2)|$ ou $|6-2x|$ e determinemos para que valores de x se tem

$$|4-f(x)| = |6-2x| < \varepsilon \qquad (6)$$

sendo ε um número positivo, arbitràriamente escolhido.

1) Se $x < 3$, deve-se ter

$$6-2x < \varepsilon \quad \text{donde} \quad x > 3-\frac{\varepsilon}{2} \qquad (7)$$

2) Se $x > 3$, deve-se ter

$$2x-6 < \varepsilon \quad \text{donde} \quad x < 3+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (8)$$

Os resultados (7) e (8) mostram que, para qualquer valor de x, situado no intervalo $\left(3-\frac{\varepsilon}{2}, 3+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, se verifica a condição (6).

Em conclusão, podemos dizer que, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um número positivo δ, tal que, para qualquer valor de x, situado no intervalo $(3-\delta, 3+\delta)$, se verifica a condição (6). Êste resultado torna-se mais compreensível à luz da fig. 10, onde a reta AB é a representação gráfica da função (4). Por êle vê-se que, para qualquer valor de x do intervalo considerado, o ponto correspondente do gráfico da função está situado no retângulo tracejado, isto é, verifica-se a condição (6).

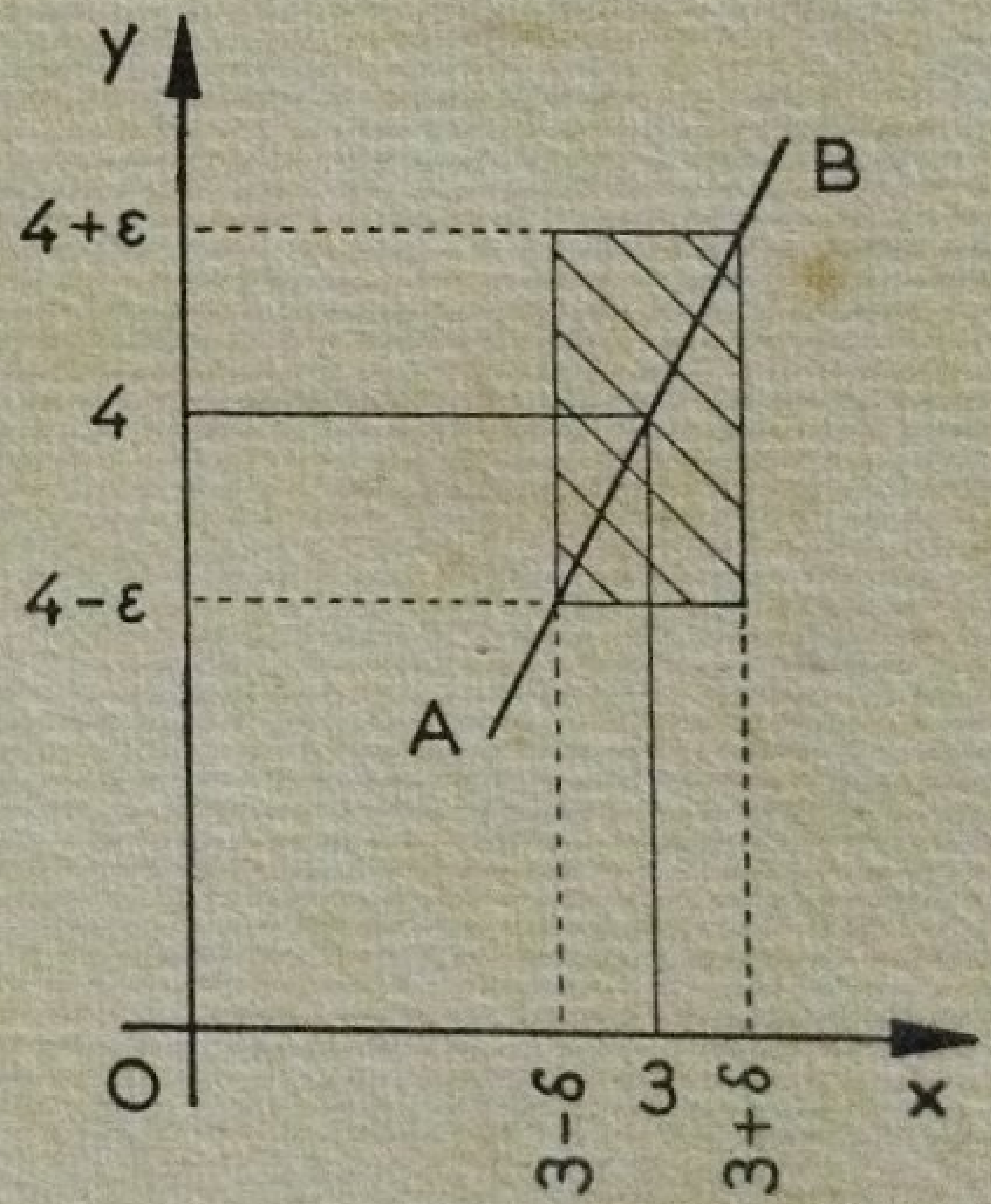

FIG. 10

O exemplo dado esclarece a seguinte

Definição: *Diz-se que uma função $f(x)$ tem um limite finito L quando x tem um limite finito a e escreve-se*

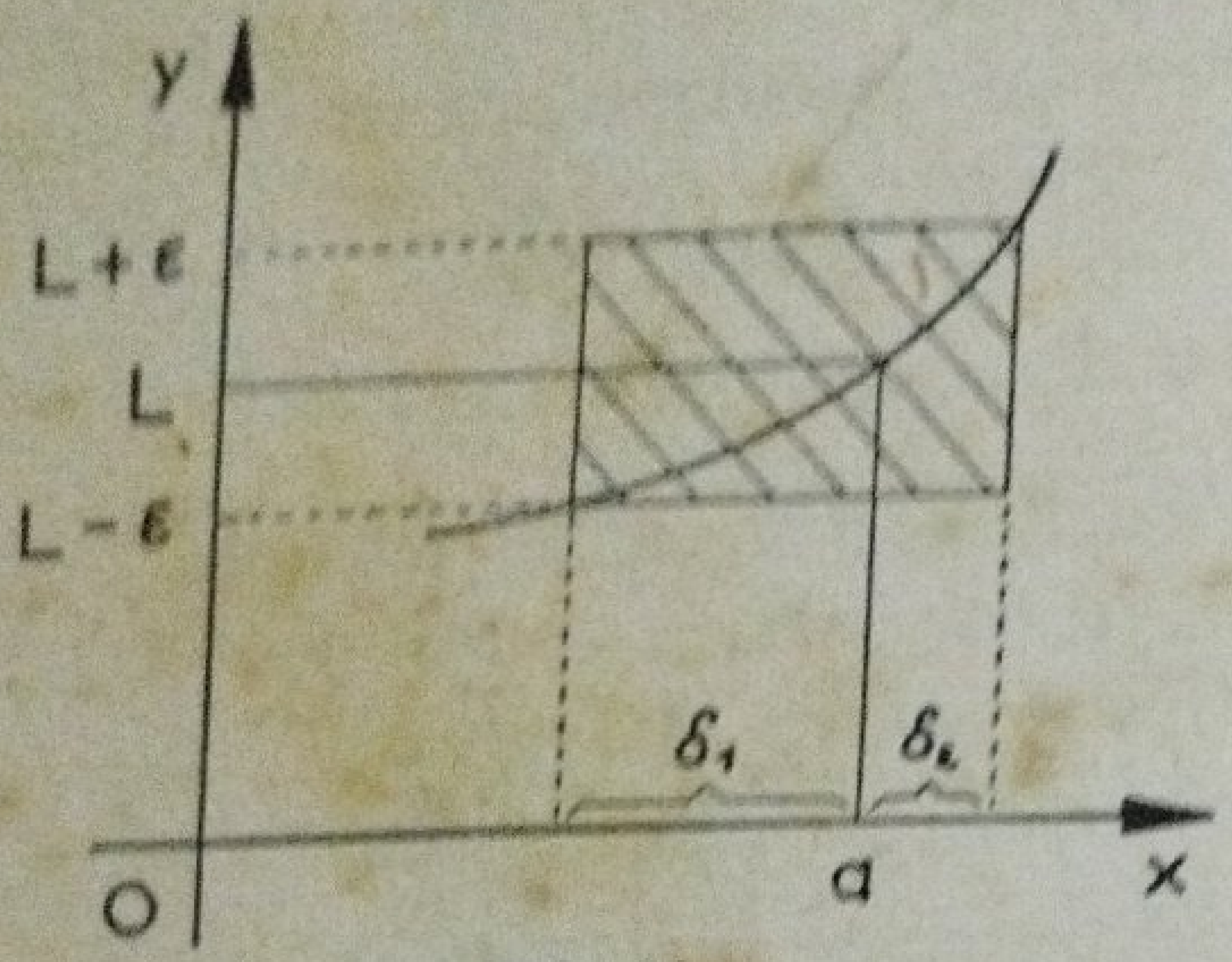

FIG. 11

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, *se, escolhido arbitràriamente um número positivo* ε, *existe um número positivo* δ *tal que, para todo valor de* x *do intervalo* $(a - \delta, \ a + \delta)$, *excluido (no máximo) o ponto* $x = a$, *se tenha* $|L - f(x)| < \varepsilon$ (*).

Em geral, a condição $|L - f(x)| < \varepsilon$ do enunciado anterior é verificada para os valores de x situados num intervalo $(a - \delta_1, \ a + \delta_2)$, sendo δ_1 e δ_2 positivos e $\delta_1 \neq \delta_2$, como sugere a fig. 11. Toma-se, então, para valor de δ na definição anterior, o menor dos números positivos δ_1 e δ_2.

Observe-se que é indiferente escrever $|L - f(x)| < \varepsilon$ ou $|f(x) - L| < \varepsilon$, visto que se consideram *valores absolutos* no primeiro membro.

3. Generalização. Vimos no **n.º 2** a definição do limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando a e L são finitos.

Vejamos, agora, como caracterizá-lo se um, pelo menos, dos números a e L é infinito. Para isso consideremos os casos seguintes.

PRIMEIRO CASO: *O limite da variável é infinito.*

Diz-se que uma função $f(x)$ tem um limite finito L quando x tende para $+\infty$ e escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um número N, tal que, para $x > N$ se tenha $|L - f(x)| < \varepsilon$.

(*) A hipótese de « x pertencer ao intervalo $(a - \delta, \ a + \delta)$ e ser diferente de a » é, também, indicado por « $x \neq a$ e tal que $|x - a| < \delta$ ». Quando estudarmos mais adiante a continuidade esclareceremos a razão porque pode ser excluído o ponto a da condição do enunciado.

Como sugere a fig. 12, fixado o número arbitrário ε, a existência do limite L implica a existência de um número N, suficientemente grande e tal que, para qualquer valor de x superior a N, o ponto correspondente do gráfico da função esteja na faixa tracejada, isto é, verifique a condição ... $| L - f(x) | < \varepsilon$.

De modo análogo define-se o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, que deixamos para exercício do leitor.

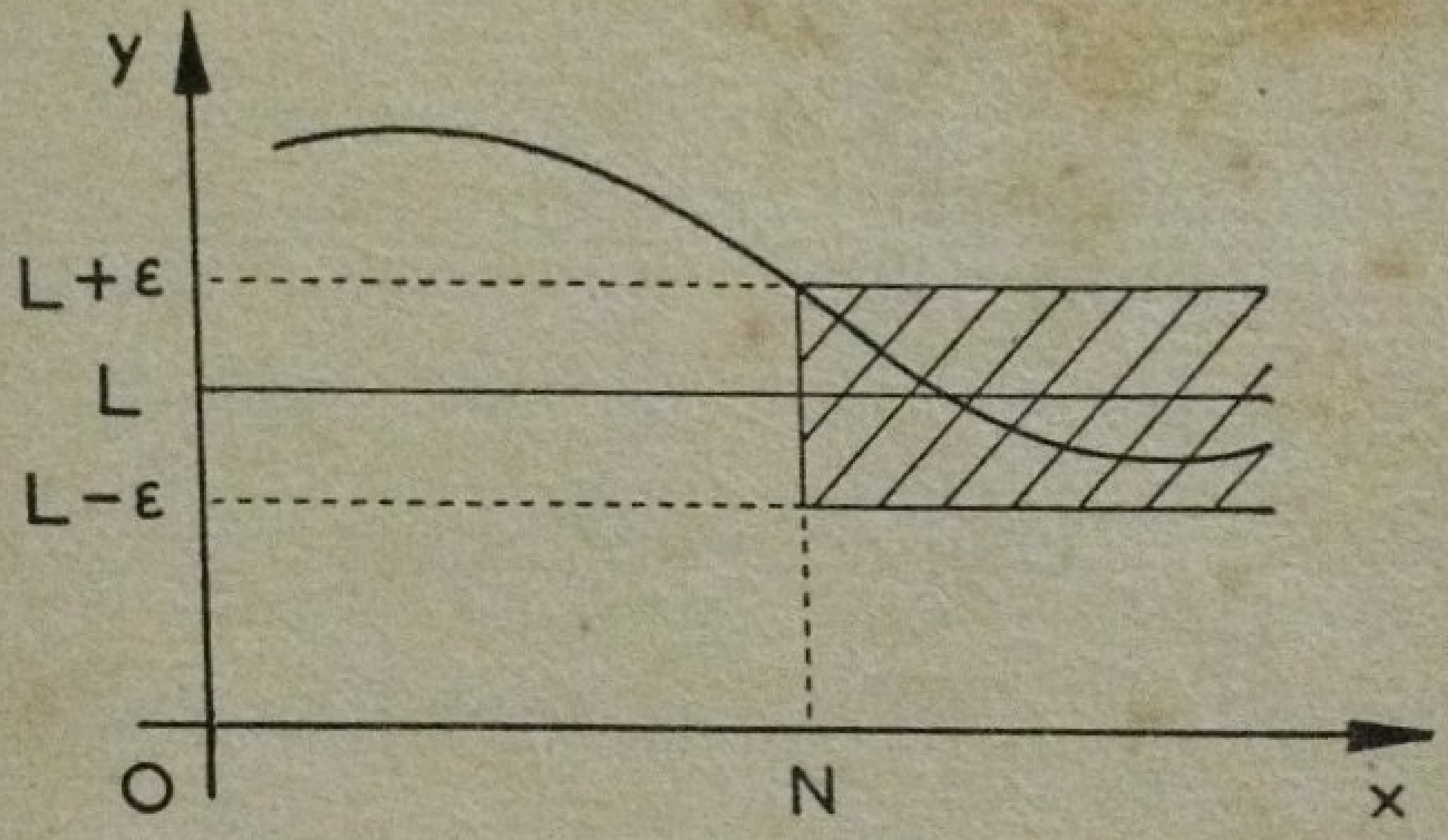

FIG. 12

Segundo caso: *O limite da função é infinito.*

Diz-se que uma função $f(x)$ tem para limite $+\infty$ quando x tem um limite finito a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se, escolhido arbitràriamente um número positivo P, existe um número positivo δ tal que, para todo valor de x do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, excluido, no máximo, o ponto $x = a$, se tenha $f(x) > P$.

Como indica a fig. 13, em geral a condição $f(x) > P$ é satisfeita para todos os valores de x do intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_2)$, sendo δ_1 e δ_2 números positivos e $\delta_1 \neq \delta_2$. Escolhido para valor de δ o menor dos números δ_1 e δ_2, da condição de estar x situado no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, resulta que o ponto correspondente do gráfico da função está situado na faixa tracejada da figura, isto é, se verifica a condição $f(x) > P$.

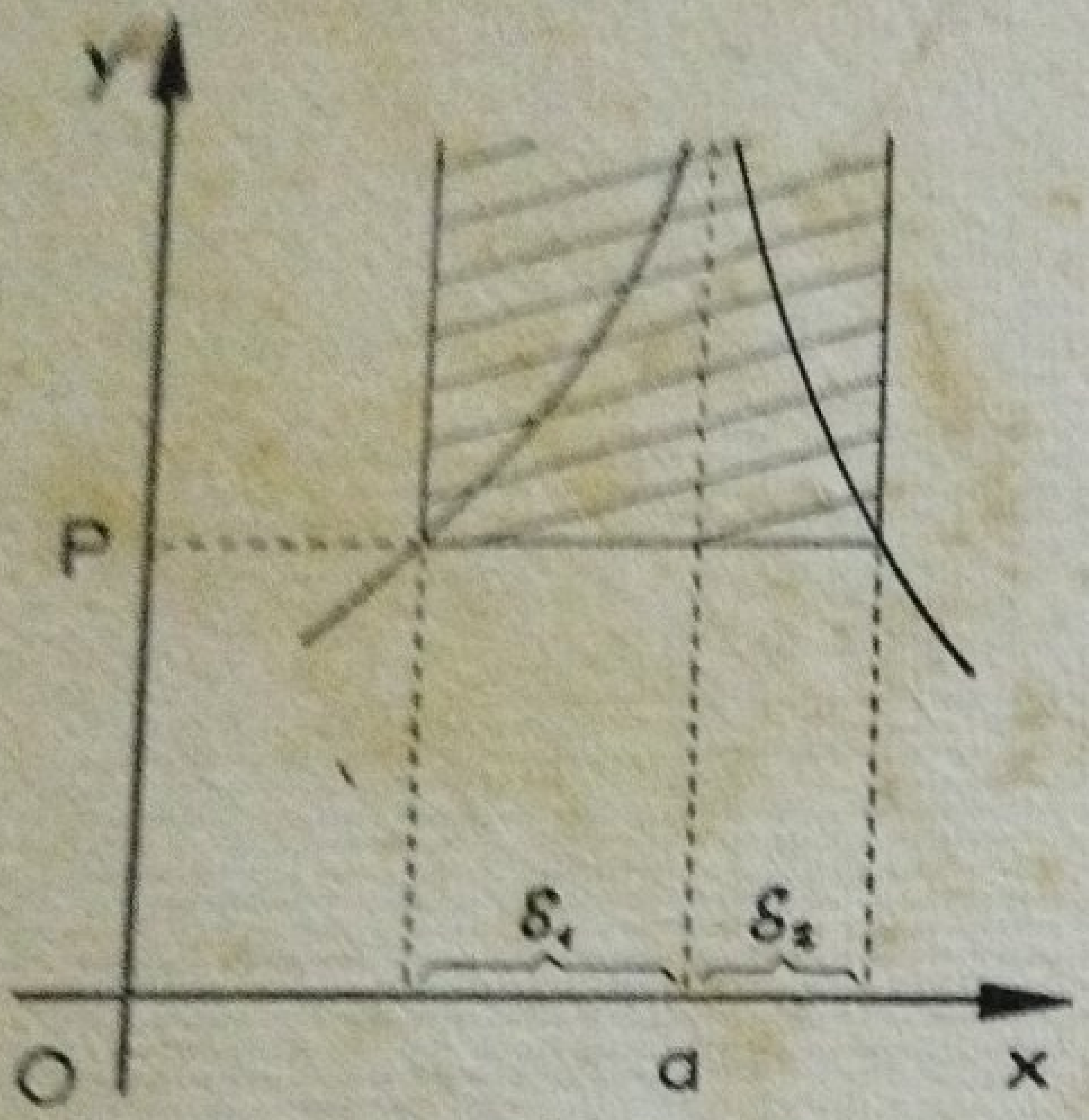

FIG. 13

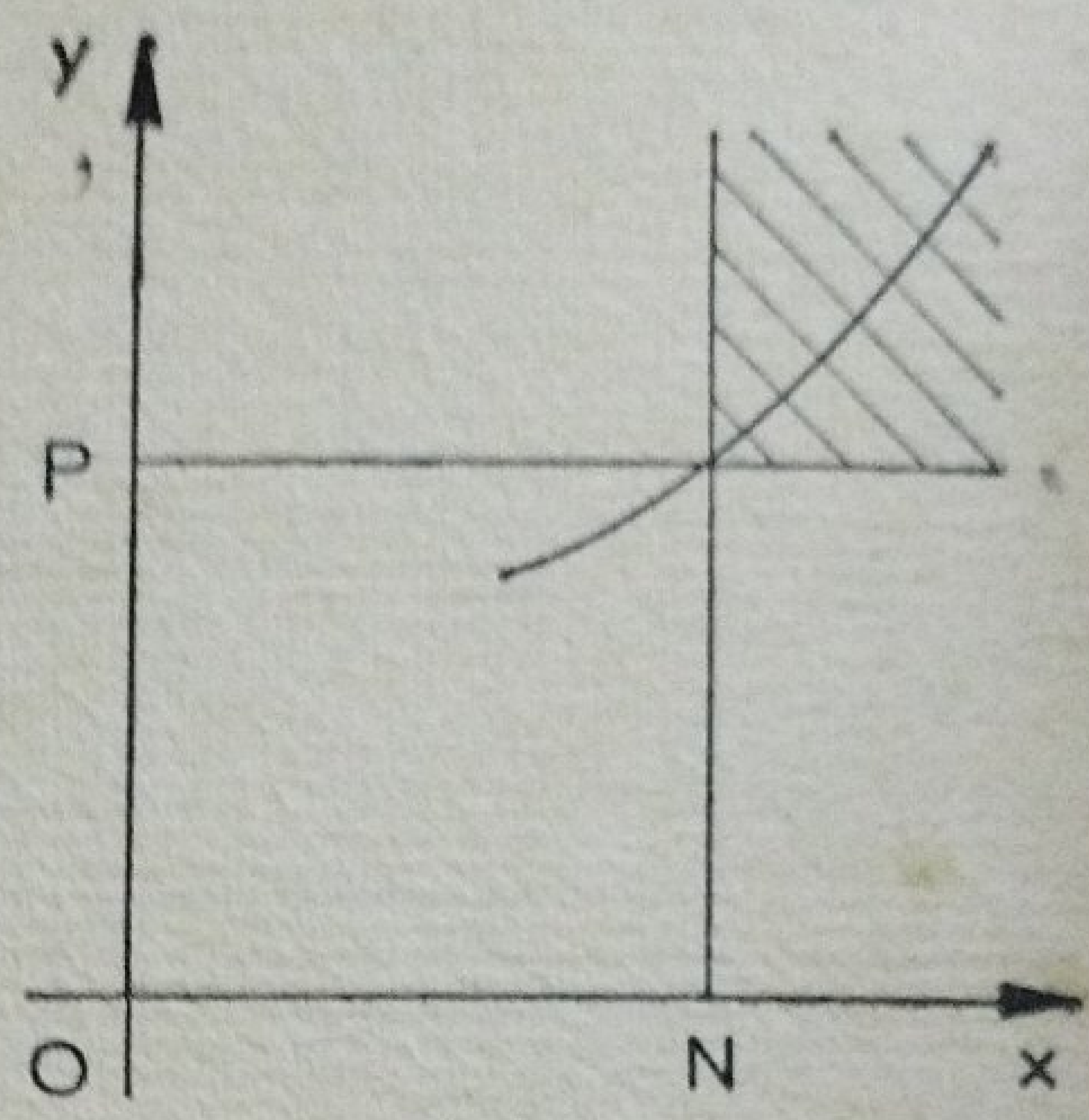

FIG. 14

De maneira análoga define-se o limite $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, trabalho que deixamos para o leitor.

Terceiro caso: *Os limites da variável e da função são infinitos.*

Diz-se que uma função $f(x)$ tem para limite $+\infty$ quando x tende para $+\infty$ e escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se, escolhido arbitràriamente um número positivo P, existe um número N tal que, para $x > N$ se tenha $f(x) > P$.

Como sugere a fig. 14, escolhido o número positivo e arbitrário P, existe um número N suficientemente grande e tal que, para todo valor de x superior a N, o ponto correspondente do gráfico da função esteja no ângulo tracejado da figura, isto é, se verifique a condição $f(x) > P$.

Definem-se, de modo análogo, os limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

tarefa que deixamos para o leitor.

4. Limites unilaterais. Até agora, ao estudarmos o limite de uma função $f(x)$ quando x tem um limite finito a, consideramos apenas o chamado *limite ordinário*, isto é, aquele que existe e é o mesmo quer x tenda para a *pela esquerda*, quer *pela direita*.

Todavia, pode ocorrer num ponto a a existência de dois limites unilaterais distintos: o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda, denominado *limite à esquerda* da função no ponto a e representado por $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ e o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita, denominado *limite à direita* da função no ponto a e representado por $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Se o limite unilateral é finito, sua definição é semelhante à do n.º 2, substituindo-se nela apenas o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ pelo intervalo $(a - \delta, a)$ quando se tratar de *limite à esquerda* e pelo intervalo $(a, a + \delta)$ no caso de *limite à direita*. Torna-se, então, desnecessário mencionar a exclusão do ponto a, visto que os dois últimos intervalos abertos não o contêm. Substituição análoga na definição do segundo caso do n.º 3 faz-se para definir um limite unilateral infinito.

Exemplo I: Consideremos, por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \tag{9}$$

e estudemos seu limite no ponto $x = 0$.

1) Suponhamos que x tenda para zero, pela direita, assumindo os valores dos têrmos de uma sucessão decrescente (de limite zero). Então, as funções $\frac{1}{x}$ e $e^{\frac{1}{x}}$ terão para limite $+\infty$ (Exercícios 15 e 17 do Cap. I). Logo, $f(x)$ tem para limite zero (Exercício 15 citado), o que nos permite escrever $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$.

2) Quando x tende para zero pela esquerda, assumindo valores negativos e decrescentes em valor absoluto, a função $e^{\frac{1}{x}}$ tem para limite zero (*), do que resulta $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 1$.

(*) Observe o leitor que, para um valor de x, como, por exemplo, $x = -0{,}1$, resulta

$$e^{\frac{1}{x}} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

Utilizando, então, as conclusões anteriores, estabelece-se o limite indicado

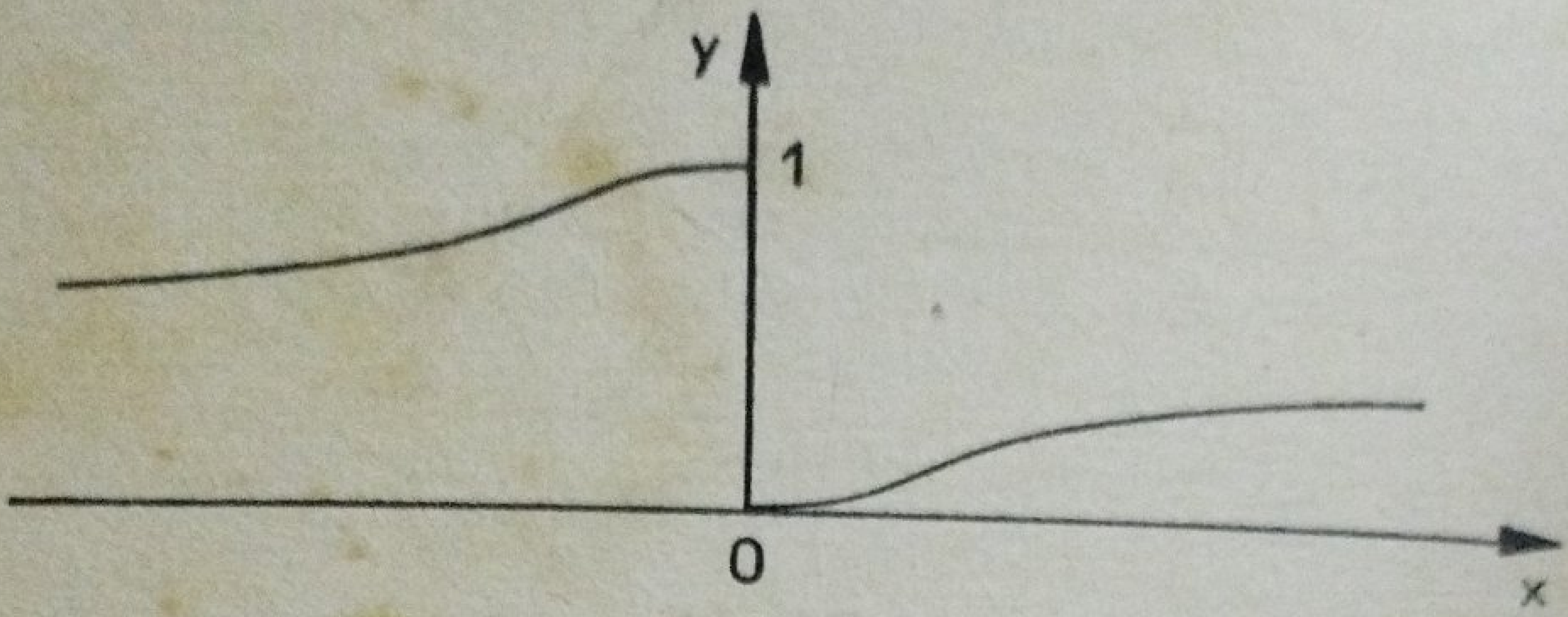

FIG. 15

Logo, a função (9) tem no ponto $x = 0$ um limite à esquerda 1 e um limite à direita 0, como se vê fàcilmente por sua representação gráfica, indicada na fig. 15.

Exemplo II: Quando estudamos a função $f(x) = tgx$ (*) vimos que, quando x tende para $\frac{\pi}{2}$ o valor da tangente *cresce até* $+\infty$ ou *decresce até* $-\infty$ conforme x se aproxime de $\frac{\pi}{2}$ por valores crescentes ou decrescentes. Utilizando, agora, o conceito esclarecido, podemos dizer que, no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, o limite à esquerda da função tgx é $+\infty$ e seu limite à direita é $-\infty$, ou

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} tgx = +\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} tgx = -\infty$$

5. Continuidade. Diz-se que uma função $f(x)$, definida num intervalo, é contínua num ponto a dêsse intervalo, se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Observem-se os três fatos essenciais que caracterizam a *continuidade num ponto* e se acham implícitos na definição anterior:

1) existe o valor $f(a)$ *real e finito*, visto que a pertence ao campo de definição da função;

(*) Vol. II, Cap. VII, n.º 25 e 26.

2) existe o limite ordinário $\lim_{x \to a} f(x)$;

3) êsse limite é igual a $f(a)$.

Por exemplo, a função $f(x) = 2x - 2$ (n.º 2) é contínua no ponto $x = 3$, porque nêsse ponto ela é definida, isto é, $f(3) = 4$ e $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Se, em vez do limite ordinário $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, existe apenas o limite à esquerda $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ ou o limite à direita $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, diz-se que a função é *contínua à esquerda* ou *à direita* do ponto a.

Uma função é contínua num intervalo $[a, b]$ se é contínua em todos os pontos dêsse intervalo (*). Por exemplo, a função $f(x) = 2x - 2$ é contínua em todo o campo real.

Não sendo verificadas as condições de continuidade num ponto, diz-se que a função é *descontinua* nêsse ponto.

Os exemplos seguintes esclarecem os conceitos dados.

Exemplo I: Consideremos a função $f(x) = I(x)$, onde $I(x)$ significa *maior inteiro não superior a* x. Como,

para $0 \leqslant x < 1$ resulta $y = 0$,
para $1 \leqslant x < 2$ resulta $y = 1$,
para $2 \leqslant x < 3$ resulta $y = 2$, etc. (**)

sua representação gráfica no intervalo $[0, +\infty)$ tem o aspecto indicado na fig. 16, onde os pontos marcados com destaque salientam que a função nos pontos 1, 2, 3, ... tem, respectivamente, os valores 1, 2, 3, ...

Em cada um dêsses pontos o limite à esquerda é diferente do limite à direita. Em face das definições dadas, conclui-se que a função $I(x)$ é *contínua à direita* (mas não à esquerda) em cada um dos pontos $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. De fato, para um qualquer dêles, como, por exemplo, $x = 2$, tem-se:

(*) Nos pontos a e b a continuidade é, respectivamente à esquerda e a à direita.

(**) No campo negativo, para $-1 \leqslant x < 0$, resulta, $y = -1$; para $-2 \leqslant x < -1$ resulta $y = -2$; etc.

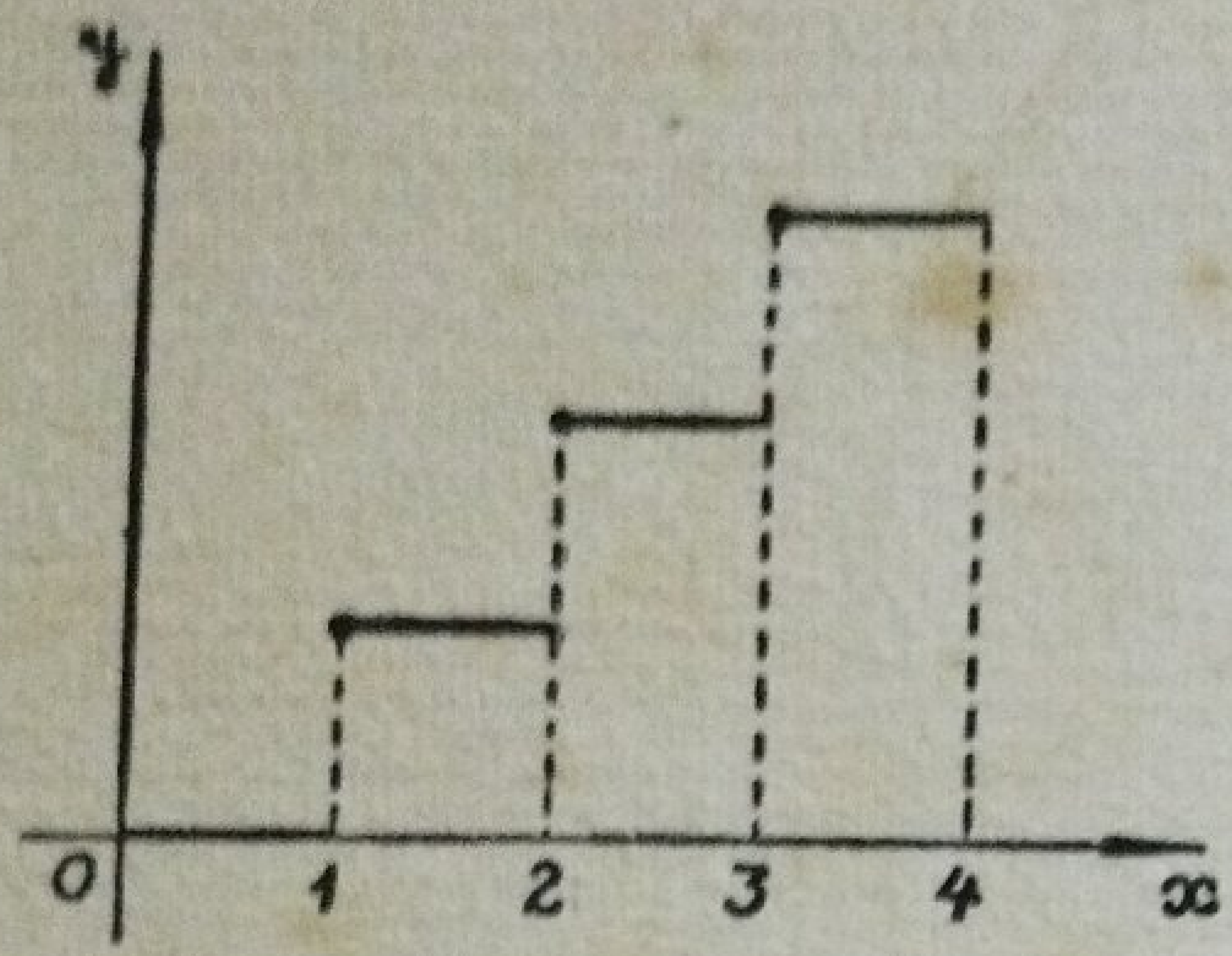

FIG. 16

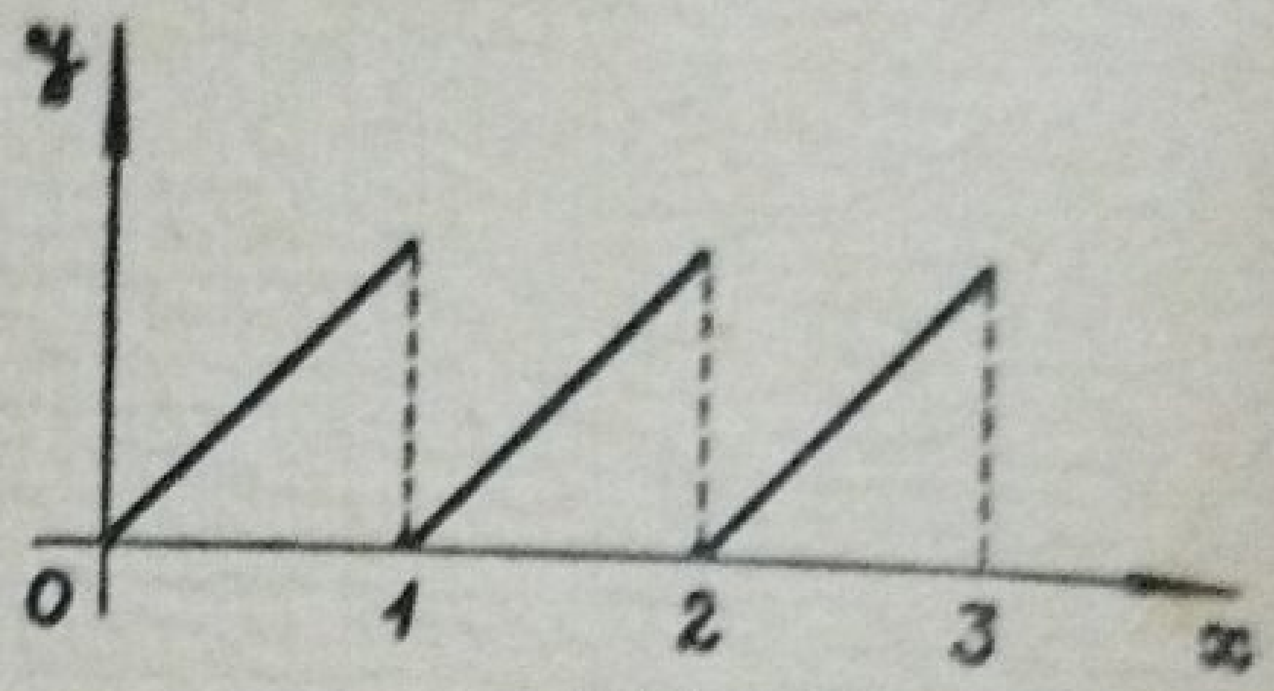

FIG. 17

Limite à esquerda : $\lim\limits_{x \to 2-} I(x) = 1 \neq I(2)$

Limite à direita : $\lim\limits_{x \to 2+} I(x) = 2 = I(2)$

Exemplo II: Anàlogamente a função $f(x) = x - I(x)$, cuja representação gráfica no intervalo $[0, +\infty)$ tem o aspecto indicado na fig. 17, é *contínua à direita* (mas não à esquerda) dos pontos $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc.

Exemplo IIII: Consideremos a função definida por

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x}{|x|} \\ f(o) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Como, para qualquer valor positivo de x é $f(x) = x + 1$ e para qualquer valor negativo de x é $f(x) = x - 1$, a representação gráfica da função (10) tem o aspecto indicado na fig. 18 : consta de duas semi-retas e de um ponto isolado (a origem). A função é descontínua à esquerda e à direita do ponto $x = 0$, visto que

$$\lim_{x \to o-} f(x) = -1 \neq f(o) \qquad \lim_{x \to o+} f(x) = 1 \neq f(o)$$

Exemplo IV: A função $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, cuja representação gráfica está indicada na fig. 19, apresenta no ponto $x = 2$ uma *descontinuidade infinita*, visto que

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2+} (x) = +\infty$$

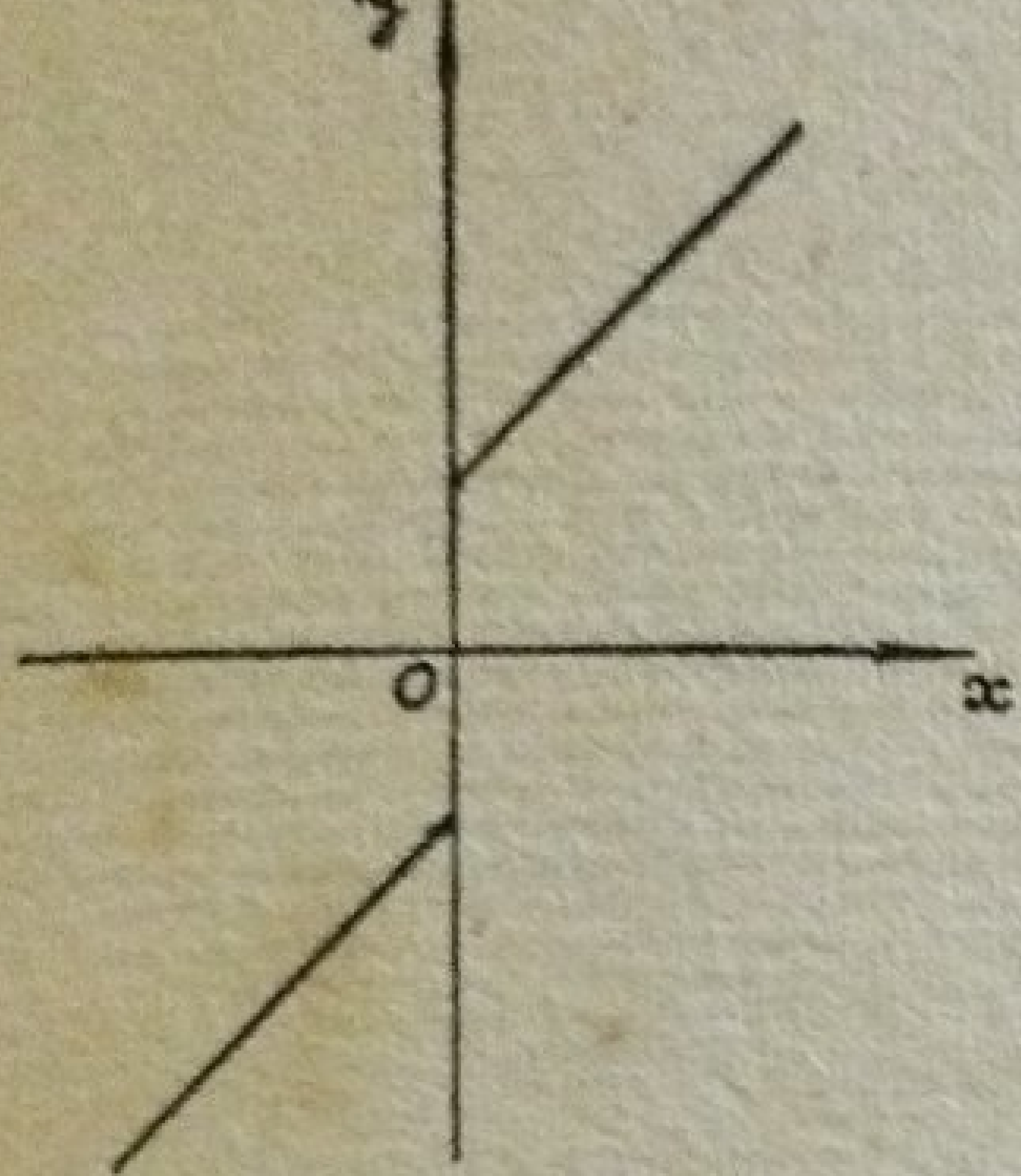

FIG. 18

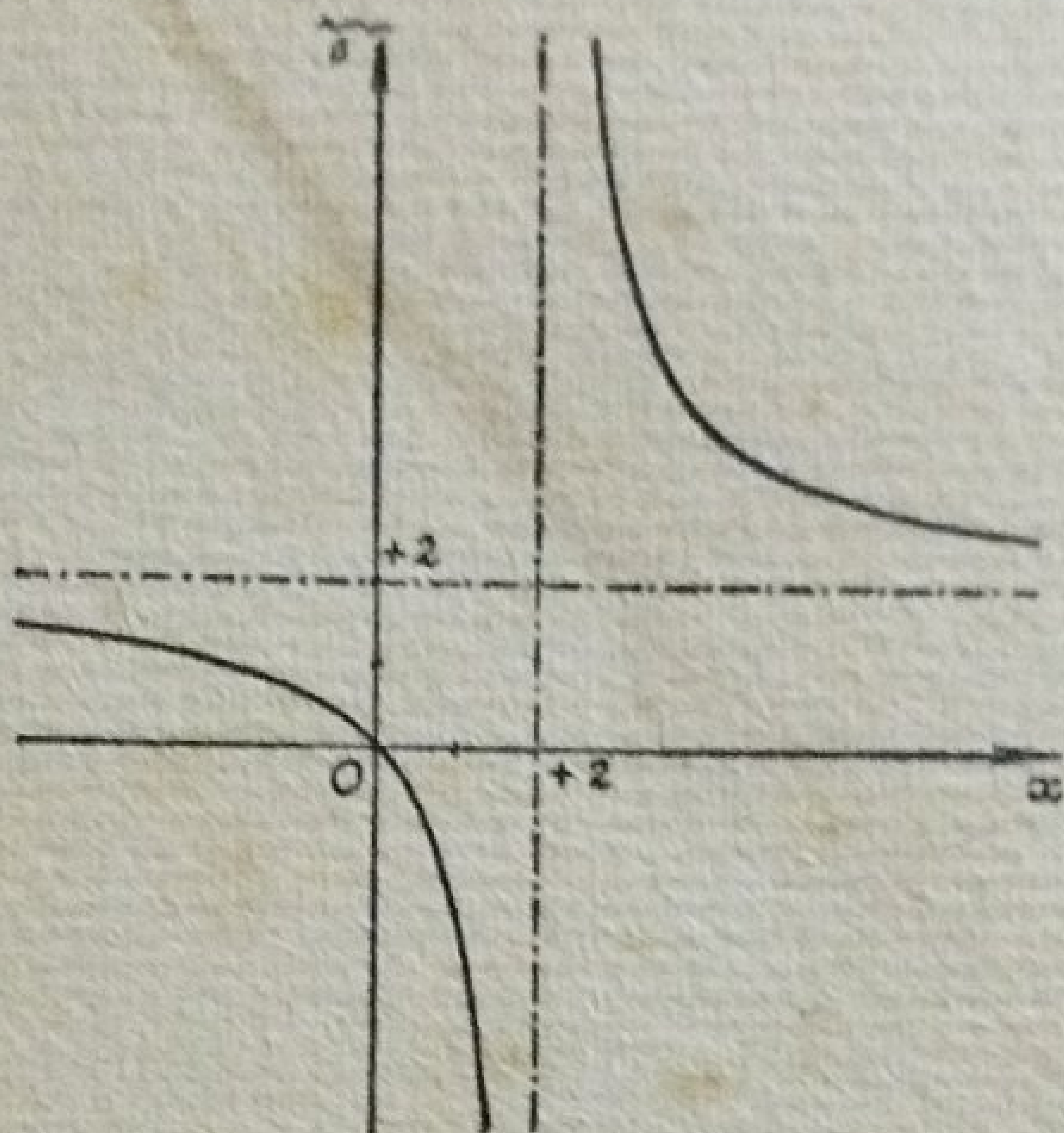

FIG. 19

Observe-se que a função não é *definida* no ponto $x = 2$ e, portanto, não satisfaz à primeira das condições de continuidade (**n.° 5**).

6. Unicidade do limite. Se uma função (unívoca) tem um limite num ponto a, êsse limite é *único*, ou, em outras palavras, uma função (unívoca) não pode ter dois limites distintos num mesmo ponto a. Vejamos, de um modo intuitivo, essa propriedade, habitualmente designada por *teorema da unicidade do limite*.

De fato, uma função $f(x)$ não poderia ter dois limites distintos L e L' num ponto $x = a$ (fig. 20), porque, escolhido convenientemente um ε positivo tal que, os intervalos $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ e $[L'-\varepsilon, L'+\varepsilon]$ (intervalos AB e CD, respectivamente) não tivessem pontos comuns, não haveria a possibilidade de, num entôrno do ponto a, os pontos representativos de *todos* os valores da função estarem simultâneamente naqueles intervalos.

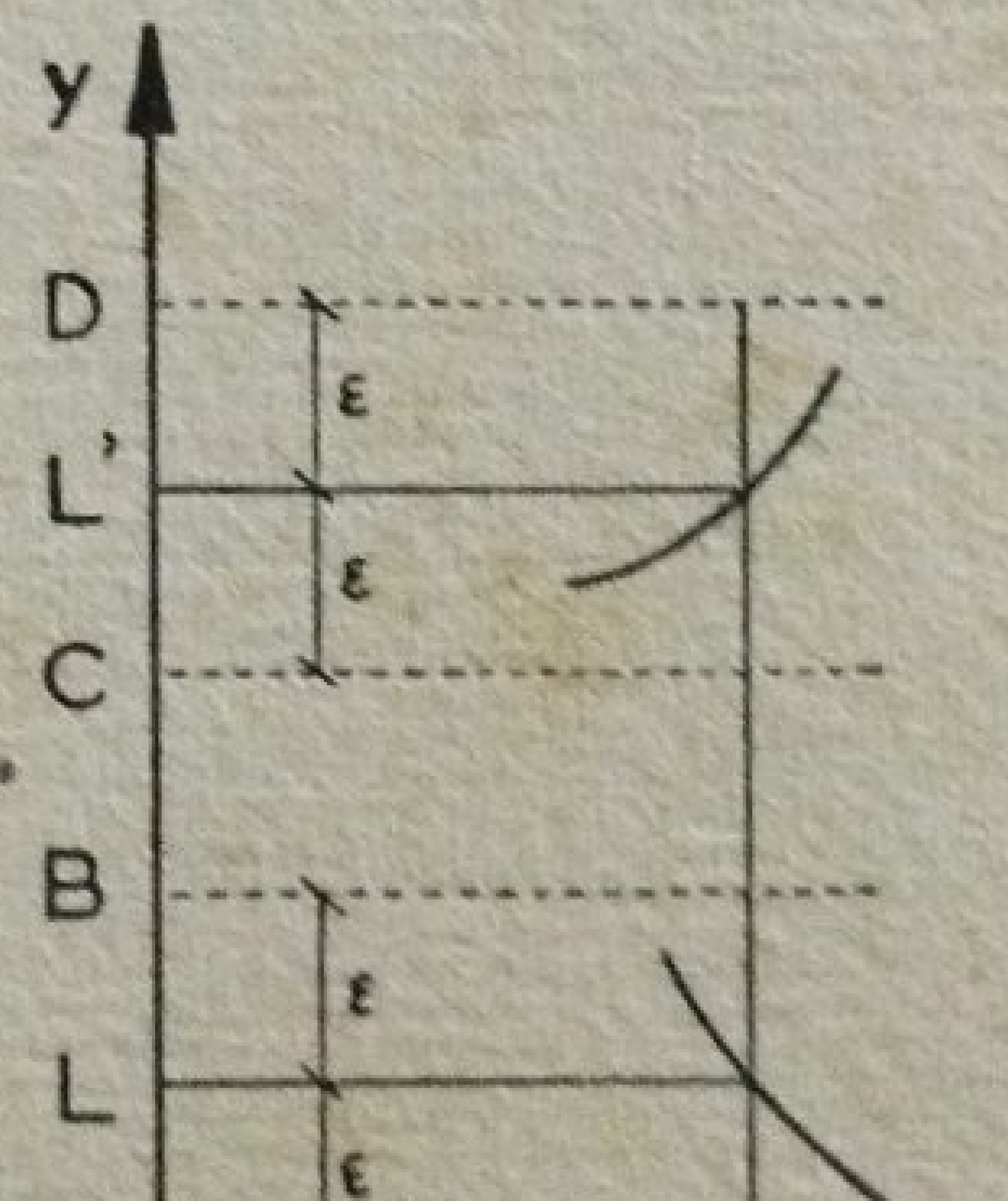

FIG. 20

7. Permanência do sinal num entôrno do limite. Suponhamos que $f(x)$ tenha um limite positivo L num ponto $x = a$ (fig. 20). Escolhido um ε positivo tal que, o número $L - \varepsilon$ seja positivo, pela condição de limite, num entôrno suficientemente pequeno do ponto a, todos os valores da função estão contidos no intervalo $[L - \varepsilon,\ L + \varepsilon]$, isto é, são *positivos*. De modo análogo, se L fôsse negativo, mostraríamos que, num entôrno suficientemente pequeno de a, todos os valores da função seriam *negativos*. Podemos, pois, enunciar o teorema:

Se uma função tem um limite não nulo num ponto, num entôrno suficientemente pequeno dêsse ponto, excluido no máximo êsse ponto (*), *a função tem o sinal do limite.*

O teorema é válido para o caso de ser $L + \infty$ ou $-\infty$ e, ainda, na hipótese do limite ser unilateral; nessa consideram-se òbviamente entornos unilaterais do ponto a.

8. Propriedades dos limites. Sejam $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ funções definidas num mesmo intervalo, tendo, num mesmo ponto a dêsse intervalo, os limites finitos L_1 e L_2, respectivamente. Verificam-se, então, as propriedades seguintes:

I. *A função* $y_1 + y_2$ tem, no ponto a, o limite $L_1 + L_2$.

De fato, pela definição de limite, dado um número ε, positivo e arbitrário, num entôrno I_1 do ponto a, tem-se

$$|\, L_1 - y_1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

e num entôrno I_2 do mesmo ponto a

$$|\, L_2 - y_2 \,| < \frac{\varepsilon}{2} \; (**) \tag{12}$$

Então, no menor dos entornos I_1 e I_2, essas condições verificam-se simultâneamente. Como

$$|\,(L_1+L_2) - (y_1+y_2)\,| = |\,(L_1 - y_1) + (L_2 - y_2)\,| \leqslant$$
$$\leqslant |\, L_1 - y_1 \,| + |\, L_2 - y_2 \,| \; (***)$$

(*) Por exemplo, a função indicada no Exemplo III, do n.º 5, cujo limite à direita no ponto $x = 0$ é $+1$, é positiva em qualquer entôrno à direita dêsse ponto, excluído, porém, êsse ponto, onde ela é nula.

(**) Observe o leitor que $\frac{\varepsilon}{2}$ é um número positivo e arbitrário em virtude de ser ε positivo e arbitrário.

(***) O módulo $|a + b|$ da soma de dois números relativos a e b é igual à soma dos módulos $|a|$ e $|b|$ se a e b são do mesmo sinal e inferior a essa soma se são de sinais contrários. Logo, de um modo geral, pode-se escrever $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

em virtude de (11) e (12), tem-se

$$|(L_1+L_2)-(y_1+y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

condição que se verifica no menor dos entornos considerados. Dela se conclui que L_1+L_2 é o limite da função y_1+y_2 no ponto a.

Verifica-se fàcilmente que o teorema se estende ao caso da soma de um número finito de funções.

II. *A função* $-y_1$ *(ou* $-y_2$*) tem, no ponto* a*, o limite* $-L_1$ *(ou* $-L_2$*).*

De fato, como $|y_1-L_1| = |-y_1-(-L_1)|$, a condição $|y_1-L_1|<\varepsilon$, que caracteriza o limite $\lim y_1 = L_1$, equivale à condição $|-y_1-(-L_1)|<\varepsilon$, que caracteriza o limite $\lim\limits_{x\to a}(-y_1)=-L_1$.

III. *A função* y_1-y_2 *tem, no ponto* a*, o limite* L_1-L_2*.*

É uma conseqüência das propriedades anteriores, visto que $y_1-y_2=y_1+(-y_2)$.

IV. *A função* $y_1 \,.\, y_2$ *tem, no ponto* a*, o limite* $L_1 \,.\, L_2$*.*

De fato, da identidade

$$y_1\, y_2 - L_1\, L_2 = y_2\,(y_1-L_1)+L_1\,(y_2-L_2)$$

resulta

$$|y_1 y_2 - L_1 L_2| \leqslant |y_2| \,.\, |y_1-L_1| + |L_1| \,.\, |y_2-L_2| \quad (13)$$

Como o limite de y_2 é L_2, num entôrno I_1 do ponto a, y_2 está compreendido entre $L_2-\varepsilon'$ e $L_2+\varepsilon'$. Então, como L_1 e L_2 são finitos, podemos escolher um número positivo M tal que $|L_1|<M$ e $|y_2|<M$ no entôrno considerado. A relação (13) fica, pois

$$|y_1\, y_2 - L_1\, L_2| < M\,(|y_1-L_1|+|y_2-L_2|) \quad (14)$$

Como os limites de y_1 e y_2 são, respectivamente, L_1 e L_2, dado um ε, positivo e arbitrário, num entôrno I_2 do ponto a, tem-se simultâneamente

$$|y_1-L_1| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad |y_2-L_2| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (15)$$

Das relações (14) e (15) conclui-se que no menor entôrno I_1 ou I_2

$$| y_1 \, y_2 - L_1 \, L_2 | < \varepsilon$$

o que prova ser $L_1 \, L_2$ o limite de $y_1 \, y_2$.

O teorema estende-se fàcilmente ao caso do produto de um número finito de funções.

V. *A função* $\frac{1}{y_1}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{y_2}\right)$ *admite, no ponto a, o limite* $\frac{1}{L_1}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{L_2}\right)$, *suposto* $L_1 \neq 0$ (ou $L_2 \neq 0$).

Pelo teorema da permanência do sinal (**n.° 7**), num entôrno I do ponto a (excluido, no máximo, êsse ponto), a função y_1 tem o sinal do limite L_1, estando compreendida num intervalo $[L_1 - \varepsilon_1, \, L_1 + \varepsilon_1]$. Logo, existe um número positivo k, tal que, no entôrno I, se tenha

$$| y_1 | > k$$

e, portanto,

$$\left| \frac{1}{y_1} - \frac{1}{L_1} \right| = \frac{| y_1 - L_1 |}{| y_1 | . | L_1 |} < \frac{| y_1 - L_1 |}{K \, | L_1 |} \qquad (16)$$

Como y_1 tem para limite L_1, escolhido arbitràriamente um número positivo ε, existe um entôrno I' de a (excluido, no máximo, o ponto a), onde se verifica a condição

$$| y_1 - L_1 | < K\varepsilon \, | L_1 | \qquad (17)$$

Logo, no menor dos entôrnos I e I', verificam-se simultâneamente as condições (16) e (17), do que resulta

$$\left| \frac{1}{y_1} - \frac{1}{L_1} \right| < \varepsilon$$

o que mostra em ser $\frac{1}{L_1}$ o limite de $\frac{1}{y_1}$.

VI. *A função* $\frac{y_1}{y_2}$ *tem, no ponto a, o limite* $\frac{L_1}{L_2}$, suposto $L_2 \neq 0$.

É uma conseqüência das propriedades IV e V.

9. Observações. As propriedades anteriores foram estabelecidas sob condições fixadas para os limites L_1 e L_2. Algumas extensões, todavia, podem ser aqui consideradas.

I. Se um apenas dos limites L_1 e L_2 é infinito, são, também, infinitos, o limite da soma $y_1 + y_2$ e o da diferença $y_1 - y_2$, sendo o sinal dêsse limite òbviamente determinado. Por exemplo, se $L_2 = +\infty$ e L_1 é finito, será, $\lim (y_1 + y_2) = +\infty$ e $\lim (y_1 - y_2) = -\infty$.

Se ambos os limites L_1 e L_2 são infinitos, a determinação do limite da soma $y_1 + y_2$ (ou da diferença $y_1 - y_2$), que pode ou não existir, requer um estudo especial que ultrapassa as possibilidades dêsse curso. Em particular, porém, se ambos os limites L_1 e L_2 são iguais a $+\infty$ (ou a $-\infty$), o limite da soma $y_1 + y_2$ é $+\infty$ (ou $-\infty$).

II. Se um dos limites L_1 é infinito e o outro é finito e não nulo, o limite do produto $y_1\, y_2$ é infinito.

III. Se $L_1 = 0$ e y_1 tende para zero pela direita (ou pela esquerda), o limite de $\dfrac{1}{y_1}$ é $+\infty$ (ou $-\infty$).

Se $L_1 = +\infty$ ou $L_1 = -\infty$, o limite de $\dfrac{1}{y_1}$ é 0.

10. Critério de confronto de limites. Sejam y_1, y_2 e y_3 funções definidas num mesmo intervalo I e suponhamos que:

1) nesse intervalo y_2 esteja compreendido entre y_1 e y_3, isto é, $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$ ou $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3$;

2) num ponto a de I, as funções y_1 e y_3 tenham o mesmo limite L.

Demonstraremos, então, que o limite de y_2 é, também, L.

Suponhamos L finito (fig. 21). Em virtude da hipótese, temos, no intervalo I,

$$y_2 = y_1 + z$$

sendo

$$|z| < |y_1 - y_3| \qquad (18)$$

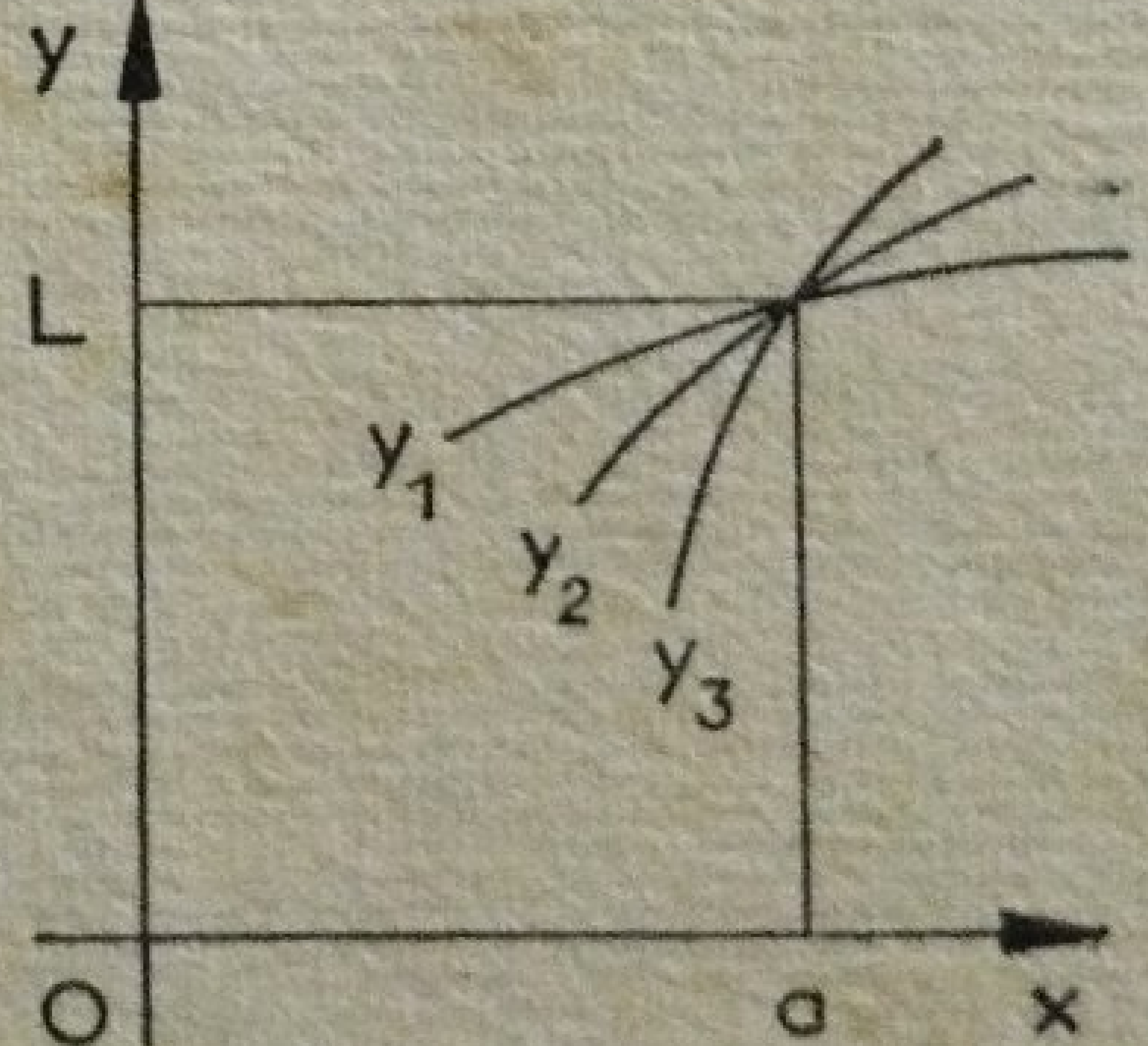

FIG. 21

Pela propriedade III do (**n.° 8**), o limite de $y_1 - y_3$ no ponto a é zero. Logo, dado um ε, positivo e arbitrário, existe um entôrno de a (excluido, no máximo, êsse ponto), onde se verifica a condição $| y_1 - y_3 | < \varepsilon$ e, portanto, em virtude de (18), a condição $| z | < \varepsilon$, o que mostra ser zero o limite de z no ponto a. Então, será nesse ponto

$$\lim y_2 = \lim (y_1 + z) = \lim y_1 + \lim z = L + 0 = L$$

Suponhamos, agora, que o limite L seja $+\infty$ (ou $-\infty$). Então, escolhido um número positivo e arbitrário P, existe um entôrno de a (excluido, no máximo, êsse ponto), onde se verificam simultâneamente as condições $y_1 > P$ e $y_3 > P$ (ou $y_1 < -P$ e $y_3 < -P$). Como y_2 está compreendido entre y_1 e y_3, resulta $y_2 > P$ (ou $y_2 < -P$), o que mostra ser $+\infty$ (ou $-\infty$) o limite de y_2.

11. Outras propriedades dos limites. Seja $y = f(x)$ uma função definida num certo intervalo, tendo num ponto a dêsse intervalo um limite L. Por processos semelhantes aos que vimos no **n.° 8,** demonstram-se as seguintes propriedades:

VII. Sendo r um número real não nulo, tem-se

$$\lim_{x \to a} y^r = L^r$$

supondo-se y^r definida num entôrno do ponto a.

VIII. Em particular, se $r = \frac{1}{n}$, sendo n um inteiro (não nulo), tem-se

$$\lim_{x \to a} y^{\frac{1}{n}} = L^{\frac{1}{n}} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{a}$$

supondo-se $y > o$ se n é par.

IX. Sendo r um número real positivo, tem-se

$$\lim_{x \to a} r^y = r^L$$

X. Sendo $y > o$, tem-se

$$\lim_{x \to a} (\log y) = \log. L$$

supondo-se a base do logaritmo um número real positivo.

12. Aplicações. Os dez teoremas, enunciados nos **nos. 9** e **11,** mostram as condições sob as quais a operação de limite é *permutável* com as operações fundamentais, a exponencial e a logarítmica. A propriedade X, por exemplo, escrita sob a forma

$$\lim_{x \to a} (\log y) = \log (\lim_{x \to a} y)$$

torna mais evidente essa permutabilidade.

Dêsse modo, o limite de uma função contínua $f(x)$ num ponto a de seu campo de definição é dado, sob as condições indicadas, pelo valor numérico $f(a)$. Por exemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + e^x + \text{sen}\, x}{x^2 + \cos x} = \frac{0 + e^0 + \text{sen}\, 0}{0 + \cos 0} = \frac{0 + 1 + 0}{0 + 1} = 1$$

O cálculo do valor numérico $f(a)$ pode, porém, recair numa *forma indeterminada*, como, por exemplo,

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{sen}\ x}{x} = \frac{0}{0}$$

Nesses casos, a determinação do limite requer um estudo especial, não exigido no programa atual. O caso particular do limite anterior será visto, porém, no **n.° 15.**

13. Limite de um polinômio inteiro e racional.

I. Consideremos o polinómio inteiro e racional

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, x + a_n \qquad (19)$$

Das propriedades dadas conclui-se que, quando x tende para um limite finito a, o limite do polinômio (19) é o valor numérico $f(a)$. Por exemlo,

$$\lim_{x \to 2} (4x^3 - 6x^2 + 1) = 4 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 1 = 9$$

II. Estudemos o limite do polinômio $f(x)$ quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Sendo $x \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, podemos escrever

$$f(x) = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}\right)$$

Quando x tende para $+\infty$ (ou para $-\infty$), $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ têm para limite zero (**n.° 9, III**). Então, o limite da expressão entre parêntesis é *1* e, portanto,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} a_0 x^n$$

o que nos permite concluir:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ se} \ldots & a_0 > 0 \\ -\infty \text{ se} \ldots & a_0 < 0 \end{cases} \\ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ se} \ldots \begin{cases} a_0 > 0 \text{ e } n \text{ par} \\ a_0 < 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \end{cases} \\ \\ -\infty \text{ se} \ldots \begin{cases} a_0 > 0 \text{ e } n \text{ ímpar} \\ a_0 < 0 \text{ e } n \text{ par} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

14. Limite de uma função racional.

I. Consideremos a função racional

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{20}$$

onde $f(x)$ e $\varphi(x)$ são polinômios inteiros e racionais em x. Pelas propriedades citadas, seu limite quando x tem um limite finito a, é $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$, suposto $\varphi(a) \neq 0$. Por exemplo,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 6x}{x^3 - 4} = \frac{1 - 6}{-1 - 4} = 1$$

Suponhamos, porém, $\varphi(a) = 0$. Podem ocorrer dois casos, que passaremos a considerar.

Primeiro caso: $f(a) \neq 0$. Nêsse caso, como o limite de $\frac{1}{\varphi(x)}$ é infinito (**n.° 9, III**), o limite da função (20) será infinito, isto é, a função tem, nesse ponto uma *descontinuidade infinita*. Diz-se, então, que a é um *polo* ou um *infinito* da função. Veremos alguns exemplos de tais descontinuidades no estudo da variação de uma função (**Cap. VII**).

SEGUNDO CASO: $f(a) = 0$. Nesse caso o limite apresenta-se sob a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, a que já nos referimos (**n.° 12**). Todavia, seu verdadeiro valor pode ser calculado de um modo simples.

Como $f(a) = 0$ e $\varphi(a) = 0$, $f(x)$ e $\varphi(x)$ são divisíveis por $x - a$. Dividindo, então, ambos os têrmos da fração (20) por $x - a$, obtém-se uma nova fração $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, cujo limite, $\frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$ no ponto a é o mesmo limite de (20). Se ocorrer, ainda, $f_1(a) = 0$ e $\varphi_1(a) = 0$, procede-se de modo análogo com essa fração e assim por diante.

Seja, por exemplo, calcular o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{7x^2 - 14x + 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \tag{21}$$

A substituição de x pelo seu limite *1* na fração acima dá a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Dividindo-se ambos os têrmos da fração (21) por $x - 1$, obtém-se a fração $\frac{7x - 7}{x^2 - 3x + 2}$, que assume, ainda, a forma $\frac{0}{0}$ quando nela se substitui x por *1*. Dividindo-se ambos os seus têrmos por $x - 1$, obtém-se $\frac{7}{x - 2}$, cujo limite no ponto $x = 1$ é $\frac{7}{1 - 2}$ ou -7. Conclui-se, então, que o limite da função (21), no ponto $x = 1$, é -7.

II. Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_o x^p + b_1 x^{p-1} + \dots + b_{p-1} x + b_p} \tag{22}$$

e calculemos seu limite quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$.

Supondo a_0, b_0 e x não nulos, podemos escrever

$$f(x) = \frac{a_o x^n}{b_o x^p} \cdot \frac{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_n}{a_o} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_p}{b_0} \cdot \frac{1}{x^p}} \tag{23}$$

Quando x tende para $+\infty$ (ou para $-\infty$), a segunda fração de (23) tem para limite 1, do que resulta

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_o x^n}{b_o x^p}$$

Temos, então, três casos a considerar:

1.º) $n = p$. O limite será (quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_o x^n}{b_o x^n} = \frac{a_o}{b_o}$$

2.º) $n > p$. Nesse caso teremos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_o x^{n-p}}{b_o}$$

e, portanto, conforme o caso,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_o b_o > 0 \ (*) \\ -\infty & \text{se } a_o b_o < 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \begin{cases} \text{se } a_o b_o > 0 \text{ e } n - p \text{ é par} \\ \text{se } a_o b_o < 0 \text{ e } n - p \text{ é ímpar} \end{cases} \\ -\infty \begin{cases} \text{se } a_o b_o > 0 \text{ e } n - p \text{ é ímpar} \\ \text{se } a_o b_o < 0 \text{ e } n - p \text{ é par} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

3.º) $n < p$. Nesse caso, temos, quer x tenda para $+\infty$, quer para $-\infty$,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_o}{b_o x^{p-n}} = 0$$

Exemplos :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5x}{-4x^3 + 2} = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + 5x^2}{3x^2 + 2x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{4 - x} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^3 + 4} = 0$$

15. Limite de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ quando $x \to o$. Como a função $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é par, isto é, não se altera seu valor quando se substitui x por $-x$, podemos na demonstração seguinte, supor x positivo.

(*) O produto $a_o b_o$ ser *positivo* ou *negativo* indica serem a_o e b_o, respectivamente *do mesmo sinal* ou *de sinais contrários*.

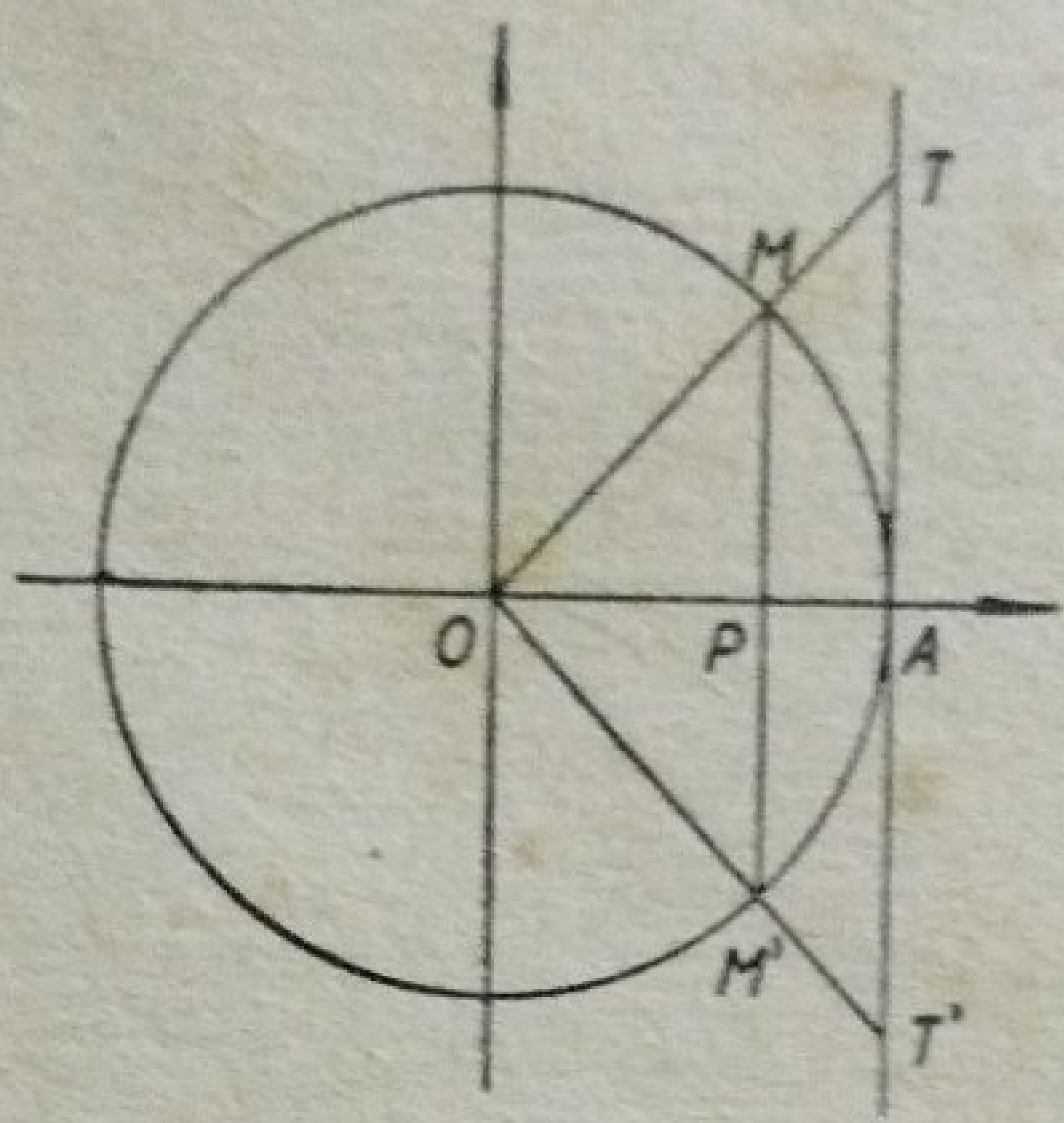

FIG. 22

Seja x a medida em radianos de um arco $\overset{\frown}{AM}$ (fig. 22) do 1.º quadrante. Sendo $\overset{\frown}{AM'}$ o arco simétrico de $\overset{\frown}{AM}$, temos, como indica a figura:

corda $MM' <$ arco $\overset{\frown}{MAM'} <$ segmento TT'

Como a medida do arco geométrico $\overset{\frown}{MAM'}$ é $2x$ e as medidas dos segmentos MM' e TT', tomado o raio OA para unidade, são, respectivamente, $2 \text{ sen } x$ e $2\, tg x$ (*), da dupla desigualdade anterior resulta

$$2 \text{ sen } x < 2x < 2 \text{ tg} x$$

Dividindo todos os seus membros pela quantidade positiva $2 \text{ sen } x$ (**), obtemos

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

ou

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Como *cos* x tem para limite 1, quando $x \to 0+$, resulta (n.º 10)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Demonstramos assim o *limite à direita* da função considerada no ponto $x = 0$. Como, porém, essa função é par, isto é, $\dfrac{\text{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\text{sen } x}{x}$, conclui-se que seu *limite à esquerda* é também 1, o que permite escrever o limite ordinário

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad (24)$$

(*) Vol. II, Cap. VII.

(**) Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *sen* x é positivo (Vol. II, Cap. VII, n.º 22).

16. Número e. Outro limite importante a considerar é o limite da função $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Como sua demonstração (rigorosa e completa) é, a nosso ver, extremamente fastidiosa para o estudante de curso colegial, limitamo-nos a indicar o resultado

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828 \ldots$$

isto é, que o limite considerado é um número irracional, usualmente designado pela letra e, cujo valor aproximado se vê acima. O número e é a base do sistema de logaritmos neperianos (*).

Êsse limite é, também, apresentado sob a forma

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

17. Exercício. *Calcular o limite da função* $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$ *quando x tende para zero.*

RESOLUÇÃO: Com a substituição de x por seu limite zero recai-se na forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Tomemos, então, outro caminho. Fazendo, na expressão da função, as substituições (**)

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

obtemos, após a simplificação

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{x \cos \frac{x}{2}}$$

(*) Vol I. Cap. III, n.º 11.

(**) Vol. II, Cap. VIII, números 14 e 15.

Temos, então,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

18. Exercício. *Calcular o limite, quando $x \to 0$, da função univoca*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+4}}{2x}$$

na qual os radicais são considerados em seu valor aritmético.

RESOLUÇÃO: Com a substituição de x por seu limite zero, recai-se na forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Multiplicando, então, ambos os têrmos da fração por $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+4}$ e simplificando a fração obtida, temos

$$f(x) = \frac{1}{2[\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+4}]}$$

donde resulta

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2[\sqrt{4} + \sqrt{4}]} = \frac{1}{8}$$

19. Exercício. *Calcular o limite* $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$, *sendo m inteiro e positivo.*

RESOLUÇÃO: Como a substituição de x por a nos leva à forma $\frac{0}{0}$, efetuando a divisão de $x^m - a^m$ por $x - a$, obtemos

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim_{x \to a} [x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}] =$$

$$= a^{m-1} + a^{m-1} + \ldots + a^{m-1} = ma^{m-1}$$

20. Exercícios. *Calcular o limite da função*

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^6 - 3} + \sqrt[3]{x^2 + 2x}}{\sqrt{4x^3 + 1}} \qquad (25)$$

quando $x \to +\infty$, tomando-se com sinal positivo os radicais de índice par:

Resolução: Como os polinômios sob radical têm para limite $+\infty$ (**n.º 13, II**) a expressão apresenta a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Dividamos, então, ambos os têrmos da função (25) por x^n. Obtemos

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x^{6-4n} - 3x^{-4n}} + \sqrt[3]{x^{2-3n} + 2x^{1-3n}}}{\sqrt{4x^{3-2n} + x^{-2n}}}$$

Escolhamos n de modo que os maiores expoentes sob radical sejam, no máximo, iguais a zero, ou

$$6 - 4n \leqslant 0 \qquad 2 - 3n \leqslant 0 \qquad 3 - 2n \leqslant 0$$

donde resultam, respectivamente, $n \geqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant \frac{2}{3}$ e $n \geqslant \frac{3}{2}$. Fazendo então, $n = \frac{3}{2}$, obtemos

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{1 - 3x^{-6}} + \sqrt[3]{x^{-2,5} + 2x^{-3,5}}}{\sqrt{4 + x^{-3}}}$$

Como, sendo $p > 0$, se tem $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-p} = 0$, resulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt[4]{1} + \sqrt[3]{0}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

21. Propriedades das funções contínuas. As funções contínuas gozam de algumas propriedades importantes que passaremos a analisar.

22. Teorema da permanência do sinal. *Se uma função $f(x)$ é contínua num ponto a de seu campo de existência e se $f(a) \neq 0$, existe um entôrno do ponto a no qual a função conserva o sinal de $f(a)$.*

De fato, a continuidade de $f(x)$ no ponto a implica a existência do limite, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. O teorema 6, então, decorrente do teorema sôbre a permanência do sinal num entôrno do limite (**n.º 7**).

23. Teorema da existência do zero. *Se uma função é contínua no intervalo (fechado) $[a, b]$ e se nos extremos dêsse intervalo assume valores de sinais contrários, existe pelo menos um ponto interior dêsse intervalo no qual a função é nula.*

Esta propriedade é intuitiva, pois, sendo a representação gráfica da função no intervalo $[a, b]$ uma linha AB (fig. 23), esta não poderá unir dois pontos A e B situados em semiplanos diferentes determinados pelo eixo Ox sem atravessar êste eixo (*)

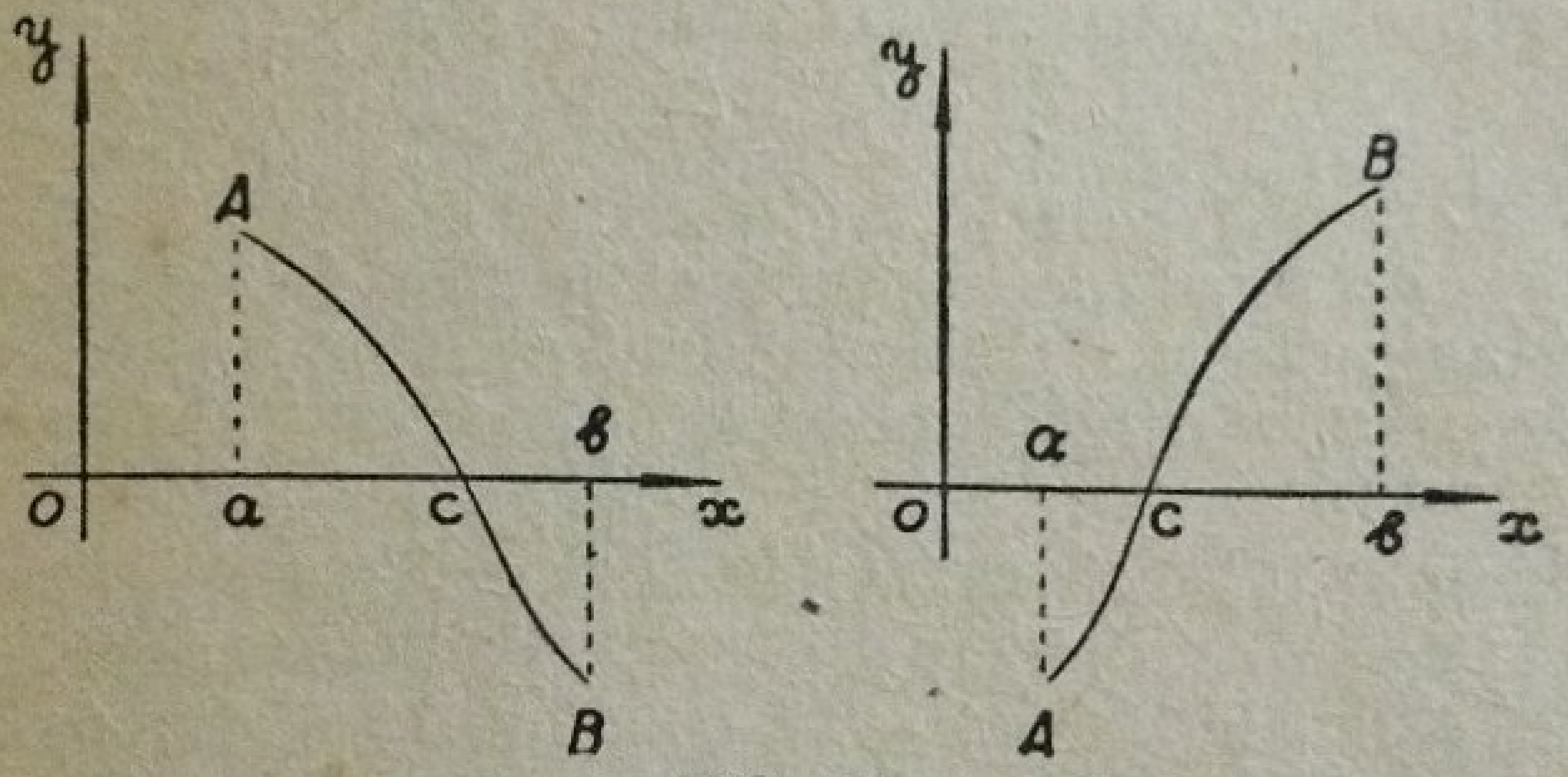

FIG. 23

Do teorema da existência do zero, resulta imediatamente o seguinte:

Uma função contínua num intervalo (fechado) $[a, b]$ assume nêsse intervalo, pelo menos uma vez, qualquer valor compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$.

24. Teorema de Weierstrass. *Toda função contínua num intervalo (fechado) $[a, b]$ admite nêle um máximo e um mínimo.*

Expliquemos, antes, o significado dos têrmos *máximo* e *mínimo*.

Consideremos uma função $f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$ e representemos por F e f, respectivamente, o extremo superior e o extremo inferior de tôdos os valores $f(x)$ nêste intervalo. Se $f(x)$ não é contínua a função pode não assumir nêsse intervalo um dos valores F ou f ou ambos. Por exemplo,

(*) Esta propriedade intuitiva pode denominar-se *postulado dos semiplanos* determinados por uma reta sôbre um plano (Vol I, Cap. IV, n.º 5).

a função $y = x - \mathrm{I}(x)$ vista no **n.º 5,** num qualquer dos intervalos $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ etc., tem para extremo superior 1, mas não atinge êsse extremo, pois, para $x = 1$, $x = 2, \ldots$ se tem $y = 0$.

Se, entretanto, a função é contínua, o teorema de WEIERSTRASS afirma que ela atinge, no intervalo $[a, b]$, os extremos F e f que se denominam, então, respectivamente, *máximo* e *mínimo* da função naquêle intervalo. (*)

25. Exercícios.

1. Mostrar que a função $f(x) = I(x) + I(-x)$, onde $I(x)$ significa *maior inteiro não superior a x*, é descontínua nos pontos que correspondem a valores inteiros (positivos ou negativos) de x e caracterizar essa descontinuidade.

   (SUGESTÃO: Mostrar que $f(x) = 0$ para qualquer valor inteiro de x e $f(x) = -1$ para qualquer valor não inteiro de x.)

   Resp.: Para cada valor inteiro n, tem-se
   $$f(n) = 0 \quad \lim_{x \to n+} f(x) = \lim_{x \to n-} f(x) = -1.$$

2. Estudar, na origem, a função
   $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} \\ f(o) = 0 \end{cases}$$

   Resp.: É descontínua, pois o limite à direita é $+1$ e o limite à esquerda é -1.

3. Alterar a definição da função anterior de modo que ela seja *contínua à direita* do ponto $x = 0$.

   Resp.: Basta substituir a correspondência $f(o) = 0$ por $f(o) = 1$.

Calcular os limites:

4. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{tgx}{x}$ *Resp.:* 1

5. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\operatorname{sen}(rx)}{x} \quad (r \neq 0)$ *Resp.:* r

6. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ *Resp.:* $\dfrac{1}{2}$

(*) As demonstrações dos teoremas da existência do zero e de WEIERSTRASS estão, a nosso ver, acima do nível do Curso Colegial, razão por que, preferimos suprimi-las.

7. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{tg\,(ax)}{bx}$ $(a \neq 0 \quad e \quad b \neq 0)$ *Resp.:* $\dfrac{a}{b}$

8. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x}$ *Resp.:* 2

9. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{tgx}$ *Resp.:* 2

10. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ *Resp.:* 0

11. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n inteiro e positivo) *Resp.:* n

(SUGESTÃO: Desenvolver $(1+x)^n$ pela fórmula da potência do binômio).

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^x$ (α real e não nulo) *Resp.:* e^{α}

(SUGESTÃO Fazer $x = \alpha y$ e utilizar o resultado do **n.º 16)**

13. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$ (suposto $a > 0$ se n é par) *Resp.:* $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{na}$

(SUGESTÃO: Fazer $\sqrt[n]{x} = y$ e $\sqrt[n]{a} = b$ e seguir a marcha indicada no exercício do **n.º 19**).

14. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{a}}$ (suposto $a > 0$ se um, pelo menos, dos expoentes n e p é par) *Resp.:* $\dfrac{p\sqrt[n]{a}}{n\sqrt[p]{a}}$

(SUGESTÃO: Dividir ambos os têrmos da fração por $x - a$ e utilizar o resultado do exercício anterior).

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ *Resp.:* 0

16. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ *Resp.:* 1

17. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 11x^2 + 39x - 45}{x^2 - 6x + 9}$ *Resp.:* -2

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} [+\sqrt{x^2 + 3x} - x]$ *Resp.:* $\dfrac{3}{2}$

(SUGESTÃO: Multiplicar e dividir por $+\sqrt{x^2 + 3x} + x$; dividir ambos os membros da fração resultante por x e passar ao limite.)

19. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ *Resp.:* $\dfrac{1}{12}$

20. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ *Resp.:* $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

21. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x} - 2}$ *Resp.:* $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

22. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4} - (x+2)]$ *Resp.:* -2

(Sugestão: Escrever a função sob a forma $\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ e seguir a sugestão dada no ex. 18.)

23. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt{x^3 + 5x^2}}{\sqrt{8x^3 + 2x}}$ *Resp.:* $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(Sugestão: Seguir a marcha indicada no exercício do n.º 20).

24. $\lim\limits_{a \to o} \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *Resp.:* $-\dfrac{c}{b}$

25. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$ *Resp.:* $\dfrac{3}{2}$

26. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sqrt{x + a} - \sqrt{a}}{x}$ *Resp.:* $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

CAPÍTULO IV

ESTUDO ANALÍTICO DA LINHA RETA

1. Distância entre dois pontos. Sejam $M(x_1, y_1)$ e $N(x_1, y_1)$ dois pontos quaisqüer do plano (fig. 24), sendo suas coordenadas cartesianas referidas aos eixos $\overrightarrow{ox}$ e $\overrightarrow{oy}$ indicados na figura, ou

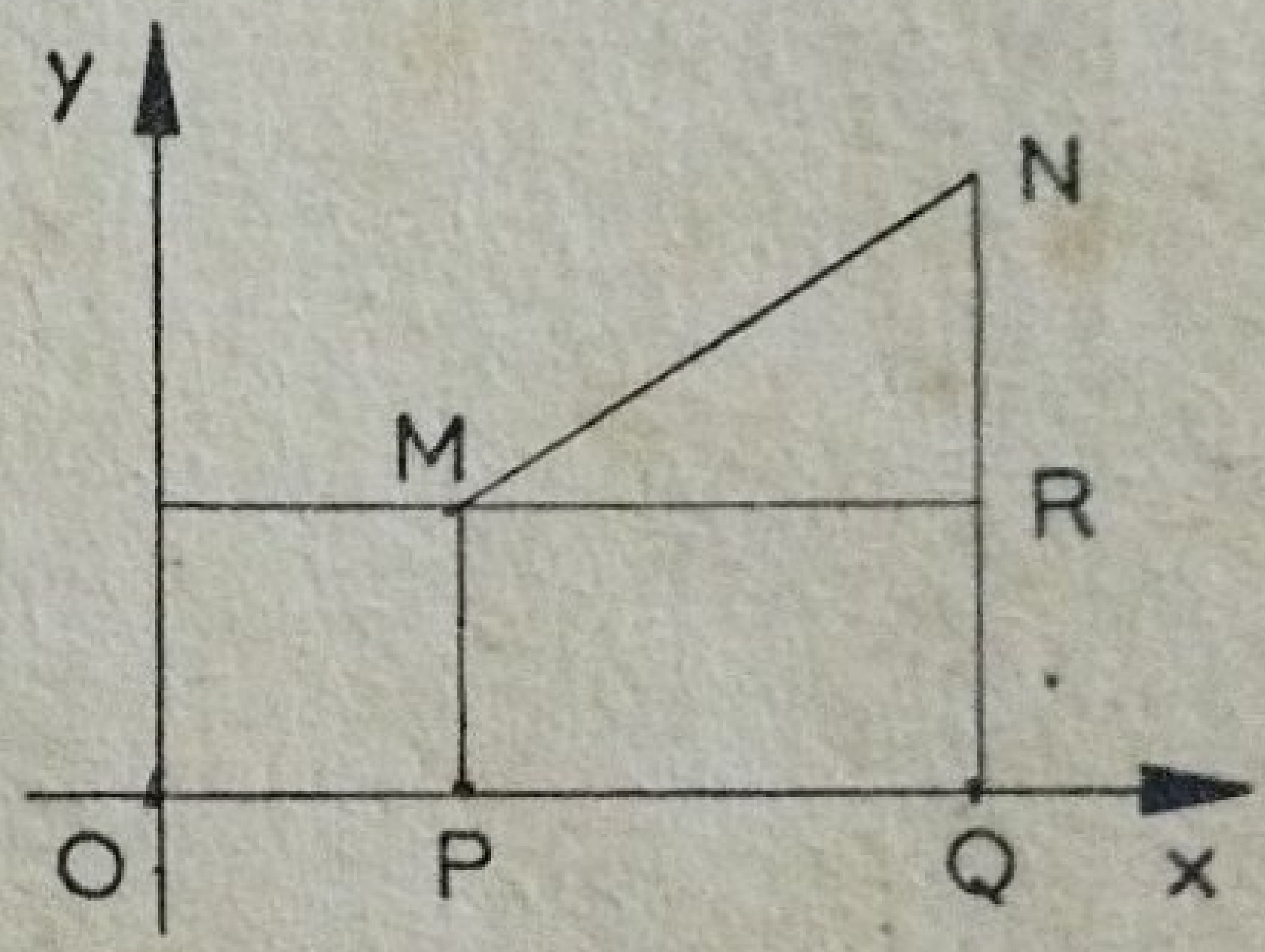

FIG. 24

$$x_1 = (OP) \qquad y_1 = (PM)$$
$$x_2 = (OQ) \qquad y_2 = (QN)$$

Tiremos a paralela MR ao eixo ox. Podemos escrever

$$(MR) = (PQ) = \; = (OQ) - (OP) = x_2 - x_1$$
$$(RN) = (QN) - (QR) = (QN) - (PM) = y_2 - y_1$$

Representando por d a distância MN, isto é, a medida do segmento geométrico MN, e aplicando ao triângulo retângulo MRN o teorema de PITÁGORAS, obtemos

$$d^2 = \overline{MR}^2 + \overline{RN}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

donde a expressão da distância procurada

$$d = \left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right| \qquad (1)$$

visto que ela é expressa por um número absoluto.

Se, em particular, o ponto N coincide com a origem, suas coordenadas são nulas. Fazendo, então $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$ na fórmula (1), obtemos a fórmula da distância de um ponto $M(x_1, y_1)$ à origem

$$d = \left| \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \right| \qquad (2)$$

Por exemplo, a distância dos pontos $M(2, 1)$ e $N(-,1-3)$ é

$$d = \left| \sqrt{(2+1)^2 + (1+3)^2} \right| = 5$$

e a distância do ponto $M(3, -3)$ à origem é

$$d = \left| \sqrt{3^2 + (-3)^2} \right| = \left| \sqrt{18} \right| = 3\sqrt{2}$$

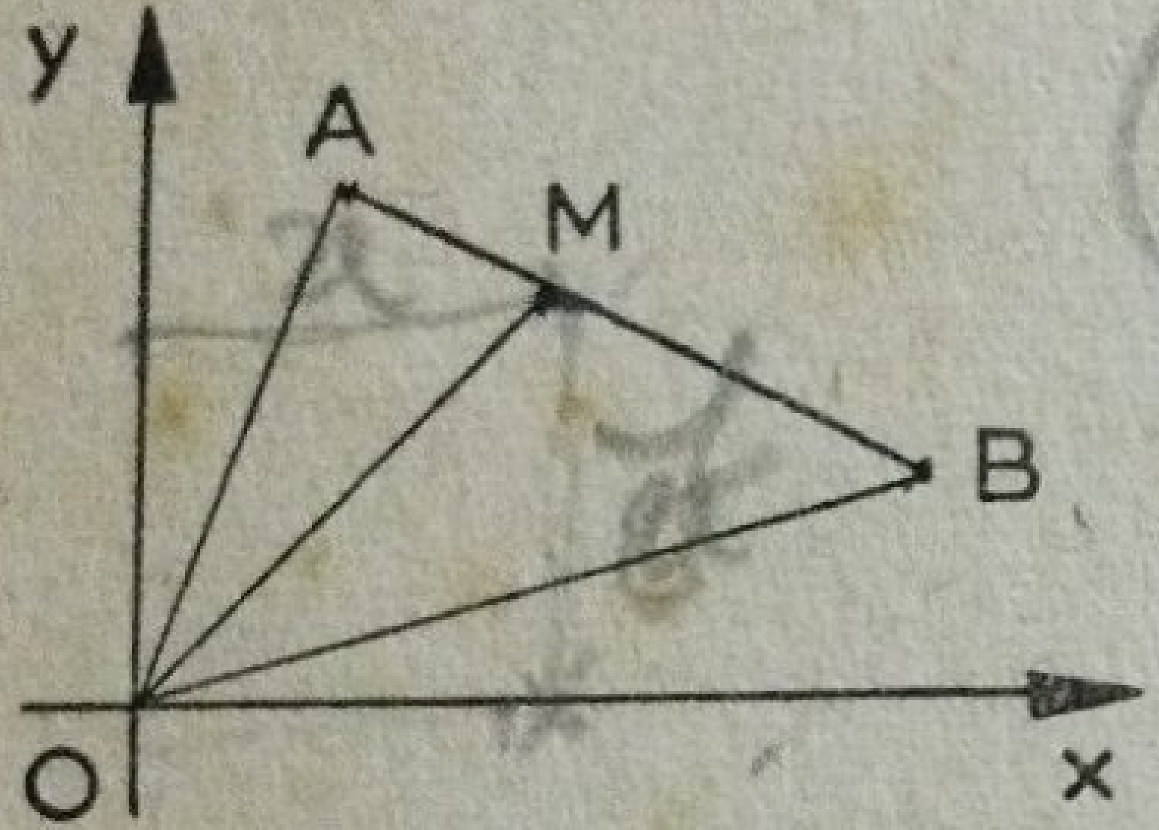

FIG. 25

2. Ponto que divide um segmento numa razão dada. Consideremos um segmento de reta (fig. 25), cujas extremidades são os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Calculemos as coordenadas x e y do ponto M, que divide êsse segmento numa razão dada

$$\frac{(MA)}{(MB)} = k\ (*) \qquad (3)$$

Como os vetores $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MB}$ têm a mesma direção, as medidas algébricas de suas projeções sôbre um mesmo eixo são proporcionais a suas medidas algébricas, ou

$$\frac{(\text{proj. } \overrightarrow{MA})}{(\text{proj. } \overrightarrow{MB})} = \frac{(MA)}{(MB)} = k \qquad (4)$$

Como $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, resulta

$$(\text{proj. } \overrightarrow{MA}) = (\text{proj. } \overrightarrow{OA}) - (\text{proj. } \overrightarrow{OM})$$

$$(\text{proj. } \overrightarrow{MB}) = (\text{proj. } \overrightarrow{OB}) - (\text{proj. } \overrightarrow{OM})$$

Substituindo êsses resultados em (4), obtemos

$$\frac{(\text{proj. } \overrightarrow{OA}) - (\text{proj. } \overrightarrow{OM})}{(\text{proj. } \overrightarrow{OB}) - (\text{proj. } \overrightarrow{OM})} = k$$

(*) Observemos que, conforme seja k positivo ou negativo, o ponto M será exterior ou interior ao segmento AB.

Considerando sucessivamente as projeções ortogonais sôbre os eixos $\overrightarrow{ox}$ e $\overrightarrow{oy}$, obtemos, respectivamente,

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = k \qquad \text{e} \qquad \frac{y_1 - y}{y_2 - y} = k$$

Supondo $k \neq 1$, dessas relações resultam, respectivamente,

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} \qquad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k} \qquad (5)$$

fórmulas que dão as coordenadas do ponto M.

3. Ponto que divide um segmento ao meio. Se o ponto M é o meio do segmento AB, as medidas algébricas (MA) e (MB) são números simétricos. Da relação (3) conclui-se, então, que $k = -1$. Substituindo êsse valor nas igualdades (5), obtemos

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{x_1 + y_2}{2} \qquad (6)$$

fórmulas que dão as coordenadas do ponto procurado.

4. Exercício. *Dado o segmento AB, de extremidades $A(1, -3)$ e $B(6, 7)$, calcular as coordenadas do ponto M que o divide na razão* $\dfrac{(MA)}{(MB)} = -4.$

Resolução: Como a razão é negativa, o ponto M está no interior de AB. Apliquemos as fórmulas (5), observando que $x_1 = 1$, $y_1 = -3$, $x_2 = 6$, $y_2 = 7$ e $k = -4$ (*).

$$x = \frac{1 + 4 \times 6}{1 + 4} = 5 \qquad y = \frac{-3 + 4 \times 7}{1 + 4} = 5$$

O ponto é, portanto, $M(5, 5)$,

5. Ponto de intersecção das medianas de um triângulo, Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ os vértices de um triângulo (fig. 26). Tracemos uma de suas medianas AM.

(*) Observe o leitor que, como se vê pela demonstração feita, x_1 e y_1 são as coordenadas do ponto A, que figura no antecedente da razão (3).

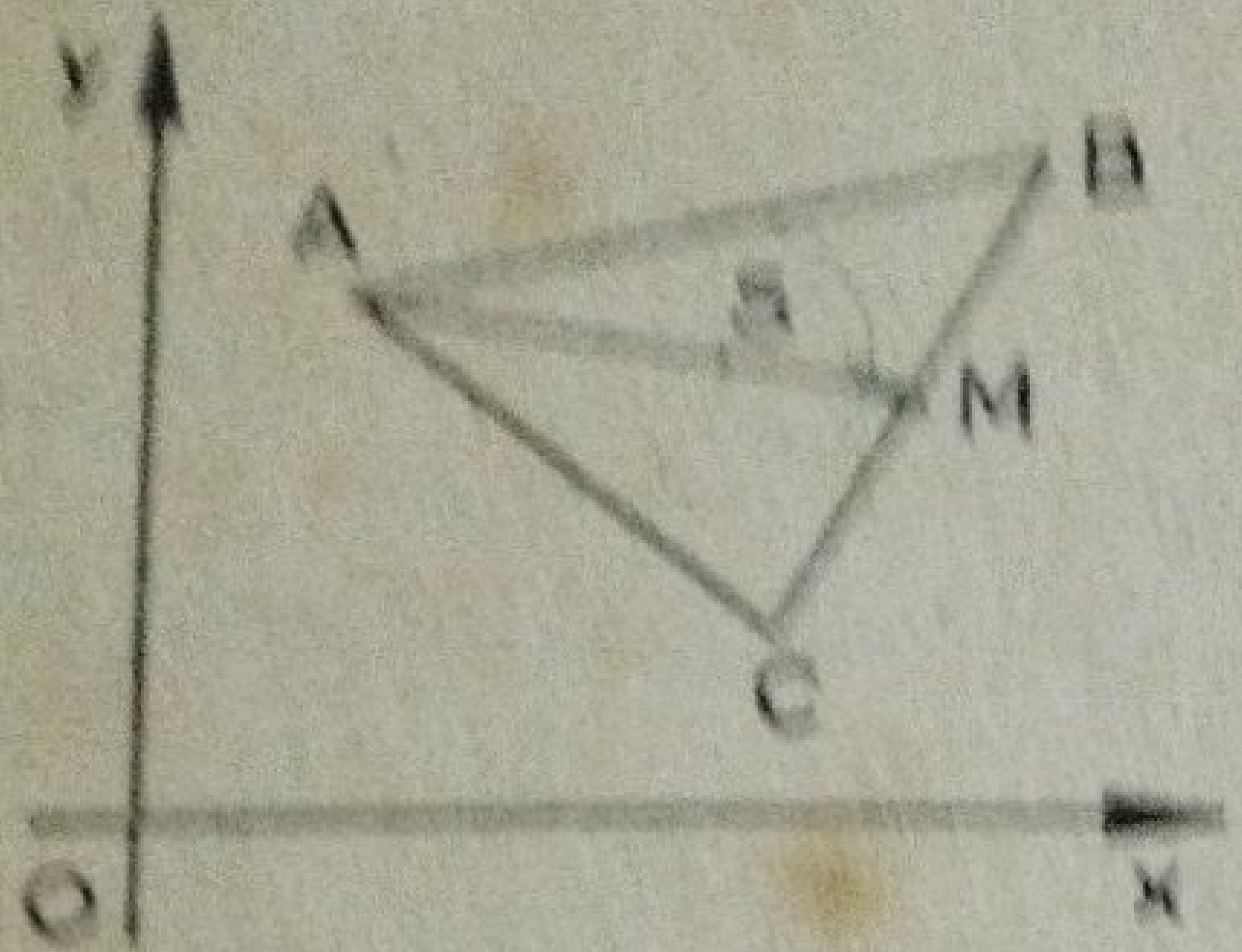

FIG. 26

Como M é o meio de BC, representando por X e Y suas coordenadas, podemos escrever (n.º 3).

$$X = \frac{x_2 + x_3}{2} \qquad Y = \frac{y_2 + y_3}{2} \tag{7}$$

Da geometria sabemos que se S é o ponto de intersecção das três medianas, o segmento AS é o dôbro do segmento SM, isto é, S é o ponto que divide AM na razão $\frac{(SA)}{(SM)} = -2$.

Representando, então, por x e y as coordenadas de S, podemos, de acôrdo com as fórmulas (5), escrever

$$x = \frac{x_1 + 2X}{1+2} = \frac{x_1 + 2X}{3} \qquad y = \frac{y_1 + 2Y}{1+2} = \frac{y_1 + 2Y}{3}$$

ou, substituindo X e Y por suas expressões (7)

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

CONCLUSÃO: *A abcissa e a ordenada do ponto de intersecção das medianas (baricentro) de um triângulo são as médias aritméticas, respectivamente, das abcissas e das ordenadas de seus vértices.*

6. Exercício. *Calcular as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos da mediatriz do segmento, cujas extremidades são os pontos* $A(-3,1)$ e $B(-1,5)$.

RESOLUÇÃO: Calculemos o ponto de intersecção com o eixo $\overrightarrow{ox}$. Como sua ordenada é nula, seja $S(x, o)$ êsse ponto. As distâncias SA e SB são iguais (*). Logo

$$(x+3)^2 + (0-1)^2 = (x+1)^2 + (0-5)^2$$

donde resulta $x = 4$. O ponto é, pois, $S(4,0)$.

(*) A mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos extremos dêsse segmento.

De modo análogo, sua intersecção com o eixo $\overrightarrow{oy}$ é um ponto $T(0, y)$ equidistante de A e B, donde

$$(0+3)^2 + (y-1)^2 = (0+1)^2 + (y-5)^2$$

o que nos dá $y = 2$. O ponto é, então, $T(0, 2)$.

7. Exercício. *Um ponto S divide o segmento MN na razão* $\dfrac{(SM)}{(SN)} = -2$. *Sabe-se que S é a intersecção com o eixo $\overrightarrow{ox}$ da mediatriz do segmento de extremidades $A(3, 5)$ e $B(7, 3)$ e conhece-se o ponto $M(-3, 2)$. Pede-se calcular o ponto N.*

RESOLUÇÃO: Pelo que vimos no exercício anterior, o ponto $S(x, 0)$ é equidistante de A e B, ou

$$(x-3)^2 + (0-5)^2 = (x-7)^2 + (0-3)^2$$

FIG. 27

donde resulta $x = 3$. O ponto S é, portanto, $(3, 0)$.

Como S divide MN na razão $\dfrac{(SM)}{(SN)} = -2$. (fig. 27), podemos considerar N como sendo o ponto que divide o segmento MS na razão $\dfrac{(NM)}{(NS)} = 3$. Designando, então, por x e y suas coordenadas, obtemos aplicando as fórmulas (5)

$$x = \frac{-3 - 3 \times 3}{1-3} = 6 \qquad y = \frac{2 - 3 \times 0}{1-3} = -1$$

O ponto N é, portanto, $(6, -1)$.

8, Equação cartesiana da linha reta.

I. Consideremos inicialmente uma reta que passe pela origem e suponhamos, para generalidade, que não seja paralela a qualquer dos eixos coordenados. Seja r uma reta nessas condições (fig. 28). Sejam $M(x, y)$ um ponto qualquer de r e α a menor determinação (em valor absoluto) do ângulo orientado $\widehat{ox, or}$ (*).

(*) Vol. II, Cap. VII, n.º 11. O sentido positivo nessa orientação é contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio. Para o caso da figura, α é, portanto positivo.

Qualquer que seja a posição do ponto M sôbre a reta tem-se

$$\frac{(PM)}{(OP)} = tg\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = tg\alpha$$

Pondo

$$a = tg\alpha \tag{8}$$

a relação anterior torna-se

$$\frac{y}{x} = \text{a} \quad \text{ou} \quad y = ax \tag{9}$$

isto é, todos os pontos de r verificam a equação (9).

Recìprocamente, todos os pontos que verificam a equação (9) pertencem a r. De fato, seja $M(x_1, y_1)$ um dêsses pontos, isto é, tal que

$$\frac{y_1}{x_1} = tg\,\alpha$$

Então, a semi-reta OM forma com o eixo $\overrightarrow{ox}$ um ângulo cuja menor determinação (em valor absoluto) é α, isto é, está situada sôbre r.

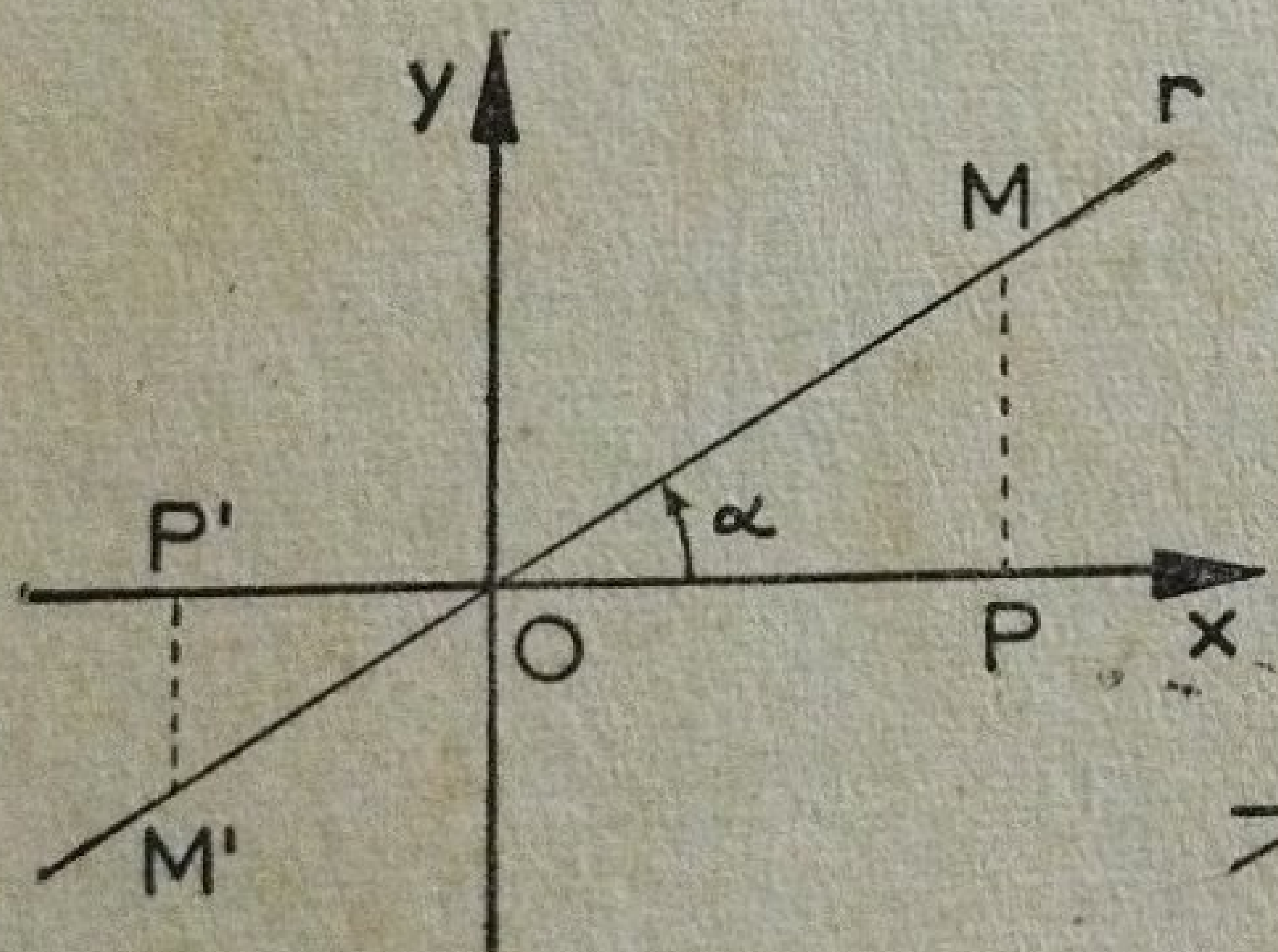

FIG. 28

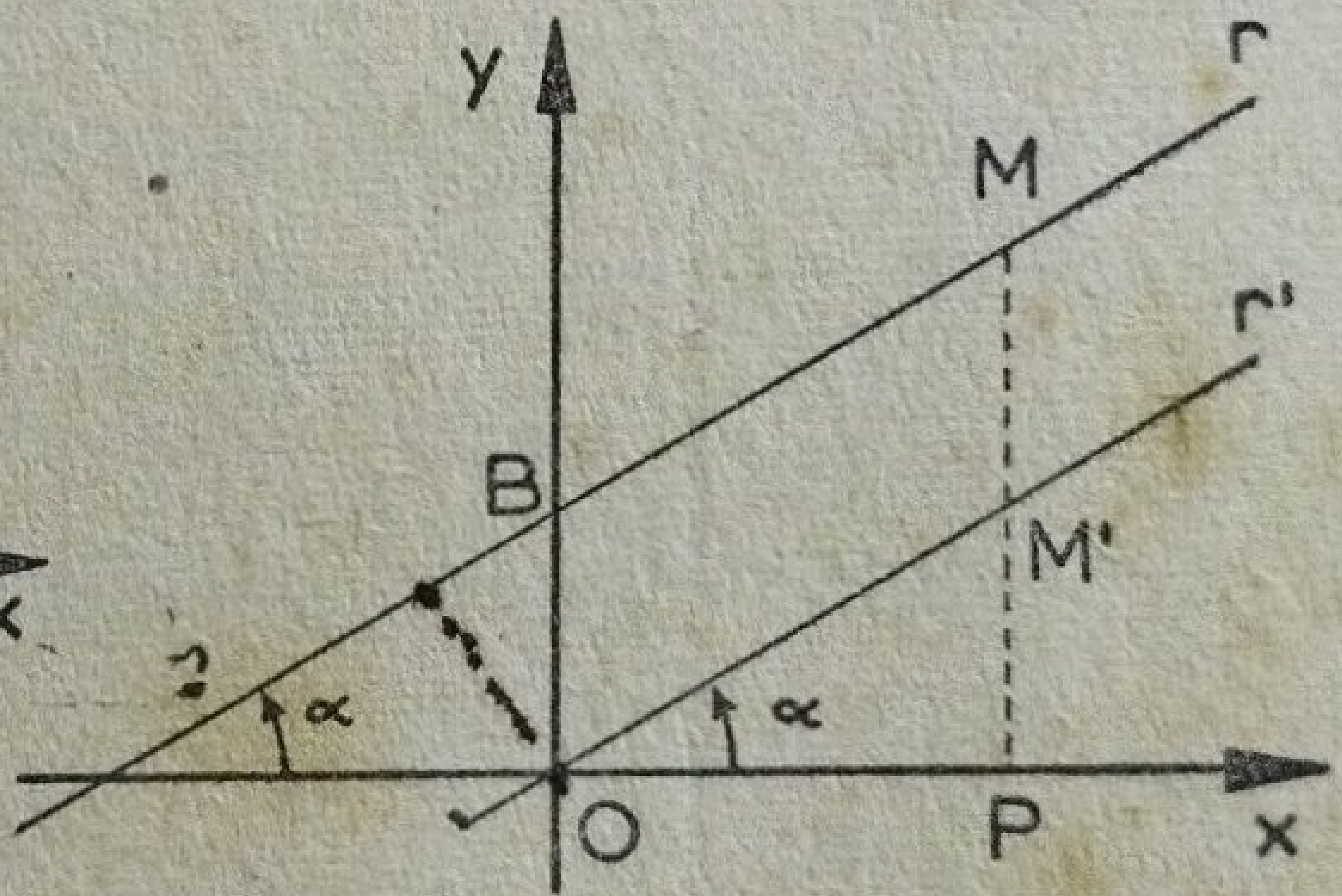

FIG. 29

A equação (9) é a equação cartesiana da reta r.

II. Consideremos, agora, o caso geral de uma reta não paralela a qualquer dos eixos que não passe pela origem. Seja r uma reta nessas condições (fig. 29). Tiremos da origem 0 a paralela r' a r e seja α a menor determinação do ângulo $\widehat{ox, or'}$. Pondo $a = tg\alpha$ vimos que a equação de r' é da forma

$$y' = ax' \tag{10}$$

sendo x' e y' as coordenadas do ponto M' que descreve r'.

Sejam B a intersecção de r e o eixo $\overrightarrow{oy}$ e b a medida algébrica do segmento orientado $\overrightarrow{OB}$, ou $b = (OB)$.

O conjunto infinito das paralelas ao eixo $\overrightarrow{oy}$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos de r' e os de r. Mais precisamente, a cada ponto $M'(x', y')$ de r' corresponde (pela paralela $M'M$) um ponto $M(x, y)$ de r e reciprocamente, sendo, pela própria definição de coordenadas cartesianas e em face da igualdade dos segmentos orientados $\overline{OB}$ e $\overline{M'M}$

$$x = x' \qquad y = y' + b \tag{11}$$

Das igualdades (10) e (11) resulta

$$y = ax + b \tag{12}$$

que é a equação cartesiana da reta r.

Se um pelo menos dos números a e b é racional, eliminado o denominador (ou os denominadores) de (12) e transpostos todos os têrmos para o primeiro membro, obtém-se uma equação da forma

$$Ax + By + C = 0 \tag{13}$$

na qual A, B e C são números reais.

As equações (13) e (12) são, respectivamente, a *forma geral* e a *forma simplificada* da equação cartesiana da reta. O parâmetro a (na forma simplificada) denomina-se *parâmetro angular* ou *coeficiente angular* da reta, porque, como indica a relação (8), êle define o ângulo da reta com o eixo ox. O parâmetro b chama-se *parâmetro linear* ou *coeficiente linear* por ser a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{OB}$.

9. Casos particulares.

I. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$. A equação (13) fica

$$Ax + By = 0 \tag{14}$$

ou

$$y = -\frac{A}{B}x$$

isto é, é da forma (9), desde que se faça $a = -\frac{A}{B}$. Repre-

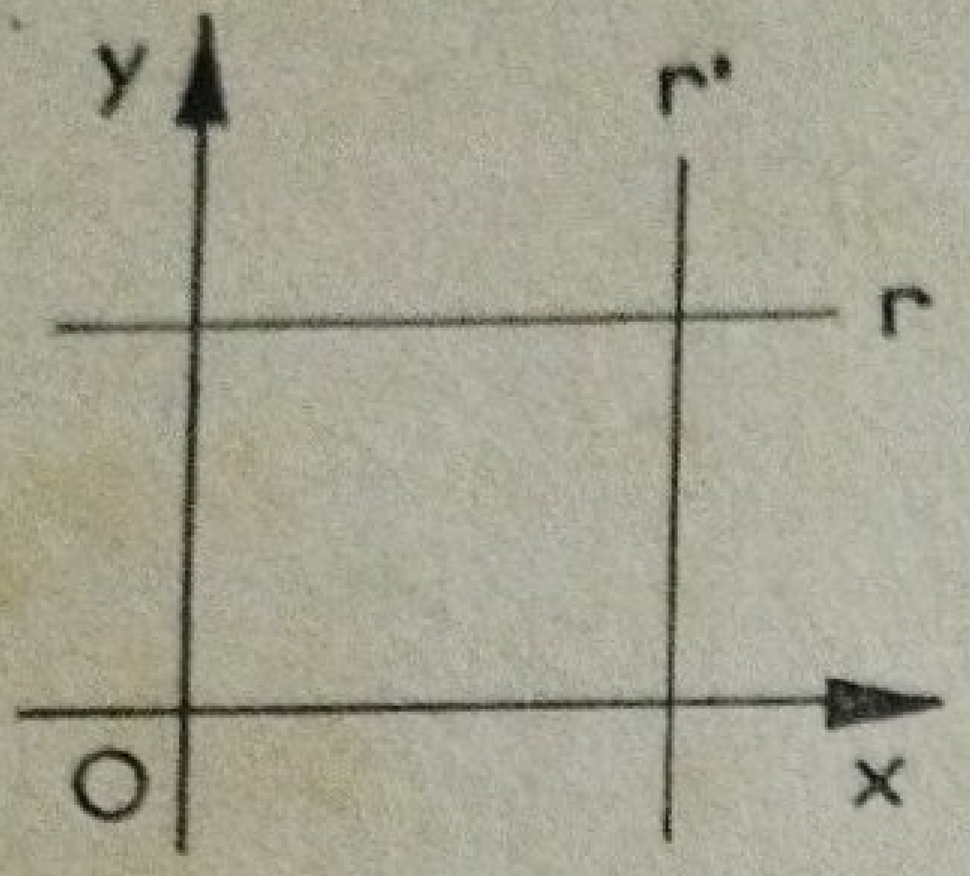

FIG. 30

senta, pois, uma reta que passa pela origem e não é paralela a qualquer dos eixos (fig. 28).

II. $A = 0,\ B \neq 0$.

Se $C \neq 0$, de (13) resulta

$$By + C = 0$$

ou

$$y = -\frac{C}{B} \tag{15}$$

isto é, a *ordenada* de seus pontos é *constante*. O lugar geométrico é uma reta r paralela a $\overrightarrow{ox}$ (fig. 30).

Se, em particular, $C = 0$, a equação (15) torna-se

$$y = 0 \tag{16}$$

e a reta r coincide com $\overrightarrow{ox}$. Então, (16) é a equação do eixo ox.

III. $A \neq 0,\ B = 0$.

Se $C \neq 0$, de (13) resulta

$$Ax + C = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{C}{A} \tag{17}$$

isto é, a *abcissa* de seus pontos é *constante*. O lugar geométrico é uma reta r' paralela ao eixo $\overrightarrow{oy}$ (fig. 30).

Se, em particular, $C = 0$, a equação (17) torna-se

$$x = 0 \tag{18}$$

e a reta coincide com o eixo oy. Então, (18) é a equação do eixo oy.

Êsses resultados podem ser resumidos no seguinte quadro;

$$\begin{array}{l} A \neq O \\ \\ B \neq O \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} C \neq O. \text{ Forma } Ax + By + C = O & \left\{ \begin{array}{l} \text{Reta que não passa pela} \\ \text{origem e não é paralela} \\ \text{a qualquer dos eixos.} \end{array} \right. \\ C = O. \text{ Forma } Ax + By = O \ldots. & \left\{ \begin{array}{l} \text{Reta que passa pela origem} \\ \text{mas não é paralela a} \\ \text{qualquer dos eixos.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} A = O \\ B \neq O \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} C \neq O. \text{ Forma } By + C = O \text{ ou } y = c & \{ \text{ Reta paralela ao eixo } ox. \\ C = O. \text{ Forma } By = O \text{ ou } y = o \ldots & \{ \text{ Eixo } ox. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} A \neq O \\ B = O \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} C \neq O. \text{ Forma } Ax + C = O \text{ ou } x = c & \{ \text{ Reta paralela ao eixo } oy. \\ C = O. \text{ Forma } \quad Ax = O \text{ ou } x = o & \{ \text{ Eixo } oy. \end{array} \right.$$

10. Cossenos diretores da reta. Consideremos uma reta qualquer d (fig. 31) e tracemos da origem a reta d' paralela a d. Tomemos sôbre d' um ponto M tal que $OM = 1$.

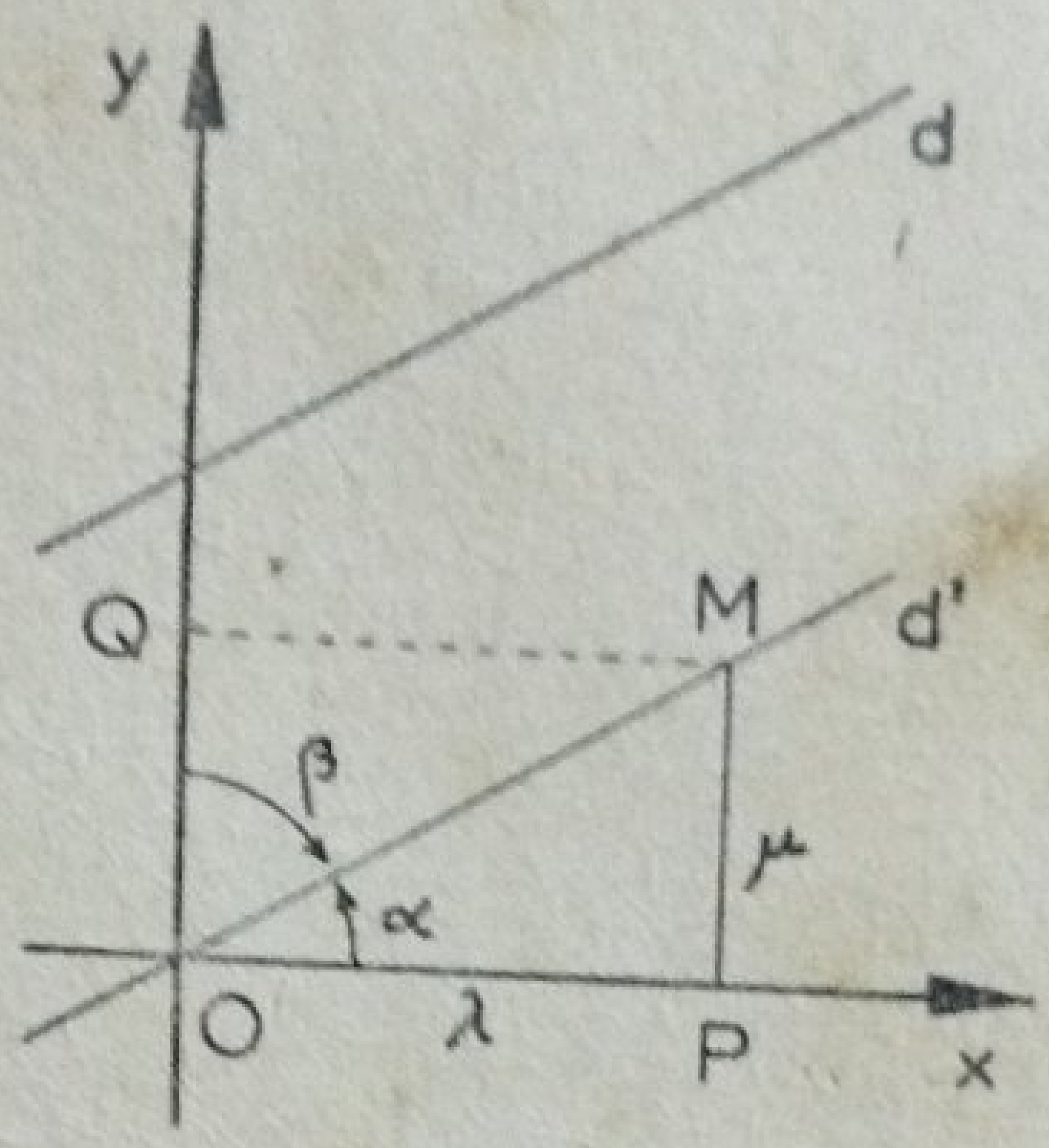

FIG. 31

Sejam $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, respectivamente, as projeções do vetor unitário $\overrightarrow{OM}$ sôbre os eixos $\overrightarrow{ox}$ e $\overrightarrow{oy}$. Representemos por λ e μ, respectivamente, suas medidas algébricas, isto é, $\lambda = (OP)$ $\mu = (OQ)$.

Os números relativos λ e μ determinam o ponto M, porque são suas coordenadas cartesianas. Logo, definem a direção d' (ou d). Representando por α e β, respectivamente, os ângulos $\widehat{ox, od'}$ e $\widehat{oy, od'}$, sabemos da Trigonometria que

$$\lambda = \cos\alpha \qquad \mu = \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad (19)$$

λ e μ chamam-se, então, os *cossenos diretores* ou *coeficientes diretores* da reta d' (ou d). De (19) resulta

$$tg\alpha = \frac{\mu}{\lambda} \qquad (20)$$

Se, então, a equação da reta d é da forma (12), em virtude de (8), concluimos que $\frac{\mu}{\lambda}$ é seu coeficiente angular.

Destaquemos do que foi dado o seguinte resultado: *duas retas paralelas têm os mesmos cossenos diretores*, isto é, *os cossenos diretores definem uma direção.*

11. Equações paramétricas da reta. Consideremos uma reta r e seja $M(x_0, y_0)$ um ponto fixo da reta (fig. 32). Seja α a medida do ângulo orientado $\widehat{0x, r}$. Tomemos sôbre r um ponto móvel $X(x, y)$ e seja ρ a medida algébrica do vetor $\overrightarrow{MX}$, escolhida uma orientação para a reta r. Projetemos M e X

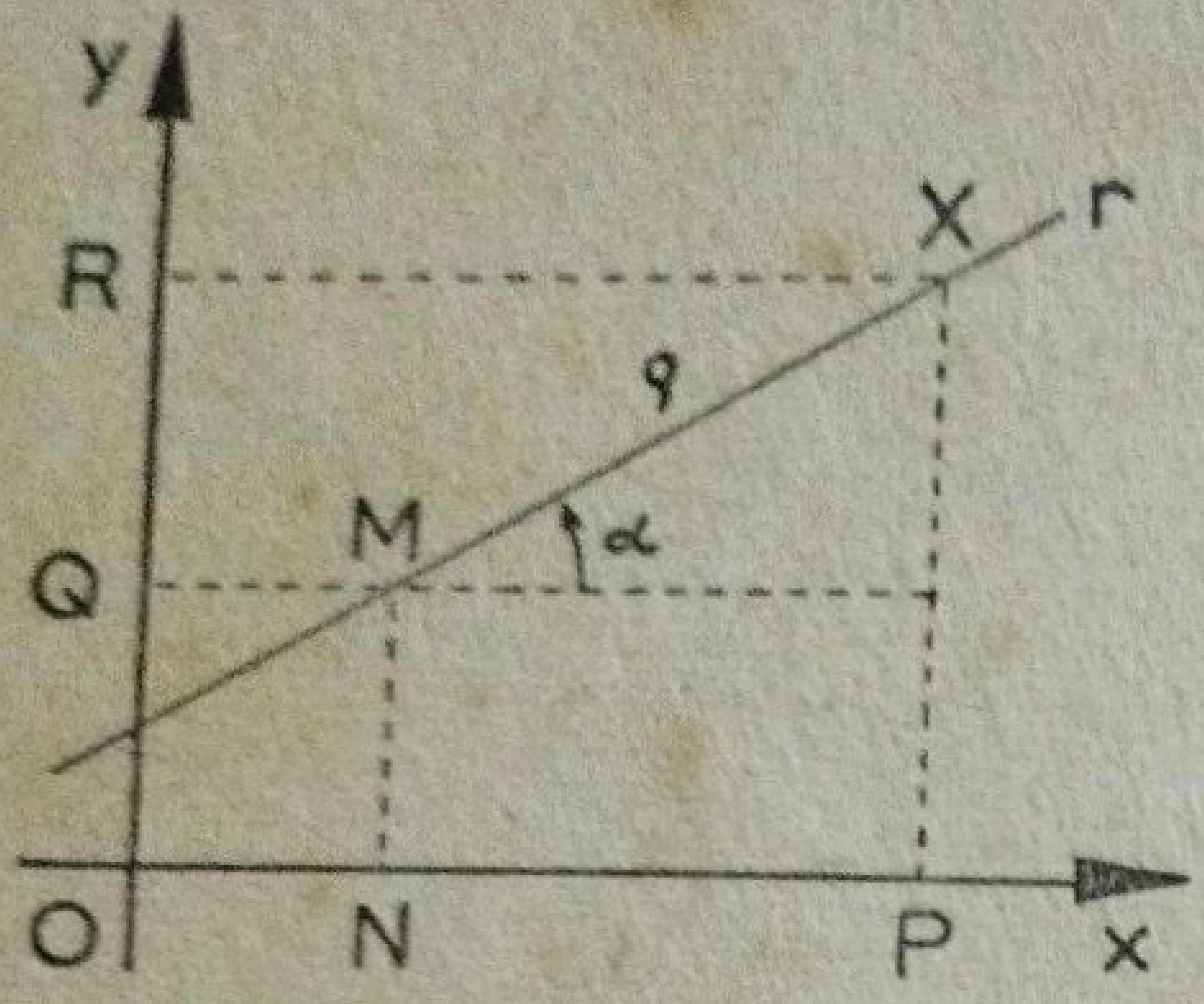

FIG. 32

sôbre os eixos. Em qualquer posição do ponto X, teremos as equipolências

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR}$$

ou, respectivamente,

$$x = x_o + \rho \cos \alpha$$
$$y = y_0 + \rho \operatorname{sen} \alpha$$

Levando em conta as igualdades (19), obtemos as *equações paramétricas* da reta

$$\begin{cases} x = x_o + \rho\lambda \\ y = y_o + \rho\mu \end{cases} \tag{21}$$

assim denominadas porque as coordenadas do ponto corrente $X(x, y)$ são funções de um parâmetro ρ, havendo uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos valores reais de ρ e o conjunto dos pontos X de r.

Igualando os valores de ρ, tirados das equações (21), obtemos a forma simétrica

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} \tag{22}$$

Sendo p e q dois números quaisquer *proporcionais a* λ e a μ, a equação anterior pode ser escrita

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \tag{23}$$

12. Equação segmentária da reta. Seja

$$Ax + By + C = 0 \tag{24}$$

a equação cartesiana de uma reta que não passa pela origem e não é paralela a qualquer dos eixos. Logo, $A \neq 0$, $B \neq 0$, e $C \neq 0$ (**n.º 9**). Podemos escrevê-la

$$\frac{x}{-\dfrac{C}{A}} + \frac{y}{-\dfrac{C}{B}} = 1$$

Pondo

$$m = -\frac{C}{A} \qquad p = -\frac{C}{B}$$

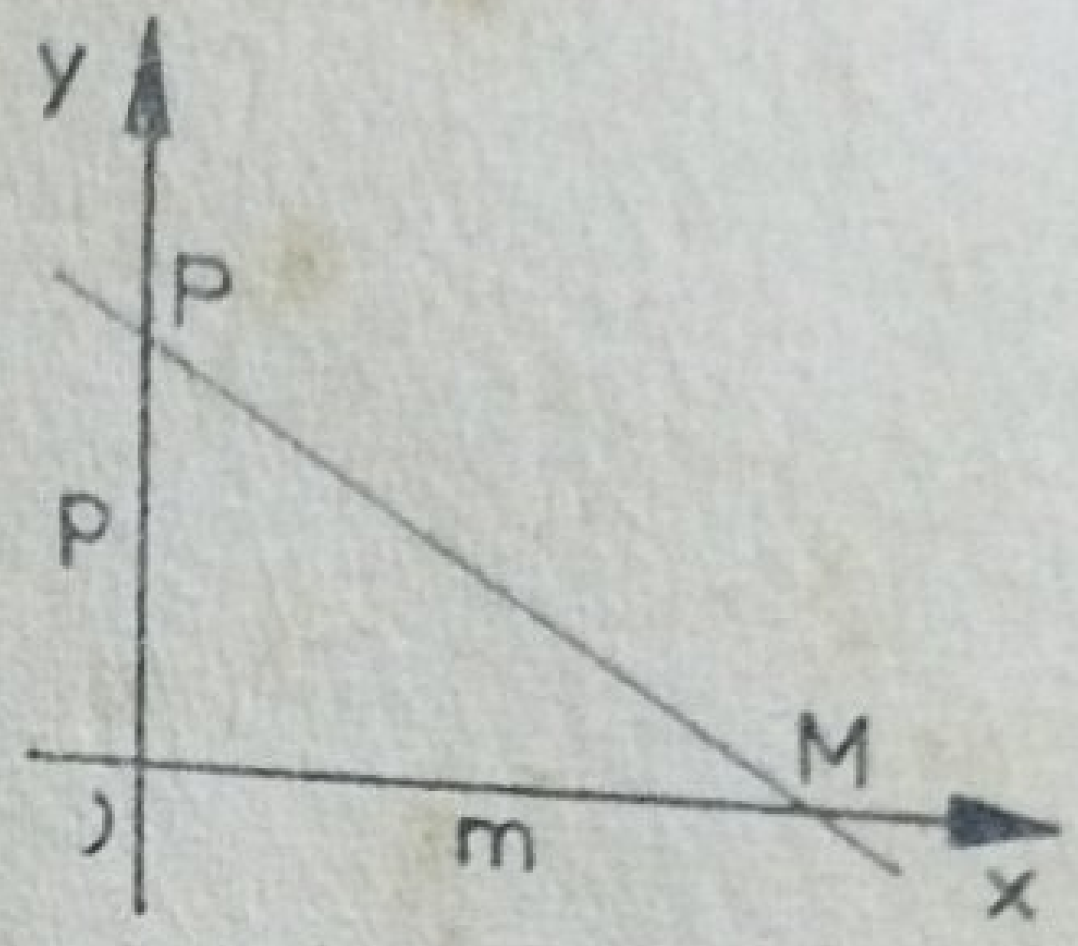

FIG. 33

a equação anterior torna-se

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{p} = 1 \qquad (25)$$

Fazendo, em (25), $y = 0$, resulta $x = m$. Logo m é a abcissa do ponto M (fig. 33) em que a reta corta o eixo $\overrightarrow{ox}$. Do mesmo modo, fazendo $x = 0$ em (25), resulta $y = p$; p é a ordenada do ponto P onde a reta corta o eixo oy.

A equação (25) denomina-se *equação segmentária* da reta, porque nela aparecem como constantes arbitrárias as medidas algébricas (m e p) dos segmentos por ela determinados sôbre os eixos.

Da forma segmentária (25) conclui-se imediatamente que a reta corta o eixo $\overrightarrow{ox}$ no ponto (m, o) e o eixo $\overrightarrow{oy}$ no ponto (o, p). É um resultado de valor prático para as aplicações.

Exemplo: Dada a equação cartesiana $2x - 3y + 6 = 0$, transpondo o têrmo $+ 6$ para o segundo membro e dividindo tôda a equação por $- 6$, resulta a equação na forma segmentária

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$$

o que permite a conclusão imediata: a reta corta o eixo ox no ponto $(-3, 0)$ e o eixo oy no ponto $(0, 2)$.

13. Equação normal da reta, Sejam r uma reta que não passa pela origem (fig. 34) e d sua distância à origem. Sejam δ o ângulo $\widehat{ox, oD}$ e M (x, y) um ponto móvel sôbre a reta r.

Consideremos os vetores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PM}$ e $\overrightarrow{MD}$ e sua resultante OD. As medidas algébricas de suas projeções ortogonais sôbre a direção OD são (proj. $\overrightarrow{OP}$) $= x \cos \delta$ (proj. $\overrightarrow{PM}$) $= y \cos \varepsilon = y \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) = y \operatorname{sen} \delta$

(proj. $\overrightarrow{MD}$) $= 0$ (proj. $\overrightarrow{OD}$) $= d$

Como a medida algébrica da projeção da resultante de vetores é a soma das medidas algébricas das projeções dêsses vetores sôbre um mesmo eixo (*), podemos escrever

$$x \cos \delta + y \operatorname{sen} \delta = d \tag{26}$$

(26) é a equação normal da reta.

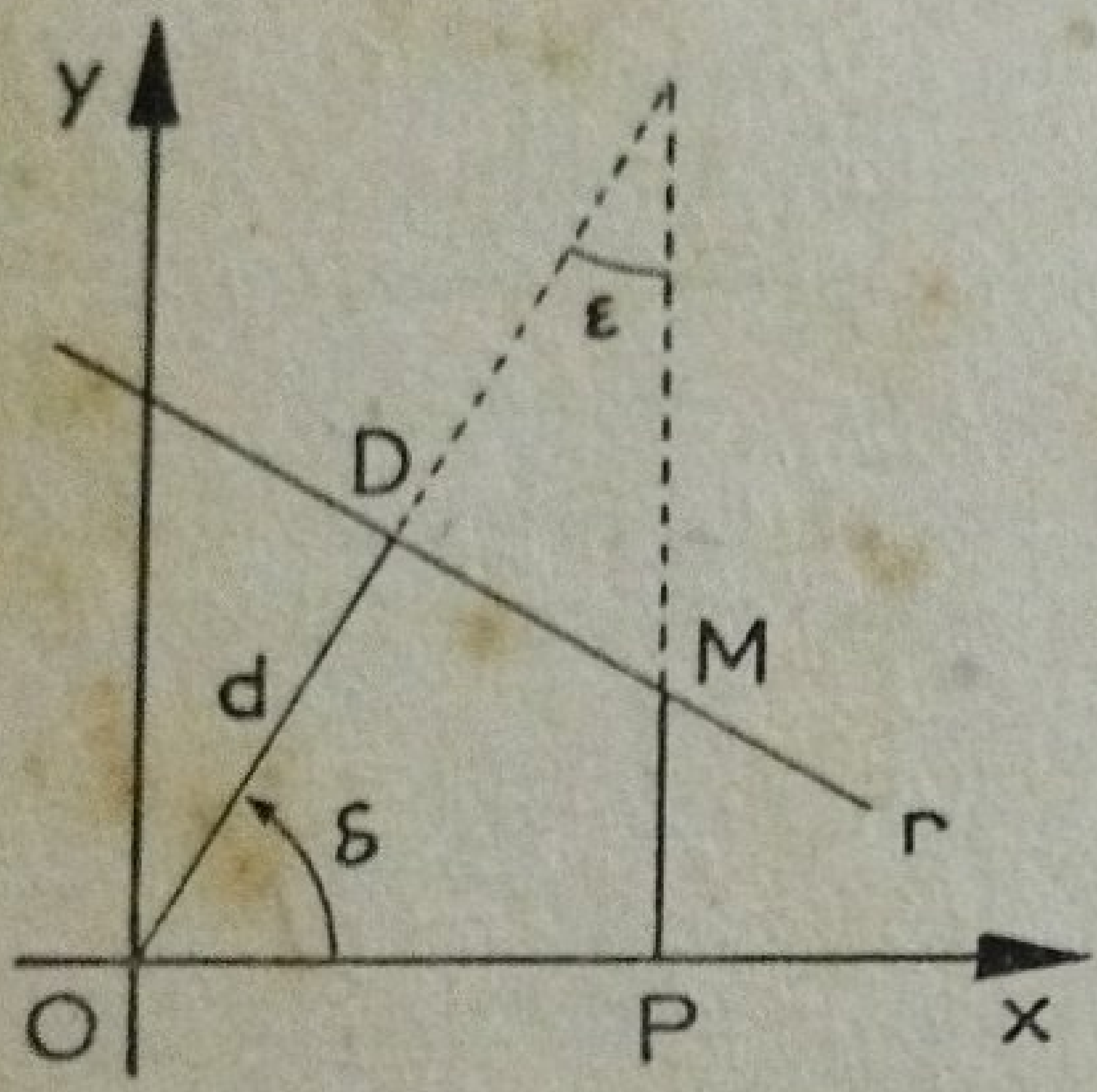

FIG. 34

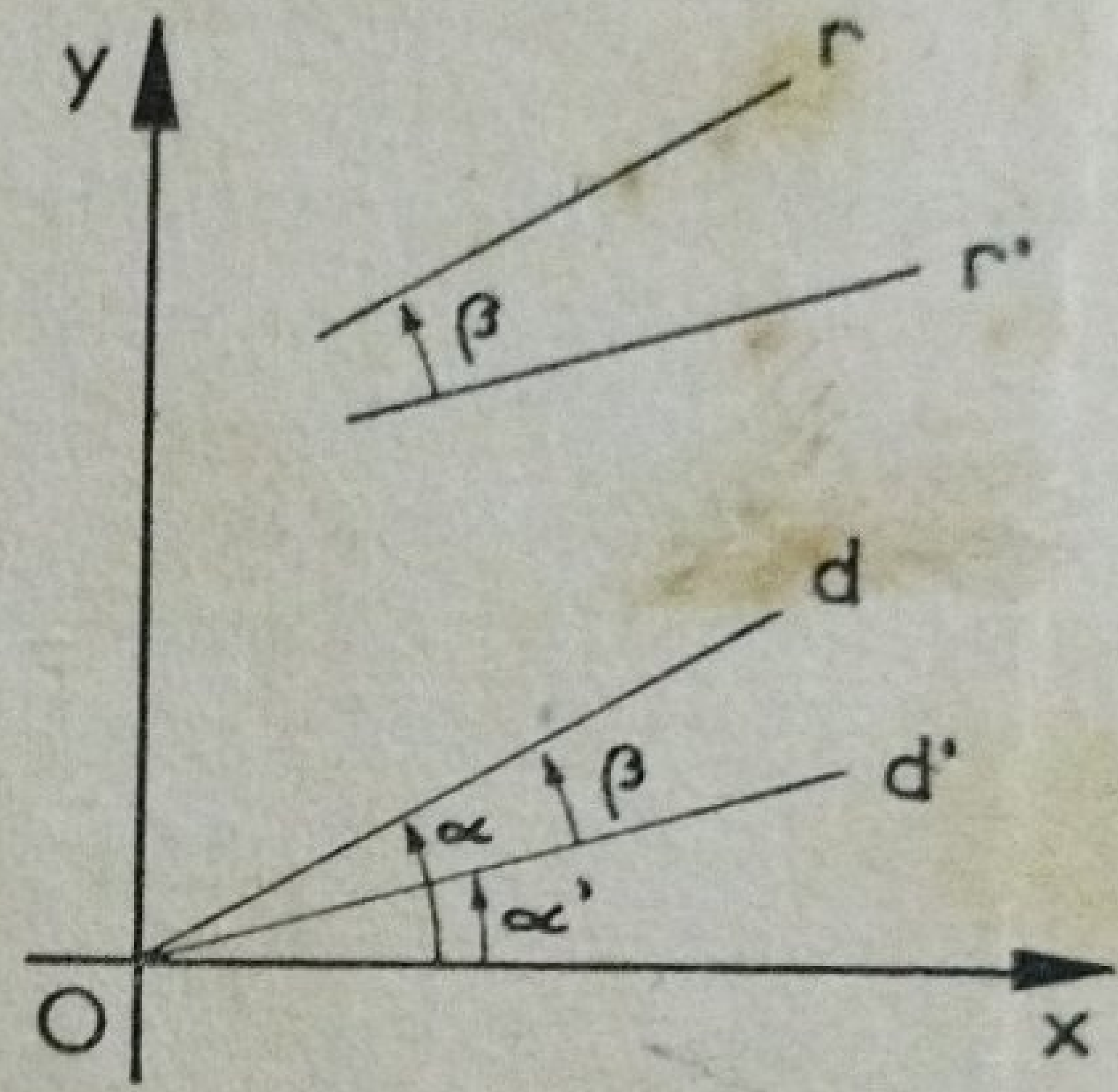

FIG. 35

14. Ângulo de duas retas. Sejam r e r' duas retas, definidas, respectivamente, por suas equações cartesianas

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= a'x + b' \end{aligned} \tag{27}$$

Sejam d e d', respectivamente, as paralelas a r e a r', tiradas pela origem O, e α e α', respectivamente, as medidas dos ângulos $\widehat{ox, od}$ e $\widehat{ox, od'}$. Representemos por β o ângulo $\widehat{od', od}$. Como o ângulo de $\overrightarrow{ox}$ com r é o próprio ângulo $\widehat{ox, od}$ e o ângulo de ox com r' é o mesmo ângulo ox, od' (**), em virtude do resultado (8) (**n.º 8**) e das equações (27), podemos escrever

$$tg\alpha = a \qquad tg\alpha' = a'$$

(*) Vol. II, Cap. VI, n.º 4.

(**) Supondo r e r' orientadas, respectivamente, no mesmo sentido de a e d.

Do que foi dito resulta que $\beta = \alpha - \alpha'$ e, portanto,

$$tg\ \beta = tg\ (\alpha - \alpha') = \frac{tg\alpha - tg\alpha'}{1 + tg\alpha\ .\ tg\alpha'} = \frac{a - a'}{1 + aa'} \qquad (28)$$

fórmula que dá o ângulo das retas r e r'.

15. Paralelismo e perpendicularismo.

I. Se as retas r e r' são paralelas, o ângulo β é nulo e, portanto, $tg\beta = 0$. Da fórmula (28) resulta que essa condição será satisfeita se e sòmente se $a = a'$. Concluímos, pois:

A condição necessária e suficiente para que as retas (27) *sejam paralelas é que seus coeficientes angulares sejam iguais.*

Por exemplo, as retas $y = 2x + 1$ e $y = 2x + 3$ são paralelas.

Suponhamos que as retas sejam dadas por suas equações cartesianas na forma geral

$$Ax + By + C = 0 \qquad A'x + B'y + C' = 0 \quad (29)$$

Supondo $B \neq 0$ e $B' \neq 0$, escrevendo-as na forma simplificada

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'} \qquad (30)$$

em virtude do resultado anterior, concluimos que a condição de paralelismo dessas retas é

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0 \qquad (31)$$

Por exemplo, as retas $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y + 7 = 0$ são paralelas, porque

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

II. Se as retas r e r' (fig. 35) são perpendiculares, o ângulo β é reto e $tg\beta$ será infinita. De (28) resulta que essa condição se verifica se e sòmente se

$$1 + aa' = 0 \qquad \text{ou} \qquad a' = -\frac{1}{a} \qquad (32)$$

isto é:

A condição necessária e suficiente para que as retas (27) *sejam perpendiculares é que seus coeficientes angulares sejam inversos e de sinais contrários.*

Por exemplo, as retas $y = \frac{2}{3}x + 2$ e $y = -\frac{3}{2}x - 1$ são perpendiculares.

Se as equações das retas são dadas na forma geral (29), aplicando a condição (32) às equações equivalentes (30), concluimos a condição de perpendicularismo das retas (29):

$$-\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'} \quad \text{ou} \quad AA' + BB' = 0 \qquad (33)$$

Por exemplo, as retas $2x + 4y + 1 = 0$ e $6x - 3y + 2 = 0$ são perpendiculares, porque $-\frac{2}{4} = \frac{-3}{6}$.

16. Reta definida por um ponto e uma direção. Seja $M(x_1, y_1)$ um ponto do plano. Seja

$$y = ax + b \qquad (34)$$

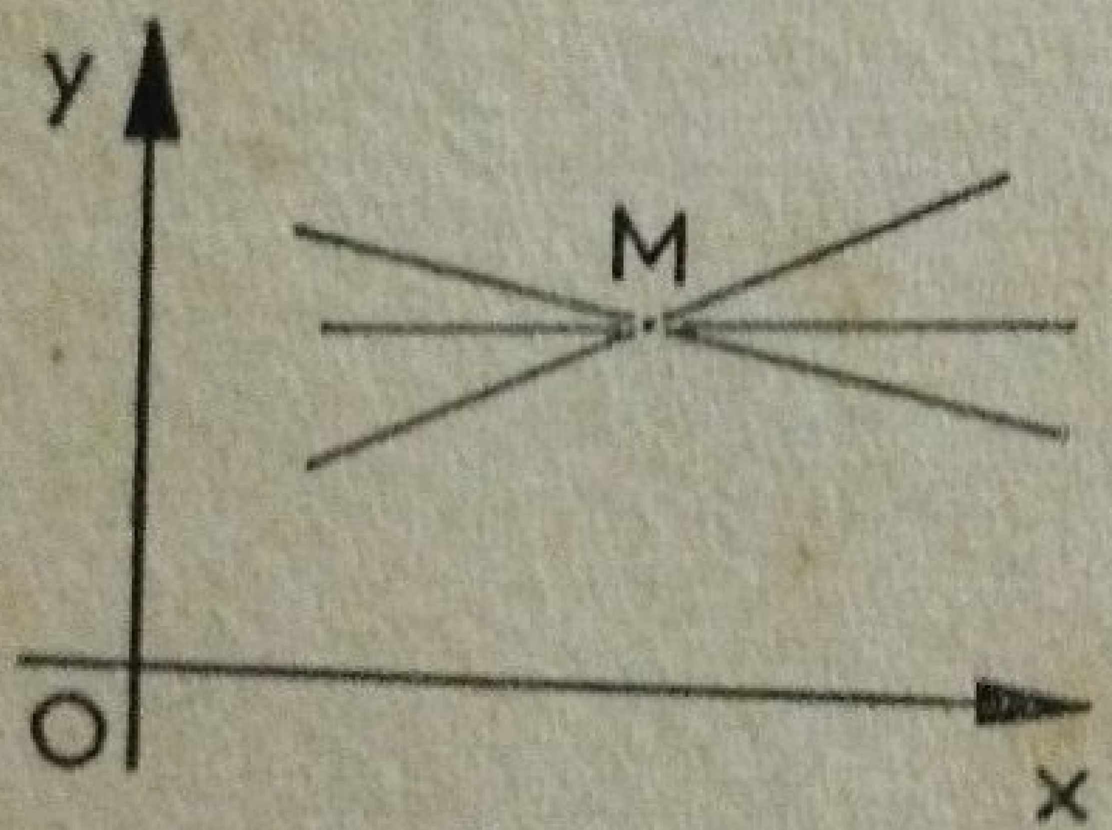

FIG. 36

uma reta que passa por êsse ponto. Logo, sua equação deve ser verificada pelas coordenadas dêsse ponto, ou

$$y_1 = ax_1 + b \qquad (35)$$

Subtraindo, membro a membro, (35) de (34), obtemos

$$y - y_1 = a\,(x - x_1) \qquad (36)$$

Para cada valor atribuido a a, a equação (36) representa uma reta que passa por M e tem uma direção definida (por seu coeficiente angular a).

Considerando a um parâmetro variável, a equação (36) representa o conjunto das retas que passam por M (fig. 36).

Por exemplo, a equação $y - 3 = a(x+2)$ representa o conjunto das retas que passam pelo ponto $M(-2, 3)$. A cada valor de a corresponde uma única reta, definida pelo ponto M e pela direção a.

17. Reta definida por dois pontos. Sejam $M(x_1, y_1)$ e $P(x_2, y_2)$ dois pontos distintos do plano. Estabeleçamos a equação da reta definida por êsses pontos. Para isso consideremos a equação geral das retas que passam por M, ou

$$y - y_1 = a\,(x - x_1) \quad (37)$$

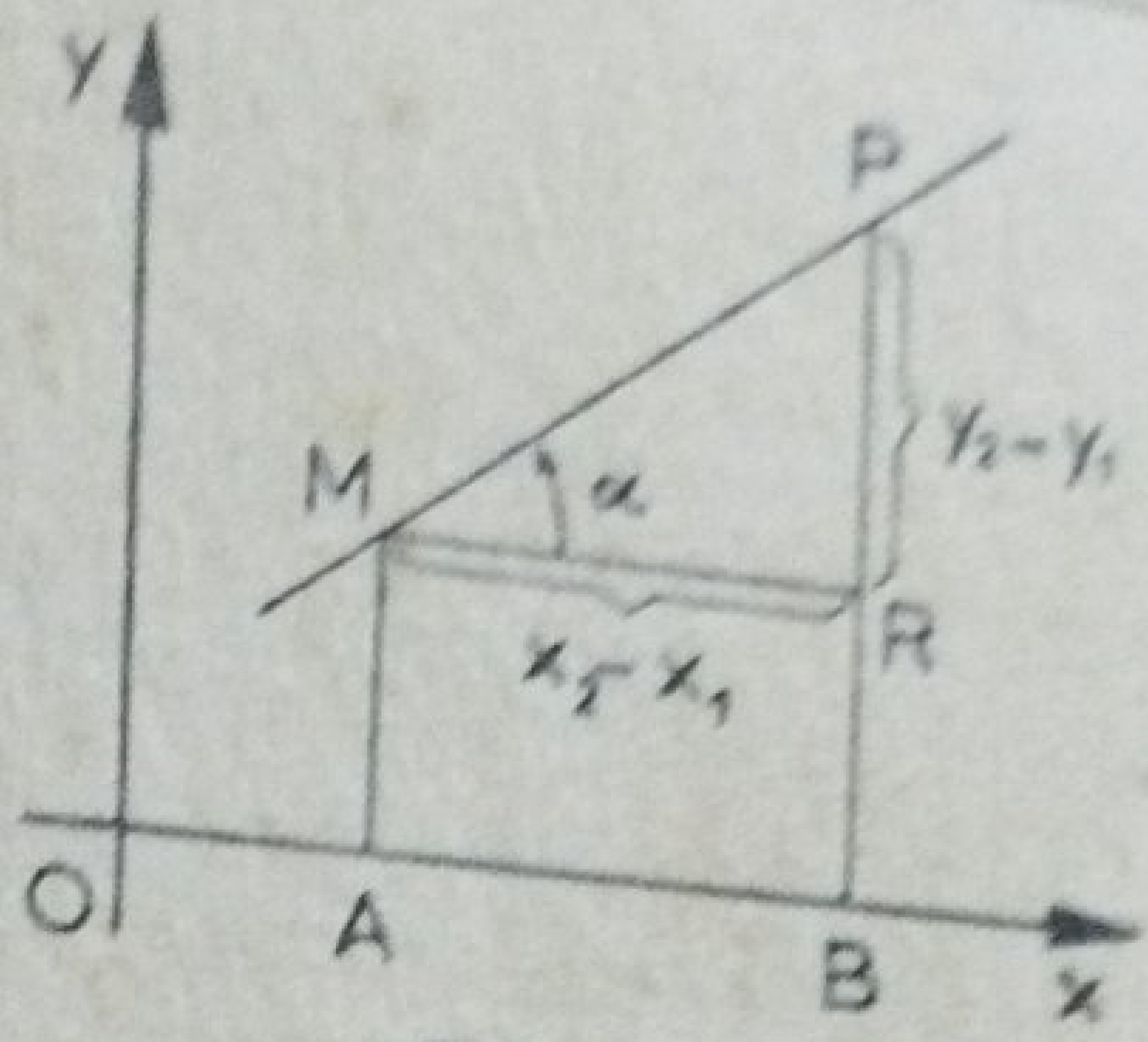

FIG. 37

Para um determinado valor de a, a reta (37) passará por P, isto é, as coordenadas dêsse ponto verificarão a equação (37) ou

$$y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1) \qquad (38)$$

Dividindo, membro a membro, a equação (37) pela equação (38), eliminamos a, obtendo a equação procurada

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (39)$$

Escrevendo essa equação sob a forma

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) \qquad (40)$$

verificamos que o coeficiente angular da reta MP é

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (41)$$

resultado que se torna claro à luz da fig. 37, visto que o coeficiente angular de MP é $tg\alpha$

A equação (39) pode, também, ser escrita sob a forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (42)$$

resultado que deixamos para o leitor verificar.

Por exemplo, a equação da reta definida pelos pontos (2, 1) e (4, —3) é

$$\frac{y-1}{-3-1} = \frac{x-2}{4-2} \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, após a simplificação, $y = -2x + 5$.

18. Condição de alinhamento de 3 pontos. Da forma (42) da equação da reta definida por dois pontos, conclui-se imediatamente que a condição para que três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) estejam sôbre uma mesma reta é

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

19. Exercício. *Achar a equação da mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos* $A(2, 3)$ e $B(6, 1)$.

RESOLUÇÃO: A mediatriz é a reta que passa pelo ponto M, meio do segmento AB, e é perpendicular a AB. As coordenadas de M são (**n.° 3**)

$$X = \frac{2+6}{2} = 4 \qquad y = \frac{3+1}{2} = 2$$

O coeficiente angular da reta AB é (**n.° 17**)

$$\frac{1-3}{6-2} = -\frac{1}{2}$$

Como a mediatriz é perpendicular a AB, seu coeficiente angular é 2 (**n.° 15, II**); logo, ela é a reta definida pelo ponto $M(4, 2)$ e pela direção $a = 2$, ou (**n.° 16**)

$$y - 2 = 2\,(x - 4) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 6$$

20. Intersecção de duas retas. Consideremos as retas definidas pelas equações

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Se essas retas se cortam num ponto (x_1, y_1), as coordenadas x_1 e y_1 devem satisfazer ambas as equações (44), isto é, devem ser solução do sistema formado por essas equações. Para achar, pois, o ponto de intersecção de duas retas, deve-se *resolver* o sistema formado por suas equações.

Discutamos, então, o problema à luz do *Teorema de Rouché* (*).

PRIMEIRA HIPÓTESE: *O determinante dos coeficientes das incógnitas não é nulo, ou*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$$

Essa condição equivale a

$$AB' \neq A'B \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} \neq \frac{A'}{B'} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad (45)$$

Nessas condições o sistema tem uma solução, que pode ser obtida aplicando-se a Regra de CRAMER (**) As retas são, pois, concorrentes. Chegariamos, também, a essa conclusão, observando a condição (45) em face da condição (31) (**n.º 15, I**) de paralelismo das retas (44).

SEGUNDA HIPÓTESE: *O determinante dos coeficientes das incógnitas é nulo, ou*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0$$

Essa condição equivale a

$$AB' = A'B \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad (46)$$

Como os quatro coeficientes não podem ser simultâneamente nulos, suponhamos $A \neq 0$. Formemos o determinante característico

$$D = \begin{vmatrix} A & -C \\ A' & -C' \end{vmatrix} = -(AC' - A'C) \quad (47)$$

1) Se $D \neq 0$, pelo teorema de ROUCHÉ, as equações são incompatíveis, isto é, o sistema não tem solução. A hipótese $D \neq 0$ corresponde a

$$AC' \neq A'C \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$$

(*) Vol. II, Cap. IV, n.º 5.

(**) Vol. II, Cap. IV, n.º 2.

condição que, combinada a (46), dá

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \tag{48}$$

Então, as retas (44) têm o mesmo coeficiente angular, mas são distintas, pois não têm ponto comum. São, pois, paralelas.

2) Se $D = 0$, pelo teorema de Rouché, o sistema tem uma infinidade de soluções, sendo uma incógnita arbitrária. Como a hipótese $D = 0$ equivale a

$$AC' = A'C \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$$

reunindo essa condição e a condição (46), obtemos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

As retas (44) são paralelas e têm uma infinidade de pontos comuns, isto é, coincidem. Em outras palavras, as equações (44) definem a mesma reta.

Resumo da discussão: Os resultados obtidos podem ser resumidos no seguinte quadro, ilustrado pelos gráficos da fig. 38:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'} & : \text{ O sistema tem solução; as retas são concorrentes.} \\[2ex] \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'} & : \text{ O sistema não tem solução; as retas são paralelas.} \\[2ex] \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} & : \text{ O sistema tem uma infinidade de soluções: as retas coincidem.} \end{cases}$$

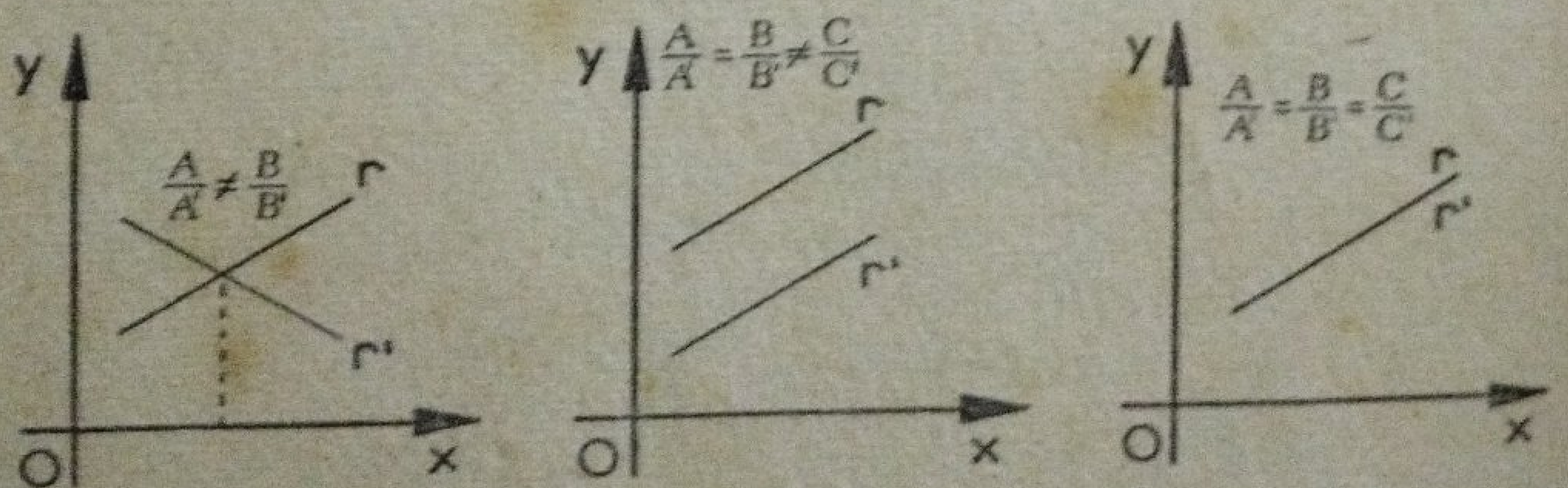

FIG. 38

21. Exemplos.

I. As retas $3x + 2y - 4 = 0$ e $x - 3y - 5 = 0$ cortam-se num ponto, isto é, são concorrentes, porque

$$\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-3}$$

Resolvendo o sistema por elas formado, encontra-se a solução $x = 2$, $y = -1$. Sua intersecção é, pois, o ponto $(2, -1)$.

II. As retas $2x - y + 1 = 0$ e $4x - 2y - 1 = 0$ são paralelas porque

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{-1}$$

O sistema por elas formado não tem solução.

III. As retas $x - y + 0{,}5 = 0$ e $2x - 2y + 1 = 0$ coincidem, visto que

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{0{,}5}{1}$$

22. Intersecções de uma reta com os eixos. Consideremos a reta definida pela equação

$$Ax + By + C = 0 \qquad (49)$$

Como a equação do eixo ox é $y = 0$ (**n.° 9**), sua intersecção com a reta (49) é o ponto cujas coordenadas são a solução do sistema

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ou seja o ponto de ordenada nula e de abcissa dada pela equação $Ax + C = 0$, obtida fazendo-se $y = 0$ em (49).

Do mesmo modo, o ponto de intersecção da reta (49) com o eixo $\overrightarrow{oy}$ tem para coordenadas a solução do sistema

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

isto é, sua abcissa é zero e sua ordenada é dada pela equação $By + C = 0$, obtida fazendo-se $x = 0$ em (49).

23. Sistemas de retas. Feixe de retas. Suponhamos que, na equação cartesiana (49) de uma reta, A, B e C sejam funções de um parâmetro m, isto é, a equação seja da forma

$$f_1(m)x + f_2(m)y + f_3(m) = 0 \qquad (50)$$

Então, a cada valor particular de m corresponde uma reta definida por (50). A equação (50) representa, pois, um sistema infinito de retas. Por exemplo, a equação

$$(m+1)x + (m-1)y + m^2 = 0$$

define um sistema de retas, entre as quais se destacam as seguintes, representadas na fig. 39: $x - y = 0$ $(m = 0)$;

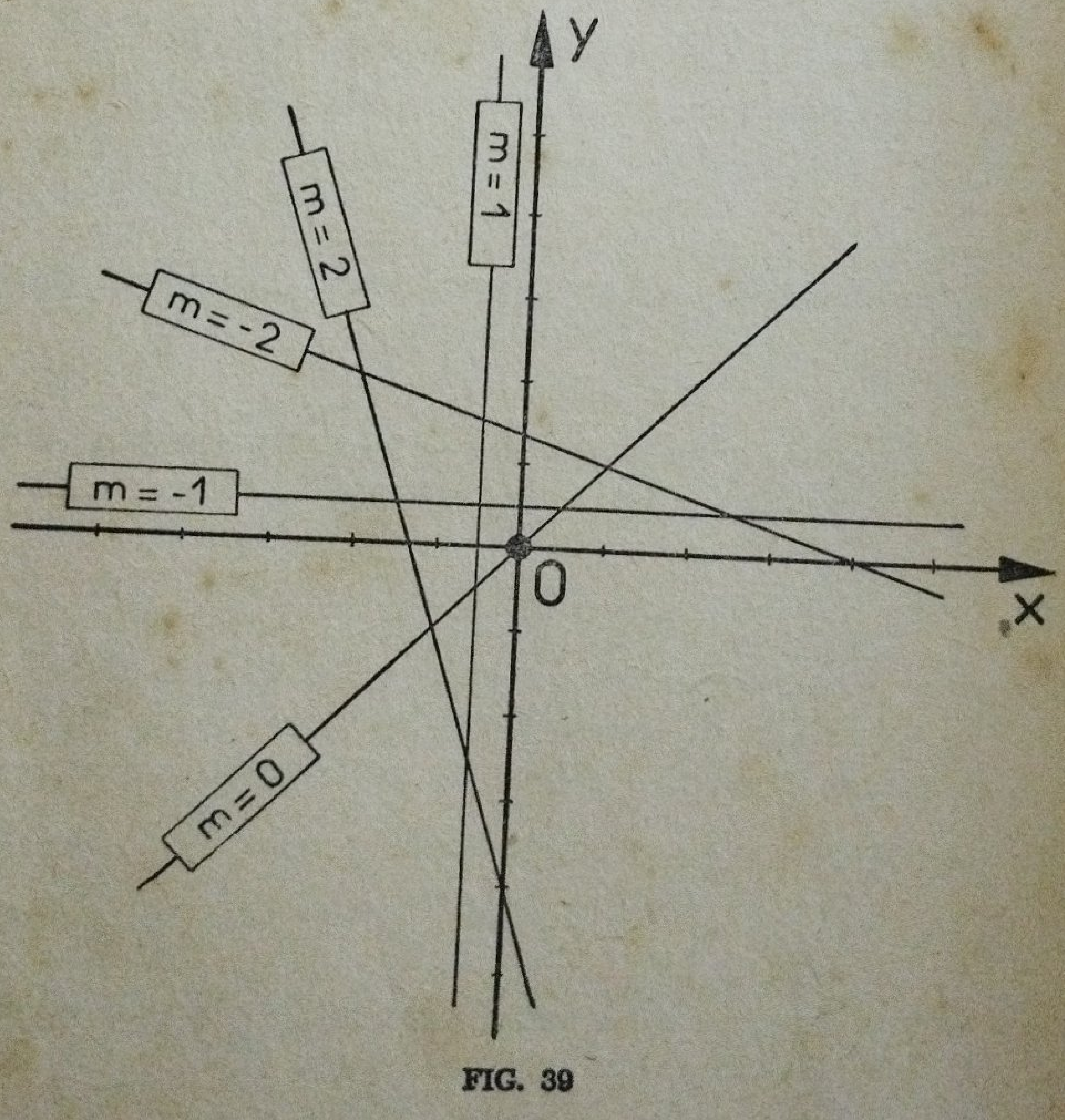

FIG. 39

$2x + 1 = 0$ $(m = 1)$; $-2y + 1 = 0$ $(m = -1)$;
$3x + y + 4 = 0$ $(m = 2)$ e $-x - 3y + 4 = 0$ $(m = -2)$.

Suponhamos que $f_1(m)$, $f_2(m)$ e $f_3(m)$ sejam funções lineares de m. Sejam

$$f_1(m) = A + A'm \quad f_2(m) = B + B'm \quad f_3(m) = C + C'm$$

Substituindo essas expressões em (50) e pondo m em evidência, resulta

$$Ax + By + C + m(A'x + B'y + C') = 0 \qquad (51)$$

Se as retas

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned} \qquad (52)$$

se encontram num ponto (x_1, y_1), as coordenadas x_1, e y_1, verificam a equação (51), qualquer que seja m. Então, (51) representa o *feixe de retas* concorrentes no ponto (x_1, y_1). (*)

Se as retas (52) são paralelas, (51) representa o *feixe de paralelas* a essas retas.

Se as retas (52) coincidem, as retas do sistema (51) também coincidem. (**)

24. Exercícios. *Caracterizar o sistema de retas, definido pela equação* $2mx + (1+m)y - 2 = 0$.

RESOLUÇÃO: Escrevendo a equação dada sob a forma

$$y - 2 + m(2x+y) = 0$$

e atendendo a que as retas $y - 2 = 0$ e $2x + y = 0$ se cortam no ponto $M(-1, 2)$, concluimos que a equação dada representa o feixe de retas concorrentes no ponto M.

25. Exercício. *Caracterizar o sistema de retas, definido pela equação* $(1+3m)x - 2(1+3m)y + 1 = 0$.

RESOLUÇÃO: Escrevendo a equação dada sob a forma

$$x - 2y + 1 + m(3x - 6y) = 0$$

(*) Denomina-se *feixe de retas* um sistema de retas *concorrentes* (num ponto próprio) ou *paralelas* (concorrentes no ponto impróprio).

(**) Deixamos para o leitor a verificação dêsses resultados, que sugerimos fazer após acompanhar os exercícios seguintes.

e atendendo a que as retas $x - 2y + 1 = 0$ e $3x - 6y = 0$ são paralelas, concluímos que a equação dada representa o feixe de retas paralelas a essas retas.

Êsse resultado poderia, também, ser obtido, escrevendo-se a equação dada na forma simplificada.

$$y = \frac{1 + 3m}{2(1+3m)}x + \frac{1}{2(1+3m)} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2(1+3m)}$$

e observando-se que o coeficiente angular da reta independe do valor de m, isto é, é o mesmo qualquer que seja m.

26. Exercício. *Achar a equação da reta que passa pelo ponto* (0, 1) *e pela intersecção das retas* $2x + 3 = 0$ e $x + y = 0$.

RESOLUÇÃO: A reta procurada pertence ao feixe

$$2x + 3 + m\ (x+y) = 0 \qquad (53)$$

Como passa pelo ponto (0, 1), as coordenadas dêsse ponto devem satisfazer a equação (53). Fazendo nela $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $3 + m = 0$, donde resulta $m = -3$. A equação pedida é, pois

$$2x + 3 - 3(x+y) = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3y - 3 = 0$$

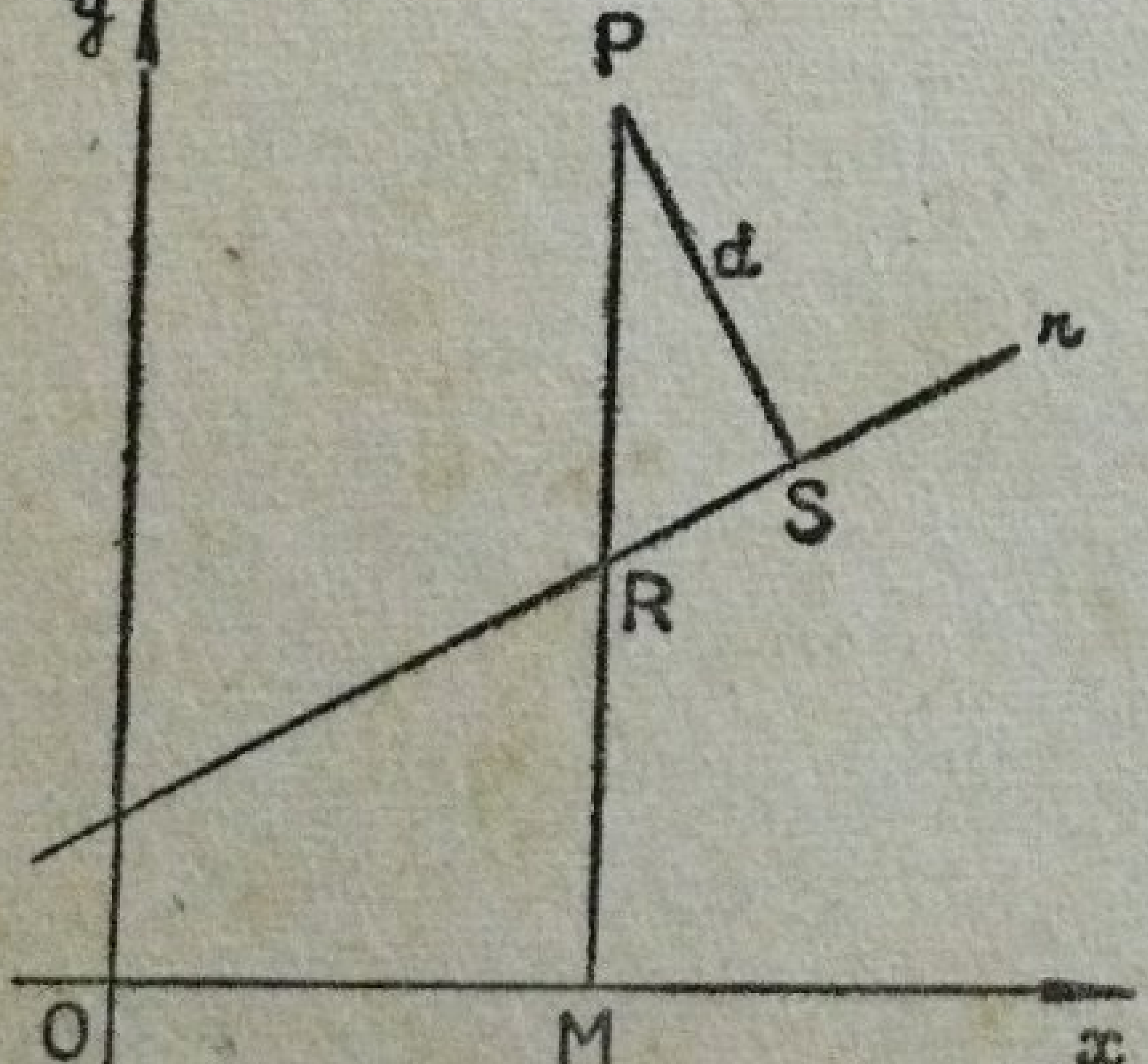

FIG. 40

27. Distância de um ponto a uma reta. Sejam r uma reta (fig. 40), definida pela equação

$$Ax + By + C = 0 \quad (54)$$

$P(x_1, y_1)$ um ponto não pertencente a ela e d a distância de P a r. Tracemos a perpendicular PM ao eixo $\overrightarrow{ox}$ e seja R sua intersecção com r. Logo, a abcissa de R será x_1. Seja y_2 sua ordenada. Como R pertence a r, suas coordenadas x_1 e y_2 devem satisfazer (54), ou

$$Ax_1 + By_2 + C = 0 \quad \text{donde} \quad y_2 = -\frac{Ax_1 + C}{B}$$

Então,

$$RP = MP - MR = y_1 - y_2 = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B}$$

sendo essa diferença positiva ou negativa conforme P esteja acima ou abaixo de R.

Sendo α o ângulo $\widehat{ox, r}$ e sendo $tg\alpha = -\frac{A}{B}$, resulta

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

O triângulo retângulo PSR dá-nos a relação

$$d = PS = RP \cos\widehat{RPS} = RP \cos\alpha$$

Substituindo RP e $\cos\alpha$ por seus valores acima e observando que, sendo d uma distância, sua medida é dada por um número absoluto, podemos escrever

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \qquad (55)$$

fórmula que dá a distância de P a r.

Se a reta r fôsse dada pela equação $y = ax + b$, ou $y - ax - b = 0$, a fórmula (55) tornar-se-ia

$$d = \left|\frac{y_1 - ax_1 - b}{\sqrt{1 + a^2}}\right| \qquad (56)$$

visto que, nêsse caso, se tem $A = -a$, $B = 1$ e $C = -b$.

Em particular, se o ponto P está na origem, isto é, se $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$, as fórmulas anteriores reduzem-se, respectivamente, a

$$d = \left|\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \quad \text{e} \quad d = \left|\frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}}\right| \qquad (57)$$

e dão a distância da origem às retas $Ax + By + C = 0$ e $y = ax + b$, respectivamente.

Por exemplo, a distância do ponto $(3, -1)$ à reta $3x + 4y - 10 = 0$ é

$$d = \left| \frac{3 \times 3 + 4(-1) - 10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 1$$

28. Bissetrizes de duas retas. Consideremos as retas definidas por suas equações

$$Ax + By + C = 0 \qquad A'x + B'y + C' = 0 \qquad (58)$$

As bissetrizes dos ângulos por elas formados são os lugares geométricos dos pontos (x, y) cujas distâncias às retas (58) são iguais. Sendo essas distâncias, respectivamente, os valores absolutos das expressões

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{e} \quad \frac{A'x + B'y + C'}{\pm \sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

e levando em conta tôdas as combinações de sinais em face da condição de igualdade de valores absolutos, concluimos que as equações das bissetrizes são

$$\frac{Ax + By + C}{|\sqrt{A^2 + B^2}|} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{|\sqrt{A'^2 + B'^2}|} \qquad (59)$$

29. Exercício *Achar as equações das bissetrizes das retas $y - 4 = 0$ e $4x + 3y = 24$.*

Resolução: De acôrdo com a fórmula (59), temos

$$\frac{y - 4}{|\sqrt{1}|} = \pm \frac{4x + 3y - 24}{|\sqrt{4^2 + 3^2}|}$$

ou

$$y - 4 = \pm \frac{4x + 3y - 24}{5}$$

As bissetrizes são, pois

$$y - 4 = \frac{4x + 3y - 24}{5} \quad \text{ou} \quad 2x - y - 2 = 0$$

e $$y - 4 = -\frac{4x + 3y - 24}{5} \quad \text{ou} \quad x + 2y - 11 = 0$$

30. Área de um triângulo. Consideremos o triângulo ABC (fig. 41), cujos vértices são os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$. Sua área é o semi-produto da base BC pela altura AH, ou

$$S = \frac{1}{2} BC \times AH \qquad (60)$$

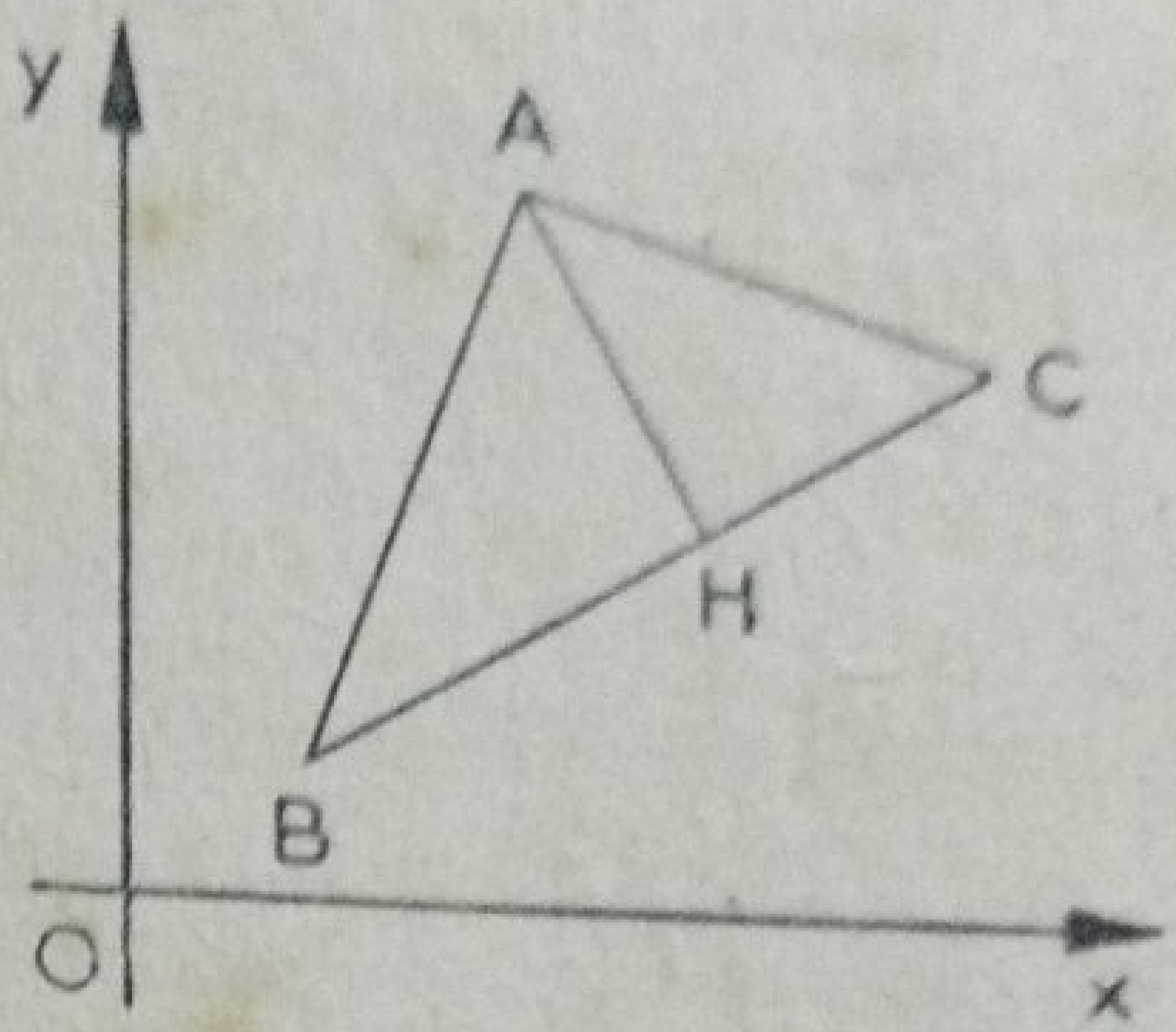

FIG. 41

A medida da base BC é a distância dos pontos B e C ou (n.º 1)

$$BC = \left| \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right| \qquad (61)$$

A altura AH tem para medida a distância do ponto A à reta BC. A equação dessa reta é (n.º 17)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (62)$$

Desenvolvendo o determinante do primeiro membro segundo os elementos da primeira linha (*), obtemos

$$\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$-(y_3 - y_2)\,x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0 \qquad (63)$$

De acôrdo com a fórmula (55) a distância do ponto $A(x_1, y_1)$ à reta (61) é

$$AH = \left| \frac{-(y_3 - y_2)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \right|$$

ou, escrevendo o numerador sob a forma de determinate,

$$AH = \frac{1}{\left| \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right|} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (64)$$

sendo êsse determinante tomado em valor absoluto.

(*) **Vol. II Cap. III, n.º 34.**

Substituindo as expressões de BC e AH, dadas, respectivamente, por (61) e (64), na igualdade (60), e simplificando-a, obtemos a fórmula da área do triângulo

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (65)$$

na qual se considera o valor absoluto do determinante.

Calculemos, por exemplo, a área do triângulo, cujos vértices são a origem e os pontos (2, 4) e (9, 3). Sendo o determinante da fórmula (63) igual a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 36 = -30$$

concluimos que a área é $S = \frac{1}{2} \times 30 = 15$ (em unidades correspondentes de área).

31. Exercício. *Achar a área do triângulo formado pelo eixo ox e pelas bissetrizes das retas* $y - 4 = 0$ *e* $4x + 3y = 24$.

Resolução: As equações das bissetrizes foram obtidas no exercício do **n.º 29** e são

$$2x - y - 2 = 0 \qquad\qquad x + 2y - 11 = 0$$

Como a equação do eixo ox é $y = 0$, as coordenadas dos vértices do triângulo são as soluções dos sistemas

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 11 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ou, respectivamente,

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante da fórmula (65), obtemos

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\,(11 - 1) = -40$$

Logo, de acôrdo com a mesma fórmula, a área procurada é

$$S = \frac{1}{2} \times 40 = 20 \text{ (unidades de área).}$$

32. Exercício. *Achar as equações das retas que passam pelo ponto* (1, 7) *e distam* 5 *unidades da origem.*

RESOLUÇÃO: A equação das retas que passam pelo ponto (1, 7) é

$$y - 7 = a\,(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad ax - y + 7 - a = 0$$

Sendo $\left| \dfrac{7 - a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|$ sua distância à origem (n.º 27) de acôrdo com o problema devemos ter

$$\left| \frac{7 - a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right| = 5$$

Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado, eliminando o denominador da equação e reduzindo os têrmos semelhantes, obtemos a equação do segundo grau

$$12a^2 + 7a - 12 = 0$$

cujas raízes são $\dfrac{3}{4}$ e $-\dfrac{4}{3}$. As retas pedidas são, pois,

$$y - 7 = \frac{3}{4}\,(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad 3x - 4y + 25 = 0$$

e

$$y - 7 = -\frac{4}{3}\,(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad 4x + 3y - 25 = 0$$

33. Exercício. *Demonstrar analìticamente que as perpendiculares baixadas dos vértices de um triângulo sôbre os lados opostos se encontram num mesmo ponto.*

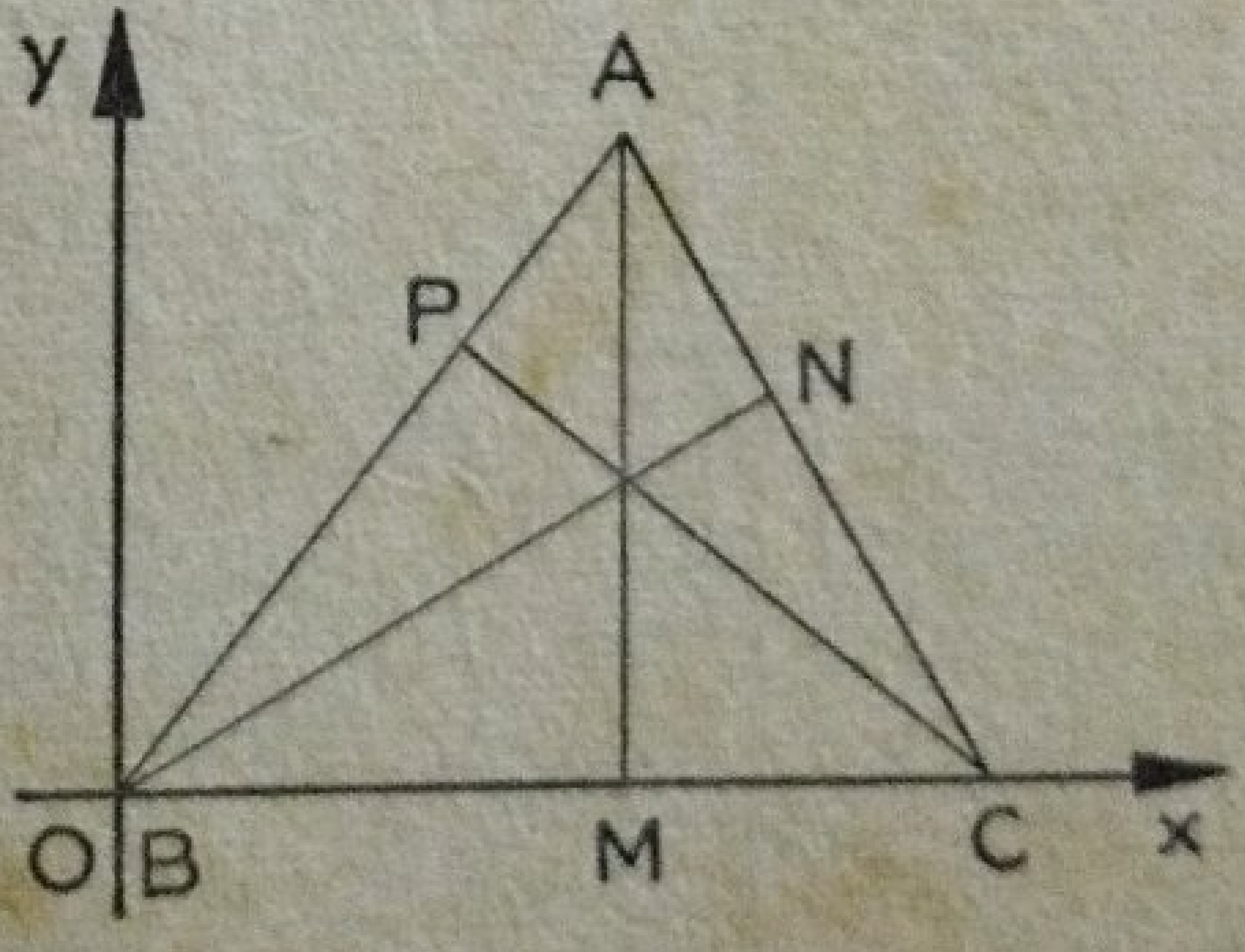

FIG. 42

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade e com a vantagem de simplificar a demonstração, podemos supor que um dos vértices esteja na origem e um dos lados sôbre um dos eixos. Sejam, pois, $A(a, b)$, $B(0, 0)$ e $C(c, 0)$ (fig. 42) os vértices do triângulo.

A equação da perpendicular AM é

$$x = a \tag{66}$$

Como o coeficiente angular da reta AC é $\dfrac{b}{a-c}$ (**n.º 17**) e a reta BN é a perpendicular baixada da origem sôbre AC, a equação de BN é

$$y = \frac{c-a}{b}x \quad \text{ou} \quad (a-c)x + by = 0 \tag{67}$$

De modo análogo, sendo $\dfrac{b}{a}$ o coeficiente angular da reta AB e sendo CP a perpendicular a essa reta tirada do ponto $C(c, 0)$, sua equação é

$$y = -\frac{a}{b}(x-c) \quad \text{ou} \quad ax + by = ac \tag{68}$$

Resta provar que o sistema formado pelas equações (66), (67) e (68) tem uma solução. O sistema formado pelas equações (66) e (67) tem uma solução, visto que o determinante dos coeficientes de x e y

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a-c & b \end{vmatrix} = b$$

é diferente de zero, pois, do contrário, o ponto A estaria sôbre o eixo ox e o triângulo se reduziria a três pontos colineares.

Por outro lado, como o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a-c & b & 0 \\ a & b & ac \end{vmatrix}$$

formado pelos coeficientes das incógnitas e pelos têrmos conhecidos das três equações é nulo (resultado que deixamos para o leitor verificar), as equações são compatíveis, isto é, a solução do sistema formado pelas equações (66) e (67) satisfaz a equação (68). Logo, as três retas cortam-se num mesmo ponto.

34. Exercícios.

1. Calcular os lados do triângulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(1, 3)$ e $C(1, -1)$.
Resp.: $AB = 3$, $BC = 4$ e $AC = 5$

2. Definir a natureza e calcular o perímetro do triângulo cujos vértices são $A(3, 1)$, $B(4, -4)$ e $C(-2, 2)$.
Resp.: isósceles; $2p = 2\sqrt{26} + 6\sqrt{2}$

3. Calcular o perímetro do quadrado cujo centro é o ponto $(2, 0)$ sendo um de seus vértices o ponto $(-1, -1)$.
Resp.: $8\sqrt{5}$

(Sugestão: Observar que a distância do centro ao vértice é a semidiagonal).

4. Calcular as coordenadas dos pontos distantes 3 unidades dos pontos $(-2, -1)$ e $(1, 2)$.
Resp.: $(-2, 2)$ e $(1, -1)$

5. Qual o ponto do eixo ox equidistante dos pontos $(-2, 2)$ e $(2, 6)$?
Resp.: $(4, 0)$

6. Em que ponto a mediatriz do segmento de extremidades $(3, 1)$ e $(5, -3)$ corta o eixo $\overrightarrow{oy}$?
Resp.: $(0, -3)$

7. Calcular a de modo que os pontos $(-2, -3)$, $(a, -1)$ e $(4, 1)$ pertençam à mesma reta.
Resp.: $a = 1$

8 Dados os pontos $A(-4, -1)$ e $B(4, 3)$, calcular as coordenadas do ponto M que divide o segmento AB na razão $\dfrac{(MA)}{(MB)} = -\dfrac{1}{3}$.
Resp.: $(-2, 0)$

9. Os pontos $A(-2, -3)$ e $B(2, 5)$ são vértices consecutivos de um retângulo, cujas diagonais se cortam no ponto $M(2, 0)$. Calcular os outros vértices.
Resp.: $(6, 3)$ e $(2, -5)$

(Sugestão: Os vértices procurados são os pontos C e D que dividem AM e BM, respectivamente, na razão $\dfrac{(CA)}{(CM)} = \dfrac{(DB)}{(DM)} = 2$)

10. Dados os pontos $A(-1, 1)$ e $B(8, -2)$, calcular os pontos de trissecção do segmento AB.
Resp.: $(2, 0)$ e $(5, -1)$

11. Os pontos A, B, C e D, situados sôbre uma mesma reta definem três segmentos AB, BC e CD, consecutivos e iguais. São dados $A(-2, -1)$ e $C(4, 1)$. Calcular B e D.
Resp.: $B(1, 0)$, $D(7, 2)$

12. Calcular o ponto A situado sôbre ox e o ponto B situado sôbre oy, sabendo-se que o meio do segmento AB é o ponto $(3, -1)$.
Resp.: $A(6, 0)$ e $B(0, -2)$

13. Achar a equação da reta que passa pelo ponto (2, 0) e é paralela à reta $y = 2x$. *Resp.:* $y = 2x - 4$

14. Achar a equação da perpendicular baixada do ponto $(-1, 3)$ sôbre a reta $x - y = 0$. *Resp.:* $y = 2 - x$

15. Achar a equação da reta que passa pelo ponto $(-1, 0)$ e faz com o eixo ox um ângulo cuja tangente é $\frac{3}{4}$.

Resp.: $3x - 4y + 3 = 0$

16. Achar a equação da reta que passa pelo ponto (3, 2) e pela intersecção das retas $y = 3(1 - x)$ e $y = 2(x - 1)$.

Resp.: $x - y - 1 = 0$

17. Achar a equação da reta que passa pela intersecção das retas $x - y = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$ e é paralela à reta $x + y = 0$.

Resp.: $x + y = 2$

18. Achar a equação da perpendicular tirada da origem sôbre à reta $x + 2y - 2 = 0$. *Resp.:* $y = 2x$

19. Calcular a área do triângulo formado pela reta $x - 2y + 4 = 0$ e pelos eixos coordenados. *Resp.:* 4 (unidades de área).

20. Achar a equação da mediatriz do segmento determinado pelos eixos coordenados sôbre a reta $x + 3y - 6 = 0$.

Resp.: $y = 3x - 8$

21. Calcular a altura, baixada do vértice A, do triângulo cujos vértices são $A(4, 3)$, $B(0, 0)$ e $C(6, -3)$.

Resp.: $2\sqrt{5}$

22 Calcular o ângulo agudo formado pelas retas $3x - y + 2 = 0$ e $y = x$.

Resp.: $\text{arc } tg \frac{1}{2}$

23. Calcular o ângulo agudo que faz a reta $2y = 3x$ com a reta definida pelos pontos $(-2, 0)$ e $(1, -3)$.

Resp.: $\text{arc } tg\, 5$

24. Achar as equações das retas que passam pelo ponto (1, 2) e fazem ângulos de 45° com a reta $2x - y = 0$.

Resp.: $3x + y - 5 = 0$ e $x - 3y + 5 = 0$

25. Dados os pontos $A(-3, 0)$, $B(1, 4)$ e $C(1, -2)$, achar a equação da mediana do triângulo ABC tirada do vértice C.

Resp.: $2x + y = 0$

26. Calcular as coordenadas do pé da perpendicular baixada do ponto $(3, -3)$ sôbre a reta $x - 2y - 4 = 0$.

Resp.: $(2, -1)$

27. Calcular a distância das paralelas $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 2$.

Resp.: $\sqrt{5}$

(Sugestão: Calcular a distância a uma das retas de um ponto qualquer situado sôbre a outra.)

28. Dados os pontos $A(3, 7)$, $B(1, 2)$ e $C(11, 0)$, escrever sob a forma segmentária a equação da reta que passa pelo baricentro do triângulo ABC e é paralela ao lado BC.

Resp.: $\dfrac{x}{20} + \dfrac{y}{4} = 1$

29. Calcular a distância do ponto $(5, 4)$ à perpendicular à reta $x + 2y = 8$ tirada do ponto $(0, -1)$.

Resp.: $\sqrt{5}$

30. Calcular m de modo que a reta $mx + 2y + m - 5 = 0$ passe pela intersecção das retas $x + y = 0$ e $x - 3y = 8$.

Resp.: $m = 3$

31. Achar as equações das retas que passam pelo ponto $(3, 0)$ e distam 2 unidades do ponto $(2, 2)$.

Resp.: $y = 0$ (eixo $\overrightarrow{ox}$) e $4x - 3y = 12$

32. Dados os vértices opostos $A(0, 3)$ e $B(4, -1)$ de um paralelogramo e um outro vértice $C(6, 3)$, calcular o comprimento da diagonal de vértice C e a equação da reta que contém essa diagonal.

Resp.: $4\sqrt{5}$ e $x - 2y = 0$

33. Calcular as coordenadas do ponto situado sôbre a reta $y = x - 2$ e equidistante dos pontos $(1, 1)$ e $(3, 5)$.

Resp.: $(4, 2)$

34. Achar as equações das retas perpendiculares à reta $3x - 4y = 0$ e distantes 5 unidades da origem.

Resp.: $4x + 3y \pm 25 = 0$

35. Demonstrar que o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos (a, b) e (b, a) é a reta $y = x$ (primeira bissetriz).
36. Demonstrar analìticamente que o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos de um segmento de reta é a mediatriz dêsse segmento.
37. Demonstrar analìticamente que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto.
38. Demonstrar analìticamente que dois vértices quaisquer de um triângulo distam igualmente da mediana relativa ao terceiro vértice.

CAPÍTULO V

ESTUDO ANALÍTICO DA CIRCUNFERÊNCIA

1. Equação cartesiana da circunferência. Consideremos a circunferência cujo centro é o ponto $C(\alpha, \beta)$ (fig. 43) e cujo raio é r. Seja $M(x, y)$ um ponto qualquer da curva. Tracemos as paralelas CQ e MR a $\overrightarrow{oy}$ e a paralela CP a ox. Temos

$$\alpha = (OQ) \qquad \beta = (QC) \qquad x = (OR) \qquad y = (RM)$$

e, portanto,

$$(C\,P) = (Q\,R) = (OR) - (O\,Q) = x - \alpha$$
$$(PM) = (RM) - (RP) = (RM) - (QC) = y - \beta \qquad (1)$$

Em qualquer posição do ponto M sôbre a circunferência o triângulo retângulo CPM dá-nos a relação

$$\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{MC}^2 \text{ (*)} \qquad (2)$$

Como MC é o raio r e atendendo aos resultados (1), a igualdade (2) torna-se

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \qquad (3)$$

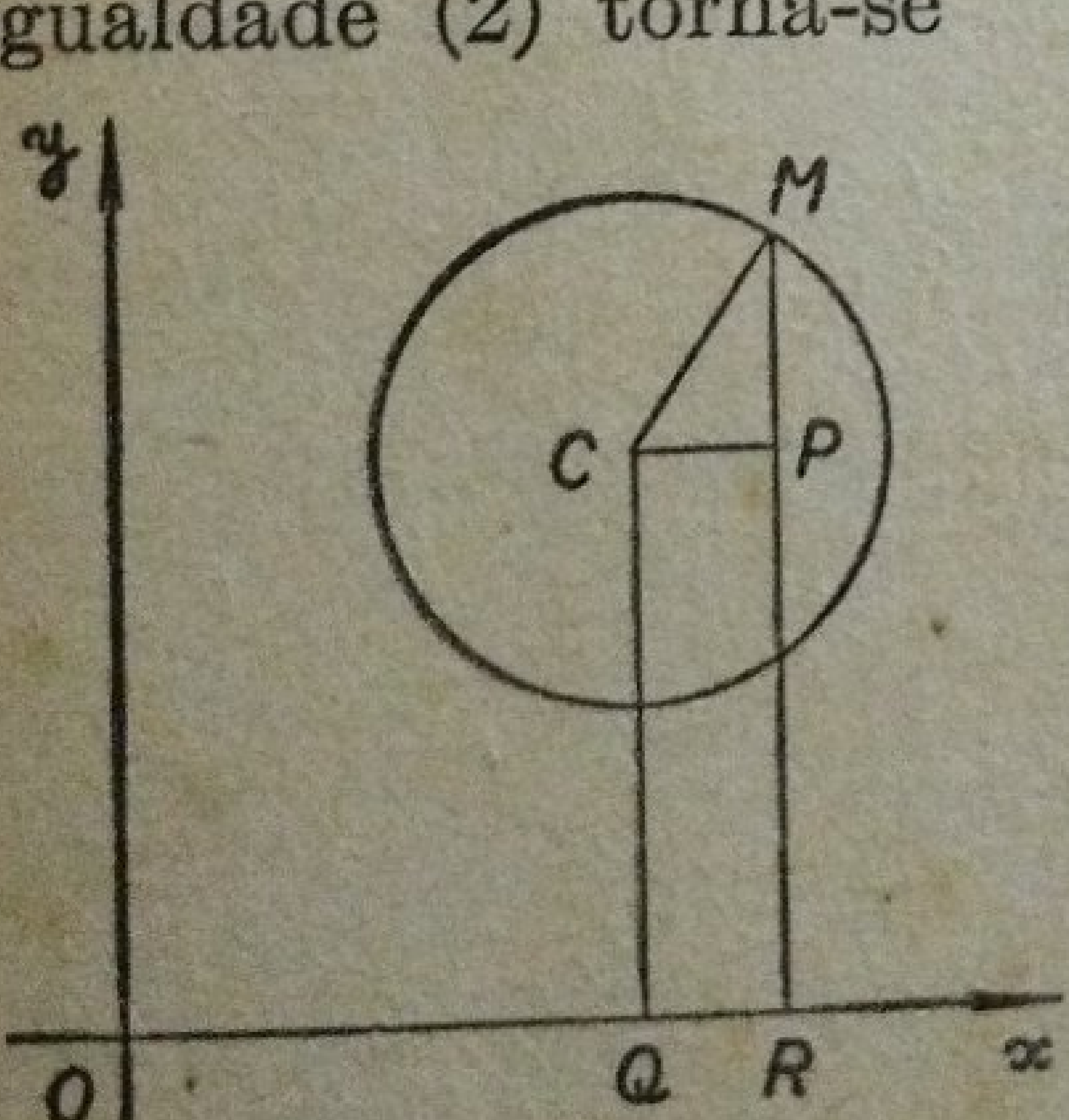

FIG. 43

ou seja, a equação da circunferência de raio r e centro (α, β).

Se, em particular, o centro C está na origem, isto é, se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a equação (3) reduz-se à forma

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (4)$$

Por exemplo, a equação da circunferência de centro $(2, -3)$ e raio 5 é

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

(*) Se MC é paralela a um dois eixos, o triângulo se reduz ao segmento MC, sendo todavia válida a relação, como pode o leitor comprovar.

e a equação da circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro na origem é

$$x^2 + y^2 = 2$$

2. A equação geral do segundo grau e a circunferência. Desenvolvendo os quadrados do primeiro membro de (3), obtemos

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0 \tag{5}$$

Podemos, então, concluir que a forma geral da equação do segundo grau com duas variáveis x e y, que representa uma circunferência é

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \tag{6}$$

sendo, portanto, desprovida do têrmo do segundo grau em xy.

Se as equações (5) e (6) representam a mesma curva, os coeficientes dos têrmos semelhantes são proporcionais, ou

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} = \frac{-2\alpha}{C} = \frac{-2\beta}{D} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}{E}$$

do que decorrem

$$B = A \quad -\frac{2\alpha}{C} = \frac{1}{A} \quad -\frac{2\beta}{D} = \frac{1}{A} \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}{\mathrm{E}} = \frac{1}{A} \tag{7}$$

Da segunda e da terceira resultam, respectivamente,

$$\alpha = -\frac{C}{2A} \qquad \beta = -\frac{D}{2A} \tag{8}$$

Substituindo êsses resultados na última das igualdades (7) e resolvendo-a em relação a r, obtemos

$$r = \left| \frac{\sqrt{C^2 + D^2 - 4AE}}{2A} \right| \tag{9}$$

Fazendo $B = A$ na equação (6) e resolvendo-a em relação a y, obtemos

$$y = -\frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{-4A^2x^2 - 4ACx + D^2 - 4AE} \tag{10}$$

O discriminante do trinômio

$$f(x) = -4A^2x^2 - 4ACx + D^2 - 4AE \qquad (11)$$

é

$$b^2 - 4ac = 16A^2(C^2 + D^2 - 4AE) \qquad (12)$$

sendo suas raízes

$$x = -\frac{C}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{C^2 + D^2 - 4AE} \qquad (13)$$

Podemos, então, formular três hipóteses:

I. $C^2 + D^2 - 4AE > 0$. O trinômio (11) tem raízes reais e desiguais (13) e é positivo para os valores de x compreendidos entre essas raízes, visto que o coeficiente $-4A^2$ de x^2 é negativo por ser $A \neq 0$ (*). A equação (6) ou (10) representa a circunferência cujo centro tem as coordenadas α e β, dadas por (8) e cujo raio é dado por (9).

II. $C^2 + D^2 - 4AE = 0$. O trinômio (11) tem as raízes iguais a $-\frac{C}{2A}$ e é negativo para qualquer valor real de x diferente dessas raízes. Para $x = -\frac{C}{2A}$, como o trinômio (11) é nulo, a equação (10) dá $y = -\frac{D}{2A}$. Êsse é, então, o único par de valores reais de x e y que verificam a equação (10) ou (6). Esta representa, pois, o ponto de coordenadas (8) ou, por extensão, a circunferência de raio nulo cujo centro é êsse ponto.

III. $C^2 + D^2 - 4AE > 0$. O trinômio (11) não tem raízes reais e é negativo para qualquer valor real de x. Pela fórmula (10) vê-se, então, que para qualquer valor real de x o valor correspondente de y não é real, isto é, nenhum par de valores reais de x e y verifica a equação (10) ou (6). Por extensão, diz-se que ela representa uma circunferência imaginária.

3. Exercício. *Definir a linha representada pela equação*

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0 \qquad (14)$$

(*) Se fôsse $A = B = O$, a equação (6) seria do primeiro grau e representaria uma reta (Cap. IV, n.º 8).

Resolução: A equação dada é da forma (6) e verifica a condição $A = B$. Podemos solucionar o problema ou por um artifício simples ou utilizando os resultados teóricos do (n.º 2).

I. Apliquemos, em primeiro lugar, o artifício. Escrevamos a equação dada alterando convenientemente a ordem de seus têrmos

$$x^2 - 8x + y^2 + 2y = -8$$

Observando que, se somarmos 16 e 1, respectivamente, nos binômios $x^2 - 8x$ e $y^2 + 2y$, obtemos trinômios quadrados, podemos escrever a equação anterior do seguinte modo

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 16 + 1 - 8$$

ou

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

Comparando essa equação com a forma geral (3), concluimos que ela representa a circunferência de raio 3 e centro $(4, -1)$.

II. Comparando a equação (14) com a forma geral (6), obtemos os valores

$$A = B = 1 \qquad C = -8 \qquad D = 2 \qquad E = 8$$

Logo

$$C^2 + D^2 - 4AE = 64 + 4 - 4 \times 8 = 36 > 0$$

Então, a equação (14) representa a circunferência cujo raio é

$$r = \left| \frac{\sqrt{C^2 + D^2 - 4AE}}{2A} \right| = \left| \frac{\sqrt{36}}{2} \right| = 3$$

e cujo centro (α, β) tem para coordenadas

$$\alpha = -\frac{C}{2A} = -\frac{-8}{2} = 4 \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{D}{2A} = -\frac{2}{2} = -1$$

4. Observação. O leitor deve ter notado a conveniência de resolver o problema pelo artifício indicado: não exige ter-se de memória os resultados teóricos do **n.º 2.** Por outro lado é muito simples completar os quadrados do primeiro membro. Basta ver que os binômios são da forma $x^2 + px$ (ou $y^2 + py$)

e mediante o acréscimo de uma constante tornam-se o quadrado de um binômio da forma $x + a$ (ou $y + a$). Para obter a é suficiente observar que px é o duplo produto de x por a. Logo, dividindo-se px por $2x$, obtém-se a. A constante que se deve adicionar é, portanto, a^2.

Consideremos, por exemplo, o binômio $x^2 + 3x$. De acôrdo com o que foi dito, é $a = \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$. Logo, adicionando $\dfrac{9}{4}$ ao binômio dado, obtemos

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

5. Exercício. *Definir a linha representada pela equação*

$$36x^2 + 36y^2 - 36x + 48y + 25 = 0$$

Resolução: A equação é da forma (6) e satisfaz à condição $A = B$. Dividindo-a por 36 e reagrupando seus têrmos obtemos

$$x^2 - x + y^2 + \frac{4y}{3} = -\frac{25}{36}$$

ou, completando os quadrados pelo processo indicado no (nº 4)

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + \frac{4y}{3} + \frac{4}{9} = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{25}{36}$$

isto é,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

A equação representa, pois, o ponto $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ ou a circunferência de raio nulo cujo centro é êsse ponto.

6. Exercício. *Definir a linha representada pela equação*

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 5 = 0$$

Resolução: A equação é da forma (6) e satisfaz à condição $A = B$. Podemos, pois, escrever sucessivamente

$$x^2 + x + y^2 = -\frac{5}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = -1$$

A equação não tem representação gráfica no plano cartesiano, pois nenhum par de valores reais de x e y pode verificá-la, visto que a soma dos quadrados de números reais jamais pode ser negativa.

7. Circunferência definida por três pontos. Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ três pontos não em linha reta.

Seja

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \tag{15}$$

a equação da circunferência que passa por êsses pontos. Logo, ela deve ser verificada pelas coordenadas dêsses pontos. Substituindo, então, na equação acima, x e y sucessivamente pelas coordenadas de A, B e C obtemos, o sistema de três equações com três incógnitas α, β e r

$$\begin{cases} (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2 \\ (x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = r^2 \\ (x_3 - \alpha)^2 + (y_3 - \beta)^2 = r^2 \end{cases} \tag{16}$$

Eliminando r entre a primeira e a segunda equações e a seguir entre a primeira e a terceira, desenvolvendo os quadrados e reduzindo os têrmos semelhantes, obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2(x_2 - x_1)\,\alpha + 2(y_2 - y_1)\beta = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ 2(x_3 - x_1)\,\alpha + 2(y_3 - y_1)\beta = x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 \end{cases} \tag{17}$$

cujo determinante dos coeficientes das incógnitas é

$$\triangle = 4 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Como, por hipótese, A, B e C não pertencem a uma mesma reta, o determinante $\triangle$ é diferente de zero (**Cap. IV, n.° 18**).

Então, o sistema (17) tem uma solução. Substituindo numa qualquer das equações (16) os valores de α e β, obtidos de (17), tiramos o valor de r. Substituindo êsses valores de α, β e r em (15), obtemos a equação procurada.

8. Exercício. *Achar a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(0, -2)$, $B(3, -3)$ e $C(8, 2)$.*

RESOLUÇÃO: Sendo $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ essa equação, de acôrdo com o que foi explicado, devemos ter

$$\begin{cases} (-\alpha)^2 + (-2-\beta)^2 = r^2 \\ (3-\alpha)^2 + (-3-\beta)^2 = r^2 \\ (8-\alpha)^2 + (2-\beta)^2 = r^2 \end{cases} \tag{18}$$

Eliminando r na forma indicada, resulta

$$\begin{cases} (-\alpha)^2 + (-2-\beta)^2 = (3-\alpha)^2 + (-3-\beta)^2 \\ (-\alpha)^2 + (-2-\beta)^2 = (8-\alpha)^2 + (2-\beta)^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo os quadrados em ambos os membros dessas equações e reduzindo os têrmos semelhantes, obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = 8 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Substituindo êsses valores numa qualquer das equações (18), obtemos $r = 5$.

A equação procurada é, pois,

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

ou

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

9. Intersecção de uma reta e uma circunferência. Consideremos a circunferência de equação

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \tag{19}$$

e a reta definida por

$$Ax + By + C = 0 \tag{20}$$

As coordenadas dos pontos comuns à circunferência (19) e à reta (20) são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Êste é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + \left(-\dfrac{Ax+C}{B} - \beta\right)^2 = r^2 \\ y = -\dfrac{Ax+C}{B} \end{cases} \tag{22}$$

obtido, resolvendo-se a segunda equação de (21) em relação a y e substituindo-se essa expressão na primeira equação.

Como a primeira equação de (22) é do segundo grau com uma incógnita x, três casos podem ocorrer:

1.°) *Suas raizes são reais e desiguais:* o sistema (22) tem duas soluções distintas, isto é, a reta (20) corta a circunferência (19) em dois pontos distintos.

2.°) *Suas raízes são reais e iguais:* o sistema (22) tem uma única solução, isto é, a reta e a circunferência têm apenas um ponto comum, sendo, portanto, tangentes.

3.°) *Suas raizes não são reais:* o sistema (22) não têm solução, isto é, a reta e a circunferência não têm ponto comum, sendo, portanto, a reta exterior à circunferência.

10. Exercício. *Achar os pontos de intersecção da circunferência $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ com a reta $4x - 3y + 6 = 0$.*

Resolução: Devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0 \\ 4x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação em relação a y e substituindo sua expressão na primeira, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2 + \left(\dfrac{4x}{3} + 2\right)^2 - 4\left(\dfrac{4x}{3} + 2\right) - 21 = 0 \\ y = \dfrac{4x}{3} + 2 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação obtemos as raízes $x' = 3$ e $x'' = -3$, donde as soluções do sistema

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

A reta corta, pois, a circunferência nos pontos $(3, 6)$ e $(-3, -2)$.

11. Exercício. *Achar os pontos de intersecção da reta* $x + 4 = 0$ *com a circunferência* $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Resolução: Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases}$$

obtemos a solução única $x = -4$, $y = 2$. A reta é, pois, tangente à circunferência no ponto $(-4, 2)$.

12. Exercício. *Calcular m de modo que a reta* $y = mx - 6$ *seja tangente à circunferência* $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução: Resolvamos o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = mx - 6 \end{cases}$$

Eliminando y entre as duas equações, obtemos a equação

$$(1+m^2)x^2 - 12mx + 32 = 0$$

cujas raízes devem ser iguais. Logo, seu discriminante deve ser nulo, ou

$$144m^2 - 4 \times 32\,(1+m^2) = 0$$

donde resulta $m = \pm 2\sqrt{2}$. As retas

$$y = 2\sqrt{2}\, x - 6 \qquad \text{e} \qquad y = -2\sqrt{2}\, x - 6$$

são, pois, tangentes à circunferência dada.

13. Tangentes à circunferência tiradas de um ponto exterior. Consideremos a circunferência

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \tag{23}$$

e seja $M(x_1, y_1)$ um ponto exterior, isto é, um ponto cuja distância a seu centro seja superior a seu raio.

Sendo

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ou} \quad mx - y + y_1 - mx_1 = 0 \qquad (24)$$

a equação de uma reta que passa por M, para que ela seja tangente à circunferência (23), sua distância ao centro (α, β) dessa deve ser igual ao raio r, ou

$$\frac{m\alpha - \beta + y_1 - mx_1}{\sqrt{1 + m^2}} = r \qquad (25)$$

Resolvendo essa equação em relação a m, achamos dois valores distintos de m, que substituimos em (24), obtendo, assim, as equações das tangentes procuradas.

14. Exercício. *Achar as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 6x = 0$, tiradas do ponto $M(8, 3)$.*

Resolução: Escrevendo a equação da circunferência sob a forma (23) pelo processo já indicado (**n.º 3**), obtemos

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9$$

donde concluimos que seu centro é o ponto $C\,(3, 0)$ e seu raio é 3.

Sendo

$$y - 3 = m\,(x - 8) \quad \text{ou} \quad mx - y + 3 - 8m = 0 \quad (26)$$

uma reta que passa por M e escrevendo que sua distância a C é igual a 3, obtemos

$$\frac{3m + 3 - 8m}{\sqrt{1 + m^2}} = 3 \quad \text{ou} \quad 3 - 5m = 3\sqrt{1 + m^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa última equação, obtemos uma equação do segundo grau em m, cujas raízes são $m' = 0$ e $m'' = \dfrac{15}{8}$. Substituindo cada um dêsses valores na primeira das equações (26), obtemos as equações das tangentes

$$y - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad y = 3$$

$$y - 3 = \frac{15}{8}(x - 8) \quad \text{ou} \quad 15x - 8y - 96 = 0$$

15. Tangente à circunferência num de seus pontos.

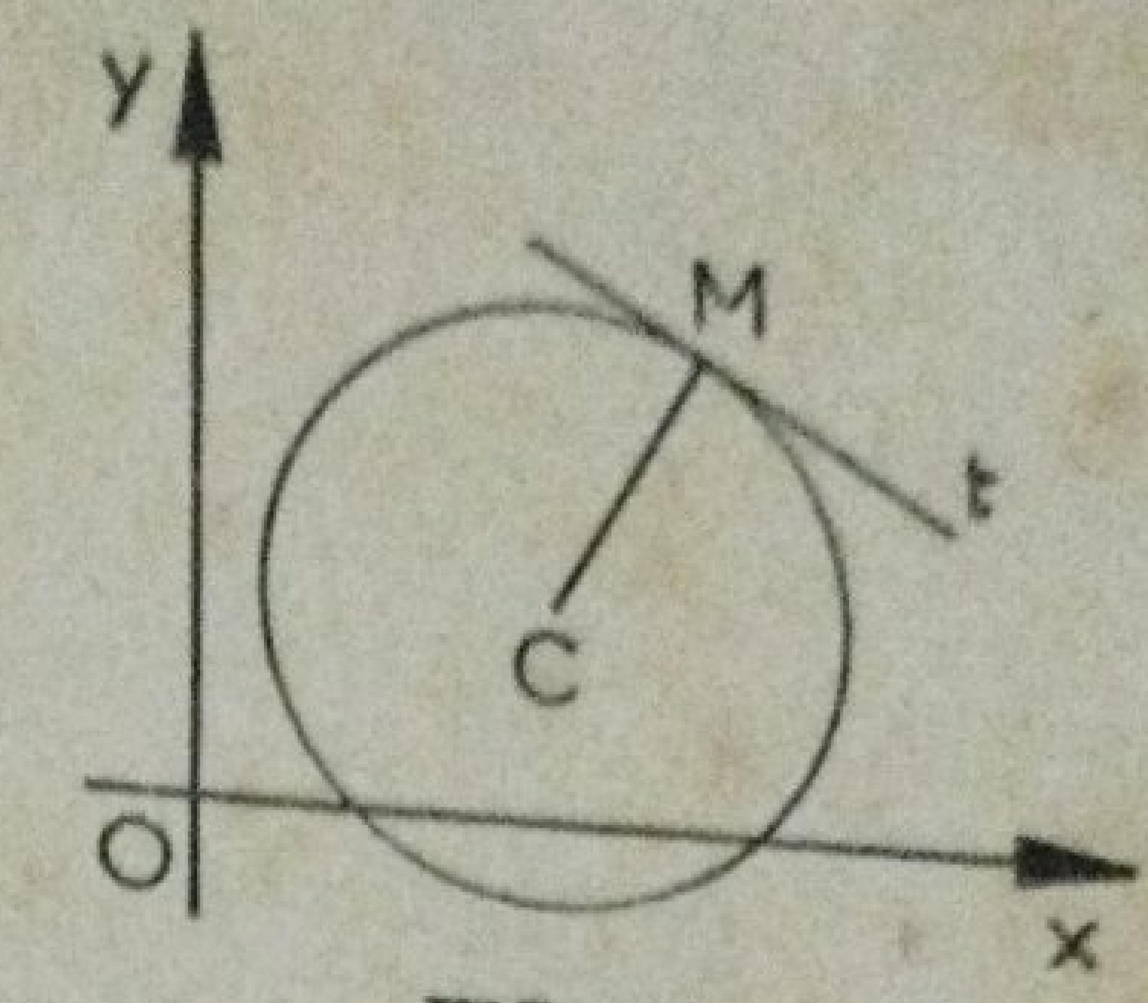

FIG. 44

Seja $M(x_1, y_1)$ um ponto da circunferência de centro $C(\alpha, \beta)$ e raio r (fig. 44), cuja equação é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \qquad (27)$$

A tangente t à circunferência no ponto M é a perpendicular ao raio CM que passa por êsse ponto. Sendo $\dfrac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha}$ o coeficiente angular da reta CM, a equação da tangente será, então,

$$y - y_1 = - \frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta} (x - x_1) \qquad (28)$$

$$(x_1 - \alpha)(x - x_1) + (y_1 - \beta)(y - y_1) = 0 \quad (29)$$

Esta equação é geralmente apresentada sob uma forma diferente, que mostraremos a seguir. Como M é um ponto da circunferência, suas coordenadas verificam a equação (27) dessa curva, ou

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2 \qquad (30)$$

Somando, membro a membro, as equações (29) e (30) e pondo em evidência os fatôres comuns $x_1 - \alpha$ e $y_1 - \beta$, obtemos, após a simplificação, a equação da tangente

$$(x_1 - \alpha)(x - \alpha) + (y_1 - \beta)(y - \beta) = r^2 \; (31)$$

No caso particular do centro da circunferência estar na origem, isto é, de ser sua equação

$$x^2 + y^2 = r^2$$

obtemos a equação de sua tangente no ponto (x_1, y_1) da curva, fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ na equação (31), do que resulta

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

16. Exercício. *Achar a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ no ponto $(6, 3)$ dessa curva.*

RESOLUÇÃO: Como a equação dada pode ser posta sob a forma

$$(x-3)^2+(y+1)^2=25$$

de acôrdo com a fórmula (31) a equação da tangente no ponto (6, 3) é

$$(6-3)(x-3)+(3+1)(y+1)=25 \quad \text{ou} \quad 3x+4y-30=0$$

17. Observação. A fórmula (31) pode ser lembrada fàcilmente mediante o seguinte artifício: escreve-se a equação (27) sob a forma

$$(x-\alpha)\ (x-\alpha)+(y-\beta)\ (y-\beta)=r^2$$

e substitui-se x por x_1 no primeiro fator $x-\alpha$ e y por y_1 no primeiro fator $y-\beta$.

Todavia, não nos parece indispensável memorizá-la. Nas aplicações pode-se obter a equação da tangente observando que ela é a perpendicular ao raio no ponto de contato. Consideremos, por exemplo, o exercício resolvido no **n.º 16.** Como o centro do círculo é o ponto $C(3, -1)$ e o ponto de contato é $M(6, 3)$, o coeficiente angular da reta CM é $\dfrac{3+1}{6-3}=\dfrac{4}{3}$. Logo, a perpendicular a CM no ponto M, isto é, a tangente procurada, tem para equação

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-6) \quad \text{ou} \quad 3x+4y-30=0$$

18. Tangentes à circunferência paralelas a uma direção. Dadas a equação da circunferência e a direção das tangentes, obtém-se suas equações por um processo semelhante ao indicado para o caso das tangentes tiradas de um ponto exterior (**n.º 13**). Escreve-se a equação das paralelas à direção dada, na qual o parâmetro linear é arbitrário, e estabelece-se a condição de ser sua distância ao centro da circunferência igual em valor absoluto a seu raio. Dessa equação resultam os valores do parâmetro linear. Os exemplos seguintes esclarecem a regra.

19. Exercício. *Achar as equações das tangentes à circunferência* $(x-2)^2+(y+1)^2=25$, *paralelas à reta* $y=\frac{3x}{4}$.

RESOLUÇÃO: Seja

$$y=\frac{3x}{4}+b \qquad \text{ou} \qquad 3x-4y+4b=0$$

a equação da tangente. Como sua distância ao centro $(2, -1)$ da circunferência dada deve ser igual, *em valor absoluto*, a seu raio 5, temos

$$\frac{3\times 2-4(-1)+4b}{\pm\sqrt{9+16}}=5 \qquad \text{ou} \qquad 10+4b=\pm 25$$

donde resultam os valores $b=\frac{15}{4}$ e $b=-\frac{35}{4}$. As tangentes procuradas são, pois,

$$y=\frac{3x}{4}+\frac{15}{4} \qquad \text{ou} \qquad 3x-4y+15=0$$

$$y=\frac{3x}{4}-\frac{35}{4} \qquad \text{ou} \qquad 3x-4y-35=0$$

20. Exercício. *Achar as equações das tangentes à circunferência* $(x-1)^2+(y-2)^2=9$, *paralelas ao eixo* $\overrightarrow{oy}$.

RESOLUÇÃO: Seja $x-m=0$ a equação da tangente. Sendo sua distância ao centro $(1, 2)$ igual, em valor absoluto, ao raio 3, podemos escrever

$$\frac{1-m}{\pm\sqrt{1+0}}=3 \qquad \text{ou} \qquad 1-m=\pm 3$$

do que resultam $m=-2$ e $m=4$. As tangentes são, pois, $x+2=0$ e $x-4=0$.

21. Intersecção de duas circunferências. Eixo radical. Sejam $0'$ e $0''$ (fig. 45) duas circunferências secantes definidas, respectivamente, pelas equações

$$x^2+y^2+Mx+Ny+P=0 \qquad (32)$$
$$x^2+y^2+M'x+N'y+P'=0 \qquad (33)$$

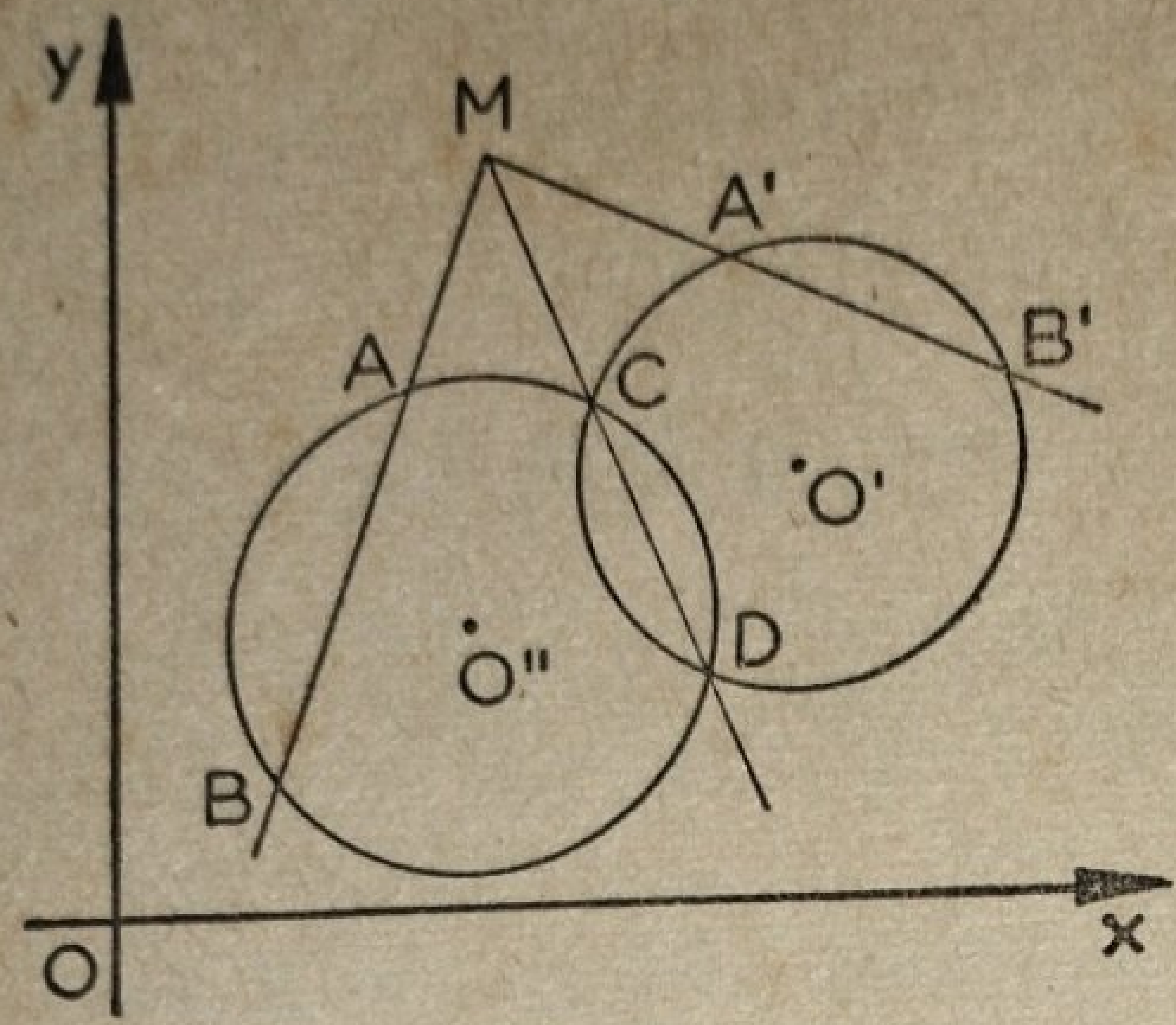

FIG. 45

Sejam C e D seus pontos de intersecção. Tracemos a reta CD e seja M um qualquer de seus pontos. Tiremos de M as secantes MB e MB', respectivamente, aos círculos O″ e O′. Para um ponto fixo M, qualquer que seja a posição da secante MB, sabemos da geometria que o produto $\overline{MA} \, . \, \overline{MB}$ é constante, ou

$$p = \overline{MA} \, . \, \overline{MB} = \overline{MC} \, . \, \overline{MD}$$

sendo êsse valor constante p denominado *potência* do ponto M em relação à circunferência O″. Do mesmo modo é constante o produto $\overline{MA'} \, . \, \overline{MB'}$, qualquer que seja a posição da secante MB' à circunferência O′. Como, portanto,

$$\overline{MA'} \, . \, \overline{MB'} = \overline{MC} \, . \, \overline{MD} = \overline{MA} \, . \, \overline{MB}$$

concluimos que o ponto M tem igual potência em relação às duas circunferências. Demonstra-se fàcilmente que essa propriedade não se verifica para qualquer ponto não pertencente à reta CD. Então, essa reta é o lugar geométrico dos pontos de igual potência em relação às circunferências O″ e O′ e denomina-se *eixo radical* dessas circunferências.

As coordenadas dos pontos C e D, em que as circunferências O″ e O′ se cortam, são as soluções do sistema formado pelas equações (32) e (33). Da Álgebra Elementar sabemos que êsse sistema é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0 \\ (M - M')x + (N - N')y + P - P' = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

cuja segunda equação foi obtida subtraindo-se (33), membro a membro, de (32). Essa equação, porém, é linear e, portanto representa uma reta. Como deve passar pelos pontos C e D, pois suas coordenadas são as soluções do sistema (34), que é equivalente ao sistema de equações (32) e (33), concluimos que

$$(M - M')x + (N - N')y + P - P' = 0$$

é a equação do eixo radical CD.

Se o sistema de equações (32) e (33) tem uma única solução, as circunferências O'' e O' são tangentes (interiormente ou exteriormente) e o eixo radical é a tangente comum.

Se o sistema de equações (32) e (33) não tem solução, as circunferências não têm ponto comum, sendo o eixo radical uma perpendicular à reta OO', que, também, não encontra as circunferências.

22. Exercício. *Achar os pontos de intersecção das circunferências de equações* $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 35 = 0$.

Resolução: As coordenadas dos pontos procurados são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x + 6y + 35 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \qquad (35)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ 2x - y - 10 = 0 \end{cases} \qquad (36)$$

cuja segunda equação foi obtida subtraindo-se, membro a membro, a primeira equação do sistema (35) da segunda. A segunda equação do sistema (36) representa, como vimos, o eixo radical das circunferências dadas.

Resolvendo o sistema (36) encontramos as soluções $x = 5$, $y = 0$ e $x = 3$, $y = -4$. Os pontos de intersecção são, pois, $(5, 0)$ e $(3, -4)$.

23. Exercício. *Achar a equação da circunferência que passa pelos pontos* $A(4, -2)$ e $B(6, 2)$ *e cujo centro está sôbre a reta* $y = 2x$.

Resolução: Sabemos da geometria que o centro de uma circunferência está sôbre a mediatriz de qualquer corda. Estabeleçamos a equação da mediatriz da corda AB da circunferência pedida. O meio dessa corda é o ponto $M(5, 0)$ e o coeficiente angular da reta AB é $\dfrac{2+2}{6-4} = 2$. Logo a equação da mediatriz da corda AB é

$$y = -\frac{1}{2}(x-5) \quad \text{ou} \quad x + 2y = 5$$

O centro da circunferência é a intersecção dessa mediatriz com a reta dada. Suas coordenadas são, pois, a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \quad\; y = 2x \end{cases}$$

isto é, $x = 1$, $y = 2$. O centro é, portanto, $C(1, 2)$.

O raio da circunferência é a distância do centro C a um qualquer dos pontos A ou B. Sendo a distância AC

$$\left| \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} \right| = 5$$

a equação da circunferência de raio 5 e centro (1, 2) é

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

24. Exercício. *Achar as equações das circunferências que passam pelo ponto $M(1, 1)$ e são tangentes aos eixos coordenados.*

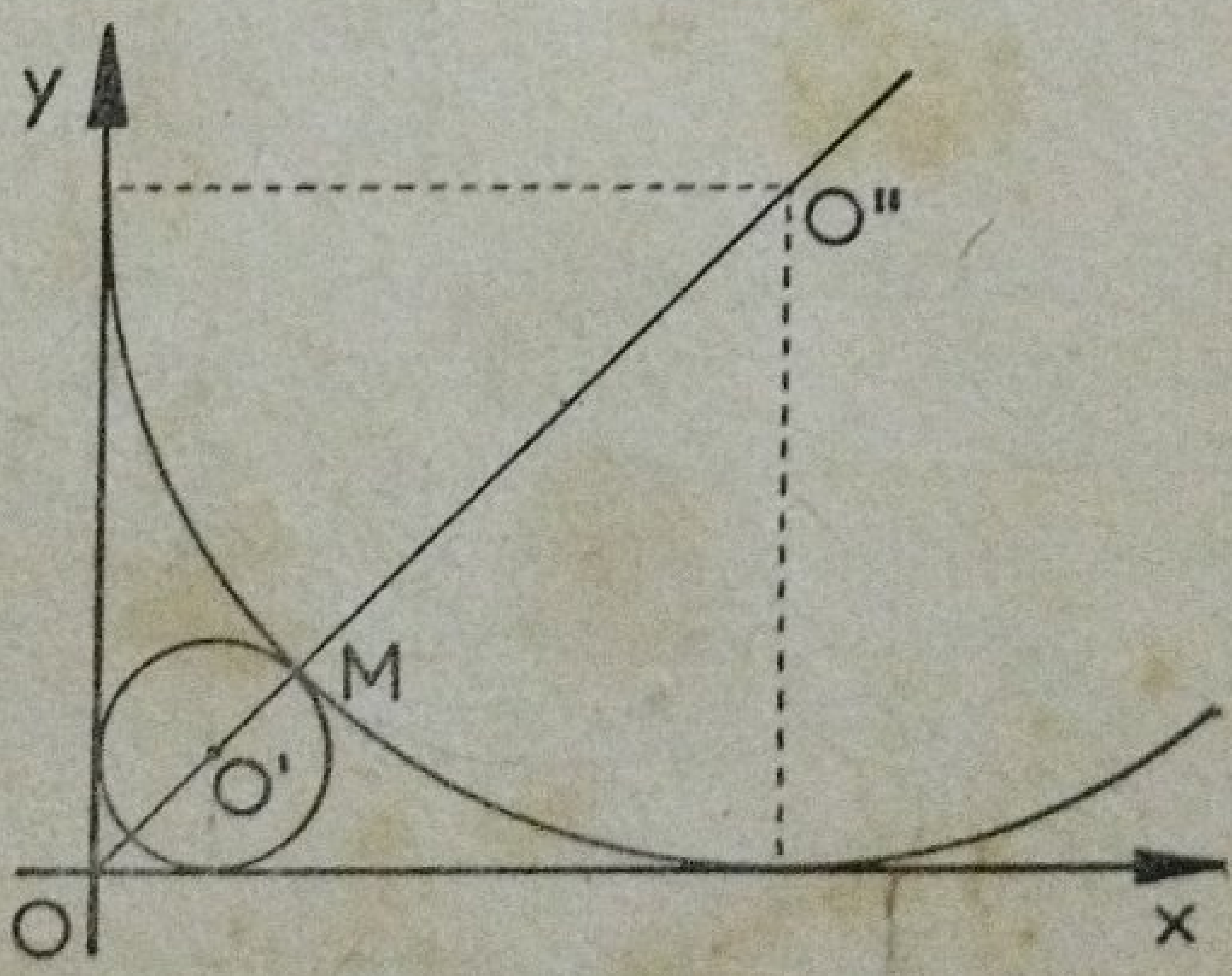

FIG. 46

Resolução: Observemos que, como o ponto M é do primeiro quadrante, as circunferências são tangentes aos semi-eixos positivos $\overrightarrow{ox}$ e $\overrightarrow{oy}$ (fig. 46), sendo, portanto, seus centros pontos da bissetriz $y = x$, de coordenadas positivas. Então, as coordenadas do centro de uma circunferência nessas condições são iguais ao raio. Seja, pois

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

a equação de uma dessas circunferências. Como ela passa pelo ponto $M(1, 1)$, devemos ter

$$(1-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$$

equação cujas raízes são $a' = 2 + \sqrt{2}$ e $a'' = 2 - \sqrt{2}$.

Logo, as equações procuradas são

$$(x - 2 - \sqrt{2})^2 + (y - 2 - \sqrt{2})^2 = (2 + \sqrt{2})^2$$
$$(x - 2 + \sqrt{2})^2 + (y - 2 + \sqrt{2})^2 = (2 - \sqrt{2})^2$$

25. Exercício. *As retas $y = x$ e $2x + y = 9$ cortam-se sôbre uma circunferência C concêntrica da circunferência C' de equação $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$. Achar a equação de C.*

Resolução: Pondo a equação de C' sôb a forma

$$(x + 1)^2 + y^2 = 9$$

concluimos que seu centro (que é o mesmo centro de C) é o ponto $(-1, 0)$.

Seja M o ponto de intersecção das retas dadas. Suas coordenadas são a solução do sistema

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

ou $x = 3$, $y = 3$. O raio da circunferência pedida é a distância de seu centro $(-1, 0)$ ao ponto $(3, 3)$ da curva, ou

$$r = |\sqrt{(3+1)^2 + 3^2}| = 5$$

Logo, a circunferência procurada tem o centro $(-1, 0)$ e raio 5, sendo sua equação $(x+1)^2 + y^2 = 25$ ou

$$x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0.$$

26. Exercícios.

1. Achar a equação da circunferência cujo centro é o ponto $(-3, 0)$ e cujo raio é 1. *Resp.:* $x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$
2. Achar a equação da circunferência de centro $(0, 4)$, tangente ao eixo ox. *Resp.:* $x^2 + y^2 - 8y = 0$

3. Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência, cuja equação é $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$.

   Resp.: Centro $(2, -2)$ e raio $2\sqrt{2}$

4. Achar a equação da circunferência tangente aos semi-eixos positivos ox e oy, cujo centro dista $\sqrt{2}$ da origem.

   Resp.: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

5. Achar a equação da circunferência tangente ao eixo $\overrightarrow{ox}$, cujo centro é o baricentro do triângulo de vértices $(2, -1)$, $(7, 5)$ e $(0, 5)$.

   Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

6. Achar a equação da circunferência da qual um diâmetro é o segmento de extremidades $(-3, -2)$ e $(3, 6)$.

   Resp.: $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$

7. Achar a equação da circunferência que passa pela origem e cujo centro está sôbre as retas $y = x + 1$ e $2x + y = 10$.

   Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

8. Achar a equação da circunferência que passa pela origem e pelos pontos de intersecção da reta $4x + 3y = 24$ com os eixos coordenados.

   Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

9. Achar a equação da circunferência que tem para diâmetro a corda comum às circunferências $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$. *Resp.:* $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$

10. Achar as equações das circunferências de raio r tangentes ao eixo $\overrightarrow{ox}$ na origem. *Resp.:* $x^2 + y^2 \pm 2ry = 0$

11. Achar a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ no ponto $(3, 3)$ dessa curva.

   Resp.: $4x + 3y = 5$

12. Achar as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ tiradas do ponto $(-2, 5)$.

   Resp.: $4x - 3y + 23 = 0$ e $3x + 4y - 14 = 0$

13. Achar a equação do eixo radical das circunferências $(x+1)^2 + y^2 = 4$ $x^2 + (y-3)^2 = 9$. *Resp.:* $2x + 6y - 3 = 0$

14. Calcular as coordenadas dos pontos de intersecção das circunferências de centro $(-1, 0)$ e raio 5 e de centro $(5, -3)$ e raio $\sqrt{10}$.

   Resp.: $(4, 0)$ e $(2, -4)$

15. Achar a equação da circunferência que passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(1, -4)$ e cujo centro está sôbre o eixo $\overrightarrow{ox}$.

   Resp.: $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$

16. Achar a equação da circunferência circunscrita ao triângulo cujos lados estão sôbre as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 10y = 0$.

17. Uma circunferência, cujo centro está sôbre o eixo *ox*, corta êsse eixo nos pontos $(-2, 0)$ e $(8, 0)$. Calcular os pontos em que ela corta o eixo *oy*.

Resp.: $(0, 4)$ e $(0, -4)$

18. Achar a equação da circunferência que passa pelo ponto $(-1, -1)$ e é concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

19. Achar as equações das tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ nos pontos em que ela corta o eixo *oy*.

Resp.: $4x + 3y + 6 = 0$ e $4x - 3y + 12 = 0$

20. Achar a equação da circunferência tangente à reta $4x + 3y + 12 = 0$, cujo centro é o ponto $(1, 3)$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$

CAPÍTULO VI

TEORIA ELEMENTAR DAS DERIVADAS

1. Definição de derivada. Seja

$$y = f(x) \tag{1}$$

uma função unívoca e contínua num intervalo $[a, b]$ de seu campo de existência. Sejam x_0 e $x_0 + \Delta x_0$ dois pontos de $[a, b]$ não infinitamente próximos e $f(x_0)$ e $f(x_0 + \Delta x_0)$ os valores correspondentes da função (1) nêsses pontos. Representemos por Δy_0 a diferença

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$$

isto é, o *acréscimo* da função (1) quando x passa de x_0 para $x_0 + \Delta x_0$.

Formemos, então, o quociente entre o acréscimo da função e o acréscimo correspondente da variável

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} \tag{2}$$

Êste quociente denomina-se *razão incremental* da função.

Se supuzermos x_0 constante e fizermos Δx_0 tender para zero, em virtude da *continuidade* da função (1), Δy_0 também tenderá para zero. Pode acontecer que, quando Δx_0 tenda para zero, a razão incremental (2) tenha um limite finito que representaremos por $\dfrac{dy_0}{dx_0}$ ou por $f'(x_0)$, isto é,

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{dy_0}{dx_0} = f'(x_0) \tag{3}$$

Diz-se, então, que a função (1) é *derivável* nêsse ponto, chamando-se *derivada* a êsse limite.

Pode-se estender a noção de derivada ao caso em que o limite (3) seja infinito.

2. Exemplo. Afim de dar ao principiante uma idéia bem clara da noção de *derivada*, apresentamos o seguinte exemplo bastante elucidativo.

Seja a função

$$y = x^2 \tag{4}$$

contínua em tôdos os pontos de seu campo de existência. Dando a x o valor $x_0 = 4$ obtemos para y o valor correspondente $y_0 = 16$. Atribuamos, então, a x os acréscimos finitos e decrescentes

$$0{,}1\ ;0{,}01\ ;0{,}001\ ;\ \ldots \tag{5}$$

e determinemos os valores correspondentes dos acréscimos da função, formando em cada caso a razão incremental. Os resultados podem ser resumidos no seguinte quadro que o leitor fàcilmente compreenderá:

x_0	y_0	Δx_0	$x_0+\Delta x_0$	$y_0+\Delta y_0$	Δy_0	$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$
4	16	0,1 0,01 0,001 ↓ 0	4,1 4,01 4,001	16,81 16,0801 16,008001	0,81 0,0801 0,008001 ↓ 0	8,1 8,01 8,001 ↓ 8

O quadro precedente *indica* que a sucessão dos valores (5) de Δx_0 e a sucessão dos valores 0,81; 0,0801; 0,008001 ; .... de Δy_0 têm para limite zero e simultâneamente a sucessão 8,1; 8,01; 8,001 ; ... dos valores de $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ tem para limite 8. Em outras palavras, os acréscimos Δx_0 e Δy_0 tendem simultâneamente para zero mas a razão incremental tende para o limite 8, que é a derivada da função (4) no ponto $x_0 = 4$.

3. Função derivada. Se uma função $f(x)$ é derivável em todos os pontos de um intervalo, chama-se *função derivada* de $f(x)$ a função que em cada ponto dêsse intervalo tem para valor a derivada de $f(x)$ nêsse ponto.

Por exemplo, tal como fizemos no **n.º 2**, poderemos mostrar, que as derivadas da função (4) nos pontos 1, 2, 3, 4, ... são, respectivamente, 2, 4, 6, 8, ... Então, a *função derivada* de (4) será a função que, para $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ assumir, respectivamente, os valores 2, 4, 6, 8, ... Esta função é, como veremos mais adiante, $y = 2x$.

A função derivada de uma função $y = f(x)$ pode ser representada por uma das seguintes notações: $f'(x)$ ou y' (Lagrange), $Df(x)$ ou $D_x f(x)$ (Arbogast e Cauchy), $\dot{y}$ (Newton) e $\dfrac{dy}{dx}$ ou $\dfrac{df}{dx}$ (Leibniz).

4. Função derivada de ordem n. Consideremos a função $f(x)$ derivável no intervalo $[a, b]$. Admitamos que sua função derivada $f'(x)$ seja também derivável no intervalo $[a, b]$ ou num intervalo $[a', b']$ nêle contido. A função derivada de $f'(x)$ chama-se *derivada segunda de* $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ ou $[a', b']$ e representa-se por um dos símbolos: $f''(x)$ ou y'' Lagrange), $D^2f(x)$ ou $D_x^2 f(x)$ (Cauchy), $\ddot{y}$ (Newton) e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ (Leibniz).

Anàlogamente se definem *derivada terceira*, *derivada quarta*, etc., *derivada de ordem n*, representando-se esta última por um dos símbolos $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $D^{(n)} f(x)$, $D_x^{(n)} f(x)$ ou $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

5. Interpretação geométrica da derivada. Seja

$$y = f(x) \tag{5}$$

uma função derivável num intervalo $[a, b]$ e seja o arco AB sua representação gráfica nesse intervalo (fig. 47).

Consideremos os pontos M e N da curva de abcissas $OP = x_0$ e $OQ = x_0 + \Delta x_0$ respectivamente. Sejam $MP = y_0$ e $NQ = y_0 + \Delta y_0$ as ordenadas correspondentes dêsses pontos.

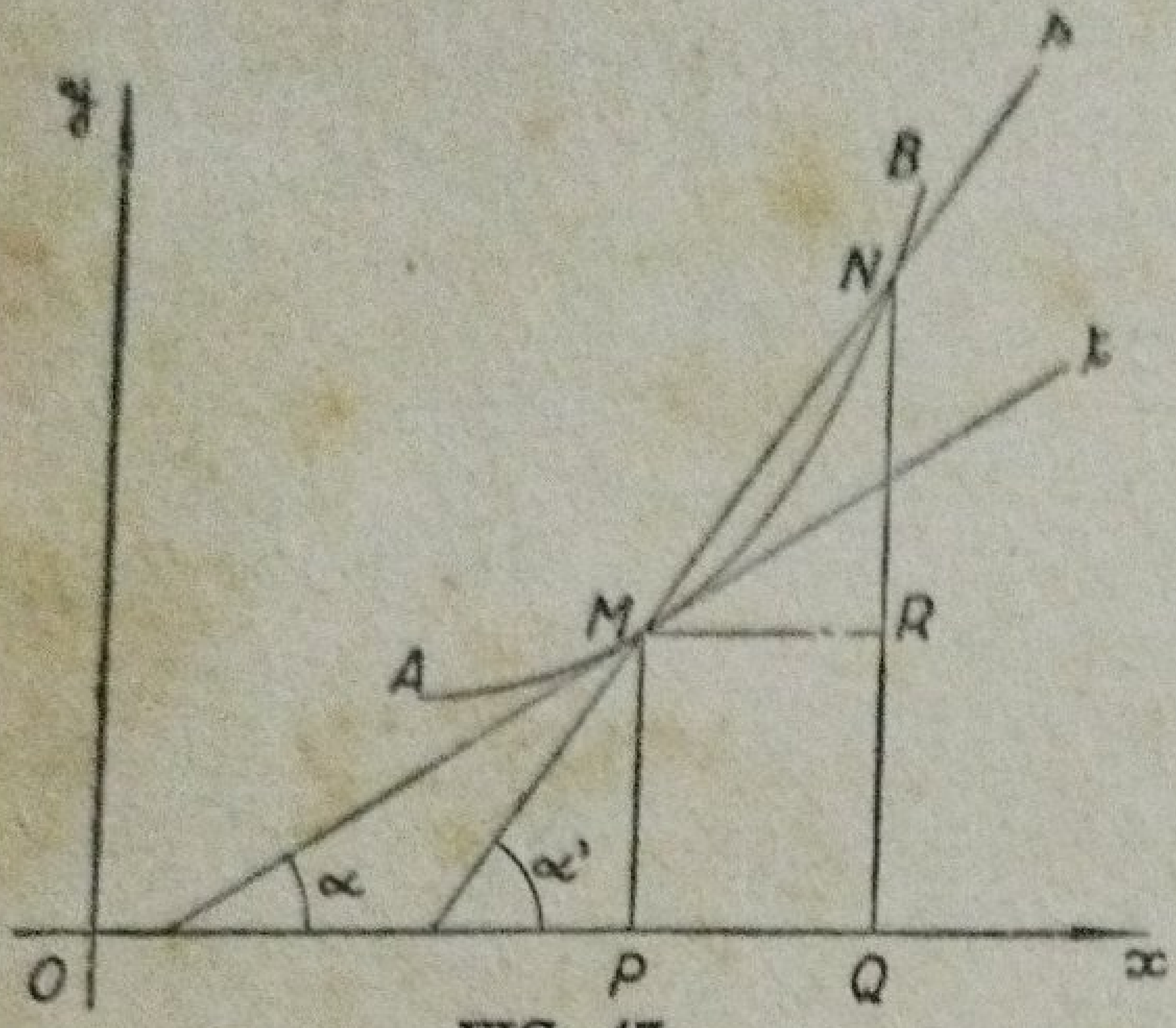

FIG. 47

Tirando pelo ponto M a paralela MR ao eixo das abcissas e a secante s que passa pelos pontos M e N, formamos o triângulo retângulo MRN, cujos catetos MR e NR são, respectivamente, Δx_0 e Δy_0.

Seja α' o ângulo do eixo das abcissas com a secante s.

Podemos, então, escrever para o triângulo retângulo MRN a seguinte relação

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{RN}{MR} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} \tag{6}$$

Como a função é, por hipótese, derivável no ponto M, quando Δx_0 tender para zero, a razão incremental (6) terá para limite a derivada $\frac{dy_0}{dx_0}$. Por outro lado, Δx_0 tendendo para zero, o ponto N aproximar-se-á indefinidamente de M de modo que a secante s tenderá para uma posição limite t, que, como sabemos da Geometria, é a tangente à curva no ponto M. O ângulo α' tenderá, então, para o ângulo α do eixo das abcissas com a tangente t. Podemos, portanto, escrever

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{dy_0}{dx_0} \tag{7}$$

Como $tg\alpha$ é o coeficiente angular da reta t (**Cap. IV, n.º 8**), podemos concluir:

A derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto de seu campo de definição é o coeficiente angular da tangente à curva nesse ponto.

Observemos que, se t fôr paralela ao eixo oy, o resultado anterior ainda subsistirá, aceitando-se a extensão da noção de derivada ao caso do limite (7) ser infinito (**n.º 1**).

6. Interpretação cinemática da derivada. Suponhamos que um ponto se mova num determinado sentido sôbre uma reta r (fig. 48) e admitamos que a *distância* por êle percorrida $x = OM$ seja uma função do tempo t

$$x = f(t) \tag{8}$$

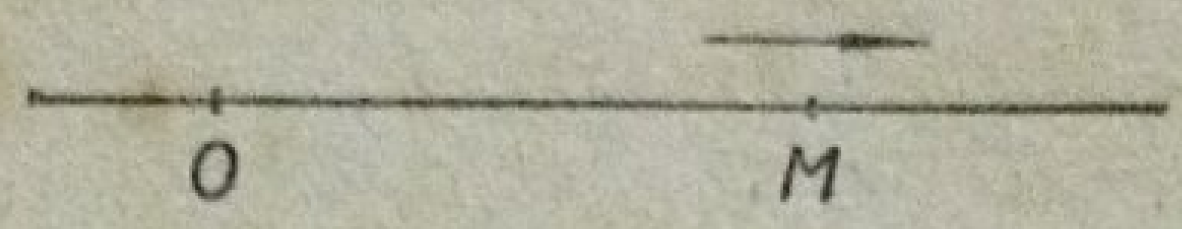

FIG. 48

Dêsse modo, num intervalo de tempo $\Delta t_0 = t_1 - t_2$ decorrido do instante t_2 ao instante t_1, o ponto terá percorrido o espaço $\Delta x_0 = f(t_1) - f(t_2)$. Se o movimento do ponto é *uniforme*, qualquer que seja o intervalo $[t_2, t_1]$ o quociente

$$\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0} \tag{9}$$

é constante, denominando-se *velocidade* do ponto.

Se o movimento do ponto é *variado*, isto é, em cada instante a velocidade assume um valor diferente, o quociente (9) denomina-se *velocidade média* do ponto no intervalo considerado. Em geral essa velocidade é diversa da velocidade no instante t_0, que representaremos por v_0. Todavia, diminuindo-se sucessivamente o intervalo Δt_0, o quociente (9) aproximar-se-á de v_0. Fàzendo, então, Δt_0 tender para zero, teremos no limite

$$v_0 = \lim_{\Delta t_0 \to 0} \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0} = \frac{dx_0}{dt_0}$$

isto é, a velocidade v_0 será a *derivada* da função (8) no instante t_0.

7. Derivadas unilaterais. Se a razão incremental $\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ só têm limite, quando Δx_0 tende para zero *por valores positivos*, diz-se que a função é *derivável à direita* no ponto x_0, chamando-se *derivada à direita* a êsse limite. Anàlogamente definiríamos *função derivável à esquerda* e *derivada à esquerda*. Por $f'(x_0 - 0)$ e $f'(x_0 + 0)$ representam-se, respectivamente, a *derivada à esquerda* e a *derivada à direita* da função $f(x)$ no ponto x_0 (notação de DIRICHLET).

Uma função pode ser *derivável à esquerda* e *à direita* de um ponto, sendo, entretanto, desiguais essas derivadas. Consideremos, por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \tag{10}$$

que é contínua no ponto $x_0 = 0$, sendo $f(o) = 0$. Representando por h o acréscimo Δx_0 de x, sua razão incremental no ponto $x_0 = 0$ é

$$\frac{f(h) - f(o)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}}$$

Sua derivada nesse ponto é o limite dessa razão incremental quando $h \to 0$. Vimos, porém, no Exemplo I do **Cap. III, n.º 4**, que êsse limite é 1 ou 0, conforme h tenda para zero pela esquerda ou pela direita. Logo, a função (10) tem, no ponto $x_o = 0$, a *derivada à esquerda* igual a 1 e a *derivada à direita* igual a zero. Êsse resultado é fàcilmente compreendido quando se observa o gráfico da função (10) (fig. 49): a curva tem no ponto $x_0 = 0$ duas semitangentes distintas: a semi-reta OT (tangente ao arco OB) cujo coeficiente angular é 1 e a semi-reta OT' (tangente ao arco OA) cujo coeficiente angular é zero, visto estar situada sôbre o eixo $\overrightarrow{ox}$.

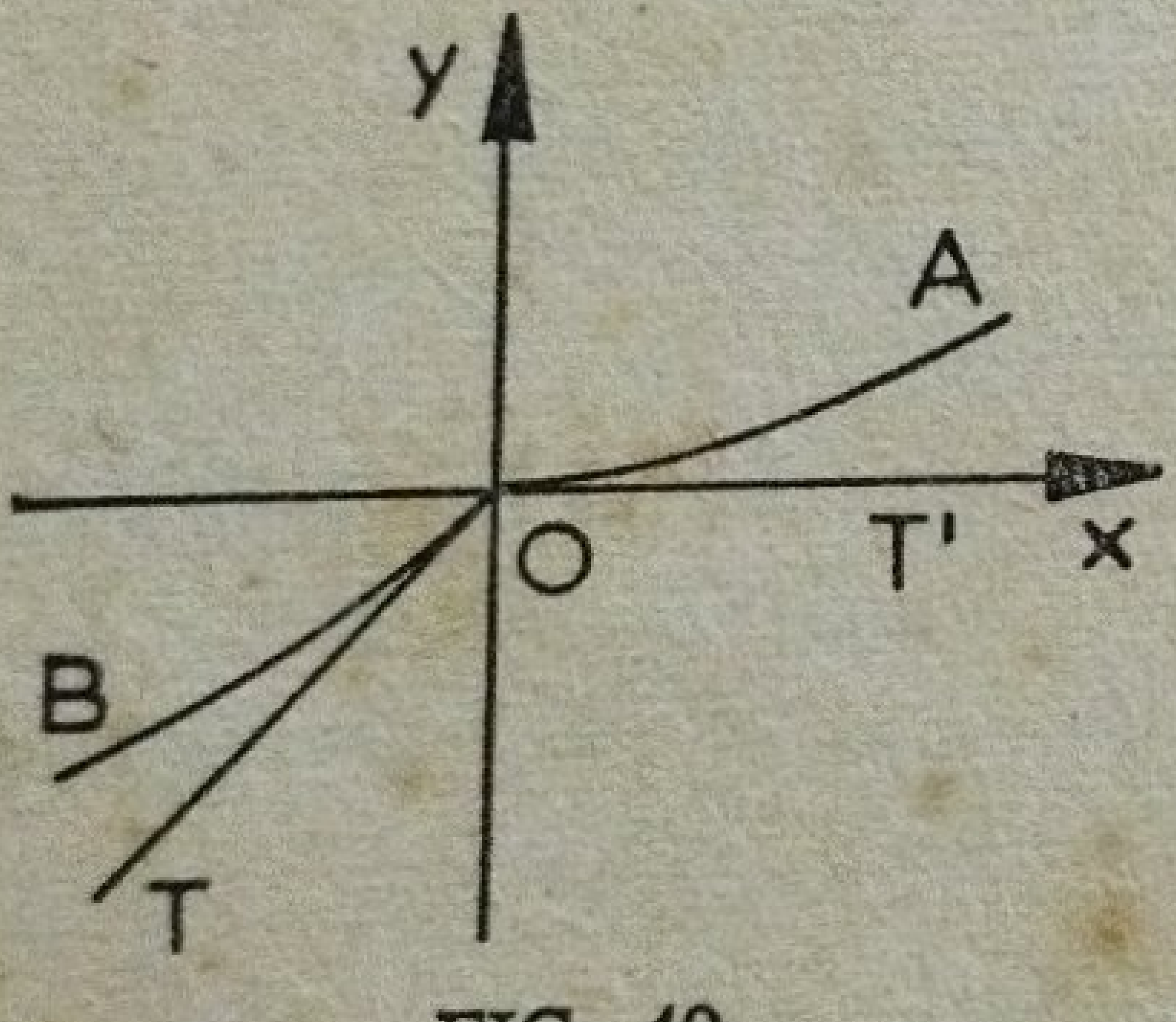

FIG. 49

8. Continuidade e derivabilidade. Vimos, na definição de derivada, que a *continuidade* de uma função num ponto era *condição necessária* para sua derivabilidade no mesmo. Todavia essa condição não é *suficiente*, isto é, uma função pode ser *contínua* num ponto sem ser *derivável* nêsse ponto.

Entretanto, até os meados do século XIX, supunha-se que a continuidade implicava na derivabilidade, pois a intuição levava a crer que uma curva contínua num ponto admitisse uma tangente nêle e portanto a função tivesse derivada nêsse ponto.

Foi WEIERSTRASS quem, em 1861, deu pela primeira vez um exemplo de função contínua num intervalo, não admitindo derivada em nenhum de seus pontos. De, então, para cá, os estudos de análise definiram perfeitamente esta questão.

9. Regras gerais para derivação. Veremos a seguir as regras gerais para derivação das funções elementares.

Seguindo a maioria dos autores e para maior simplicidade de expressão de agora em diante usaremos a palavra *derivada também* no sentido de *função derivada.*

10. Derivada de uma constante. Se a função y é constante, seu acréscimo Δy é nulo qualquer que seja o ponto x e o acréscimo Δx correspondente. Então, a razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constantemente nula e, portanto, seu limite, ou seja a derivada, é também nulo.

CONCLUSÃO: *A derivada de uma constante é nula.*

11. Derivada de uma variável em relação a si própria. Se a função (1) se reduz a $y = x$ será, em qualquer ponto, $\Delta y = \Delta x$. A razão incremental em qualquer ponto e qualquer que seja Δx será igual a 1 e, portanto, seu limite, isto é, a derivada, será também 1.

CONCLUSÃO: *A derivada de uma variável em relação a si própria é igual a* 1.

12. Derivada de uma soma algébrica. Sejam u, v e w funções de x definidas num mesmo intervalo e admitindo derivadas em todos os seus pontos. Consideremos a soma algébrica.

$$y = u + v - w \tag{11}$$

A um acréscimo Δx de x correspondem acréscimos Δu, Δv e Δw de u, v e w, respectivamente e, portanto, um acréscimo Δy da soma y, isto é,

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$$

ou, em virtude de (11)

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por Δx, obtemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Fazendo Δx tender para zero e observando que $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, em virtude da hipótese feita, têm para limite respectivamente, as derivadas $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dw}{dx}$, a soma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ terá para limite a soma algébrica dêsses limites, ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

onde $\frac{dy}{dx}$ representa o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

CONCLUSÃO: *A derivada de uma soma algébrica de um número finito de funções (deriváveis num mesmo intervalo) é a soma algébrica das derivadas dessas funções.* (*)

13. Derivada de um produto.

I. Sejam u e v funções de x definidas num mesmo intervalo e admitindo derivadas em todos os seus pontos. Consideremos o produto

$$y = u \,.\, v \tag{12}$$

Representando, respectivamente, por Δu, Δv e Δy os acréscimos de u, v e do produto y correspondentes ao acréscimo Δx de x, e seguindo marcha análoga à anterior, podemos escrever

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \,.\, \Delta v$$

ou, em virtude de (12)

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \,.\, \Delta v$$

ou, ainda,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \,.\, \Delta v$$

(*) O leitor observa que, apesar de termos considerado, para simplicidade de exposição, apenas três funções, a demonstração se aplica ao caso de um número finito qualquer de funções.

Fazendo $\Delta x \to 0$ e representando por $\dfrac{dy}{dx}$ o limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx} \qquad (13)$$

visto que Δv tende para zero com Δx em virtude da continuidade de v e $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ tendem, respectivamente, para as derivadas $\dfrac{du}{dx}$ e $\dfrac{dv}{dx}$.

C o n c l u s ã o : *A derivada de um produto de duas funções (deriváveis num mesmo intervalo) é igual à soma dos produtos de cada função pela derivada da outra.*

II. O teorema anterior extende-se fàcilmente ao caso de mais de duas funções. Sejam, por exemplo, u, v e w três funções de x nas condições anteriores e seja

$$y = u \,.\, v \,.\, w$$

Considerando $u \,.\, v \,.\, w$ como sendo o produto de $u \,.\, v$ por w, temos de acôrdo com a regra anterior

$$\frac{dy}{dx} = uv\,\frac{dw}{dx} + w\,\frac{d(uv)}{dx}$$

ou substituindo $\dfrac{d(uv)}{dx}$ por sua expressão segundo (13)

$$\frac{dy}{dx} = uv\,\frac{dw}{dx} + uw\,\frac{dv}{dx} + vw\,\frac{du}{dx}$$

Anàlogamente se extenderia o teorema ao caso de um número finito qualquer de funções (*), o que nos permitiria concluir:

A derivada do produto de um número finito de funções (deriváveis num mesmo intervalo) é igual à soma dos produtos das derivadas de cada função por todas as outras funções.

(*) Pelo método de indução completa deve-se, para isso, demonstrar que se o teorema é válido para $n - 1$ funções, também o é para n funções.

14. Observação. No caso particular do produto uv de duas funções, se uma delas é constante, como, por exemplo, u, o resultado (13) se reduz a

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx}$$

visto que $\frac{du}{dx} = 0$ (n.º 10).

CONCLUSÃO: *A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada dessa função.*

15. Derivada de uma fração. Sejam u e v duas funções de x definidas num mesmo intervalo e admitindo derivadas em todos os seus pontos.

Consideremos a função $y = \frac{u}{v}$ Temos, anàlogamente,

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

ou, fazendo $\Delta x \to 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

visto que Δv tende para zero quando $\Delta x \to 0$.

CONCLUSÃO: *A derivada de uma fração cujos têrmos são funções (deriváveis num mesmo intervalo) é igual ao denominador pela derivada do numerador menos o numerador pela derivada do denominador, tudo dividido pelo quadrado do denominador.*

16. Derivada de uma potência de expoente inteiro. Consideremos a potência de expoente inteiro

$$y = u^m \tag{14}$$

onde u é uma função de x, definida num certo intervalo, admitindo nêle derivadas em tôdos os seus pontos.

I. Supondo m positivo, podemos escrever

$$y = u \,.\, u \ldots \overset{m}{\ldots} \ldots u$$

ou derivando segundo a regra do **n.º 13, II,**

$$\frac{dy}{dx} = u^{m-1}\frac{du}{dx} + u^{m-1}\frac{du}{dx} + \ldots \overset{m}{\ldots} + u^{m-1}\frac{du}{dx}$$

ou, ainda,

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$$

II. Se m é negativo, ponhamos $m = -m'$, sendo m' um número positivo. A função (14) fica, então,

$$y = u^{-m'} \text{ ou } y = \frac{1}{u^{m'}}$$

Calculemos a derivada desta função de acôrdo com a regra do **n.º 15** e o resultado anterior. Obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-m'u^{m'-1}\dfrac{du}{dx}}{u^{2m'}} = -m' \,.\, u^{-m'-1}\frac{du}{dx}$$

ou, como $-m' = m$,

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$$

CONCLUSÃO: *A derivada da potência de expoente inteiro de uma função é o produto do expoente pela função elevada ao expoente menos 1 e pela derivada da função.*

17. Derivada de função de função. Seja

$$u = \varphi(x) \tag{15}$$

uma função de x definida num intervalo $[a, b]$ e derivável em tôdos os pontos dêsse intervalo. Sejam M e m, respectivamente, os valores *máximo* e *mínimo* da função u nesse intervalo (*).

Consideremos a função

$$y = f(u) \tag{16}$$

definida no intervalo $[m, M]$ e derivável (em relação a u) em tôdos os seus pontos. Se f e φ são unívocas, a cada valor de x do intervalo $[a, b]$ corresponde, pela função (15), um único valor de u do intervalo $[m, M]$ e a êste, por intermédio de (16), um único valor de y. Diz-se, então, que y é uma *função de função de* x, podendo-se escrever

$$y = f[\varphi(x)] \tag{17}$$

Dando a x um acréscimo Δx, resulta, por intermédio de (15) um acréscimo Δu para u e, portanto, por intermédio de (16) um acréscimo Δy para y. Temos, então, idênticamente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Fazendo $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$, pela hipótese feita, tenderão, respectivamente, para as derivadas $\dfrac{du}{dx}$ e $\dfrac{dy}{du}$. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tenderá, então, para um limite $\dfrac{dy}{dx}$ igual a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

CONCLUSÃO: *A derivada de uma função de função em relação à variável independente é o produto da derivada da função em relação à variável intermediária pela derivada desta em relação à variável independente.*

18. Derivadas de funções inversas. Seja

$$y = f(x) \tag{18}$$

(*) Se a função é derivável no intervalo $[a, b]$ é necessàriamente contínua nêste intervalo (n.º 8) e, portanto, admite nêle um *máximo* e um *mínimo* (**Cap. III, n.º 24**).

uma função unívoca de x, derivável num intervalo $[a, b]$ sendo nêste sempre crescente ou sempre decrescente (*).

Sejam, então, $f(a) = A$ e $f(b) = B$ os valores extremos desta função no intervalo considerado (fig. 50).

A cada ponto C do intervalo $[A, B]$, isto é, do domínio de y, corresponde um único ponto c do intervalo $[a, b]$, isto é, do domínio de x Seja, então,

$$x = \varphi(y) \tag{19}$$

a função unívoca que exprime esta correspondência. Esta função, que é sempre crescente ou sempre decrescente, chama-se *função inversa* da função (18).

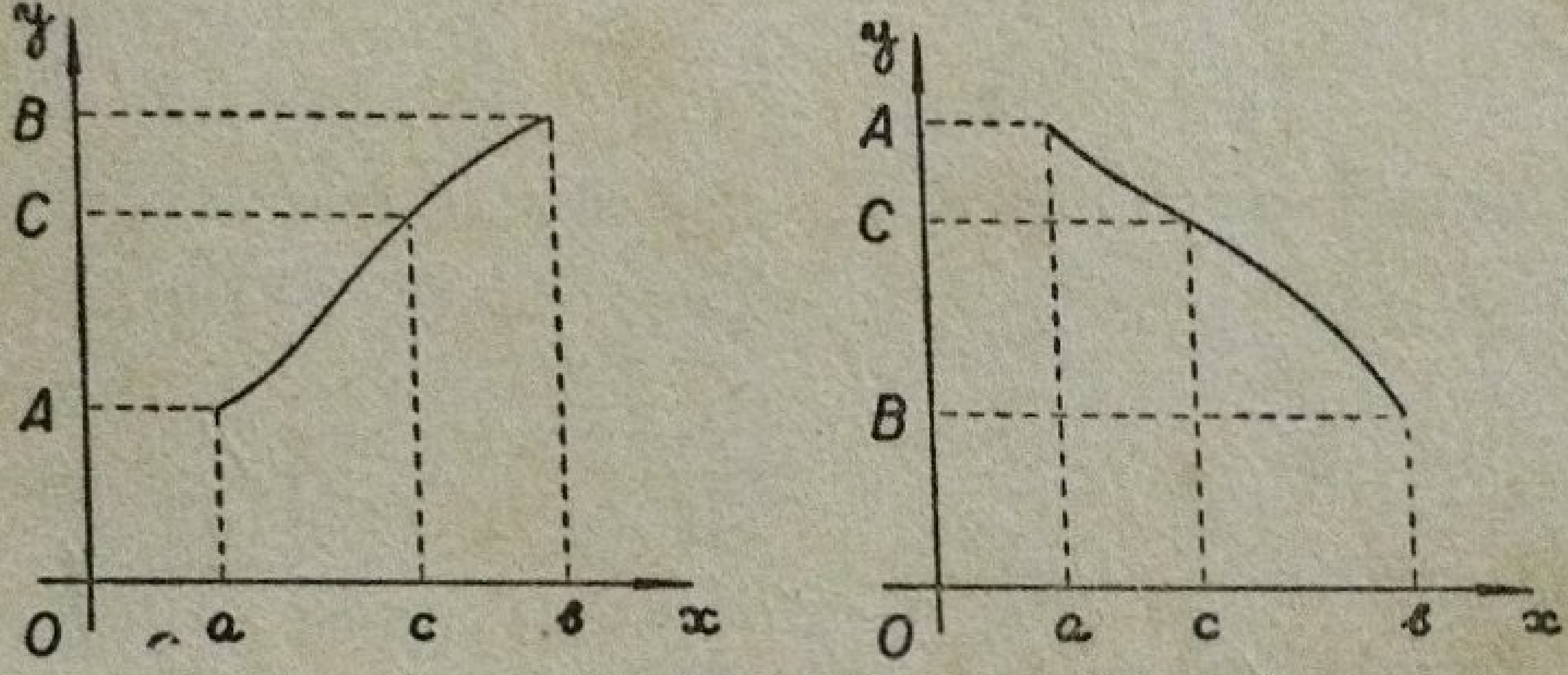

FIG. 50

Sendo Δx e Δy os acréscimos correspondentes de x e y, e observando que a um $\Delta x \neq 0$ corresponde um $\Delta y \neq 0$, temos idênticamente

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Fazendo Δx tender para zero, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ em virtude da hipótese terá um limite $\dfrac{dy}{dx}$ e, portanto, $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ terá, também, um limite $\dfrac{dx}{dy}$ igual a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

(*) Se a função não satisfaz esta condição, pode-se, em geral, subdividindo-se convenientemente o intervalo $[a, b]$ determinar intervalos menores onde a condição é satisfeita. É o que veremos no estudo da variação de uma função.

Conclusão: *Se uma função é derivável num intervalo fechado, sua função inversa também é derivável nêsse intervalo e em qualquer ponto tem para derivada o inverso da derivada da função.*

19. Derivada de uma raiz. Consideremos a função unívoca

$$y = \sqrt[m]{x} \tag{20}$$

onde $\sqrt[m]{x}$ indica a *raiz aritmética* de grau m (inteiro) de x. Tomemos a função inversa

$$x = y^m \tag{21}$$

cuja derivada é

$$\frac{dx}{dy} = my^{m-1}$$

De acôrdo com o teorema anterior, a função (20), no intervalo onde (21) é derivável, admite a derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{my^{m-1}} = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

Em particular, se $m = 2$, tem-se

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se se tem

$$y = \sqrt[m]{u} \tag{22}$$

onde u é uma função de x, derivável num certo intervalo, o teorema do **n.° 17** permite escrever

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\dfrac{du}{dx}}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

Em particular, para $m = 2$, tem-se

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\dfrac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

20. Derivada de potência de expoente racional. Considerando, em particular, a função

$$y = x^{\frac{p}{m}}$$

que se obtém, fazendo $u = x^p$ (p inteiro) na função (22), obtemos para sua derivada, de acôrdo com o resultado anterior

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{m\sqrt[m]{(x^p)^{m-1}}} = \frac{p}{m}\,x^{\frac{p}{m}-1}$$

donde se conclui que a regra de derivação de uma potência de expoente inteiro (**n.° 16**) se extende ao caso do expoente ser racional.

21. Derivadas das funções elementares. As regras de derivação, anteriormente dadas, permitem determinar as derivadas das funções algébricas, como veremos a seguir.

Estabeleceremos, posteriormente, as derivadas das principais funções transcendentes.

22. Derivadas das funções inteiras. Sendo os polinômios inteiros em x somas algébricas de um número limitado de têrmos, suas derivadas, de acôrdo com a regra do **n.° 12,** serão as somas algébricas das derivadas de seus têrmos. Como cada um dêstes é o produto de uma constante (coeficiente do têrmo) por uma potência de x de expoente inteiro e positivo (ou nulo), sua derivada será o produto desta constante pela derivada da potência de x, que se calcula segundo a regra do **n.° 16.**

Assim, a derivada do polinômio

$$y = 5x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 8x + 3$$

é

$$y' = 5 \times 4x^3 - 6 \times 3x^2 + 9 \times 2x - 8$$

porque as derivadas de x^4, x^3 e x^2 são, respectivamente, $4x^3$, $3x^2$ e $2x$ (**n.° 16**), a derivada de x é 1 (**n.° 11**) e a derivada de 3 é zero (**n.° 10**).

23. Derivadas das funções racionais. As derivadas das funções

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

onde $f(x)$ e $\varphi(x)$ são polinômios inteiros em x, obtém-se, aplicando-se sucessivamente as regras do **n.º 15** (derivada de fração) e do **n.º 22** (derivada de função inteira).

Seja, por exemplo, achar a derivada da função

$$y = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 4x - 3}$$

Aplicando a regra de derivada de fração (**n.º 15**), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^2+4x-3)\,(4x) - (2x^2-1)\,(4x+4)}{(2x^2+4x-3)^2} = \frac{4(2x^2-2x+1)}{(2x^2+4x-3)^2}$$

24. Derivadas das funções algébricas. Como as funções algébricas se podem apresentar com os aspectos mais variados, sua derivação será feita, aplicando-se convenientemente, em cada caso, as regras gerais já vistas. Vejamos alguns exemplos.

25. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = (a + x)\sqrt{a - x}$$

Resolução: Tratando-se de um produto de duas funções, temos, de acôrdo com a regra do **n.º 13, I**

$$\frac{dy}{dx} = (a + x)\,\frac{d}{dx}(\sqrt{a-x}) + \sqrt{a-x}\,\frac{d}{dx}(a + x)$$

Como

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{a-x}) = \frac{-1}{2\sqrt{a-x}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(a+x) = 1$$

substituindo êsses resultados na expressão da derivada anterior e efetuando as simplificações, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 3x}{2\sqrt{a-x}}$$

26. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^3$$

RESOLUÇÃO: De acôrdo com a regra de derivação de uma potência (**n.º 16**), temos

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

obtemos para expressão da derivada pedida

$$\frac{dx}{dx} = 3\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

27. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

RESOLUÇÃO: De acôrdo com a regra de derivação de uma fração (**n.º 15**), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d}{dx}(x) - x\,\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})}{1 - x^2}$$

Como

$$\frac{d}{dx}(x) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{1 - x^2}) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

substituindo êsses resultados na expressão da derivada anterior e efetuando as simplificações, obtemos

$$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

28. Derivada da função logarítmica. Consideremos a função $y = \log_a x$. A um acréscimo Δx de x resulta um acréscimo Δy de y, de modo que temos sucessivamente

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Se fizermos Δx tender para zero, o mesmo acontecerá com $\frac{\Delta x}{x}$ e, portanto, o numerador do segundo membro terá para limite $\log_a 1$ ou zero. Então, o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ apresentar-se-á sob a forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Levantemos, entretanto, esta indeterminação que é apenas aparente. Façamos, para isto, $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ donde resulta $\Delta x = \alpha x$, sendo, portanto, α uma quantidade que tende para zero com Δx. Substituindo êsses valores no segundo membro da última igualdade, obtemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a (1 + \alpha)}{\alpha x} = \frac{\frac{1}{\alpha} \log_a (1 + \alpha)}{x} = \frac{\log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}$$

Fazendo $\Delta x \to 0$ (e $\alpha \to 0$) e observando que

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[\log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \log_a \left[\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \log_a e$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{x} \tag{23}$$

Se, de um modo mais geral se tem $y = \log_a u$, resulta (**n.º 17**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u} \cdot \frac{du}{dx} \tag{24}$$

Em particular se tem (*)

$$\frac{d}{dx}(lx) = \frac{1}{x} \text{ e } \frac{d}{dx}(lu) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

visto que

$$le = 1$$

29. Derivada da função exponencial. Consideremos a função exponêncial(**) $y = a^x$ na qual a é um número positivo.

Tomando os logaritmos naturais de ambos os membros, obtemos

$$ly = x \cdot la$$

Derivando em relação a x de acôrdo com a regra anterior e a regra do **n.° 17** visto que y é uma função de x, obtemos

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = la \text{ donde } \frac{dy}{dx} = la \cdot y = la \cdot a^x$$

Em particular, temos

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

visto que $le = 1$. A função e^x é a única que é igual a tôdas as suas derivadas sucessivas.

No caso mais geral das funções a^u e e^u o teorema do **n.° 17** permite escrever

$$\frac{d}{dx}(a^u) = la \cdot a^u \frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

30. Derivada da função exponencial geral. Seja a função

$$y = u^v \tag{25}$$

onde u e v são funções de x deriváveis num mesmo intervalo, e supostas positivas nêle.

(*) Com o símbolo l indicamos os *logarítmos* ou *neperianos* (Vol. I, Cap. III, n.° 11).

(**) Vol. I, Cap. III, n.° 5.

Tomando os logaritmos naturais de ambos os membros resulta $ly = vlu$, ou, derivando segundo as regras já conhecidas,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = v\,\frac{\frac{du}{dx}}{u} + lu\,\frac{dv}{dx}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por y e atendendo à igualdade (25), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = v\,.\,u^{v-1}\,\frac{du}{dx} + lu\,.\,u^{v}\,\frac{dv}{dx}$$

31. Derivada de potência de expoente real. Supondo, na função (25), v um número real, o resultado anterior fica

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\,\frac{du}{dx}$$

visto que $\frac{dv}{dx} = 0$. Êste resultado mostra que a regra de derivação de uma potência de expoente racional (**n.º 20**) extende-se ao caso de uma potência de expoente real.

32. Derivada das funções circulares.

I. *Derivada do seno.* Seja a função $y = \operatorname{sen} x$ definida no campo real (x, por hipótese, é a medida do arco em radianos).

Dando a x um acréscimo Δx e determinando o acréscimo correspondente de y, obtemos

$$y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$$

Transformando em produto a diferença de senos do segundo membro (*) e dividindo ambos os membros da igualdade resultante por Δx, obtemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

(*) Aplicamos a fórmula

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

que foi estudada no Vol. II, Cap. VIII, n.º 21.

Fazendo Δx tender para zero, o quociente $\dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$ tem para limite 1 (**Cap. III, n.º 15**) e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

No caso geral da função $y = \operatorname{sen} u$, teríamos (**n.º 17**)

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \, \frac{du}{dx}$$

II. *Derivada do cosseno.* Anàlogamente se demonstra que

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

III. *Derivada da tangente.* Seja a função $y = \operatorname{tg} x$. Podemos escrever (*) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, ou, derivando segundo a regra do **n.º 15,** e atendendo aos dois resultados anteriores,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \, (*)$$

No caso geral da função $y = \operatorname{tg} u$, teríamos (**n.º 17**)

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u \, \frac{du}{dx}$$

IV. *Derivada da cotangente.* Anàlogamente se demonstra que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} u) = -\operatorname{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

V. *Derivada da secante.* Seja a função $y = \sec x$. Podemos escrever (*) $y = \dfrac{1}{\cos x}$, ou derivando segundo a regra do **n.º 15,**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \, . \, \operatorname{tg} x \, (*)$$

(*) Vol. II, Cap. VII, n.º 55.

No caso geral da função $y = \sec u$, teríamos

$$\frac{dy}{dx} = \sec u \,.\, \operatorname{tg} u \, \frac{du}{dx}$$

VI. *Derivada da cossecante.* Anàlogamente se demonstra que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \,.\, \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} u) = -\operatorname{cossec} u \,.\, \operatorname{cotg} u \, \frac{du}{dx}$$

33. Funções circulares inversas. Como há uma infinidade de arcos que têm um mesmo seno, um mesmo cosseno, uma mesma tangente, etc., (*) as funções inversas das funções

$$y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ \ldots . \qquad (26)$$

isto é, as funções que representaremos por

$$x = \operatorname{arc\,sen} y,\ x = \operatorname{arc\,cos} y,\ x = \operatorname{arc\,tg} y,\ \ldots . \qquad (27)$$

e que significam, respectivamente, *arco cujo seno é y, arco cujo cosseno é y, arco cuja tangente é y,* .... são *infinitívocas*, isto é, a um valor de y de seu campo de definição corresponde uma infinidade de valores de x.

Devemos, então, restringir o domínio de x nas funções (26) afim de tornar unívocas as funções (27), para podermos aplicar o teorema do **n.º 18.**

Para a função $y = \operatorname{sen} x$, por exemplo, restringindo o domínio de x ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, a função y será nêle crescente, indo de -1 a $+1$. (**)

Então, a função inversa $x = \operatorname{arc\,sen} y$ será unívoca no intervalo $[-1, +1]$.

Afim de poder inverter as demais funções trigonométricas, os domínios restritos de x devem ser (***)

(*) Vol. II, Cap. VII, ns. 40, 41 e 42.

(**) Vol. II, Cap. VII, n.º 22.

(***) Exercite o leitor seus conhecimentos de Trigonometria, verificando que as funções nêsses intervalos são sempre crescentes ou sempre decrescentes.

$$0 \leqq x \leqq \pi \text{ para a função } y = \cos x$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2} \text{ para a função } y = \operatorname{tg} x$$

$$0 < x < \pi \text{ para a função } y = \operatorname{cotg} x$$

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2} < x \leqq \pi \text{ para a função } y = \sec x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x < 0 \text{ e } 0 < x \leqq +\frac{\pi}{2} \text{ para a função } y = \operatorname{cossec} x$$

Posto isto, vejamos, então, as derivadas das funções circulares inversas, que suporemos sempre satisfazendo as restrições aquí impostas.

34. Derivadas das funções circulares inversas.

I. *Derivada de* arc sen u. Consideremos a função

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \tag{28}$$

tal como foi definida anteriormente e sua função inversa

$$x = \operatorname{sen} y \tag{29}$$

Temos (**n.º 32 I**),

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

e, portanto, a derivada de (28) será (**n.º 18**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

devendo o radical ser tomado com o sinal positivo, visto que, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ o cosseno é positivo (*).

No caso geral da função $y = \operatorname{arc\,sen} u$ temos (**n.º 17**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

(*) Vol. II, Cap. VII, n.º 19

II. *Derivada de* arc cos u. Anàlogamente se demonstra que

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\text{arc cos } u) = -\frac{\dfrac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

sendo, arc cos x a função definida no **n.º 33**.

III. *Derivada de* arc tg u. Consideremos a função

$$y = \text{arc tg } x \tag{30}$$

tal como foi definida no **n.º 33** e sua função inversa

$$x = \text{tg } y \tag{31}$$

cuja derivada é (**n.º 32, III**) $\dfrac{dx}{dy} = \sec^2 y$.

Então, a derivada de (30) será (**n.º 18**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\, y} = \frac{1}{1+x^2}$$

No caso geral da função $y = \text{arc tg } u$, temos (**n.º 17**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{1+u^2}$$

IV *Derivada de* arc cotg u. Anàlogamente se demonstram as fórmulas

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cotg } x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\text{arc cotg } u) = -\frac{\dfrac{du}{dx}}{1+u^2}$$

V. *Derivada de* arc sec u. Consideremos a função

$$y = \text{arc sec } u \tag{32}$$

tal como foi definida no **n.º 33** e sua função inversa

$$x = \sec y \tag{33}$$

cuja derivada é (**n.° 32, V**) $\dfrac{dx}{dy} = \sec y \ \operatorname{tg} y$,

Então, a derivada de (32) será (**n.° 18**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec y \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

ou, em virtude de (33),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

onde o radical deve ter sempre o sinal de $\operatorname{tg} y$.

No caso geral da função $y = \operatorname{arc\,sec} u$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

VI. *Derivada de* arc cossec u. Anàlogamente se demonstram as fórmulas

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cossec } x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cossec } u) = -\frac{\dfrac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

35. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = l\left(\frac{a + x}{a - x}\right)$$

RESOLUÇÃO: Podemos escrever

$$y = l\,(a + x) - l\,(a - x)$$

donde (**ns. 12 e 28**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}(a + x)}{a + x} - \frac{\dfrac{d}{dx}(a - x)}{a - x} = \frac{1}{a + x} - \frac{-1}{a - x} = \frac{2a}{a^2 - x^2}$$

36. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Resolução: Podemos pôr

$$y = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\,[\,l(1+x) - l(1-x)]$$

donde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{1-x^2}$$

37. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$$

Resolução: Observemos que $\operatorname{tg}^3 x$ é a terceira potência de $\operatorname{tg} x$; logo obtemos sua derivada aplicando a regra do (**n.° 16**).

Temos então (**ns. 12, 16** e **32, III**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times 3\operatorname{tg}^2 x \,.\, \sec^2 x - \sec^2 x + 1$$

ou simplificando e utilizando relações trigonométricas conhecidas (*)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}^2 x \,.\, \sec^2 x - (\sec^2 x - 1) =$$
$$= \operatorname{tg}^2 x \,.\, \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x =$$
$$= \operatorname{tg}^2 x\,(\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg}^4 x$$

38. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$$

(*) Vol. II, Cap. VII, ns. 55 e 56.

Resolução: De acôrdo com a fórmula do **n.º 34, III,** temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Sendo (**n.º 15**)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{(1-x^2)2-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

substituindo êste resultado na expressão anterior, obtemos após simplificação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

39. Exercício. *Achar a derivada da função* $y = x^{x^n}$.

Resolução: Aplicando a fórmula da derivada da função exponêncial geral (**n.º 30**) (sendo $u=x$ e $v=x^n$), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = x^n \,.\, x^{x^n-1} + lx \,.\, x^{x^n}\,(nx^{n-1}) = x^{x^n+n-1}(1+nlx)$$

40. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = \sqrt{a^2-x^2} + a \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$$

Resolução. Temos, de acôrdo com as fórmulas dos **n.s 19 e 34, I**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a\,\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

41. Exercício. *Achar a equação da tangente à curva* $y = x^2 - 4x$ *no ponto de abcissa* $x = 3$.

Resolução: Para $x = 3$ temos $y = -3$. Logo o ponto de tangência é $(3, -3)$. Seja a o coeficiente angular da tangente. Como êle é o valor da derivada da função no ponto $x = 3$ (**n.º 5**), temos

$$a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = \left[2x-4\right]_{x=3} = 2$$

Logo, a equação da tangente é

$$y + 3 = 2(x - 3) \quad \text{ou} \quad y = 2x - 9$$

42. Exercício. *Achar a derivada da função*

$$y = \text{arc } tg \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$$

e explicar o resultado

Resolução: Derivado, segundo as normas conhecidas, obtemos

$$y' = \frac{\dfrac{(1+\cos x)\cos x + \text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}}{1 + \dfrac{\text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x + 1}{2\cos x + 2} = \frac{1}{2}$$

Êste resultado indica que a função y deve ser da forma $\dfrac{x}{2} + C$. É o que vamos mostrar.

Fazendo na expressão da função as substituições

$$\text{sen } x = 2 \text{ sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

e efetuando as simplificações, obtemos

$$y = \text{arc } tg \left(tg \frac{x}{2} \right)$$

o que justifica a afirmação anterior, porque todos os arcos que têm a mesma tangente dos arcos $\dfrac{x}{2}$ são da forma $\dfrac{x}{2} + n\pi$, sendo n inteiro (*).

43. Formulário. A fim de auxiliar o aluno na resolução dos exercícios propostos, reunimos no quadro abaixo as fórmulas de derivação estabelecidas nêste capítulo, nas quais, $u, v, w, \ldots$ são funções deriváveis de x em intervalos definidos

(*) Vol. II, Cap. VII, n.º 42.

FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO

1. $\frac{d}{dx}(C) = 0$ (C : constante) **(n.º 10)**

2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$ **(n.º 11)**

3. $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \ldots.) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots.$ **(n.º 12)**

4. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ **(n.º 13, I)**

5. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$ **(n.º 13, II)**

6. $\frac{d}{dx}(Cv) = C\frac{dv}{dx}$ (C : constante) **(n.º 14)**

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ **(n.º 15)**

8. $\frac{d}{dx}(u^m) = m\ u^{m-1}\frac{du}{dx}$ $\quad \frac{d}{dx}(x^m) = m\ x^{m-1}$ (m real) **(nos. 16, 20 e 31)**

9. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[m]{u}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt[m]{x}\right) = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$ **(n.º 19)**

10. $\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$ $\quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(n.º 19)**

11. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$ $\quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}$ **(n.º 28)**

12. $\frac{d}{dx}(lu) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$ $\quad \frac{d}{dx}(lx) = \frac{1}{x}$ (l : logaritmo neperiano) **(n.º 28)**

13. $\frac{d}{dx}(a^u) = la \,.\, a^u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(a^x) = la \,.\, a^x$ (**n.° 29**)

14. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (**n.° 29**)

15. $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1} \,.\, \frac{du}{dx} + lu \,.\, u^v \,.\, \frac{dv}{dx}$ (**n.° 30**)

16. $\frac{d}{dx}(\text{sen}\, u) = \cos\, u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\text{sen}\ x) = \cos\ x$ (**n.° 32, I**)

17. $\frac{d}{dx}(\cos\, u) = -\text{sen}\, u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen}\, x$ (**n.° 32, II**)

18. $\frac{d}{dx}(\text{tg}\ u) = \sec^2 u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\text{tg}\ x) = \sec^2 x$ (**n.° 32, III**)

19. $\frac{d}{dx}(\text{cotg}\, u) = -\text{cossec}^2 u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg}\ x) = -\text{cossec}^2 x$
(**n.° 32, IV**)

20. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \,.\, \text{tg}\, u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\sec\ x) = \sec\ x \,.\, \text{tg}\ x$
(**n.° 32, V**)

21. $\frac{d}{dx}(\text{cossec}\ u) =$ $\qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec}\ x) =$

$= -\text{cossec}\ u \,.\, \text{cotg}\ u \,.\, \frac{du}{dx}$ $\qquad = -\text{cossec}\ x \,.\, \text{cotg}\ x$
(**n.° 32, VI**)

22. $\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\ u) = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\text{arc sen}\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(**n.° 34, I**)

23. $\frac{d}{dx}(\text{arc cos}\ u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$ $\qquad \frac{d}{dx}(\text{arc cos}\ x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(**n.° 34, II**)

24. $\frac{d}{dx}(\text{arc tg } u) = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$ $\frac{d}{dx}(\text{arc tg } x) = \frac{1}{1+x^2}$ **(n.º 34, III)**

25. $\frac{d}{dx}(\text{arc cotg } u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$ $\frac{d}{dx}(\text{arc cotg } x) = -\frac{1}{1+x^2}$

(n.º 34, IV)

26. $\frac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$ $\frac{d}{dx}(\text{arc sec } x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(n.º 34, V)

27. $\frac{d}{dx}(\text{arc cossec } u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\text{arc cossec } x) = -\frac{1}{x\sqrt{u^2-1}}$ **(n.º 34, VI)**

44. Exercícios.

Achar as derivadas das seguintes funções:

1. $y = x \, . \, lx$ *Resp.:* $y' = 1 + lx$
2. $y = \sqrt{a^2+x^2}$ *Resp.:* $y' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$
3. $y = \cos x + x \operatorname{sen} x$ *Resp.:* $y' = x \cos x$
4. $y = x - \operatorname{sen} x \cos x$ *Resp.:* $y' = 2 \operatorname{sen}^2 x$
5. $y = x(1+x^2)\sqrt{1-x^2}$ *Resp.:* $y' = \frac{1+x^2-4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = l\sqrt{1-x^2}$ *Resp.:* $y' = \frac{x}{x^2-1}$.
7. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ *Resp.:* $y' = \frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$
8. $y = l\frac{1+x^2}{1-x^2}$ *Resp.:* $y' = \frac{4x}{1-x^4}$
9. $y = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ *Resp.:* $y' = \frac{x(3-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

10. $y = l\dfrac{a+x}{a-x}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{2a}{a^2 - x^2}$

11. $y = l(x + \sqrt{x^2+1})$ *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

12. $y = l\dfrac{e^x}{1+e^x}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{1+e^x}$

13. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

14. $y = e^x l(\text{sen}\, x)$ *Resp.:* $y' = e^x(\text{cotg}\, x + l\, \text{sen}\, x)$

15. $y = l\dfrac{1 + \text{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \text{tg}\dfrac{x}{2}}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{\sec x}$

16. $y = \dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\sec x}$ *Resp.:* $y' = \text{sen}\, x + \cos x$

17. $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{-2\, \text{sen}\, x}{(1-\cos x)^2}$

18. $y = \dfrac{x}{1+x^2} + \text{arc tg}\, x$ *Resp.:* $y' = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$

19. $y = l\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ *Resp.:* $y' = \text{cossec}\, x$

20. $y = \text{sen}\,(x+a)\cos(x-a)$ *Resp.:* $y' = \cos 2x$

21. $y = \text{arc tg}\, \dfrac{1+x}{1-x}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

22. $y = \text{arc sec}\, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

23. $y = x\, \text{arc tg}\, x - \dfrac{1}{2}\, l(1+x^2)$ *Resp.:* $y' = \text{arc tg}\, x$

24. $y = x\sqrt{1-x^2} + \text{arc sen}\, x$ *Resp.:* $y' = 2\sqrt{1-x^2}$

25. $y = \text{arc sen}\, \sqrt{\text{sen}\, x}$ *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{cossec}\, x}$

26. Achar as derivadas das funções abaixo e explicar seus resultados

$y = \text{arc sen}\, \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ (*) *Resp.:* $y' = \dfrac{1}{2}$

(*) Para explicar o resultado $y' = \dfrac{1}{2}$ fazer $1 - \cos x = 2\, \text{sen}^2 \dfrac{x}{2}$.

$y = \text{arc } tg \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen } x}$ (*) $\qquad y' = \dfrac{1}{2}$

$y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$ *Resp.:* $y' = 0$

$y = e^{lx}$ *Resp.:* $y' = 1$

$y = \text{arc sen } x + \text{arc cos } x$ *Resp.:* $y' = 0$

27. Achar as expressões das derivadas de ordem n das funções:

$y = e^x$ *Resp.:* $y^{(n)} = e^x$

$y = a^x$ *Resp.:* $y^{(n)} = l^n a \, . \, a^x$

$y = e^{ax}$ *Resp.:* $y^{(n)} = a^n \, . \, e^{ax}$

$y = l(1+x)$ *Resp.:* $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

28. Achar a equação da tangente à curva $y = x^2$ no ponto de abcissa $x = 2$.
Resp.: $y = 4x - 4$

29. Achar as equações das tangentes à curva $y = 4x - x^2$ nos pontos em que ela corta o eixo ox.
Resp.: $y = 4x$ e $y = -4x + 16$

(*) Fazer, para a explicação pedida, as substituições $1 - \cos x = 2 \text{ sen}^2 \dfrac{x}{2}$ e $\text{sen } x = 2 \text{ sen } \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$.

CAPÍTULO VII

MÁXIMOS E MÍNIMOS (*)

1. Preliminares. Diz-se que uma função $f(x)$ apresenta um *máximo relativo* (ou um *mínimo relativo*) num ponto x_0 de seu campo de definição, se $f(x_0)$ é *superior* (ou *inferior*) a qualquer valor assumido pela função num entôrno suficientemente pequeno de x_0. Diz-se, então, que x_0 é um *maximante* ou *ponto de máximo relativo* (ou *minimante* ou *ponto de mínimo relativo*) da função.

Por exemplo, a função

$$f(x) = x^3 - 3x \qquad (1)$$

apresenta, no ponto $x = -1$, o *máximo* relativo $f(-1) = 2$ e, no ponto $x = 1$, o *mínimo* relativo $f(1) = -2$ (fig. 58, pág. 172) Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são, respectivamente, o *maximante* e o *minimante* relativos da função dada.

O maior (ou o menor) valor assumido pela função em seu campo de existência denomina-se seu *máximo* (ou *mínimo*) *absoluto*. Dêsse modo, um máximo (ou mínimo) relativo de uma função pode não ser um máximo (ou mínimo) absoluto dessa função. Por exemplo, o máximo relativo $f(-1) = -2$ da função anterior não é um máximo absoluto, porque, para qualquer valor de x superior a 2, a função assume valores superiores a 2 (fig. 58, pág. 172).

Os máximos e mínimos de uma função denominam-se indiferentemente *extremos* dessa função; os pontos de máximo ou mínimo chamam-se *extremantes* da função.

2. Teorema. Seja $f'(x_0)$ a derivada de uma função $f(x)$ num ponto x_0 de seu campo de existência, ou

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(*) Êste capítulo consta apenas do programa do Curso Científico.

Observemos que, se $f(x)$ *é crescente* no ponto x_0, a razão incremental $\Delta = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ num entôrno suficientemente pequeno de x_0 é positiva, visto que, se $x < x_0$ se tem $f(x) < f(x_0)$ e se $x_0 < x$ se tem $f(x_0) < f(x)$ **(Cap. II, n.º 11)**. Por outro lado, num entôrno suficientemente pequeno de x_0, se $f'(x_0) \neq 0$, $f'(x_0)$ e Δ têm o mesmo sinal **(Cap. III, n.º 7)**. Podemos, então, concluir:

Se $f(x)$ admite derivada $f'(x_0)$ num ponto x_0 de seu campo de existência, $f(x)$ é crescente num entôrno suficientemente pequeno de x_0 se $f'(x_0) > 0$ *e decrescente nesse entôrno se* $f'(x_0) < 0$.

De modo análogo se demonstra a recíproca dêsse teorema.

3. Teorema. Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo $[a, b]$, admitindo *derivada única e finita* em todos os pontos dêsse intervalo. Seja x_0 um extremante da função, situado no interior do intervalo $[a - b]$.

Para fixar as idéias suponhamos que x_0 seja um *ponto de máximo* de $f(x)$. Seja, então, h um número positivo tal que, no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, contido no intervalo $[a, b]$ se verifique a condição de máximo. Podemos, então, escrever

$$f(x_0 + h) < f(x_0) \qquad f(x_0 - h) < f(x_0)$$

ou respectivamente

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0 \tag{2}$$

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0 \tag{3}$$

Formemos, então, as *razões incrementais*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0 \tag{4}$$

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} > 0 \tag{5}$$

Fazendo h tender para zero, a razão (4), conservando-se sempre negativa, terá um limite *negativo* ou *nulo* (*)

$$f'(x_0 + 0) \leqq 0 \tag{6}$$

(*) Se o limite fôsse positivo, pelo teorema da permanência do sinal num entôrno do limite (Cap. III, n.º 7), num entôrno suficientemente pequeno do ponto x_0, a razão (4) seria positiva, o que é contrário à hipótese.

que é a *derivada à direita* de $f(x)$, no ponto x_0; por outro lado, a razão (5), conservando-se sempre positiva, terá um limite *positivo ou nulo*

$$f'(x_0 - 0) \geq 0 \qquad (7)$$

que é a *derivada à esquerda* de $f(x)$ no ponto x_0.

Como a função, por hipótese, admite *derivada única* no ponto x_0, as derivadas à direita e à esquerda dêsse ponto devem ser iguais, o que, em virtude das condições (6) e (7), só se verifica se $f'(x_0) = 0$.

Análoga demonstração faríamos supondo x_0 um ponto de mínimo da função.

CONCLUSÃO: *Se uma função definida num intervalo fechado e admitindo derivada única e finita em todos os seus pontos, assume um valor máximo ou mínimo num ponto interior dêsse intervalo, sua derivada se anula necessàriamente nêsse ponto.*

4. Observações.

I. Vimos (**Cap. VI, n.º 5**) que a derivada de uma função num ponto é o coeficiente angular da tangente nêsse ponto, ou seja a tangente trigonométrica do ângulo do semi-eixo positivo ox com aquela tangente. Se, então, a derivada é nula num ponto, aquele ângulo é 0 ou π e, portanto, a tangente à curva é paralela ao eixo ox.

II. Conclui-se do teorema demonstrado que os extremantes da função $f(x)$, interiores aos intervalos onde ela admite derivada única e finita, são raízes da equação

$$f'(x) = 0 \qquad (8)$$

Entretanto, a recíproca dessa propriedade não é verdadeira, isto é, pode haver raízes da equação (8) que não sejam extremantes de $f(x)$. Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = x^3$, cuja representação gráfica está indicada na fig. 51. Sua derivada $f'(x) = 3x^2$ anula-se no ponto $x = 0$, que, entretanto não é *extremante de* $f(x)$, visto ser essa uma função monótona crescente em todo o campo real.

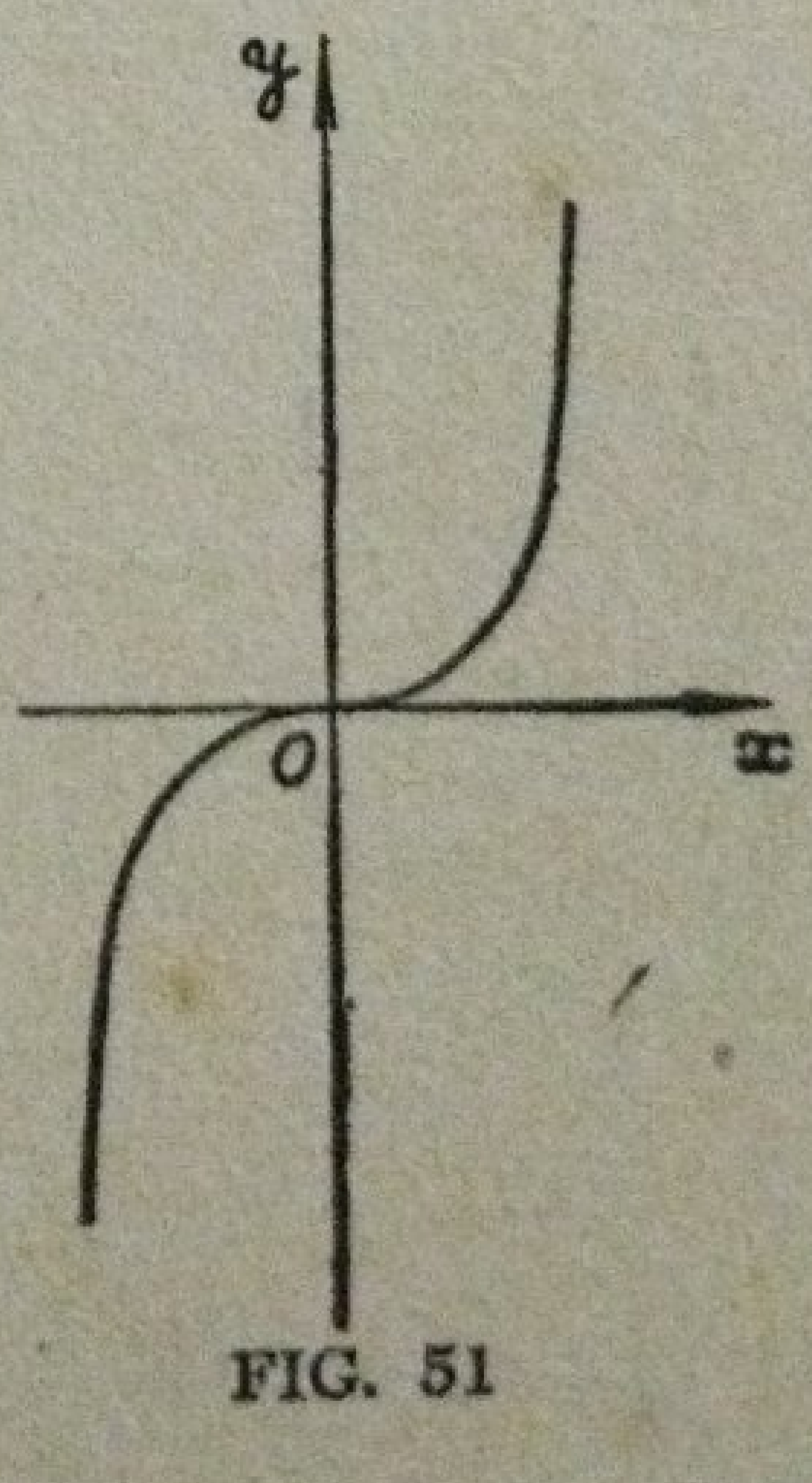

FIG. 51

5. Caracterização dos extremantes de uma função. O princípio geral que permite selecionar quais as raízes da equação (8) que são maximantes ou minimantes de $f(x)$ envolve a consideração das derivadas sucessivas de $f(x)$, exigindo sua demonstração conhecimentos além das possibilidades dêste compêndio.

Para as aplicações mais freqüentes pode ser utilizado o seguinte teorema, cuja demonstração omitiremos: (*)

Se $f(x)$ admite derivada única e finita em todo o intervalo $[a, b]$ e se num ponto x_0 interior dêste se tem $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\neq 0$ então a função terá um máximo em x_0 se $f''(x_0) < 0$ e um mínimo se $f''(x_0) > 0$.

Façamos um *raciocínio intuitivo* para esclarecer o teorema anterior. Seja M um ponto de máximo de $f(x)$, no qual, como vimos, a tangente é paralela ao eixo $\overrightarrow{ox}$.

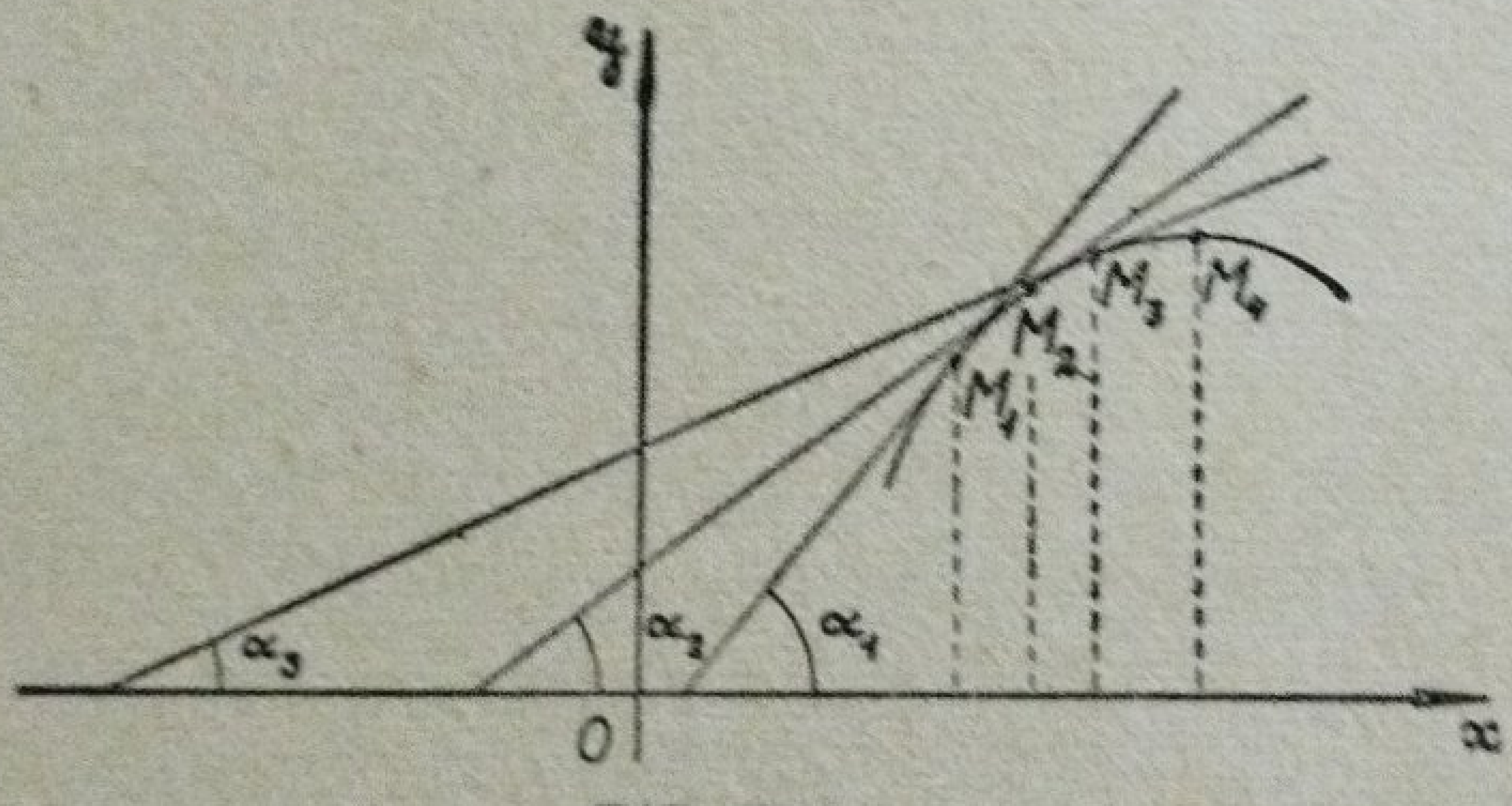

FIG. 52

Consideremos, num entôrno suficientemente pequeno à esquerda de M, uma sucessão de pontos M_1, M_2, M_3 ... (fig. 52), tendo para limite M. Sejam, α_1, α_2, α_3, ..., respectivamente, os ângulos das tangentes à curva nos pontos M_1, M_2, M_3, ... com o semi-eixo positivo das abcissas.

Observemos, então, que a sucessão α_1, α_2, α_3, ... vai *decrescendo* e tem para limite zero, enquanto a sucessão M_1, M_2, M_3, ... tem para limite M. Então, a sucessão

$$\operatorname{tg}\alpha_1, \ \operatorname{tg}\alpha_2, \ \operatorname{tg}\alpha_3, \ \ldots$$

(*) Essa demonstração exigiria igualmente conhecimentos que ultrapassam objetivo dêste curso.

ou seja a sucessão das derivadas primeiras da função nos pontos $M_1, M_2, M_3, \ldots$ é *decrescente*. Em outras palavras, a derivada primeira da função é *decrescente* num entôrno suficientemente pequeno à esquerda de M.

Mostrariamos igualmente que a derivada primeira da função é, ainda, decrescente num entôrno suficientemente pequeno à direita de M. Então, num entôrno bilateral suficientemente pequeno do ponto M (de máximo), *a derivada primeira da função é sempre decrescente e, portanto, sua derivada segunda é negativa.*

Veríamos, anàlogamente, que num entôrno bilateral suficientemente pequeno de um ponto de mínimo, *a derivada primeira da função é sempre crescente e, portanto, sua derivada segunda é positiva.*

6. Determinação dos extremantes. Podemos, em resumo, estabelecer a seguinte regra para a determinação dos pontos de máximo ou mínimo de uma função $f(x)$, que admite derivada única e finita:

I. *Calcula-se a derivada primeira $f'(x)$ e resolve-se a equação*

$$f'(x) = 0 \tag{9}$$

II. *Calcula-se a derivada segunda $f''(x)$ e verifica-se seu sinal para os valores de x que são raizes de* (9), *observando-se os seguintes casos:*

Max $f''(x) < 0$: *a função passa por um máximo*

Min $f''(x) > 0$: *a função passa por um mínimo* (*)

Vejamos algumas aplicações.

7. Exercício. *Achar os extremantes da função*

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde a, b, c são constantes e $a \neq 0$.

RESOLUÇÃO: Sendo $y' = 2ax + b$ a derivada primeira da função, igualando-a a zero, obtemos a equação $2ax + b = 0$, cuja raiz é $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(*) Se $f''(x) = 0$, a pesquisa dos extremantes exige a consideração de derivadas de ordem superior à segunda, assunto de que não podemos tratar.

Sendo $y' = 2a$ a derivada segunda, em virtude da regra anterior, concluimos que se a é positivo a função passa por um mínimo e se a é negativo ela passa por um máximo.

8. Exercício. *Achar os extremantes da função*

$$y = x^3 - 12x + 4$$

Resolução: Determinando a derivada desta função e igualando-a a zero, obtemos $3x^2 - 12 = 0$ equação que apresenta duas raizes $x' = 2$ e $x'' = -2$.

Sendo $y'' = 6x$ a derivada segunda, determinando seu sinal nêsses pontos, obtemos o seguinte resultado:

$$x' = 2 \qquad y'' = 6 \times 2 = 12 > 0: \text{ mínimo}$$
$$x'' = -2 \quad y'' = 6(-2) = -12 < 0: \text{ máximo}$$

9. Exercício. *Dividir um número « a » em duas partes cujo produto seja um máximo.*

Resolução: Sejam x e $a - x$ essas partes. Devemos determinar o máximo do produto

$$y = x\,(a - x) = ax - x^2$$

Seguindo a marcha geral, obtemos

$$y' = a - 2x = 0$$

donde $x = \dfrac{a}{2}$. Como $y'' = -2 < 0$, concluimos que o produto apresenta um *máximo* para $x = \dfrac{a}{2}$ isto é que o número deve ser dividido em duas partes iguais.

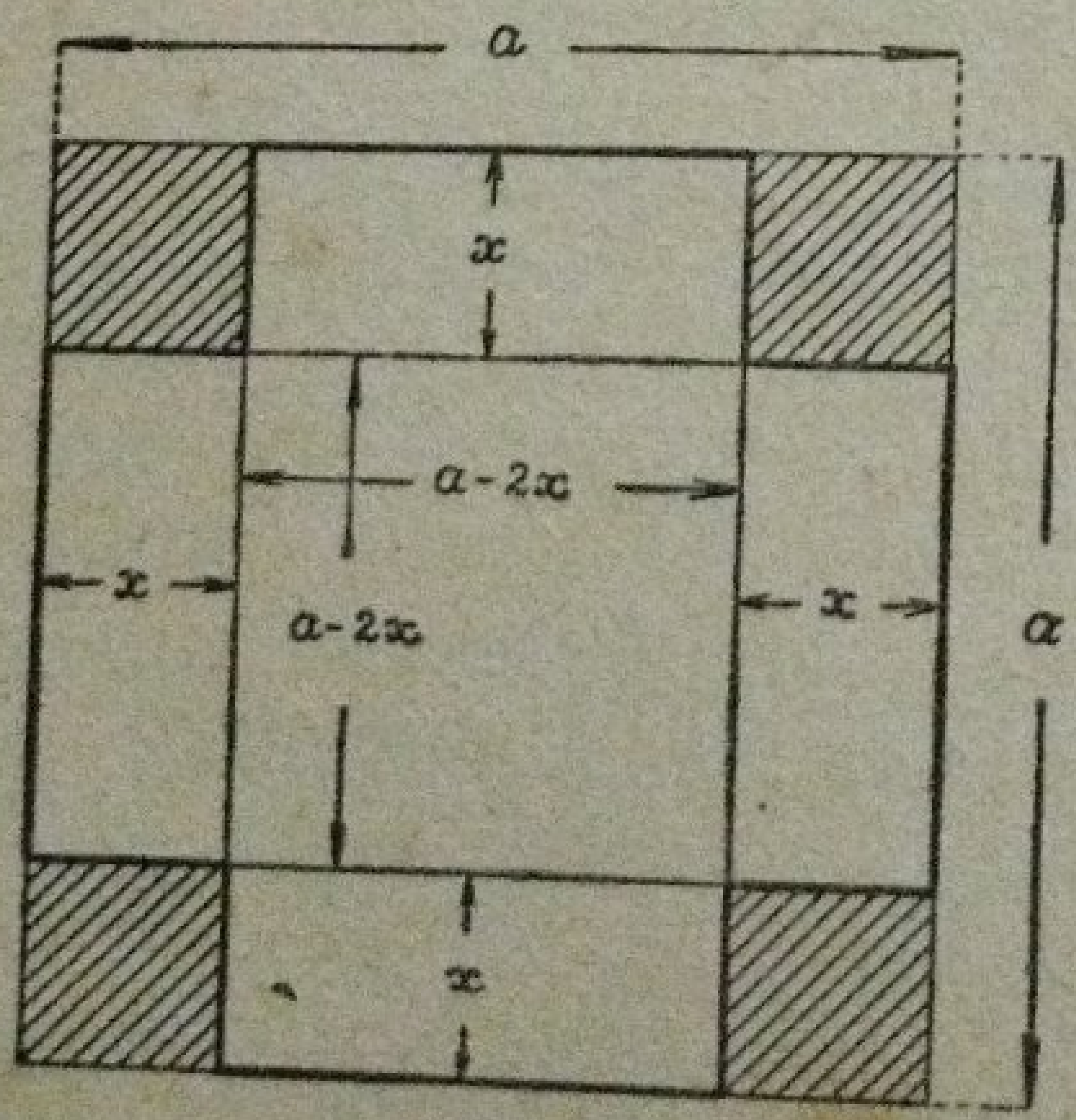

FIG. 53

10. Exercício. *Tem-se uma fôlha de metal cuja forma é um quadrado de lado a. Deseja-se com ela fazer uma caixa (sem tampa), cortando-se em seus cantos quadrados iguais e dobrando-se convenientemente a parte restante.*

Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.

RESOLUÇÃO: Seja x o lado dêsses quadrados (fig. 53).

De acôrdo com o problema, a altura da caixa será x e sua base será um quadrado de lado $a - 2x$. Portanto, seu volume será

$$V = x(a-2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

Determinemos para que valor de x V passa por um máximo. Seguindo a regra do **n.° 6,** obtemos

$$\frac{dV}{dx} = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

equação cujas raizes são $x' = \dfrac{a}{2}$ e $x'' = \dfrac{a}{6}$.

Determinando o sinal da derivada segunda

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -8a + 24x$$

nos pontos $\dfrac{a}{2}$ e $\dfrac{a}{6}$, obtemos

$$x = \frac{a}{2} \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -8a + 12a = 4a > 0: \ \textit{mínimo}\ (*)$$

$$x = \frac{a}{6} \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -8a + 4a = -4a < 0: \ \textit{máximo}$$

A solução é, portanto, $x = \dfrac{a}{6}$.

53. Problema da caçarola. *Determinar qual deve ser a relação entre a altura e o raio da base de uma caçarola cilíndrica, de modo a se conseguir, na sua confecção, o máximo de economia de metal.*

RESOLUÇÃO: O problema, do ponto de vista matemático, pode apresentar-se da seguinte maneira: sendo S a área de metal da caçarola (área lateral mais a área da base),

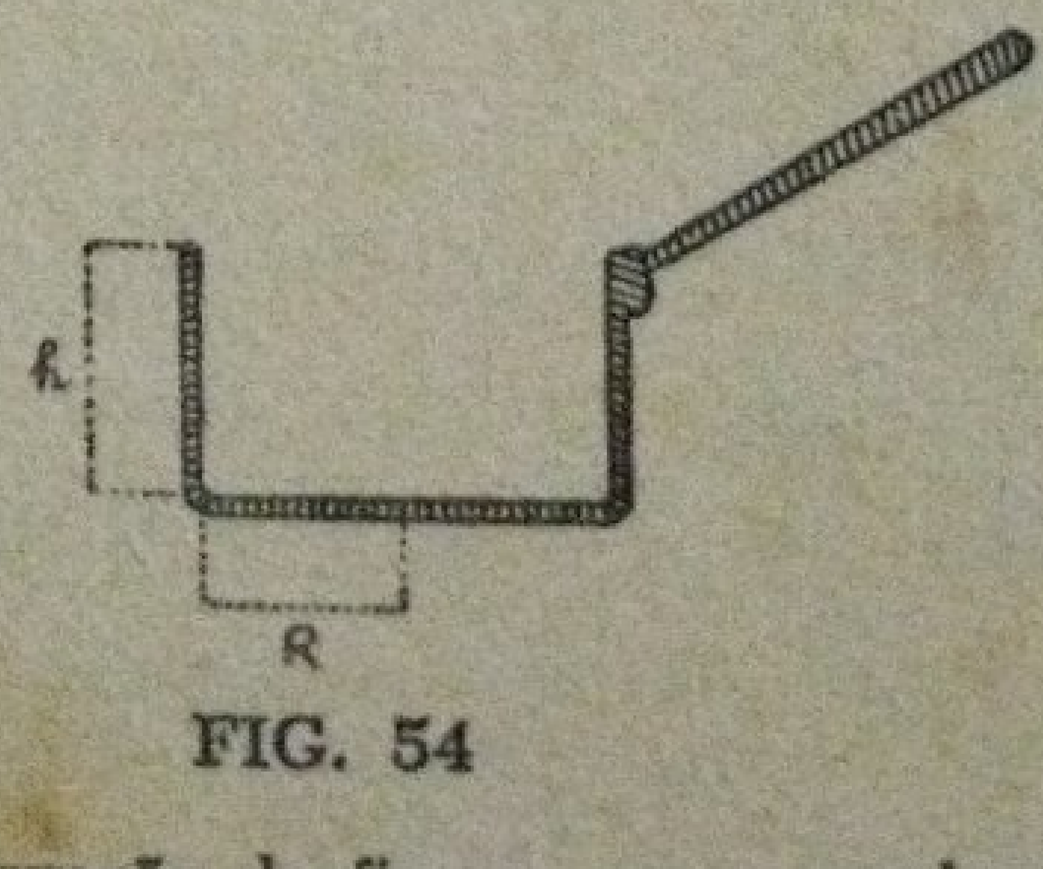

FIG. 54

(*) Êste resultado era evidente à simples observação da figura; corresponde ao caso do volume ser nulo.

determinar, entre tôdas as caçarolas de área S (constante), qual a de maior volume (*).

Representando por R e h, respectivamente, o raio da base e a altura da caçarola, temos (**)

$$\begin{aligned} S &= S_B + S_l = \pi R^2 + 2\pi Rh \\ V &= \pi R^2 h \end{aligned} \qquad (10)$$

Da primeira relação tiramos $h = \dfrac{S - \pi R^2}{2\pi R}$.

Substituindo êste valor na expressão de V, obtemos, após ligeira simplificação,

$$V = \frac{1}{2}(SR - \pi R^3)$$

Temos, assim, V expresso em função de S e R. Suponhamos, então, S constante e determinemos para que valor da variável R a função V passa por um máximo. Seguindo a regra do **n.° 6,** obtemos

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{2}(S - 3\pi R^2) = 0$$

o que dá $3\pi R^2 = S$ ou, levando em conta o valor (10) de S

$$3\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi Rh$$

Esta equação, resolvida em relação a R, dá as soluções $R = 0$ e $R = h$. A primeira evidentemente corresponde a uma solução que não interessa ao problema, devendo a segunda ser a solução procurada. É o que comprovamos, verificando o sinal da derivada segunda $\dfrac{d^2V}{dR^2} = -3\pi R$ no ponto $R = h$.

Obtemos

$$\frac{d^2V}{dR^2} = -3\pi h < 0$$

e, portanto, a função passa por um máximo.

Concluimos, então, que a forma econômica da caçarola é aquela em que a altura é igual ao raio da base.

(*) O problema poderá, também, ser formulado da seguinte maneira: entre tôdas as caçarolas de volume V (constante) qual a de menor área S? Aconselhamos o leitor a resolve-lo sob êsse aspecto.

(**) Vol. I, Cap. VI, n.° 19 e 20.

12. Exercício. *De todos os triângulos retângulos circunscritos a um mesmo círculo qual o de menor perímetro?*

RESOLUÇÃO: Seja ABC (fig. 55) um triângulo retângulo circunscrito a um círculo de raio R. Tiremos do centro 0 as perpendiculares OM, ON e OP, respectivamente, aos lados BC, AB e AC. Da Geometria Plana sabemos que

$$AN = AP = R \quad CM = CP \quad BM = BN$$

Representando, então, respectivamente, por x e y os segmentos CM (ou CP) e BM (ou BN), podemos escrever a seguinte expressão para o perímetro do triângulo

$$P = 2x + 2y + 2R \qquad (11)$$

sendo x e y variáveis ligadas pela relação de Pitágoras

$$(x+y)^2 = (x+R)^2 + (y+R)^2 \qquad (12)$$

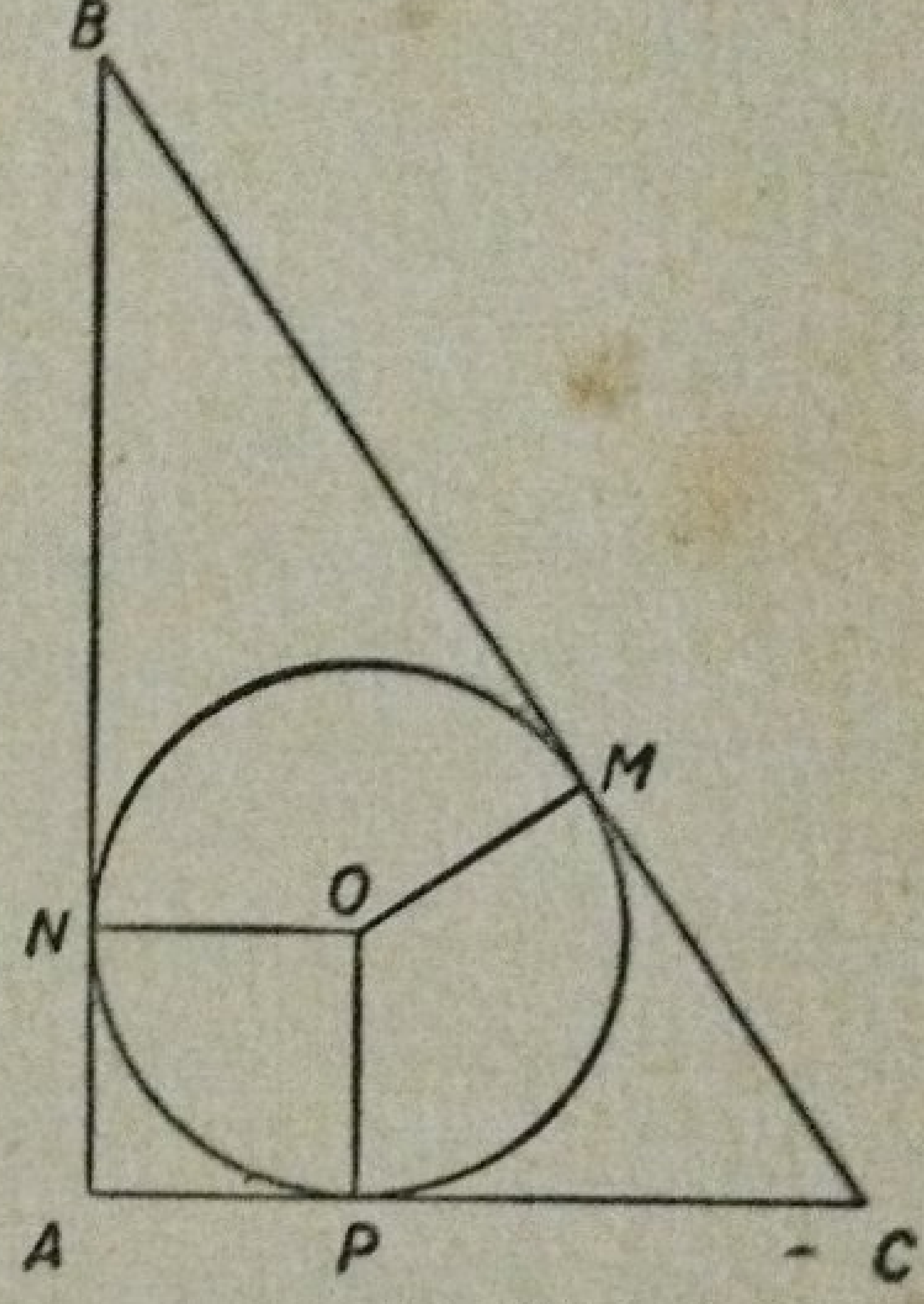

FIG. 55

Podemos, então, exprimir P em função de uma apenas dessas variáveis, por exemplo, x. Desenvolvendo os quadrados indicados em (12) e suprimindo os têrmos comuns a ambos os membros, obtemos uma equação do 1.º grau em y, que dá

$$y = \frac{R(x+R)}{x-R}$$

Substituindo êste valor em (11) obtemos a expressão do perímetro em função de x

$$P = 2x + \frac{2R\,(x+R)}{x-R} + 2R$$

Determinando a derivada $\frac{dP}{dx}$ e igualando-a a zero, obtemos

$$\frac{dP}{dx} = 2 + \frac{(x-R)\,2R - 2R\,(x+R)}{(x-R)^2} = 0$$

equação que, resolvida, dá as soluções

$$x = R(1 + \sqrt{2}) \text{ e } x = R(1 - \sqrt{2}) \tag{13}$$

das quais a segunda evidentemente não satisfaz o problema, pois dá para x um valor negativo.

Como a derivada segunda da função (11)

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{8R^2}{(x - R)^3}$$

assume no ponto $x = R\ (1+\sqrt{2})$ o valor $\dfrac{4(1+\sqrt{2})^2}{R\sqrt{2}}$, isto é,

$$\frac{d^2P}{dx^2} > 0 \text{ para } x = R\,(1 + \sqrt{2})$$

concluimos que $f(x)$ passa por um mínimo nêsse ponto.

Substituindo, na relação (12), x por seu valor (13), tiramos sem dificuldade

$$y = R(1 + \sqrt{2})$$

isto é, $x = y$, e, portanto, o triângulo é isósceles.

Concluimos, então, que, de tôdos os triângulos retângulos circunscritos a um círculo, o de menor perímetro é o *isósceles.*

13. Exercício. *Determinar as dimensões do cone de revolução de volume máximo inscrito numa esfera de raio R.*

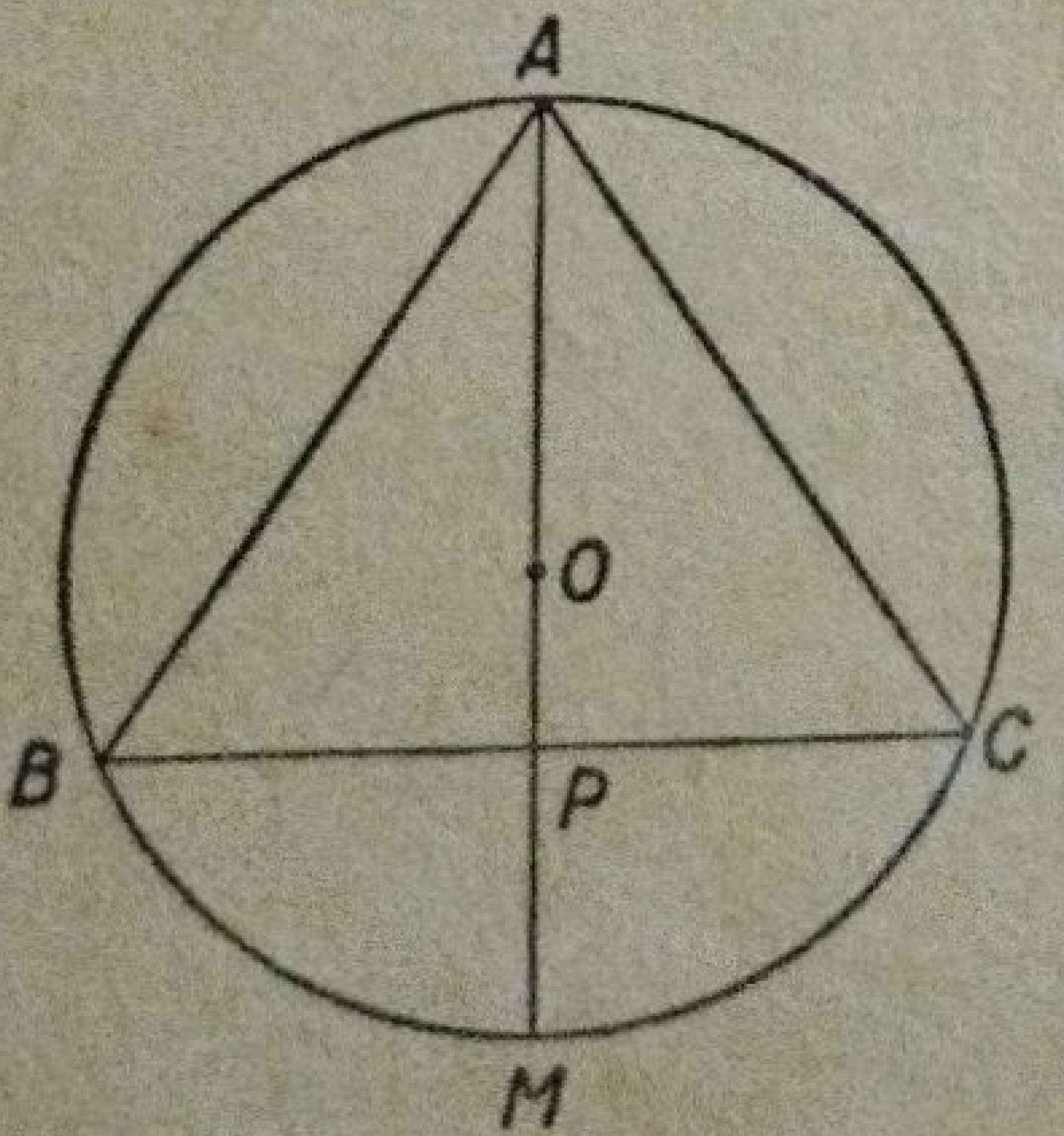

FIG. 56

RESOLUÇÃO: Tiremos um plano meridiano do cone(*). Seja o triângulo isósceles ABC (fig. 56) a secção meridiana do cone correspondente e a circunferência de centro 0 a secção do plano meridiano com a superfície esférica. Tiremos o diâmetro AM. Sendo $y = AP$ e $x = BP$, respectivamente, a altura e o raio da base do cone, seu volume será (**)

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \tag{14}$$

(*) Vol. I, Cap. VI, n.º 29.
(**) Vol. I, Cap. VI, n.º 33.

Para exprimir êste volume em função de uma só variável (x ou y) vejamos uma relação a que elas devam satisfazer. Da Geometria Plana sabemos que (*)

$$BP \times PC = AP \times PM$$

ou

$$x^2 = y\,(2R - y) \tag{15}$$

Substituindo êste valor na expressão (14) obtemos

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 (2R - y) = \frac{\pi}{3}(2Ry^2 - y^3)$$

Seguindo, então, a marcha do **n.º 48,** vem

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3}(4Ry - 3y^2) = 0$$

o que dá as soluções

$$y = 0 \text{ e } y = \frac{4R}{3} \tag{16}$$

das quais a primeira evidentemente não serve ao problema.

Como a derivada segunda

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{\pi}{3}(4R - 6y)$$

assume, para $y = \frac{4\,R}{3}$, o valor negativo $-\frac{4\pi R}{3}$, concluimos que, no ponto $y = \frac{4\,R}{3}$, a função passa por um máximo.

Substituindo em (15) o valor de y dado por (16), obtemos

$$x = \frac{2R\sqrt{2}}{3} \tag{17}$$

Os valores (16) e (17) são as soluções procuradas.

56. Exercícios para resolver.

1. Achar os extremantes da função $y = x^3 - 6x^2 + 4$.

Resp.: $x = 0$ (máximo) e $x = 4$ (mínimo)

(*) Quando duas cordas de um mesmo círculo se cortam, o produto dos dois segmentos de uma é igual ao produto dos dois segmentos da outra.

2. Achar os extremantes da função $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

Resp.: $x = -1$ (mínimo) e $x = +1$ (máximo)

3. Demonstrar que o quadrado é o retângulo de *perímetro máximo* e de *área máxima*, inscrito num círculo dado.

4. Demonstrar que, de todos os triângulos retângulos de hipotenusa dada, o de maior área é o isósceles.

5. Demonstrar que, de todos os triângulos isósceles inscritos num círculo dado, o de maior área é o equilátero.

6. Uma folha de papel deve conter a centímetros quadrados de texto impresso, devendo suas margens superior e inferior ter 2 cm e suas margens laterais 1 cm. Quais devem ser as dimensões da folha de modo que haja o máximo de econômia de papel?

Resp.: $2 + \dfrac{\sqrt{2a}}{2}$ (base) e $4 + \sqrt{2a}$ (altura)

7. Demonstrar que a altura do cilindro de revolução de volume máximo, inscrito num cone de revolução dado, é igual à têrça parte da altura do cone.

8. Determinar a altura do cilindro de revolução de volume máximo inscrito numa esfera de raio R.

Resp.: $h = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

9. Determinar a altura do cilindro de revolução de área lateral máxima, inscrito numa esfera de raio R. *Resp.:* $h = R\sqrt{2}$

10. Determinar a altura do cone de revolução de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio R. *Resp.:* $h = 4R$

11. Corta-se um cone de revolução por um plano paralelo à sua base. A que distância da base deve ser feita esta secção, de modo que o cone, cuja base é esta secção e cujo vértice é o centro da base do cone dado, tenha um volume máximo?

Resp.: A uma distância igual à têrça parte da altura do cone.

12. Demonstrar que, de todos os cilindros de revolução de mesma área total, o de volume máximo é aquêle cuja altura é igual ao diâmetro da base.

13. Determinar a altura do cilindro de revolução de área total máxima, inscrito numa esfera de raio R.

Resp.: $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

14. Demonstrar que, de todos os prismas regulares de base quadrática, inscritos numa esfera, o de maior volume é o cubo.

15. Numa esfera de raio R inscreve-se um tronco de cone de revolução cuja base maior é um círculo máximo da esfera. Determinar a altura do tronco de modo que sua área lateral seja máxima.

Resp.: $h = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$

CAPÍTULO VIII

ESTUDO DA VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO (*)

1. Preliminares. Como a derivada de uma constante é nula, *se uma função é constante num intervalo, sua derivada é nula em todos os pontos dêste.* Demonstra-se a recíproca dêste teorema, isto é, que *se a derivada de uma função é nula em todos os pontos de um intervalo a função é constante nêle.*

Dos princípios estabelecidos no capítulo anterior resulta que *se a derivada de uma função é positiva* (*ou negativa*) *em todos os pontos de um intervalo* (*podendo excepcionalmente anular-se em pontos isolados dêste*) a função é *crescente* (*ou decrescente*) *nêste intervalo.* Recìprocamente, *se uma função é crescente* (*ou decrescente*) *num intervalo e derivável em todos os pontos dêste, sua derivada é positiva* (*ou negativa*) *nêste intervalo* (*podendo excepcionalmente anular-se em pontos isolados dêste*).

Por exemplo, a função $y = x^3$ é crescente no intervalo $(-\infty, +\infty)$; sua derivada $y' = 3x^2$ é positiva nêste intervalo, excepto no ponto $x = 0$ onde se anula (**Cap. VII, n.º 4. II**).

2. Pontos de inflexão. Quando a curva representativa de uma função $f(x)$, num ponto M (fig. 57), atravessa a tangente nêste ponto, mudando o sentido de sua concavidade, diz-se que M é um *ponto de inflexão* da curva.

Observemos que o que caracteriza um ponto de inflexão é que a função derivada assume nêle um valor máximo ou mínimo. Por exemplo, no ponto M da fig. 57, êsse valor é mínimo, pois a sucessão dos ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ das tangentes à curva à esquerda de M, decresce até um valor mínimo α, que é o ângulo da tangente em M, e a sucessão dos ângulos $\alpha, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ das tangentes à curva à direita de M cresce, partindo do valor mínimo α. Como a tangente (trigonométrica)

(*) Êste capítulo consta apenas do programa do Curso Científico.

é uma função crescente do arco (*), podemos dizer que a sucessão tg α_1, tg α_2, ... decresce até o valor mínimo tg α, e a sucessão tg α'_1, tg α'_2, ... cresce partindo dêste valor, ou que a derivada da função é decrescente à esquerda de M e crescente à sua direita, assumindo, portanto, um valor mínimo em M.

Concluimos, então, que os pontos de inflexão de $f(x)$ são extremantes de $f'(x)$; podemos, por conseguinte, determiná-los aplicando o que foi visto no estudo de máximos e mínimos.

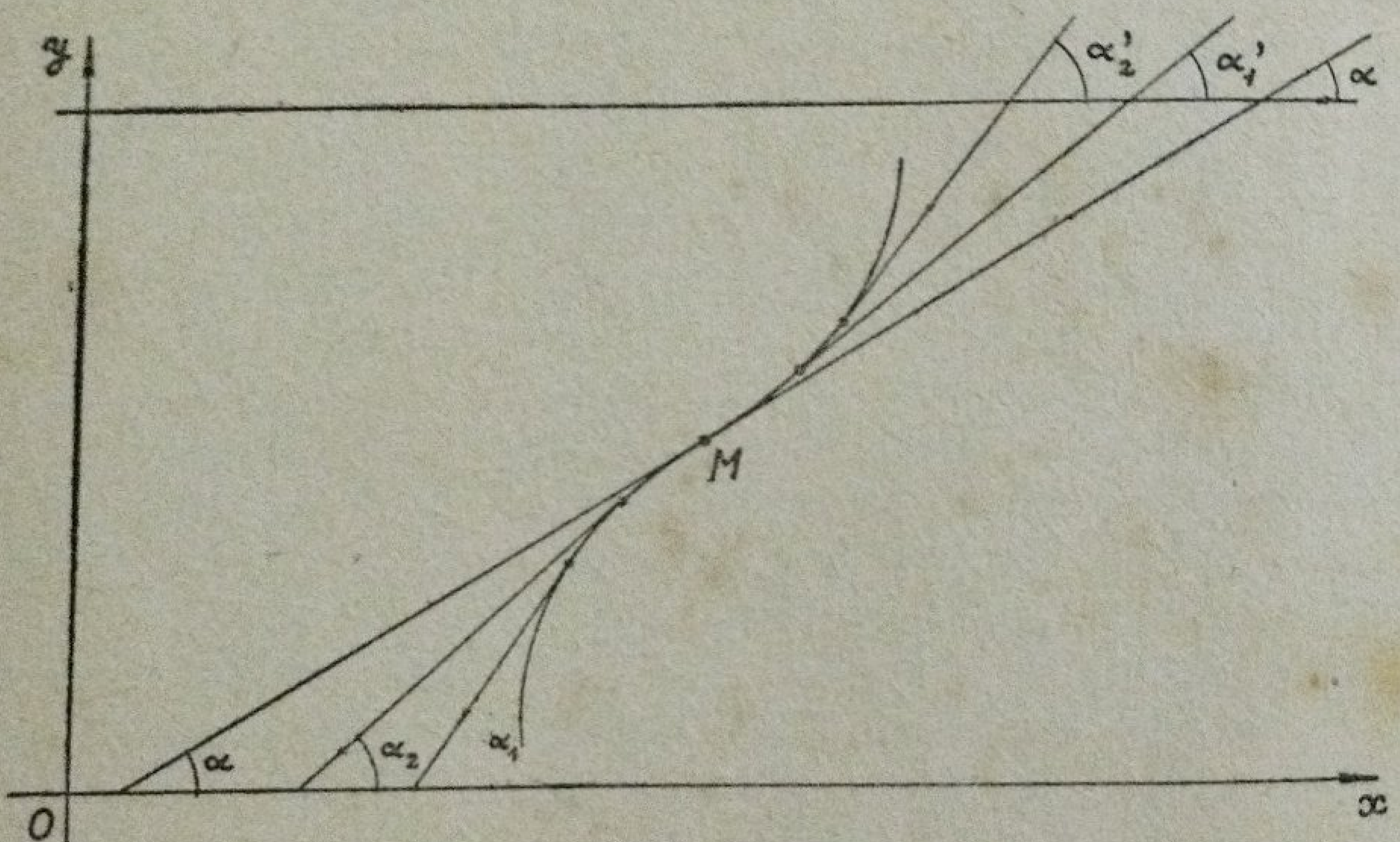

FIG. 57

3. Estudo da variação de uma função. De um modo geral, o estudo da variação de uma função consiste em:

1) Determinar o *campo de existência* da função;

2) Dividir êsse campo em intervalos onde a função seja contínua, crescente ou decrescente, determinando para cada um dêles o sentido de variação da função;

3) Determinar os pontos importantes da função, como pontos de descontinuidade, pontos de máximo ou de mínimo, pontos de inflexão, pontos de intersecção com os eixos, etc.

Para isto, uma vez delimitado o campo de existência da função, procuram-se os valores de x que a anulam ou a tornam

(*) Vol. II, Cap. VII, n.º 26.

infinita e os limites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ se a função existe num entôrno dos pontos do infinito.

Acha-se a derivada e procuram-se os valores de x que a anulam ou a tornam infinita ou descontínua; são êsses os únicos pontos onde a derivada pode mudar de sinal. Aos primeiros podem corresponder máximos ou mínimos da função, dependendo do sinal da derivada. Aos pontos onde a derivada é infinita podem corresponder pontos de tangente vertical ou pontos de descontinuidade infinita, conforme a função seja finita ou não.

Ordenam-se, então, todos os valores de x já determinados, obtendo-se, assim, intervalos onde a derivada têm sinal constante e, portanto, a função varia num só sentido. Calculam-se os valores da função nos extremos dêsses intervalos e em alguns pontos notáveis, como os de máximo e mínimo, etc.

Vejamos alguns exemplos.

4. Exercício. *Estudar a variação da função*

$$y = x(x^2 - 3)$$

RESOLUÇÃO: A função é definida em tôdo o intervalo $(-\infty, +\infty)$. Anula-se para

$$x = 0 \text{ e } x = \pm\sqrt{3} \cong \pm 1{,}7$$

e não têm pontos de descontinuidade.

Seus valores nos extremos de seu campo de existência são

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

Sua derivada $y' = 3x^2 - 3$ anula-se nos pontos $x = -1$ e $x = +1$, sendo, portanto, positiva fôra do intervalo $[-1, +1]$ e negativa no interior dêle.

Como a derivada segunda $y'' = 6x$ é negativa no ponto $x = -1$ e positiva no ponto $x = +1$, concluimos que o primeiro é um ponto de máximo e o segundo um ponto de mínimo. Aliás, poderíamos, também, chegar a esta conclusão, observando que à esquerda de $x = -1$ a função é crescente, porque sua derivada é positiva e à sua direita a função é decrescente porque sua derivada é negativa, do que resulta ser $x = -1$ um ponto de máximo.

Anàlogamente concluiríamos que $x = +1$ é um ponto de mínimo.

Para um traçado satisfatório do gráfico da função convém calcular os valores máximo e mínimo da função. Obtemos

$$x = -1 \qquad y = -1\,(1-3) = 2 \text{ (máximo)}$$
$$x = +1 \qquad y = 1\,(1-3) = -2 \text{ (mínimo)}$$

Como a derivada segunda se anula no ponto $x = 0$, passando de um valor negativo à esquerda para um positivo à direita, a derivada primeira passa por um mínimo nêsse ponto, isto é, a função têm nêle um ponto de inflexão. Como, nêsse ponto, $y' = \operatorname{tg} \alpha = -3$, determinamos, com o auxílio de uma tábua $\alpha = 108^\circ\, 26'$ aproximadamente. Podemos, assim, marcar a tangente nêsse ponto, o que dá melhor indicação para o traçado.

Os resultados obtidos podem ser resumidos no seguinte quadro:

x	$-\infty$		$-1{,}7$		-1		0		$+1$		$+1{,}7$		$+\infty$
y'			$+$		0			$-$	0			$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$

máx. inflex. mín.

O gráfico da função tem o aspecto da fig. 58.

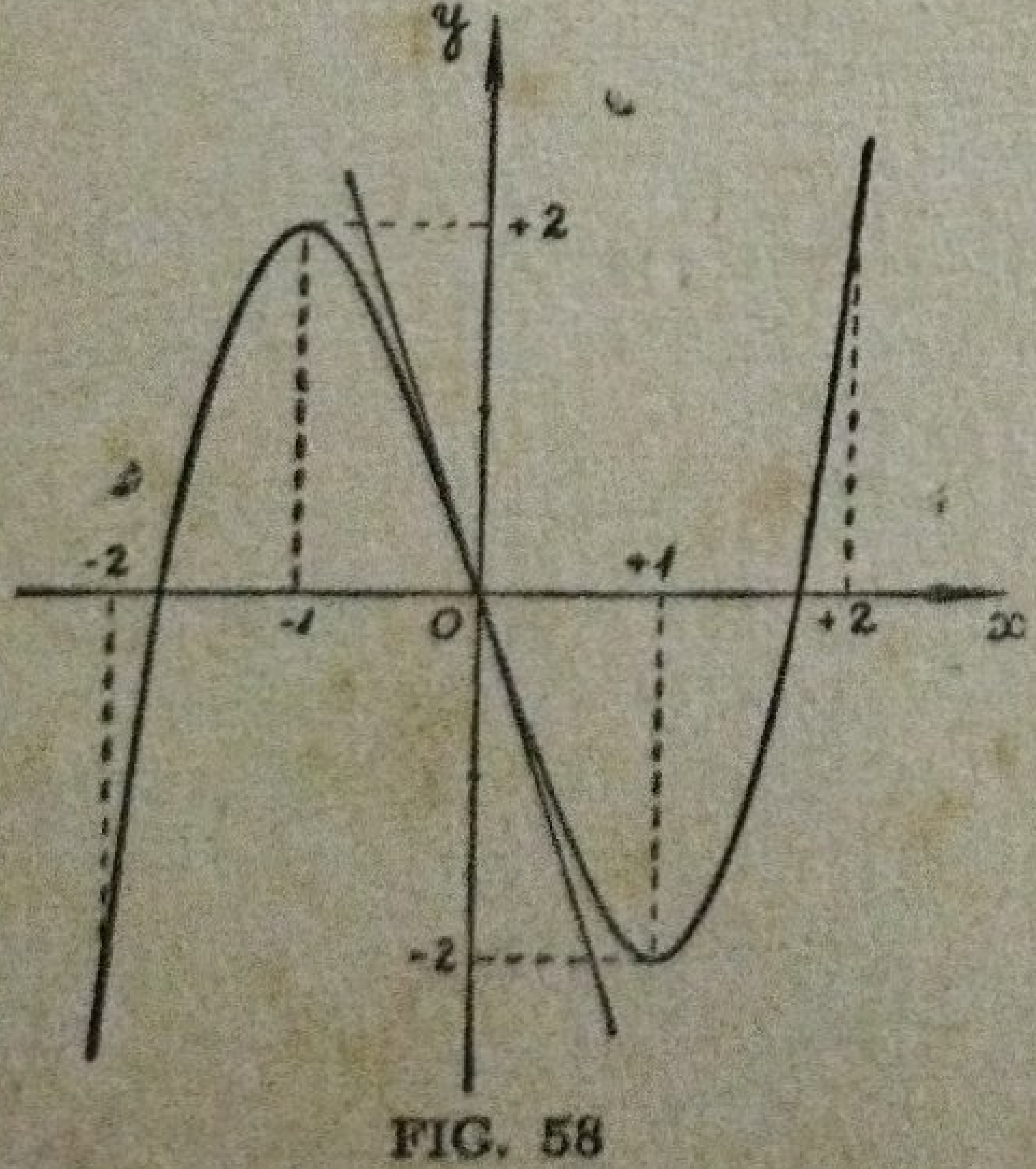

FIG. 58

5. Exercício. *Estudar a variação da função*

$$y = \frac{2x}{x-2}$$

Resolução: A função é definida em tôdo o campo $(-\infty, +\infty)$ exceto no ponto $x = 2$, onde não é finita. Anula-se no ponto $x = 0$, sendo seus valores nos extremos do campo de definição $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$.

Sua derivada $y' = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$ não se anula para nenhum valor real de x, sendo sempre negativa, pois seu denominador é positivo qualquer que seja x, visto ser um quadrado. Logo a função é sempre decrescente.

Para $x = 2$ tanto a função como a derivada se tornam infinitas.

Como não há valor de x que anule a derivada segunda $y'' = \dfrac{8}{(x-2)^3}$ não há pontos de inflexão.

Êstes resultados podem ser resumidos no seguinte quadro:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	∞	$-$	
y	2	$\searrow$	0	$\searrow$	∞	$\searrow$	2

O gráfico da função têm o seguinte aspecto:

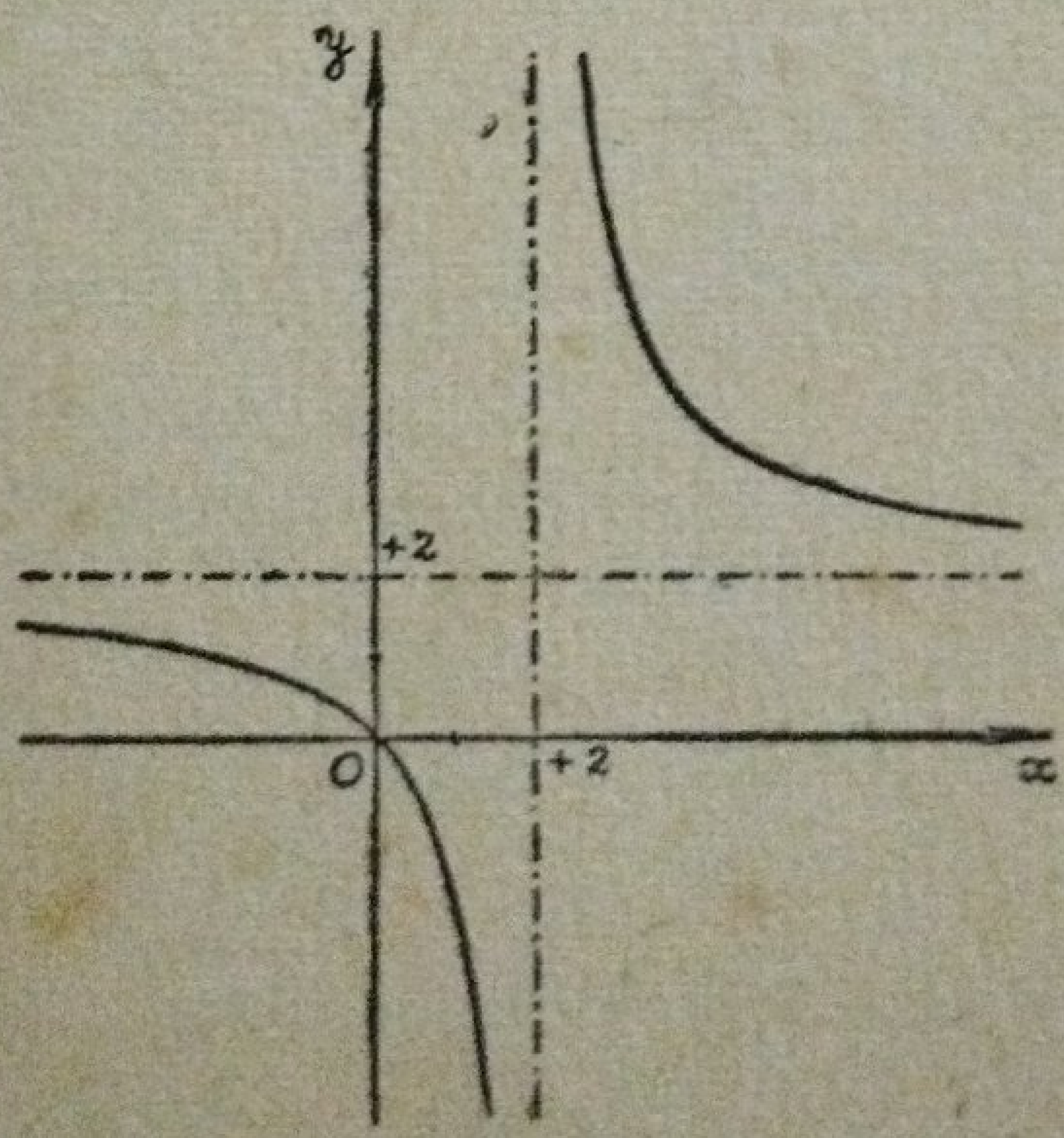

FIG. 59

6. Exercício. *Estudar a varição da função*

$$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}$$

(*Escola Nacional de Química, Concurso de Habilitação*, 1941).

Resolução: A função é definida em tôdo o intervalo $(-\infty, +\infty)$ exceto nos pontos $x = -4$ e $x = -1$ que anulam seu denominador (*), sendo $\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to +\infty} y = 1$

Anula-se nos pontos $x = 1$ e $x = 4$ que se obtêm resolvendo-se a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$. Para $x = 0$ seu valor é 1.

Sua derivada $y' = \dfrac{10(x^2 - 4)}{(x^2 + 5x + 4)^2}$ torna-se infinita nos pontos $x = -4$ e $x = -1$ e anula-se nos pontos $x = -2$ e $x = +2$ que anulam seu numerador. Como, qualquer que seja x, o denominador de y' é positivo, o sinal de y' depende de seu numerador e, portanto, de $x^2 - 4$. Logo, y' é positivo para qualquer valor de x inferior a -2 ou superior a $+2$ e negativo para qualquer valor de x compreendido entre êles. A função é, portanto, decrescente no intervalo $(-2, +2)$ e crescente fôra dêsse intervalo. Então, $x = -2$ é um ponto de máximo e $x = 2$ um ponto de mínimo, sendo os valores da função nêsses pontos $y = -9$ e $y = -\dfrac{1}{9}$, respectivamente.

Sendo $y'' = \dfrac{-20(x^3 - 12x - 20)}{(x^2 + 5x + 4)^3}$ a derivada segunda da função, a pesquisa dos pontos de inflexão recairia em resolver a equação do 3.º grau $x^3 - 12x - 20 = 0$ assunto que não consta dos atuais programas (**).

Deixemos, então, de lado esta questão.

Os resultados obtidos podem ser resumidos no seguinte quadro:

(*) Obtém-se êsses pontos resolvendo-se a equação.

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

(**) Há na verdade um ponto de inflexão entre os pontos 4,1 e 4.2.

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		1		2		4		∞
y'		$+$	∞	$+$	0	$-$	∞				$-$		0	$+$			
y	1	$\nearrow$	∞	$\nearrow$	-9	$\searrow$	∞	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
					máx.								mín.				

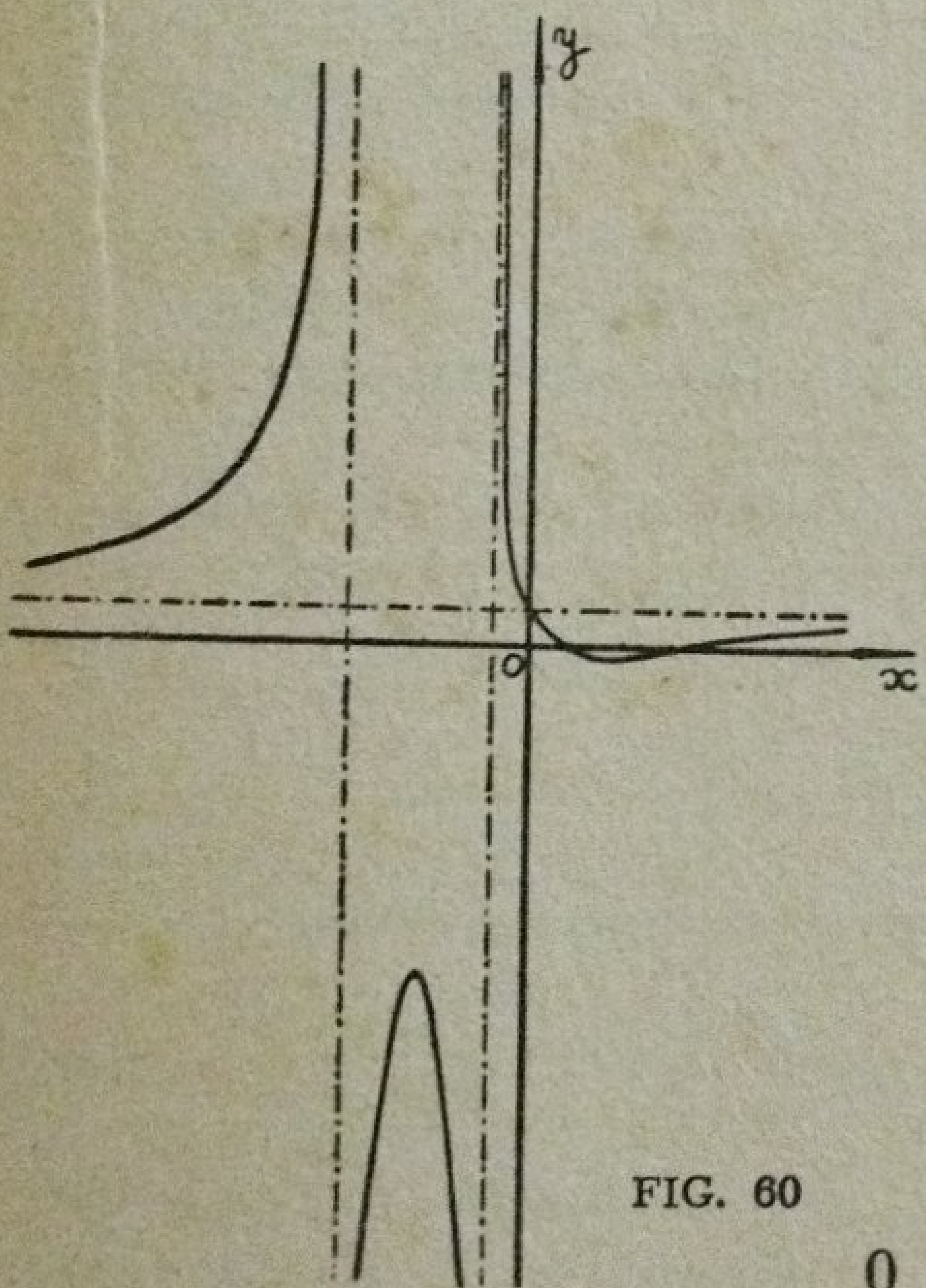

FIG. 60

O gráfico da função têm o aspecto da fig. 60.

7. Exercício. *Estudar a variação da função*

$$y = \sqrt{x\,(x-4)}$$

Resolução: O campo de existência da função é o conjunto de pontos nos quais o produto $x\,(x-4)$ é positivo ou nulo. Ora êste produto é positivo para valores de x inferiores a 0 ou superiores a 4 e negativo para valores de x entre 0 e 4, como se pode ver pelo esquema seguinte:

		0		4		
x	$-$		$+$		$+$	
$x-4$	$-$		$-$		$+$	
$x(x-4)$	$-\infty$ $+$	0	$-$	4	$+$	$+\infty$

Para tornar mais compreensível a exposição, consideremos primeiro a função y com sinal positivo no seu radical, isto é, estudemos a variação da função

$$Y = +\sqrt{x(x-4)}$$

cujo campo de existência já determinamos.

Temos $\lim\limits_{x \to -\infty} Y = \lim\limits_{x \to +\infty} Y = +\infty$. A função Y anula-se nos pontos $x = 0$ e $x = 4$. Sua derivada

$$Y' = \frac{x-2}{+\sqrt{x(x-4)}}$$

anula-se no ponto $x = 2$ que não pertence ao campo de existência da função e torna-se infinita nos pontos $x = 0$ e $x = 4$, onde a função é finita. Então, êstes são pontos de tangente vertical.

No campo de existência da função a derivada é negativa para valores de x inferiores a 0 e positiva para valores de x superiores a 4. A função é, portanto, decrescente no primeiro intervalo e crescente no segundo.

Podemos resumir estes resultados no seguinte quadro:

x	$-\infty$		0	A função não é definida neste intervalo	4		$+\infty$
Y'		$-$	∞		∞	$+$	
Y	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

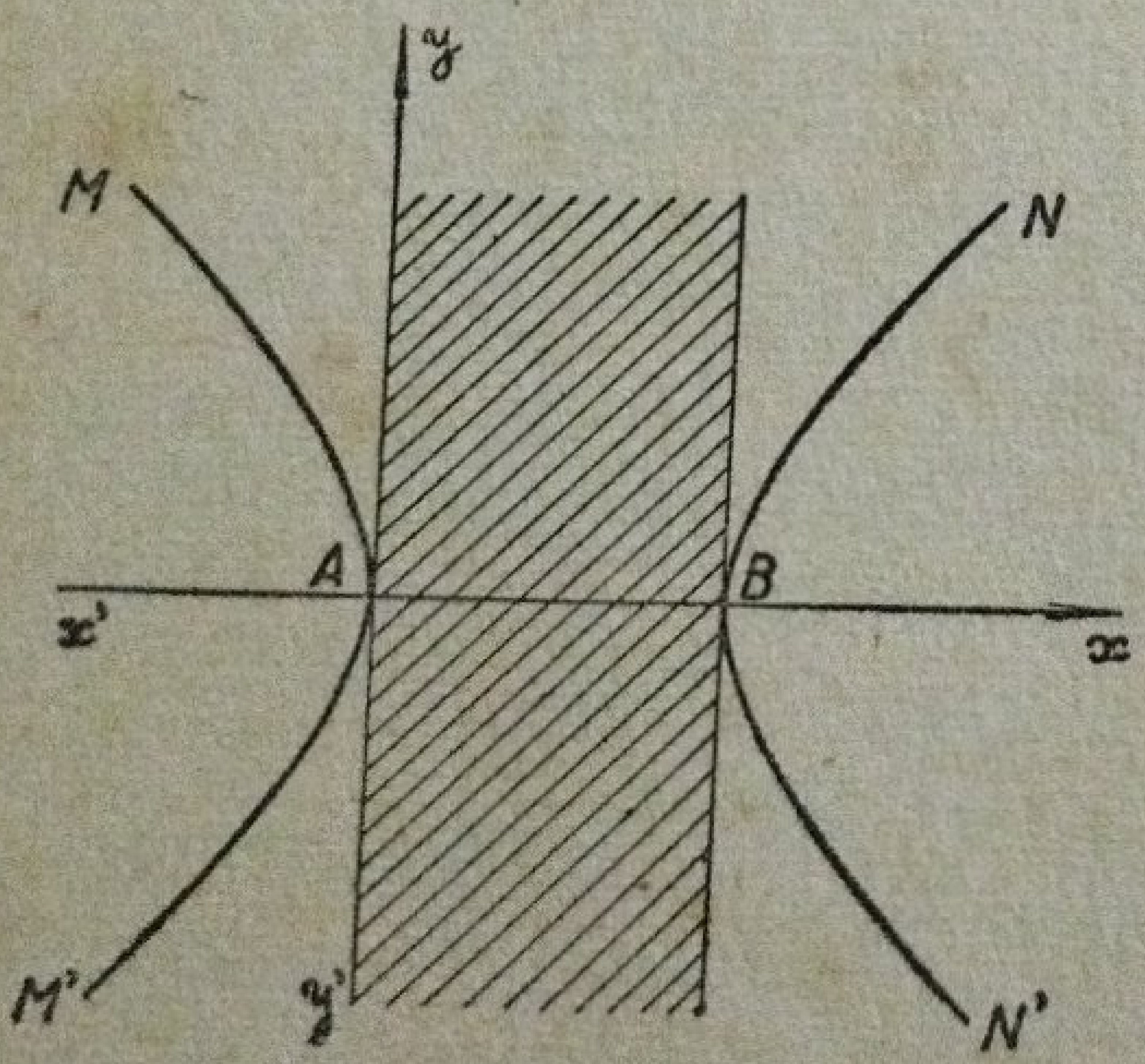

FIG. 61

O gráfico da função Y é constituido pelos ramos AM e BN indicados na fig. 61. Para ter, então, o gráfico da função y completa-se o anterior, traçando-se os ramos AM' e BN' respectivamente simétricos de AM e BM em relação ao eixo dos x.

8. Exercício. *Estudar a variação da função*

$$y = e^{-(x^3-3x)}$$

(*Faculdade Nacional de Filosofia, Concurso de Habilitação*, 1490).

RESOLUÇÃO: A função é definida em tôdo o campo real, sendo contínua em tôdo o seu campo de existência (*).

Tem-se

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^3+3x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{ex^{3-3}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Determinemos os pontos que anulam o expoente da função, ou sejam, portanto, os pontos nos quais $y = 1$. Igualando êsse expoente a zero, obtemos a equação

$$-(x^3 - 3x) = 0$$

Dividindo-a por x separamos a raiz $x = 0$, restando a equação $x^2 - 3 = 0$, cujas raizes são

$$x' = +\sqrt{3} \cong +1{,}73 \text{ e } x'' = -\sqrt{3} \cong -1{,}73$$

Formemos a derivada da função

$$y' = -(3x^2 - 3)\ e^{-(x^3-3x)}$$

Como o fator $e^{-(x^3-3x)}$ é sempre positivo, os valores de x que anulam y' são os que anulam o primeiro fator, isto é, são as raizes da equação $-(3x^2 - 3) = 0$ ou sejam $x = +1$ e $x = -1$. Pela mesma razão o sinal da derivada vai depender do sinal do fator $-3x^2 + 3$. Ora êste é positivo para os valores de x compreendidos entre -1 e $+1$ e negativo para qualquer valor de x fôra dêsse intervalo. Então, a função é crescente no intervalo $[-1, +1]$ e decrescente fôra dêsse intervalo. Portanto, $x = -1$ é um ponto de mínimo e $x = +1$ um ponto de máximo. Os valores da função nesses pontos são respectivamente (tomando para e o valor aproximado 2,7)

$$x = -1 \quad y = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{2{,}7^2} \cong 0{,}14$$

$$x = 1 \qquad y = e^2 = 2{,}7^2 \cong 7{,}3$$

(*) Convém o leitor reler o estudo elementar da função exponencial feito no Vol. I, Cap. III, n.º 5.

Sendo a derivada segunda

$$y'' = 3\,(3x^4 - 6x^2 - 2x + 3)\,e^{-(x^3-3x)}$$

a pesquisa de pontos de inflexão exigiria a resolução da equação $3x^4 - 6x^2 - 2x + 3 = 0$, o que está fôra de nosso alcance. Os resultados obtidos podem ser grupados no seguinte quadro :

x	$-\infty$		$-1{,}7$		-1		0		$+1$		$+1{,}7$		$+\infty$
y'		—			0		$+$		0		—		
y	$+\infty$	↘	1	↘	$0{,}14$	↗	1	↗	$7{,}3$	↘	1	↘	0
					min.				max.				

O gráfico da função tem o aspeto da fig: 62.

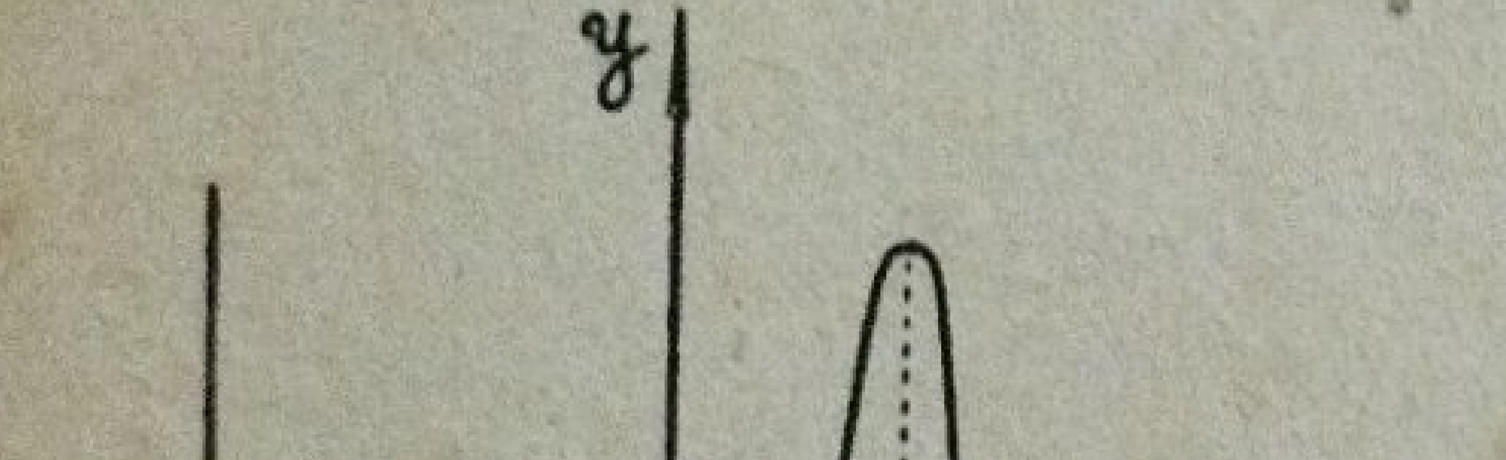

FIG. 62

9. Exercícios.

1. Estudar a variação da função $y = \dfrac{x-4}{x-1}\cdot$ Solução na pág. 194 (*).

2. Estudar a variação da função $y = \dfrac{x}{x^2+1}\cdot$ Solução na pág. 207.

3. Estudar a variação da função $y = \dfrac{x}{x^2-1}\cdot$ Solução na pág. 226.

4. Estudar a variação da função $y = \dfrac{2x^2}{x^2-4}\cdot$ Solução na pág. 252.

5. Estudar a variação da função $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}\cdot$ Solução na pág. 266.

6. Estudar a variação da função $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}\cdot$ Solução na pág. 278.

7. Estudar a variação da função $y = e^{x^3-3x^2}$. Solução na pág. 286.

8. Estudar a variação da função $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-3}}\cdot$ Solução na pág. 297

(*) É de *absoluta conveniência* que o aluno, antes de estudar a variação de uma função, *não tenha a menor idéia de sua representação gráfica*. Para isto, daremos em páginas separadas as soluções dos exercícios aquí propostos.

CAPÍTULO IX

FUNÇÕES PRIMITIVAS

1. Função primitiva. Suponhamos que uma função $F(x)$ admita, num intervalo $[a, b]$, a *função derivada* $f(x)$. Diz-se, então, que $F(x)$ é uma *função primitiva* ou a *integral indefinida* de $f(x)$ e escreve-se

$$F(x) = \int f(x)\ dx \qquad (1)$$

O símbolo $\int$ lê-se *integral de;* é uma deformação da letra maiúscula S, inicial de *soma* (*).

Por exemplo, a função $F(x) = x^3 + \text{sen}\ x + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2 + \cos x$, porque $f(x)$ é a *função derivada* de $F(x)$.

Define-se, pois, pela igualdade (1), uma operação de *integração* (indefinida), cuja finalidade é, dada uma função $f(x)$, calcular sua primitiva $F(x)$. É, portanto, a operação inversa da *derivação* (estudada no **Cap. VI**) que tem por fim, dada uma função $F(x)$, calcular sua derivada $F'(x) = f(x)$.

2. Constante de integração. Observemos que, se $F(x)$ é uma função primitiva de $f(x)$, $F(x) + C$, sendo C uma constante qualquer, é, também, função primitiva de $f(x)$, visto que

$$\frac{d}{dx}\Big[F(x) + C\Big] = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Demonstra-se que, recìprocamente, se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são duas funções primitivas de uma mesma função, a diferença $F_1(x) - F_2(x)$ é constante.

Então, a operação de integração indefinida (1) determina a função primitiva de $f(x)$ a menos de uma constante aditiva

(*) De um ponto de vista mais elevado, estabelece-se o conceito de integral pela noção de *soma*, e que justifica a origem do símbolo de integral.
Dêle daremos uma noção elementar no Cap. X, n.º 7.

arbitrária, que se denomina *constante de integração*. Assim, por exemplo, a função primitiva de $f(x) = 3x^2$ é $F(x) = x^3 + C$, sendo C essa constante arbitrária. Há, pois, uma infinidade de funções primitivas $x^3 + C$ da função $3x^2$, que, duas a duas, diferem de uma constante.

3. Continuidade e integrabilidade. Vimos (*) que a continuidade é uma condição *necessária mas não suficiente de derivabilidade*, isto é, tôda função derivável num intervalo é nêle necessàriamente contínua, havendo, porém, funções contínuas num intervalo e nêle não deriváveis. Demonstra-se, porém, que tôda função contínua num intervalo é nêle *integrável*, isto é, admite uma função primitiva.

4. Diferencial. Antes de prosseguirmos, é necessário dar um *esclarecimento* sôbre o conceito de *diferencial*, cuja caracterização rigorosa exige o conhecimento dos princípios fundamentais sôbre infinitamente pequenos, assunto que está além das possibilidades do curso colegial.

Chama-se *diferencial* de uma função $y = f(x)$ o produto $f'(x) \,.\, dx$ onde dx é a diferencial da variável independente (**). A diferencial da função considerada representa-se por dy, de modo que podemos escrever

$$dy = f'(x) \,.\, dx \tag{2}$$

Assim, a derivada $f'(x)$ se apresenta como a razão entre a diferencial da função dy e a diferencial da variável independente dx, o que justifica a notação de LEIBNIZ $\dfrac{dy}{dx}$, dada no **Cap. VI, n.º 3.**

O cálculo das diferenciais das funções obedece às mesmas regras estabelecidas para o cálculo das derivadas. Assim, representando por du, dv, dw, ..., respectivamente, as diferenciais das funções de x: u, v, w, ..., podemos repetir os resultados reunidos no **Cap. VI, n.º 43** para o cálculo das diferenciais, como, por exemplo,

$$\mathrm{d}(u \pm v \pm w \pm \ldots.) = du \pm dv \pm dw \pm \ldots. \tag{3}$$

$$d(Cv) = Cdv \tag{4}$$

(*) Cap. VI, n.º 8.

(**) Essa diferencial dx é o acréscimo arbitrário da variável independente, considerada como função de si mesma.

cujos enunciados seriam, respectivamente:

1) *a diferencial da soma algébrica de um número finito de funções é a soma algébrica das diferenciais das parcelas;*

2) *a diferencial do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela diferencial da função.*

5. Primitivas imediatas. Vimos, no **Cap. VI,** as fórmulas clássicas para obter a derivada $f'(x)$ (ou a diferencial $f'(x)\,dx$) de uma função $f(x)$. Dessas fórmulas resultam fórmulas de *integração imediata*

$$\int f'(x)\;dx = f(x) + C \tag{5}$$

que se aplicam a tôdas as funções do tipo de $f'(x)$. As funções $f(x)$, assim obtidas, denominam-se *primitivas imediatas.*

Por exemplo, da fórmula da derivada ou da diferencial de uma potência

$$\frac{d}{dx}(u^m) = m\;u^{m-1}\,.\frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad d\,(u^m) = m\;u^{m-1}\,du$$

resulta a fórmula de integração

$$\int u^m\,.\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m \neq -1) \tag{6}$$

visto que

$$d\left(\frac{u^{m+1}}{m+1} + C\right) = \frac{1}{m+1}\,d\,(u^{m+1}) =$$

$$= \frac{1}{m+1}\,.\,(m+1)\,u^m\,.\,du = u^m\,.\,du$$

Igualmente, dos princípios expressos nas igualdades (3) e (4) resultam, respectivamente,

$$\int (du \pm dv \pm dw \pm \ldots.) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \;\ldots. \tag{7}$$

$$\int C\,.\,du = C\int du \tag{8}$$

cujos enunciados seriam, respectivamente:

1) *A integral da soma algébrica de um número finito de diferenciais de funções (de uma mesma variável) é a soma algébrica das integrais dessas parcelas.*

2) *A integral do produto de uma constante pela diferencial de uma função é o produto da constante pela integral dessa diferencial.*

Da segunda propriedade se conclui que um fator constante pode ser passado livremente para fora ou para dentro do sinal de integral. É um resultado de grande utilidade prática, como veremos nas aplicações.

6. Quadro das primitivas imediatas. Utilizando algumas fórmulas do **Cap. VI, n.º 43,** tal como o fizemos para o estabelecimento da fórmula (6), obtemos o seguinte quadro de primitivas imediatas no qual incluímos os princípios gerais (7) e (8):

1. $\int (du \pm dv \pm \ldots .) = \int du \pm \int dv \pm \ldots .$

2. $\int C \,.\, du = C \int du$

3. $\int dx = x + C$ e $\int du = u + C$

4. $\int u^m \,.\, du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$

5. $\int \dfrac{du}{u} = l|u| + C$ (*)

6. $\int a^u \,.\, du = \dfrac{a^u}{la} + C$

7. $\int e^u \,.\, du = e^u + C$

8. $\int \text{sen } u \,.\, du = -\cos u + C$

9. $\int \cos u \,.\, du = \text{sen } u + C$

10. $\int \sec^2 u \,.\, du = \text{tg} u + C$

(*) Se $u < 0$, existe $l(-u)$ e como

$$d\{\, l(-u) \,\} = \frac{d(-u)}{-u} = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$$

resulta que $l(-u)$ (se $u < o$) é a primitiva de $\dfrac{du}{u}$. Logo, a expressão dada $l\,|\,u\,|$ reune os resultados das duas hipóteses $u < o$ e $u > o$.

11. $\int \operatorname{cossec}^2 u \,.\, du = -\operatorname{cotg} u + C$

12 $\int \sec u \,.\, \operatorname{tg} u \,.\, du = \sec u + C$

13 $\int \operatorname{cossec} u \,.\, \operatorname{cotg} u \,.\, du = -\operatorname{cossec} u + C$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sen } u + C$

ou $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc sen } \frac{u}{a} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \text{arc } tg\, u + C$

ou $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \text{ arc } tg\, \frac{u}{a} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \text{arc sec } u + C$

ou $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{ arc sec } \frac{u}{a} + C$

7. Exercício. *Calcular a primitiva da função*

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x + 5$$

Resolução: Aplicando sucessivamente as fórmulas 1, 2, 3 e 4 do quadro anterior, obtemos

$$\int (x^4+2x^3+6x+5)\, dx = \int x^4 dx + \int 2x^3 dx + \int 6x dx +$$
$$+ \int 5dx = \int x^4 dx + 2\int x^3 dx + 6\int x dx + 5\int dx =$$
$$= \frac{x^5}{5} + 2 \times \frac{x^4}{4} + 6 \times \frac{x^2}{2} + 5x + C =$$
$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + 3x^2 + 5x + C$$

Observemos que, de acôrdo com as fórmulas utilizadas, cada uma das quatro integrais calculadas teria como parcela uma constante arbitrária. Como a soma dessas constantes arbitrárias é, também, uma constante arbitrária, fica justificado o aparecimento de apenas uma parcela C, constante arbitrária, da primitiva procurada.

8. Exercício. *Calcular* $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Resolução: Como a diferencial de $x^2 + 4$ é $2xdx$, utilizando a propriedade expressa na fórmula 2 (**n.º 6**), podemos fazer com que o numerador da fração sob sinal de integral seja a diferencial do denominador, ou

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+4}$$

Podemos, então, aplicar a fórmula 5 (**n.º 6**), para a qual $u = x^2 + 4$ e $du = 2xdx$, o que dá

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\, l(x^2+4) + C = l(x^2+4)^{\frac{1}{2}} + C = l\left|\sqrt{x^2+4}\right| + C$$

visto que $x^2 + 4$ é positivo qualquer que seja x real.

9. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \sqrt{3x+4}\, dx$.

Resolução: Podemos escrever

$$F(x) = \int (3x+4)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Como a diferencial de $3x + 4$ é $3dx$, utilizando a propriedade relativa ao fator constante, obtemos

$$F(x) = \frac{1}{3}\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} \,.\, 3dx$$

Aplicando a fórmula 4 (**n.º 6**) para a qual $m = \frac{1}{2}$, $u = 3x + 4$ e $du = 3dx$, obtemos

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(3x+4)^3} + C = \frac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4} + C$$

10. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{2dx}{\sqrt{5x}}$.

Resolução: Temos

$$F(x) = 2\int (5x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{5}\int (5x)^{-\frac{1}{2}} . 5dx$$

Podemos, então, aplicar a fórmula 4 (**n.º 6**), para a qual $m = -\frac{1}{2}$, $u = 5x$ e $du = 5dx$. Resulta

$$F(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{(5x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{4}{5}\sqrt{5x} + C.$$

11. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{dx}{3 + x^2}$.

Resolução: Podemos aplicar diretamente a segunda fórmula 15 (**n.º 6**), para a qual $a = \sqrt{3}$, $u = x$ e $du = dx$. Obtemos

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc } tg\, \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Observe o leitor que não se pode aqui utilizar a fórmula 5 (nº **6**), tal como o fizemos para o exercício do **n.º 8**, visto ser impossível tornar o numerador dx a diferencial do denominador $(2x\, dx)$ pela multiplicação por um *fator constante*.

12. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{x^3 dx}{x-2}$.

Resolução: Dividindo x^3 por $x - 2$, encontramos o quociente $x^2 + 2x + 4$ e o resto 8. Logo, podemos escrever a identidade

$$\frac{x^3}{x-2} \equiv x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}$$

e, portanto, utilizando recursos já explicados

$$F(x) = \int x^2 dx + 2\int x\, dx + 4\int dx + 8\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\, l\,|x-2| + C$$

13. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \cos^2 x \,.\, \text{sen}\, x \,.\, dx$.

Resolução: Como a diferencial de $\cos x$ é $-\text{sen}\, x \,.\, dx$, escrevendo

$$F(x) = -\int \cos^2 x \; (-\text{sen}\; x \,.\, dx)$$

podemos aplicar a fórmula 4 (**n.º 6**), para a qual $m = 2$, $u = \cos x$ e $du = -\text{sen}\, x \,.\, dx$. Obtemos

$$F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

14. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \cos 2x \,.\, dx$.

Resolução: Como a diferencial de $2x$ é $2dx$, pondo

$$F(x) = \frac{1}{2} \int \cos 2x \,.\, 2dx$$

e aplicando a fórmula 9 (**n.º 6**), para a qual $u = 2x$ e $du = 2dx$, resulta

$$F(x) = \frac{1}{2}\, \text{sen}\; 2x + C$$

15. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int 2^{\frac{x}{3}} \,.\, dx$.

Resolução: Como a diferencial de $\frac{x}{3}$ é $\frac{dx}{3}$, pondo

$$F(x) = 3 \int 2^{\frac{x}{3}} \,.\, \frac{dx}{3}$$

e aplicando a fórmula 6 (**n.º 6**), para a qual $a = 2$, $u = \frac{x}{3}$ e $du = \frac{dx}{3}$, obtemos

$$F(x) = \frac{3 \times 2^{\frac{x}{3}}}{l2} + C$$

16. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$.

Resolução: Como

$$x^2 + 2x + 10 = x^2 + 2x + 1 + 9 = (x+1)^2 + 3^2$$

resulta

$$F(x) = \int \frac{dx}{3^2 + (x+1)^2}$$

Podemos, então, aplicar imediatamente a segunda fórmula 15 (**n.º 6**), onde $a = 3$, $u = x + 1$ e $du = dx$. Obtemos

$$F(x) = \frac{1}{3} \text{arc tg} \frac{x+1}{3} + C$$

17. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{a dx}{e^x}$.

Resolução: Podemos escrever

$$F(x) = a \int e^{-x} . dx = -a \int e^{-x} (-dx)$$

Aplicando a fórmula 7 (**n.º 6**), para a qual $u = -x$ e $du = -dx$, resulta

$$F(x) = -a\, e^{-x} + C = -\frac{a}{e^x} + C$$

18. Integração por decomposição. Freqüentemente se calcula uma integral, substituindo-se a função sob sinal de integral por uma soma algébrica de funções e aplicando-se a propriedade relativa à integral de uma soma de funções (**n.º 5**). Êsse processo, que já utilizamos em exercícios anteriores, denomina-se *integração por decomposição.*

Não se pode estabelecer uma regra geral para sua aplicação, bem como para a aplicação dos outros dois processos que serão dados mais adiante. Como o leitor verá, a integração não se efetua segundo normas inflexíveis como as da derivação. Cada caso particular requer um ensaio, cujo sucesso dependerá da experiência do calculador. Seu domínio, portanto, requer uma exercitação metódica e esclarecida.

Ilustremos com mais dois exemplos a integração por decomposição.

19. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \cos^2 x . dx$.

Resolução: Utilizando a identidade

$$\cos^2 x \equiv \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

obtemos sucessivamente

$$F(x) = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x \,.\, 2dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\text{sen }2x}{4} + C$$

20. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Resolução: Utilizando a identidade.

$$\frac{1}{x^2 - a^2} \equiv \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

resulta

$$F(x) = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[l(x-a) - l(x+a)\right] + C = \frac{1}{2a}\,l\,\frac{x-a}{x+a} + C$$

21. Integração por partes. Sejam u e v funções deriváveis de x num mesmo intervalo. Da fórmula da derivada do produto uv (fórmula 4, **Cap. VI, n.º 43**) resulta a fórmula da diferencial dêsse produto

$$d(uv) = udv + vdu$$

Supondo que as duas parcelas do segundo membro sejam integráveis no intervalo considerado, temos

$$uv = \int udv + \int vdu$$

ou

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (9)$$

fórmula de integração por partes, cuja aplicação é valiosa quando a integral do segundo membro é imediata ou mais simples do que a integral do primeiro membro.

22. Exercício. *Calcular* $\int x \,.\, \cos x \; dx$.

Resolução: Apliquemos a fórmula (9), pondo $u = x$ e $dv = \cos x\; dx$. Logo, $du = dx$ e $v = \text{sen}\, x$ e, portanto,

$$\int x \, . \cos x . dx = x \, . \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, . \, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Observemos que, dada a diferencial $dv = \cos x \, . \, dx$, não é necessário considerar, na primitiva $v = \operatorname{sen} x$, a constante arbitrária de integração. De fato, se tomássemos $v = \operatorname{sen} x + C$, obteríamos o mesmo resultado, como se vê no desenvolvimento seguinte:

$$\int x \cos x \, . \, dx = x (\operatorname{sen} x + C) - \int (\operatorname{sen} x + C) \, dx =$$
$$= x \operatorname{sen} x + Cx - \int \operatorname{sen} x \, dx - C \int dx =$$
$$x \operatorname{sen} x + Cx + \cos x - Cx + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

23. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int x^2 e^x dx.$

RESOLUÇÃO: Apliquemos a fórmula (9), pondo $u = x^2$ e $dv = e^x dx$. Logo, $du = 2x \, dx$ e $v = e^x$ e, portanto,

$$F(x) = \int x^2 . e^x dx = x^2 e^x - \int e^x . 2x dx = x^2 e^x - 2 \int x \, . \, e^x dx \quad (10)$$

Recaímos, assim, numa integral mais simples do que a integral dada. Apliquemos a essa integral a fórmula (9), pondo $u = x$ e $dv = e^x dx$. Logo, $du = dx$ e $v = e^x$, o que permite escrever

$$\int x \, . \, e^x dx = x \, e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C'$$

Substituindo êsse resultado em (10), obtemos após a simplificação
$$F(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

onde representamos por C a constante arbitrária $-2C'$.

24. Integração por substituição. Seja calcular a integral

$$\int f(x) \, dx \quad (11)$$

sendo $f(x)$ integrável num intervalo $[a, b]$. Escolhamos uma função de uma nova variável t

$$x = \varphi(t) \quad (12)$$

tal que:

1) quando t descreve um intervalo $[c, d]$, x descreva o intervalo $[a, b]$;

2) seja possível obter-se a função inversa de (12)

$$t = \varphi_1(x) \qquad (13)$$

3) $\varphi(t)$ seja derivável em relação a t no intervalo $[c, d]$.

Seja

$$dx = \varphi'(t)\, dt \qquad (14)$$

a diferencial da função (12).

Substituindo em (11) os resultados (12) e (14), obtemos $\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt$, integral indefinida que é uma certa função de t, e que se torna a integral procurada quando nela se substitui t por sua expressão (13).

Os exemplos seguintes esclarecem a regra.

25. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Resolução: Façamos a substituição $x = lt$ e, portanto, $dx = \frac{dt}{t}$. Como

$$e^x = e^{lt} = t \text{ e } e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t} \qquad (15)$$

substituindo êsses resultados na integral dada, obtemos

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \text{arc tg } t + C$$

Substituindo t por sua expressão (15), obtemos

$$F(x) = \text{arc tg } e^x + C$$

26. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int \frac{\sqrt[4]{x}\,.\,dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Resolução: Façamos a substituição

$$x = t^4 \qquad \text{e, portanto,} \qquad dx = 4t^3dt \qquad (16)$$

Resulta

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}\,.\,dx}{1 + \sqrt{x}} = \int \frac{t\,.\,4t^3dt}{1 + t^2} = 4\int \frac{t^4dt}{1 + t^2}$$

Dividindo t^4 por t^2+1, obtemos quociente t^2-1 e resto 1. Logo a integral anterior torna-se

$$4\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 4\int t^2dt - 4\int dt + 4\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{4t^3}{3} - 4t + 4 \text{ arc tg } t + C$$

Como de (16) resulta $t = \sqrt[4]{x}$, substituindo êsse valor na expressão anterior, obtemos a integral procurada

$$F(x) = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \text{ arc tg } \sqrt[4]{x} + C$$

27. Exercício. *Calcular* $F(x) = \int\sqrt{r^2-x^2}\,.\,dx.$

RESOLUÇÃO: Façamos a substituição

$$x = r \operatorname{sen} t \qquad \text{donde} \qquad dx = r\cos t\, dt \qquad (17)$$

Obtemos

$$F(x) = \int\sqrt{r^2-r^2\operatorname{sen}^2 t}\,.\,r\cos t\,dt =$$

$$= r^2\int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,.\,\cos t\,dt = r^2\int\cos^2 t\,dt$$

Esta última integral já foi calculada no exercício do **n.º 19.** Utilizando o resultado lá obtido, podemos escrever

$$F(x) = r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right] + C = \frac{r^2}{2}\left[t + \operatorname{sen} t\cos t\right] + C \quad (18)$$

visto que $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\cos t$. Da primeira igualdade (17) resultam

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{r} \qquad t = \text{arc sen}\,\frac{x}{r}$$

$$\cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2-x^2}$$

Substituindo êsses resultados em (18), obtemos a integral procurada

$$F(x) = \frac{r^2}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}$$

28. Exercícios.

Calcular as integrais indefinidas seguintes:

1. $\int (3x^2 + 4)dx$ *Resp.:* $x^3 + 4x + C$

2. $\int \sqrt{x+1}\, dx$ *Resp.:* $\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$

3. $\int (e^x + \text{sen } x)dx$ *Resp.:* $e^x - \cos x + C$

4. $\int \frac{dx}{2x+1}$ *Resp.:* $l\,|\sqrt{2x+1}\,| + C$

5. $\int e^{2x}\,.\,dx$ *Resp.:* $\frac{e^{2x}}{2} + C$

6. $\int \sec^2 3x\,.\,dx$ *Resp.:* $\frac{1}{3}\, tg\ 3x + C$

7. $\int \frac{5dx}{4+x^2}$ *Resp.:* $\frac{5}{2} \text{ arc } tg\ \frac{x}{2} + C$

8. $\int \frac{2x+1}{x}\, dx$ *Resp.:* $2x + l|\,x\,| + C$

9. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\, dx$ *Resp.:* $\frac{x^2}{2} + x + l(x-1)^2 + C$

10. $\int \frac{\cos x\ dx}{a + b \text{ sen } x}$ *Resp.:* $\frac{1}{b}\, l|\,a + b \text{ sen } x\,| + C$

11. $\int 2\sqrt[3]{x^2}\,.\,dx$ *Resp.:* $\frac{6}{5}\, x\sqrt[3]{x^2} + C$

12. $\int e^{2 \text{ sen } x}\,.\cos x\ dx$ *Resp.:* $\frac{1}{2}\, e^{2 \text{ sen } x} + C$

13. $\int \frac{2dx}{a^{3x}}$ $(a > 0)$ *Resp.:* $-\frac{2}{3la\,.\,a^{3x}} + C$

14. $\int 2 \cos \frac{x}{2} \, . \, dx$ *Resp.:* $4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C$

Calcular, pelo processo de integração por partes, as integrais indefinidas seguintes:

15. $\int x \, . \, lx \, . \, dx$ *Resp.:* $\frac{x^2}{2} l|\,x\,| - \frac{x^2}{4} + C$

16. $\int x \, . \operatorname{sen} x \, . \, dx$ *Resp.:* $\operatorname{sen} x - x \cos x + C$

17. $\int lx \, . \, dx$ *Resp.:* $x(l\,|\,x\,| - 1) + C$

(SUGESTÃO: Fazer $u = lx$ e $dv = dx$.)

18. $\int \operatorname{arc\,sen} x \, . \, dx$ *Resp.:* $x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + C$

(SUGESTÃO: Fazer $u = \operatorname{arc\,sen} x$ e $dv = dx$).

19. $\int \operatorname{arc} tgx \, . \, dx$ *Resp.:* $x \operatorname{arc} tgx - l\,|\,\sqrt{1 + x^2}\,| + C$

20. $\int xe^{ax} \, dx$ *Resp.:* $\frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$

Calcular, pelo processo de substituição, as integrais indefinidas seguintes:

21. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ *Resp.:* $2\sqrt{x} - l\,(1 + \sqrt{x})^2 + C$

(SUGESTÃO: Fazer $x = t^2$)

22. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + x}}$ *Resp.:* $\frac{2}{3}(x - 2)\sqrt{1 + x} + C$

(SUGESTÃO Fazer $1 + x = t^2$ e, portanto, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$ e $t = \sqrt{1 + x}$.)

23. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1 + x}}$ *Resp.:* $2 \operatorname{arc} tg \sqrt{1 + x} + C$

(SUGESTÃO: a mesma do exercício anterior.)

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ *Resp.:* $\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$

(SUGESTÃO: Fazer $x = a \operatorname{sen} t$ e seguir a norma indicada no exercício do **n.º 27**).

Solução do Exercício n.º 1 do Cap. VIII:

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
y'		$+$			∞			$+$	
y	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	8	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

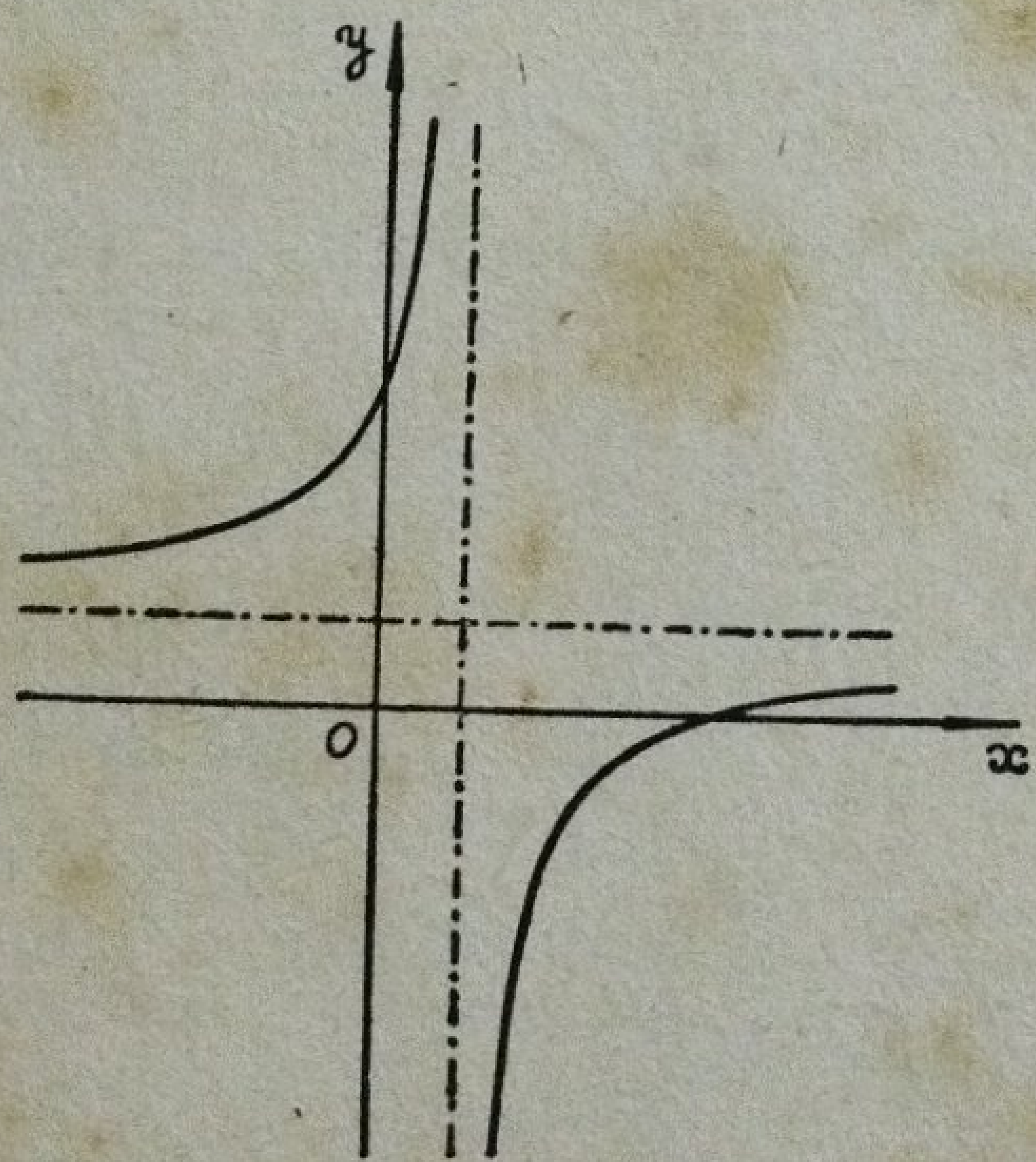

FIG. 63

CAPÍTULO X

INTEGRAIS DEFINIDAS (*)

1. Integral definida. Seja $f(x)$ uma função integrável num intervalo $[a, b]$. Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ nêsse intervalo, ou

$$F(x) = \int f(x)\,dx \qquad (1)$$

A diferença $F(b) - F(a)$ denomina-se *integral definida de* $f(x)$ *para os extremos* a *e* b e representa-se por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

Observemos que a diferença (2) não se altera quando se considera qualquer outra primitiva $F(x) + c$ de $f(x)$, sendo c uma constante arbitrária, pois

$$\Big[F(x) + c\Big]_a^b = \Big[F(b) + c\Big] - \Big[F(a) + c\Big] = F(b) - F(a)$$

Por, exemplo, sendo $F(x) = x^3 - 2x$ uma primitiva de $f(x) = 3x^2 - 2$, temos

$$\int_2^4 (3x^2 - 2)\,dx = \Big[x^3 - 2x\Big]_2^4 =$$
$$= (4^3 - 2\times 4) - (2^3 - 2\times 2) = 52$$

2. Relação entre os conceitos de integral definida e de área. Seja

$$y = f(x) \qquad (3)$$

uma função unívoca e contínua num intervalo $[a, b]$ e seja MN sua representação gráfica nesse intervalo (fig. 64). Temos, de acôrdo com a figura,

$$a = OA \qquad b = OB$$
$$f(a) = AM \qquad f(b) = BN$$

(*) Êste capítulo consta apenas do programa do Curso Científico.

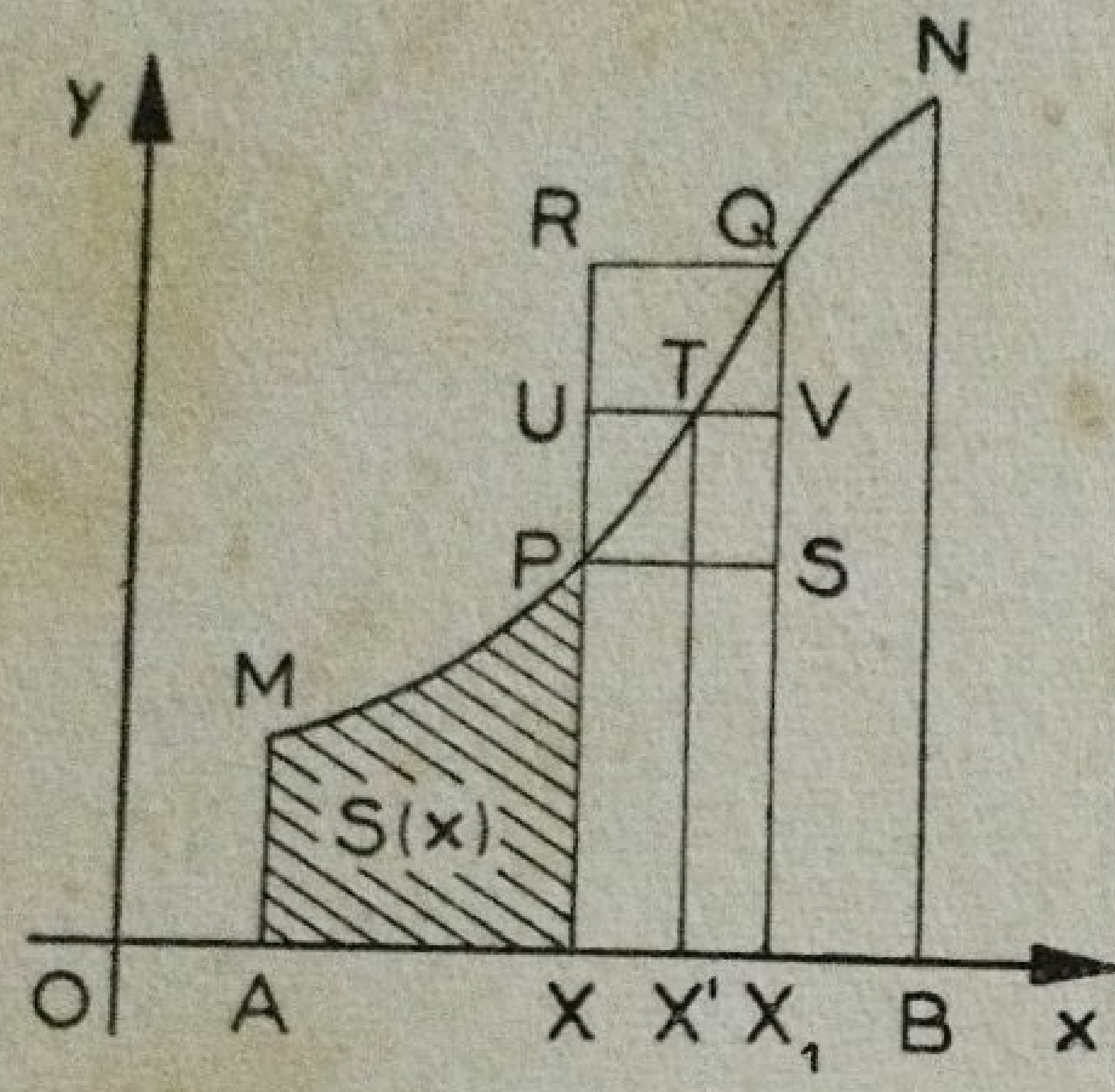

FIG. 64

Suponhamos, como indica a figura, que a função seja positiva nesse intervalo.

Seja $x = OX$ a abcissa de um ponto P situado sôbre o arco MN. Quando X descrever o segmento AB, o ponto P descreverá o arco MN. Então, a área do trapézio mistilíneo $AMPX$, que representaremos por $S(x)$, é uma função de x, que se anula para $x = a$ e é igual à área $AMNB$ para $x = b$, ou

$$S(a) = O \qquad S(b) = \text{área } AMNB$$

Consideremos o ponto Q do arco MN, de abcissa

$$OX_1 = OX + XX_1 = x + h$$

O acréscimo da área $S(x)$, quando x sofre o acréscimo h, isto é, o ponto X passa para a posição X_1, é a área do trapézio mistilíneo $XPQX_1$, que, como mostra a figura, está compreendida entre as áreas dos retângulos $XPSX_1$, e $XRQX_1$ de mesma base $XX_1 = h$ e alturas XP e X_1Q, respectivamente. Essas alturas são, respectivamente, o mínimo e o máximo da função $f(x)$ no intervalo $[x,\ x + h]$.

Logo, a área $XPQX_1$ é equivalente à área de um retângulo de base h, cuja altura XU está compreendida entre XP e XR. Como, por hipótese, $f(x)$ é contínua no intervalo considerado, existe um ponto X' (de abcissa $x' = OX'$), situado no intervalo XX_1, tal que sua ordenada $f(x') = X'T$ seja igual a XU (**Cap. III, n.° 23**), ou

$$\text{Área } XPQX_1 = \text{Área } AMQX_1 - \text{Área } AMPX =$$
$$= \text{Área } XUVX_1$$

Como

$$\text{Área } AMQX_1 = S(x+h) \qquad \text{Área } AMPX = S(x)$$
$$\text{Área } XUVX_1 = \overline{XX_1}\,.\,\overline{X'T} = h\,f(x')$$

resulta

$$S(x+h) - S(x) = h\,f(x')$$

ou

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x') \qquad (4)$$

Fazendo h tender para zero, como x' tende para x, porque, tendendo X_1 para X, o mesmo ocorrerá com X', resulta, no limite,

$$S'(x) = f(x)$$

ou

$$S(x) = \int f(x)\, dx \qquad (5)$$

Todavia $S(x)$ não é uma qualquer das primitivas de $f(x)$, porém, apenas *aquela que se anula para* $x = a$. Sendo $S(x) + C$ a expressão geral das primitivas de $f(x)$, a condição citada daria $S(a) + C = 0$ donde $C = -S(a)$. Logo a primitiva que representa a área $AMPX$ é

$$S(x) - S(a) = \int_a^x f(x)\, dx \qquad (6)$$

Então, a área do trapézio mistilíneo $AMNB$ é

$$\text{Área } AMNB = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (7)$$

$\longrightarrow$ Conclusão: *A área da superfície limitada pelo eixo* ox, *pelas ordenadas* $x = a$ e $x = b$ *e pela linha, definida pela função contínua* $y = f(x)$, *é a integral definida* $\int_a^b f(x)\, dx$, *supondo-se que* $f(x)$ *tenha o mesmo sinal no intervalo* $[a, b]$.

3. Exercício. *Calcular a área limitada pela hipérbole* $y = \dfrac{1}{x}$, *pelo eixo* ox *e pelas ordenadas* $x = 1$ e $x = r$ $(r > 1)$.

Resolução: Seja AB o ramo da hipérbole correspondente a valores positivos de x (fig. 65). De acôrdo com resultado anterior, a área da superfície pedida (tracejada na figura é

$$S = \int_1^r \frac{dx}{x} = \Big[lx \Big]_1^r = lr - l1 = lr$$

A área é, portanto, o logaritmo neperiano de r, razão pela qual os logaritmos neperianos são, também, denominados logaritmos hiperbólicos.

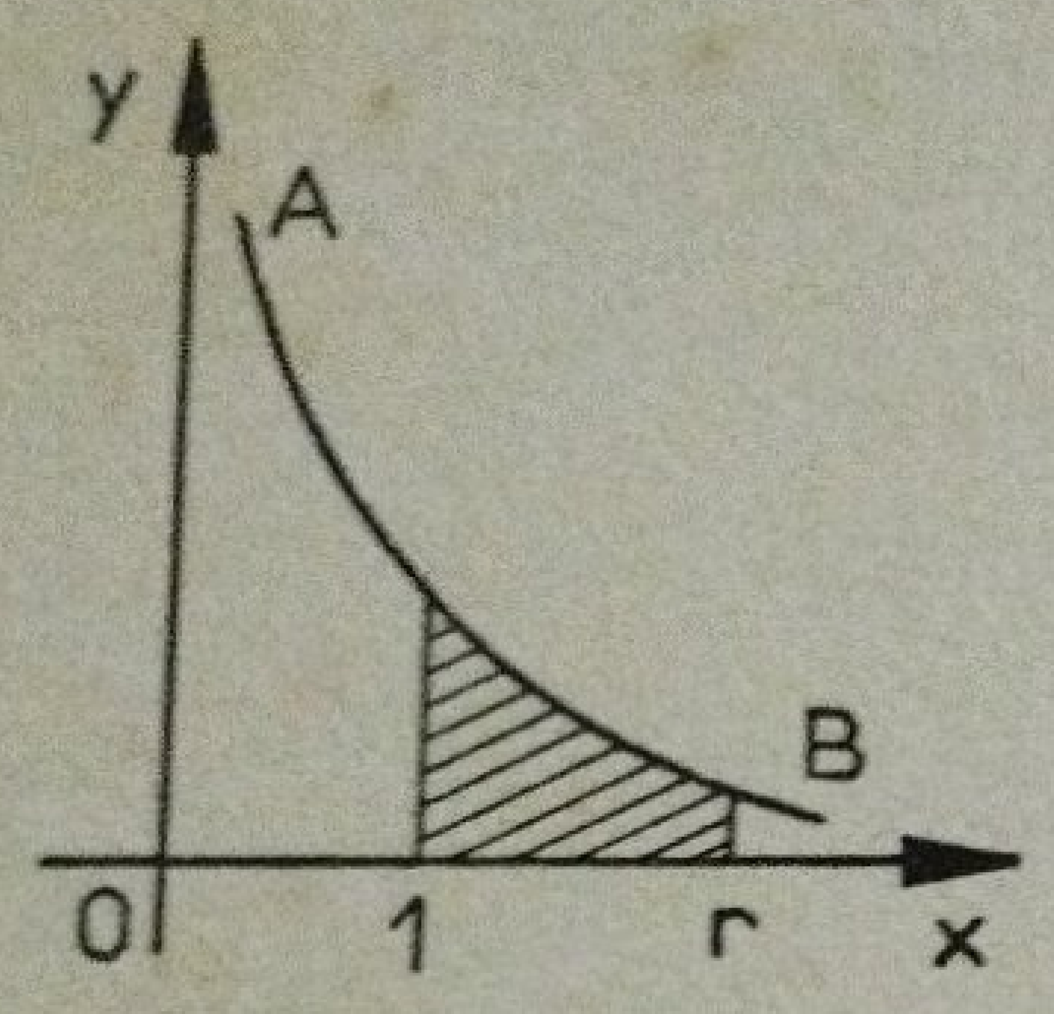

FIG. 65

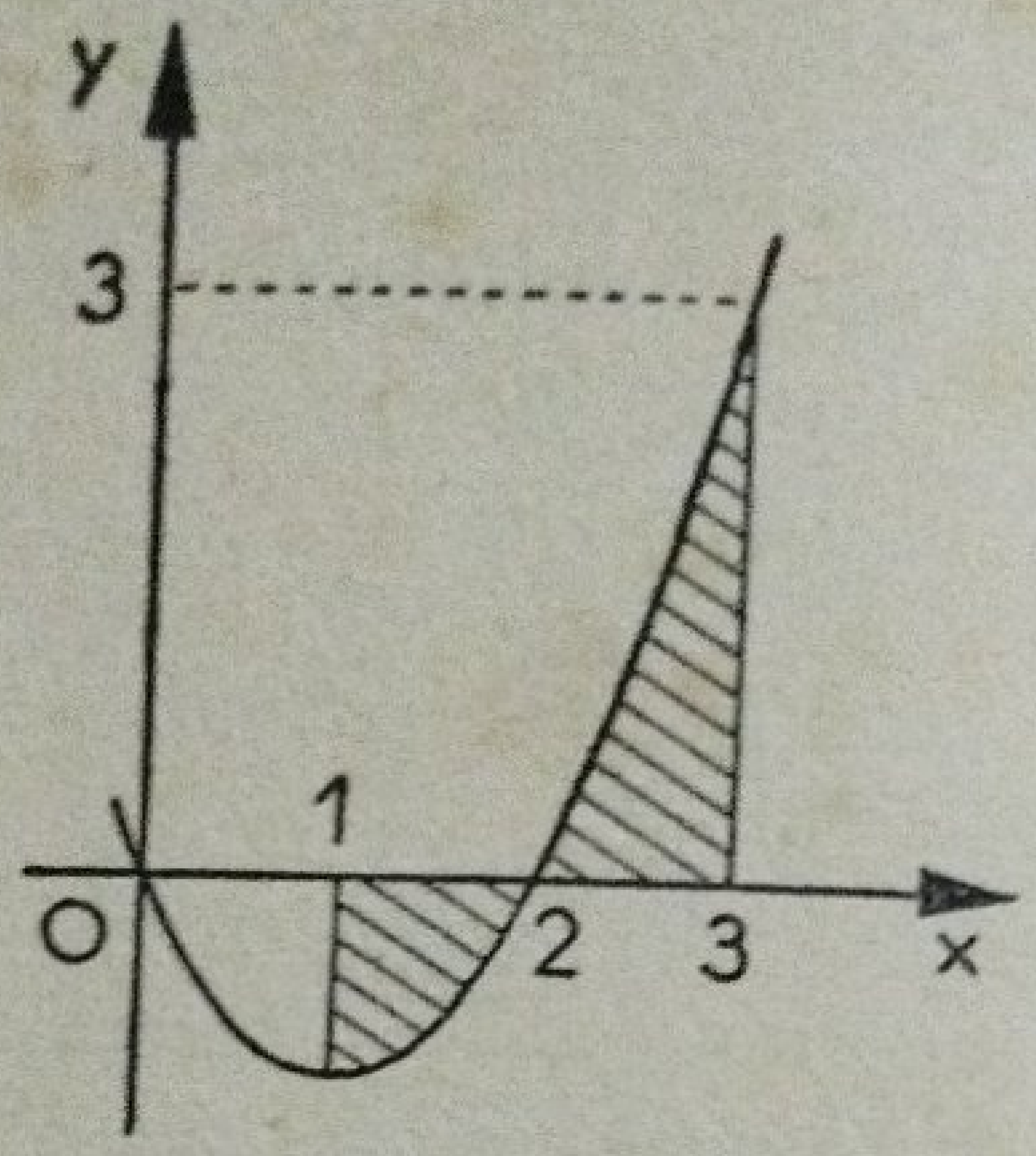

FIG. 66

4. Exercício. *Calcular a área limitada pela parábola* $y = x^2 - 2x$, *pelo eixo* $\overrightarrow{ox}$ *e pelas ordenadas* $x = 1$ *e* $x = 3$.

Resolução: Com o auxílio do gráfico da função (fig. 66), vemos que ela é negativa no intervalo semi-aberto $[1, 2)$, anula-se no ponto $x = 2$ e é positiva no intervalo semi-aberto $(2, 3]$.

Logo, no intervalo $[1, 3]$, a função não tem sinal constante, condição exigida na conclusão do **n.º 2.** Calculamos, então, separadamente, as áreas correspondentes aos intervalos $[1, 2]$ e $[2, 3]$, que representaremos, respectivamente, por S_1 e S_2.

Como

$$\int y\,dx = \int (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$$

temos

$$S_1 = \int_1^2 y\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 y dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \left(\frac{27}{3} - 9\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

O valor negativo, obtido para a área S_1, justifica-se pelo fato de serem negativas as ordenadas no intervalo [1, 2]. Fazendo, então, abstração do sinal, a área total, tracejada na fig. 66, é $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.

5. Exercício. *Calcular a área do segmento da parábola* $y = 4x - x^2$, *determinado pela reta* $y = 4 - x$.

RESOLUÇÃO: Traçando os gráficos da reta e da parábola, (fig. 67), vemos que elas se cortam nos pontos $M(1, 3)$ e $P(4, 0)$.

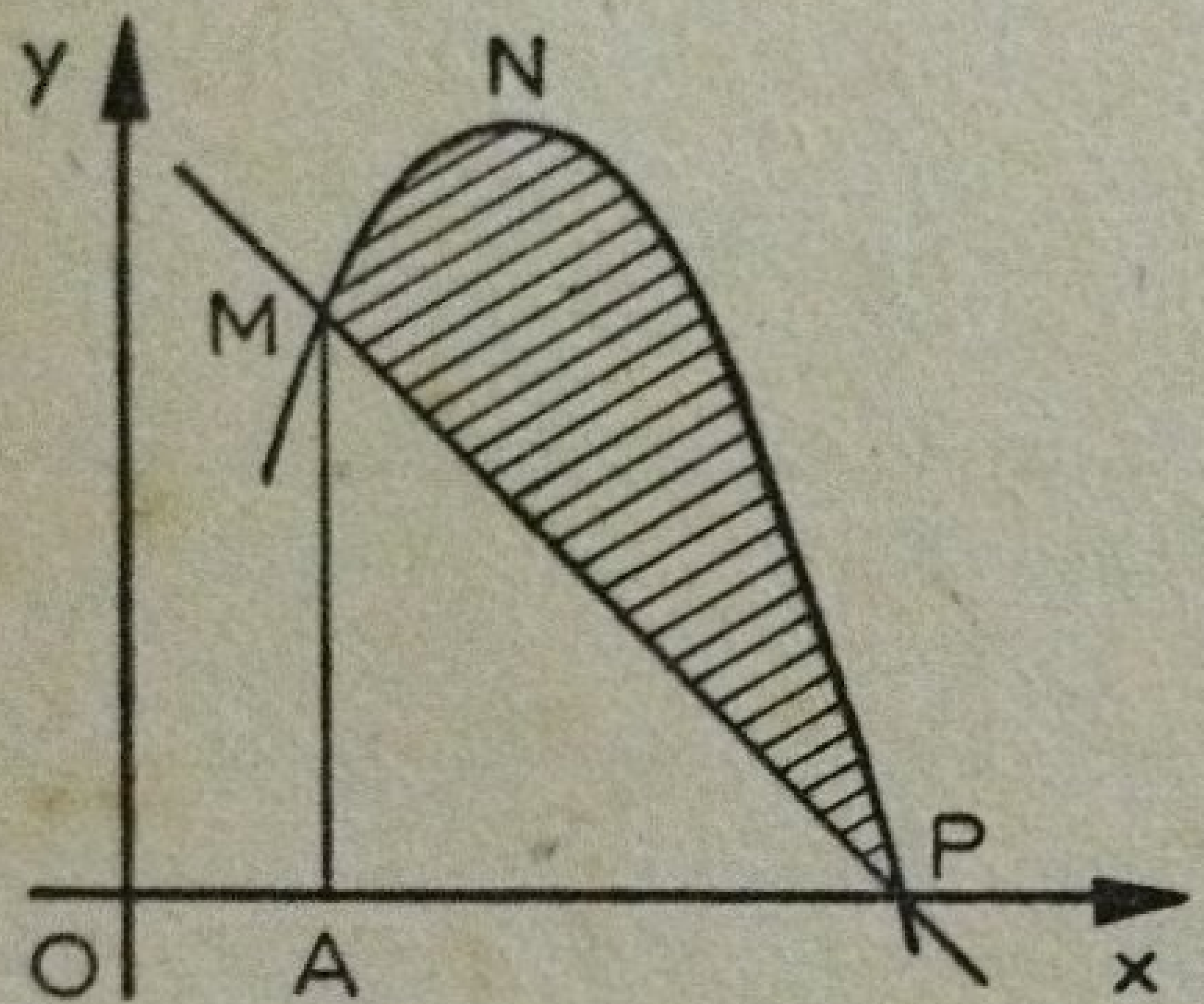

FIG. 67

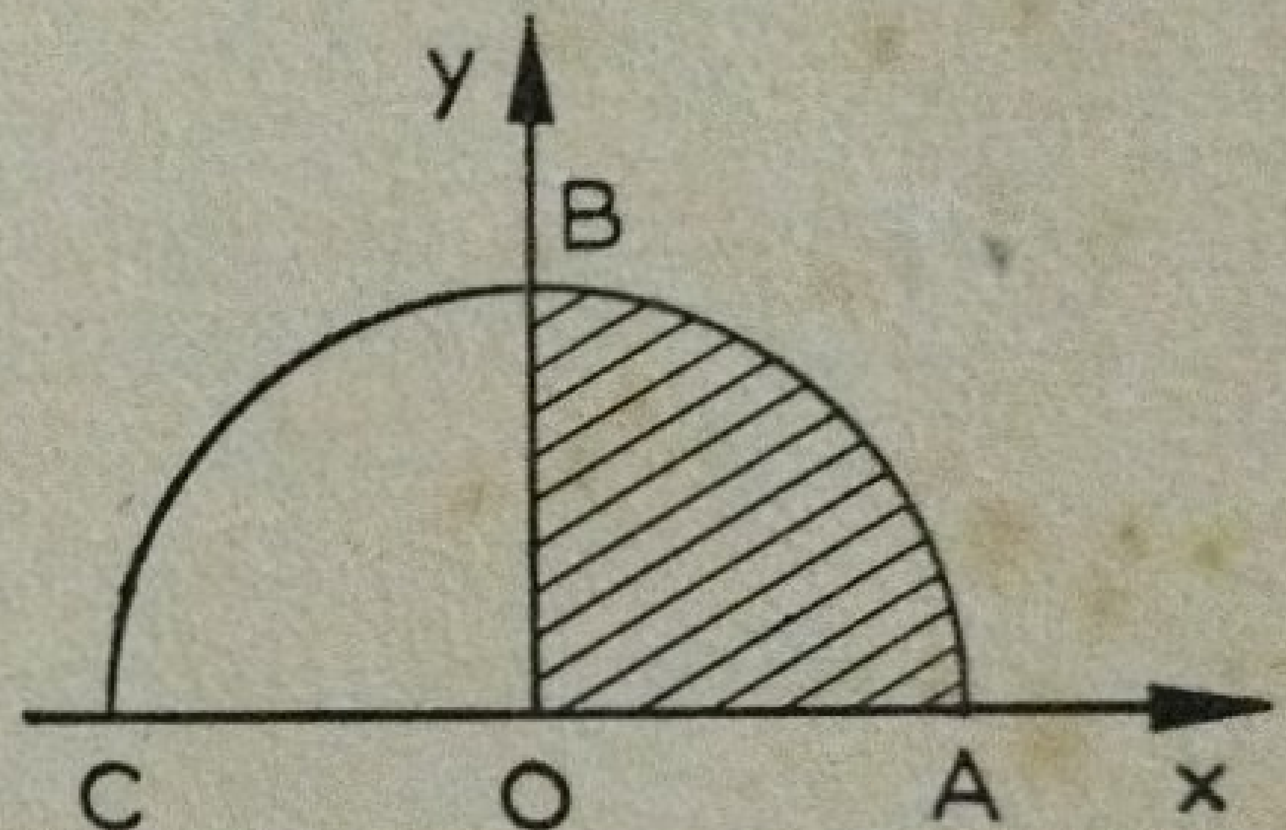

FIG. 68

Logo a área da superfície MNP procurada (tracejada na figura) é a diferença das áreas da superfície $AMNP$ e do triângulo AMP. Como

$$S_{AMNP} = \int_1^4 (4x - x^2)\, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^4 = 9$$

$$S_{AMP} = \int_1^4 (4 - x)\, dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_1^4 = 4,5$$

a área procurada é

$$S_{MNP} = S_{AMNP} - S_{AMP} = 9 - 4,5 = 4,5$$

6. Exercício. *Calcular a área do circulo de raio r.*

RESOLUÇÃO: Supondo seu centro na origem, a equação da circunferência de raio r é $x^2 + y^2 = r^2$ (**Cap. V, n.º 1**) da qual resulta $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Então, a equação

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

na qual se toma o radical com sinal positivo, representa a semicircunferência ABC (fig. 68), situada acima do eixo ox. Calculemos a área do quadrante OAB. Temos, em virtude do que já foi dito,

$$S_{OAB} = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,.\,dx$$

ou utilizando a primitiva de $\sqrt{r^2 - x^2}$, já calculada no exercício do **Cap. IX, n.º 27,**

$$S_{OAB} = \left[\frac{r^2}{2} \text{ arc sen } \frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right]_0^r =$$

$$= \left(\frac{r^2}{2} \text{ arc sen } 1\right) - \left(\frac{r^2}{2} \text{ arc sen } 0\right) = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Logo, a área do círculo é o quádruplo dessa área, ou πr^2, resultado já conhecido da Geometria.

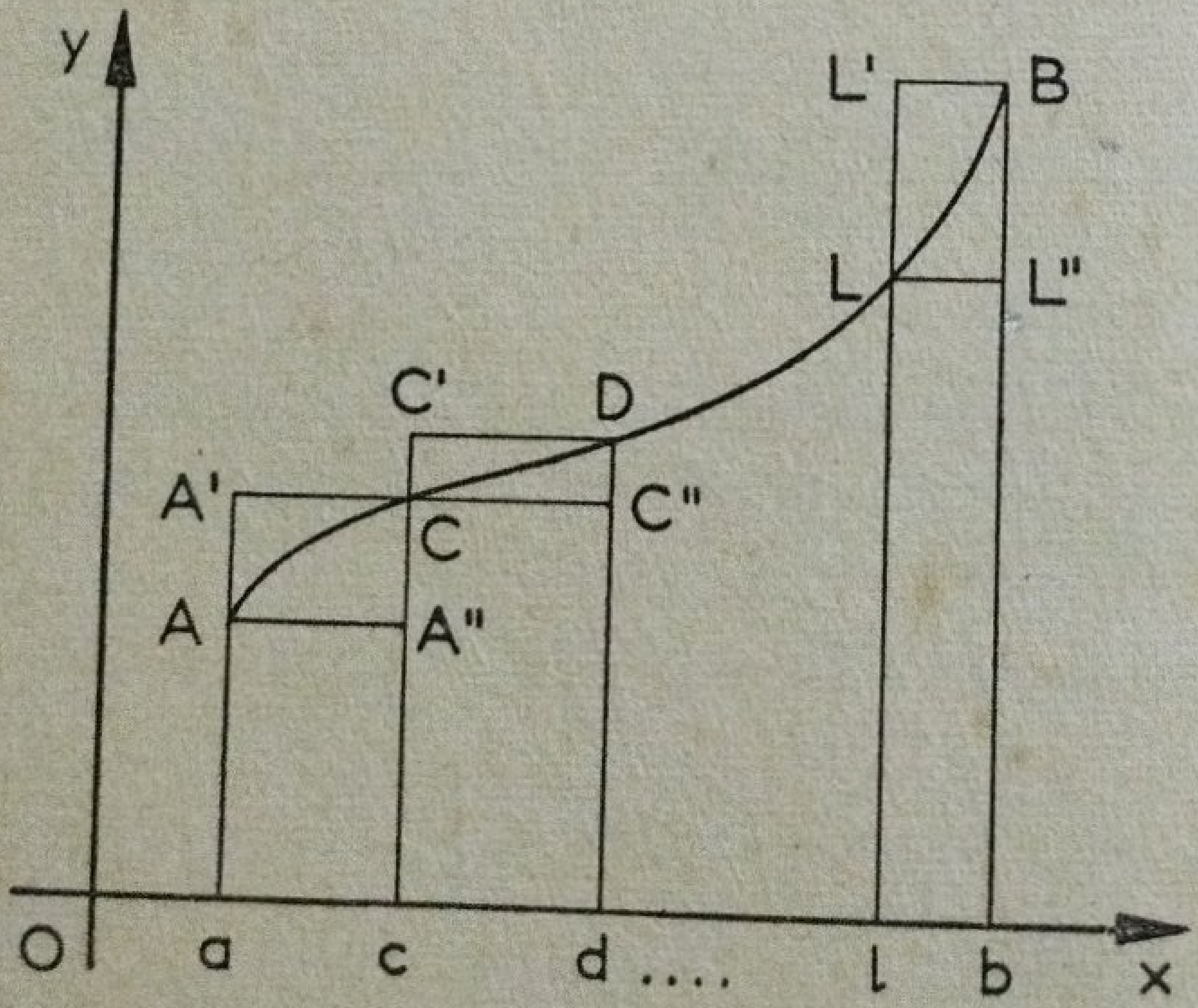

FIG. 69

7. Integral definida como limite de uma soma. Seja AB (fig. 69) a representação gráfica de uma função unívoca e contínua $f(x)$ num intervalo $[a, b]$. Já vimos que a área do trapézio mistilíneo $aABb$ é dada pela integral

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

Dividamos o arco AB em n arcos (não necessàriamente do mesmo comprimento) $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CD}$, ... $\overset{\frown}{LB}$, pelos $n-1$ pontos $C, D, \ldots L$ de abcissas $c, d, \ldots l$, respectivamente. Então, a área S é superior à soma S' das áreas dos retângulos $aA A''c$, $cCC''d$, ... $lLL''b$

$$S' = f(a)(c-a) + f(c)(d-c) + \ldots + f(l)(b-l) \qquad (9)$$

e inferior à soma S'' das áreas dos retângulos $aA'Cc$, $cC'Dd$, ... $lL'Bb$

$$S'' = f(c)(c-a) + f(d)(d-c) + \ldots + f(b)(b-l) \qquad (10)$$

Se aumentarmos o número de subdivisões do intervalo $[a, b]$, as áreas S' e S'' irão aproximar-se de S. Se $f(x)$ é integrável nesse intervalo, quando o número de subdivisões tender para infinito, de modo que o maior dos intervalos $[a, c]$ $[c, d]$, ... $[l, b]$ tenda para zero, os limites de S' e S'' serão iguais a S. Então, a integral (8), que define S, pode ser considerada o limite da soma das áreas de um número infinito de retângulos de bases infinitamente pequenas.

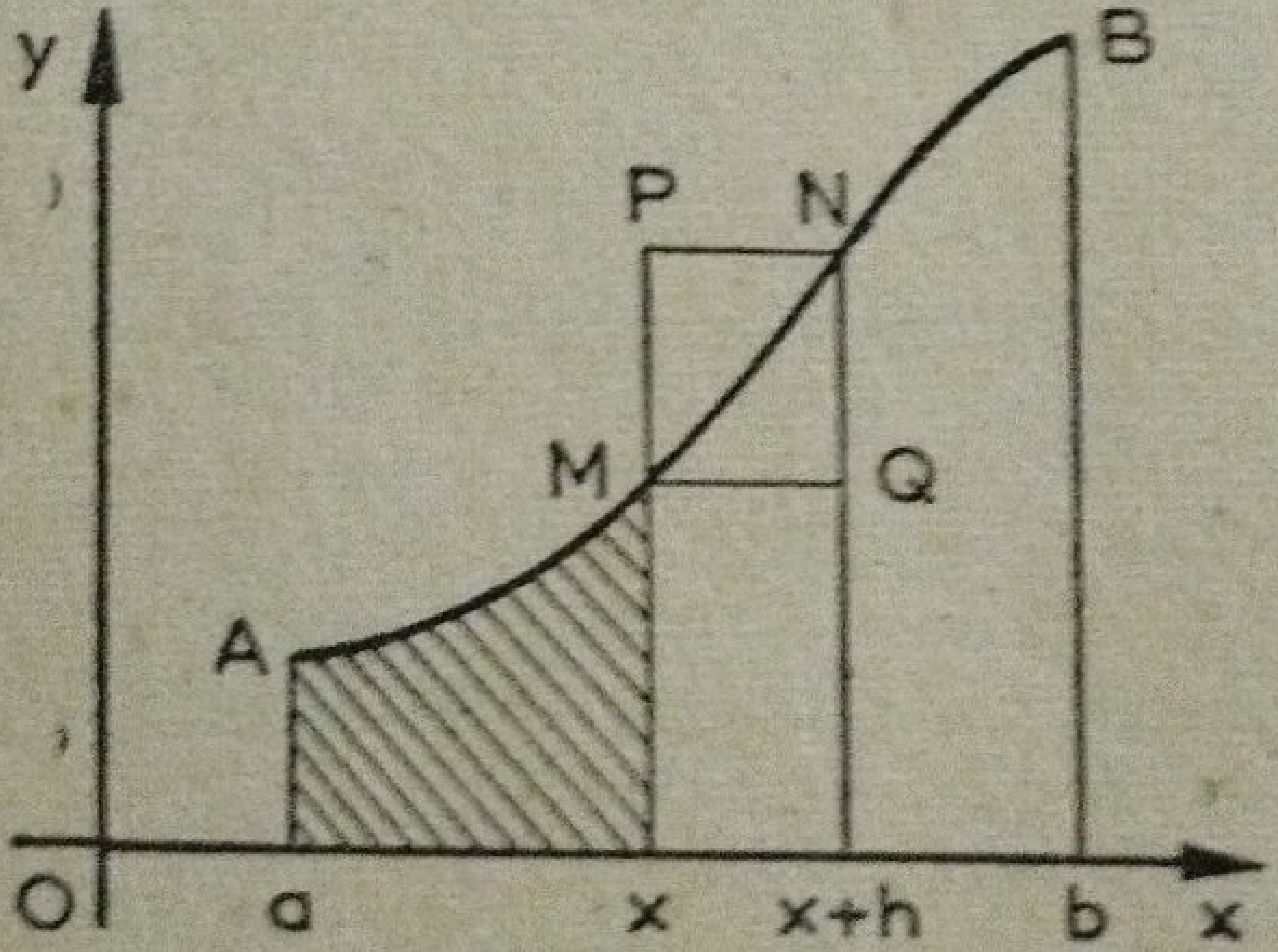

FIG. 70

8. Volumes dos sólidos de revolução. Seja AB (fig. 70) a representação gráfica de uma função unívoca e contínua $f(x)$ num intervalo $[a, b]$. Calculemos o volume do sólido de revolução, gerado pela superfície plana $aABb$ quando a linha AB dá uma rotação de 360° em tôrno do eixo ox. Seja x a abcissa de um ponto M qualquer do arco AB. Sejam V_x o volume do sólido gerado pela superfície $aAMx$ e $\triangle V_x$ o acréscimo de V_x, quando x sofre o acréscimo h. Logo, $\triangle V_x$ é o volume do sólido gerado pela superfície $xMN(x+h)$. Êsse volume, como mostra a figura, está compreendido entre os volumes dos cilindros de revolução, gerados, respectivamente, pelos retângulos $xMQ(x+h)$ e $xPN(x+h)$, ou

$$\pi[f(x)]^2h < \triangle V_x < \pi[f(x+h)]^2h$$

donde

$$\pi\,[f(x)]^2 < \frac{\triangle V_x}{h} < \pi\,[f(x+h)[^2$$

Em virtude da continuidade de $f(x)$ e utilizando um raciocínio análogo ao que fizemos no **n,° 2,** concluimos que o limite de $\dfrac{\triangle V_x}{h}$ quando $h \to o$, ou seja, a derivada $\dfrac{dV_x}{dx}$ é igual a $\pi\,[f(x)]^2$ ou

$$\frac{dV_x}{dx} = \pi\,[f(x)[^2 \quad \text{donde} \quad dV_x = \pi\,[f(x)]^2dx$$

Então, o volume do sólido gerado pela superfície $aABb$ é a integral definida

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2dx \tag{11}$$

9. Exercícios. *Calcular o volume do cone de revolução de raio da base r e altura h.*

RESOLUÇÃO: Sejam $h = OP$ e $r = PM$ (fig. 71), respectivamente, a altura e o raio da base do cone, gerado pelo triângulo retângulo OPM numa rotação de 360° em tôrno de OP. A geratriz OM está sôbre a reta, que passa pelos pontos $O(o,\ o)$ e $M(h,\ r)$. Logo, sua equação cartesiana é **(Cap. IV, n.° 17)**

$$y = \frac{r}{h}\,x$$

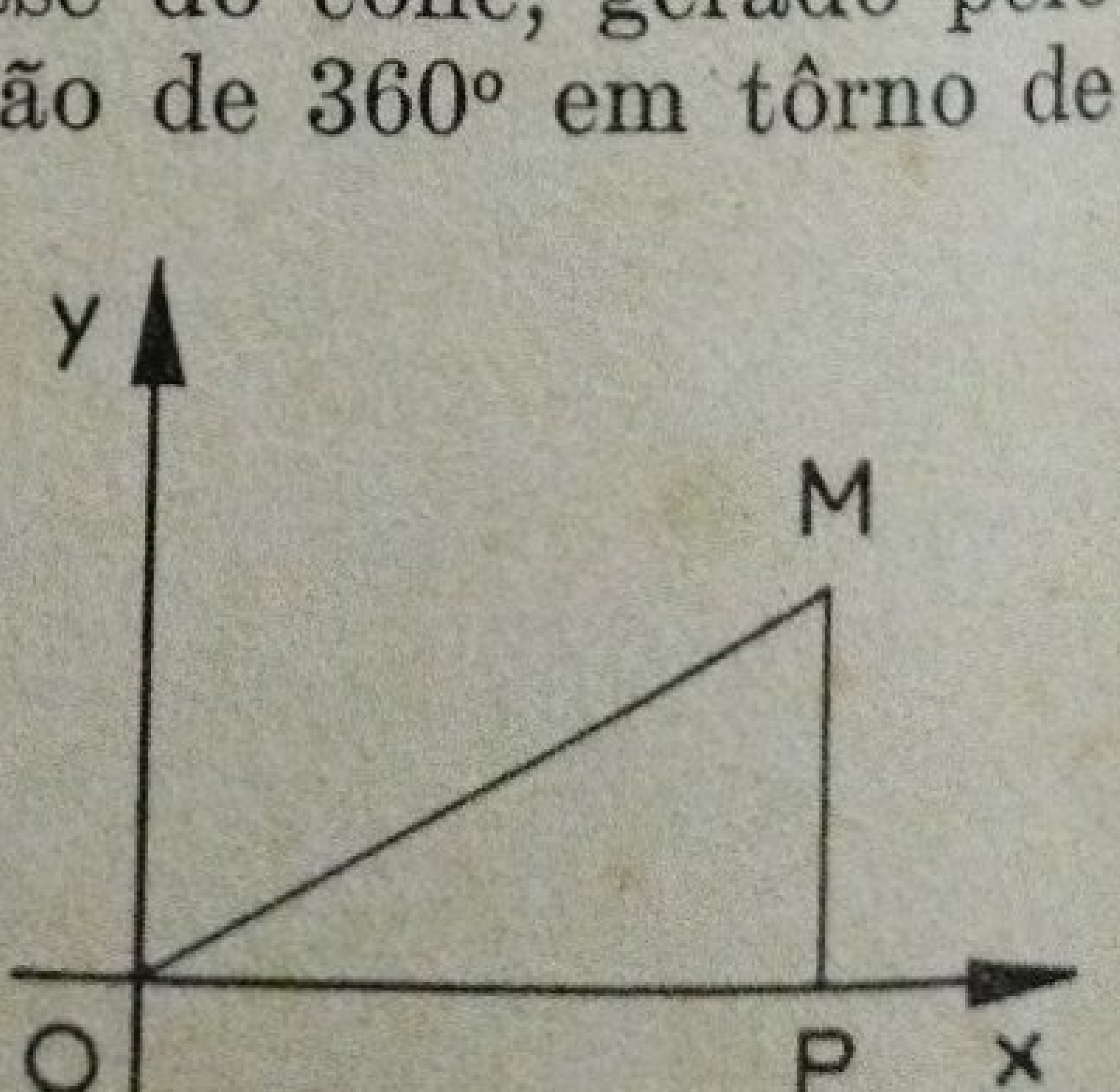

FIG. 71

De acôrdo com o resultado do **n.° 8,** o volume do cone é

$$V = \pi \int_o^h \frac{r^2x^2}{h^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_o^h x^2dx =$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h$$

10. Exercício. *Calcular o volume da esfera de raio r.*

RESOLUÇÃO: Seja ABC (fig. 68) o semicírculo de raio r, gerador da esfera por uma rotação de 360° em tôrno de seu diâmetro AC. A equação da semicircunferência ABC é, como já vimos,

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

na qual se considera o valor positivo do radical.

O volume do hemisfério, gerado pelo quadrante OAB, é, então,

$$V = \pi \int_o^r (r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_o^r =$$

$$= \pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] = \frac{2\pi r^3}{3}$$

O volume da esfera é, portanto, o dôbro, ou seja $\frac{4}{3}\,\pi r^3$.

11. Áreas das superfícies de revolução. Seja AB (fig. 70) a representação gráfica de uma função unívoca e contínua $y = f(x)$ num intervalo $[a, b]$. Sejam M e N dois pontos de AB, de abcissas x e $x + h$, respectivamente. Consideremos o trapézio retângulo de bases xM e $(x+h)N$ e cujo lado não perpendicular às bases é a corda MN (não traçada na figura). Quando AB der uma rotação de 360° em tôrno de ox, a corda MN descreverá a superfície lateral de um tronco de cone de revolução, cuja área é $2\pi y_1 \,.\, \overline{MN}$, sendo y_1 a média aritmética das ordenadas dos pontos M e N (*).

Supondo que h tenda para zero, os pontos M e N tornam-se *infinitamente próximos*. Então, o arco infinitésimo $ds = MN$ pode ser substituido pela corda infinitamente pequena MN e

(*) Vol. I, Cap. VI, n.º 41.

a ordenada y_1 pela ordenada $y = f(x)$ do ponto M. A área da superfície gerada pelo arco infinitésimo MN é, então,

$$dS = 2\pi y \; ds \tag{12}$$

Do triângulo retângulo infinitésimo MQN resulta

$$\overline{MN}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QN}^2 \qquad \text{ou} \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

visto que MQ e QN são, respectivamente, os acréscimos infinitamente pequenos de x e y. Então, a área (12) pode ser escrita

$$dS = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, dx$$

Logo, a área da superfície gerada pela linha AB é

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} \; dx \tag{13}$$

12. Exercício. *Calcular a área lateral do tronco de cone de revolução das bases r e r′ e geratriz g.*

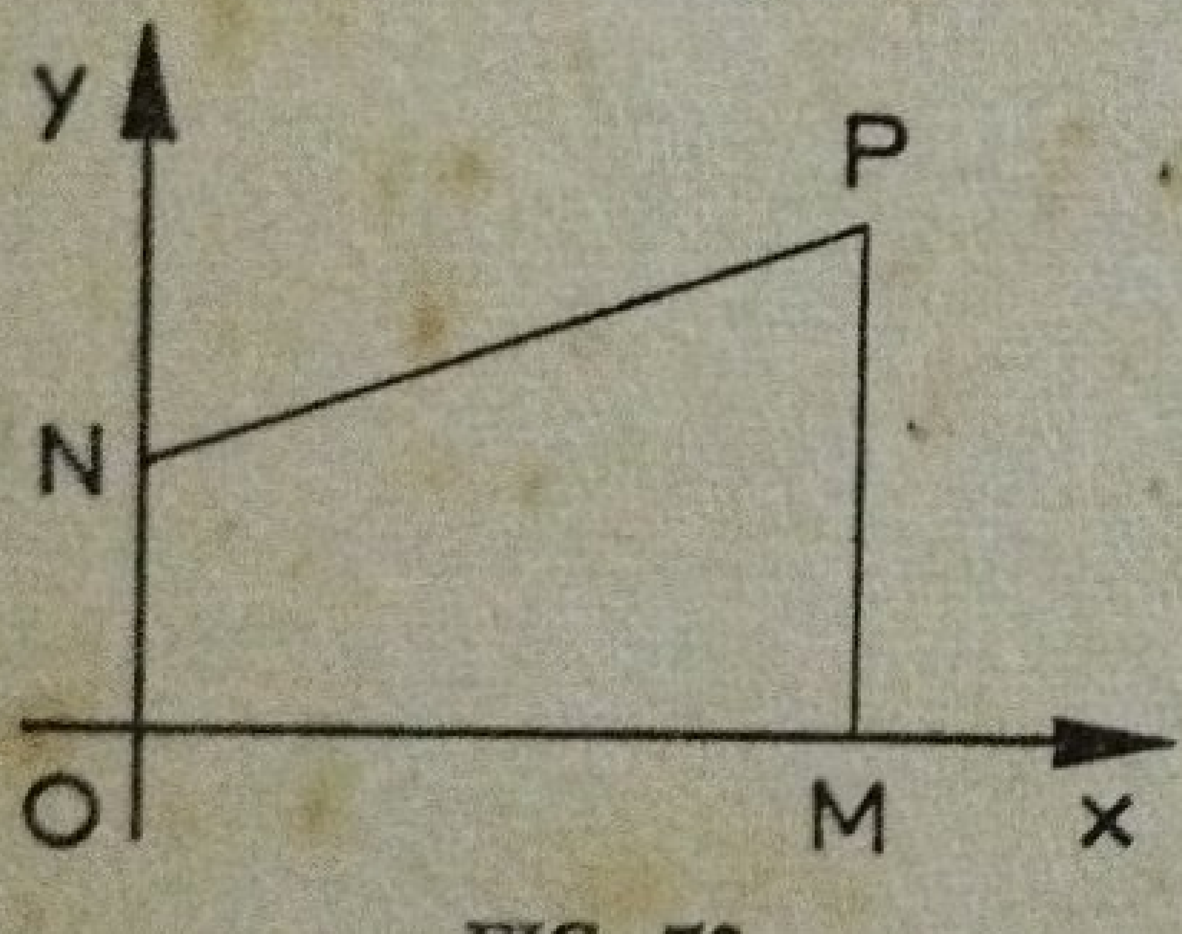

FIG. 72

Resolução: Seja $OMPN$ (fig. 72) o trapézio retângulo gerador do tronco de cone. Sejam $h = OM$ a altura, $g = NP$ a geratriz e $ON = r$ e $MP = r'$ os raios das bases dêsse tronco.

O suporte da geratriz é a reta que passa pelos pontos $N(o, r)$ e $P(h, r')$ e cuja equação é (**Cap. IV, n.º 17**)

$$\frac{y - r}{r' - r} = \frac{x}{h} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{r' - r}{h} x + r \tag{14}$$

Como de (14) resulta $y' = \dfrac{r' - r}{h}$, a área da superfície lateral do tronco é, de acôrdo com a fórmula (13),

$$S = 2\pi \int_o^h \left(\frac{r' - r}{h} x + r\right) \sqrt{1 + \frac{(r' - r)^2}{h^2}} \, . \, dx =$$

11. Calcular, por integração,a á rea do triângulo retângulo formado pelo eixo ox e pelas retas $y = \frac{x+2}{2}$ e $x = 6$. Verificar o resultado aplicando a fórmula da área de um triângulo. *Resp.*: 16

12. Calcular a área do segmento da parábola $y = 4 - x^2$ determinado pela reta $y = 3$. *Resp.*: $\frac{4}{3}$

13. Calcular, por integração, a área do trapézio definido pelo eixo ox, pelas paralelas $x = 2$ e $x = 6$ e pela reta $y = \frac{x}{2} + 3$. Verificar o resultado, aplicando a fórmula da área de um trapézio.
Resp.: 20

14. Calcular a área do segmento da parábola $y = x^2$, determinado pela reta $y = 2x$. *Resp.*: $\frac{4}{3}$

15. Calcular a área de um qualquer dos segmentos da senóide, determinado pelo eixo ox.
(SUGESTÃO: Essa área é dada por $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \,.\, dx$, ou $\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen} x \,.\, dx$, etc.)
Resp.: 2

16. Calcular a área da superfície limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x + 4$. *Resp.*: 9
(SUGESTÃO: Verificar, resolvendo o sistema formado por essas equações, que as parábolas se cortam nos pontos $(-1, 1)$ e $(2, 4)$. A área pedida é dada pela integral $\int_{-1}^{2} [(-x^2+2x+4) - x^2]\, dx$, resultado que será bem compreendido à luz dos gráficos das funções.)

17. Calcular a área da superfície limitada pelas parábolas $y^2 = 4x$ e $y = \frac{x^2}{4}$. *Resp.*: $\frac{16}{3}$

18. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação de 360° em tôrno de ox do segmento da parábola $y = 4 - x^2$ determinado pelo eixo ox.
Resp.: $\frac{512\pi}{15}$

19. Calcular, por integração, o volume do cilindro de revolução de raio da base r e altura h.
Resp.: $\pi r^2 h$
(SUGESTÃO: O cilindro é gerado pela rotação completa em tôrno de ox do retângulo determinado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = h$ e $y = r$. Observar o exercício do **n.º 9**)

20. Calcular, por integração, o volume do tronco de cone de revolução, de altura h e raios das bases r e r'.
Resp.: $\frac{\pi h}{3}(r^2 + r'^2 + rr')$

(Sugestão: Considerar o trapézio gerador na posição da fig. 72 e utilizar a equação (14) do suporte da geratriz do tronco, estabelecida no exercício do **n.º 12**

21. Calcular, por integração, o volume do cone gerado, por uma rotação em tôrno de ox, do triângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta $x + 2y = 6$. *Resp.:* $18\ \pi$

22. Calcular, por integração, a área lateral do cone de revolução de geratriz g e raio da base r.
Resp.: πrg

Solução do Exercício n.º 2 do Cap. VIII,

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0	$+1$	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		—	0	+	0	—	
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘	0
		inflex.	min.	inflex.	máx.	inflex.	

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

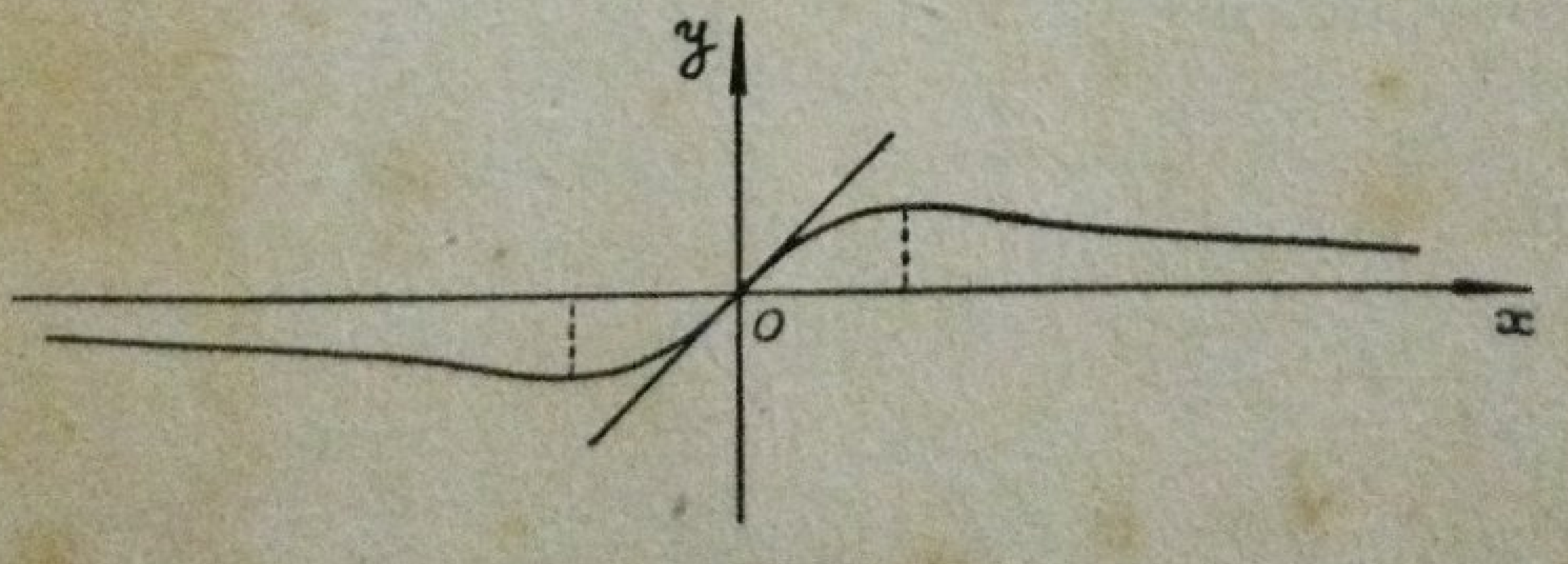

FIG. 73

CAPÍTULO XI

NÚMEROS COMPLEXOS

1. Preliminares. Consideremos a equação do 2.º grau

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \qquad (1)$$

cujas raízes são dadas por

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} \qquad (2)$$

Como não há número real cujo quadrado seja negativo, concluímos que a equação (1) não tem raízes reais.

Podemos, entretanto, a exemplo do que foi feito em relação a outras impossibilidades de operação, *estender* o conceito de número, criando uma *classe mais geral*, onde a operação $\sqrt{-9}$ tenha *resultado* (*).

Consideremos, por um momento, a *unidade imaginária* i, definida por $i = \sqrt{-1}$. Como $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \, . \, \sqrt{-1} = 3i$, concluímos que as raízes da equação (1) serão $x = 2 \pm 3i$.

Chegamos, por êsse caminho, à consideração de números do tipo $a + bi$, sendo a e b números reais. Tais números denominam-se *complexos*, chamando-se a e bi, respectivamente, sua *parte real* e sua *parte imaginária*. Se, em particular, $a = 0$, o número bi denomina-se *imaginário puro*.

Conclui-se dessa definição, que o conjunto dos números complexos $a + bi$ tem como subconjunto próprio o conjunto dos números reais, a saber os números $a + bi$ para os quais $b = 0$.

2. Definição de número complexo. Um número complexo pode ser definido como um par ordenado (a, b) de números reais a e b, que satisfazem às seguintes condições :

(*) Por exemplo, as impossibilidades $2 - 7$ e $2 \div 7$ no campo N dos números naturais foram removidas pela criação dos números *relativos* e *racionais*, respectivamente.

I. *Dois números complexos* (a, b) e (c, d) *são iguais se e sòmente se* $a = c$ *e* $b = d$.

II. *O número complexo* (a, o) *é idêntico ao número real* a.

III. *A soma de dois números complexos* (a, b) *e* (c, d) *é o número complexo* $(a + c, b + d)$, *ou*

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

IV. *O produto de dois números complexos* (a, b) e (c, d) *é o número complexo* $(ac - bd, ad+bc)$, *ou*

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

As operações assim definidas seguem o princípio de permanência das leis formais de cálculo; delas resultam como caso particular as operações no campo real.

3. Identidade entre os símbolos $a + bi$ e (a, b). Da definição II do **n.° 2** resulta

$$(1,0) = 1 \qquad\qquad (0,0) = 0$$

O número $(0,1)$ chama-se *unidade imaginária* e representa-se pela letra i. Então, da definição IV resulta

$$i^2 = (o, 1) \times (o, 1) = (-1, o) = -1 \quad (4)$$

isto é, a unidade imaginária é o número cujo quadrado é -1.

Da definição IV conclui-se que

$$(b, o) \times (o, 1) = (o, b)$$

e como $(b, o) = b$ e $(o, 1) = i$, resulta

$$(o, b) = bi \qquad (5)$$

Sendo, pela definição III,

$$(a, b) = (a, o) + (o, b)$$

temos, em virtude da definição II e do resultado (5)

$$(a, b) = a + bi \qquad (6)$$

4. Adição e multiplicação de números complexos. Do que foi estabelecido resulta que a *soma* e o *produto* de dois complexos $a + bi$ e $c + di$, podem ser obtidas pelas regras formais das operações algébricas, desde que na segunda se observe o resultado (4).

Assim, para a *adição* teríamos

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

e para a *multiplicação*

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Por exemplo:

$$(2+3i) + (4 - 5i) = (2+4) + (3i - 5i) = 6 - 2i$$

$$(2+3i)(4-5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 8 + 15 + 2i = 23 + 2i$$

5. Subtração de números complexos. Seja (x, y) a diferença $(a, b) - (c, d)$ de dois números complexos. Como a subtração é a operação inversa da adição, temos

$$(x, y) + (c, d) = (a, b)$$

Mas, pela definição de soma,

$$(x, y) + (c, d) = (x+c, y+d)$$

Como os resultados (a, b) e $(x+c, y+d)$ são iguais, pela definição I do **n.º 2,** devemos ter

$$x + c = a \qquad\qquad y + d = b$$

donde, respectivamente,

$$x = a - c \qquad\qquad y = b - d$$

e, portanto,

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

ou

$$a + bi - (c+di) = (a - c) + (b - d)i$$

A operação faz-se, portanto, segundo as leis formais da subtração algébrica. Por exemplo:

$$(7+3i) - (2+5i) = (7 - 2) + (3i - 5i) = 5 - 2i$$

6. Norma e módulo. *Norma* de um número complexo $a + bi$ é o número real (não negativo) $a^2 + b^2$; *módulo* ou *valor absoluto* dêsse complexo é o número aritmético $\rho = |\sqrt{a^2 + b^2}|$ e representa-se pelo símbolo $|a + bi|$. No caso de ser $b = o$, a definição coincide com a de módulo ou valor absoluto de um número real.

Dessa definição resulta que a condição necessária e suficiente para que um número complexo seja nulo é que seu módulo também seja nulo.

7. Números complexos conjugados. Os números complexos $a + bi$ e $a - bi$ denominam-se *conjugados*; diz-se que $a - bi$ é o *conjugado* de $a + bi$ e recìprocamente. Dessa definição resultam as propriedades de demonstração imediata:

I. *Dois números complexos conjugados têm a mesma norma e, portanto, o mesmo módulo.*

II. *A soma de dois números complexos conjugados é um número real, igual ao dôbro de sua parte real.*

III. *O produto de dois números complexos conjugados é um número real, a saber, a norma comum a êsses números.*

8. Inverso de um número complexo. Chama-se *inverso* ou *recíproco* de um número complexo *não nulo* $a + bi$ ao número complexo $x + yi$ cujo produto por $a + bi$ é igual a 1. Demonstremos a existência e a unicidade dêsse inverso.

Pela definição, temos $(a+bi)(x+yi) = 1$, ou efetuando o produto indicado

$$(ax - by) + (bx+ay)i = 1$$

Pela definição I do **n.º 2,** da igualdade acima resulta

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Como o determinante dos coeficientes de x e y nesse sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

é diferente de zero por ser a norma de um número complexo não nulo (**n.º 6**), o sistema tem uma solução, que se obtém fàcilmente:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

O inverso de, $a + bi$ é, pois, o número complexo $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$ e pode ser obtido multiplicando-se ambos os têrmos da fração

$\frac{1}{a+bi}$ por $a - bi$. Assim, por exemplo, o inverso de $2 + 3i$ é

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\,i$$

9. Divisão de números complexos. Com a noção de inverso de um número complexo, define-se o quociente de dois números complexos $(a+bi) \div (c+di)$, suposto $c + di$ diferente de zero, como sendo o produto de $(a+bi)$ pelo inverso de $c + di$. Assim o quociente $(11+2i) \div (3-4i)$, atendendo à observação prática anterior, é

$$\frac{11+2i}{3-4i} = \frac{(11+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{25+50i}{25} = 1 + 2i$$

10. Representação geométrica de um número complexo. Já vimos (**Cap. I, n.º 13**) a correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta orientada, ou, em outras palavras, a equivalência entre o *continuum real* e o *continuum linear*.

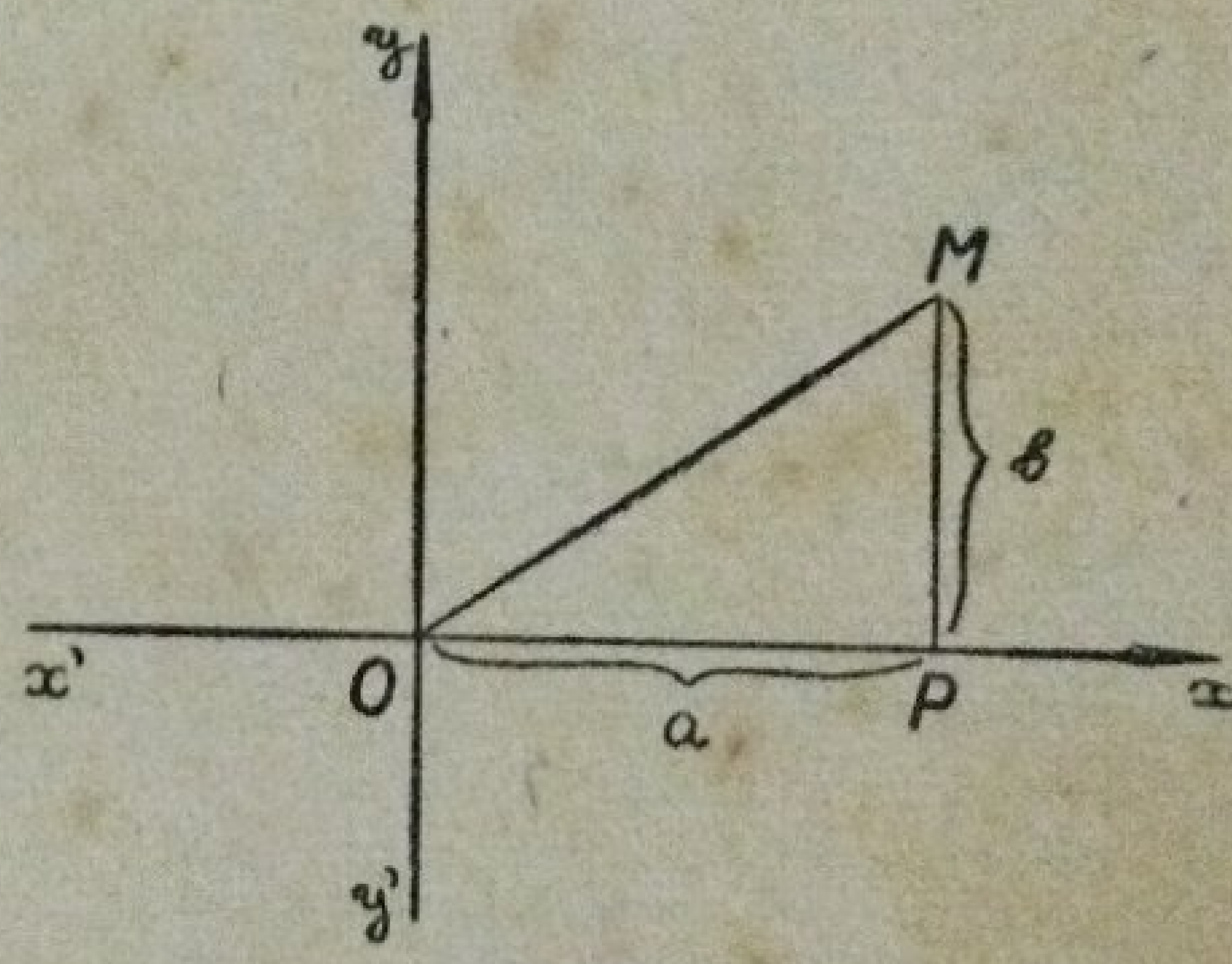

FIG. 74

Se considerarmos dois eixos ortogonais $x'x$ e $\overline{y'y}$ (fig. 74), tal como fizemos no **Cap. II, n.º 6**, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números complexos e o conjunto dos pontos do plano. A cada número complexo $z = (a, b) = a + bi$ corresponde unìvocamente o ponto M de abcissa a e ordenada b. Diz-se, então, que M é o *ponto representativo* de z e, recìprocamente, que z é o *afixo* do ponto M.

Daí resulta que os pontos representativos dos números reais estão sôbre o eixo $x'x$, porisso denominado *eixo real*. Recìprocamente, o afixo de qualquer ponto situado sôbre o eixo real é um número real.

Os pontos representativos dos imaginários puros (números da forma bi) estão sôbre o eixo $y'y$, por essa razão denominado *eixo imaginário*. Recìprocamente, o afixo de qualquer ponto situado sôbre $y'y$ é um imaginário puro.

O plano onde são representados os números complexos é geralmente designado por *plano de* ARGAND ou de ARGAND-GAUSS (*).

A medida do segmento geométrico OM é o módulo do complexo $a + bi$, resultado imediato à luz do teorema de PITÁGORAS.

11. Representação trigonométrica de um número complexo. Seja ρ o módulo de um número complexo $a + bi$. Sendo, pela própria definição de módulo, $|a| \leqslant \rho$ e $|b| \leqslant \rho$, os quocientes $\dfrac{a}{\rho}$ e $\dfrac{b}{\rho}$ são números compreendidos entre -1 e $+1$, visto que a e b podem ser positivos, nulos ou negativos. Como, além disso,

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2} = \frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

existe um ângulo θ, determinado a menos de 2π, isto é, o ângulo $\theta + 2n\pi$ (n inteiro qualquer), tal que

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \qquad (7)$$

Das igualdades (7) resultam, respectivamente,

$$a = \rho\cos\theta \qquad\qquad b = \rho\operatorname{sen}\theta \qquad (8)$$

o que permite escrever o número complexo $a + bi$ sob a forma

$$a + bi = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \qquad (9)$$

denominada *forma trigométrica* dêsse complexo.

O ângulo θ, assim definido, chama-se *argumento* do número complexo $a + bi$, sendo igual ao ângulo θ, definido a menos

(*) Há uma discutida prioridade, devido ao fato de que o trabalho de GAUSS, aparecido em 1831, foi precedido por um trabalho pouco divulgado de ARGAND, surgido, porém, em 1806. Entretanto, segundo **W. F. OSGOOD** (*Functions of a complex variable*), o método já estava "implìcitamente contido" na tese doutoral de GAUSS, datada de 1799.

de 2π) (fig. 75), do semi-eixo positivo $\overrightarrow{ox}$ com a semi-reta OM, que passa pelo ponto representativo M do número $a + bi$.

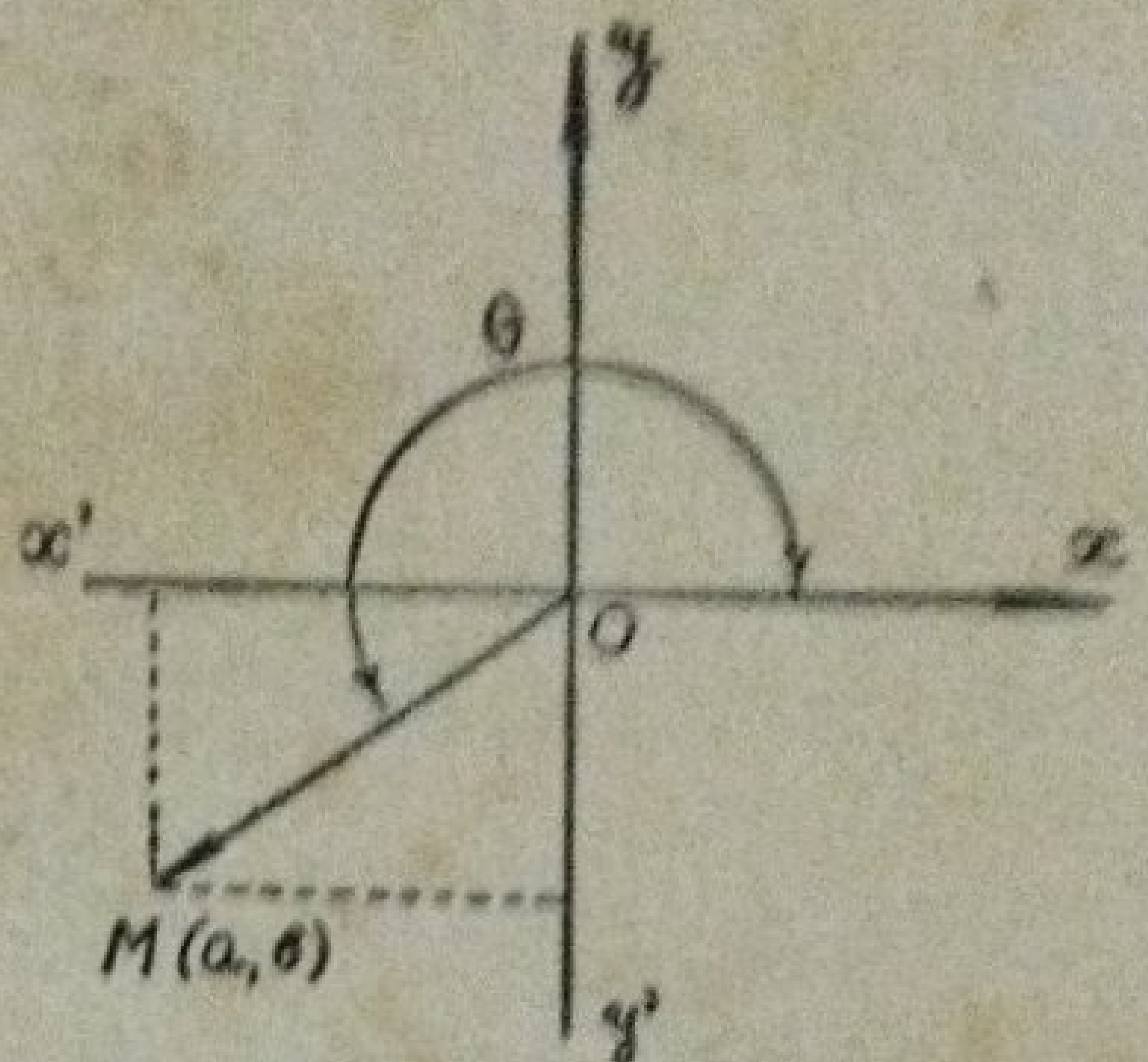

FIG. 75

12. Exercício. *Escrever sob a forma trigonométrica o complexo* $3\sqrt{3} + 3i$.

RESOLUÇÃO. Usando as notações anteriores, temos $a = 3\sqrt{3}$ e $b = 3$ e, portanto, $\rho = |\sqrt{27 + 9}| = 6$.

Então,

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

donde tiramos $\theta = 30^\circ$ (a menos de 360°). Podemos, pois escrever

$$3\sqrt{3} + 3i = 6\,(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

13. Exercício. *Escrever sob a forma trigonométrica o complexo* $-1 - \sqrt{3i}$.

RESOLUÇÃO: Sendo $a = -1$ e $b = -\sqrt{3}$ resulta $\rho = |\sqrt{1 + 3}| = 2$ e, portanto,

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

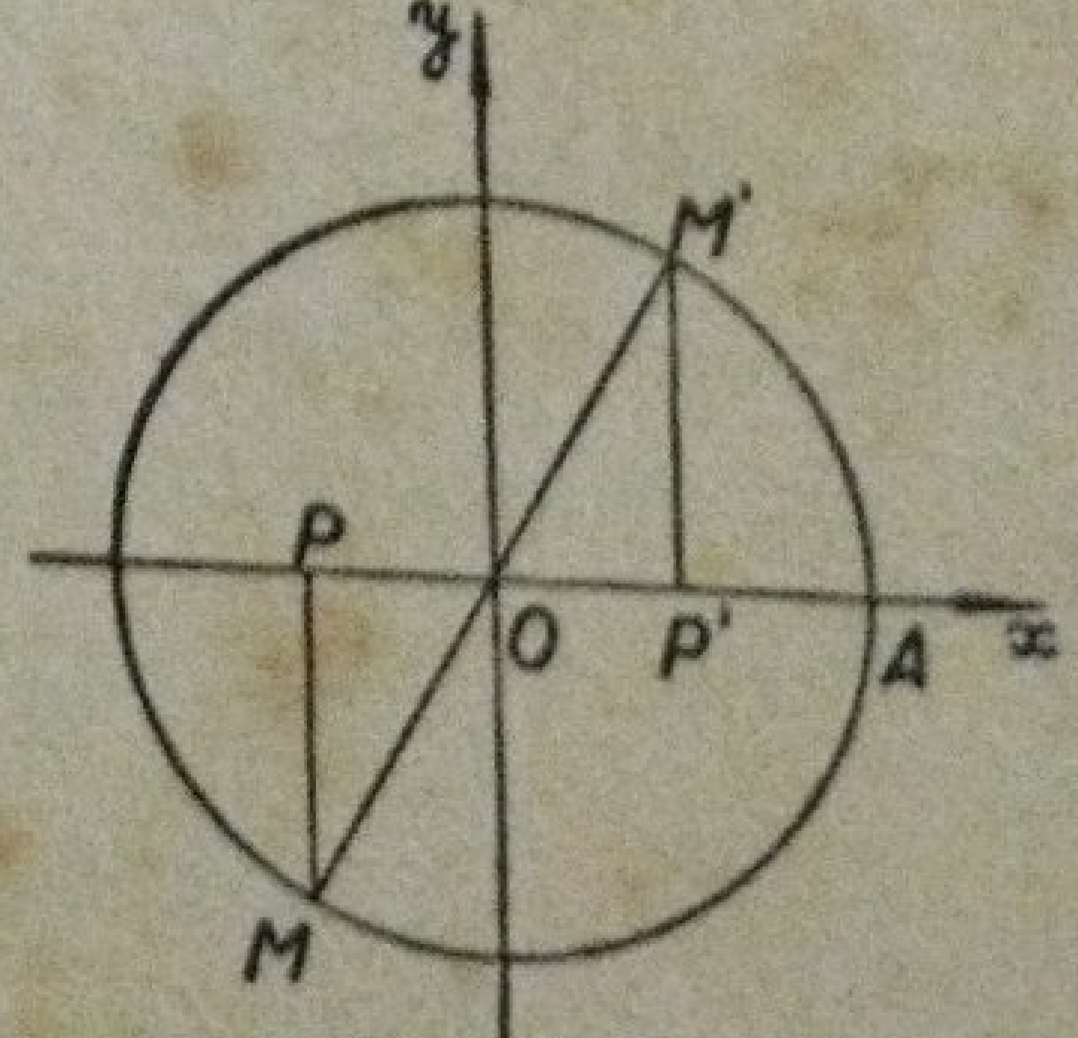

FIG. 76

Como $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ são negativos, θ é um arco $\overset{\frown}{AM}$ do terceiro quadrante. Logo há um arco $\overset{\frown}{AM'}$ do primeiro quadrante (fig. 76), tal que (a menos de 360°)

$$\overset{\frown}{AM} = 180^\circ + \overset{\frown}{AM'}$$

e cujo cosseno e seno são, respectivamente, $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$, Sendo 60° êsse ângulo, obtemos para θ (a menos de 360°)

$$\theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

Podemos, então, escrever

$$-1 - \sqrt{3}i = 2\,(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$$

14. Exercício. *Escrever sob a forma trigonométrica o complexo* $-8 + 8\sqrt{3}i$.

RESOLUÇÃO: Temos $a = -8$ e $b = 8\sqrt{3}$. Portanto

$$\rho = 16 \cos \theta = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

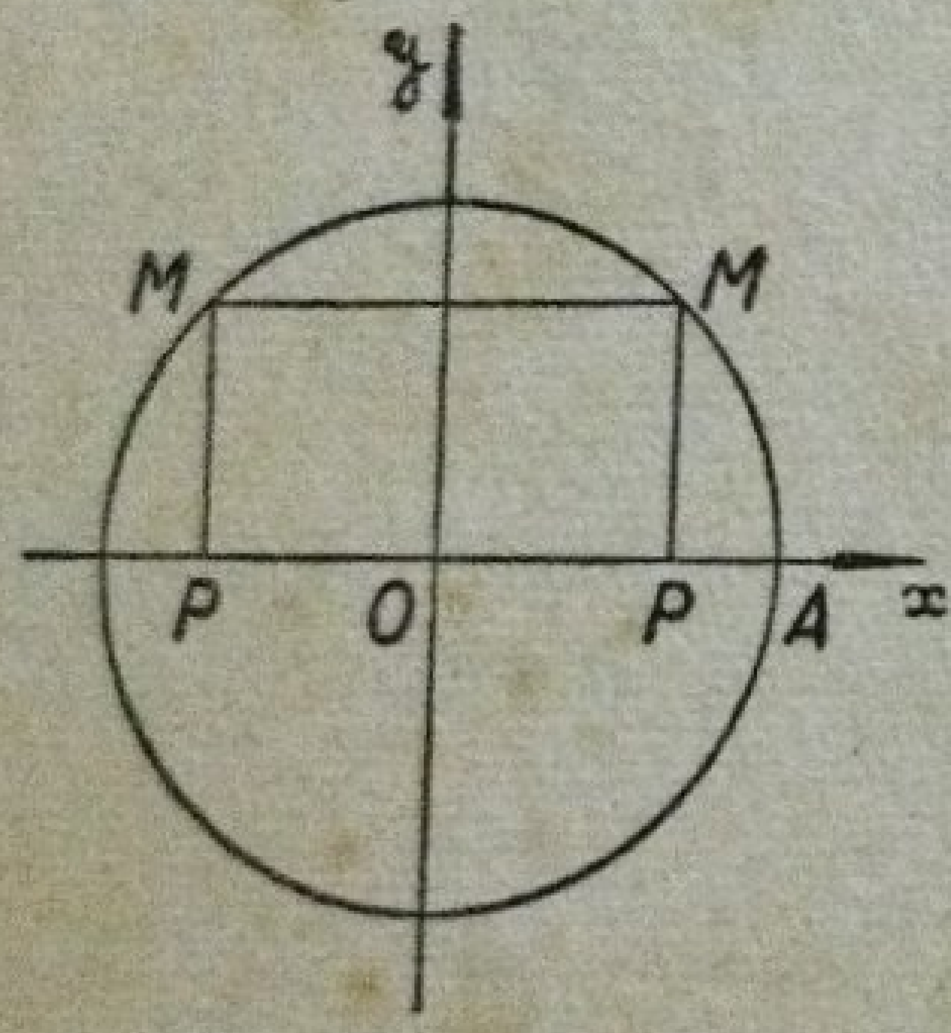

FIG. 77

Concluimos que θ é um arco $\overset{\frown}{AM}$ do segundo quadrante (fig. 77) porque seu cosseno é negativo e seu seno positivo. Logo existe um arco $\overset{\frown}{AM'}$ do primeiro quadrante, a saber, o suplemento de $\overset{\frown}{AM}$ cujo cosseno é $\frac{1}{2}$ e cujo seno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sendo 60° êsse arco, será (a menos de 360°) $\theta = 120^\circ$.

Podemos, então, escrever

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16\,(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$$

15. Produto de complexos. Consideremos os números complexos

$$\begin{aligned} u &= a + bi = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \\ v &= c + di = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \end{aligned} \qquad (10)$$

Efetuando seu produto, obtemos

$$\begin{aligned} P = \rho_1\rho_2\, [&(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + \\ &+ i\,(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)] \end{aligned}$$

ou, utilizando fórmulas da Trigonometria,

$$P = \rho\rho_1 \; [\cos\,(\theta_1+\theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1+\theta_2)] \qquad (11)$$

Fàcilmente se estende êsse resultado ao produto de mais de dois fatôres, de modo que o produto de n complexos

$$\rho_1 \,(\cos\, \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1), \; \ldots . \; \rho_n\,(\cos\, \theta_n + i \text{ sen } \theta_n) \qquad (12)$$

tem para expressão trigonométrica

CONCLUSÃO: *O produto de números complexos tem para módulo o produto dos módulos dêsses números e para argumento a soma de seus argumentos.*

$$\rho_1 \ldots \rho_n\,[\cos\,(\theta_1 + \ldots + \theta_n) + i \text{ sen }(\theta_1 + \ldots + \theta_n)] \qquad (13)$$

Por exemplo, sendo como já vimos,

$$3\sqrt{3} + 3i = 6 \;(\cos\;\; 30^\circ + i \text{ sen }\;\; 30^\circ)$$

$$-1 - \sqrt{3}\,i = 2 \;(\cos\, 240^\circ + i \text{ sen } 240^\circ)$$

o produto dêsses complexos é

$$6 \times 2 \;(\cos\, 270^\circ + i \text{ sen } 270^\circ) = -12i$$

visto que $\quad \cos 270^\circ = 0 \quad$ e $\text{sen } 270^\circ = -1$

16. Quociente de números complexos. Seja

$$\omega = \rho \;(\cos\, \theta + i \text{ sen } \theta) \qquad (14)$$

o quociente da divisão $u \div v$, sendo u e v os números complexos definidos por (10). Como o produto

$$v\omega = \rho\rho_2 \;[\cos\;(\theta+\theta_2) + i \text{ sen }(\theta+\theta_2)]$$

deve ser igual a u, pela definição I do **n.º 2,** devemos ter

$$\rho\rho_2 = \rho_1 \qquad\qquad \theta + \theta_2 = \theta_1$$

donde, respectivamente,

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad\qquad \theta = \theta_1 - \theta_2$$

Conclusão: *O quociente de dois números complexos tem para módulo o quociente dos módulos dêsses números e para argumento a diferença de seus argumentos (a menos de 2π).*

Por exemplo, sendo como já vimos,

$$u = -8 + 8\sqrt{3}\,i = 16\ (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$$

$$v = 3\sqrt{3} + 3i = 6\ (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

o quociente $u \div v$ tem para expressão

$$\frac{16}{6}\ (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = \frac{8}{3}\,i$$

17. Potência de expoente inteiro de um número complexo. Se os n números complexos se tornam iguais a

$$\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

de acôrdo com a expressão (13) de seu produto, podemos escrever

$$P = [\,\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \rho^n\,[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \qquad (15)$$

Essa fórmula é igualmente válida para n inteiro e negativo. De fato, supondo $n = -n'$, sendo n' inteiro e positivo, temos

$$P = [\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = \frac{1}{[\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{n'}} =$$

$$= \frac{1}{\rho^{n'}\,[\cos(n'\theta) + i \operatorname{sen}(n'\theta)]}$$

Multiplicando ambos os têrmos dessa fração por

$$\cos(n'\theta) - i \operatorname{sen}(n'\theta)$$

e observando que

$$\cos^2(n'\theta) + \operatorname{sen}^2(n'\theta) = 1,$$

resulta

$$P = \rho^{-n'}\,[\cos(n'\theta) - i \operatorname{sen}(n'\theta)] =$$

$$= \rho^n\,[\cos(-n\theta) - i \operatorname{sen}(-n\theta)] = \rho^n\,[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

Conclusão: *A potência de grau n (inteiro) de um número complexo tem para módulo a potência de grau n de seu módulo e para argumento n vêzes seu argumento.*

Por exemplo, sendo

$$-1-\sqrt{3}\,i = 2\,(\cos 240^\circ + i \text{ sen } 240^\circ)$$

será

$$(-1-\sqrt{3}\,i)^3 = 2^3\,(\cos 720^\circ + i \text{ sen } 720^\circ) =$$
$$= 8\,(\cos 0 + i \text{ sen } 0) = 8$$

18. Fórmula de Moivre. Da igualdade (15) resulta, cancelando o fator ρ^n, suposto não nulo,

$$(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)^n = \cos(n\theta) + i \text{ sen } (n\,\theta) \qquad (16)$$

fórmula devida a Moivre. Ela define a potência de grau n (inteiro) dos números complexos de módulo 1.

19. Raiz de um número complexo. (*) Seja

$$v = r\,(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha) \qquad (17)$$

a raiz de grau n (inteiro) do número complexo

$$u = \rho\,(\cos\theta + i \text{ sen } \theta) \qquad (18)$$

Sendo, pela definição de raiz, $v^n = u$ e sendo

$$v^n = r^n\,[\cos(n\alpha) + i \text{ sen } (n\alpha)] \qquad (19)$$

a igualdade dos complexos (18) e (19) exige serem $r^n = \rho$ e $n\alpha = \theta$, donde, respectivamente

$$r = |\sqrt[n]{\rho}| \qquad \alpha = \frac{\theta}{n}$$

Como θ é definido a menos de 2π, isto é, é um qualquer dos ângulos $\theta + 2\kappa\pi$ (sendo κ inteiro), a segunda igualdade (20) pode ser escrita com mais precisão

$$\alpha = \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} \qquad (21)$$

(*) Essa operação não é exigida no programa oficial.

e fornece n valores *distintos* para α, os quais podem ser obtidos atribuindo-se, sucessivamente, a κ os n valores $0, 1, 2, \ldots n-1$.

CONCLUSÃO: *A raiz de grau n (inteiro) de um número complexo não nulo $\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ tem n valores distintos, dados pela expressão*

$$|\sqrt[n]{\rho}|\left(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2\kappa\pi}{n}\right) \qquad (22)$$

na qual se faz, sucessivamente, κ *igual a* $0, 1, 2, \ldots \ldots n-1$.

Por exemplo, sendo

$$-8+8\sqrt{3}\,i = 16\,(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$$

as raízes quartas dêsse complexo são dadas pela expressão

$$2\left[\cos\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{4} + i \operatorname{sen}\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{4}\right]$$

ou $$2\,[\cos(30^\circ + 90^\circ\kappa) + i \operatorname{sen}(30^\circ+90^\circ\kappa)]$$

na qual se faz, sucessivamente, $\kappa = 0, 1, 2$ e 3. As raízes são, pois:

Para $\kappa = 0$: $2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i$

Para $\kappa = 1$: $2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = -1 + \sqrt{3}\,i$

Para $\kappa = 2$: $2(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$

Para $\kappa = 3$: $2(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = 1 - \sqrt{3}\,i$

20. Observação. Dos resultados do **n.° 19** se conclui que os pontos representativos das raizes de grau n de um número complexo são, no plano de ARGAND, os vértices de um polígono regular de n lados, cujo centro está na origem e cujo raio é igual ao módulo comum das n raízes (fig. 78).

Por exemplo, os pontos representativos das quatro raizes achadas no exercício anterior são os vértices do quadrado *ABCD* (fig. 79).

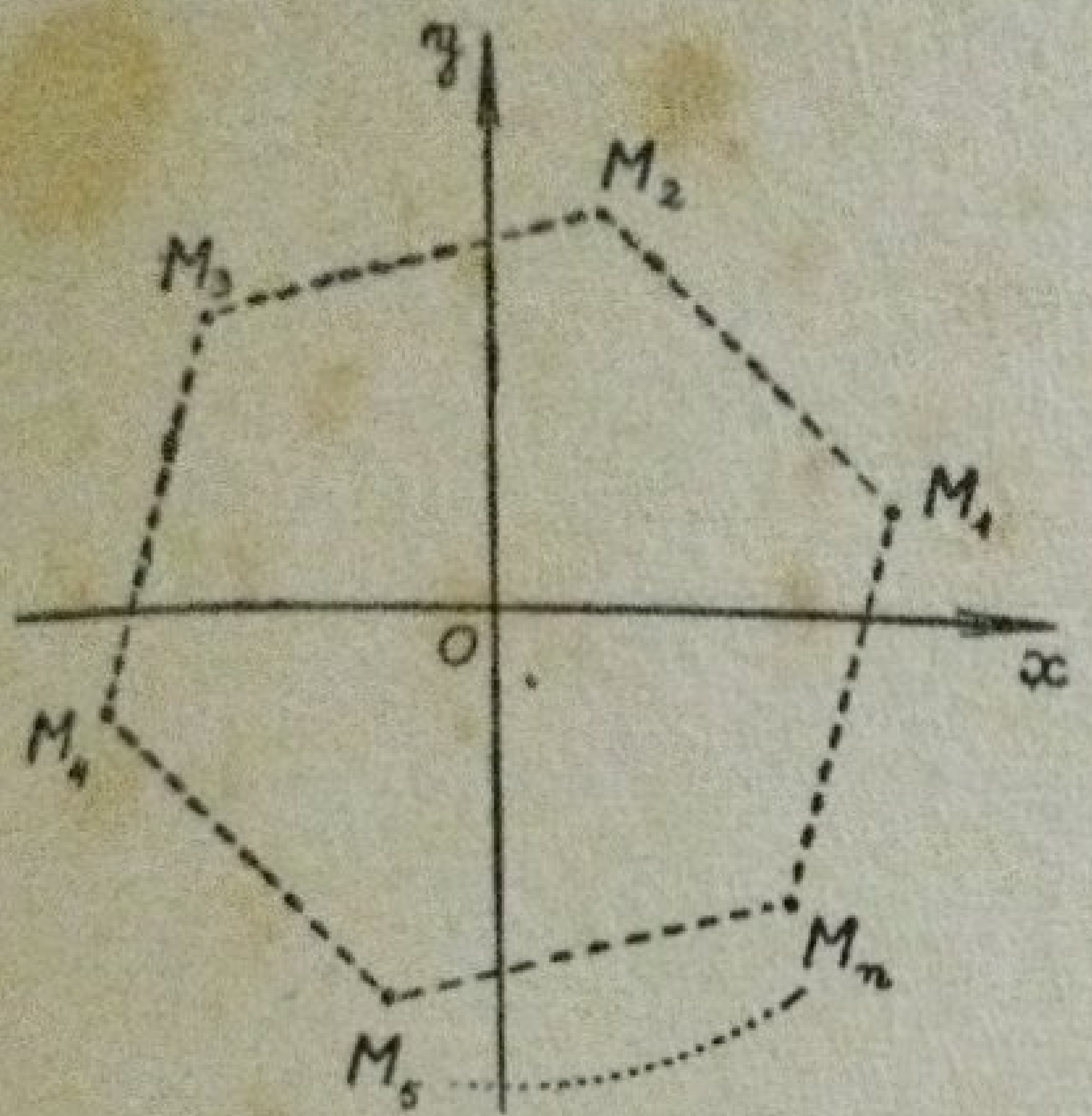

FIG. 78

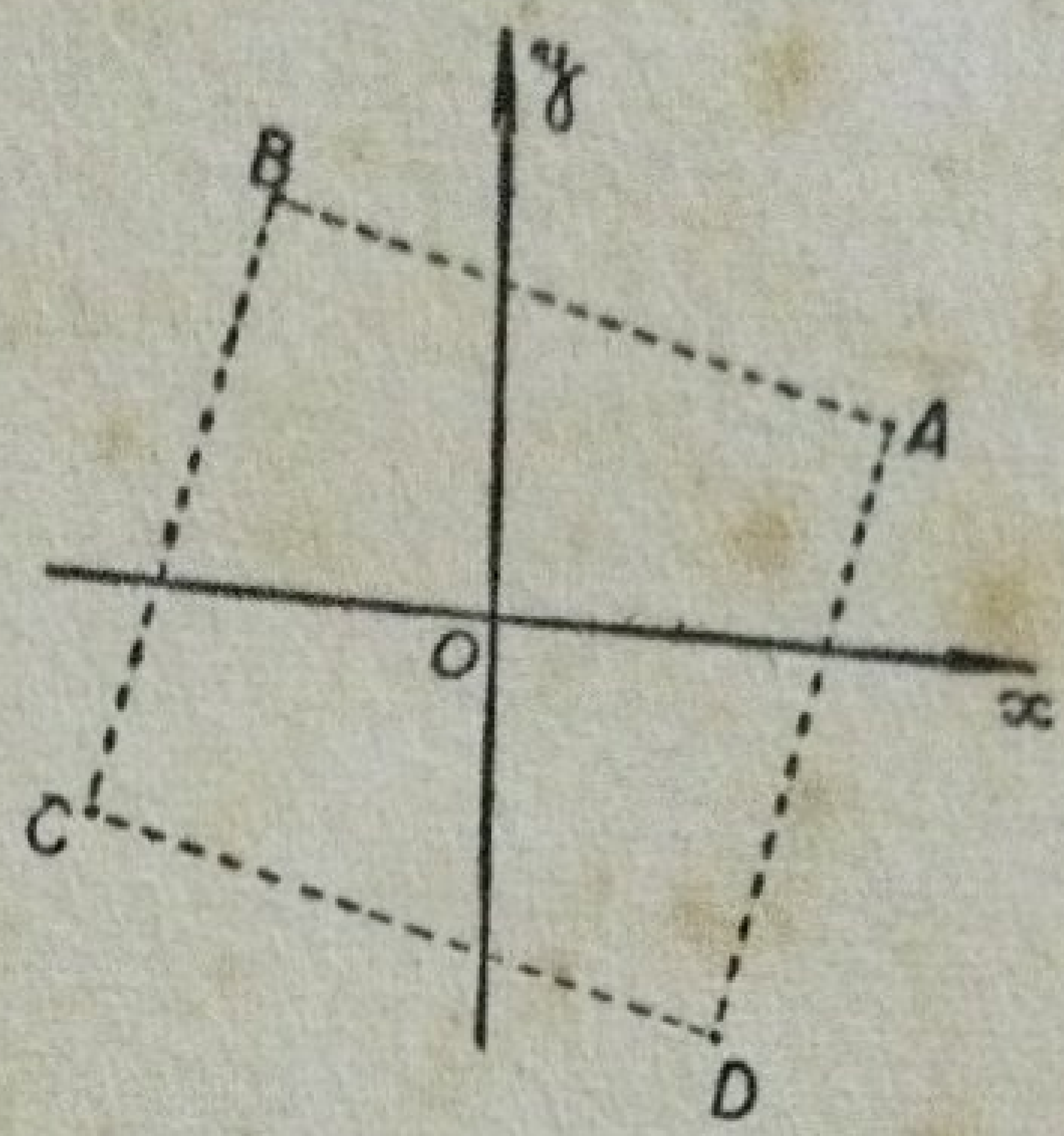

FIG. 79

21. Raízes de grau *n* de um número real. Dado um número real positivo a, cujo módulo é $|a|$ e cujo argumento é côngruo de zero, obtém-se suas raízes de grau n pela fórmula

$$|\sqrt[n]{a}| \left(\cos \frac{2\kappa\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{2\kappa\pi}{n}\right) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots n-1) \quad (23)$$

Dado um número negativo $-a$ $(a > 0)$, cujo módulo é $|a|$ e cujo argumento é côngruo de π, obtém-se suas raízes de grau n pela fórmula

$$|\sqrt[n]{a}| \left(\cos \frac{(2\kappa+1)\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{(2\kappa+1)\pi}{n}\right)$$
$$(\kappa = 0, 1, 2, \ldots n-1) \qquad (24)$$

Em particular, as raízes de grau n da unidade são dadas por

$$\cos \frac{2\kappa\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{2\kappa\pi}{n} \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots n-1) \quad (25)$$

e as raízes de grau n de -1 são dadas por

$$\cos \frac{(2\kappa+1)\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{(2\kappa+1)\pi}{n} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots n-1) \quad (26)$$

Por exemplo, as raízes *cúbicas* da unidade são dadas por

$$\cos\frac{2\kappa\pi}{3} + i\ \text{sen}\,\frac{2\kappa\pi}{3} \qquad (\kappa = 0,\ 1,\ 2)$$

sendo, pois:

$$\kappa = 0 \quad x_1 = \cos 0 + i\ \text{sen}\ 0 = 1$$

$$\kappa = 1 \quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\ \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\ \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\kappa = 2 \quad x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\ \text{sen}\,\frac{4\pi}{3} =$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\ \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

22. Propriedade. Sejam $x_1, x_2, \ldots x_n$ as raízes de grau n da unidade. Seja α uma raiz de grau n de um número complexo u. Demonstremos que os produtos

$$\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \ldots\ \alpha x_n \qquad (27)$$

são as raízes de grau n de u.

De fato, êsses produtos são distintos visto serem distintas as raízes $x_1, \ldots x_n$. Além disso, qualquer que seja o produto (27) escolhido, temos

$$(\alpha x_i)^n = \alpha^n . x_i^n = u \times 1 = u \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

Logo, os produtos (27) são as n raízes de u.

Conclusão: *Sendo α uma qualquer das raizes de grau n de um número complexo u, obtém-se essas raizes multiplicando-se α pelas raízes de grau n da unidade.*

Por exemplo, sendo 2 uma das raízes cúbicas de 8 e sendo, como vimos no **n.º 21,**

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \qquad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

as raízes cúbicas da unidade, as raízes cúbicas de 8 serão

$$z_1 = 2 \qquad z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i \qquad z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$$

23. Equações binômias. Assim se denominam as equações do tipo

$$z^n - a = o \qquad \text{ou} \qquad z^n = a \tag{28}$$

sendo n um número inteiro positivo e a um número complexo (ou real). Resolver a equação (28) é, portanto, achar as n raízes de grau n do número a.

Seja, por exemplo, resolver a equação

$$81\,x^4 + 16 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^4 = -\frac{16}{81}$$

Como a raiz quarta de $\frac{16}{81}$ é $\frac{2}{3}$, as raízes quartas de $-\frac{16}{81}$ são dadas pela expressão geral (24):

$$\frac{2}{3}\left(\cos\frac{(2\kappa+1)\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{(2\kappa+1)\pi}{4}\right) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, 3)$$

Temos, então:

$$\kappa = 0 \quad x_1 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\kappa = 1 \quad x_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\kappa = 2 \quad x_3 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\kappa = 3 \quad x_4 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

24. Equações trinômias. Assim se denominam as equações do tipo

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \qquad (29)$$

onde a, b e c são números reais e n é inteiro e positivo.

Fazendo a substituição

$$x^n = y \qquad (30)$$

a equação (29) torna-se

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (31)$$

Sendo y_1 e y_2 as raízes (reais ou complexas) de (31), resultam, em virtude de (30), as equações binômias

$$x^n = y_1 \qquad\qquad x^n = y_2$$

cada uma das quais dá n raízes. O conjunto dessas $2n$ raízes constitui a solução completa de (29).

Seja, por exemplo, resolver a equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ Fazendo $x^3 = y$, resulta a equação $y^2 - 9y + 8 = 0$, cujas raízes são 8 e 1. Temos, então, as equações binômias $x^3 = 8$ e $x^3 = 1$. As raízes da primeira são as raízes cúbicas de 8, já calculadas no **n.º 22** e as raízes da segunda são as raízes cúbicas da unidade, já calculadas no **n.º 21** As raízes da equação trinômia dada são, pois,

$$1,\ 2,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i,\ -1 \pm \sqrt{3}\ i$$

25. Exercícios.

Determinar as representações trigonométricas dos seguintes números complexos:

1. $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ — *Resp.:* $2\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
2. $\sqrt{3} + i$ — *Resp.:* $2\,(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$
3. $-4\sqrt{3} + 4\,i$ — *Resp.:* $8\,(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$
4. $-5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\,i$ — *Resp.:* $10\,(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$
5. $2 + 2\sqrt{3}\,i$ — *Resp.:* $4\,(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
6. $-8 - 8\sqrt{3}\,i$ — *Resp.:* $16\,(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$
7. $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$ — *Resp.:* $4\,[\cos(-45^\circ) + i \operatorname{sen}(-45^\circ)]$

Calcular os produtos abaixo indicados, utilizando as representações trigonométricas dos fatores:

8. $(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)(-5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\,i)$

Resp.: $-20i$

9. $(\sqrt{3} + i)(-4\sqrt{3} + 4i)(2 + 2\sqrt{3}\,i)$

Resp.: $-32 - 32\sqrt{3}\,i$

10. $(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)(\sqrt{3} + i)(-5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\,i)(2 + 2\sqrt{3}\,i)$

Resp.: 160

Calcular os quocientes abaixo indicados, utilizando as representações trigonométricas dos números complexos:

11. $(-4\sqrt{3} + 4i) \div (\sqrt{3} + i)$

Resp.: $-2 + 2\sqrt{3}\,i$

12. $(-4\sqrt{3} + 4i) \div (2 + 2\sqrt{3}\,i)$

Resp.: $2i$

13. $(2 + 2\sqrt{3}\,i) \div (\sqrt{3} + i)$ *Resp.:* $\sqrt{3} + i$

Calcular as potências abaixo indicadas, utilizando as representações trigonométricas dos números complexos:

14. $(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^4$ *Resp.:* -16

15. $(\sqrt{3} + i)^5$ *Resp.:* $-16\sqrt{3} + 16i$

16. $(2 + 2\sqrt{3}\,i)^6$ *Resp.:* 4096

17. $(-4\sqrt{3} + 4i)^3$ *Resp.:* $512i$

18. Calcular as raízes quartas do complexo $-8 - 8\sqrt{3}\,i$.

Resp.: $\pm(1 + \sqrt{3}\,i)$ e $\pm(\sqrt{3} - i)$

19. Calcular as raízes cúbicas de -1.

Resp.: $-1,\ \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

20. Calcular as raízes quartas de 1.

Resp.: $\pm 1,\ \pm i$

21. Calcular as raízes quartas de -1.

Resp.: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i$

22. Calcular as raízes sextas da unidade.

Resp.: $\pm 1, \ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

23. Achar as raízes da equação $27x^3 - 8 = 0$.

Resp.: $\frac{2}{3}, - \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} i$

24. Achar as raizes da equação $x^6 + 64 = 0$.

Resp.: $\pm 2i, \ \sqrt{3} \pm i, \ - \sqrt{3} \pm i$

25. Achar as raizes da equação $x^3 + 27\,i = 0$.

Resp: $3i, \ \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$

26. Achar as raizes da equação $x^4 + 16 = 0$.

Resp.: $\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i, \ - \sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i$

27. Achar as raizes da equação $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$.

Resp: $-2, \ 1 \pm \sqrt{3}\, i$ (raizes duplas)

28. Achar as raizes da equação $x^8 - 14x^4 + 48 = 0$.

(*Escola Nacional de Engenharia, Concurso de Habilitação*, 1941)

Resp.: $\pm \sqrt[4]{8}, \ \pm \sqrt[4]{6}, \ \pm \sqrt[4]{8}\, i, \ \pm \sqrt[4]{6}\, i$

29. Calcular sen $5a$ e cos $5a$ utilizando a fórmula de Moivre.

Resp.: $\cos 5a = \cos^5 a - 10 \cos^3 a \,.\, \text{sen}^2 a + 5 \cos a \,.\, \text{sen}^4 a$

$\text{sen}\, 5a = 5 \cos^4 a . \text{sen}\, a - 10 \cos^2 a \,.\, \text{sen}^3 a + 5\, \text{sen}^5 a$

Nota: Sendo $(\cos a + i \,\text{sen}\, a)^5 = \cos 5a + i \,\text{sen}\, 5a$ desenvolver a potência do primeiro membro, simplificar o resultado, atendendo aos valores das potências de i e aplicar a definição do n.º 2, I

Solução do Exercício n.º 3 do Cap. VIII:

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$-$	∞		$-$		∞	$-$	
y	0	$\searrow$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	∞	$\searrow$	0
					inflex.				

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

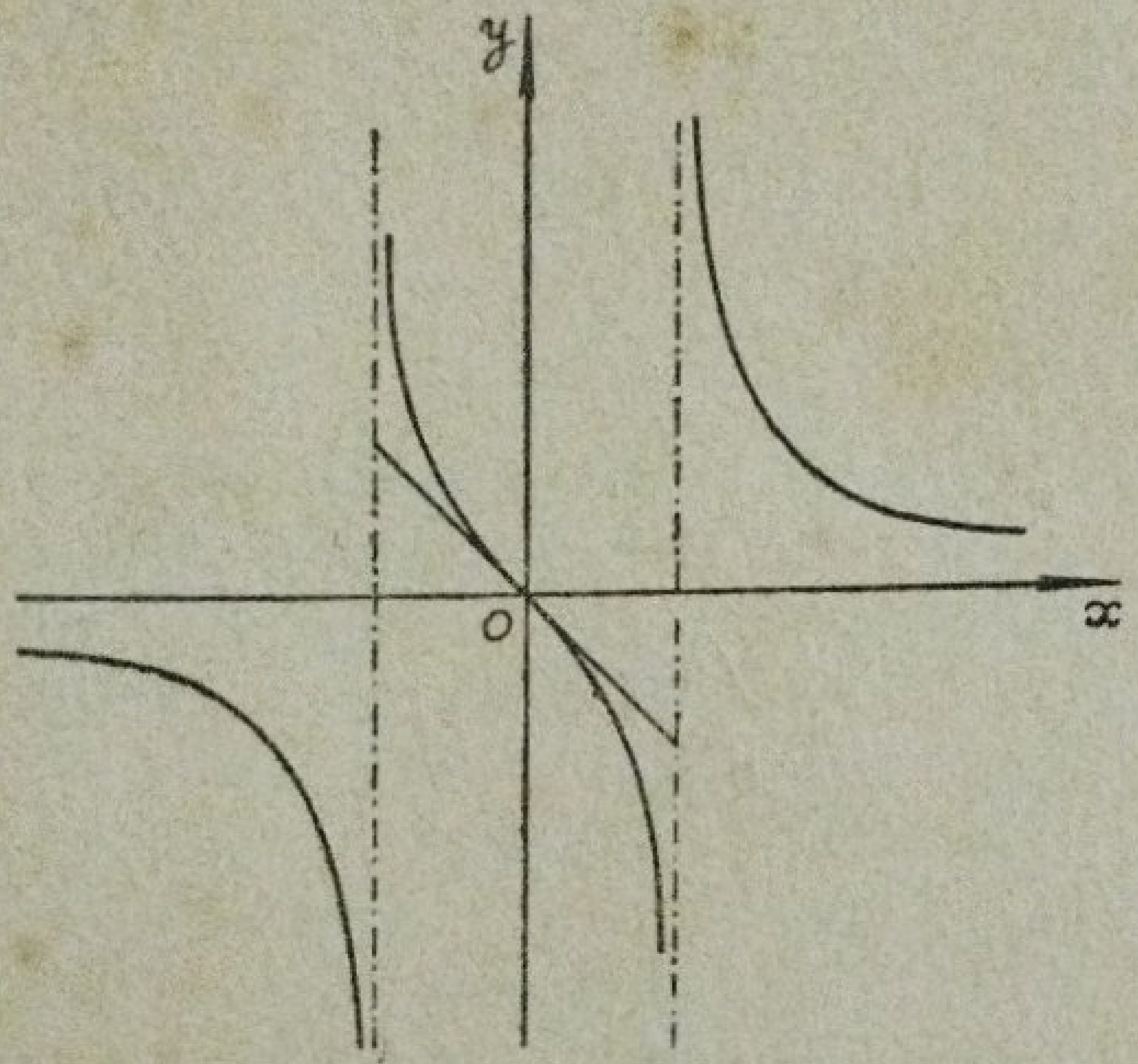

FIG. 80

CAPÍTULO XII

POLINÔMIOS COM UMA VARIÁVEL

1. Noções sôbre funções de variável complexa. Consideremos a variável complexa $z = x + yi$, sendo x e y variáveis reais. Seja Z seu domínio no plano de ARGAND (fig. 81). Se a cada valor z_1 de Z se pode fazer corresponder um e apenas um valor w de uma outra variável complexa $w = u + vi$, cujo domínio no plano de ARGAND é W, diz-se que w é função unívoca de z e escreve-se

$$w = f(z) \tag{1}$$

Estendem-se às funções de variável complexa as noções fundamentais sôbre funções de variável real, que vimos anteriormente. Destaquemos apenas as que serão úteis à compreensão dêsse capítulo e dos seguintes.

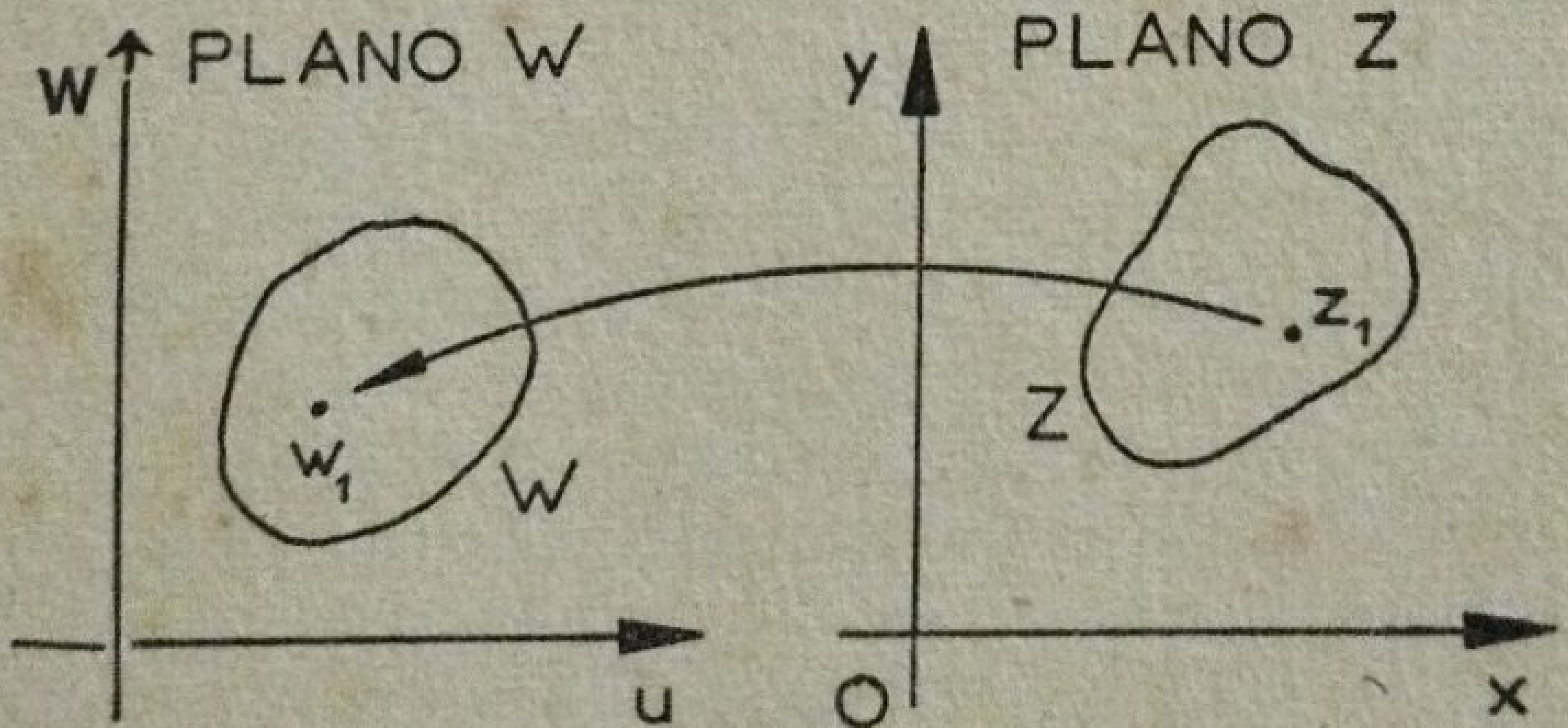

FIG. 81

NOÇÃO DE LIMITE: Diz-se que a função (1) tem o limite finito w_1 (*) quando z tende para o limite finito z_1 (fig. 81), se dado um número positivo e arbitrário ε, existe um entôrno Z de z_1 tal que, para qualquer valor de z dêsse entôrno se tem $|f(z) - w_1| < \varepsilon$.

(*) Um número complexo $w = u + vi$ é *finito* se seu módulo $|\sqrt{u^2 + v^2}|$ é *finito* isto é, se e sòmente se u e v são números (reais) *finitos*.

NOÇÃO DE CONTINUIDADE: Diz-se que a função (1) é contínua no ponto z_1, se $w_1 = f(z_1)$ é finito e se $\lim\limits_{z \to z_1} f(z) = f(z_1)$.

NOÇÃO DERIVADA: Se $f(z)$ é contínua no ponto z_1 e se existe o limite finito

$$\lim_{z \to z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}$$

êsse limite é a derivada de $f(z)$ no ponto z_1 e representa-se por $f'(z_1)$.

Uma função é *monógena* num ponto z_1 de seu domínio se admite derivada única e finita nêsse ponto. Uma função monógena de z em todos os pontos de seu domínio diz-se *holomorfa* nêsse domínio. Sua derivada é, então, uma função $f'(z)$ nêsse domínio.

Às funções holomorfas aplicam-se as mesmas regras formais de derivação, que estudamos para as funções de variável real. Assim o polinômio

$$P(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m$$

em para derivada

$$P'(z) = m a_0 z^{m-1} + (m - 1) a_1 z^{m-2} + \dots + a_{m-1}$$

Neste capítulo e nos seguintes representaremos por $P(z)$ um polinômio inteiro e racional, função de uma variável complexa z e por $P(x)$ um polinômio inteiro e racional, função de uma variável real x. Como, porém, o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos **(Cap. XI n.º 1)** z e $P(z)$ podem eventualmente assumir valores reais. Por exemplo, para $z = 2 + 3i$, o polinômio $z^2 - 4z + 15$ assume o valor real 2. Então, por *módulo* de z ou de $P(z)$, que se representa, respectivamente, por $|z|$ ou $|P(z)|$, entende-se o módulo do número complexo (ou real) z ou $P(z)$.

2. Polinômios identicamente nulos. Diz-se que um polinômio $P(z)$ é *idênticamente nulo* e escreve-se $P(z) \equiv 0$, se êle é nulo para qualquer valor atribuido a z.

Dado um polinômio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \tag{2}$$

se $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, $P(z)$ será nulo para qualquer valor de z, isto é, $P(z)$ será idênticamente nulo.

CONCLUSÃO: *É condição suficiente para que um polinômio seja idênticamente nulo que sejam nulos os coeficientes de todos os seus têrmos.*

3. Teorema. *Todo polinômio racional e inteiro em z, do grau n, que se anula para n + 1 valores distintos de z, é idênticamente nulo.*

Suponhamos que o polinômio (2) se anule para $n + 1$ valores distintos $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$ da variável z. Teremos, então,

$$\begin{array}{ll} a_0z_1^n + a_1z_1^{n-1} + \dots + a_{n-1}z_1 + a_n = 0 & \\ a_0z_2^n + a_1z_2^{n-1} + \dots + a_{n-1}z_2 + a_n = 0 & (3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_0z_{n+1}^n + a_1z_{n+1}^{n-1} + \dots + a_{n-1}z_{n+1} + a_n = 0 & \end{array}$$

As $n + 1$ equações (3), em relação às $n + 1$ quantidades $a_0, a_1, \dots a_n$ constituem um sistema linear e homogêneo. O determinante de seus coeficientes é o determinante de VANDERMONDE

$$\triangle = \begin{vmatrix} z_1^n & z_1^{n-1} & \dots & z_1 & 1 \\ z_2^n & z_2^{n-1} & \dots & z_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n+1}^n & z_{n+1}^{n-1} & \dots & z_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

cujo valor é (*)

$$\triangle = (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)\dots(z_{n+1} - z_1)(z_3 - z_2)\dots(z_{n+1} - z_2)\dots(z_{n+1} - z_n)$$

Como $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$, por hipótese são distintos, $\triangle$ é diferente de zero e, portanto, o sistema (3) só se verifica se (**)

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$$

de que resulta ser o polinômio (2) idênticamente nulo.

(*) Vol. II, Cap. III, n.º 46, Ex. 20.
(**) Vol. II, Cap. IV, n.º 11.

4. Teorema. *A condição necessária e suficiente para que um polinomio racional e inteiro em z, que não contenha têrmos semelhantes, seja idênticamente nulo é que os coeficientes de todos os seus têrmos sejam nulos.*

Demonstração: Já vimos (**n.° 2**) que a condição é *suficiente*. Demonstremos, agora, que ela é *necessária*. De fato, se um polinômio (2) é idênticamente nulo, êle se anula para $n + 1$ valores distintos de n, arbitràriamente escolhidos, o que exige $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ (**n.° 3**).

5. Polinômios idênticos. Diz-se que dois polinômios $P(z)$ e $P_1(z)$ são *idênticos* ou *idênticamente iguais* e escreve-se

$$P_1(z) \equiv P_2(z) \tag{4}$$

se êles são iguais para qualquer valor atribuido a z. Como de (4) resulta

$$P_1(z) - P_2(z) \equiv 0 \tag{5}$$

conclui-se que, se dois polinômios são idênticos, sua diferença é idênticamente nula.

6. Teorema. *A condição necessária e suficiente para que dois polinômios inteiros em z (que não contenham têrmos semelhantes) sejam idênticos é que sejam do mesmo grau e os coeficientes de seus têrmos de mesmo grau sejam iguais.*

Demonstração: A condição é evidentemente suficiente. Demonstremos que ela é necessária. Sejam

$$P(z) = a_0 z^{n+p} + a_1 z^{n+p-1} + \ldots + a_{p-1} z^{n+1} + a_p z^n +$$
$$+ a_{p+1} z^{n-1} + \ldots + a_{n+p-1} z + a_{n+p}$$
$$P_1(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n$$

dois polinômios idênticos, dos graus $n + p$ e n, respectivamente. Por definição, sua diferença

$$P(z) - P_1(z) \equiv a_0\, z^{n+p} + a_1\, z^{n+p-1} + \ldots + a_{p-1}\, z^{n+1} +$$
$$(a_p - b_0)\, z^n + (a_{p+1} - b_1)\, z^{n-1} +$$
$$+ \ldots + (a_{n+p-1} - b_{n-1})\, z + a_{n+p} - b_n$$

deve ser idênticamente nula. Então, pelo teorema do (**n.° 4**) devemos ter

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 0 \ \ldots \ a_{p-1} = 0 \qquad (6)$$

$$a_p = b_0 \quad a_{p+1} = b_1 \ \ldots \ a_{n+p-1} = b_{n-1} \quad a_{n+p} = b_n \quad (7)$$

As condições (6) indicam que $P(z)$ e $P_1(z)$ são do mesmo grau e as condições (7) que são iguais os coeficientes dos têrmos de mesmo grau dêsses polinômios.

7, Método dos coeficientes a determinar. Nos princípios sôbre identidades de polinômios, que acabamos de ver, baseia-se um método de grande utilidade prática, o *método dos coeficientes a determinar*, de que daremos umas aplicações a seguir.

8. Cálculo do quociente e do resto da divisão de dois polinômios. Sejam $P_{n+r}(z)$ e $P_r(z)$ dois polinômios inteiros em z, dos graus $n + r$ e r, respectivamente. Então, o quociente da divisão do primeiro pelo segundo é um polinômio $P_n(z)$ do grau n

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (8)$$

e o resto dessa divisão é um polinômio $P_{r-1}(z)$, de grau, no máximo, igual a $r - 1$

$$P_{r-1}(z) = b_0 z^{r-1} + b_1 z^{r-2} + \ldots + b_{r-1} \qquad (9)$$

podendo, portanto, ser nulos alguns ou todos os coeficientes $b_0, b_1, \ldots b_{r-1}$.

Em virtude da definição de divisão, devemos ter

$$P_{n+r}(z) \equiv P_r(z) \,.\, P_n(z) + P_{r-1}(z) \qquad (10)$$

Efetuando as operações indicadas no segundo membro de (10) e reduzindo os têrmos semelhantes, obtemos um polinômio do grau $n + r$, que é idêntico a $P_{n+r}(z)$. Igualando, então, os coeficientes de seus têrmos de mesmo grau (**n.º 6**), obtemos um sistema de $n + r + 1$ equações com as $n + r + 1$ incógnitas

$$a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_{r-1}$$

cujos valores se calculam. Obtém-se, assim, o quociente (8) e o resto (9) da divisão indicada.

Seja, por exemplo, calcular o quociente e o resto da divisão

$$(2z^4 + 20z + 30) \div (z^2 - 3z + 4)$$

Sejam $az^2 + bz + c$ e $mz + p$, respectivamente, o quociente e o resto dessa divisão. Então, devemos ter

$$2z^4 + 20z + 30 \equiv (z^2 - 3z+4) \ (az^2 + bz+c) + mz + p$$

ou, efetuando as operações do segundo membro.

$$2z^4 + 20z + 30 \equiv az^4 + (b - a)z^3 + (4a - 3b + c)z^2 + \\ + (48 - 3c+m)z + (4c + p)$$

Igualando os coeficientes do mesmo grau, obtemos o sistema de equações

$$a = 2 \qquad b - 3a = 0 \qquad 4a - 3b + c = 0$$
$$4b - 3c + m = 20 \qquad 4c + p = 30$$

cuja solução é $a = 2$, $b = 6$, $c = 10$, $m = 26$, $p = -10$. Então, o quociente e o resto procurados são, respectivamente,

$$2z^2 + 6z + 10 \quad \text{e} \quad 26z - 10$$

9. Decomposição de uma fração racional. Consideremos a fração $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios inteiros e racionais em z, sendo $P(z)$ de grau inferior a $Q(z)$. Demonstra-se que, se $Q(z)$ pode ser decomposto num produto de fatôres do primeiro grau, a fração acima pode ser decomposta numa soma de frações, cujos denominadores são êsses fatôres do primeiro grau e cujos numeradores são constantes. Essas constantes podem ser calculadas pelo método dos coeficientes a determinar.

Seja, por exemplo, decompor a fração $\dfrac{8}{z^3 - 4z}$. Como $z^3 - 4z \equiv z(z+2) \ (z - 2)$, podemos escrever

$$\frac{8}{z^3 - 4z} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z + 2} + \frac{c}{z - 2}$$

ou

$$\frac{8}{z^3 - 4z} = \frac{(a+b+c) \ z^2 - \ (2b - 2c)z - 4a}{z^3 - 4z}$$

Como os numeradores devem ser idênticos, temos pela condição de identidade (**n.° 6**)

$$a + b + c = 0 \qquad 2b - 2c = 0 \qquad -4a = 8$$

donde resultam $a = -2$, $b = 1$ e $c = 1$. Logo, a decomposição é

$$\frac{8}{z^3 - 4z} = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-2}$$

10. Condições de divisibilidade. Vamos esclarecer com um exemplo a aplicação do método dos coeficientes a determinar ao estabelecimento de condições de divisibilidade.

Determinemos a condição para que o trinômio ax^2+bx+c seja divisível pelo binômio $mx + n$. Seja $\alpha x + \beta$ o quociente dessa divisão (exata). Devemos ter, então,

$$ax^2 + bx + c \equiv (mx+n)\ (\alpha x + \beta)$$

ou

$$ax^2 + bx + c \equiv m\alpha x^2 + (m\beta+n\alpha)x + n\beta$$

De acôrdo com a condição de identidade (**n.° 6**), temos

$$m\alpha = a \qquad m\beta + n\alpha = b \qquad n\beta = c$$

Eliminando α e β entre essas três igualdades, obtemos a condição procurada

$$m^2c + n^2a = bmn$$

11. Divisão por $x - a$. Cálculo do resto. Seja $P(x)$ um polinômio inteiro e racional em x, sendo x uma variável real. Seja R o resto de sua divisão por $x - a$, sendo a um número real. Representando por $Q(x)$ o quociente dessa divisão, devemos ter a identidade

$$P(x) = (x - a)\ Q(x) + R$$

Fazendo $x = a$, obtemos $P(a) = R$.

Conclusão: *O resto da divisão de um polinomio inteiro e racional em x por $x - a$ é o valor numérico dêsse polinomio para $x = a$.*

Por exemplo, o resto da divisão de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 3$ por $x - 2$ é $P(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 3 = 3$.

12. Observação. Na demonstração anterior a é um real, *positivo* ou *negativo*. Seja, por exemplo, dividir o polinômio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 6$ por $x + 1$. Pondo o divisor sob a forma $x - (-1)$, podemos utilizar o resultado anterior, considerando $a = -1$. Então, o resto dessa divisão é

$$P(-1) = 2(-1)^4 - 3(-1)^3 - (-1) - 6 = 0$$

13. Regra de Ruffini. Consideremos o polinômio

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (11)$$

e sejam

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1} \quad (12)$$

e R, respectivamente, o quociente e o resto de sua divisão por $x - a$. Devemos ter, então,

$$P(x) \equiv (x - a)\ Q(x) + R \quad (13)$$

Substituindo em (13) $P(x)$ e $Q(x)$ por suas expressões anteriores e efetuando as operações do segundo membro, obtemos

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + \\ + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} - ab_{n-2})x + R - ab_{n-1}$$

De acôrdo com a condição de identidade (**n.° 6**), devemos ter

$$b_0 = a_0 \qquad b_1 - ab_0 = a_1 \qquad b_2 - ab_1 = a_2 \ \dots$$
$$\dots\ b_{n-1} - ab_{n-2} = a_{n-1} \qquad R - ab_{n-1} = a_n$$

donde tiramos, respectivamente,

$$b_0 = a_0 \qquad b_1 = ab_0 + a_1 \qquad b_2 = ab_1 + a_2 \ \dots$$
$$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1} \qquad R = ab_{n-1} + a_n$$

Êstes resultados constituem a seguinte *Regra de* Ruffini para o cálculo do quociente e do resto da divisão por $x - a$ de um polinômio inteiro e racional em x, completo e ordenado segundo as potências decrescentes de x:

I. *O coeficiente do primeiro têrmo do quociente é igual ao coeficiente do primeiro têrmo do dividendo.*

II. *Obtém-se o coeficiente de cada têrmo do quociente, a partir do segundo, somando-se o coeficiente do têrmo de mesma ordem do dividendo ao produto de a pelo coeficiente do têrmo anterior do quociente.*

III. *Obtém-se o resto da divisão somando-se o têrmo de grau zero do dividendo ao produto de* a *pelo têrmo de grau zero do quociente.*

Na prática adota-se um dispositivo de cálculo como será visto no exercício seguinte. Seja calcular o quociente e o resto da divisão de $3x^4 - 12x^2 + 5x - 10$ por $x - 2$. Sendo 3, 0 (coeficiente de x^3), -12, 5 e -10 os coeficientes do dividendo ordenado, e sendo 3 o primeiro coeficiente do quociente, os demais se calculam como se vê abaixo e à esquerda, segundo o dispositivo prático à direita:

CÁLCULOS

2.º coeficiente: $2 \times 3 + 0 = 6$
3.º coeficiente: $2 \times 6 - 12 = 0$
4.º coeficiente: $2 \times 0 + 5 = 5$
Resto: $2 \times 5 - 10 = 0$

DISPOSITIVO PRÁTICO

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & 0 & -12 & 5 & -10 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 0 & 5 & \underline{|\;0} : \text{Resto} \end{array}$$

O quociente é, pois, $3x^3 + 6x^2 + 5$ e o resto é 0 (a divisão é exata).

14. Observação. A regra do **n.º 13** aplica-se, ainda, ao caso da divisão por $x - a$, quando a é negativo, bastando utilizar o recurso indicado no **n. 12.** Seja, por exemplo, dividir $5x^4 + 10x^3 - 3x - 4$ por $x + 2$. Sendo o divisor igual a $x - (-2)$, podemos aplicar a regra anterior, fazendo $a = -2$. Obtemos:

CÁLCULOS DOS COEFICIENTES DO QUOCIENTE

Primeiro: 5
Segundo: $-2 \times 5 + 10 = 0$
Terceiro: $-2 \times 0 + 0 = 0$
Quarto: $-2 \times 0 - 3 = -3$
Resto: $-2(-3) - 4 = 2$

DISPOSITIVO PRÁTICO

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & 10 & 0 & -3 & -4 \\ \hline -2 & 5 & 0 & 0 & -3 & \underline{|\;2} : \text{Resto} \end{array}$$

Quociente: $5x^3 - 3$
Resto: 2

15. Divisão por $bx - a$. Sejam $Q(x)$ e R, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $bx - a$. Temos, pois, a identidade

$$P(x) \equiv (bx - a)\, Q(x) + R \qquad (14)$$

Fazendo $x = \frac{a}{b}$, obtemos

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = R \tag{15}$$

Conclusão: *O resto da divisão $P(x) \div (bx - a)$ é o valor numérico $P\left(\frac{a}{b}\right)$.*

Escrevendo a identidade (14) sob a forma

$$P(x) \equiv \left(x - \frac{a}{b}\right)[bQ(x)] + R$$

concluimos que, aplicando a regra de Ruffini para a divisão $P(x) \div \left(x - \frac{a}{b}\right)$ e dividindo o quociente achado por b, obtemos o quociente procurado.

Seja, por exemplo, dividir $P(x) \equiv 4x^3 - 6x^2 + 2x - 3$ por $2x - 3$. De acôrdo com o resultado (15), o resto dessa divisão é

$$R = 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{2} - 3 = 0$$

Calculando, pela regra de Ruffini, o quociente da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$, obtemos, utilizando o dispositivo prático:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -6 & +2 & -3 \\ \hline \frac{3}{2} & 4 & 0 & +2 & \underline{|0} : \text{Resto} \end{array}$$

Dividindo por 2 os coeficientes 4, 0 e 2 achados, obtemos, respectivamente, 2, 0 e 1. O quociente pedido é, pois, $2x^2 + 1$.

Observemos que, se a é negativo, utiliza-se o recurso indicado no **n.º 14.**

16. Fórmula de Taylor (*) para os polinômios. Consideremos o polinômio

(*) Brook Taylor, matemático inglês (1685-1731).

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z + a_n$$

Substituamos nêle z por $z + h$ sendo h um número complexo (em particular um número real). Obtemos

$$P(z+h) \equiv a_0(z+h)^n + a_1(z+h)^{n-1} + \dots + \\ + a_{n-2}(z+h)^2 + a_{n-1}(z+h) + a_n \qquad (16)$$

Desenvolvendo as potências indicadas dos binômios e ordenando o polinômio resultante em relação a h, obtemos

$$P(z+h) \equiv (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n) + \\ + h\left[n a_0 z^{n-1} + (n-1)\, a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}\right] + \\ + \frac{h^2}{2!}\left[n(n-1) a_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 z^{n-3} + \dots + 2a_{n-2}\right] + \\ + \dots + \frac{h^n}{n!}\left[n(n-1)(n-2) \;\dots\; 3.2.1.a_0\right]$$

Observando que, de acôrdo com o que foi dito no **n.º 1**, as derivadas sucessivas de $P(z)$ são

$$P'(z) \equiv n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + 2a_{n-2} z + a_{n-1}$$
$$P''(z) \equiv n(n-1) a_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 z^{n-3} + \dots + 2a_{n-2}$$

. . . .

$$P^{(n-1)}(z) \equiv n(n-1) \dots 3.2.1.a_0 z + (n-1)(n-2) \dots 3.2.1.a_1$$
$$P^{(n)}(z) \equiv n(n-1) \dots 3.2.1\, a_0$$

a fórmula anterior fica

$$P(z+h) \equiv P(z) + \frac{h}{1!} P'(z) + \frac{h^2}{2!} P''(z) + \\ + \dots + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(z) \qquad (17)$$

Como a expressão (16) de $P(z+h)$ não se altera permutando-se z e h, a fórmula (8) pode ser assim apresentada

$$P(z+h) \equiv P(h) + \frac{z}{1!} P'(h) + \frac{z^2}{2!} P''(h) + \\ + \dots + \frac{z^n}{n!} P^{(n)}(h) \qquad (18)$$

Substituindo, na fórmula anterior $z + h$ por z e, portanto, z por $z - h$, fica, ainda,

$$P(z) \equiv P(h) + \frac{z-h}{1!} P'(h) + \frac{(z-h)^2}{2!} P''(h) + \\ + \ldots + \frac{(z-h)^n}{n!} P^{(n)}(h) \qquad (19)$$

Os desenvolvimentos (18) e (19) obtém-se fàcilmente pelo algoritmo indicado no parágrafo seguinte.

17. Algoritmo de Ruffini-Horner. Consideremos o polinômio do grau n

$$P\ (x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (20)$$

Dividindo êsse polinômio por $x - h$, encontramos um quociente $P_{n-1}(x)$ do grau $n - 1$ e um resto R_n. Dividindo $P_{n-1}(x)$ por $x - h$, obtemos um quociente $P_{n-2}(x)$ do grau $n - 2$ e um resto R_{n-1}. Prosseguindo dêsse modo, encontramos sucessivamente quocientes $P_{n-3}(x), \ldots P_2(x)$ e $P_1(x)$, sendo $P_1(x)$ do 1.° grau, e restos $R_{n-2}, \ldots R_3$ e R_2. Dividindo, finalmente, $P_1(x)$ por $x - h$, obtemos um quociente constante que, pela regra de Ruffini, é o coeficiente a_0 de x^n no polinômio (20). Temos, então, as identidades

$$\begin{aligned} P\ (x) &\equiv (x-h)\, P_{n-1}(x) + R_n \\ P_{n-1}(x) &\equiv (x-h)\, P_{n-2}(x) + \mathrm{R}_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_3(x) &\equiv (x-h)\, P_2(x) + R_3 \\ P_2(x) &\equiv (x-h)\, P_1(x) + R_2 \\ P_1(x) &\equiv (x-h)\, a_0 + R_1 \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $P_1(x)$ na de $P_2(x)$, a seguir, a de $P_2(x)$ na de $P_3(x)$ e assim por diante, obteremos para expressão final de $P(x)$

$$P\ (x) \equiv R_n + (x-h)\ R_{n-1} + (x-h)^2\ R_{n-2} + \ldots + \\ (x-h)^{n-1}R_1 + (x-h)^n a^{\circ} \qquad (21)$$

Desenvolvendo $P(x)$ pela fórmula de TAYLOR (n.º 16) obtemos

$$P(x) \equiv P(h) + \frac{x-h}{1!} P'(h) + \frac{(x-h)^2}{2!} P''(h) + \ldots + \\ + \frac{(x-h)^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(h) + \frac{(x-h)^n}{n!} P^{(n)}(h) \quad (22)$$

Como (21) e (22) são polinômios idênticos, devemos ter

$$P(h) = R_n, \qquad \frac{P'(h)}{1!} = R_{n-1}, \qquad \frac{P''(h)}{2!} = R_{n-2}, \ \ldots \\ \ldots \frac{P^{(n-1)}(h)}{(n-1)!} = R_1, \qquad \frac{P^{(n)}(h)}{n!} = a_0 \quad (23)$$

Se, em (21), substituirmos $x-h$ por x e, portanto, x por $x+h$, teremos

$$P(x+h) \equiv R_n + R_{n-1}x + R_{n-2}\, x^2 + \ldots \\ + R_1 x^{n-1} + a_0 x^n \quad (24)$$

Ora, os restos R_n, R_{n-1}, ... R_2 e R_1 são fàcilmente obtidos aplicando-se o dispositivo prático de RUFFINI (**n.º 13**). Podemos, então, resolver de modo rápido os dois seguintes problemas:

I. *Dado um polinômio $P(x)$, obter, pelas relações (23), os valores numéricos, para $x = h$, de $P(x)$ e de todas as suas derivadas.*

II. *Dado um polinômio $P(x)$ obter a expressão de $P(x+h)$. ou o desenvolvimento de $P(x)$ em potências de $x-h$.*

É o que veremos nos exercícios seguintes.

18. Exercício. *Dado $P(x) \equiv 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 5x - 6$, calcular $P(2)$, $P'(2)$, $P''(2)$, $P'''(2)$ e $P^{(4)}(2)$.*

RESOLUÇÃO: Dividamos $P(x)$ por $x-2$; o quociente por $x-2$ e assim sucessivamente. Utilizando o dispositivo prático, obtemos

$$
\begin{array}{c|cccccl}
 & 3 & -6 & -2 & 5 & -6 & \\ \hline
2 & 3 & 0 & -2 & 1 & & -4 = R_4 \\
2 & 3 & 6 & 10 & & 21 = R_3 & \\
2 & 3 & 12 & & 34 = R_2 & & \\
2 & 3 & & 18 = R_1 & & & \\
 & 3 = a_0 & & & & &
\end{array}
$$

De acôrdo com as relações (23), devemos ter

$$
P(2) = -4 \qquad \frac{P'(2)}{1!} = 21 \qquad \frac{P''(2)}{2!} = 34
$$

$$
\frac{P'''(2)}{3!} = 18 \qquad \frac{P^{(4)}(2)}{4!} = 3
$$

donde resultam, respectivamente,

$$
P(2) = -4 \qquad P'(2) = 21 \qquad P''(2) = 68
$$

$$
P'''(2) = 108 \qquad P^{(4)}(2) = 72
$$

19. Exercício. *Dado* $P(x) \equiv x^3 - 9x^2 + 20x - 6$, *calcular* $P(x+3)$.

Resolução: De acôrdo com a regra do **n.º 17,** devemos dividir $P(x)$ por $x - 3$, o quociente por $x - 3$ e assim sucessivamente. Obtemos, utilizando o dispositivo prático:

$$
\begin{array}{c|ccccl}
 & 1 & -9 & 20 & -6 & \\ \hline
3 & 1 & -6 & 2 & & 0 = R_3 \\
3 & 1 & -3 & & -7 = R_2 & \\
3 & 1 & & 0 = R_1 & & \\
 & 1 = a_0 & & & &
\end{array}
$$

Temos, então, $P(x+3) \equiv x^3 - 7x$.

20. Exercício. *Dado* $P(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, *calcular* $P(x-1)$.

RESOLUÇÃO: Podemos aplicar os resultados anteriores, observando que $h = -1$. As divisões sucessivas serão, pois, por $x + 1$. Utilizando o dispositivo prático, obtemos

$$\begin{array}{r|llll}
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline
-1 & 1 & 2 & 1 & 0 = R_3 \\
-1 & 1 & 1 & 0 = R_2 & \\
-1 & 1 & 0 = R_1 & & \\
 & 1 = a_0 & & &
\end{array}$$

Concluimos, então, que $P(x-1) \equiv x^3$.

21. Propriedades gerais dos polinômios inteiros de variável complexa (*).

I. *Tôdo polinômio inteiro em z é uma função unívoca de z.*

De fato, como na expressão de um polinômio inteiro só aparecem operações racionais (**) e como estas são *unívocas* tanto no campo real como no complexo, a cada valor z_0 de z corresponde então um único valor para o polinômio.

II. *O módulo de um polinômio inteiro em z assume um valor finito para qualquer valor de z de módulo finito.*

De fato, um têrmo qualquer de um polinômio inteiro em z é o produto de um coeficiente de módulo finito por uma potência inteira z^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$ ou n). Como z, por hipótese, assume um valor α de módulo finito, o qual representaremos por ρ, a potência z^k terá o módulo finito ρ^k e portanto o produto desta potência pelo seu coeficiente (de módulo finito) é também de módulo finito, visto que o módulo de um produto é o produto dos módulos dos fatores. Então, o valor numérico do polinômio, sendo uma soma algébrica de

(*) No presente parágrafo, para simplicidade de expressão, diremos *polinômio inteiro em z* referindo-nos a *polinômio inteiro e racional da variável complexa, z de coeficientes de módulo finito.*

(**) Adição, subtração, multiplicação divisão e potenciação de expoente inteiro.

números de módulo finito, será também de módulo finito, pois o módulo de uma soma é no máximo igual à soma dos módulos de suas parcelas.

III. *O módulo de um polinômio inteiro em z cresce indefinidamente quando o módulo da variável cresce indefinidamente.*

Consideremos o polinômio inteiro

$$P(z) \equiv a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n \qquad (25)$$

Supondo o módulo de z diferente de zero, podemos escrever

$$P(z) \equiv z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}\right)$$

Como o módulo do quociente de dois números complexos é o quociente dos módulos dêsses números, quando o módulo de z crescer indefinidamente, os módulos das frações entre parêntesis terão para limite zero e, portanto,

$$\lim_{|z|\to\infty}\left| a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z_n}\right| = a_0$$

Sendo o módulo de $P(z)$ o produto do módulo da expressão entre parêntesis pelo módulo de z^n, como êste cresce indefinidamente com $|z|$ concluimos que o módulo de $P(z)$ também crescerá indefinidamente.

IV. *Se $P(z)$ é um polinômio inteiro em z cujo têrmo de menor grau é do primeiro grau, dado um número positivo e arbitrário ε, existe um número positivo δ tal que, para qualquer valor de z de módulo inferior a δ o módulo de $P(z)$ é inferior a ε* (*).

Seja

$$P(z) \equiv a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z$$

no qual o coeficiente a_{n-1} é diferente de zero.

Sejam ρ o módulo do valor atribuido a z e a o maior dos módulos dos coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$.

Supondo $\rho < 1$, temos *a fortiori*

$$|P(z)| < a\rho + a\rho + \ldots + a\rho = na\rho$$

A condição $na\rho < \varepsilon$ que, em virtude da relação anterior, implica em

$$|P(z)| < \varepsilon \qquad (26)$$

(*) Isto equivale a dizer que $|P(z)|$ tem para limite zero quando $|z|$ tende para zero.

é satisfeita para

$$\rho < \frac{\varepsilon}{na}$$

Como supuzemos, também, $\rho < 1$, chamando δ o menor dos números $\frac{\varepsilon}{na}$ ou 1, o teorema fica demonstrado, pois, para $\rho < \delta$, a condição (26) se verifica.

V. *Dado um polinômio inteiro em z, é sempre possível determinar um número positivo δ tal que, para qualquer valor de z de módulo inferior a δ, o módulo do têrmo de menor grau do polinômio seja superior ao módulo da soma dos outros têrmos.*

1. Suponhamos inicialmente que no polinômio

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

os coeficientes a_{n-1} e a_n não sejam nulos. Ponhamos

$$P_1(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z$$

Pelo teorema anterior, dado $\varepsilon = |a_n|$, existe um número positivo δ, tal que, para qualquer valor de z de módulo inferior a δ, $|P_1(z)|$ seja inferior ao módulo de a_n.

2. Consideremos, para generalidade, o polinômio

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_p z^p \ (p < n)$$

cujo têrmo independente de z e cujos coeficientes dos têrmos em $z, z^2, \ldots z^{p-1}$, sejam nulos.

Supondo diferente de zero o módulo de z, podemos escrever

$$P(z) \equiv z^p(a_0 z^{n-p} + a_1 z^{n-p-1} + \ldots + a_p)$$

Em virtude do que já foi demonstrado, existe um número positivo δ, tal que, para qualquer valor de z de módulo inferior a δ, o módulo de a_p seja superior ao módulo da soma dos outros têrmos entre parêntesis. Então, para qualquer valor de z nas mesmas condições, o módulo do têrmo $a_p z^p$ de $P(z)$ é superior ao módulo da soma dos outros têrmos.

VI. *Dado um polinômio inteiro em z existe um número positivo N tal que, para qualquer valor de z de módulo superior a N, o módulo do têrmo de mais alto grau do polinômio seja superior ao módulo da soma dos outros têrmos.*

II. *Dado um polinômio inteiro $P(x)$ de variável real e coeficientes reais, existe um número positivo N tal que para qualquer valor de x de módulo superior a N, o polinômio tenha o sinal de seu têrmo de maior grau.*

Êste teorema decorre imediatamente do teorema do **n.º 21, VI.**

III. *Se um polinômio inteiro $P(x)$ de variável real e coeficientes reais assume valores de sinais contrários para dois valores reais a e b de x, existe pelo menos um valor real de x, compreendido entre a e b, que anula $P(x)$.*

Como $P(x)$ é uma função contínua no intervalo de extremos a e b, podemos aplicar a $P(x)$ o *teorema da existência do zero* (**Cap. III, n.º 23**).

23. Divisibilidade de polinômio. Diz-se que um polinômio inteiro $P(z)$ do grau n é *divisível* por um polinômio inteiro $P_1(z)$ do grau p ($p < n$), se existe um polinômio inteiro $Q(z)$ do grau $n - p$ tal que

$$P(z) \equiv P_1(z) \,.\, Q(z) \qquad (27)$$

Diz-se, então, que $P_1(z)$ é um *divisor* de $P(z)$.

Como todo polinômio inteiro em z é um produto de uma constante por fatôres binômios da forma $z - a$, sendo a um número real ou complexo (*), todo polinômio de grau não inferior ao segundo admite pelo menos um divisor do tipo $z - a$. Como o único polinômio inteiro que divide um binômio $z - a$ é êle próprio, os binômios dêsse tipo dizem-se *primos* (**).

24. Teorema. Consideremos a divisão definida pela identidade (27) e suponhamos que

$$P_1(z) = (z - a)^k \,.\, Q_1(z) \qquad (28)$$

sendo k um número natural, a um número complexo (ou real) e $Q_1(z)$ uma constante ou um polinômio não divisível por $z - a$. De (27) e (28) resulta

$$P(z) \equiv (z - a)^k\, Q_1(z) \,.\, Q(z)$$

(*) Essa propriedade será vista no Cap. XIII, n.º 3. O aluno já a conhece no caso particular da fatoração do trinômio do 2.º grau (4.º série ginasial).

(**) Repare o leitor que nos referimos a binômios do 1.º grau, pois um binômio de grau superior ao primeiro pode não ser *primo*. Por exemplo, $z^2 - 1$ é divisível por $z + 1$ e por $z - 1$.

Se $Q(z)$ não contiver o fator $z - a$, $P(z)$ admitirá o fator $(z-a)^k$. Se $Q(z)$ contiver o fator $z - a$ ou, numa hipótese mais ampla, o fator $(z-a)^k$, $P(z)$ conterá o fator $(z-a)^{k+h}$. Logo, o expoente de $z - a$ na decomposição de $P(z)$ é no mínimo igual ao expoente dêsse fator na decomposição de $P_1(z)$. Como êste raciocínio se aplica a qualquer fator primo de $P(z)$ e $P_1(z)$, concluimos que, se

$$P_1(z) \equiv a_0 \ (z-a)^h \ (z-b)^k \ \ldots \qquad (29)$$

será

$$P(z) \equiv [(z-a)^{h'} (z-b)^{k'} \ \ldots] \, R(z) \qquad (30)$$

sendo $R(z)$ uma constante ou um polinômio inteiro e $h' \geqslant h$, $k' \geqslant k, \ \ldots$

Recìprocamente, dados $P_1(z)$ e $P(z)$, expressos por (29) e (30), respectivamente e sob a condição indicada, será $P(z) \equiv P_1(z) \, . \, Q(z)$, sendo $Q(z)$ um polinômio inteiro. Então, $P(z)$ será divisível por $P_1(z)$.

Conclusão: *A condição necessária e suficiente para que um polinômio inteiro $P(z)$ seja divisível por um polinômio inteiro $P_1(z)$ é que $P(z)$ contenha todos os fatores primos de $P_1(z)$ afetados de expoentes no mínimo iguais aos expoentes correspondentes em $P_1(z)$.*

Como a condição de $P(z)$ *ser divisível por* $P_1(z)$ equivale a $P_1(z)$ *dividir* $P(z)$ e recíprocamente, podemos concluir:

A condição necessária e suficiente para que um polinômio inteiro $P_1(z)$ divida um polinômio inteiro $P(z)$ é que $P_1(z)$ só contenha fatores primos de $P(z)$ com expoentes no máximo iguais aos expoentes correspondentes em $P(z)$.

25. M. D. C. de dois polinômios. Chama-se *máximo divisor comum* de dois polinômios ao polinômio de maior grau que é divisor comum dêsses polinômios.

26. Teorema. *O m. d. c. de dois ou mais polinômios inteiros decompostos no produto de seus fatores primos, é o produto de seus fatores primos comuns, afetado cada fator do menor expoente com que figura nas decomposições dos polinômios.*

Realmente, pelo teorema anterior, êste produto é divisor comum dos polinômios. Além disso, é o seu m. d. c. pois qualquer múltiplo seu conteria, pelo menos, ou um novo fator primo ou algum de seus fatores com um expoente maior e, portanto, em virtude do mesmo teorema, não seria divisor de pelo menos um dos polinômios.

Por exemplo, o m. d. c. dos polinômios

$$f(z) \equiv (z-2)^3 (z-4) (z+3)^4 (z+3i)^2$$
$$\varphi(z) \equiv (z-2)^2 (z-3) (z+3)^3 (z+3i)$$

é o polinômio

$$\psi(z) \equiv (z-2)^2 (z+3)^3 (z+3i)$$

27. Teorema. Sejam $P(z)$ e $P_1(z)$ dois polinômios inteiros. Suponhamos que $P_1(z)$ divida $P(z)$. Como todo polinômio é divisor de si mesmo, concluimos que $P_1(z)$ é divisor comum de $P(z)$ e $P_1(z)$. É, além disso, o maior divisor comum, pois, pelo teorema do **n.° 24**, o divisor de mais alto grau de $P_1(z)$ é o próprio $P_1(z)$.

CONCLUSÃO: *Dados dois polinômios inteiros, se um divide o outro, êle é o m. d. c. de ambos.*

28. Teorema. Suponhamos que $P(z)$ não seja divisível por $P_1(z)$. Sejam $Q(z)$ e $R(z)$, respectivamente, o quociente e o resto dessa divisão, ou

$$P(z) \equiv P_1(z) \,.\, Q(z) + R(z) \tag{31}$$

Seja $S(z)$ um divisor comum de $P(z)$ e $P_1(z)$, ou

$$P(z) \equiv S(z) \,.\, Q_1(z) \qquad P_1(z) \equiv S(z) \,.\, Q_2(z)$$

Substituindo essas expressões em (31), resulta

$$S(z) \,[Q_1(z) - Q(z) \,.\, Q_2(z)] \equiv R(z)$$

o que mostra ser $S(z)$ divisor de $R(z)$.

De modo análogo demonstraríamos que todo divisor comum de $P_1(z)$ e $R(z)$ é divisor de $P(z)$. Como conseqüência, o m. d. c. de $P(z)$ e $P_1(z)$ é o mesmo m. d. c. de $P_1(z)$ e $R(z)$.

CONCLUSÃO: *Se $R(z)$ é o resto da divisão de $P(z)$ por $P_1(z)$, o m. d. c. de $P(z)$ e $P_1(z)$ é o mesmo m. d. c. de $P_1(z)$ e $R(z)$.*

29. Determinação do m. d. c. de dois polinômios. Os teoremas anteriores permitem estabelecer para o cálculo do m. d. c. de dois polinômios um algoritmo semelhante ao processo das divisões sucessivas para o cálculo do m. d. c. de dois números. Como, porém, êsse m. d. c. é calculado *a menos de um fator numérico*, na prática evitam-se os coeficientes fracionários, multiplicando-se todos os têrmos de cada dividendo parcial por uma constante adequada ou cancelando-se fatores numéricos comuns aos restos.

Seja, por exemplo, calcular o m. d. c. dos polinômios

$$P(z) \equiv z^4 - 2z^3 - 3z^2 + 8z - 4$$
$$P_1(z) \equiv 4z^3 - 6z^2 - 6z + 8$$

Para evitar inicialmente um coeficiente fracionário dividimos $P_1(z)$ por 2 e multiplicamos $P(z)$ por 2. As demais operações o leitor acompanhará fàcilmente observando a seguinte disposição:

	$z+1$ (1.º quociente)		
$z^4-2z^3-3z^2+8z-4$	$2z^3-3z^2-3z+4$	$2z+5$ (2.º quociente)	$3z-4$ (3.º quociente
$2z^4-4z^3-6z^2+16z-8$ $-2z^4+3z^3+3z^2-4z$	$6z^3-9z^2-9z+12$ $-6z^3+14z^2-8z$	$3z^2-7z+4$ $-3z^2+3z$	$z-1$ (M. D. C.)
$-z^3-3z^2+12z-8$	$5z^2-17z+12$	$-4z+4$ $4z-4$	
$2z^3+6z^2-24z+16$ $-2z^3+3z^2+3z-4$	$15z^2-51z+36$ $-15z^2+35z-20$	3.º resto . . . 0	
$9z^2-21z+12$	$-16z+16$		
1.º resto... $3z^2-7z+4$	2.º resto ... $z-1$		

O m. d. c. procurado é $z - 1$.

30. Exercícios.

1. Calcular, pelo método dos coeficientes a determinar, o quociente e o resto da divisão

$$(x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 70x + 40) \div (x^2 - 8x + 15)$$

Resp.: Quociente: $x^2 - 3x + 2$
Resto: $-9x + 10$

2. Calcular m e n, de modo que o polinômio $x^3 - 7x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 3x + 2$. Achar o quociente da divisão.

Resp.: $m = 14$, $n = -8$.
Quociente: $x - 4$

3. Mesma questão para a divisão

$$(x^4 - 12x^3 + 47x^2 + mx + n) \div (x^2 - 7x + 6).$$

Resp.: $m = -72$, $n = 36$.
Quociente: $x^2 - 5x + 6$

4. Estabelecer a condição para que $x^2 + px + q$ seja divisível por $x + a$.

Resp.: $a(a - p) + q = 0$.

5. Estabelecer a condição para que $x^2 + px + q$ seja um quadrado.

Resp.: $p^2 - 4q = 0$

6. Estabelecer a condição para que $x^3 + px^2 + qx + r$ seja um cubo.

Resp.: $\dfrac{p^6}{729} = \dfrac{q^3}{27} = r^2$

7. Decompor numa soma de frações, cujos denominadores sejam do 1.º grau, as frações $\dfrac{6x + 4}{x^3 - 4x}$ e $\dfrac{12 - 7x}{x^3 - 5x^2 + 6x}$.

Resp.: $\dfrac{2}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x}$ e

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{3}{x - 3}$, respectivamente

8. Calcular os quocientes e os restos das divisões seguintes:

$$(x^3 - 9x^2 + 26x - 20) \div (x - 4)$$

Resp.: $Q \equiv x^2 - 5x + 6 R = 4$.

$$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2) \div (x + 2)$$

Resp.: $Q \equiv x^3 - 3x + 1 R = 0$.

$$(3x^5 - 2x^4 - 6x^2 + 7x - 2) \div (3x - 2)$$

Resp.: $Q \equiv x^4 - 2x + 1 R = 0$.

$$(6x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 10x + 5) \div (2x + 1)$$

Resp.: $Q \equiv 3x^4 - 2x^2 + 5 R = 0$.

9. Calcular a de modo que $x^3 + 2x^2 + ax - 2$ seja divisível por $x + 1$.

Resp.: $a = -1$.

10. Dado $P(x) \equiv x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 3$, calcular os valores numéricos de $P(x)$ e de suas derivadas, para $x = 1$.

Resp.: $P(1) = 3$, $P'(1) = 3$, $P''(1) = 6$
$P'''(1) = 6$, $P^{(4)}(1) = 24$.

11. Dado $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$, calcular $P(x+2)$ e $P(x-1)$.

Resp.: $P(x+2) = x^3 + 8x^2 + 21x + 21$
$P(x-1) = x^3 - x^2 + 3$

12. Desenvolver o polinômio $x^3 - 4x + 1$ em potências de $x + 2$.

Resp.: $(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 8(x+2) + 1$

13. Calcular o *m. d. c.* dos polinômios $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$ e $3z^2 - 12z + 12$.

Resp.: $z^2 - 4z + 4$

14. Calcular o m. d. c. dos polinômios $z^4 - 10z^3 + 37z^2 - 60z + 36$ e $z^3 - 9z^2 + 27z - 27$.

Resp.: $z^2 - 6z + 9$

Solução do Exercício n.° 4 do Cap. VIII,

1 RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
y'		$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$-$	
y	2	↗	∞	↗	0	↘	∞	↘	2

max.

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

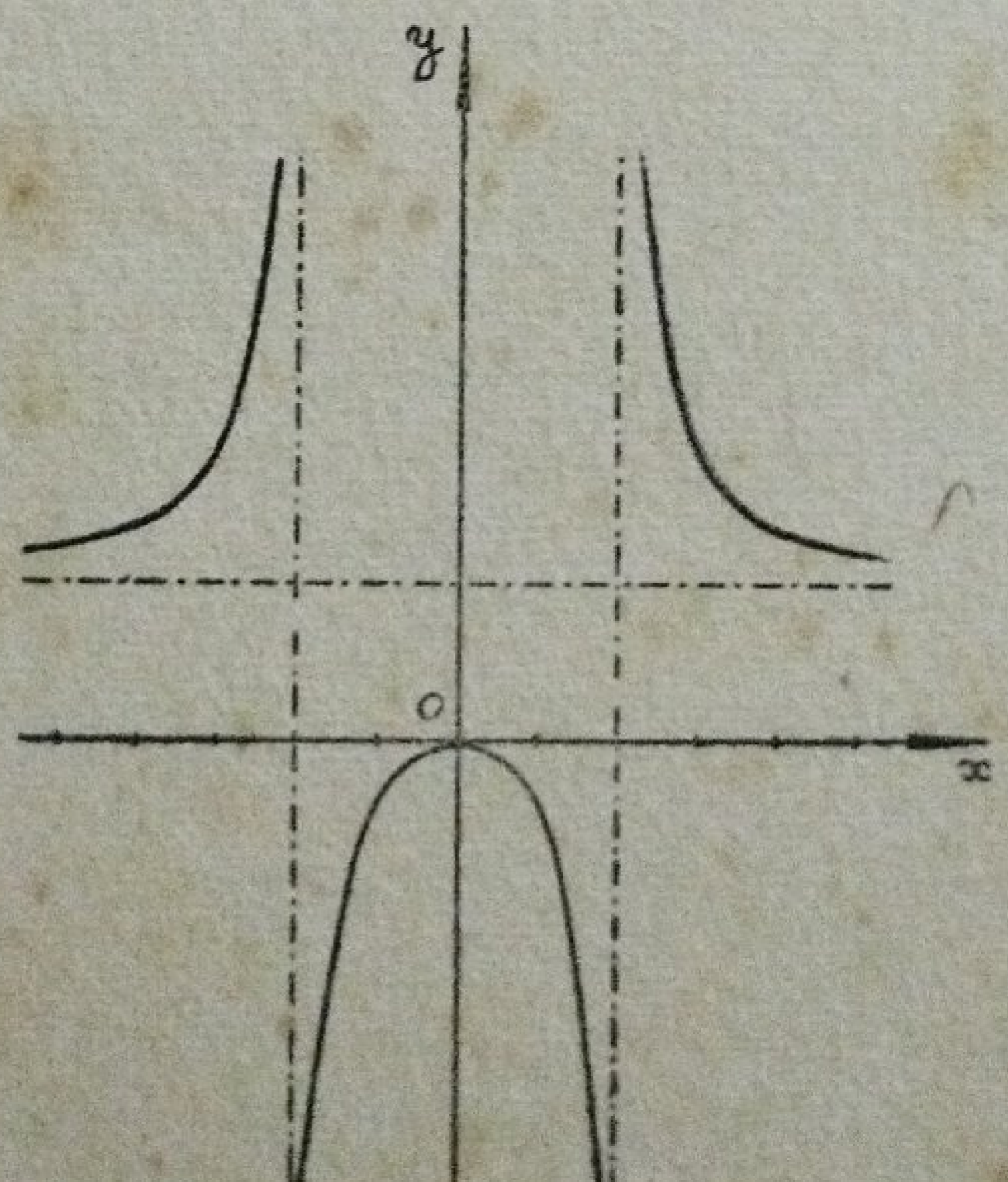

FIG. 82

CAPÍTULO XIII

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

1. Preliminares. Diz-se que uma equação com uma incógnita z é *algébrica*, quando pode ser posta sob a forma

$$F(z) = 0 \tag{1}$$

sendo $F(z)$ uma função algébrica de z.

Se, em particular, $F(z)$ é um polinômio $P(z)$, racional e inteiro em z, a equação algébrica

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{2}$$

é *racional* e *inteira*.

Se α é um número *complexo* (eventualmente *real*) tal que $P(\alpha) = 0$, diz-se que α é *raiz* da equação (2). Resolver, pois, a equação (2) é calcular todos os valores α do campo complexo (em particular, do campo real) que anulam $P(z)$. Por exemplo, como o polinômio $P(z) \equiv z^3 - 3z^2 + 9z + 13$ se anula para $z_1 = -1$, $z_2 = 2 + 3i$ e $z_3 = 2 - 3i$ (o que deixamos para a verificação do leitor), os valores z_1, z_2 e z_3 são raizes da equação $z^3 - 3z^2 + 9z + 13 = 0$.

Suponhamos que $F(z)$ seja uma função algébrica *racional* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, sendo $P(z)$ e $Q(z)$ polinômios inteiros e racionais em z. Podemos supor que não haja valor complexo (ou real) de z que anule simultâneamente $P(z)$ e $Q(z)$, pois, se houvesse um valor α nessas condições, $P(z)$ e $Q(z)$ seriam divisíveis por $z - \alpha$, ou $(z - \alpha)^2$, etc., fatores que poderíamos cancelar. Então, a equação

$$F(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)} = 0 \tag{3}$$

recairia na equação

$$P(z) = 0 \tag{4}$$

isto é, as raízes de (3) seriam as raízes de (4).

Se $F(z)$ é uma função algébrica *irracional*, mediante potenciações convenientes de ambos os membros da equação (1), recairiamos numa equação do tipo (3) ou (4), cujas raízes estranhas a (1) seriam fàcilmente excluidas por uma verificação. Por exemplo, a equação

$$\sqrt{z - \sqrt{z-1}} + z = 0$$

por potenciações e simplificações recai na equação

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

Dessas considerações conclui-se a importância das equações do tipo (2), que serão objeto de estudo parcial neste e nos próximos capítulos. Como seu primeiro membro é um polinômio inteiro e racional em z, utilizaremos com proveito as propriedades estabelecidas no capítulo anterior.

2. Princípio fundamental. A teoria das equações algébricas baseia-se no seguinte teorema fundamental:

Tôda equação algébrica racional e inteira com uma incógnita admite pelo menos uma raiz (real ou complexa).

Êste princípio foi apresentado, pela primeira vez por D'ALEMBERT, que dêle deu uma demonstração imperfeita em 1748. Sua primeira demonstração rigorosa é da autoria de GAUSS e data de 1799. Posteriormente surgiram outras demonstrações, como a de CAUCHY (1821) e GORDAN (1876).

Como, a nosso ver, essas demonstrações são penosas para o aluno de Curso Colegial, vamos omiti-las nessa exposição (*).

3. Consequências do princípio fundamental.

I. Seja

$$P(z) \equiv a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a^n = 0 \quad (5)$$

uma equação algébrica, racional e inteira do grau n. Pelo teorema de D'ALEMBERT existe pelo menos uma raiz dessa equação, isto é, um número α_1 tal que $P(\alpha_1) = 0$.

(*) O leitor interessado encontrará uma exposição didática da demonstração de CAUCHY no excelente trabalho *Pontos de Álgebra Complementar* do professor HAROLDO LISBOA DA CUNHA.

Então, $P(z)$ é divisível por $z - \alpha_1$, sendo o quociente desta divisão um polinômio do grau $n - 1$, cujo coeficiente do têrmo de grau $n - 1$ é a_0. Representando por $P_1(z)$ êste quociente, podemos escrever

$$P(z) \equiv (z - \alpha_1)\, P_1(z) \tag{6}$$

Igualmente, $P_1(z)$, devendo anular-se para um valor α_2 de z, é divisível por $z-\alpha_2$, sendo o quociente desta divisão um polinômio inteiro do grau $n-2$ cujo coeficiente do têrmo dêste grau é ainda a_0. Representando por $P_2(z)$ êste quociente, podemos escrever

$$P_1(z) \equiv (z - \alpha_2)\, P_2(z) \tag{7}$$

Raciocinando anàlogamente, chegaremos a estabelecer as identidades

$$\begin{aligned} P_2(z) &\equiv (z - \alpha_3)\, P_3(z) \\ P_3(z) &\equiv (z - \alpha_4)\, P_4(z) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{n-2}(z) &\equiv (z - \alpha_{n-1})\, P_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{8}$$

sendo $P_3(z)$, $P_4(z)$, ... $P_{n-1}(z)$ polinômios dos graus $n - 3$, $n - 4$, ... 1, cujo coeficiente dos primeiros têrmos é a_0. Sendo, então, $P_{n-1}(z)$ da forma $a_0 z + b$, podemos pôr

$$P_{n-1} \equiv a_0(z - \alpha_n) \tag{9}$$

onde α_n representa o quociente $-\dfrac{b}{a_0}$.

Multiplicando, então, membro a membro, as identidades (6), (7), (8) e (9), e eliminando os fatores comuns a ambos os membros do produto, obtemos

$$P(z) \equiv a_0\,(z - \alpha_1)\,(z - \alpha_2)\,\ldots\,(z - \alpha_n) \tag{10}$$

CONCLUSÃO: *Todo polinômio algébrico, racional e inteiro do grau n em z é o produto do coeficiente de seu têrmo de grau n por n fatores binômios do tipo $z - \alpha$, sendo α um número complexo.*

Observemos que α_1, α_2, ... α_n podem não ser tôdos distintos.

II. Demonstremos que a decomposição anterior só pode ser feita de uma maneira para cada polinômio.

Suponhamos, então, que tivéssemos obtido para o polinômio $P(z)$ duas decomposições distintas

$$P(z) \equiv a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$
$$P(z) \equiv a_0(z - \alpha'_1)(z - \alpha'_2) \dots (z - \alpha'_n)$$

Como a primeira se anula para $\alpha = \alpha_1$, o mesmo deve suceder à segunda, o que só é possível se um dos números α'_1 é igual a α_1. Raciocinando anàlogamente demonstraremos que $\alpha'_1 = \alpha_1, \dots \alpha'_n = \alpha_n$.

III. O resultado (10) permite escrever a equação (5) da seguinte maneira:

$$a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) = 0 \qquad (11)$$

Vemos, então, que a equação (5) ou (11) se verifica para m valores $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ de z e sòmente para êstes.

CONCLUSÃO: *Toda equação algébrica racional e inteira do grau n tem n raizes (distintas ou não).*

4. Equações algébricas de coeficientes reais. As equações algébricas de coeficientes reais apresentam duas propriedades importantes de que trataremos a seguir.

5. Teorema. *Toda equação algébrica, racional e inteira, de coeficientes reais, que admita a raiz complexa $a + bi$, admite, também a raiz complexa $a - bi$, conjugada da primeira.*

Seja $P(z) = 0$ uma equação nas condições do enunciado e seja $a + bi$ uma de suas raizes. Do que vimos no capítulo anterior sôbre operações no campo complexo, resulta que se substituirmos em $P(z)$, z sucessivamente por $a + bi$ e $a - bi$, obteremos duas expressões conjugadas, ou

$$P(a + bi) = P_1(a, b) + i\,P_2(a, b)$$
$$P(a - bi) = P_1(a, b) - i\,P_2(a, b)$$

Como, por hipótese, $a + bi$ é raiz da equação $P(z) = 0$, $P(a + bi)$ é nulo, o que exige serem $P_1(a, b) = 0$ e $P_2(a, b) = 0$. Então, $P(a - bi)$ também é nulo donde, se conclui ser $a - bi$ raiz da equação $P(z) = 0$.

6. Teorema. *Toda equação algébrica, racional e inteira de coeficientes reais, que admita p raizes iguais a $a + bi$, admite, também, p raizes iguais $a - bi$* (*).

De fato, admitamos que a equação, racional e inteira, $P(z) = 0$, admita a raiz $a + bi$. Então, admitirá a raiz $a - bi$ (n.º 5) e, portanto, o polinômio $P(z)$, será divisível pelo produto $[z - (a + bi)]\,[z - (a - bi)]$. Como êste produto é o polinômio de coeficientes reais $(z - a)^2 + b^2$, o quociente desta divisão é um polinômio de coeficiente reais, que representaremos por $P_1(z)$. Se, então, $P(z) = 0$ admite outra raiz $a + bi$, esta será também raiz da equação $P_1(z) = 0$. Pelo teorema anterior, $P_1(z) = 0$ terá, também, a raiz $a - bi$.

Prosseguindo anàlogamente, concluiremos que a cada raiz $a + bi$ de $P(z) = 0$ corresponde uma raiz $a - bi$, o que demonstra o teorema.

7. Relações entre os coeficientes e as raizes. Retomemos a equação (5)

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_kz^{n-k} + \ldots + a_n = 0 \quad (12)$$

que, como vimos, pode tomar o aspecto

$$a_0(z-\alpha_1)\,(z-\alpha_2)\,\ldots\,(z-\alpha_n) = 0 \quad (13)$$

Efetuando o produto dêsses n fatores binômios segundo a regra conhecida (**), obtemos

$$\begin{aligned} &a_0z^n - a_0(\Sigma\alpha_1)z^{n-1} + a_0(\Sigma\alpha_1\alpha_2)z^{n-2} - \\ &- \ldots + (-1)^k a_0\,(\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)z^{n-k} + \\ &- \ldots + (-1)^n a_0\,.\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

onde

$$\begin{aligned} &\Sigma\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \\ &\Sigma\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \ldots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\ldots\alpha_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (15)$$

(*) Isto equivale a dizer, como veremos mais adiante (N.º **13**), que **as raizes** $a + bi$ $a - bi$ **são** do mesmo grau de multiplicidade.

(**) Vol. II, Cap. II, n.º 1.

Como o primeiro membro de (12) deve ser idêntico ao primeiro membro de (14), temos

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= -a_0\,\Sigma\alpha_1 \\ a_2 &= a_0\,\Sigma\alpha_1\alpha_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_k &= (-1)^k a_0\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= (-1)^n a_0\,.\,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \end{aligned} \tag{16}$$

As igualdades (16) exprimem as relações entre os coeficientes do polinômio da equação (12) e suas raizes.

Como supomos $a_0 \neq 0$ (pois a equação é, por hipótese, do grau n) as relações (16) assim se podem escrever

$$\begin{aligned} \Sigma\alpha_1 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2 &= \frac{a_2}{a_0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k &= (-1)^k\frac{a_k}{a_0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0} \end{aligned} \tag{17}$$

e a equação (12) pode ser assim representada

$$z^n + \frac{a_1}{a_0}z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}z^{n-2} + \ldots + \frac{a_k}{a_0}z^{n-k} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} = 0 \tag{18}$$

Conhecidas, então, as raizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, as relações (17) permitem, como se vê, determinar os coeficientes da equação (18) que tem essas raizes.

8. Exercício. *Compor a equação cujas raizes são* 2, 1, -1 e -3.

Resolução: Temos

$\Sigma\alpha_1 = 2+1-1-3 = -1$

$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 2\times1+2(-1)+2(-3)+1(-1)+1(-3)+(-1)(-3) = -7$

$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2\times1(-1)+2\times1(-3)+2(-1)(-3)+1(-1)(-3) = 1$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 2\times1(-1)(-3) = 6$

De acôrdo com os resultados (17) e (18) a equação procurada é

$$z^4 + z^3 - 7z^2 - z + 6 = 0$$

9. Exercício. *Compor a equação cujas raizes são* 2, $2+3i$ *e* $2-3i$.

Resolução: Temos

$\Sigma\alpha_1 = 2 + 2 + 3i + 2 - 3i = 6$

$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 2(2 + 3i) + 2(2 - 3i) + (2 + 3i)(2 - 3i) = 21$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 2(2 + 3i)(2 - 3i) = 26$

A equação é, portanto, $z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = 0$.

10. Observação. Em alguns casos, quando, além das n relações gerais (17), se conhece uma ou mais relações entre as raizes de uma equação dada, pode-se calcular essas raizes com o auxílio dessas relações. O exemplo seguinte esclarecerá esta observação.

11. Exercício. *Resolver a equação*

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$$

sabendo-se que uma das raizes é a soma das outras duas.

Resolução: Sejam α_1, α_2 e α_3 as raizes da equação dada e seja

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 \qquad (19)$$

Temos as relações

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \qquad (20)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 11 \qquad (21)$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 6 \qquad (22)$$

Levando em conta a relação (19) a igualdade (20) se transforma em $2\alpha_1 = 6$, donde resulta $\alpha_1 = 3$, e, portanto

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \tag{23}$$

Substituindo o valor achado de α_1 em (22), obtemos

$$\alpha_2\alpha_3 = 2 \tag{24}$$

As relações (23) e (24) mostram que α_2 e α_3 são as raizes da equação do segundo grau $z^2 - 3z + 2 = 0$.

Resolvendo-a, encontramos finalmente $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 1$.

12. Raízes nulas. Suponhamos que a equação (12) tenha k raízes nulas: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots \alpha_k = 0$. Então, decompondo o polinômio de seu primeiro membro, teríamos, de acôrdo com a forma (13)

$$a_0 z^k (z - \alpha_{k+1}) \ldots (z - \alpha_n) = 0 \tag{25}$$

isto é, seu primeiro membro seria divisível por z^k.

Recìprocamente, tôda equação $P(z) = 0$, em que $P(z)$ é divisível por z^k, pode ser posta sob a forma

$$z^k P_{n-k}(z) = 0$$

onde P_{n-k} é um polinômio do grau $n - k$ e, portanto, é decomponível num produto $(z - \alpha_{k+1}) \ldots (z - \alpha_n)$, sendo $\alpha_{k+1}, \ldots \alpha_n$ as raízes da equação $P_{n-k}(z) = 0$.

Concluimos, então, que *se o polinômio $P(z)$ é divisível por z^k, a equação $P(z)$ tem k raízes nulas e recìprocamente*. Por exemplo, a equação $z^5 + 2z^3 - 4z^2 = 0$ tem duas raízes nulas.

13. Raízes múltiplas Se uma equação do grau n tem p $(p \leqslant n)$ de suas raízes iguais a α, diz-se que α é raiz de ordem de multiplicidade p dessa equação.

Em particular, conforme seja p igual a 1, 2 ou 3, a raiz α denomina-se, respectivamente, *simples*, *dupla* ou *tripla*.

Por exemplo, sendo 2, 2, 2 e -2 as raízes da equação $z^4 - 4z^3 + 16z - 16 = 0$, diz-se que 2 é *raiz tripla* ou de *ordem de multiplicidade* 3 dessa equação.

14. Teorema. Seja α uma raiz de ordem de multiplicidade p de uma equação algébrica, racional e inteira

$$P(z) = 0 \tag{26}$$

Teremos, então,

$$P(z) = (z - \alpha)^p \, Q(z) \tag{27}$$

sendo $Q(z)$ um polinômio racional e inteiro que não se anula para $z = \alpha$. Consideremos a derivada de $P(z)$

$$P'(z) \equiv (z - \alpha)^{p-1} \, [(z - \alpha) \; Q'(z) + pQ(z)] \tag{28}$$

A expressão entre colchetes no segundo membro de (28) é um polinômio, que não se anula para $z = \alpha$, visto que, por hipótese, $Q(\alpha) \neq 0$. Então, α é raiz de ordem de multiplicidade $p - 1$ da equação

$$P'(z) = 0 \tag{29}$$

habitualmente designada *equação derivada* de (26).

Em particular, se $p = 1$, a identidade (28) torna-se

$$P'(z) \equiv (z - \alpha) \; Q'(z) + Q(z)$$

e como $P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0$, concluimos que α não é raiz de (29)

CONCLUSÃO: *Toda raiz de ordem de multiplicidade p de uma equação algébrica, racional e inteira $P(z) = 0$ é raiz de ordem de multiplicidade $p - 1$ da equação derivada $P'(z) = 0$. Em particular, toda raiz simples de $P(z) = 0$ não é raiz de $P'(z) = 0$.*

15. Observação. A recíproca da propriedade anterior não é verdadeira, pois a equação (29) pode conter raízes estranhas à equação (26). Por exemplo, se (26) só tiver raízes simples, (26) e (29) não terão raízes comuns.

16. Cálculo das raízes múltiplas de uma equação. Do que foi estabelecido concluimos que, se α é raiz de ordem de multiplicidade p de (26), isto é, se $P(z)$ é da forma (27), $P'(z)$ será da forma (28). Então, o m. d. c. $\Delta(z)$ de $P(z)$ e $P'(z)$ conterá o fator $(z - \alpha)^{p-1}$. Raciocinando anàlogamente para as demais raízes múltiplas de (26), concluiremos que, se

$$P(z) \equiv a_0 \; (z - \alpha)^p \; (z - \beta)^q \; \ldots \; (z - \lambda)^s \tag{30}$$

isto é, se a equação $P(z) = 0$ tem as raízes $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ com ordens de multiplicidade, respectivamente, $p, q, \ldots s$, o m. d. c. de $P(z)$ e $P'(z)$ será

$$\Delta(z) = C(z - \alpha)^{p-1} (z - \beta)^{q-1} \ldots (z - \lambda)^{s-1} \quad (31)$$

Então, as raízes *simples*, *duplas*, etc. da equação

$$\Delta(z) = 0 \quad (32)$$

serão, respectivamente, raízes *duplas*, *triplas*, etc. da equação $P(z) = 0$.

Seja, por exemplo, calcular as raízes múltiplas da equação

$$P(z) \equiv z^4 - 6z^3 + 13z^2 - 12z + 4 = 0 \quad (33)$$

Sendo $P'(z) \equiv 4z^3 - 18z^2 + 26z - 12$, calculando o m. d. c. de $P(z)$ e $P'(z)$ pelo processo indicado (**Cap. XII, n.° 29**) obtemos $\Delta(z) = z^2 - 3z + 2$. Como a equação $z^2 - 3z + 2 = 0$ tem as raízes *simples* $z = 2$ e $z = 1$, concluimos que essas são raízes *duplas* da equação (33), cujas quatro raízes são, portanto, 2, 2, 1 e 1.

17. Abaixamento do grau da equação. Obtido o m. d. c. $\Delta(z)$ e calculado o quociente $\dfrac{P(z)}{\Delta(z)} = P_1(z)$, a equação (26) pode ser escrita

$$P(z) \equiv P_1(z) \,.\, \Delta(z) = 0$$

Suas raízes são, pois, as raízes das equações

$$P_1(z) = 0 \qquad \Delta(z) = 0 \quad (34)$$

das quais a primeira só contém raízes simples, como se deduz imediatamente observando-se as expressões (30) e (31) de $P(z)$ e $\Delta(z)$, respectivamente. Então, a resolução da equação (26) recai na resolução de equações de graus menores, o que tem grande valor prático.

18. Raízes reais num intervalo. Teorema de BOLZANO. Seja

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (35)$$

uma equação racional e inteira de coeficientes reais. Já vimos (**nos. 5 e 6**) que, se a equação (35) tem a raiz complexa $\alpha + \beta i$, tem igualmente a raiz conjugada $\alpha - \beta i$. Então, na decomposição de $P(z)$ em fatores binômios, o produto correspondente a essas raízes é

$$[z - (\alpha + \beta i] \; [z - (\alpha - \beta i] =$$
$$= [(z - \alpha) - \beta i] \; [(z - \alpha) + \beta i] = (z - \alpha)^2 + \beta^2 \qquad (36)$$

sendo *positivo* qualquer que seja z real, visto que $\beta \neq 0$ (pois, do contrário, as raízes $\alpha \pm \beta i$ seriam reais).

Posto isto, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ $(k \leqslant n)$ as raízes reais de (35). Podemos, então, escrever

$$P(z) \equiv a_0 \,(z - \alpha_1)\; (z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)\; Q(z) \qquad (37)$$

sendo $Q(z)$ o produto dos fatores binômios correspondentes às raízes complexas de (35) que porventura existam. Como $Q(z)$ é um produto de fatores do tipo (36), é positivo para qualquer valor real de z.

Sejam, então, a e b dois números reais tais que $a < b$. Da identidade (37) resultam

$$P(a) = a_0 \;(a - \alpha_1)\; (a - \alpha_2) \;\ldots\; (a - \alpha_n)\, Q(a)$$
$$P(b) = a_0 \;(b - \alpha_1)\; (b - \alpha_2) \;\ldots\; (b - \alpha_n)\, Q(b)$$

e, portanto,

$$P(a) \,.\, P(b) = a_0^2 \,[(a - \alpha_1)\,(b - \alpha_1)] \ldots$$
$$[(a - \alpha_n)\,(b - \alpha_n)]\; Q(a) \,.\, Q(b) \qquad (38)$$

Cada um dos produtos

$$(a - \alpha_1)\,(b - \alpha_1), \ldots (a - \alpha_n)\,(b - \alpha_n) \qquad (39)$$

é positivo se a raiz de (35) que nêle figura é inferior a a ou superior a b e é negativo se essa raiz está compreendida entre a e b. Como a_0^2, $Q(a)$ e $Q(b)$ são positivos, se o produto (38) fôr positivo, isto é, se $P(a)$ e $P(b)$ forem do mesmo sinal, haverá um número par (que poderá ser nulo) de fatores (39) negativos e, portanto, um número par (que poderá ser nulo) de raízes de (35) compreendidas entre a e b; se o produto (38) fôr negativo, isto é, se $P(a)$ e $P(b)$ forem de sinais contrários, haverá um número ímpar de fatores (39) negativos e, portanto, um número ímpar de raízes de (35) compreendidas entre a e b. Podemos, pois, concluir o

TEOREMA DE BOLZANO: *Sendo $P(z) = 0$ uma equação algébrica, racional, inteira e de coeficiente reais e a e b dois números reais, se $P(a)$ e $P(b)$ forem do mesmo sinal, haverá um número par (ou nulo) de raízes dessa equação compreendidas entre a e b; se $P(a)$ e $P(b)$ forem de sinais contrários, haverá um número ímpar de raízes dessa equação compreendidas entre a e b.*

Por exemplo, dada a equação $P(z) \equiv z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$, como $P(-2) = -12$ e $P(0) = +2$, concluimos que no intervalo $(-2, 0)$ há um número ímpar (portanto, uma pelo menos) de raízes dessa equação; como $P(0) = +2$ e $P(3) = +8$, no intervalo $(0, 3)$ há um número par (ou nulo) de raízes dessa equação.

19. Conseqüências. Da propriedade anterior resultam imediatamente as seguintes:

I. *Toda equação algébrica, racional, inteira, de coeficientes reais e de grau ímpar, que não tenha raizes nulas, admite, pelo menos, uma raiz real de sinal contrário ao têrmo constante.*

De fato, seja (35) uma equação nessas condições.

Supondo $a_0 > 0$ (*), como $\lim\limits_{z \to +\infty} P(z) = +\infty$ e $\lim\limits_{z \to -\infty} P(z) = -\infty$ (**Cap. III, n.º 13**) existem dois números positivos m e n tais que $P(m) > 0$ e $P(-n) < 0$. Como $P(0) = a_n$, se $a_n > 0$ haverá, pelo menos, uma raiz no intervalo $(-n, 0)$, isto é, negativa; se $a_n < 0$, haverá, pelo menos uma raiz no intervalo (o, m), isto é, positiva.

Por exemplo, a equação $z^5 - 4z^3 + 1 = 0$ tem, pelo menos uma raiz negativa e a equação $2z^3 - 7z - 5 = 0$, pelo menos uma raiz positiva.

II. *Toda equação algébrica, racional, inteira, de coeficientes reais e de grau par, que não contenha raizes nulas e cujo têrmo constante seja negativo, admite, pelo menos duas raizes reais e de sinais contrários.*

(*) Se $a_0 < o$, pode-se multiplicar tôda a equação por -1, pelo que não perde generalidade a hipótese $a_0 > o$. Nesta propriedade e na seguinte supõe-se, portanto, que o coeficiente a_0 da equação (35) seja positivo.

De fato, seja (35) tal equação, na qual supomos $a_0 > 0$. Então, como n é par, $\lim_{z \to +\infty} P(z) = \lim_{z \to -\infty} P(z) = +\infty$ (**Cap. III, n.º 13**) Então, existe um número positivo m tal que $P(-m) > 0$ e $P(m) > 0$. Como, por hipótese, $a_n < 0$, temos $P(o) < 0$. Então, em cada intervalo $(-m, o)$ e (o, m) haverá, pelo menos, uma raiz de (35).

20. Exercícios para resolver.

Compor as equações cujas raizes são:

1. $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 5.$ *Resp.:* $z^3 - 12z^2 + 47z - 60 = 0$
2. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 4.$ *Resp.:* $z^3 - 7z^2 + 14z - 8 = 0$
3. $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 4.$ *Resp.:* $z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$
4. $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 6.$ *Resp.:* $z^3 - 13z^2 + 54z - 72 = 0$
5. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 5.$ *Resp.:* $z^3 - 8z^2 + 17z - 10 = 0$
6. $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 7.$ *Resp.:* $z^3 - 8z^2 + 5z + 14 = 0$
7. $\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 5.$ *Resp.:* $z^3 - 6z^2 - z + 30 = 0$
8. $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -5.$ *Resp.:* $z^3 - 19z + 30 = 0$
9. $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 3 + i,\ \alpha_3 = 3 - i$
   Resp.: $z^3 - 8z^2 + 22z - 20 = 0$
10. $\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = 3 + 2i,\ \alpha_3 = 3 - 2i.$
    Resp.: $z^3 - 5z^2 + 7z + 13 = 0$
11. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 1 + i.$
    Resp.: $z^3 - i \,.\, z^2 - (3 + i)\, z + 2(1 + i) = 0$
12. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 6.$
    Resp.: $z^4 - 12z^3 + 47z^2 - 72z + 36 = 0$
13. $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = -3.$
    Resp.: $z^4 - 13z^2 + 36 = 0.$
14. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 8.$
    Resp.: $z^4 - 14z^3 + 59z^2 - 94z + 48 = 0$
15. $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -3,\ \alpha_3 = i,\ \alpha_4 = -i.$
    Resp.: $z^4 + 2z^3 - 2z^2 + 2z - 3 = 0$
16. Resolver a equação $z^3 - 6z^2 - z + 30 = 0$, sabendo-se que uma das raizes é a diferença das outras duas.
    Resp.: $\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 5,\ \alpha_3 = -2$

17. Resolver a equação $z^3 - 7z + 6 = 0$, sabendo-se que uma das raizes é o dôbro da outra. *Resp.:* $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -3$

18. Resolver a equação $z^3 + 6z^2 + 3z - 10 = 0$, sabendo-se que uma das raizes é a média aritmética das outras duas.
Resp.: $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -5,\ \alpha_3 = -2$

19. Resolver a equação $z^3 + 3z^2 - 6z - 8 = 0$, sabendo-se que suas raizes estão em progressão aritmética.
Resp.: $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = -4$

20. Determinar a condição necessária e suficiente para que a equação $z^3 + pz + q = 0$ tenha duas raizes iguais.
Resp.: $4p^3 + 27q^2 = 0$

21. Determinar a condição necessária e suficiente para que a equação $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ tenha as três raizes iguais.
Resp.: $\left(\frac{p}{3}\right)^6 = \left(\frac{q}{3}\right)^3 = r$

Determinar as raizes múltiplas das equações:

22. $z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$ *Resp.:* $z = 2$ (tripla)
23. $z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0$ *Resp.:* $z = 3$ (tripla)
24. $z^4 - 10z^3 + 37z^2 - 60z + 36 = 0$ *Resp.:* $z = 2,\ z = 3$ (duplas)
25. $z^4 - 8z^3 + 22z^2 - 24z + 9 = 0$ *Resp.:* $z = 1,\ z = 3$ (duplas)
26. $z^4 - 4z^3 + 16z - 16 = 0$ *Resp.:* $z = 2$ (tripla)
27. $z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 7z^2 + 8z - 3 = 0$ *Resp.:* $z = 1$ (tripla)

Solução do Exercício n.º 5 do Cap. VIII

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	$-\infty$	$-3{,}73$	-2	-1	$-0{,}27$	0	$+1$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$ ∞	$-$	0	$+$		
y	$-\infty \nearrow$	$-7{,}46 \searrow$	$\infty \searrow$	$0 \searrow$	$-0{,}54 \nearrow$	$-0{,}5 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$
		max.			min.			

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

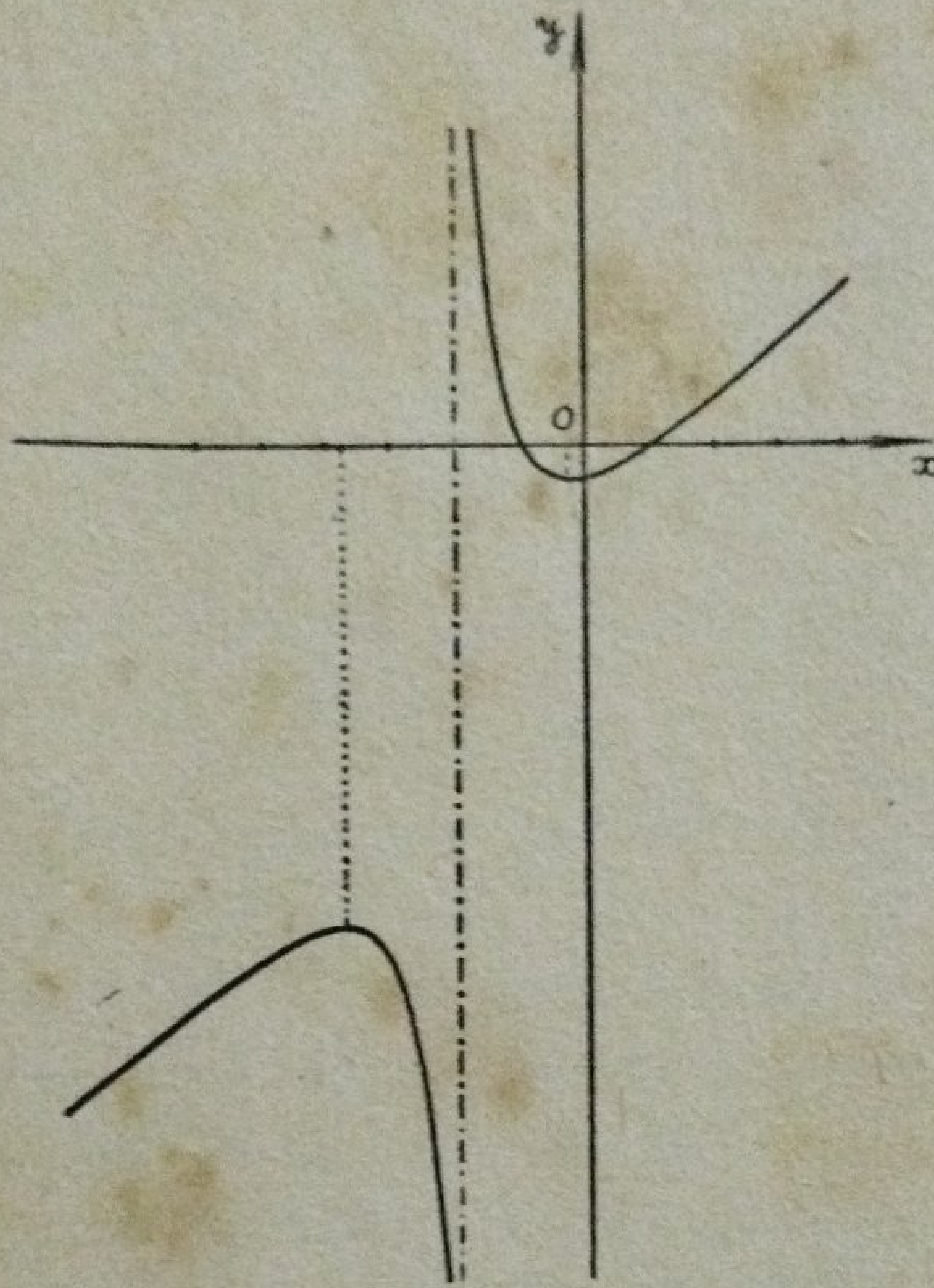

FIG. 83

CAPÍTULO XIV

TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES (*)

1. Preliminares. Seja

$$P(z) = 0 \qquad (1)$$

uma equação algébrica do grau n e sejam $z_1, z_2, \ldots z_n$ suas n raizes.

Formar uma *transformada* da equação (1) é determinar uma equação

$$P_1(u) = 0 \qquad (2)$$

cujas raizes sejam dadas por uma determinada função das raizes da equação primitiva (1).

Temos, então, dois casos a considerar:

1.º) *cada raiz da equação transformada é função de uma única raiz da equação primitiva;*

2.º) *cada raiz da equação transformada é função de duas ou mais raizes da equação primitiva.*

As transformações assim caracterizadas denominam-se, respectivamente, *transformações de primeira espécie* ou de VIÈTE e *transformações de segunda espécie* ou de LAGRANGE.

Para esclarecer o leitor daremos os seguintes exemplos:

Exemplo de transformação de primeira espécie: Dada uma equação algébrica, determinar a transformada cujas raizes sejam os triplos das raizes da equação dada.

Exemplo de transformação de segunda espécie: Dada uma equação algébrica, determinar a transformada cujas raizes sejam as somas, duas a duas, das raizes da equação dada.

(*) Êste capítulo consta apenas do programa do Curso Científico.

Evidentemente supomos desconhecidas as raizes da equação primitiva, pois do contrário, calcularíamos as raizes da transformada e comporíamos essa equação.

2. Transformações de primeira espécie. Suponhamos que cada raiz da transformada (2) seja uma função unívoca de uma raiz da equação (1). Representando por

$$u = \varphi(z) \tag{3}$$

essa função, podemos dizer que as raizes da equação (2) são os n valores $u_1 = \varphi(z_1)$, $u_2 = \varphi(z_2)$, $\ldots$ $u_n = \varphi(z_n)$, obtidos substituindo-se, na função (3), z sucessivamente pelas n raizes $z_1, z_2, \ldots z_n$ de (1).

A função (3) denomina-se *função transformatriz* da equação (1).

Verificamos, assim, que, se a função transformatriz é unívoca, a transformada é do mesmo grau da equação primitiva.

3. Transformação homográfica. Consideremos a transformação

$$u = \frac{az + b}{cz + d} \tag{4}$$

Se

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0$$

daí resulta sucessivamente

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{az}{cz} = \frac{az + b}{cz + d} \tag{5}$$

isto é, qualquer que seja o valor atribuido a z, o valor correspondente de u, dado pela função (4), será igual a $\frac{a}{c}$. Esta hipótese, como se vê, não interessa ao presente estudo, pois a transformação (4), aplicada a qualquer equação de grau n daria uma transformada do grau n, tendo suas n raizes iguais a $\frac{a}{c}$.

Suponhamos, então, $\Delta \neq 0$. Uma transformação do tipo (4) nessas condições diz-se *homográfica*.

4. Transformações homográficas simples. A transformação homográfica geral (4) apresenta três casos particulares importantes.

I. *Transformação aditiva*, cuja função transformatriz é

$$u = z + k \tag{6}$$

obtida de (4), fazendo-se $a = 1$, $b = k$, $c = 0$ e $d = 1$.

II. *Transformação multiplicativa*, cuja função transformatriz é

$$u = kz \tag{7}$$

obtida de (4), fazendo-se $a = k$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 1$.

III. *Transformação recíproca*, cuja função transformatriz é

$$u = \frac{1}{z} \tag{8}$$

obtida de (4), fazendo-se $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

Estas transformações denominam-se *simples* e delas trataremos a seguir.

5. Transformação aditiva. Seja aplicar à equação

$$P(z) \equiv a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0 \tag{9}$$

a transformação

$$u = z + k \quad (k \text{ inteiro}) \tag{10}$$

da qual se tira

$$z = u - k \tag{11}$$

A transformada será, então, a equação

$$P(u - k) = 0 \tag{12}$$

obtida de (9) pela substituição de z por $u - k$.

Conforme, então, k seja *positivo* ou *negativo*, as raizes da transformada (12) serão iguais às raizes da primitiva (9), *aumentadas* ou *diminuidas* de k unidades.

A expressão $P(u-k)$ obtém-se fàcilmente aplicando-se o algoritmo de Ruffini-Horner (**Cap. XII, n.º 17**).

6. Exercício. *Dada a equação*

$$P(z) \equiv 2z^3 - 5z^2 + 3z - 9 = 0$$

obter a transformada cujas raizes sejam iguais às raizes desta aumentadas de 3 unidades.

Resolução: Representando por u a incógnita da transformada, de acôrdo com o enunciado, temos $u = z + 3$ e, portanto, $z = u - 3$. Logo, devemos calcular a transformada $P(u-3) = 0$. Utilizando o algoritmo de Ruffini-Horner, obtemos

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & 3 & -9 \\ \hline
-3 & 2 & -11 & 36 & \multicolumn{1}{|r}{-117} \\ \hline
-3 & 2 & -17 & \multicolumn{1}{|r}{87} & \\ \hline
-3 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{-23} & & \\ \hline
 & 2 & & &
\end{array}$$

A equação transformada é $2u^3 - 23u^2 + 87u - 117 = 0$.

7. Exercício. *Dada a equação*

$$P(z) \equiv z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$$

obter a transformada desta cujas raizes sejam iguais às raizes desta diminuidas de uma unidade.

Resolução: Representando por u a incógnita da transformada, de acôrdo com o enunciado, temos $u = z - 1$ e, portanto, $z = u + 1$. Devemos, então, calcular a transformada $P(u+1) = 0$. Utilizando o algoritmo de Ruffini-Horner, obtemos

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline
1 & 1 & -5 & 6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\ \hline
1 & 1 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{2} & \\ \hline
1 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{-3} & & \\ \hline
 & 1 & & &
\end{array}$$

A equação transformada é $z^3 - 3z^2 + 2z = 0$.

8. Observação. É possível, atribuindo-se a k um valor conveniente, fazer com que a transformada $P(u+k) = 0$ seja desprovida do têrmo de um certo grau. De fato, desenvolvendo $P(u+k)$ pela fórmula de TAYLOR

$$P(u+k) \equiv P(k) + \frac{u}{1!} P'(k) + \ldots + \frac{u^n}{n!} P^{(n)}(k) = 0 \quad (13)$$

vemos que o coeficiente do têrmo de grau p $(p \leqslant n)$ em u é $\frac{1}{p!} P^{(p)}(k)$. Tomando, então, para valor de k uma raiz da equação $P^{(p)}(z) = 0$, a transformada (13) será desprovida do têrmo de grau p, visto ser nulo seu coeficiente.

Essa transformação é utilizada, por exemplo, para a resolução algébrica das equações do 3.° grau, onde prèviamente se faz desaparecer o têrmo do segundo grau.

9. Exercício. *Obter uma transformada da equação*

$$P(z) \equiv z^3 - 9z^2 + 20z - 12 = 0$$

que seja desprovida de têrmo do 2.° grau.

RESOLUÇÃO: De acôrdo com a observação anterior, devemos formar a transformada $P(u+k) = 0$, sendo k uma raiz de $P''(z) = 0$. Como $P''(z) \equiv 6z - 18$, concluimos que há apenas um valor de k nessas condições, a saber $k = 3$. Formemos, então, a transformada $P(u+3) = 0$. Temos, aplicando o algoritmo de RUFFINI-HORNER

	1	−9	20	−12
3	1	−6	2	−6
3	1	−3	−7	
3	1	0		
	1			

A transformada será $z^3 - 7z - 6 = 0$.

10. Transformação multiplicativa. Seja aplicar à equação (9) a transformação

$$u = kz \quad (14)$$

da qual se tira

$$z = \frac{u}{k} \tag{15}$$

A transformada será, então, a equação

$$f\left(\frac{u}{k}\right) \equiv a_0 \left(\frac{u}{k}\right)^n + a_1 \left(\frac{u}{k}\right)^{n-1} +$$

$$+ a_2\left(\frac{u}{k}\right)^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \tag{16}$$

ou

$$a_0 u^n + k a_1 u^{n-1} + k^2 a_2 u^{n-2} + \ldots + k^n a_n = 0 \tag{17}$$

CONCLUSÃO: *Dada uma equação*

$$P(z) = 0 \tag{18}$$

obtém-se a transformada cujas raízes sejam iguals às raízes de (18) multiplicadas por uma constante k, multiplicando-se cada têrmo de (18) por uma potência de k cujo expoente somado ao expoente de z no têrmo dê o grau da equação.

11. Exercício. *Dada a equação* $z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = 0$, *obter a transformada desta cujas raizes sejam, respectivamente, iguais aos dôbros das raizes da equação dada.*

RESOLUÇÃO: De acôrdo com o resultado anterior, a equação transformada é

$$u^3 - 2 \times 4u^2 + 2^2 \times 5u - 2^3 \times 2 = 0$$

ou

$$u^3 - 8u^2 + 20u - 16 = 0$$

12. Exercício. *Obter uma transformada da equação*

$$2z^3 - 9z^2 + 13z - 6 = 0$$

cujo coeficiente do têrmo do 3.º grau seja a unidade.

RESOLUÇÃO: Façamos uma transformação multiplicativa $u = kz$. Obtemos

$$2z^3 - 9kz^2 + 13k^2z - 6k^3 = 0$$

Fazendo, então, k igual ao coeficiente do primeiro têrmo ($k = 2$) (*) e dividindo tôda a equação por 2, obtemos a transformada pedida

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$$

13. Casos particulares da transformação multiplicativa.

I. Supondo $k = -1$, a transformada (16) ficará

$$a_0(-u)^m + a_1(-u)^{m-1} + \dots + a_{m-1}(-u) + a_m = 0 \quad (19)$$

isto é, poderá ser obtida de (9) trocando-se os sinais dos têrmos de grau ímpar. Como, entretanto, convém conservar positivo o primeiro têrmo, obtém-se a transformada (19), trocando-se o sinal dos têrmos de paridade contrária à do primeiro.

A equação (19) é habitualmente designada *transformada em* $-z$ da equação (9).

Exemplo I: A transformada em $-z$ da equação

$$z^5 - 2z^4 - 3z^3 + 5z^2 + 6z + 8 = 0$$

é a equação

$$z^5 + 2z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 6z - 8 = 0$$

obtida da anterior, trocando-se os sinais dos têrmos de grau par.

Exemplo II: A transformada em $-z$ da equação

$$4z^4 - 6z^2 + 3z - 1 = 0$$

obtém-se trocando-se o sinal do único têrmo de grau ímpar

$$4z^4 - 6z^2 - 3z - 1 = 0$$

II. Supondo $k = \dfrac{1}{h}$, sendo h um número inteiro e positivo, a transformada (16) fica

$$a_0h^nu^n + a_1h^{n-1}u^{n-1} + \dots + a_{n-1}hu + a_n = 0$$

Observemos que as raizes desta são iguais às raizes da primitiva divididas por h.

(*) Em geral, toma-se para k o menor valor que permita dividir tôda a equação pelo coeficiente do primeiro têrmo.

Exemplo: Achar a transformada da equação

$$z^3 - 12z^2 + 44z - 48 = 0$$

cujas raizes sejam iguais às metades das raizes desta equação.

RESOLUÇÃO: De acôrdo com o resultado anterior, a transformada será

$$2^3 \,.\, z^3 - 12 \,.\, 2^2 \,.\, z^2 + 44 \,.\, 2z - 48 = 0$$

ou

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$$

14. Transformação recíproca. Aplicando à equação (9) a transformação recíproca

$$u = \frac{1}{z} \quad \therefore \quad z = \frac{1}{u}$$

obtemos a transformada

$$a_0 \frac{1}{u^m} + a_1 \frac{1}{u^{m-1}} + \ldots + a_{m-1} \frac{1}{u} + a_m = 0$$

ou, supondo finitas e não nulas as raizes da equação dada,

$$a_0 + a_1 u + \ldots + a_{m-1} u^{m-1} + a_m u^m = 0$$

CONCLUSÃO: *A transformada recíproca de uma equação é outra equação do mesmo grau cujos coeficientes são os coeficientes da primitiva (suposta completa) tomados em ordem inversa.*

Exemplo: A transformada recíproca da equação

$$5x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 6x + 4 = 0$$

cujos coeficientes dos têrmos são

$$5, \; 0, \; -3, \; 2, \; 0, \; -6, \; 4$$

é a equação

$$4x^6 - 6x^5 + 2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$$

15. Exercícios.

1. Dadas as equações
$$\begin{cases} \text{a)} \; z^3 - 12z^2 + 47z - 60 = 0 \\ \text{b)} \; z^3 - 15z^2 + 74z - 120 = 0 \\ \text{c)} \; z^4 - 10z^3 + 35z^2 - 50z + 24 = 0 \end{cases}$$
determinar suas transformadas de raizes iguais às raizes destas aumentadas de uma unidade.

V

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ u^3 - 15u^2 + 74u - 120 = 0 \\ \text{b)}\ u^3 - 18u^2 + 107u - 210 = 0 \\ \text{c)}\ u^4 - 14u^3 + 71u^2 - 154u + 120 = 0 \end{cases}$$

2. Dadas as equações .... $\begin{cases} \text{a)}\ z^3 - 18z^2 + 101z - 180 = 0 \\ \text{b)}\ 2z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 10 = 0 \\ \text{c)}\ z^3 - 11z^2 + 36z - 36 = 0 \end{cases}$

determinar suas transformadas de raizes iguais às raizes destas diminuídas de duas unidades.

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ u^3 - 12u^2 + 41u - 42 = 0 \\ \text{b)}\ 2u^4 + 12u^3 + 21u^2 + 4u - 2 = 0 \\ \text{c)}\ u^3 - 5u^2 + 4u = 0 \end{cases}$$

3. Determinar as transformadas das equações .... $\begin{cases} \text{a)}\ z^3 - 12z^2 + 41z - 42 = 0 \\ \text{b)}\ z^3 - 18z^2 + 107z - 210 = 0 \\ \text{c)}\ z^3 - 18z^2 + 101z - 180 = 0 \end{cases}$

desprovidas de têrmos do 2.º grau.

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ u^3 - 7u - 6 = 0 \\ \text{b)}\ u^3 - u = 0 \\ \text{c)}\ u^3 - 7u - 6 = 0 \end{cases}$$

4. Determinar as transformadas das equações .... $\begin{cases} \text{a)}\ 2z^3 - 9z^2 + 13z - 6 = 0 \\ \text{b)}\ 2z^3 + z^2 - 18z - 9 = 0 \end{cases}$

cujas raizes são os dôbros das raizes destas.

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ u^3 - 9u^2 + 26u - 24 = 0 \\ \text{b)}\ u^3 + u^2 - 36u - 36 = 0 \end{cases}$$

5. Determinar as transformadas em $-z$ das equações .... $\begin{cases} \text{a)}\ 2z^5 - 3z^3 + 4z^2 - 7 = 0 \\ \text{b)}\ z^4 + z^3 - 2z^2 + 6z - 3 = 0 \end{cases}$

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ 2u^5 - 3u^3 - 4u^2 + 7 = 0 \\ \text{b)}\ u^4 - u^3 - 2u^2 - 6u - 3 = 0 \end{cases}$$

6. Determinar as transformadas recíprocas das equações $\begin{cases} \text{a)}\ z^5 + z^2 - 3z - 4 = 0 \\ \text{b)}\ 2z^4 - 6z^3 + 1 = 0 \end{cases}$

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ 4u^5 + 3u^4 - u^3 - 1 = 0 \\ \text{b)}\ u^4 - 6u + 1 = 0 \end{cases}$$

7. Determinar as transformadas das equações .... $\begin{cases} \text{a)}\ 36z^4 - 37z^2 + 1 = 0 \\ \text{b)}\ 24z^4 + 14z^3 - z^2 - z = 0 \end{cases}$

cujos coeficientes dos primeiros têrmos sejam iguais à unidade.

$$\textit{Resp.}: \begin{cases} \text{a)}\ u^4 - 37u^2 + 36 = 0 \\ \text{b)}\ u^4 + 7u^3 - 6u^2 - 72 = 0 \end{cases}$$

Solução do Exercício n.º 6 do Cap. VIII,

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	$-\infty$		-2		$-1{,}15$		0		$+1{,}15$		2		$+\infty$
y'				$-$			0			$+$			
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-0{,}5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
					inflex.		min.		inflex.				

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

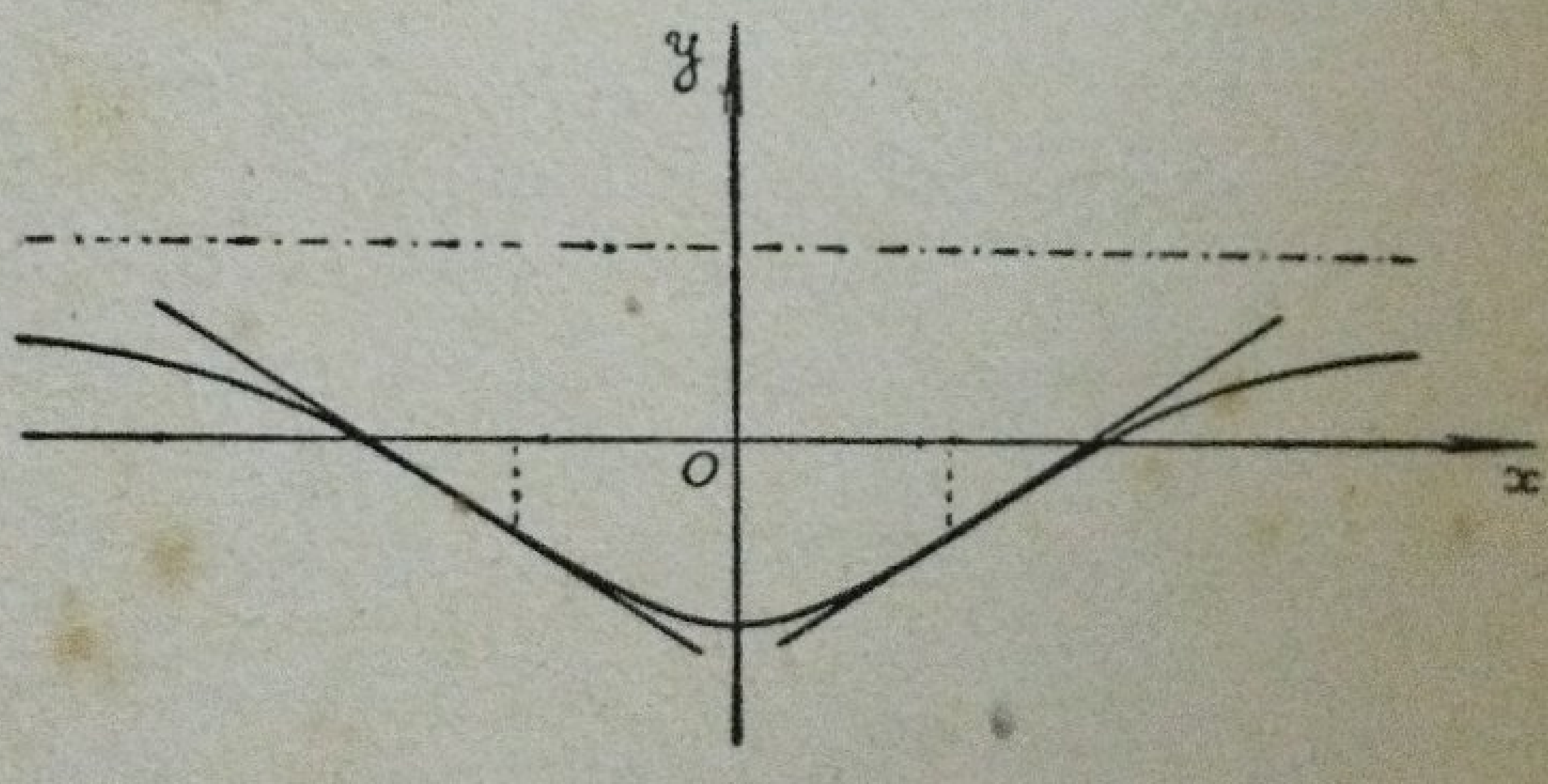

FIG. 84

CAPÍTULO XV

EQUAÇÕES RECÍPROCAS (*)

1. Preliminares. Diz-se que uma equação é *recíproca* se, admitindo uma raiz a ($a \neq \pm 1$) de ordem de multiplicidade p ($p = 1, 2, \ldots$), admite outra raiz $\dfrac{1}{a}$ de mesma ordem de multiplicidade. Isto equivale a dizer que uma equação recíproca têm as mesmas raízes de sua *transformada recíproca* (**Cap. XIV, n.° 14**).

Para simplicidade de expressão, no presente capítulo, diremos *equação* no sentido de *equação algébrica, racional e inteira*, suposto ordenado o polinômio de seu primeiro membro. Por *têrmos equidistantes dos extremos* da equação entenderemos dois têrmos dêsse polinômio tais que antes do primeiro haja tantos têrmos quantos haja depois do segundo. Por *têrmo central* da equação designaremos o têrmo do polinômio desta que é precedido e seguido do mesmo número de têrmos (**).

2. Teorema. Consideremos a equação recíproca

$$P(z) \equiv a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0 \qquad (1)$$

Como a equação (1) deve ter as mesmas raizes de sua transformada recíproca

$$z^nP\left(\frac{1}{z}\right) \equiv a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0 \qquad (2)$$

em virtude do que vimos no **Cap. XIII, n.° 3** concluimos que $P(z)$ e $z^nP\left(\dfrac{1}{z}\right)$ diferem apenas por um fator constante, isto é, sendo k êsse fator, devemos ter

(*) Éste capítulo consta apenas do programa do Curso Científico.

(*) Esta definição refere-se naturalmente às equações de número ímpar de têrmos ou polinômio de seu primeiro membro.

$$z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \equiv kP(z) \tag{3}$$

ou

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \equiv$$
$$\equiv k a_0 z^n + k a_1 z^{n-1} + \ldots + k a_{n-1} z + k a_n$$

Em virtude do teorema fundamental sôbre identidade de polinômios temos

$$a_n = k a_0,\ a_{n-1} = k a_1,\ \ldots\ a_1 = k a_{n-1},\ a_0 = k a_n \tag{4}$$

donde tiramos, respectivamente,

$$\frac{a_n}{a_0} = k,\ \frac{a_{n-1}}{a_1} = k,\ \ldots\ \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{1}{k},\ \frac{a_n}{a_0} = \frac{1}{k}$$

Estas igualdades só se verificam se

$$k = \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad k^2 = 1$$

donde $k = \pm 1$.

As relações (4) ficam, então,

$$a_n = \pm a_0,\ a_{n-1} = \pm a_1,\ \ldots\ a_1 = \pm a_n,\ a_0 = \pm a_n \tag{5}$$

Se n é ímpar, $P(z)$ tem um número par $n + 1$ de têrmos, os quais se podem corresponder dois a dois pelas relações (5).

Se n é par, ou seja $n = 2p$, sendo p um número inteiro, o têrmo central de $P(z)$ (suposto ordenado) é $a_p z^p$. Das igualdades (5) resulta

$$a_p = \pm a_p$$

Então, na hipótese $k = -1$, tem-se necessàriamente

$$a_p = 0$$

Conclusão: *Se uma equação é recíproca, os coeficientes de seus têrmos equidistantes dos extremos são iguais ou simétricos, faltando o têrmo central, neste último caso, se a equação é do grau par.*

3. Recíproca do teorema anterior.

I. Seja a equação

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

cujos coeficientes dos têrmos equidistantes dos extremos são iguais. Então esta equação coincide com sua transformada recíproca, sendo, portanto, recíproca.

II. Consideremos a equação

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots - a_1z - a_0 = 0 \tag{6}$$

cujos coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos. Formando sua transformada recíproca, veremos que ela é idêntica à equação (6) se n é ímpar ou se n é par desde que falte o têrmo central.

CONCLUSÃO: *Se, numa equação, os coeficientes dos têrmos equidistantes dos extremos são iguais ou simétricos (faltando neste último caso o têrmo central se a equação é de grau par) a equação é recíproca.*

4. Condição necessária e suficiente para que uma equação seja recíproca. Dos teoremas anteriores se conclui:

A condição necessária e suficiente para que uma equação seja recíproca é que os coeficientes de seus têrmos equidistantes dos extremos sejam iguais ou simétricos, faltando neste último caso o têrmo central se a equação é de grau par.

5. Teorema. Suponhamos que a equação (1) não tenha as raizes $+1$ e -1, isto é, que

$$P(1) \neq 0 \qquad P(-1) \neq 0 \tag{7}$$

Fazendo, então, sucessivamente $z = 1$ e $z = -1$ na identidade (3), obtemos

$$P(1) = kP(1) \quad \text{e} \quad (-1)^n P(-1) = kP(-1)$$

o que, em virtude da hipótese (7) só se verifica se

$$k = 1 \text{ e } k = (-1)^n$$

isto é, se n é par.

CONCLUSÃO: *Se uma equação recíproca não admite as raizes* $+1$ e -1 *ela é de grau par e os coeficientes de seus têrmos equidistantes dos extremos são iguais.*

6. Aplicação. Suponhamos que uma equação recíproca

$$P(z) = 0 \tag{8}$$

admita as raizes $z = 1$ e $z = -1$ com graus de multiplicidade p e q, respectivamente. Podemos, então, escrever

$$P(z) \equiv (z-1)^p \ (z+1)^q \ Q(z) \tag{9}$$

Então

$$Q(z) = 0 \tag{10}$$

é uma equação recíproca que só contém as raizes conjugadas duas a duas da equação (8) e diferentes de $+1$ e -1. De acôrdo com o teorema anterior, a equação (10) é, portanto, de grau par e os coeficientes de seus têrmos equidistantes dos extremos são iguais.

Da identidade (9) se conclui que é sempre possível, dividindo $P(z)$ por potências convenientes de $z-1$ e $z+1$, reduzir tôda equação recíproca a uma equação do tipo (10). Estudemos, então, sua resolução.

7. Resolução de uma equação recíproca de grau par cujos coeficientes dos têrmos equidistantes dos extremos são iguais. Seja a equação do grau $2n$

$$P(z) \equiv a_0 z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + \ldots + a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \tag{11}$$

Como supomos $a_0 \neq 0$ (pois a equação, por hipótese, é do grau $2n$) a equação (11) não admite a raiz nula, visto que

$$P(0) = a_0 \neq 0$$

Dividindo, então, ambos os membros da equação por z^n, obtemos

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} = 0,$$

ou grupando os têrmos de mesmos coeficientes

$$a_0 \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) + a_1 \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) + \ldots + a_n = 0 \tag{12}$$

Observemos que, qualquer que seja p (inteiro) se tem

$$\left(z^{p-1} + \frac{1}{z^{p-1}}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) \equiv z^p + z^{p-2} + \frac{1}{z^{p-2}} + \frac{1}{z^p}$$

donde se tira

$$z^p + \frac{1}{z^p} \equiv \left(z^{p-1} + \frac{1}{z^{p-1}}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{p-2} + \frac{1}{z^{p-2}}\right) \quad (13)$$

Observando que $z^o + \dfrac{1}{z^o} = 2$ e fazendo

$$z + \frac{1}{z} = u \quad (14)$$

a relação (13) fornece para $p = 2, 3, 4, \ldots$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^o + \frac{1}{z^o}\right) = u^2 - 2$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right) = u^3 - 3u \quad (15)$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = u^4 - 4u^2 + 2$$

....

As relações anteriores permitem determinar para $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, $z^{n-1} + \dfrac{1}{z^{n-1}}$, ... polinômios em u dos graus n, $n-1$, ... respectivamente. Substituindo-os na equação (12), obteremos uma equação do grau n, que dará n valores para u. Substituindo cada um dêstes n valores em (14), obteremos n equações do 2.º grau, cada uma das quais dará dois valores recíprocos para z. Os $2n$ valores de z, assim achados, serão as raizes da equação (11).

Verificamos, assim, que a resolução da equação (11) de grau $2n$, recai na resolução de uma equação do grau n, o que se denomina um *abaixamento* do grau da equação.

8. Exercício. *Resolver a equação recíproca*

$$6z^4 - 35z^3 + 62z^2 - 35z + 6 = 0$$

Resolução: Tratando-se de uma equação recíproca de grau par e de coeficientes equidistantes dos extremos iguais, podemos aplicar a regra anterior.

Dividindo ambos os membros da equação por z^2, obtemos

$$6z^2 - 35z + 62 - \frac{35}{z} + \frac{6}{z^2} = 0$$

ou

$$6\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 35\left(z + \frac{1}{z}\right) + 62 = 0 \tag{16}$$

Fazendo

$$z + \frac{1}{z} = u \tag{17}$$

resulta, de acôrdo com a primeira igualdade (15),

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$$

Substituindo estes valores em (16) obtemos, após a simplificação

$$6u^2 - 35u + 50 = 0$$

equação cujas raízes são $u_1 = \frac{10}{3}$ e $u_2 = \frac{5}{2}$.

Substituindo êsses valores sucessivamente em (17), obtemos as equações do segundo grau

$$z + \frac{1}{z} = \frac{10}{3} \quad \text{ou} \quad 3z^2 - 10z + 3 = 0$$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad 2z^2 - 5z + 2 = 0$$

Sendo $z' = 3$, $z'' = \frac{1}{3}$ as raizes da primeira e $z' = 2$, $z'' = \frac{1}{2}$ as da segunda, concluiremos que as raizes da equação dada são 3, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$.

9. Exercício. *Resolver a equação recíproca*

$$P(z) \equiv 4z^7 + 4z^6 - 21z^5 - 21z^4 + 21z^3 + 21z^2 - 4z - 4 = 0$$

RESOLUÇÃO: Como não se trata de uma equação nas condições da que foi estudada no **n.° 7**, poderemos fazê-la recair neste caso, dividindo $P(z)$ pelas maiores potências possíveis de $z - 1$ e $z + 1$ **n.° 6**. Para isso, utilizando o dispositivo prático de BRIOT-RUFFINI, verificamos se $P(z)$ é divisível por $z - 1$; em caso afirmativo procederemos anàlogamente em relação ao quociente e assim por diante até encontrarmos um quociente que não seja divisível por $z - 1$. O mesmo faremos, a seguir, em relação a $z + 1$, com êste quociente.

Para o exemplo dado teríamos

	4	4	—21	—21	+21	+21	— 4	—4
1	4	8	—13	—34	—13	+ 8	+ 4	0
1	4	12	— 1	—35	—48	—40	—36 = Resto	
...								
—1	4	4	—17	—17	+ 4	+ 4	0	
—1	4	0	—17	0	4	0		
—1	4	—4	—13	13	— 9 = Resto			

Verificamos, assim, que $P(z)$ é divisível por $z - 1$ e por $(z + 1)^2$, sendo $4z^4 - 17z^2 + 4$ o quociente da divisão de $P(z)$ pelo produto $(z - 1)\,(z + 1)^2$. Igualando a zero êste trinômio, obtemos uma equação do tipo estudado no **n.° 7**. Aplicando, então, o processo de resolução indicado nesse parágrafo, obtemos as raizes $2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$

As raizes da equação são, pois, $1, -1, -1, 2, \frac{1}{2}, -2$ e $-\frac{1}{2}$.

10. Exercícios.

Calcular as raízes das seguintes equações recíprocas:

1. $6z^4 - 5z^3 - 38z^2 - 5z + 6 = 0$ *Resp.:* $3, \frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}$

2. $6z^4 + 35z^3 + 62z^2 + 35z + 6 = 0$ *Resp.:* $-2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$

3. $4z^6 - 21z^4 + 21z^2 - 4 = 0$ *Resp.:* $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$

4. $z^6 - 6z^5 + 9z^4 - 9z^2 + 6z - 1 = 0.$ *Resp.:* $-1, +1, +1, +1, 2 \pm \sqrt{3}$

5. $4z^3 - 21z^2 + 21z - 4 = 0.$ *Resp.:* $1, 4, \frac{1}{4}$

6. $4z^5 - 4z^4 - 17z^3 + 17z^2 + 4z - 4 = 0$

Resp.: $1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$

7. $12z^7 - 92z^6 + 293z^5 - 503z^4 + 503z^3 - 293z^2 + 92z - 12 = 0$

Resp.: $1, 1, 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

Solução do Exercício n.º 7 do Cap. VIII

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0		$+$		
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0{,}018$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+8$
			max.		min.				

Nota. Tal como no exercício do **Cap. VIII, n.º 6** (e pelas mesmas razões ali dadas) não foram pesquisados os pontos de inflexão.

2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

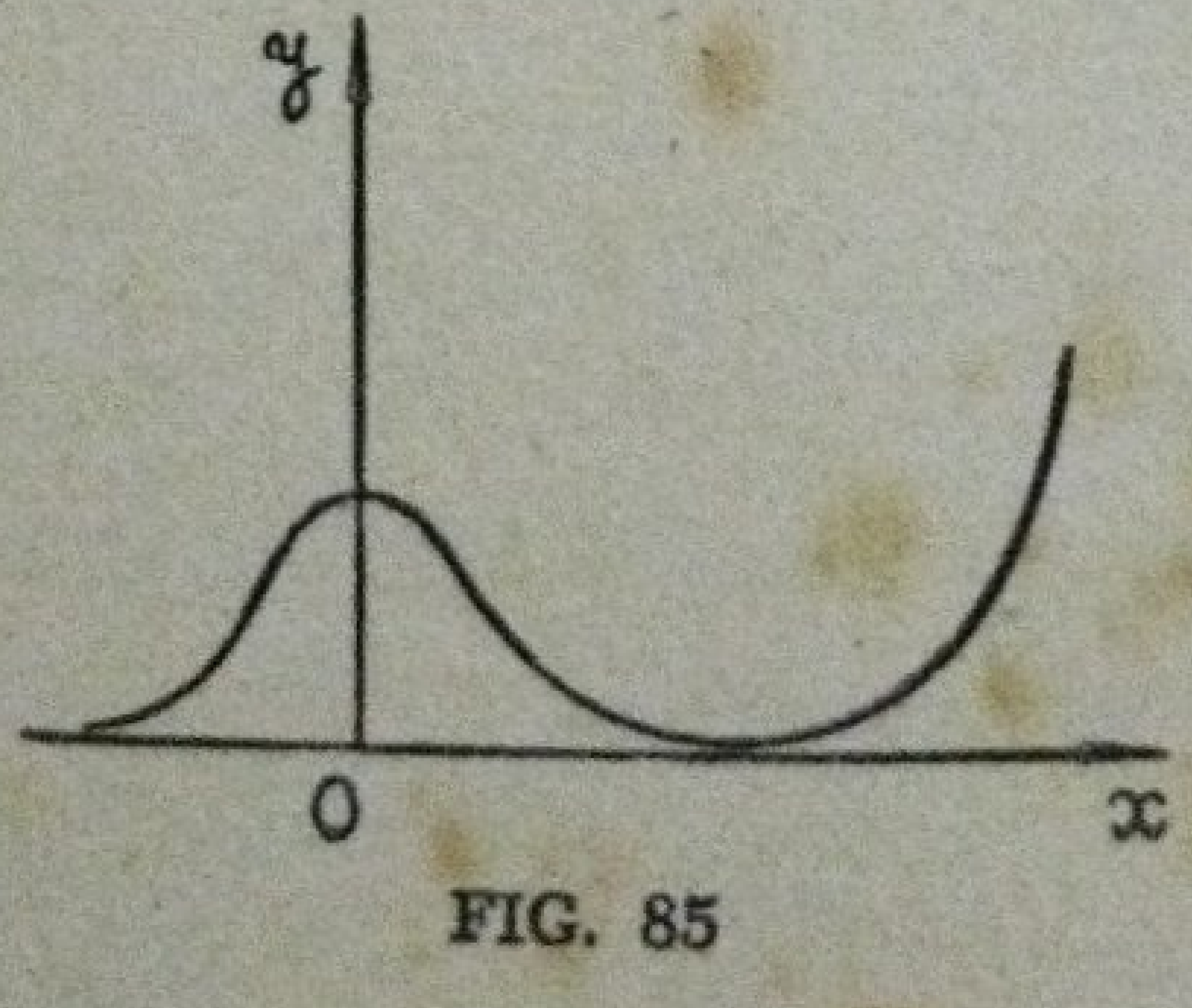

FIG. 85

CAPÍTULO XVI

CÁLCULO DAS RAÍZES INTEIRAS (*)

1. Resolução de uma equação algébrica. Consideremos a equação

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (1)$$

cujo primeiro membro é um polinômio racional, inteiro e de coeficientes reais. A *resolução algébrica* da equação (1) consiste em estabelecer para suas raízes uma expressão

$$z = \varphi(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n) \qquad (2)$$

função dos coeficientes de (1). Por exemplo, a resolução algébrica da equação do 2.° grau

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

é, como já sabemos, feita pela fórmula

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$

Para as equações do 3.° e do 4.° grau e da forma (1) há, também, fórmulas de resolução do tipo (2).

Se, porém, n é superior a 4, a equação (1) não pode ser resolvida algèbricamente. Essa propriedade foi descoberta pelo matemático italiano Ruffini em 1799 e demonstrada rigorosamente pelo matemático norueguês Abel em 1828.

O entrave de tal impossibilidade para a teoria das equações algébricas foi superado por um recurso diferente, a *resolução numérica* das equações. Consiste ela num conjunto sistemático de princípios e algoritmos que, aplicados *a cada*

(*) Êste capítulo consta apenas do programa do Curso Científico.

caso particular das equações (1), permitem o cálculo de suas raízes. Construiu-se, assim, um ramo especial na Teoria das Equações, de que, segundo o programa oficial, temos feito um estudo parcial a partir do Capítulo XII.

Na *resolução algébrica*, as fórmulas gerais (2) variam conforme o *grau* da equação (1); na *resolução numérica*, os algoritmos se diferenciam segundo a *natureza* da raiz que se deseja obter, havendo, assim, processos sistemáticos distintos para o cálculo das quatro categorias de raízes: inteiras, fracionárias, irracionais e complexas.

Trataremos, no presente capítulo, dos recursos mais simples para o cálculo das raízes inteiras das equações (1).

2. Delimitação das raízes reais. O problema geral da delimitação das raízes de uma equação (1) consiste em calcular dois números reais l e L ($l < L$), tão próximos quanto possível, tais que aquelas raízes estejam contidas no intervalo $[l, L]$. Diz-se, então, que L é uma *cota superior* dessas raízes e que l é uma *cota inferior* delas.

Se a equação (1) contém raízes positivas e negativas, L é a *cota superior das raízes positivas* de (1) e l é a *cota inferior das raizes negativas* de (1). Nessa hipótese, tem-se, necessàriamente, $L > 0$ e $l < 0$.

Observemos que a cota inferior das raízes negativas de uma equação $P(z) = 0$ é simétrica da cota superior das raízes positivas da transformada $P(-z) = 0$, pois as raízes positivas dessa transformada são simétricas das raízes negativas da equação primitiva. Basta, portanto, estabelecer um algoritmo para o cálculo da cota superior das raízes positivas da equação (1). Veremos, no parágrafo seguinte um método de aplicação simples, que dá muito boa aproximação.

3. Método de Laguerre. Dividamos o polinômio $P(z)$ por $z - L$, sendo L um número positivo. Obtemos um quociente $b_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \dots + b_{n-1}$ e um resto $R = P(L)$ **(Cap. XII, n.º 11)** sendo, portanto,

$$P(z) \equiv (z - L)(b_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + P(L) \quad (3)$$

Pela regra de RUFFINI (**Cap. XII, n.° 13**), temos

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= b_0L + a_1 = a_0L + a_1 \\
b_2 &= b_1L + a_2 = a_0L^2 + a_1L + a_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (4) \\
b_{n-1} &= b_{n-2}\,L + a_{n-1} = a_0\,L^{n-1} + a_1\,L^{n-2} + \dots + a_{n-1} \\
R &= P(L) = a_0L^n + a_1\;L^{n-1} + \dots + a_n
\end{aligned}
$$

Como podemos supor $a_0 > 0$, quando L tender para $+\infty$, os polinômios em L (4), denominados polinômios de LAGUERRE, terão para limite $+\infty$ (**Cap. III, n.° 13**). Então, para um valor suficientemente grande de L, todos os polinômios (4) serão positivos sendo, também, positivos para qualquer valor de L superior a êsse, o que se deduz fàcilmente da lei de formação dos coeficientes $b_0, b_1, \dots b_{n-1}, R$. Pela identidade (3), vê-se que, para qualquer valor de z superior a êsse valor de L, será $P(z) > 0$, isto é, não haverá raiz real de $P(z) = 0$ superior a êsse valor de L, que será, portanto, uma cota superior das raízes positivas de $P(z) = 0$.

A aplicação do método de LAGUERRE é feita de modo muito simples com o auxílio do dispositivo prático de RUFFINI. Seja, por exemplo, calcular uma cota superior das raízes positivas da equação

$$P(z) \equiv 2z^4 - 5z^3 - 4z^2 - 50z + 7 = 0$$

Calculam-se, pela regra prática de RUFFINI, os coeficientes dos quocientes das divisões de $P(z)$ sucessivamente por

$$z-1,\ z-2,\ z-3,\ \dots \qquad (5)$$

até se chegar a uma divisão em que êsses coeficientes sejam positivos, abandonando-se cada divisão anterior logo que apareça um coeficiente negativo. Para o exemplo dado teremos

	2	—5	—4	—50	7
1	2	—			
2	2	—			
3	2	1	—		
4	2	3	8	—	
5	2	5	21	55	+

5 é, portanto, uma cota superior das raízes positivas da equação dada.

4. Observações.

I. Se, para um valor L_1 de L, alguns dos polinômios $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ se anulam, sendo os demais e $P(L_1)$ positivos, L_1 é, ainda, uma cota superior das raízes positivas da equação $P(z) = 0$. Por exemplo, aplicando o método de LAGUERRE à equação $2z^4 - 3z^3 - 5z^2 - 12z + 4 = 0$, concluimos que 3 é uma cota superior de suas raízes positivas, como mostra o cálculo ao lado.

	2	—3	—5	—12	+4
1	2	—			
2	2	1	—		
3	2	3	4	0	+4

II. Nem sempre é necessário efetuar as divisões por todos os binômios (5). Cada exemplo particular poderá ter uma simplificação especial. Por exemplo, para a equação

$$2z^4 - 27z^3 - 41z + 30 = 0$$

basta iniciar pela divisão por $z - 14$, pois, para qualquer divisão anterior (por $z - 1$, $z - 2$, $\ldots$ $z - 13$), o segundo coeficiente do quociente será negativo.

5. Teorema. *Toda raiz inteira da equação algébrica, racional, inteira e de coeficientes inteiros*

$$\mathrm{P}(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (6)$$

é divisor do têrmo a_n.

DEMONSTRAÇÃO: Seja r uma raiz inteira da equação (6). Temos, então,

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

ou

$$(a_0 r^{n-1} + a_1 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1})\, r = - a_n$$

Como, por hipótese, $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ e r são inteiros, a expressão entre parêntesis tem um valor numérico *inteiro*. Então, a_n é o produto de r por um inteiro, isto é, r é divisor de a_n.

A recíproca dêsse teorema não é verdadeira, pois pode haver divisores de a_n que não sejam raízes de (6). Por exemplo, nenhum dos divisores ± 1, ± 2 e ± 4 de 4 é raiz da equação $x^2 + x + 4 = 0$.

6. Regras de exclusão de Newton. Seja r uma raiz inteira da equação (6). Temos, então,

$$P(z) \equiv (z-r)\,Q(z) \quad \text{ou} \quad \frac{P(z)}{z-r} \equiv Q(z) \qquad (7)$$

sendo $Q(z)$ um polinômio do grau $n-1$ de coeficientes inteiros. Fazendo na identidade (7) $z=1$ e $z=-1$, obtemos, respectivamente,

$$-\frac{P(1)}{r-1} = Q(1) \qquad -\frac{P(-1)}{r+1} = Q(-1)$$

Como $Q(1)$ e $Q(-1)$ são números inteiros, porque os coeficientes de $Q(z)$ são inteiros, concluimos que *a condição necessária para que r seja raiz da equação* (6) *é que os quocientes* $\frac{P(1)}{r-1}$ e $\frac{P(-1)}{r+1}$ *sejam inteiros.*

Essa condição, todavia, *não é suficiente*, isto é, um inteiro r, divisor de a_n, pode verificar as condições anteriores e não ser raiz da equação (6).

7. Cálculo das raízes inteiras. Os resultados anteriores permitem estabelecer o seguinte processo para o cálculo das raízes inteiras da equação (6):

I. Calculam-se, pelo método de Laguerre, a cota superior L das raízes positivas e a cota inferior l das raízes negativas da equação (6) (*).

II. Calculam-se os divisores de a_n, contidos no intervalo $[l, L]$.

III. Eliminam-se entre êsses divisores aqueles que não satisfazem a condição necessária do **n.º 6** (regras de exclusão de Newton).

IV. Verificam-se se os divisores restantes são raízes de (6), dividindo-se $P(z)$ pelos binômios $z-r$, sendo r cada um dêsses divisores, operações que se fazem ràpidamente aplicando o dispositivo prático de Ruffini.

(*) Quando é pequeno o número de divisores de a_n, o cálculo dessas cotas não é muito compensador.

Se, ao aplicar a regra de exclusão de NEWTON, ocorrer $P(1) = 0$ (ou $P(-1) = 0$), então, será 1 (ou -1) raiz de 8, a qual pode ser logo separada, dividindo-se $P(z)$ por $z - 1$ (ou por $z + 1$).

O exemplo seguinte esclarece a regra dada.

8. Exercício. *Calcular as raízes inteiras da equação*

$$P(z) = z^4 - 6z^3 - 29z^2 + 114z + 280 = 0$$

RESOLUÇÃO:

I. *Cálculo da cota superior L das raízes positivas.*

Aplicando o método de LAGUERRE, obtemos a cota $L = 10$, como se vê pelo cálculo abaixo:

	1	-6	-29	$+114$	$+280$	
6	1	0	—			
7	1	1	—			
8	1	2	—			
9	1	3	—			
10	1	4	11	+	+	(*)

II. *Cálculo da cota inferior das raízes negativas.*

Sendo

$$P(-z) \equiv z^4 + 6z^3 - 29z^2 - 114z + 280 = 0$$

a transformada em $-z$ da equação dada (**Cap. XIV, n.º 13**) calculamos a cota superior de suas raízes positivas. Aplicando o método de LAGUERRE, obtemos para essa cota o valor 5, como se vê no cálculo abaixo. Então, a cota inferior das raízes negativas da equação dada é $l = -5$.

	1	$+6$	-29	-114	$+280$
1	1	7	—		
2	1	8	—		
3	1	9	—		
4	1	10	11	—	
5	1	11	26	16	+

(*) Observe o leitor que não há necessidade de *calcular* os coeficientes, uma vez que se tenha certeza de que são *positivos*.

III. *Cálculo dos divisores de 280, contidos no intervalo* $[-5, 10]$.

Calculando os divisores de 280 pelo algoritmo conhecido da Aritmética, cuja disposição prática indicamos abaixo, concluímos que os divisores de 280, contidos no intervalo $[-5, 10]$ são:

$$+1,\ -1,\ +2,\ -2,\ +4,\ -4,\ +5,\ +7,\ +8 \qquad (9)$$

		1
280	2	2
140	2	4
70	2	8
35	5	5 — 10 — 20 — 40
7	7	7 — 14 — 28 — 56 — 35 — 70 — 140 — 280
1		

IV. *Aplicação das Regras de Exclusão de* NEWTON.

Sendo $P(1) = 360$ e $P(-1) = 144$, concluimos que 1 e -1 não são raízes da equação dada. Verificamos, então, para quais dentre os valores (9) de r (excetuados 1 e -1), os quocientes $\dfrac{360}{r-1}$ e $\dfrac{144}{r+1}$ são inteiros. Concluimos que sòmente para os valores $+2, -2, -4, +5$ e $+7$ de r êsses quocientes são inteiros.

V. Do cálculo anterior concluimos que sòmente $+2, -2, -4, +5$ e $+7$ podem ser raízes da equação dada. Verificamos, finalmente, quais são essas raízes, dividindo $P(z)$ por $z-2$, $z+2$, $z+4$, $z-5$ e $z-7$ e atendendo às seguintes observações:

a) Se uma dessas divisões por $z-r$ é exata, r é raiz da equação; realiza-se, então, a divisão do quociente achado por $z-r$ para verificar se r é *raiz dupla;* em caso afirmativo, a divisão do novo quociente por $z-r$ indicará se r é raiz tripla, etc.

b) Para simplicidade de cálculo, após cada última divisão exata, acima indicada, toma-se seu quociente para dividendo das divisões seguintes. No dispositivo prático abaixo, os coeficientes de cada um dêsses quocientes que se tornam dividendos estão encerrados em retângulos.

Com êsses esclarecimentos, o leitor compreenderá o seguinte cálculo final:

	1	−6	−29	114	280	
2	1	−4	−37	40	360	2 não é raiz da equação
−2	1	−8	−13	140	0	−2 é raiz da equação
−2	1	−10	7	126		−2 é raiz simples da equação
−4	1	−12	35	0		−4 é raiz da equação
−4	1	−16	99			−4 é raiz simples da equação (*)
5	1	−7	0			−5 é raiz simples da equação(**)
7	1	0				7 é raiz simples da equação

A equação tem, pois, quatro raízes simples: -2, -4, 5 e 7.

9. Observação. O leitor deve ter observado a vantagem prática do cálculo das cotas e da aplicação das Regras de Exclusão quando o número de divisores de a_n é grande. No exemplo dado, mediante cálculos muito simples, reduzimos os 32 divisores $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \ldots \pm 280$ de 280 a um grupo de apenas 5 *possíveis* raízes $(-2, -4, 2, 5$ e $7)$ para os ensaios finais pelo dispositivo prático de RUFFINI.

10. Algoritmo de PELETARIUS. Suponhamos que o polinômio racional e de coeficientes inteiros

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-2}\,z^2 + a_{n-1}\,z + a_n \tag{10}$$

seja divisível por $z - r$ (r inteiro). Sendo

$$b_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \ldots + b_{n-3}z^2 + b_{n-2}z + b_{n-1} \tag{11}$$

(*) Não seria necessário efetuar essa divisão; sabe-se, de antemão, que ela é inexata, porque 4 não é divisor de 35.

(**) Porque 5 não é divisor de 7 e, portanto, a próxima divisão por $z - 5$ seria inexata.

o quociente dessa divisão, sabemos, pela regra de Ruffini, que os coeficientes inteiros $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ e o resto nulo R são dados pelas relações

$$\begin{array}{ll} b_0 = a_0 & b_{n-2} = b_{n-3}r + a_{n-2} \\ b_1 = b_0 r + a_1 & b_{n-1} = b_{n-2}r + a_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & R = b_{n-1}r + a_n = 0 \end{array}$$

Dessas relações, a partir da última, tiramos, respectivamente,

$$-b_{n-1} = \frac{a_n}{r}, \quad -b_{n-2} = \frac{-b_{n-1} + a_{n-1}}{r},$$

$$-b_{n-3} = \frac{-b_{n-2} + a_{n-2}}{r} \ \ldots \ -b_0 = \frac{-b_1 + a_1}{r} \qquad (12)$$

Como $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ são inteiros, se uma qualquer das divisões (12) não é exata, ou se o último quociente é diferente de $-a_0$ (porque $b_0 = a_0$), concluimos que o polinômio (10) não é divisível por $z - r$.

Pode-se, então, no ensaio final das raízes inteiras, substitui a regra prática de Ruffini pelo cálculo sucessivo dos quocientes (12), interrompendo-se a divisão quando surgir o primeiro coeficiente fracionário.

Para o exemplo do **n.8** teríamos a seguinte disposição de cálculos, com os esclarecimentos abaixo indicados:

	1	—6	—29	114	280	
Linha 1......		●	49	127	140	2 (não é raiz)
Linha 2.........		—1	8	13	—140	—2 (é raiz)
Linha 3..............				●	70	—2 (é raiz simples)
Linha 4...............			1	—12	35	—4 (é raiz)
Linha 5......................					●	—4 (é raiz simples)
Linha 6......................				—1	7	5 (é raiz simples)
					1	7 (é raiz simples)

Cálculos correspondentes a cada linha:

Linha 1:

$$\frac{280}{2} = 140 \qquad \frac{140+114}{2} = 127 \qquad \frac{127-29}{2} = 49 \qquad \frac{49-6}{2} \text{ (fracionário)}$$

Linha 2:

$$\frac{280}{-2} = -140 \qquad \frac{-140+114}{-2} = 13 \qquad \frac{13-29}{-2} = 8 \qquad \frac{8-6}{-2} = -1$$

Linha 3:

$$\frac{-140}{-2} = 70 \qquad \frac{70+13}{2} \text{ (fracionário)}$$

Linha 4:

$$\frac{-140}{-4} = 35 \qquad \frac{35+13}{-4} = -12 \qquad \frac{-12+8}{-4} = 1$$

Linha 5:

$$\frac{35}{-4} \text{ (fracionário)}$$

Linha 6:

$$\frac{35}{5} = 7 \qquad \frac{7-12}{5} = -1$$

11. Exercícios.

1. Calcular, pelo método de LAGUERRE, cotas superiores das raízes positivas das equações:

   a) $z^3 - 7z + 8 = 0$ — *Resp.:* $L = 3$

   b) $2z^4 - 17z^3 - 6z^2 + 2 = 0$ — *Resp.:* $L = 9$

2. Calcular, pelo método de LAGUERRE, cotas inferiores das raízes negativas das equações:

   a) $2z^4 + 9z^3 + 30z + 4 = 0$ — *Resp.:* $l = -6$

   b) $z^3 - 9z - 4 = 0$ — *Resp.:* $l = -3$

3. Calcular, pelo processo indicado, as raízes inteiras das equações:

   a) $z^3 - 6z^2 - 2 + 30 = 0$ — *Resp.:* -2, 3 e 5.

   b) $z^3 - 13z^2 + 54z - 72 = 0$ — *Resp.:* 3, 4 e 6.

c) $z^3 - 5z^2 + 7z + 13 = 0$ *Resp.:* -1.

d) $z^4 - 14z^3 + 59z^2 - 94z + 48 = 0$ *Resp.:* 1, 2, 3 e 8.

e) $z^4 - 14z^3 + 67z^2 - 126z + 72 = 0$ *Resp.:* 1, 3, 4 e 6.

f) $z^4 + 3z^3 - 36z^2 + 32z = 0$ *Resp.:* -8, 0, 1 e 4.

g) $z^4 + 6z^3 - 4z^2 - 24z = 0$ *Resp.:* -6, -2, 0 e 2.

Solução do Exercício n.º 8 do Cap. VIII:

1. RESUMO DO ESTUDO DA VARIAÇÃO DA FUNÇÃO

(Considerando o radical com sinal positivo)

x	$-\infty$		0	A função não é definida neste intervalo	3		$+\infty$
y'		$-$				$-$	
y	1	$\searrow$	0		∞	$\searrow$	1

2. REPRESENTAÇÃO GRÀFICA

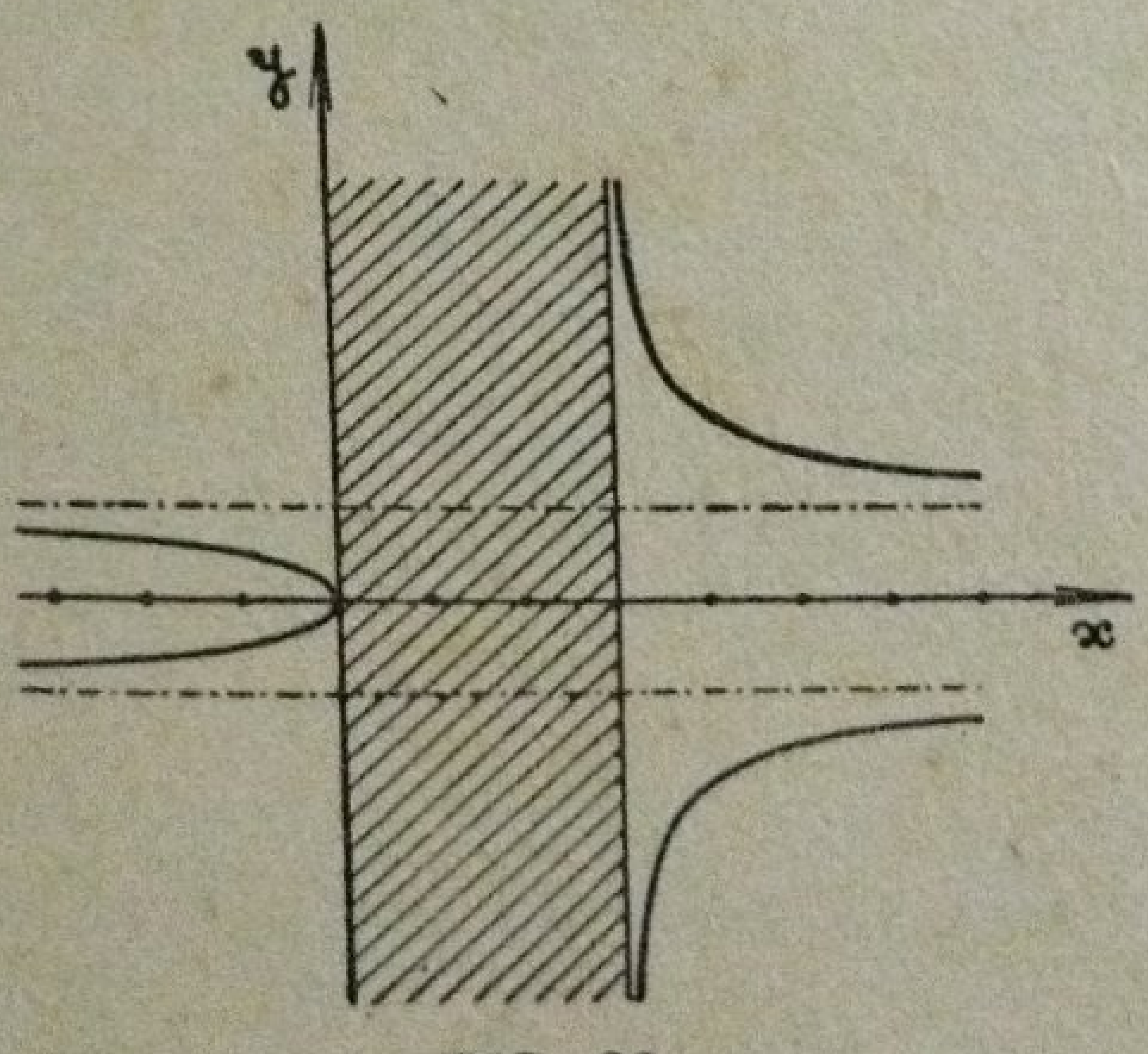

FIG. 86

ÍNDICE

Nota: Os Capítulos VII, VIII, X, XIV, XV e XVI fazem parte apenas do programa do Curso Científico. Os demais são comuns nos Cursos Clássico e Científico.

Preço dêste vol. Cr$ 90,00

São Paulo Editora S/A., imprimiu.