



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Mairon Carliel Pontarolo

**Problema Inverso da Equação do Calor com Condição de Contorno de  
Wentzell-Neumann**

Florianópolis/SC

2024

Mairon Carliel Pontarolo

**Problema Inverso da Equação do Calor com Condição de Contorno de  
Wentzell-Neumann**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Luciano Bedin

Florianópolis/SC

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.  
Dados inseridos pelo próprio autor.

Pontarolo, Mairon Carliel

Problema Inverso da Equação do Calor com Condição de Contorno de Wentzell-Neumann / Mairon Carliel Pontarolo ; orientador, Luciano Bedin, 2024.

92 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Problemas Inversos. 3. Equações Diferenciais Parciais. I. Bedin, Luciano . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

**Mairon Carliel Pontarolo**

**Problema Inverso da Equação do Calor com Condição de Contorno de  
Wentzell-Neumann**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado, em 24 de maio de 2024,  
pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Luciano Bedin  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Leonardo Silveira Borges  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Everton Boos  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Pedro Henrique Konzen  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que  
foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Dr. Luciano Bedin  
Orientador

Florianópolis, 2024.

Dedico este trabalho à minha família.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pois nos momentos mais difíceis e incertos foi a Ele que recorri. Reconheço humildemente a bondade divina que me proporcionou sabedoria, força e perseverança para cursar as disciplinas e desenvolver esta dissertação.

Quero expressar minha profunda gratidão à minha família. À minha mãe Luiza por todo o suporte, orações e por me ensinar os verdadeiros valores da vida. Ao meu pai Marildo, que nunca contestou minhas escolhas e faz o possível para me apoiar. Aos meus irmãos Evanio, Maicon, Carlile e Marlon, que sempre foram meus melhores amigos. Sem vocês, nada valeria a pena.

Agradeço imensamente ao professor Luciano, por sua orientação, paciência e apoio ao longo desse processo. Obrigado por esclarecer as diversas dúvidas que surgiram, sempre com muita humildade. Agradeço também ao professor Fermín, que foi meu orientador acadêmico e colaborou na parte computacional deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos aos membros da banca examinadora pela valiosa contribuição, dedicação e tempo dedicados na leitura e avaliação desta dissertação.

Sou grato também aos demais professores das disciplinas que cursei, suas contribuições foram fundamentais para o meu conhecimento.

Também quero deixar registrado meu agradecimento ao Romero, meu orientador da graduação, que me incentivou a ingressar no mestrado. Por seu intermédio, conheci o Everaldo e a Daiane, que me acolheram quando cheguei em Florianópolis e me motivaram a não desistir do mestrado. Conhecer vocês foi essencial.

Aos meus amigos mais próximos do mestrado: Bruna, Paulo e Pedro, agradeço pela amizade e parceria durante esse tempo. Seus apoios morais e emocionais foram indispensáveis para me manter motivado nos momentos desafiadores.

Por fim, expresso minha gratidão à CAPES pelo auxílio financeiro concedido, que possibilitou a realização desta pesquisa.

“Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àqueles que tem coragem de ir a fundo nela.”

Carl Friedrich Gauss

# Resumo

Neste trabalho, é realizado um estudo sobre o problema inverso da equação do calor com condição de contorno de Wentzell-Neumann não local, a partir de uma condição de sobre-determinação integral modelada como uma função energia. O problema é abordado sob dois aspectos: teóricos/analíticos e numéricos/computacionais. Na primeira abordagem são estabelecidas condições suficientes para a existência e unicidade de solução para o problema direto e inverso, resultando em dois principais teoremas. Na segunda abordagem, introduz-se um modelo numérico para a aproximação do termo fonte, a partir da semidiscretização do modelo contínuo e o método do ponto médio aplicado ao problema de valor inicial originado. Para lidar com o problema mal condicionado de dados com ruídos, o método de regularização utilizado se ampara na decomposição em valores singulares generalizada de um par de matrizes adequadas. A regularização é feita por truncamento, sendo o parâmetro de truncamento determinado pelo princípio da discrepância. Por fim, são apresentados exemplos numéricos para ilustrar a eficiência do método numérico introduzido.

**Palavras-chave:** Problema inverso de fonte. Condição de contorno não local. Decomposição em valores singulares generalizada truncada. Princípio da discrepância.

# Abstract

In this work, a study is conducted on the inverse problem of the heat equation with nonlocal Wentzell-Neumann boundary condition, from an integral overdetermination condition modeled as an energy function. The problem is approached from two aspects: theoretical/analytical and numerical/computational. In the first approach, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution to both direct and inverse problems are established, resulting in two main theorems. In the second approach, a numerical model is introduced for the approximation of the source term, based on the semidiscretization of the continuous model and the midpoint method applied to the resulting initial value problem. To address the ill-conditioned problem and noisy data, the regularization method employed relies on the generalized singular value decomposition of a proper matrix pair. Regularization is performed through truncation, with the truncation parameter determined by the discrepancy principle. Finally, numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the introduced numerical method.

**Keywords:** Inverse source problem. Nonlocal boundary condition. Truncated generalized singular value decomposition. Discrepancy principle.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Raízes reais de (3.37) na interseção de $\text{sen}(z)$ com $\frac{1}{\alpha z}$ para o <b>Caso A</b> , <b>Caso B</b> e <b>Caso C</b> . . . . .	40
Figura 2 – Região em que $K(t, \tau)$ é contínuo. . . . .	62
Figura 3 – Raízes de (4.23) da interseção de $\varphi_{\alpha^*}(x)$ e $\varphi_{2\alpha^*}(x)$ com $\text{sen}(x)$ para $m = 4$ . . . . .	71
Figura 4 – Fonte recuperada a partir de dados sem e com ruído para NL=1%. . . . .	81
Figura 5 – Fonte recuperada a partir de dados com ruído de NL=1% para $m = 50$ . . . . .	82
Figura 6 – Erro relativo em função do nível de ruído. . . . .	83
Figura 7 – Aproximações da solução a partir de dados sem e com ruído de NL=1% para $m = 50$ em $T_f = 1$ . . . . .	83
Figura 8 – Aproximações da solução a partir de dados sem e com ruído de NL=1% para $m = 50$ . . . . .	84
Figura 9 – Fonte recuperada a partir de dados com ruído de NL=1% para $m = 50$ . . . . .	85
Figura 10 – Aproximações da solução a partir de dados sem e com ruído de NL=1% para $m = 50$ em $T_f = 1$ . . . . .	85
Figura 11 – Fonte recuperada a partir de dados com ruídos de NL=1% para $m = 50$ . . . . .	86

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Erros relativos das aproximações numéricas sem regularização. . . . .	81
Tabela 2 – Erros relativos e parâmetros de regularização . . . . .	82

# Lista de abreviaturas e siglas

DP	Princípio da discrepância ( <i>discrepancy principle</i> ).
EDO	Equação diferencial ordinária.
EDP	Equação diferencial parcial.
GSVD	Decomposição em valores singulares generalizada ( <i>generalized singular value decomposition</i> ).
NL	Nível de ruído ( <i>noise level</i> ).
PVI	Problema de valor inicial.
RE	Erro relativo ( <i>relative error</i> ).
SVD	Decomposição em valores singulares ( <i>singular value decomposition</i> ).
TGSVD	Decomposição em valores singulares generalizada truncada ( <i>Truncated generalized singular value decomposition</i> ).
TSVD	Decomposição em valores singulares truncada ( <i>Truncated singular value decomposition</i> ).

# Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Espaço dos vetores (coluna) com coeficientes em $\mathbb{R}$ .
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espaço das matrizes de $m$ linhas e $n$ colunas com coeficientes em $\mathbb{R}$ .
$A^T$	Matriz transposta de $A$ .
$\mathbf{0}$	Matriz ou vetor composto(a) unicamente por zeros.
$I, I_n$	Matriz identidade de ordem $n \times n$ .
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$ quando existente.
$A^\dagger$	Matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose de $A$ .
$\text{diag}(v)$	Matriz diagonal quadrada com os elementos do vetor $v$ na diagonal principal.
$\mathcal{X}^*$	Dual topológico do espaço $\mathcal{X}$ .
$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$	Produto interno entre $x$ e $y$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ .
$\ x\ _{\mathcal{X}}$	Norma de $x$ no espaço $\mathcal{X}$ .
$\ x\ _2$	Norma vetorial canônica em $\mathbb{R}^n$ dada por $\ x\ _2 = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .
$\sigma_i$	$i$ -ésimo valor singular de uma matriz $A$ .
$\gamma_i$	$i$ -ésimo valor singular generalizado de um par de matrizes $(A, L)$ .
$\mathcal{N}(A)$	Núcleo do operador $A$ .
$\mathcal{R}(A)$	Imagem do operador $A$ .
$C(\overline{\Omega_T})$	Espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega_T}$ .
$C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$	Espaço das funções $u$ tais que $u_t, u_x$ e $u_{xx}$ são contínuas em $\overline{\Omega_T}$ .
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tais que $u$ e todas as suas derivadas se anulam na fronteira de $\Omega$ .

$C^{3,0}(\overline{\Omega_T})$  Espaço das funções  $u \in C(\overline{\Omega_T})$  tais que  $u_x$ ,  $u_{xx}$  e  $u_{xxx}$  são contínuas em  $\overline{\Omega_T}$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	Organização do Trabalho	18
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>19</b>
2.1	Bases de Schauder	19
2.1.1	Coeficientes Funcionais	20
2.2	Problemas Inversos Mal-Postos	21
2.3	Operadores Compactos	21
2.4	Bases de Riesz	23
2.5	Regularização de Problemas Lineares por Truncamento	29
2.5.1	Ruído nos Dados e Critério de Parada	30
2.5.2	Inclusão de Informações a Priori em Problemas Lineares	31
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA, TEOREMAS DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO</b>	<b>34</b>
3.1	Problema Direto	34
3.2	Problema Espectral Auxiliar	35
3.2.1	Autovalores e Autofunções do Problema Espectral Auxiliar	36
3.2.2	Número Finito de Autovalores Complexos	38
3.2.3	Propriedades do Problema Espectral Auxiliar	46
3.3	Existência e Unicidade de Solução para o Problema Direto	50
3.4	Existência e Unicidade de Solução para o Problema Inverso	59
<b>4</b>	<b>ABORDAGEM NUMÉRICA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO</b>	<b>66</b>
4.1	Modelo Semidiscreto	66
4.2	Análise dos Autovalores da matriz $A$	67
4.3	Aproximação Numérica Através de Equações Integrais	71
4.4	Método do Ponto Médio Implícito	75
4.5	Regularização do Problema Linear	77
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS</b>	<b>79</b>
5.1	Exemplos Numéricos	80
5.1.1	Exemplo 1	80
5.1.2	Exemplo 2	84
5.1.3	Exemplo 3	85

<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>88</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>89</b>

# 1 INTRODUÇÃO

No âmbito das equações diferenciais parciais (EDP's), as condições de contorno mais comuns (Dirichlet, Neumann e Robin) associadas a um operador diferencial de segunda ordem envolvem a função e sua primeira derivada. Entretanto, trabalhos como Cannon, Lin e Wang (1991), Hintermann (1989), permitem considerar condições de contorno envolvendo a segunda derivada. Esse tipo de condição de contorno surgiu na teoria de processos de Markov em Venttsel (1959), por isso é denominada condição de contorno de Wentzell.

As condições de contorno de Wentzell surgem em aplicações em que a difusão ou energia (térmica ou elétrica) precisam ser levadas em consideração no processo de transferência nos contornos. Essa necessidade pode se manifestar em uma variedade de aplicações, como em problemas de superfície acoplada (Bänsch; Gahn, 2018; Cannon; Meyer, 1971; Feller, 1954), no espalhamento de ondas eletromagnéticas por condutores revestidos com uma camada fina de material dielétrico (Bourgeois; Chaulet; Haddar, 2012; Doruflé; Haddar; Joly, 2006), ou na modelagem de transferência de calor dentro de um sólido condutor cujos contornos têm capacidade de armazenar calor (Sauer, 2020; Goldstein et al., 2020).

Seja  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$  com  $T > 0$  fixado. Seguindo o que foi proposto em Ismailov (2018), será considerada a equação do calor

$$u_t = u_{xx} + r(t)f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1.1)$$

com a condição inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.2)$$

condição de contorno de Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

e a condição de contorno de Wentzell–Neumann

$$u_x(0, t) + \alpha u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.4)$$

com  $\alpha > 0$  dado. As funções  $f$ ,  $\varphi$  são conhecidas e definidas em  $\bar{\Omega}_T$  e  $\bar{\Omega}$ , respectivamente. Observa-se que em (1.4), a condição de contorno é de natureza não local, pois relaciona condições em pontos distintos no domínio, envolvendo a primeira derivada (Neumann) e segunda derivada (Wentzell). Condições de contorno não locais ainda são pouco exploradas na literatura.

Cabe salientar que, quando as funções  $r(t)$  e  $f(x, t)$  são conhecidas, o problema de encontrar  $u(x, t)$  satisfazendo a equação do calor (1.1), a condição inicial (1.2) e as

condições de contorno (1.3) e (1.4) é denominado problema direto. Por outro lado, quando a função  $r(t)$  é desconhecida, o problema de encontrar um par de funções  $\{r(t), u(x, t)\}$  satisfazendo (1.1)-(1.4) e a condição de sobredeterminação

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.5)$$

é um problema inverso. Em (1.5) a função  $E(t)$  é obtida através da medição de massa ou energia; em problemas de difusão, por exemplo,  $E(t)$  especifica a massa de todo o domínio de difusão (Bazán; Ismailov; Bedin, 2021).

É importante enfatizar que as condições impostas no problema não são puramente matemáticas. Justificativas físicas para incluir o termo fonte na equação do calor sujeita à condição (1.5) podem ser encontradas em Ismailov (2018), Cannon, Lin e Wang (1992) e Cannon (1984).

Problemas inversos de recuperação de fonte para equações diferenciais parabólicas sob a condição (1.5), têm sido objeto de estudo por diversos pesquisadores nos últimos anos. Um exemplo notável é o tratamento das condições de contorno locais não lineares de Wentzell, abordado em Slodicka (2015), onde o autor trata de resolver um problema inverso de reconstruir uma função dependente do tempo  $h(t)$  presente num termo fonte modelado na forma  $h(t)f(x)$ . Outro estudo relevante é apresentado em Ismailov, Kanca e Lesnic (2011), no qual os autores examinam uma equação de calor unidimensional sob condições de contorno não locais. Para resolver esse problema, propõe-se um método numérico que combina o método de Crank-Nicolson com uma técnica iterativa. Esses são exemplos pontuais de uma variedade de abordagens e técnicas empregadas na resolução de problemas inversos relacionados à recuperação de fonte em equações diferenciais parabólicas, que evidenciam o constante desenvolvimento e interesse nesse campo de pesquisa.

Diante disso, nesta dissertação serão explanados resultados com relação à existência e unicidade de solução do problema inverso (1.1)-(1.5). Em seguida, introduz-se um método numérico para obter aproximações para o par  $\{r(t), u(x, t)\}$ , usando como dados de entrada as funções  $f$ ,  $\varphi$  e o parâmetro  $\alpha$ , juntamente com valores de energia que satisfazem a condição de sobredeterminação (1.5).

No tratamento numérico do problema, primeiramente é realizada a semidiscretização do modelo contínuo, fazendo aproximações para as derivadas espaciais. Em seguida, é mostrado que o termo fonte resolve uma equação integral de Volterra de primeira espécie, envolvendo apenas a variável temporal. No entanto, não são realizadas aproximações numéricas através da equação integral. Para resolver o modelo semidiscreto e evitar o cálculo de autovalores, é utilizado o método do ponto médio implícito, gerando um sistema linear triangular que precisa de regularização para ser resolvido, devido ao mal condicionamento e a presença de ruído nos dados. Mais especificamente, será utilizada a decomposição em valores singulares generalizada (GSVD) de um par de matrizes apropriado,

juntamente com o princípio da discrepância (DP) para truncar a solução dada pela GSVD. Ao final, o método numérico proposto é ilustrado através de exemplos numéricos.

## 1.1 Organização do Trabalho

Esta dissertação está organizada em capítulos, além da presente introdução, da seguinte maneira:

- *Capítulo 2*: apresenta preliminares com resultados de análise funcional, álgebra linear computacional e teoria da regularização. Mais especificamente, são explorados os conceitos de base de Riesz e operadores compactos, bem como a definição de problemas inversos mal-postos, além de discutir a regularização de problemas inversos lineares com base na GSVD.
- *Capítulo 3*: é feita a formulação do problema e desenvolvida toda a abordagem analítica da dissertação, tendo como ênfase à demonstração da existência e unicidade de solução do problema direto e inverso.
- *Capítulo 4*: é realizada a semidiscretização do modelo contínuo utilizando-se o método das diferenças finitas. Em seguida, é construído um método numérico, aplicando-se o método do ponto médio no modelo semidiscreto. A fim de resolver o sistema linear mal condicionado e com ruído nos dados decorrente da discretização, incorpora-se um método de regularização por truncamento com base na GSVD.
- *Capítulo 5*: são exibidos exemplos para ilustrar a eficiência do método numérico utilizado, através de gráficos das soluções e aproximações, além de tabelas constituídas pelos erros relativos.

Por fim, é finalizada a dissertação com conclusões e referências.

## 2 PRELIMINARES

Nesta dissertação, objetiva-se estudar o problema inverso da equação do calor com condições de contorno de Wentzell-Neumann não local sobre dois aspectos: teóricos/analíticos e numéricos/computacionais. Para isso, faz-se necessário desenvolver o suporte teórico que fundamentará as duas abordagens.

### 2.1 Bases de Schauder

Almejando provar a existência e unicidade de solução do problema tratado neste trabalho, será feita uma revisão do conceito de base, principalmente para explorar as bases de Riesz, que serão indispensáveis para alcançar tal objetivo.

As bases de Schauder são uma generalização do conceito de base em álgebra linear (base de Hamel), no contexto de espaços vetoriais de dimensão infinita.

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\mathcal{X}$  um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma base de Schauder para  $\mathcal{X}$  se para todo  $x \in \mathcal{X}$  existe uma única sequência de escalares  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n. \quad (2.1)$$

A convergência da série (2.1) é entendida com relação à topologia da norma em  $\mathcal{X}$ , isto é,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N c_n x_n \right\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

De acordo com Fabian et al. (2010), se um espaço de Banach  $\mathcal{X}$  tem uma base de Schauder, então  $\mathcal{X}$  é separável. Isto é,  $\mathcal{X}$  possui um conjunto denso e enumerável.

Em um espaço de Hilbert separável  $\mathcal{H}$ , um papel importante é desempenhado pelas bases de Schauder ortonormais (os vetores de base são ortogonais e normalizados). Conforme Jeribi (2021), uma maneira de caracterizar tais bases é com sequências ortonormais completas. Vale ressaltar que, uma sequência de vetores  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  em um espaço de Hilbert é considerada completa, se o único vetor ortogonal a todo  $e_n$  for o vetor nulo. Através dessa caracterização, torna-se evidente que todo espaço de Hilbert separável possui uma base ortonormal (Young, 1980).

Daqui para frente, sempre que se referir a palavra base, subentende-se que trata-se de base de Schauder.

O Lema 2.1.2 fornece um resultado bastante elementar em espaços de Hilbert, mas será útil para provar resultados adiante.

**Lema 2.1.2.** *Sejam  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma base ortonormal para um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de escalares. Sob tais hipóteses,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad (2.3)$$

*converge se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad (2.4)$$

*converge. Além disso, se a série (2.3) converge, sendo  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ , tem-se*

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \quad (2.5)$$

*Demonstração.* Vide Hewitt e Stromberg (1985, p. 237). □

### 2.1.1 Coeficientes Funcionais

Se  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma base para um espaço de Banach  $\mathcal{X}$ , então todo vetor  $x$  no espaço tem uma única expansão em série da forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n. \quad (2.6)$$

Considerando que  $c_n$  é uma função linear de  $x$ , pode-se denotar

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n. \quad (2.7)$$

Cada  $a_n : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  é um funcional linear, tal que se  $x \in \mathcal{X}$  é dado por (2.6), então  $a_n(x) = c_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Com isso, os funcionais  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  são chamados de coeficientes funcionais associados à base  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Teorema 2.1.3.** *Se  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma base para um espaço de Banach  $\mathcal{X}$  e se  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  é a sequência de coeficientes funcionais associada, então cada  $a_n \in \mathcal{X}^*$ . Isto é, existe  $M_n \in \mathbb{R}$  tal que*

$$|a_n(x)| \leq M_n \|x\|_{\mathcal{X}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Vide Young (1980, p. 23–24). □

## 2.2 Problemas Inversos Mal-Postos

Sejam  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  espaços vetoriais normados e  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  um operador linear limitado. Considere a equação

$$Ax = y. \quad (2.9)$$

O problema direto associado à  $(A, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$  consiste no seguinte: para cada  $x \in \mathcal{X}$ , determine  $y \in \mathcal{Y}$  satisfazendo (2.9). Por outro lado, o problema inverso associado à  $(A, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , é o problema de encontrar  $x \in \mathcal{X}$  satisfazendo (2.9), a partir de  $y \in \mathcal{Y}$  dado.

**Definição 2.2.1.** (Hadamard) *Sejam  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  espaços vetoriais normados e  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  um operador linear e contínuo de modo que  $Ax = y$ . Diz-se que o problema inverso associado à tripla  $(A, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$  é bem-posto, segundo Hadamard, se as seguintes condições são válidas:*

- (i) *Para todo  $y \in \mathcal{Y}$ , existe  $x \in \mathcal{X}$  tal que  $Ax = y$  (Sobrejetividade de  $A$ ).*
- (ii) *Para todo  $y \in \mathcal{Y}$ , existe no máximo um  $x \in \mathcal{X}$  tal que  $Ax = y$  (Injetividade de  $A$ ).*
- (iii) *Se a sequência  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{Y}$  é tal que  $y_n \rightarrow y$ , e se a sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$  é tal que  $Ax_n = y_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então  $x_n \rightarrow x$  (Estabilidade).*

*Se  $(A, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$  não for um problema bem-posto, então é um problema mal-posto.*

## 2.3 Operadores Compactos

Uma classe de operadores que merece destaque na teoria de problemas inversos é a dos operadores compactos. Como será elucidado adiante, o problema inverso envolvendo um operador compacto geralmente é mal-posto.

**Definição 2.3.1.** *Sejam  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  espaços normados. Um operador linear  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é compacto se, para cada  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$  limitado,  $\overline{A(\mathcal{B})}$  é compacto em  $\mathcal{Y}$ .*

Equivalentemente, um operador linear  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é compacto se para cada sequência limitada  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{X}$ , a sequência  $\{Af_n\}_{n=1}^{\infty}$  possui uma subsequência convergente em  $\mathcal{Y}$ .

Para propriedades e resultados básicos sobre operadores compactos recomenda-se ao leitor consultar Kress (2014). Dentre esses resultados, cabe enunciar os quais serão indispensáveis para o desenvolvimento do presente trabalho.

**Teorema 2.3.2.** *Um operador compacto  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  não pode ter inverso limitado, a menos que  $\mathcal{X}$  tenha dimensão finita.*

O Teorema 2.3.2 é fundamental na teoria dos problemas inversos, pois a partir dele é possível caracterizar se o problema é bem-posto ou mal-posto. De fato, segundo o item (iii) da Definição 2.2.1, o problema inverso será bem-posto se  $A^{-1}$  for contínuo (limitado). Isso leva a concluir que se o operador  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  for compacto e  $\mathcal{X}$  tem dimensão infinita, então o problema inverso originado será mal-posto.

O Teorema 2.3.3 oferece um resultado técnico decorrente da denominada teoria de Riesz, descrita em Kress (2014, p. 38–39).

**Teorema 2.3.3.** *Sejam  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  espaços normados e  $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  um operador linear limitado com inverso  $S^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  limitado. Se  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é um operador linear compacto, então  $S - A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  é injetivo se, e somente se, é bijetivo. Se  $S - A$  é injetivo, então  $(S - A)^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  é limitado.*

O Teorema 2.3.4 é consequência da teoria de operadores Hilbert-Schmidt, discutida em Dunford e Schwartz (1988, p. 1010–1012)

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma base ortonormal para um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear limitado tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty. \quad (2.10)$$

*Então,  $T$  é um operador compacto.*

Antes de prosseguir, é importante mencionar que o problema inverso tratado neste trabalho envolve equações integrais. Nesse contexto, a seguinte definição é importante (Kress, 2014, p.29).

**Definição 2.3.5.** *Uma função  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é denominada núcleo fracamente singular se  $K(t, \tau)$  é contínua sempre que  $t \neq \tau$  e se existirem  $M \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , tais que*

$$|K(t, \tau)| \leq M |t - \tau|^{\beta-1}, \quad \forall (t, \tau) \in [a, b] \times [a, b], \quad \text{com } t \neq \tau. \quad (2.11)$$

Um exemplo imediato de núcleos fracamente singular é  $K$  sendo contínua.

Para núcleo fracamente singulares, é válido o seguinte resultado (KRESS, 2014, p.29).

**Teorema 2.3.6.** *Suponha que  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um núcleo fracamente singular. Então, para toda  $f \in C[a, b]$ , a função*

$$\int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

*é contínua em  $[a, b]$  Além disso, o operador linear  $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  definido por*

$$A(f) = \int_a^b K(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

*é compacto.*

## 2.4 Bases de Riesz

Em um espaço de Hilbert separável, as bases mais importantes são as bases ortonormais. Em seguida, as bases que são equivalentes a alguma base ortonormal. Estas são denominadas bases de Riesz, as quais constituem a maior e mais tratável classe de bases conhecidas (Young, 1980).

Para definir o que é base de Riesz, faz-se necessário introduzir a ideia de bases equivalentes.

**Definição 2.4.1.** *Duas bases  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  para um espaço de Banach  $\mathcal{X}$  são equivalentes se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \quad (2.14)$$

é convergente se, e somente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n, \quad (2.15)$$

é convergente.

Bases equivalentes são completamente caracterizadas pelo Teorema 2.4.2. A demonstração desse teorema, apresentada a seguir, é uma versão detalhada da prova feita em Young (1980).

**Teorema 2.4.2.** *Duas bases  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  e  $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$  para um espaço de Banach  $\mathcal{X}$  são equivalentes se, e somente se, existe um operador linear, inversível e limitado  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  tal que  $Ax_j = y_j$  para todo  $j = 1, 2, 3, \dots$*

*Demonstração.* - Suponha que  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  e  $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$  são bases equivalentes para  $\mathcal{X}$ . Se  $x \in \mathcal{X}$ , com

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j, \quad (2.16)$$

então a série

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} c_j y_j, \quad (2.17)$$

converge para algum elemento  $Ax \in \mathcal{X}$ . O operador  $A$  definido dessa maneira é linear, bijetivo e  $Ax_j = y_j$  para todo  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Para provar que  $A$  é limitado e inversível, defina

$$A_n x = \sum_{j=1}^n a_j y_j, \quad (2.18)$$

sendo  $a_j = a_j(x) = c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , o coeficiente funcional relativo à  $x$ , conforme descrito em 2.1.1. Então, é evidente que

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.19)$$

Em virtude do Teorema 2.1.3, cada  $A_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é limitado, pois

$$\|A_n x\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_{j=1}^n |a_j(x)| \|y_j\|_{\mathcal{H}} \leq \sum_{j=1}^n M_j \|x\|_{\mathcal{H}} \|y_j\|_{\mathcal{H}} = K_n \|x\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.20)$$

com  $K_n = \sum_{j=1}^n M_j \|y_j\|_{\mathcal{H}}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Assim, como a sequência  $\{\|A_n x\|_{\mathcal{H}}\}_{n=1}^{\infty}$  é convergente, para cada  $x \in \mathcal{H}$ , então  $\{\|A_n x\|_{\mathcal{H}}\}_{n=1}^{\infty}$  é limitada. Logo, pelo princípio da limitação uniforme (Kreyszig, 1978, p. 249-250), a sequência  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$  também é limitada. Ou seja, existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que

$$\|A_n\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A_n x\|_{\mathcal{H}}}{\|x\|_{\mathcal{H}}} \leq K < \infty, \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

Logo, para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\|A_n x\|_{\mathcal{H}} \leq \|A_n\|_{\mathcal{H}} \|x\|_{\mathcal{H}} \leq K \|x\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.22)$$

Agora, dado  $\varepsilon > 0$  e  $x \in \mathcal{H}$ , existe  $N = N(x) \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $n \geq N$ , tem-se

$$\|A_n x - Ax\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad (2.23)$$

ou ainda

$$\|Ax\|_{\mathcal{H}} < \|A_n x\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon < K \|x\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon. \quad (2.24)$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, tem-se

$$\|Ax\| \leq K \|x\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.25)$$

Portanto,  $A$  é limitado.

Por fim, o teorema da aplicação aberta (Kreyszig, 1978, p. 286) garante que  $A$  é inversível.

Reciprocamente, suponha que existe um operador linear, inversível e limitado  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  tal que  $Ax_j = y_j$  para todo  $j = 1, 2, 2, \dots$ . Assim,

$$A \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j A(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j, \quad (2.26)$$

e

$$A^{-1} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j A^{-1}(y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j. \quad (2.27)$$

Como (2.26) é convergente se, e somente se, (2.27) é convergente, segue-se que  $\{x_n\}_{j=1}^{\infty}$  e  $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$  são equivalentes.  $\square$

Outra definição importante diz respeito a sequências biortogonais.

**Definição 2.4.3.** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Duas seqüências  $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$  e  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{H}$  são biortogonais se*

$$\langle x_m, y_n \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Conforme exposto em Young (1980), a seqüência biortogonal  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  será determinada unicamente se, e somente se,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  for completa. Assim, toda base  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  para um espaço de Hilbert possui uma única seqüência biortogonal  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Com esse par biortogonal, todo vetor  $x \in \mathcal{H}$  pode ser representado exclusivamente na forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n. \quad (2.28)$$

Ademais, como mostrado em Young (1980),  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  também é base para  $\mathcal{H}$ . Isto é, em um espaço de Hilbert, uma seqüência biortogonal a uma base é ela mesma uma base. Um resultado interessante sobre bases equivalentes e seqüências biortogonais, é apreentado no Teorema 2.4.4.

**Teorema 2.4.4.** *Duas bases equivalentes de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  possuem seqüências biortogonais equivalentes.*

*Demonstração.* Vide Young (1980, p.31). □

Com respaldo nas definições e resultados anteriores, já é possível definir o que é base de Riesz.

**Definição 2.4.5.** *Uma base  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  para um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é chamada base de Riesz se for equivalente a uma base ortonormal. Isto é, se for obtida de uma base ortonormal através de um operador inversível e limitado.*

É importante observar que uma base de Riesz  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  para um espaço de Hilbert é necessariamente limitada, ou seja,

$$0 < \inf \|f_n\|_{\mathcal{H}} \leq \sup \|f_n\|_{\mathcal{H}} < \infty. \quad (2.29)$$

De fato, se  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  for obtida de uma base ortonormal  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  através de um operador inversível e limitado  $A$ , então para  $n \geq 1$ , tem-se

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \|f_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\|. \quad (2.30)$$

Daí, segue que se  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma base de Riesz, então a seqüência  $\{f_n/\|f_n\|_{\mathcal{H}}\}_{n=1}^{\infty}$  também é uma base de Riesz, pois existe um operador inversível e limitado  $T$  tal que

$$Te_n = \frac{e_n}{\|f_n\|_{\mathcal{H}}}, \quad (2.31)$$

logo, o operador  $AT$  é inversível e limitado, com

$$(AT)e_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_{\mathcal{H}}}. \quad (2.32)$$

A desigualdade resultante do Teorema 2.4.6 a seguir é denominada desigualdade do tipo Bessel. Optou-se por apresentar a demonstração desse resultado por não tê-la encontrada em livros clássicos de análise funcional.

**Teorema 2.4.6.** *Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  base de Riesz para um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, f_n \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq c \|h\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (2.33)$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma base ortonormal para  $\mathcal{H}$ . Como  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  é base de Riesz, existe um operador  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , linear, limitado e inversível tal que

$$Ae_n = f_n. \quad (2.34)$$

Logo, se  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle h, f_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, Ae_n \rangle_{\mathcal{H}} = \langle A^*h, e_n \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (2.35)$$

sendo  $A^*$  o operador adjunto de  $A$ . Assim, pelo Lema 2.1.2, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, f_n \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle A^*h, e_n \rangle_{\mathcal{H}}|^2 = \|A^*h\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.36)$$

Como  $\|A^*h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|A^*\| \|h\|_{\mathcal{H}}^2$ , obtém-se o resultado.  $\square$

As próximas definições são de grande importância para a caracterização de bases de Riesz.

**Definição 2.4.7.** *Duas seqüências  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  são quadraticamente próximas se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty. \quad (2.37)$$

**Definição 2.4.8.** *Uma seqüência  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é  $\omega$ -linearmente independente se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n = 0, \quad (2.38)$$

*implica que  $c_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$*

Uma maneira de verificar se uma seqüência é  $\omega$ -linearmente independente é através de seqüências biortogonais, conforme o Teorema 2.4.9 a seguir.

**Teorema 2.4.9.** *Sejam  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$  duas seqüências de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  é biortogonal a  $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ , então  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  é  $\omega$ -linearmente independente.*

*Demonstração.* Suponha

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n = 0. \quad (2.39)$$

Tomando o produto interno com  $g_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , em ambos os lados de (2.39)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle f_n, g_m \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (2.40)$$

Mas como  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  é biortogonal a  $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ , decorre que  $c_m = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Portanto,  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  é  $\omega$ -linearmente independente.  $\square$

O próximo teorema fornece um resultado de extrema relevância para este trabalho. As demonstrações desse resultado disponíveis na literatura geralmente são muito sucintas. Por isso, houve grande esforço para desenvolver uma demonstração consistente e detalhada.

**Teorema 2.4.10.** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Qualquer sequência  $\omega$ -linearmente independente  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{H}$  que é quadraticamente próxima a uma base de Riesz  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{H}$ , é ela própria uma base de Riesz.*

*Demonstração.* Por definição, existe um operador  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  linear, inversível e limitado e uma base ortonormal  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  tais que

$$Ae_n = f_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

Dado qualquer  $x \in \mathcal{H}$ , pode-se escrever

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad (2.42)$$

com

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \quad (2.43)$$

e

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad (2.44)$$

pelo Lema 2.1.2. Defina o operador  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  como

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f_n - g_n), \quad (2.45)$$

Note que  $T$  está bem definido, pois dado  $x \in \mathcal{H}$ , a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (f_n - g_n), \quad (2.46)$$

converge em  $\mathcal{H}$ , já que para todo  $N = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{n=1}^N \|c_n (f_n - g_n)\|_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^N |c_n| \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}} \leq \left( \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^N \|f_n - g_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.47)$$

(usou-se a desigualdade de Schwarz).

Verifica-se que  $T$  é um operador linear, pois se

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad (2.48)$$

e

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n, \quad (2.49)$$

então

$$\begin{aligned} T(x + y) &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)(f_n - g_n) = T(x) + T(y), \\ T(kx) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n k(f_n - g_n) = kT(x), \quad \forall k \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Note também que, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f_n - g_n) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n (f_n - g_n)\|_{\mathcal{H}} \right]^2 \\ &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Pela desigualdade de Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}} &\leq \left[ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_{\mathcal{H}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Logo,  $\|Tx\|_{\mathcal{H}} \leq k \|x\|_{\mathcal{H}}$ , sendo  $k = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ . Portanto,  $T$  é limitado.

Agora, note que

$$e_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j, \quad (2.53)$$

sendo  $c_j = 1$  se  $j = n$ , e  $c_j = 0$  se  $j \neq n$ . Assim, para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tem-se  $Te_n = f_n - g_n$ . Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.54)$$

Devido a esse fato, pode-se recorrer ao Teorema 2.3.4 para concluir que  $T$  é um operador compacto. Além do mais, a equação  $(A - T)e = 0$  tem como única solução  $e = 0$ . De fato,

$$(A - T)e = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e, e_n \rangle_{\mathcal{H}} f_n - \sum_{n=1}^{\infty} \langle e, e_n \rangle_{\mathcal{H}} (f_n - g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e, e_n \rangle_{\mathcal{H}} g_n, \quad (2.55)$$

e então  $e = 0$  pela independência  $\omega$ -linear. Assim, o operador  $A - T$  é injetivo. Como  $T$  é compacto, o Teorema 2.3.3 garante que  $A - T$  é bijetivo e tem inversa limitada. Por fim, como

$$(A - T)e_n = g_n, \quad (2.56)$$

conclui-se que  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma base de Riesz para  $\mathcal{H}$ .  $\square$

## 2.5 Regularização de Problemas Lineares por Truncamento

No tratamento numérico do problema inverso designado, assim como comumente ocorre com outros problemas inversos, haverá de se trabalhar com problemas lineares mal condicionados e dados com ruído. Assim, há a necessidade de se estabelecer um suporte teórico para saber lidar com essas situações.

Seja o sistema de equações lineares da forma

$$Ax = b, \quad (2.57)$$

com  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , para  $m, n \in \mathbb{N}$ . Se  $m = n$  e  $A$  é não singular, então a solução de (2.57) é dada por  $A^{-1}b$ . Em geral, evita-se a determinação de  $A^{-1}$ , devido ao alto custo computacional, principalmente para matrizes de grande porte. Métodos mais eficientes para resolver esse tipo de problema consistem em fatorar a matriz  $A$  em matrizes mais simples e então resolver (2.57) por intermédio de sistemas lineares que se beneficiam das estruturas dessas fatorações. Uma fatoração importante é a chamada decomposição em valores singulares (SVD), resumida no Teorema 2.5.1.

**Teorema 2.5.1.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\text{posto}(A) = r$ ,  $r \leq \min\{m, n\}$ . Então, existem matrizes  $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonais tais que*

$$A = U\Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (2.58)$$

em que  $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , com os valores singulares  $\sigma_j$  ordenados de modo que  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .

*Demonstração.* Golub e Loan (2013, p. 76).  $\square$

A SVD permite calcular a solução de (2.57) como um método direto, sendo bastante eficiente nos casos em que  $A$  é não singular, haja vista que, nesses casos  $m = n = r$  e como  $U$  e  $V$  são ortogonais resulta que  $x = V\Sigma^{-1}U^T b$ , sendo  $\Sigma^{-1}$  facilmente determinada devido à sua estrutura diagonal.

Para os casos que não se tem  $m = n = r$ , introduz-se o problema de mínimos quadrados linear

$$x = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2, \quad (2.59)$$

cujas soluções envolvem a utilização da chamada matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose, entendida como uma inversa generalizada e denotada por  $A^\dagger$ . Uma maneira de construir  $A^\dagger$  é por meio da SVD de  $A$ , obtendo-se

$$A^\dagger = V \begin{bmatrix} \Sigma_0^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{n \times m} U^\top. \quad (2.60)$$

Com isso, as soluções do problema de mínimos quadrados linear (2.59) são da forma  $\{A^\dagger b + w \mid w \in \mathcal{N}(A)\}$ , sendo de maior interesse a obtenção de

$$x^\dagger := A^\dagger b, \quad (2.61)$$

da qual as outras soluções podem ser construídas adicionando  $w \in \mathcal{N}(A)$ . Vale ressaltar que  $x^\dagger$  corresponde à solução de norma mínima dentre todas as soluções do problema de mínimos quadrados linear (2.59), a única com tal propriedade, decorrente de propriedades geométricas.

Conhecendo a SVD de  $A$ , é possível obter  $x^\dagger$ , já que

$$x^\dagger = A^\dagger b = \sum_{j=1}^r \frac{u_j^\top b}{\sigma_j} v_j. \quad (2.62)$$

### 2.5.1 Ruído nos Dados e Critério de Parada

Um problema de interesse a ser considerado consiste em resolver problemas mal condicionados da forma

$$\tilde{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - \tilde{b}\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m \geq n, \quad \tilde{b} = b + \epsilon, \quad (2.63)$$

nesse caso  $\tilde{b}$  representa dados com ruído. Problemas dessa forma surgem com recorrência na prática, sendo denominados problemas mal-postos discretos. O ruído  $\epsilon$  advém, por exemplo, da imprecisão numérica ou erros de medição, principalmente quando os dados são obtidos experimentalmente. Diante disso, a solução do problema (2.63),  $\tilde{x} = A^\dagger \tilde{b}$ , será significativamente contaminada pelo ruído e pode diferir consideravelmente da solução procurada  $x^\dagger = A^\dagger b$ . Para esclarecer, utilizando a SVD de  $A$ , a solução do problema de mínimos quadrados (2.63) é dada por

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^r \frac{u_j^\top \tilde{b}}{\sigma_j} v_j. \quad (2.64)$$

O principal problema envolvendo  $\tilde{x}$  é que os componentes do ruído  $\tilde{b}$  podem ser amplificados expressivamente, devido à divisão por pequenos valores singulares; nessas

condições, a estimativa calculada pode diferir muito da solução  $x^\dagger$ . Para filtrar a contribuição do ruído na solução calculada, o método da TSVD (SVD truncada) fornece soluções regularizadas truncando a soma (2.64) em  $k \leq r$  termos (Hansen, 1998). Sendo assim, a solução com TSVD é definida por

$$\tilde{x}_k = \sum_{j=1}^k \frac{\mathbf{u}_j^\top \tilde{\mathbf{b}}}{\sigma_j} \mathbf{v}_j, \quad k \leq r. \quad (2.65)$$

Todavia, se  $k$  não for escolhido adequadamente, a solução  $\tilde{x}_k$  captura informações insuficientes do problema, ou o ruído nos dados domina a solução aproximada. O desafio do método da TSVD é, portanto, escolher um parâmetro de truncamento adequado.

O método TSVD pode ser entendido como um método iterativo, assim pode-se utilizar um critério de parada para determinar o parâmetro  $k$ . Um critério de parada bastante disseminado e com suporte teórico é o princípio da discrepância (DP), proposto por Morozov (1984). Esse critério sugere parar o processo iterativo no primeiro  $k$  tal que

$$\|\tilde{\mathbf{b}} - A\tilde{x}_k\|_2 \leq \tau \|\epsilon\|_2, \quad (2.66)$$

em que  $\tau \gtrsim 1$ .

## 2.5.2 Inclusão de Informações a Priori em Problemas Lineares

Para incorporar informações à priori sobre suavidade das soluções é interessante resolver o problema

$$x_L = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2, \quad \text{sujeito a} \quad \min \|Lx\|_2, \quad (2.67)$$

em que  $L$  é uma matriz a ser especificada.

Em certas circunstâncias, isso pode ser mais interessante do que resolver (2.59) de forma que se minimiza  $\|x\|_2$  (Hansen, 1989). Considere, por exemplo, que  $L$  é o operador derivada discreta, ao buscar uma solução  $x \in \mathbb{R}^n$  de (2.67) deseja-se que  $\|Lx\|_2$  seja mínima, e  $\|Lx\|_2$  controla as oscilações da solução (pois variações bruscas de derivada indicam soluções menos suaves).

De acordo com Eldén (1982, p. 490), no caso em que  $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$ , o problema (2.67) tem solução única dada por

$$x_L = \left( I - (LP)^\dagger L \right) A^\dagger b, \quad (2.68)$$

sendo  $P = I - A^\dagger A$ . A matriz  $\left( I - (LP)^\dagger L \right) A^\dagger$  é denominada a matriz pseudo-inversa com peso  $L$  da matriz  $A$ .

Para prosseguir, é necessário introduzir a GSVD (decomposição em valores singulares generalizada). A GSVD consiste em uma SVD conjunta para o par de matrizes  $(A, L)$ .

Apesar de ser desenvolvida e estar presente em trabalhos anteriores, a versão da GSVD apresentada nesta dissertação é baseada em Hansen (1998).

**Teorema 2.5.2.** *Considere o par matricial  $(A, L)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , com  $m \geq n \geq p$ ,  $\text{posto}(L) = p$  e  $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$ . Então existem matrizes  $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p] \in \mathbb{R}^{p \times p}$  com colunas ortonormais, tais que*

$$A = U \begin{bmatrix} S_1 & \mathbf{0} \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} X^{-1}, \quad L = V(S_2, \mathbf{0})X^{-1}, \quad (2.69)$$

em que  $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é não singular,  $S_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  e  $S_2 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ . Além disso, os valores singulares são ordenados da seguinte maneira:

$$0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_p \leq 1 \quad e \quad 1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_p > 0, \quad (2.70)$$

e normalizadas de modo que

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1, \quad i = 1 \dots, p.$$

Os valores singulares generalizados de  $(A, L)$  são definidos por

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}, \quad i = 1 \dots, p. \quad (2.71)$$

**Observação 2.5.3.** *Os  $\sigma_i$  não têm relação com os valores singulares  $\sigma_i$  de  $A$  descritos no Teorema 2.5.1. O mesmo vale para os vetores  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$ .*

Há uma importante conexão entre a matriz pseudo-inversa com peso  $L$  de  $A$  com a GSVD do par  $(A, L)$ . De fato, seja  $A = U\Sigma X^{-1}$ ,  $L = V\Lambda X^{-1}$  a GSVD do par de matrizes  $(A, L)$ , então, como provado em Eldén (1982, p. 492–493), se  $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(L) = \{\mathbf{0}\}$ , tem-se que

$$A_L^\dagger = (I - (LP)^\dagger L) A^\dagger = X\Sigma^\dagger U^T. \quad (2.72)$$

Dessa forma, a solução de (2.67) é dada por

$$x_L = X\Sigma^\dagger U^T b. \quad (2.73)$$

No caso especial em que  $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_p$ , usando o fato que  $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ ,  $U = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  e

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} S_1^{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix},$$

tem-se então que

$$x_L = \sum_{i=1}^p \frac{\mathbf{u}_i^\top b}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i^\top b) \mathbf{x}_i. \quad (2.74)$$

Da mesma maneira que a SVD, no caso de dados com ruído  $\tilde{b}$ , a solução de (2.67) dada pela GSVD,  $\tilde{x}_L = A_L^\dagger \tilde{b}$ , será contaminada pelo ruído e pode diferir expressivamente

da solução procurada  $x_L = A_L^\dagger b$ . Uma alternativa para filtrar a contribuição do ruído na solução é truncar a solução (2.74), evitando a divisão por pequenos valores singulares. Assim, é introduzida a solução TGSVD (GSVD truncada), definida por

$$\tilde{x}_{L,k} = \sum_{i=p-k+1}^p \frac{\mathbf{u}_i^\top \tilde{b}}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n (u_i^T \tilde{b}) \mathbf{x}_i. \quad (2.75)$$

Neste trabalho, será utilizado o DP para determinar o parâmetro  $k$ , truncando a solução no primeiro  $k$  tal que

$$\|\tilde{b} - A\tilde{x}_{L,k}\|_2 \leq \tau \|\epsilon\|_2, \quad (2.76)$$

sendo  $\tilde{b} = b + \epsilon$  e  $\tau \gtrsim 1$ .

É importante salientar que, alternativamente à regularização pela TGSVD, pode ser considerado o método de regularização de Tikhonov da forma geral dada por

$$\tilde{x}_\lambda = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - \tilde{b}\|_2^2 + \lambda^2 \|Lx\|_2^2, \quad (2.77)$$

em que  $\lambda > 0$  é um parâmetro de regularização.

Conforme Hansen (1989), a GSVD do par  $(A, L)$  pode ser utilizada para se obter a solução de (2.77), como sendo

$$\tilde{x}_\lambda = \sum_{i=1}^p \left[ \mathbf{u}_i^\top \tilde{b} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \lambda^2} \mathbf{x}_i \right] + \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i^T \tilde{b}) \mathbf{x}_i. \quad (2.78)$$

(lembrando que  $\gamma_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2}$ ). Nesse caso, a TGSVD correspondente é

$$\tilde{x}_\lambda = \sum_{i=p-k+1}^p \left[ \mathbf{u}_i^\top \tilde{b} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \lambda^2} \mathbf{x}_i \right] + \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i^T \tilde{b}) \mathbf{x}_i. \quad (2.79)$$

A forma geral do método de regularização de Tikhonov já foi utilizada em problemas inversos de transferência de calor, tal como em Hazanee et al. (2015) e Bazán, Bedin e Bozzoli (2016). No presente trabalho, optou-se por obter soluções baseadas na TGSVD. Para mais detalhes sobre a TGSVD, pode-se consultar Hansen (1989) e Hansen (1998).

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA, TEOREMAS DA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Neste capítulo, é realizada a formulação do problema direto e inverso. Mais ainda, a abordagem analítica aqui se concentra, tendo como foco principal provar a existência e unicidade de solução do problema direto e inverso sob condições suficientes.

#### 3.1 Problema Direto

Seja a equação do calor

$$u_t = u_{xx} + r(t)f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.1)$$

com a condição inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.2)$$

condição de contorno de Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.3)$$

e condição de contorno de Wentzell–Neumann

$$u_x(0, t) + \alpha u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \alpha > 0. \quad (3.4)$$

Lembrando que  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$  com  $T > 0$  fixado. As funções  $f$ ,  $r$  e  $\varphi$  são conhecidas,  $f$  é contínua em  $\bar{\Omega}_T$ ,  $r$  é contínua em  $[0, T]$  e  $\varphi$  é contínua em  $\bar{\Omega}$ . Assumindo que (3.1) é válida em  $x = 1$  (essa é uma hipótese razoável se  $\varphi$ ,  $f$  e  $r$  forem suficientemente suaves, como será visto na Seção 3.3), tem-se

$$u_{xx}(1, t) = u_t(1, t) - r(t)f(1, t). \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.4), obtém-se a condição de contorno

$$u_x(0, t) + \alpha u_t(1, t) = \alpha r(t)f(1, t). \quad (3.6)$$

O problema direto consiste em encontrar  $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega}_T)$  tal que (3.1)-(3.4) sejam satisfeitas.

## 3.2 Problema Espectral Auxiliar

Usando o método de Fourier (separação de variáveis) em (3.1), supõe-se

$$u(x, t) = X(x)W(t). \quad (3.7)$$

Considerando o caso homogêneo  $r(t)f(x, t) = 0$ , tem-se

$$X(x)W'(t) = X''(x)W(t), \quad (3.8)$$

que se reescreve como

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.9)$$

Como o lado esquerdo de (3.9) depende apenas de  $t$  e o lado direito depende somente de  $x$ , deve-se ter

$$W'(t) + \lambda W(t) = 0, \quad (3.10)$$

e

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.11)$$

Além disso, de (3.3)

$$u(0, t) = X(0)W(t) = 0. \quad (3.12)$$

Como deseja-se  $W(t) \neq 0$ , então  $X(0) = 0$ . Ainda, por (3.4)

$$X'(0)W(t) + \alpha X''(1)W(t) = 0, \quad (3.13)$$

donde

$$X'(0) + \alpha X''(1) = 0. \quad (3.14)$$

Mas, de (3.11)

$$X''(1) = -\lambda X(1). \quad (3.15)$$

Logo,

$$X'(0) - \alpha\lambda X(1) = 0. \quad (3.16)$$

Assim, considera-se o problema de autovalor

$$-X''(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.17)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) - \alpha\lambda X(1) = 0, \quad (3.18)$$

em que  $\alpha > 0$ .

Para os propósitos deste trabalho, é importante mostrar que (3.17)-(3.18) é um problema não auto-adjunto. Considere o produto interno em  $L^2 [0, 1]$ :  $\langle f, g \rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^1 \bar{f}g dx$  e defina o operador  $\mathcal{L}_\lambda X = -X'' - \lambda X$ , com domínio dado pelas funções  $X \in C^2(0, 1) \cap$

$C^1([0, 1])$  tais que (3.18) vale. Dado qualquer  $Z \in C^2(0, 1) \cap C^1([0, 1])$ , integrando por partes duas vezes, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\lambda X, Z \rangle_{L^2[0,1]} &= - \int_0^1 (\overline{X}'' + \overline{\lambda X}) Z dx \\ &= -Z(1)\overline{X}'(1) + \overline{X}(1)[Z'(1) + \alpha\overline{\lambda}Z(0)] - \int_0^1 \overline{X}(Z'' + \overline{\lambda}Z) dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Isso significa que  $\mathcal{L}_{\overline{\lambda}}$  é o operador adjunto de  $\mathcal{L}_\lambda$  com domínio dado pelas funções  $Z \in C^2(0, 1) \cap C^1([0, 1])$  tais que  $Z(1) = 0$  e  $Z'(1) + \alpha\overline{\lambda}Z(0) = 0$ , uma vez que essas condições de contorno se mantiverem, tem-se  $\langle \mathcal{L}_\lambda X, Z \rangle_{L^2[0,1]} = \langle X, \mathcal{L}_{\overline{\lambda}} Z \rangle_{L^2[0,1]}$ . Isso sugere que o problema adjunto de (3.17)-(3.18) é dado por

$$-Z''(x) = \overline{\lambda}Z(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.20)$$

$$Z(1) = 0, \quad Z'(1) + \alpha\overline{\lambda}Z(0) = 0. \quad (3.21)$$

Claramente o problema (3.17)-(3.18) é diferente do problema (3.20)-(3.21). Isso significa que (3.17)-(3.18) é um problema não auto-adjunto. Devido a isso, não há como garantir a existência de uma base ortonormal para  $L^2[0, 1]$  formada pelas autofunções desse problema, como é usual em problemas auto-adjuntos. Não obstante esse fato, será verificado adiante que o problema (3.17)-(3.18) possui propriedades interessantes, e mesmo que as autofunções não formem uma base ortonormal, elas constituem uma base de Riesz para  $L^2[0, 1]$ , o que possibilitará provar a existência e unicidade de solução do problema direto.

### 3.2.1 Autovalores e Autofunções do Problema Espectral Auxiliar

Percebe-se que  $\lambda = 0$  não pode ser autovalor do problema (3.17)-(3.18). De fato, se esse fosse o caso, de (3.17) se obteria  $X''(x) = 0$ , donde  $X(x) = ax + b$ . Considerando (3.18), resultaria que  $X(x) = 0$ , a qual não é uma solução desejada.

Então, supõe-se  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Observa-se que  $\sqrt{\lambda}$  assume dois valores complexos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tal que  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Um desses valores, diga-se  $\lambda_1$ , satisfaz  $Re(\lambda_1) \geq 0$  enquanto o outro satisfaz  $Re(\lambda_2) \leq 0$ .

Supondo  $X(x) = e^{rx}$  como solução para (3.17)-(3.18), resulta que  $r^2 + \lambda = 0$ . Assim, tem-se duas soluções para  $r$ :  $r_1 = i\lambda_1$  e  $r_2 = i\lambda_2$ . Nota-se que  $-r_1^2 = -r_2^2 = \lambda$  e  $r_1 = -r_2$ , de modo que apenas um dos valores de  $r$  é necessário, pois ambos os valores de  $r$  retornarão o mesmo autovalor. Considerando  $r_1$  como o valor de  $r$ , a solução de (3.17)-(3.18) é dada por

$$X(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{-r_1 x}, \quad (3.22)$$

pois  $\{e^{r_1x}, e^{-r_1x}\}$  é um conjunto linearmente independente, solução de (3.17). Aplicando as condições de contorno (3.18), obtém-se

$$C_1 + C_2 = 0 \tag{3.23}$$

$$r_1(C_1 - C_2) + \alpha r_1^2[C_1 e^{r_1} + C_2 e^{-r_1}] = 0, \tag{3.24}$$

que resulta em

$$2 = -\alpha r_1(e^{r_1} - e^{-r_1}), \tag{3.25}$$

isto é,

$$2 = -\alpha i \lambda_1(e^{i\lambda_1} - e^{-i\lambda_1}). \tag{3.26}$$

Daí, obtém-se a equação

$$\alpha \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}) = 1. \tag{3.27}$$

Nota-se que não há solução de (3.27) tal que  $\operatorname{Re}(\sqrt{\lambda}) = 0$ . De fato, nesse caso  $\sqrt{\lambda} = bi$ , para algum número real  $b \neq 0$  e (3.27) origina a equação

$$\alpha ib \operatorname{sen}(ib) = 1, \tag{3.28}$$

para a variável  $b$ , isto é, tem-se a equação

$$-\alpha b \operatorname{senh}(b) = 1, \tag{3.29}$$

a qual não possui solução.

Assim, busca-se a solução de (3.27) com  $\operatorname{Re}(\sqrt{\lambda}) > 0$ . Da propriedade  $\operatorname{sen}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$  sobre  $\mathbb{C}$ , decorre que se  $\sqrt{\lambda}$  é solução de (3.27), seu conjugado  $\overline{\sqrt{\lambda}}$  também é solução de (3.27).

No que se segue, para cada  $\lambda$  em (3.22), tem-se

$$X(x) = C_1 (e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x}). \tag{3.30}$$

Tomando adequadamente  $C_1 = \frac{A}{2i}$ , obtém-se que as autofunções associadas aos autovalores  $\lambda$  são dadas por

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), \tag{3.31}$$

com  $A \in \mathbb{R}^*$  arbitrário.

Usando o fato que  $\bar{\lambda}$  também satisfaz (3.27), é possível verificar que a solução de (3.20)-(3.21) associadas a  $\lambda$  são dadas por

$$Z(x) = C \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}(1-x)), \tag{3.32}$$

Para alguma constante  $C$  arbitrária.

### 3.2.2 Número Finito de Autovalores Complexos

Provar-se-á agora que (3.27) possui, no máximo, um número finito de soluções complexas e uma quantidade infinita e enumerável de soluções reais.

**Lema 3.2.1.** *Seja  $h(x) = x \cos(x) + \sin(x)$ . Para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ , existe um único*

$$x_k^* \in \left( \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi, (2k + 1)\pi \right), \quad (3.33)$$

tal que

$$2k\pi \leq x < x_k^* \implies h(x) > 0 \quad (3.34)$$

$$x_k^* < x \leq (2k + 1)\pi \implies h(x) < 0. \quad (3.35)$$

*Demonstração.* Seja  $k = 0, 1, 2, \dots$  dado. Então  $h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$  e  $h((2k + 1)\pi) = -(2k + 1)\pi$ . Isso prova a existência de  $x_k^* \in \left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, (2k + 1)\pi\right)$  tal que  $h(x_k^*) = 0$ . A unicidade de  $x_k^*$  e as afirmações (3.34)-(3.35) seguem de  $h'(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x) < 0$  para todo  $x \in \left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, (2k + 1)\pi\right)$  e  $h(x) > 0$  para todo  $x \in \left[2k\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$ .  $\square$

**Corolário 3.2.2.** *Para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tem-se que*

$$\left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi < x_k^* \sin(x_k^*) < x_k^*, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

Além disso,  $g_\alpha(x) = x \sin(x) - \frac{1}{\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , é uma função decrescente em cada intervalo  $[x_k^*, (2k + 1)\pi]$  e é uma função crescente em cada intervalo  $[2k\pi, x_k^*]$ .

*Demonstração.* Segue diretamente do Lema 3.2.1, pois  $g'_\alpha(x) = h(x)$ .  $\square$

Seja  $\alpha > 0$ . Será considerada, sobre  $\mathbb{C}$ , a equação

$$\sin(z) = \frac{1}{\alpha z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (3.37)$$

Seja  $\aleph = \sup \left\{ k \in \mathbb{Z}; 0 \leq k \leq \frac{1}{2\pi\alpha} \right\}$ . É importante observar que  $2\aleph\pi \leq \frac{1}{\alpha} < 2(\aleph + 1)\pi$ . Nota-se também que por (3.36),  $2\aleph\pi < \left(2\aleph + \frac{1}{2}\right)\pi < x_\aleph^* \sin(x_\aleph^*) < x_\aleph^* < (2\aleph + 1)\pi$ . Com isso, tem-se os seguintes casos a serem considerados:

**Caso A:**  $2\aleph\pi \leq \frac{1}{\alpha} < x_\aleph^* \sin(x_\aleph^*)$ .

- Neste caso, tem-se  $g_\alpha(2\aleph\pi) < 0$ ,  $g_\alpha(x_\aleph^*) > 0$  e  $g_\alpha((2\aleph + 1)\pi) < 0$ . Portanto, pelo Corolário 3.2.2, existem únicas soluções  $p_\alpha, q_\alpha$  de (3.37) nos intervalos  $(2\aleph\pi, x_\aleph^*)$  e  $(x_\aleph^*, (2\aleph + 1)\pi)$ , respectivamente.

- Para cada  $k \geq 1$ , vale  $\frac{1}{\alpha} < 2(\aleph + k)\pi + \frac{\pi}{2}$ , o que significa que  $g_\alpha(2(\aleph + k)\pi + \frac{\pi}{2}) > 0$ . Daí, como  $g_\alpha(2(\aleph + k)\pi) = g_\alpha(2(\aleph + k)\pi + \pi) = -\frac{1}{\alpha} < 0$  e  $g_\alpha(x_{\aleph+k}^*) > 0$  (por (3.36)), então existem únicas soluções  $x_{2(k-1)}$ ,  $x_{2k-1}$  de (3.37) nos intervalos  $\left(2(\aleph + k)\pi, 2(\aleph + k)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  e  $\left(x_{\aleph+k}^*, 2(\aleph + k)\pi + \pi\right)$ , respectivamente.
- Como  $\frac{1}{\alpha x} > 1 \geq \text{sen}(x)$  para  $x < \frac{1}{\alpha}$ , conclui-se que

$$p_\alpha < q_\alpha < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

são as únicas soluções reais de (3.37). Como  $g'_\alpha(p_\alpha) \neq 0$ ,  $g'_\alpha(q_\alpha) \neq 0$ ,  $g'_\alpha(x_k) \neq 0$ , essas são raízes simples da equação (3.37).

**Caso B:**  $\frac{1}{\alpha} = x_\aleph^* \text{sen}(x_\aleph^*)$ .

- As funções  $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha x}$  e  $f(x) = \text{sen}(x)$  possuem a mesma reta tangente no ponto  $(x_\aleph^*, \text{sen}(x_\aleph^*))$ . De fato, como  $\text{sen}(x_\aleph^*) + x_\aleph^* \cos(x_\aleph^*) = 0$ , se obtém  $\text{sen}(x_\aleph^*) = \frac{1}{\alpha x_\aleph^*}$  e  $\cos(x_\aleph^*) = -\frac{1}{\alpha(x_\aleph^*)^2}$ . Tendo em vista o Corolário 3.2.2, existe uma única solução  $p_\alpha = x_\aleph^*$  de (3.37) no intervalo  $[2\aleph\pi, (2\aleph + 1)\pi]$ . Como  $g'_\alpha(p_\alpha) = 0$ ,  $g''_\alpha(p_\alpha) \neq 0$ ,  $p_\alpha$  é uma raiz dupla da equação (3.37)
- Argumentando como no **Caso A**, é possível verificar que todas as soluções reais de (3.37) são dadas por

$$p_\alpha < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots,$$

em que  $x_{2(k-1)}$ ,  $x_{2k-1}$  são as únicas soluções de (3.37) nos intervalos

$$\left(2(\aleph + k)\pi, 2(\aleph + k)\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

e

$$\left(x_{\aleph+k}^*, 2(\aleph + k)\pi + \pi\right),$$

respectivamente, para todo  $k = 1, 2, \dots$

**Caso C:**  $x_\aleph^* \text{sen}(x_\aleph^*) < \frac{1}{\alpha} < 2(\aleph + 1)\pi$ .

- Como  $g_\alpha(x_\aleph^*) < 0$  e  $g_\alpha$  é uma função decrescente em  $[x_\aleph^*, (2\aleph + 1)\pi]$ , não existe solução real de (3.37) no intervalo  $(0, (2\aleph + 2)\pi]$ .

- Já que  $\frac{1}{\alpha} < 2(\aleph+1)\pi + \frac{\pi}{2}$  decorre que  $g_\alpha\left(2(\aleph+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ . Então, como  $g_\alpha((2(\aleph+1)\pi) = g_\alpha((2\aleph+3)\pi) = -\frac{1}{\alpha}$  e  $g_\alpha(x_{\aleph+1}^*) > 0$ , pelo Corolário 3.2.2, conclui-se que existem únicas soluções  $p_\alpha, q_\alpha$  de (3.37) nos intervalos  $\left(2(\aleph+1)\pi, 2(\aleph+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  e  $(x_{\aleph+1}^*, (2\aleph+3)\pi)$ , respectivamente.
- Analogamente ao **Caso A**, todas as soluções reais de (3.37) são dadas por

$$p_\alpha < q_\alpha < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots,$$

em que  $x_{2(k-1)}, x_{2k-1}$  são as únicas soluções de (3.37) nos intervalos

$$\left(2(\aleph+k+1)\pi, 2(\aleph+k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

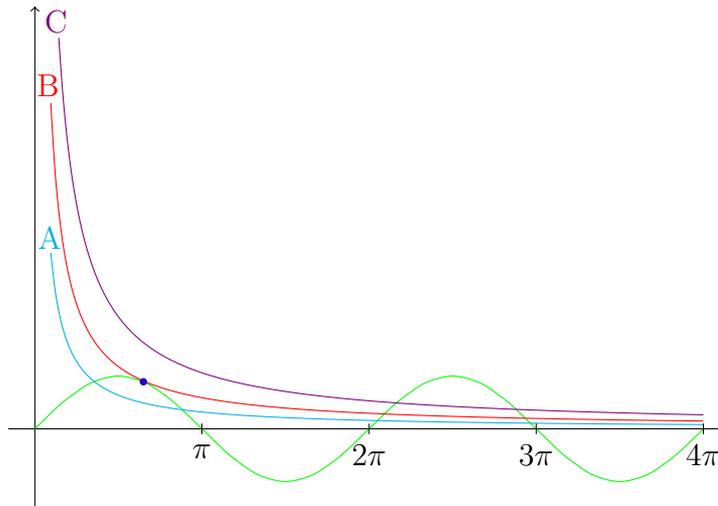
e

$$\left(x_{\aleph+k+1}^*, 2(\aleph+k+1)\pi + \pi\right),$$

respectivamente, para todo  $k = 1, 2, \dots$ . Assim como no **Caso A**, essas são raízes simples da equação (3.37).

Para esclarecer, apresenta-se na Figura 1 a interpretação geométrica de cada caso, assumindo  $\aleph = 0$  para facilitar o esboço.

Figura 1 – Raízes reais de (3.37) na interseção de  $\sin(z)$  com  $\frac{1}{\alpha z}$  para o **Caso A**, **Caso B** e **Caso C**.



Fonte: O autor, 2024.

Agora, serão analisadas as soluções complexas de (3.37). Considerando  $z = a + bi$ , vale que

$$\sin(a + bi) = \sin(a) \cosh(b) + \cos(a) \sinh(b)i. \quad (3.38)$$

Assim,  $z$  satisfaz (3.37) se, e somente se,

$$\operatorname{sen}(a) \cosh(b) + \cos(a) \operatorname{senh}(b)i = \frac{1}{\alpha(a+bi)}, \quad (3.39)$$

isto é,

$$a \operatorname{sen}(a) \cosh(b) - b \cos(a) \operatorname{senh}(b) = \frac{1}{\alpha} \quad (3.40)$$

$$a \cos(a) \operatorname{senh}(b) + b \operatorname{sen}(a) \cosh(b) = 0. \quad (3.41)$$

Sendo  $b \neq 0$ , manipulando algebricamente (3.40) e (3.41), obtém-se que  $a, b$  devem satisfazer

$$\frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{sen}(a) \cosh(b) = \frac{1}{\alpha} \quad (3.42)$$

$$-\frac{a^2 + b^2}{b} \cos(a) \operatorname{senh}(b) = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.43)$$

É possível constatar de (3.40) e (3.41) que se  $z = a + bi$  é solução de (3.37), então  $\bar{z} = a - bi$  também satisfaz (3.37). Além disso, valem os resultados apresentados adiante.

**Lema 3.2.3.** *Se  $z = a + bi$  é uma solução de (3.37) com  $b \neq 0$ , então  $x_k^* < a < (2k + 1)\pi$ , para algum  $k = 0, 1, 2, \dots$*

*Demonstração.* Como  $\alpha > 0$ ,  $a > 0$ ,  $\frac{\operatorname{senh}(b)}{b} > 1$  e  $\cosh(b) > 1$ , segue de (3.42) e (3.43) que  $\operatorname{sen}(a) > 0$  e  $\cos(a) < 0$ . O que significa que  $a$  se encontra em um intervalo  $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k + 1)\pi\right)$ , para algum  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Assumindo que  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < a \leq x_k^*$ , então  $\cos(a) \geq \cos(x_k^*)$  e  $\operatorname{sen}(a) \geq \operatorname{sen}(x_k^*)$ , donde

$$a \cos(a) \frac{\operatorname{senh}(b)}{b} + \operatorname{sen}(a) \cosh(b) > x_k^* \cos(x_k^*) + \operatorname{sen}(x_k^*) = 0, \quad (3.44)$$

o que contradiz (3.41). Logo, pode-se concluir que  $x_k^* < a < (2k + 1)\pi$ , para algum  $k = 0, 1, 2, \dots$  □

**Teorema 3.2.4.** *Para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ , existe, no máximo, uma solução  $z = a + bi$ ,  $b > 0$ , de (3.37) tal que  $x_k^* < a < (2k + 1)\pi$ . Além disso, se existe tal solução, ela satisfaz  $x_0^* < a < p_\alpha$ , em que  $p_\alpha$  é dado no **Caso A**, **Caso B** ou **Caso C**.*

*Demonstração.* Supondo que  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$  é solução de (3.37) satisfazendo  $x_k^* < a_j < (2k + 1)\pi$ ,  $b_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ . Assumindo, sem perda de generalidade, que  $a_1 < a_2$ , o Lema 3.2.3 garante que  $x_k^* < a_1 < a_2 < (2k + 1)\pi$ , para algum  $k = 0, 1, 2, \dots$ , o que significa que  $\operatorname{sen}(a_1) > \operatorname{sen}(a_2) > 0$  e  $0 > \cos(a_1) > \cos(a_2)$ . Ainda, considerando (3.42)-(3.43), obtém-se

$$\left(\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}\right) \frac{\cosh(b_1)}{\cosh(b_2)} < \left(\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}\right) \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \left(\frac{\operatorname{sen}a_1}{\operatorname{sen}a_2}\right) \frac{\cosh(b_1)}{\cosh(b_2)} = 1. \quad (3.45)$$

Assim como

$$1 = \left( \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \left( \frac{b_2}{b_1} \right) \left( \frac{\cos a_1}{\cos a_2} \right) \frac{\sinh(b_1)}{\sinh(b_2)} < \left( \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \left( \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{\sinh(b_1)}{\sinh(b_2)}. \quad (3.46)$$

Daí,

$$\left( \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \frac{\cosh(b_1)}{\cosh(b_2)} < \left( \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \left( \frac{b_2}{b_1} \right) \frac{\sinh(b_1)}{\sinh(b_2)}, \quad (3.47)$$

ou ainda

$$\frac{\operatorname{tgh}(b_1)}{b_1} > \frac{\operatorname{tgh}(b_2)}{b_2}, \quad (3.48)$$

em que  $\operatorname{tgh}(x)$  é a tangente hiperbólica de  $x$ . Como

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{tgh}(x)}{x} \right) = \frac{1}{x \cosh^2(x)} \left( 1 - \frac{\sinh(x)}{x} \cosh(x) \right) < 0, \quad (3.49)$$

se  $x > 0$ , a função  $x \rightarrow \frac{\operatorname{tgh}(x)}{x}$  é decrescente em  $(0, \infty)$ . Assim, por (3.48), obtém-se  $b_1 < b_2$ . Além disso, considerando (3.46) e o fato que a função  $x \rightarrow \frac{\sinh(x)}{x}$  é crescente em  $(0, \infty)$ , conclui-se que

$$1 < \left( \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \frac{\frac{\sinh(b_1)}{b_1}}{\frac{\sinh(b_2)}{b_2}} < \left( \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} \right), \quad (3.50)$$

Isto é,  $a_1^2 + b_1^2 > a_2^2 + b_2^2$ , o que contradiz  $a_1 < a_2$ ,  $b_1 < b_2$ . Isso prova a unicidade de  $a$ .

Agora, supondo que  $z = a + bi$ ,  $b \neq 0$ , satisfaz (3.37) e que  $a \geq p_\alpha$ . Pelo Lema 3.2.3 tem-se que  $x_k^* < a < (2k + 1)\pi$ , para algum  $k \geq \aleph$  (**Caso A** ou **Caso B**) ou para algum  $k \geq \aleph + 1$  (**Caso C**). A seguir, é apresentada a prova para o caso  $k = \aleph$  (**Caso A** ou **Caso B**) ou  $k = \aleph + 1$  (**Caso C**). Para outros valores de  $k$  a prova é análoga. Seja  $q_\alpha$  como descritos no **Caso A** ou **Caso C**; se o **Caso C** for verdadeiro, considera-se  $q_\alpha = p_\alpha = x_\aleph^*$ . Usando o fato de que  $q_\alpha \sin(q_\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ , de (3.43),  $b^2 > 0$  e  $-\cos(a) > -\cos(x_k^*)$ , tem-se

$$q_\alpha \sin(q_\alpha) = -\frac{a^2 + b^2}{b} \cos(a) \sinh(b) > -\cos(x_k^*) (x_k^*)^2 \frac{\sinh(b)}{b}. \quad (3.51)$$

Como  $(x_k^*)^2 \cos(x_k^*) + x_k^* \sin(x_k^*) = 0$  e  $g(x) = x \sin(x)$  é uma função decrescente em  $[x_k^*, (2k + 1)\pi]$ , obtém-se

$$x_k^* \sin(x_k^*) \geq q_\alpha \sin(q_\alpha) > \sin(x_k^*) x_k^* \frac{\sinh(b)}{b}. \quad (3.52)$$

Donde,  $\frac{\sinh(b)}{b} < 1$ , mas isso é uma contradição. Assim, vale que  $a < p_\alpha$ . □

**Teorema 3.2.5.** *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) Se  $\aleph = 0$  e o **Caso A** ou **Caso B** ocorrer, todas as raízes de (3.37) são reais;

(ii) Se  $\aleph \geq 1$  e o **Caso A** ou **Caso B** ocorrer, haverão  $2\aleph$  raízes complexas  $z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{\aleph-1}, \bar{z}_{\aleph-1}$  de (3.37);

(iii) Se o **Caso C** ocorrer, haverão  $2(\aleph + 1)$  raízes complexas  $z_0, \bar{z}_0, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{\aleph}, \bar{z}_{\aleph}$  de (3.37).

*Demonstração.* (i) Se o **Caso A** ou **Caso B** ocorrer com  $\aleph = 0$ , então  $p_\alpha \leq x_0^*$ . Assim, se  $z = a + bi$ ,  $b \neq 0$  é solução de (3.37), então  $0 < a < p_\alpha \leq x_0^*$ , o que contradiz o Lema 3.2.3. Portanto, neste caso, todas as raízes são reais.

(ii) Agora, será assumido que o **Caso A** ou **Caso B** ocorre com  $\aleph \geq 1$  e que  $b > 0$  é arbitrário. Introduzindo-se a função  $U(x) = x \cos(x) \sinh(b) + b \sin(x) \cosh(b)$ . Para cada  $j = 0, 1, 2, \dots$  tem-se que

$$U((2j+1)\pi) = -(2j+1)\pi \sinh(b) < 0, \quad (3.53)$$

e

$$U(x_j^*) = \sin(x_j^*)(b \cosh(b) - \sinh(b)) = \sin(x_j^*)b \cosh(b) \left(1 - \frac{\operatorname{tgh}(b)}{b}\right) > 0, \quad (3.54)$$

já que  $0 < \frac{\operatorname{tgh}(b)}{b} < 1$ , para todo  $b > 0$ . Isso significa que, para cada  $b > 0$  e  $j = 0, 1, 2, \dots$ , existe  $x_j^* < t_j(b) < (2j+1)\pi$  tal que  $U(t_j(b)) = 0$ . Como

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{t_j(b)} \frac{\sin(t_j(b))}{\cos(t_j(b))} = - \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tgh}(b)}{b} = -1, \quad (3.55)$$

segue que  $\lim_{b \rightarrow 0^+} t_j(b) = x_j^*$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Para cada  $b > 0$  e  $j = 0, 1, 2, \dots$ , seja

$$V_j(b) = \frac{[t_j(b)]^2 + b^2}{t_j(b)} \sin(t_j(b)) \cosh(b) - \frac{1}{\alpha}. \quad (3.56)$$

Nota-se que, se  $j = 0, 1, \dots, \aleph - 1$ , vale que  $x_j^* \sin(x_j^*) < x_j^* < 2\pi\aleph \leq \frac{1}{\alpha}$ , e assim

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} V_j(b) = x_j^* \sin(x_j^*) - \frac{1}{\alpha} < 0. \quad (3.57)$$

Também,

$$\begin{aligned} V_j(b) &> b^2 \cosh(b) \frac{\sin(t_j(b))}{t_j(b)} - \frac{1}{\alpha} \\ &= -b^2 \cosh(b) \cos(t_j(b)) \frac{\operatorname{tgh}(b)}{b} - \frac{1}{\alpha} \\ &= -b \sinh(b) \cos(t_j(b)) - \frac{1}{\alpha} \\ &> b \sinh(b) (-\cos(x_j^*)) - \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

O que significa que  $V_j(\widehat{b}) > 0$  para algum  $\widehat{b} > 0$  suficientemente grande. Como (3.57) e (3.58) fornecem que  $\lim_{b \rightarrow 0^+} V_j(b) < 0$  e  $V_j(\widehat{b}) > 0$ , para algum  $j = 0, 1, \dots, \aleph - 1$ , pode-se concluir que existe  $0 < b_j < \widehat{b}$  tal que  $V_j(b_j) = 0$ . Então, definindo  $a_j = t_j(b_j)$ , pode-se verificar que  $(a_j, b_j)$  satisfaz (3.40)-(3.41), isto é,  $z_j = a_j + ib_j$  é uma raiz complexa de (3.37) com  $b_j > 0$  e  $x_j^* < a_j < (2j + 1)\pi$ , para cada  $j = 0, 1, \dots, \aleph - 1$ . Do Teorema 3.2.4, conclui-se que existe uma única raiz com  $x_j^* < \text{Re}(z_j) < (2j + 1)\pi$ ,  $j = 0, 1, \dots, \aleph - 1$ . Portanto, considerando-se também as raízes complexas conjugadas  $\bar{z}_j$ , haverá  $2\aleph$  raízes complexas de (3.37).

- (ii) Por fim, assumindo-se o **Caso C**, tem-se  $x_\aleph^* \text{sen}(x_\aleph^*) < \frac{1}{\alpha}$ . Assim, a função  $V_\aleph$  satisfaz (3.57) e (3.58), de modo que existe uma única raiz complexa  $z_0 = a_0 + ib_0$  de (3.37) tal que  $x_\aleph^* < a_0 < (2\aleph + 1)\pi$ ,  $b_0 > 0$ . A existência das demais raízes complexas pode ser provada analogamente, pois para  $j = 0, 1, \dots, \aleph - 1$ , tem-se que  $x_j^* \text{sen}(x_j^*) < x_j^* < 2\pi j < 2\pi\aleph < x_\aleph^* \text{sen}(x_\aleph^*) < \frac{1}{\alpha}$ . □

**Corolário 3.2.6.** Se  $\frac{1}{\alpha} \leq x_0^* \text{sen} x_0^*$ , todas as soluções de (3.37) são reais. Em particular, o mesmo é válido se  $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$ .

*Demonstração.* Se  $\frac{1}{\alpha} \leq x_0^* \text{sen} x_0^*$ , o item (i) do Teorema 3.2.5 é válido. A segunda afirmação segue do fato que  $x_0^* \text{sen} x_0^* > \frac{\pi}{2}$ . □

Observa-se, por construção, que os autovalores complexos  $\lambda$  do problema espectral auxiliar são dados por  $\lambda = z_j^2$  ou  $\lambda = \bar{z}_j^2$ , sendo  $z_j$  conforme o Teorema 3.2.5; os autovalores reais são dados considerando  $\lambda = p_\alpha^2$ ,  $\lambda = q_\alpha^2$  ou  $\lambda = x_k^2$  do **Caso A**, **Caso B** ou **Caso C**. Dessa maneira, por questão de notação, serão denotadas  $\sqrt{\lambda_0}, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}, \dots$  como as soluções de (3.37) tais que

$$\text{Re}(\sqrt{\lambda_0}) \leq \text{Re}(\sqrt{\lambda_1}) \leq \text{Re}(\sqrt{\lambda_2}) \leq \dots \leq \text{Re}(\sqrt{\lambda_n}) \leq \text{Re}(\sqrt{\lambda_{n+1}}) \leq \dots \quad (3.59)$$

Mais precisamente:

- Se o item (i) do Teorema 3.2.5 for válido, todas as soluções de (3.37) são reais e tem-se

$$\sqrt{\lambda_0} = p_\alpha, \sqrt{\lambda_1} = q_\alpha, \sqrt{\lambda_2} = x_0, \sqrt{\lambda_3} = x_1, \dots, \sqrt{\lambda_{2k}} = x_{2(k-1)}, \sqrt{\lambda_{2k+1}} = x_{2k-1}, \dots \quad (3.60)$$

para o **Caso A** e

$$\sqrt{\lambda_0} = p_\alpha, \sqrt{\lambda_1} = x_0, \sqrt{\lambda_2} = x_1, \sqrt{\lambda_3} = x_2, \dots, \sqrt{\lambda_{2k-1}} = x_{2(k-1)}, \sqrt{\lambda_{2k}} = x_{2k-1}, \dots \quad (3.61)$$

para o **Caso B**.

- Assumindo agora que o item (ii) do Teorema 3.2.5 é válido. Para o **Caso A**, tem-se

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_0} &= z_0, \sqrt{\lambda_1} = \bar{z}_0, \sqrt{\lambda_2} = z_1, \sqrt{\lambda_3} = \bar{z}_1, \dots, \sqrt{\lambda_{n_\alpha-1}} = z_{\aleph-1}, \sqrt{\lambda_{n_\alpha}} = \bar{z}_{\aleph-1}, \\ \sqrt{\lambda_{n_\alpha+1}} &= p_\alpha, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2}} = q_\alpha, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+3}} = x_0, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+4}} = x_1, \dots, \\ \sqrt{\lambda_{n_\alpha+1+2k}} &= x_{2(k-1)}, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2+2k}} = x_{2k-1}, \dots, \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que  $n_\alpha = 2\aleph - 1$ . Para o **Caso B**, tem-se

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_0} &= z_0, \sqrt{\lambda_1} = \bar{z}_0, \sqrt{\lambda_2} = z_1, \sqrt{\lambda_3} = \bar{z}_1, \dots, \sqrt{\lambda_{n_\alpha-1}} = z_{\aleph-1}, \sqrt{\lambda_{n_\alpha}} = \bar{z}_{\aleph-1}, \\ \sqrt{\lambda_{n_\alpha+1}} &= p_\alpha = x_\aleph^*, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2}} = x_0, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+3}} = x_1, \dots, \\ \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k}} &= x_{2(k-1)}, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+1+2k}} = x_{2k-1}, \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

Se o Item (iii) do Teorema 3.2.5 for válido, tem-se

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_0} &= z_0, \sqrt{\lambda_1} = \bar{z}_0, \sqrt{\lambda_2} = z_1, \sqrt{\lambda_3} = \bar{z}_1, \dots, \sqrt{\lambda_{n_\alpha-1}} = z_\aleph, \sqrt{\lambda_{n_\alpha}} = \bar{z}_\aleph, \\ \sqrt{\lambda_{n_\alpha+1}} &= p_\alpha, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2}} = q_\alpha, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+3}} = x_0, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+4}} = x_1, \dots, \\ \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k+1}} &= x_{2(k-1)}, \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k+2}} = x_{2k-1}, \dots, \end{aligned} \quad (3.64)$$

em que  $n_\alpha = 2\aleph + 1$ .

Como resultado dessas constatações, tem-se o Lema 3.2.7.

**Lema 3.2.7.** *Se o **Caso A** ou **Caso C** for verdadeiro, todas as soluções reais  $\sqrt{\lambda_n}$  de (3.37) satisfazem*

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < \sqrt{\lambda_n} < n\pi + \frac{\pi}{2}. \quad (3.65)$$

*Demonstração.* Primeiramente, supondo que o item (i) e o **Caso A** são válidos. Então, em virtude de (3.60), para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tem-se

$$2k\pi < \sqrt{\lambda_{2k}} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (3.66)$$

e

$$x_k^* < \sqrt{\lambda_{2k+1}} < (2k+1)\pi. \quad (3.67)$$

Se  $n$  for par, fica evidente em (3.66) que (3.65) é válido. Como  $x_k^* > 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ , tomando  $n = 2k+1$  em (3.67), tem-se  $n\pi > \sqrt{\lambda_n} > (n-1)\pi + \frac{\pi}{2} = n\pi - \frac{\pi}{2}$ , donde obtém-se (3.65).

Agora, assumindo que o Item (ii) e o **Caso A** são válidos. Então, por consequência de (3.62), tem-se

$$2(\aleph+k)\pi < \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k+1}} < 2(\aleph+k)\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (3.68)$$

e

$$x_{\aleph+k}^* < \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k+2}} < 2(\aleph+k)\pi + \pi. \quad (3.69)$$

Para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Tomando  $n = n_\alpha + 2k + 1$  em (3.68) e  $m = n_\alpha + 2k + 2$  em (3.69), segue que  $n\pi < \sqrt{\lambda_n} < n\pi + \frac{\pi}{2}$  e  $m\pi > \sqrt{\lambda_m} > x_{\aleph+k}^* > 2(\aleph + k)\pi + \frac{\pi}{2} = (m - 1)\pi + \frac{\pi}{2} = m\pi - \frac{\pi}{2}$ , respectivamente, que garante que (3.65) seja satisfeita.

Se o **Caso C** for válido, segue de (3.64) que, para cada  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$2(\aleph + k + 1)\pi < \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k+1}} < 2(\aleph + k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (3.70)$$

e

$$x_{\aleph+k+1}^* < \sqrt{\lambda_{n_\alpha+2k+2}} < 2(\aleph + k + 1)\pi + \pi. \quad (3.71)$$

Então, tomando  $n = n_\alpha + 2k + 1$  em (3.70) e  $m = n_\alpha + 2k + 2$  em (3.71), tem-se  $n\pi < \sqrt{\lambda_n} < n\pi + \frac{\pi}{2}$  e  $m\pi > \sqrt{\lambda_m} > x_{\aleph+k+1}^* > 2(\aleph + k + 1)\pi + \frac{\pi}{2} = (m - 1)\pi + \frac{\pi}{2} = m\pi - \frac{\pi}{2}$ , respectivamente, donde (3.65) é verdadeira. □

### 3.2.3 Propriedades do Problema Espectral Auxiliar

Como monstado anteriormente, o problema possui um número finito de autovalores complexos e esse número depende do parâmetro  $\alpha$ . Serão denotados por  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_\alpha}$ , os autovalores complexos e  $X_0, X_1, \dots, X_{n_\alpha}$ , as respectivas autofunções associadas, sendo

$$X_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x). \quad (3.72)$$

Como o problema (3.17)-(3.18) é não auto-adjunto, não é evidente que o sistema  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  constitui uma base para  $L^2[0, 1]$ . Note que essa sequência de funções não é ortogonal em  $L^2[0, 1]$ .

No entanto, é possível averiguar se esse sistema de funções forma uma base de Riesz em  $L^2[0, 1]$ . Uma forma de fazer isso, tendo como base o Teorema 2.4.9 e o Teorema 2.4.10, é verificar se  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  é biortogonal a algum outro sistema de funções. Um conjunto de funções que parece ser natural para fazer essa verificação é  $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ , dado por

$$Z_n(x) = C \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right). \quad (3.73)$$

Vale a pena notar que  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$  não são biortogonais. Na verdade, conforme Marchenkov (2006), tem-se as seguintes relações:

$$\int_0^1 X_n(x) \overline{Z_k(x)} dx = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_k}}, \quad n \neq k, \quad (3.74)$$

$$\int_0^1 X_n(x) \overline{Z_n(x)} dx = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha \lambda_n} - \sqrt{2} \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n})}{2}. \quad (3.75)$$

Entretanto, suponha que o **Caso A** ou **Caso C** ocorrem, isto é,  $\alpha \neq \frac{1}{x_\aleph^* \operatorname{sen}(x_\aleph^*)}$ , sendo  $x_\aleph^*$  solução da equação  $\operatorname{sen}(x) + x \cos(x) = 0$ . Nesse caso, seguindo Marchenkov (2006), ao

fazer a exclusão da autofunção  $X_0$  do conjunto de autofunções, o sistema restante  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  torna-se biortogonal ao sistema  $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ , sendo  $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$  dado por

$$Y_k(x) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\lambda_0} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) - \sqrt{\lambda_k} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}(1-x))}{\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k})}. \quad (3.76)$$

Esse resultado é provado no Lema 3.2.8.

**Lema 3.2.8.** *Se o Caso A ou Caso C ocorrem, a sequência  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  é biortogonal à sequência  $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ , dada por*

$$Y_k(x) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\lambda_0} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) - \sqrt{\lambda_k} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}(1-x))}{\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k})}. \quad (3.77)$$

*Demonstração.* Com efeito, denotando  $\{Z_k(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}(1-x))\}_{k=1}^\infty$ , tem-se

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \sqrt{2} \int_0^1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx, \quad (3.78)$$

que, por identidades trigonométricas, é equivalente à

$$\begin{aligned} \langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_n}x - \sqrt{\lambda_k}(1-x)) \\ &\quad - \cos(\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Assim, se  $n \neq k$

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}) - \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_k}} - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}) - \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_k}} \right). \quad (3.80)$$

Manipulando algebricamente,

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\lambda_n} \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_k} \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n - \lambda_k}. \quad (3.81)$$

De modo que, pela equação (3.27)

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha \sqrt{\lambda_n} \sqrt{\lambda_k}}, \quad n \neq k. \quad (3.82)$$

No caso  $n = k$ , (3.79) fornece

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \cos(2\sqrt{\lambda_n}x - \sqrt{\lambda_n}) - \cos(\sqrt{\lambda_n}) dx, \quad (3.83)$$

isto é,

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} - \cos(\sqrt{\lambda_n}) \right). \quad (3.84)$$

Finalmente, pela equação (3.27)

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha\lambda_n} - \sqrt{2} \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n})}{2}, \quad n = k. \quad (3.85)$$

Resumindo,

$$\langle X_n, Z_k \rangle_{L^2[0,1]} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_k}}, & n \neq k \\ \frac{\sqrt{2}}{2\alpha\lambda_n} - \sqrt{2} \frac{\cos(\sqrt{\lambda_n})}{2}, & n = k. \end{cases} \quad (3.86)$$

Dessa maneira, para  $n \neq k$

$$\langle X_n, Y_k \rangle_{L^2[0,1]} = 2 \frac{\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\alpha\sqrt{\lambda_0}\sqrt{\lambda_n}} - \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\alpha\sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_n}}}{\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \text{sen}(\sqrt{\lambda_k})} = 0, \quad (3.87)$$

e para  $n = k$

$$\begin{aligned} \langle X_k, Y_k \rangle_{L^2[0,1]} &= \frac{\frac{2}{\alpha\sqrt{\lambda_k}} - \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\alpha\lambda_k} + \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \text{sen}(\sqrt{\lambda_k})} \\ &= \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda_k}) + \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \text{sen}(\sqrt{\lambda_k})} = 1. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Isto é,

$$\langle X_n, Y_k \rangle_{L^2[0,1]} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k. \end{cases} \quad (3.89)$$

O que leva a concluir que  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$  são biortogonais. □

O Teorema 3.2.9, a seguir, usa o fato que o conjunto  $\{\sqrt{2} \text{sen}(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$  é uma base ortonormal para  $L^2[0, 1]$ , esse fato está provado em Renardy e Rogers (2004, p. 188-189).

**Teorema 3.2.9.** *Se o **Caso A** ou **Caso C** ocorrerem, o sistema de autofunções  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  é quadraticamente próxima à base ortonormal  $\{\sqrt{2} \text{sen}(\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, observa-se que

$$\text{sen}(\sqrt{\lambda_n} - n\pi) = (-1)^n \text{sen}(\sqrt{\lambda_n}) = (-1)^n \frac{1}{\alpha\sqrt{\lambda_n}}. \quad (3.90)$$

Pelo Lema 3.2.7, se  $n$  é suficientemente grande, tem-se

$$\frac{-\pi}{2} < \sqrt{\lambda_n} - n\pi < \frac{\pi}{2}. \quad (3.91)$$

Portanto, para  $n$  suficientemente grande, vale que

$$\text{sen}^2(\sqrt{\lambda_n} - n\pi) = \frac{1}{\alpha^2 (\sqrt{\lambda_n})^2} < \frac{1}{\alpha^2 \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}. \quad (3.92)$$

Com isso, pelo teste da comparação, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}^2\left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right), \quad (3.93)$$

converge.

Devido à (3.90), tem-se que

$$\text{sen}\left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.94)$$

e (3.91) garante então que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right) = 0. \quad (3.95)$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}^2\left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right)}{\left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right)^2} = 1, \quad (3.96)$$

e a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right)^2, \quad (3.97)$$

converge (teste da comparação por limites).

Objetiva-se provar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[ \text{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) - \text{sen}(n\pi x) \right]^2 dx < \infty. \quad (3.98)$$

Para isso, nota-se que para  $a$  e  $b$  quaisquer, tem-se que

$$\text{sen}(a) - \text{sen}(b) = (a - b) \int_0^1 \cos\left(t(a - b) + b\right) dt. \quad (3.99)$$

Assim, tomando  $a = \sqrt{\lambda_n}x$  e  $b = n\pi x$ , tem-se

$$\begin{aligned} \left[ \text{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) - \text{sen}(n\pi x) \right]^2 &= \left(\sqrt{\lambda_n}x - n\pi x\right)^2 \left[ \int_0^1 \cos\left(t\left(\sqrt{\lambda_n}x - n\pi x\right) + n\pi x\right) dt \right]^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\lambda_n}x - n\pi x\right)^2. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \text{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) - \text{sen}(n\pi x) \right]^2 dx &\leq \int_0^1 \left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right)^2 x^2 dx \\ &\leq \left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right)^2. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_n} - n\pi\right)^2 < \infty, \quad (3.102)$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[ \text{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) - \text{sen}(n\pi x) \right]^2 dx < \infty. \quad (3.103)$$

□

O Teorema 3.2.10 fornece um dos principais resultados para provar a existência e unicidade de solução do problema inverso abordado nesta dissertação.

**Teorema 3.2.10.** *Admita que o **Caso A** ou **Caso C** ocorra, então o sistema de autofunções  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  é uma base de Riesz para o espaço  $L^2 [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2.9,  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  é quadraticamente próxima à base ortonormal  $\{\sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi n x)\}_{n=1}^\infty$ . Ademais, pelo Lema 3.2.8 e Teorema 2.4.9, tem-se que  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  é  $\omega$ -linearmente independente. Assim, pelo Teorema 2.4.10,  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  é uma base de Riesz para  $L^2 [0, 1]$ . □

Dessa forma, se  $x \in L^2 [0, 1]$ , pode-se escrever

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n, \quad (3.104)$$

e conforme (2.28), os coeficientes  $c_n$ s são dados por  $c_n = \langle x, Y_n \rangle$ .

Outro resultado que será útil adiante, está enunciado no Teorema 3.2.11.

**Teorema 3.2.11.** *Seja o problema espectral*

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.105)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(0) + \alpha y(1) = 0. \quad (3.106)$$

*Então, o conjunto de funções  $\{\sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_n} x)\}_{n=1}^\infty$  são autofunções de (3.105)-(3.106) e formam uma base de Riesz para  $L^2 [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Vide Marchenkov (2005). □

### 3.3 Existência e Unicidade de Solução para o Problema Direto

Daqui em diante, admita que o **Caso A** ou **Caso C** ocorra.

**Definição 3.3.1.** *A classe de funções denotada por*

$$\Phi [0, 1] \equiv \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \in C^3 [0, 1] : \varphi(1) = \varphi''(1) = 0, \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0, \\ \int_0^1 \varphi(x) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(x-1)) dx = 0. \end{array} \right\},$$

*é chamada de classe de dados admissíveis.*

Apesar de serem impostas condições bastante restritas, o conjunto  $\Phi [0, 1]$  engloba uma ampla classe de funções. Isso se dá pelo fato que toda função em  $C_0^\infty (\Omega)$  que pertence ao complemento ortogonal do subespaço

$$S_0 = \left\{ k \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(x-1)), k \in \mathbb{C} \right\}, \quad (3.107)$$

em  $L^2[0, 1]$  estão incluídas em  $\Phi[0, 1]$ .

Observa-se que para cada  $w \in C_0^\infty(\Omega)$  dado, se

$$\left\langle w, \operatorname{sen} \left( \sqrt{\lambda_0}(x-1) \right) \right\rangle_{L^2[0,1]} = 0, \quad (3.108)$$

então  $w \in S_0^\perp$ , resultando que  $w \in \Phi[0, 1]$ ; de outra maneira, considerando  $g = w(c-w)$ , em que  $c = \frac{\langle w^2, \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(x-1)) \rangle_{L^2[0,1]}}{\langle w, \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(x-1)) \rangle_{L^2[0,1]}}$ , pode ser constatado que  $g$  e todas as suas derivadas se anulam em  $x=0$  e  $x=1$  e que  $g \in S_0^\perp$ , isto é,  $g \in \Phi[0, 1]$ .

Para exemplificar, considere a função

$$w(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right), & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{cases} \quad (3.109)$$

Evidentemente,  $w$  pertence a  $C_0^\infty(\Omega)$ . No caso em que  $\alpha = \frac{2}{\operatorname{sen}(0,5)}$ , realizando uma análise numérica em (3.27), verifica-se que todos os autovalores  $\lambda_n$  são reais e que  $\lambda_0 = 0,25$ . Por procedimento de integração numérica, obtém-se que  $c \approx 0,01381502656$ . Desse modo,

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right) \left(0,01381502656 - \exp\left(\frac{-1}{x(1-x)}\right)\right), & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{cases}$$

Constata-se, também, que  $\langle g, \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(x-1)) \rangle_{L^2[0,1]} \approx -1,00642 \times 10^{-8}$  e como  $g \in C_0^\infty(\Omega)$ , tem-se que  $g \in \Phi[0, 1]$ .

**Lema 3.3.2.** *Se  $\varphi(x) \in \Phi[0, 1]$ , então a desigualdade*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n| \leq c \|\varphi'''\|_{L^2[0,1]}, \quad c > 0, \quad (3.110)$$

vale, com  $\varphi_n = \langle \varphi, Y_n \rangle$  e algum  $c \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Note que, como  $\langle \varphi, \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(x-1)) \rangle_{L^2[0,1]} = 0$ , tem-se

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^1 \varphi \overline{Y_n} dx = -\sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \mu_n \int_0^1 \varphi(x) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}(1-x)) dx, \quad (3.111)$$

sendo

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n})}. \quad (3.112)$$

Integrando por partes, resulta que

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} = -\sqrt{2} \mu_n \left( \left[ \varphi(x) \cos(\sqrt{\lambda_n}(1-x)) \right]_0^1 - \int_0^1 \varphi'(x) \cos(\sqrt{\lambda_n}(1-x)) dx \right). \quad (3.113)$$

Como  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , obtém-se

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} = \sqrt{2}\mu_n \int_0^1 \varphi'(x) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right) dx. \quad (3.114)$$

Integrando por partes novamente, tem-se

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} = -\sqrt{2} \frac{\mu_n}{\sqrt{\lambda_n}} \left( \left[ \varphi'(x) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right) \right]_0^1 - \int_0^1 \varphi''(x) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right) dx \right). \quad (3.115)$$

Usando o fato que  $\varphi'(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$ , segue-se que

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}\mu_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 \varphi''(x) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right) dx. \quad (3.116)$$

Finalmente, integrando por parte mais uma vez e usando o fato que  $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ , obtém-se

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} = \frac{\sqrt{2}\mu_n}{\lambda_n} \int_0^1 \varphi'''(x) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right) dx. \quad (3.117)$$

Logo,

$$\varphi_n = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right) + \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\right)} \int_0^1 \varphi'''(1-s) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}s\right) ds. \quad (3.118)$$

Portanto,

$$|\lambda_n \varphi_n| \leq \sqrt{2} |\mu_n| \left| \int_0^1 \varphi'''(1-s) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}s\right) ds \right|. \quad (3.119)$$

Para estimar o termo à direita de (3.119) acima, deve-se lembrar que devido ao Teorema 3.2.11 e ao Teorema 2.4.6, existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle h, \sqrt{2} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}s\right) \rangle_{L^2[0,1]} \right|^2 \leq k \|h\|_{L^2[0,1]}^2, \quad (3.120)$$

para todo  $h \in L^2[0,1]$ . Então, considerando  $h = \varphi'''(1-s)$  em (3.120), resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \varphi'''(1-s), \sqrt{2} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}s\right) \rangle_{L^2[0,1]} \right|^2 \leq k \|\varphi'''\|_{L^2[0,1]}^2. \quad (3.121)$$

Voltando à (3.119), usando a desigualdade de Schwarz, tem-se

$$\sum_{n=1}^N |\lambda_n \varphi_n| \leq \sqrt{2} \left( \sum_{n=1}^N |\mu_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^N \left| \langle \varphi'''(1-s), \cos\left(\sqrt{\lambda_n}s\right) \rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.122)$$

Agora, será analisada a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2, \quad (3.123)$$

utilizando o teste da comparação por limites. Note que devido ao lema 3.2.7, para  $n$  suficientemente grande vale que

$$0 < \frac{1}{\lambda_n} < \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2}. \quad (3.124)$$

Isso significa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (3.125)$$

Aliado a isso, observe que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda_n}}{\mu_n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n})\right)^2}{\lambda_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \cos^2(\sqrt{\lambda_n}) + 2\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}) + \operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \cos^2(\sqrt{\lambda_n}) + \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n} \right]. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Como  $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , então  $\cos^2(\sqrt{\lambda_n}) \rightarrow 1$ ,  $\frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} \rightarrow 0$  e  $\frac{\operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda_n}}{\mu_n^2} = 1. \quad (3.127)$$

Portanto, a série (3.123) converge. Isso leva a concluir que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n|, \quad (3.128)$$

converge. Além disso, tendo em vista (3.120), conclui-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \|\varphi'''\|_{L^2[0,1]}. \quad (3.129)$$

sendo

$$c = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}. \quad (3.130)$$

Está provado o resultado. □

**Observação 3.3.3.** *Suponha que  $f(x, t) \in C^{3,0}(\overline{\Omega_T})$  é tal que  $f(x, t) \in \Phi[0, 1], \forall t \in [0, T]$ . Então, argumentando como em (3.119) na demonstração do Lema 3.3.2 acima, pode-se mostrar que*

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{|\lambda_n|} |\mu_n| \int_0^1 |f_{xxx}(s, t)| \left| \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \right| ds, \quad (3.131)$$

para todo  $t \in [0, T]$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Com isso, obtém-se que

$$|f_n(t)| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda_n|} |\mu_n| \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})}. \quad (3.132)$$

Lembrando que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^2} \leq \frac{1}{|\lambda_n|}, \quad (3.133)$$

vale para  $n$  suficientemente grande. Então, por (3.125),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty. \quad (3.134)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (3.135)$$

Portanto, pelo teste- $M$  de Weierstrass, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|, \quad (3.136)$$

converge uniformemente em  $[0, T]$ .

Com o suporte construído, já é possível mostrar a existência e unicidade de solução para o problema direto.

**Teorema 3.3.4.** *(Existência e unicidade de solução para o problema direto) Sejam satisfeitas as seguintes condições:*

1.  $\varphi(x) \in \Phi [0, 1]$ ;
2.  $f(x, t) \in C^{3,0}(\overline{\Omega}_T)$  e  $f(x, t) \in \Phi [0, 1]$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .
3.  $r(t) \in C [0, T]$ .

Então o problema (3.1)-(3.4), possui uma única solução  $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$ . Além disso, se as funções  $f$ ,  $\varphi$  e  $r$  forem reais, a solução  $u$  é uma função real.

*Demonstração.* Será suposto que  $n_\alpha \geq 1$ . O caso em que todas as raízes são reais pode ser provado analogamente. Para construir a solução formal do problema (3.1)-(3.4), para  $r(t) \in C [0, T]$  arbitrária, recorrer-se-á ao método de Fourier generalizado. De acordo com esse método, a solução  $u(x, t)$  é descrita por uma série de Fourier, em termos da base de Riesz, descartando-se  $X_0(x)$ ,  $\{X_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x)\}_{n=1}^{\infty}$ , composta pelas autofunções do problema espectral auxiliar (3.17)-(3.18). Ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \quad (3.137)$$

Assim,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{n_\alpha} u_n(t) X_n(x) + \sum_{n=n_\alpha+1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \quad (3.138)$$

com  $u_n(t) = \langle u(x, t), Y_n(x) \rangle_{L^2[0,1]}$ .

Para cada  $u_n(t)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , obtém-se o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) = r(t) f_n(t) \\ u_n(0) = \varphi_n, \end{cases} \quad (3.139)$$

em que  $\varphi_n = \langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]}$  e  $f_n = \langle f(x, t), Y_n \rangle_{L^2[0,1]}$ . De fato, considerando (3.1) e o fato que  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  é base de Riesz para  $L^2[0, 1]$ , obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n''(x) + r(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x), \quad (3.140)$$

e por (3.17)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n u_n(t) X_n(x) + r(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x). \quad (3.141)$$

Analogamente,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) X_n(x), \quad (3.142)$$

que por (3.2) resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) X_n(x). \quad (3.143)$$

Assim, (3.139) segue de (3.141) e (3.143).

Da teoria das EDO's, a solução de (3.139) é dada por

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau,$$

com

$$\varphi_n = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} + \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 \varphi(x) \operatorname{sen} \left( \sqrt{\lambda_n}(x-1) \right) dx. \quad (3.144)$$

e

$$f_n(t) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} + \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 f(x, t) \operatorname{sen} \left( \sqrt{\lambda_n}(x-1) \right) dx, \quad (3.145)$$

para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$

Para provar a convergência uniforme das séries a seguir, será utilizado o teste-M de Weierstrass. Para analisar a convergência da série (3.137), primeiro note que, para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tem-se

$$\left| \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right| \leq |\varphi_n| \sqrt{2}, \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega_T}, \quad (3.146)$$

pois  $|e^{-\lambda_n t}| \leq 1$ , sempre que  $t \geq 0$ . A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| \quad (3.147)$$

é convergente, pois devido à (3.119), para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tem-se que

$$|\varphi_n| \leq \sqrt{2} \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \|\varphi'''\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad (3.148)$$

e já foi provado que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|}, \quad (3.149)$$

é convergente. Portanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right|, \quad (3.150)$$

converge uniformemente em  $\bar{\Omega}_T$ .

Agora, observe que, devido à (3.132), para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , vale a desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau X_n(x) \right| &\leq \|r\|_{C[0,T]} \int_0^T |f_n(\tau)| \left| e^{-\lambda_n(t-\tau)} \right| d\tau \sqrt{2} \\ &\leq 2 \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \|f_{xxx}\|_{C[0,T]} T, \end{aligned} \quad (3.151)$$

$\forall (x, t) \in \bar{\Omega}_T$ , já que  $\left| e^{-\lambda_n(t-\tau)} \right| \leq 1$  se  $0 \leq \tau \leq t$ . Portanto, argumentando como antes, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right) X_n(x), \quad (3.152)$$

converge uniformemente em  $\bar{\Omega}_T$ . Dessa forma, a série (3.137) converge uniformemente em  $\bar{\Omega}_T$  à uma função  $u \in C(\bar{\Omega}_T)$ .

Ademais, note que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right] \right| \leq \sqrt{2} |\lambda_n| |\varphi_n|, \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega}_T. \quad (3.153)$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right], \quad (3.154)$$

converge uniformemente em  $\bar{\Omega}_T$ , pois pelo Lema 3.3.2,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \varphi_n| < \infty$ . Também, se

$n \geq n_\alpha + 1$ , é verdade que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right] X_n(x) \right| &= \left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{-\lambda_n t} \right] \right) \left( \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau X_n(x) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau X_n(x) \right] \right) e^{-\lambda_n t} \right| \\
 &\leq \left| -\lambda_n e^{-\lambda_n t} \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau \right| \sqrt{2} \\
 &\quad + \sqrt{2} \left| r(t) f_n(t) e^{\lambda_n t} e^{-\lambda_n t} \right| \\
 &\leq 2 |\lambda_n| e^{-\lambda_n t} \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \|f_{xxx}\|_{C[0,T]} \left[ \frac{1}{\lambda_n} e^{\lambda_n \tau} \right]_0^t \\
 &\quad + \sqrt{2} \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{|\lambda_n|} \sqrt{2} \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \\
 &= 2 e^{-\lambda_n t} \frac{1}{\lambda_n} (e^{\lambda_n t} - 1) \|r\|_{C[0,T]} |\mu_n| \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \\
 &\quad + 2 \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{\lambda_n} \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \\
 &= k \frac{|\mu_n|}{\lambda_n} [2 - e^{-\lambda_n t}] \\
 &\leq 2k \frac{|\mu_n|}{\lambda_n},
 \end{aligned} \tag{3.155}$$

sendo  $k = 2 \|r\|_{C[0,T]} \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})}$ . Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right] X_n(x) \right), \tag{3.156}$$

converge uniformemente em  $(\overline{\Omega_T})$ . Isso significa que é possível derivar a série (3.137) termo a termo com relação à  $t$ , e o resultado é a derivada  $u_t \in C(\overline{\Omega_T})$ .

Agora, serão analisadas as derivadas espaciais de  $u$ . Para isso, note que

$$X'(x) = \sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) \tag{3.157}$$

$$X''(x) = -\sqrt{2} \lambda_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x). \tag{3.158}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial}{\partial x} [\varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)] \right| &\leq \sqrt{2} \left| \sqrt{\lambda_n} \right| e^{-\lambda_n t} |\varphi_n| \\
 &\leq \sqrt{2} \left| \sqrt{\lambda_n} \right| |\varphi_n|,
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

para todo  $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Como  $\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , segue-se que a sequência  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$  é limitada. Isto é,  $\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \leq k$ , para alguma constante  $k$  e para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Como consequência, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_n} \right| |\varphi_n|, \tag{3.160}$$

converge, pois

$$\left| \sqrt{\lambda_n} \varphi_n \right| = \left| \frac{\lambda_n \varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \leq k |\lambda_n| |\varphi_n|, \quad (3.161)$$

para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |\varphi_n| < \infty$ , Isso significa que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right], \quad (3.162)$$

converge uniformemente em  $\overline{\Omega_T}$ . Da mesma forma, se  $n \geq n_\alpha + 1$ , por (3.132) resulta que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau X_n(x) \right] \right| &\leq \sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \|r\|_{C[0,T]} \int_0^t r(\tau) |f_n(\tau)| e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\ &\leq 2 \sqrt{\lambda_n} \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{\lambda_n} \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\ &= 2 \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{\lambda_n} \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n(t-\tau)}) \\ &\leq C \frac{|\mu_n|}{\lambda_n}, \end{aligned} \quad (3.163)$$

para alguma constante  $C$ . Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau X_n(x) \right] \right), \quad (3.164)$$

converge uniformemente em  $\overline{\Omega_T}$ . Então, a série (3.137) pode ser derivada termo a termo em relação à  $x$ , e a série resultante, a qual converge uniformemente em  $\overline{\Omega_T}$ , corresponde à derivada  $u_x \in C(\overline{\Omega_T})$ . Seguindo analogamente, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right] \right| &\leq |\varphi_n| |e^{-\lambda_n t}| |\lambda_n| \sqrt{2} \\ &\leq |\varphi_n| |\lambda_n|, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3.165)$$

e, portanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \right], \quad (3.166)$$

converge uniformemente em  $\overline{\Omega_T}$ . Também, se  $n \geq n_\alpha + 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau X_n(x) \right] \right| &\leq 2 \|r\|_{C[0,T]} \frac{|\mu_n|}{\lambda_n} \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) \\ &\leq C \frac{|\mu_n|}{\lambda_n}. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau X_n(x) \right] \right), \quad (3.168)$$

converge uniformemente em  $\overline{\Omega_T}$ . Isso significa que é possível derivar a série (3.137) duas vezes em relação à  $x$ , e a série resultante converge uniformemente em  $\overline{\Omega_T}$  à função  $u_{xx} \in C(\overline{\Omega_T})$ .

Conclui-se, então, que  $u$  dada por (3.137) pertence ao espaço  $C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$ . Como a série pode ser derivada termo a termo com relação à  $t$  uma vez, e com relação à  $x$  duas vezes, é imediato que  $u$  satisfaz (3.1)-(3.4).

Falta apenas verificar que  $u$  é uma função real. Como  $\alpha$  é suposto um número real, se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um autovalor de (3.17)-(3.18), então  $\bar{\lambda}$  também é autovalor com a correspondente autofunção dada por  $\sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\bar{\lambda}}x)$ . Isso significa que  $n_\alpha$  é ímpar, e os autovalores complexos são ordenados da seguinte maneira:

$$\lambda_0, \lambda_1 = \bar{\lambda}_0, \lambda_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_{n_\alpha-1}, \lambda_{n_\alpha} = \bar{\lambda}_{n_\alpha-1}. \quad (3.169)$$

As autofunções correspondentes, que são elementos da base de Riesz, são dadas por  $X_1(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}x)$ ,  $X_2(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_2}x)$ ,  $X_3(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_2}x)$ , ...,  $X_{n_\alpha-1}(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_{n_\alpha-1}}x)$ ,  $X_{n_\alpha}(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_{n_\alpha-1}}x)$  (lembrando que  $X_0$  foi excluído para construir a base de Riesz).

Como  $\varphi$  assume apenas valores reais e pertence à  $\Phi[0, 1]$ , evidentemente

$$\langle \varphi, \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) \rangle_{L^2[0,1]} = 0. \quad (3.170)$$

Além disso, levando em conta (3.77) vale que  $\langle \varphi, Y_1 \rangle_{L^2[0,1]} = 0$ , assim como  $\langle \varphi, Y_{n+1} \rangle_{L^2[0,1]} = \langle \varphi, \bar{Y}_n \rangle_{L^2[0,1]}$ ,  $n = 2, \dots, n_\alpha - 1$ . Sendo assim, o termo  $\sum_{n=1}^{n_\alpha} \varphi_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)$  em (3.138) é composto por  $(n_\alpha - 1)/2$  somas da forma

$$\langle \varphi, Y_n \rangle_{L^2[0,1]} e^{-\lambda_n t} \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x) + \langle \varphi, \bar{Y}_n \rangle_{L^2[0,1]} e^{-\bar{\lambda}_n t} \sqrt{2} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}x), \quad (3.171)$$

o que é claramente uma expressão de números reais.

Como  $r(t)$  e  $f(x, t)$  também são reais, pode-se concluir analogamente que a soma

$$\sum_{n=1}^{n_\alpha} \left( \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right) X_n(x), \quad (3.172)$$

é um valor real. Portanto,  $u(x, t)$  é uma função de valores reais. □

### 3.4 Existência e Unicidade de Solução para o Problema Inverso

Conforme discutido na introdução do presente trabalho, objetiva-se abordar o seguinte problema inverso:

Dadas  $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$ ,  $f(x, t) \in C(\overline{\Omega_T})$  e  $E(t) \in C^1[0, T]$ , encontrar um par  $\{r(t), u(x, t)\} \in$

$C[0, T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$ , que satisfazem

$$u_t = u_{xx} + r(t)f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (3.173)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega \quad (3.174)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.175)$$

$$u_x(0, t) + \alpha u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad \alpha > 0, \quad (3.176)$$

e a condição de sobredeterminação

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.177)$$

Para analisar esse problema, suponha que  $f$  e  $\varphi$  satisfazem as hipóteses do Teorema 3.3.4, isto é,

- $\varphi \in \Phi[0, 1]$ ;
- $f \in C^{3,0}(\overline{\Omega_T})$ ,  $f(x, t) \in \Phi[0, 1]$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

Além disso, será feita a suposição que  $f$  e  $\varphi$  são funções reais. Então, para cada  $r \in C[0, T]$ , existe uma única função  $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$  que satisfaz (3.173)-(3.177), de forma que

$$\int_0^1 u(x, t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} \int_0^1 X_n(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \int_0^1 X_n(x) dx. \quad (3.178)$$

E assim, como

$$\int_0^1 X_n(x) dx = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos(\sqrt{\lambda_n}) \right), \quad (3.179)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos(\sqrt{\lambda_n}) \right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos(\sqrt{\lambda_n}) \right) \\ &\quad + \int_0^1 u(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos(\sqrt{\lambda_n}) \right), \quad (3.181)$$

é a integral de  $x = 0$  a  $x = 1$  da solução  $u(x, t)$  do problema (3.173)-(3.176) no caso em que  $\varphi = 0$ . Como essa expressão é uma função contínua na variável  $t$  em  $[0, T]$ , pode-se definir o operador  $A : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$ , que associa cada  $r \in C[0, T]$  à expressão

$$A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos(\sqrt{\lambda_n}) \right). \quad (3.182)$$

Dessa forma, tendo em vista (3.180), o problema inverso que pretende-se resolver consiste em, dada uma função real  $E(t) \in C[0, T]$ , primeiro encontrar  $r \in C[0, T]$  tal que

$$A(r) = E(t) - F(t), \quad (3.183)$$

sendo

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right), \quad (3.184)$$

e depois resolver o problema direto e encontrar  $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$  correspondente.

Nesse sentido, torna-se importante determinar o operador inverso de  $A$ , de modo que,

$$r(t) = A^{-1}(E(t) - F(t)). \quad (3.185)$$

Inicialmente, observa-se que  $A$  é um operador integral da forma

$$A(r) = \int_0^T K(t, \tau) r(\tau) d\tau, \quad (3.186)$$

sendo, para cada  $0 \leq t \leq T$ ,

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right) e^{-\lambda_n(t-\tau)}, & \text{se } 0 \leq \tau \leq t \\ 0, & \text{se } t < \tau \leq T. \end{cases}$$

Como  $A$  é um operador integral, então  $A$  é um operador linear. Observa-se, ainda, que a equação (3.183) nem sempre tem solução. Por exemplo, se  $E(0) - F(0) \neq 0$ , certamente (3.183) não terá solução, pois  $A(r)(0) = 0$ . Além disso, como  $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$ , é evidente que  $A(r)(t) \in C^1[0, T]$ . Logo, se  $E(t) \notin C^1[0, T]$ , (3.183) não terá solução.

De forma mais precisa, pode-se afirmar que  $\mathcal{R}(A)$  está contida no conjunto

$$\Gamma = \{v \in C^1[0, T] : v(0) = 0\}. \quad (3.187)$$

Mas não é evidente que  $\mathcal{R}(A)$  é exatamente igual ao conjunto  $\Gamma$ , o que garantiria a existência de solução para (3.183) no caso em que  $E(t) - F(t) \in \Gamma$ .

Outra questão delicada com respeito à equação (3.183) é quanto à unicidade de solução. Para que a solução seja única (caso exista), seria necessário que o operador  $A$  fosse injetivo. Porém, isso não é imediato. De fato, é precisamente essa dificuldade que torna a análise de equações como (3.183) complicadas. Tal equação é referida na literatura como integral de Volterra da primeira espécie (Kress, 2014).

Para uma análise mais profunda dessas questões, é necessário analisar as propriedades do núcleo  $K(t, \tau)$ . Note que, se  $0 \leq \tau \leq t$ , tem-se que

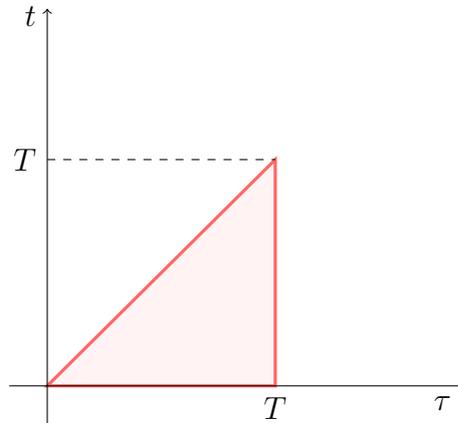
$$\left|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\right| \leq 1, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.188)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \right| &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} 2 |f_n(\tau)| \\ &\leq 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} |\mu_n| \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})}. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Como já foi visto, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|}{\sqrt{\lambda_n}}$  é convergente, portanto  $K(t, \tau)$  é contínuo na região triangular  $0 \leq \tau \leq t \leq T$ , exibida na Figura 2, do plano  $\tau t$ .

Figura 2 – Região em que  $K(t, \tau)$  é contínuo.



Fonte: O autor, 2024.

Então, como  $K(t, \tau) = 0$  na região superior do triângulo da Figura 2, pode-se concluir que  $K(t, \tau)$  é limitado na região  $[0, T] \times [0, T]$ . Ou seja, existe uma constante  $M$  tal que  $|K(t, \tau)| \leq M, \forall (\tau, t) \in [0, T] \times [0, T]$ . Conforme a Definição 2.3.5,  $K(t, \tau)$  é um núcleo fracamente singular com  $\beta = 1$ . Logo, pelo Teorema 2.3.6,  $A : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$  é um operador linear compacto. Como consequência, o problema inverso de encontrar  $r \in C[0, T]$  de tal forma que  $A(r) = E(t) - F(t)$  é mal-posto.

Em outras palavras, conforme discutido na Seção 2.3, mesmo existindo o operador inverso  $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow C[0, T]$ , ele não será limitado. Em particular, isso significa que pequenas imprecisões no dado de entrada  $E(t)$  podem gerar perturbações arbitrariamente grandes na solução  $A^{-1}(E(t) - F(t))$ . Isso tem consequências no tratamento numérico do problema inverso, pois pode ocorrer de a solução numérica de uma dada equação diferir muito da solução desejada quando os dados possuem ruídos. Vale lembrar que normalmente o dado de entrada  $E(t)$  possui imprecisões advindas de medições experimentais. O fato de  $A^{-1}$  ser não limitada, implica que é possível aumentar a acurácia da aproximação para o operador  $A$ , no entanto, isso não resulta numa aproximação numérica plausível para a solução  $r$  de (3.183).

Será suposto agora, além das hipóteses já impostas sobre  $\varphi$  e  $f$ , que

$$\int_0^1 f(x, t) dx \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.190)$$

Além disso, será admitido que  $E(t) - F(t) \in \Gamma$ . Isso significa que  $E(t) \in C^1 [0, T]$  e que  $E(0) = F(0)$ , ou seja,

$$E(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \int_0^1 X_n(x) dx. \quad (3.191)$$

De outra maneira, está sendo admitido que

$$E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad (3.192)$$

a qual é denominada condição de compatibilidade, já que deseja-se ter

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.193)$$

e é verdade que

$$\int_0^1 u(x, 0) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx. \quad (3.194)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t f_n(\tau) r(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right] &= f_n(t) r(t) e^{-\lambda_n(t-t)} - \lambda_n e^{-\lambda_n t} \int_0^t f_n(\tau) r(\tau) e^{\lambda_n \tau} d\tau \\ &= f_n(t) r(t) - \int_0^t f_n(\tau) r(\tau) \lambda_n e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.195)$$

Assim, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t f_n(\tau) r(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right] \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right), \quad (3.196)$$

é uniformemente convergente, pois

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) r(t) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right) &= r(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \int_0^1 X_n(x) dx \\ &= r(t) \int_0^1 f(x, t) dx, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (3.197)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f_n(\tau) r(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right) \right| &\leq 2\sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \int_0^t |f_n(\tau)| |r(\tau)| e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\ &\leq 4 \frac{\sqrt{\lambda_n}}{|\lambda_n|} |\mu_n| \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \\ &\quad \|r\|_{C[0, T]} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{4}{\sqrt{\lambda_n}} |\mu_n| \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \\ &\quad \|r\|_{C[0, T]} \frac{1}{\lambda_n} \left( 1 - e^{-\lambda_n t} \right) \\ &= k \frac{|\mu_n|}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \geq n_\alpha + 1, \end{aligned} \quad (3.198)$$

com  $k = 4 \|f_{xxx}\|_{C(\overline{\Omega_T})} \|r\|_{C[0,T]}$ . Pode-se verificar, como em casos anteriores, que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|}{\lambda_n^{\frac{3}{2}}}$  é convergente. Como consequência, é possível derivar em  $t$  a equação (3.183), para obter

$$\left[ \int_0^1 f(x,t) dx \right] r(t) - \int_0^t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right) r(\tau) d\tau \right] = E'(t) - F'(t), \quad (3.199)$$

ou seja,

$$r(t) - \int_0^t M(t, \tau) r(\tau) d\tau = \frac{E'(t) - F'(t)}{\int_0^1 f(x,t) dx}, \quad (3.200)$$

com

$$M(t, \tau) = \frac{1}{\int_0^1 f(x,t) dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda_n} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right), \quad (3.201)$$

uma vez que  $\int_0^1 f(x,t) dx \neq 0$ . Argumentando de modo análogo ao caso  $K(t, \tau)$ , obtém-se que a série que define o núcleo  $M(t, \tau)$  converge uniformemente na região triangular  $0 \leq \tau \leq t \leq T$ . Logo,  $M(t, \tau)$  é uma função contínua nessa região e (3.200) é denominada integral de Volterra de segunda espécie. É bem conhecido que tais equações têm única solução  $r \in C[0, T]$  desde que  $\frac{E'(t) - F'(t)}{\int_0^1 f(x,t) dx}$  seja contínua em  $[0, T]$  (Kreyszig, 1978, p.321-323), o que é o caso.

Como foi admitido  $E(0) - F(0) = 0$ , toda solução  $r \in C[0, T]$  de (3.200) é também solução de (3.183). De fato, (3.200) é na verdade dada por

$$E'(t) - F'(t) = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_n}} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\lambda_n} \right) \right) d\tau \right], \quad (3.202)$$

e, como  $E(0) - F(0) = 0$ , integrando a equação (3.202) de 0 a  $t$  obtém-se que  $A(r) = E(t) - F(t)$ . Por outro lado, toda solução  $r \in C[0, T]$  de (3.183) é também solução de (3.200), pois basta derivar (3.183) em relação à  $t$  para obter (3.200).

Diante do exposto, tem-se o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.1.** *Sejam  $\varphi(x) \in \Phi[0, 1]$ ,  $f(x, t) \in C^{3,0}(\overline{\Omega_T})$ ,  $f(x, t) \in \Phi[0, 1]$ ,  $\int_0^1 f(x, t) dx \neq 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Dada  $E(t) \in C^1[0, T]$  tal que  $E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx$ , então existe uma única solução  $\{r(t), u(x, t)\} \in C[0, T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$  do problema inverso (3.173)-(3.177).*

Como consequência adicional da discussão anterior, considerando as hipóteses do Teorema 3.4.1, fica claro que  $\mathcal{R}(A)$  coincide com  $\Gamma$ , pois dada qualquer  $v(t) = E(t) - F(t)$  em  $\Gamma$ , a equação (3.200) tem uma única solução  $r \in C[0, T]$  que satisfaz também  $A(r) = v$  e

assim  $v \in \mathcal{R}(A)$ . Além disso, o operador  $A$  é injetivo, pois, nesse caso, a equação  $A(r) = 0$  recai na equação (3.200) com  $E'(t) - F'(t) = 0$  e, pela unicidade de solução dessa equação, é imediato que  $r = 0$ . Dessa forma, existe o operador inverso  $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow C[0, T]$ , embora, como já foi discutido, esse operador seja não limitado.

**Observação 3.4.2.** *É importante salientar que é uma tarefa difícil encontrar exemplos em que a solução  $\{r(t), u(x, t)\}$  é conhecida explicitamente, para  $\varphi(x)$ ,  $f(x, t)$  e  $E(t)$  satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.4.1. Contudo, as condições do Teorema 3.4.1 são apenas suficientes (não necessárias) para garantir a existência da solução do problema inverso. Na verdade, como pode ser constatado nos exemplos da Seção 5.1, há casos que existe a solução  $\{r(t), u(x, t)\}$  do problema inverso mesmo para dados que não atendem às condições do Teorema 3.4.1.*

## 4 ABORDAGEM NUMÉRICA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Neste capítulo, será obtido um modelo semidiscreto para a equação do calor e, depois disso, serão introduzidas duas abordagens numéricas distintas para a obtenção de soluções aproximadas para o problema inverso (3.173)-(3.177). A primeira abordagem consiste em obter aproximações para a solução do problema inverso através da solução de uma equação integral de Volterra de primeira espécie. É importante enfatizar, no entanto, que essa primeira abordagem serve apenas para fazer analogias com o caso contínuo, e não será utilizada efetivamente neste trabalho para resolver o problema inverso. Em contrapartida, a segunda abordagem consiste em aplicar o método do ponto médio implícito no modelo semidiscreto, e construir um sistema linear que fornecerá soluções aproximadas para o problema inverso.

### 4.1 Modelo Semidiscreto

Nesta seção, obter-se-á um modelo semidiscreto para a equação do calor através da discretização do modelo espacial em uma malha uniforme, com pontos  $x_k = kh$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , sendo  $h = \frac{1}{m}$ . Serão construídas aproximações para a solução de (3.1)-(3.4) nos pontos  $x_1, \dots, x_{m-1}$ , recorrendo-se ao método das diferenças finitas.

Sejam  $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ ,  $f(x, t) \in C(\overline{\Omega_T})$  e  $r \in C[0, T]$  dadas. É importante notar que se  $u(x, t)$  é a solução exata do modelo contínuo, então

$$u_t(x_k, t) = u_{xx}(x_k, t) + r(t)f(x_k, t), \quad (4.1)$$

$k = 1, 2, \dots, m - 1$ . Além disso, pode-se aproximar a derivada espacial pela fórmula de diferenças finitas centradas, obtendo-se a seguinte relação aproximada

$$u_t(x_k, t) \approx \frac{u(x_{k-1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k+1}, t))}{h^2} + r(t)f(x_k, t). \quad (4.2)$$

Isso sugere buscar uma solução aproximada  $v_k$  de  $u(x_k, t)$  desprezando-se os erros de aproximação em (4.2). Desse modo, para  $k = 1, \dots, m - 1$ , tem-se

$$v'_k(t) = \frac{v_{k-1}(t) - 2v_k(t) + v_{k+1}(t))}{h^2} + r(t)f(x_k, t), \quad k = 1, \dots, m - 1. \quad (4.3)$$

Agora, considerando a condição de contorno (3.3) obtém-se diretamente que  $v_0 = 0$ . Além do mais, da condição de contorno (3.6), vale que

$$v'_m(t) = -\frac{1}{\alpha}u_x(t) + r(t)f(x_m, t). \quad (4.4)$$

Usando fórmula de diferenças finitas para frente

$$u_x(0, t) \approx \frac{u(x_1, t) - u(x_0, t)}{h}, \quad (4.5)$$

resultando na aproximação

$$v'_m(t) = -\frac{1}{\alpha h} v_1(t) + r(t) f(x_m, t). \quad (4.6)$$

Ademais, para que a solução aproximada satisfaça a condição inicial (3.2), deve-se ter

$$v_k(0) = \varphi(x_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.7)$$

Com isso, deseja-se resolver o sistema de EDO's

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) = A\mathbf{v}(t) + r(t)\mathbf{f}(t), \\ \mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\varphi}, \end{cases} \quad (4.8)$$

com

$$\boldsymbol{\varphi} = [\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m)]^T, \quad \mathbf{f}(t) = [f(x_1, t), \dots, f(x_m, t)]^T, \quad (4.9)$$

e

$$A = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ \frac{h}{\alpha} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

É bem conhecido que a estabilidade da solução numérica do problema de valor inicial (PVI) (4.8) depende dos autovalores da matriz associada ao sistema. Isso motiva a análise dos autovalores da matriz  $A$ .

## 4.2 Análise dos Autovalores da matriz $A$

O objetivo agora é determinar os autovalores e autovetores da matriz  $A$ . Se  $\{\lambda, \mathbf{v}\}$  é autopar de  $A$ , em analogia ao caso contínuo, é razoável procurar autovetores da forma

$$\mathbf{v} = [\text{sen}(ah), \text{sen}(2ah), \dots, \text{sen}(mah)]^T, \quad (4.11)$$

em que  $a$  é uma constante a ser determinada e restrita à condição  $ah \neq \pi$  (caso contrário  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ). Primeiramente, note que o produto matriz autovetor  $A\mathbf{v}$ ,

$$A\mathbf{v} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2\operatorname{sen}(ah) - \operatorname{sen}(2ah) \\ -\operatorname{sen}(ah) + 2\operatorname{sen}(2ah) - \operatorname{sen}(3ah) \\ \vdots \\ -\operatorname{sen}((k-1)ah) + 2\operatorname{sen}(kah) - \operatorname{sen}((k+1)ah) \\ \vdots \\ \frac{h}{\alpha} \operatorname{sen}(ah) \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

possui entradas dadas por

$$\begin{aligned} [A\mathbf{v}]_k &= -\frac{2[1 - \cos(ah)]}{h^2} \operatorname{sen}(kah), \quad k = 1, \dots, m-1 \\ [A\mathbf{v}]_m &= -\frac{\operatorname{sen}(ah)}{h\alpha}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

em que as  $m-1$  primeiras entradas são obtidas pelas identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}((k-1)ah) - 2\operatorname{sen}(kah) + \operatorname{sen}((k+1)ah) &= \operatorname{sen}(kah) \cos(ah) - \operatorname{sen}(ah) \cos(kah) \\ &\quad + \operatorname{sen}(kah) \cos(ah) + \operatorname{sen}(ah) \cos(kah) \\ &\quad - 2\operatorname{sen}(kah) \\ &= 2\operatorname{sen}(kah) \cos(ah) - 2\operatorname{sen}(kah) \\ &= -2[1 - \cos(ah)] \operatorname{sen}(kah). \end{aligned} \quad (4.14)$$

A última equação, aliada ao fato de que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , mostra que os autovalores de  $A$  são da forma

$$\lambda = -2 \frac{[1 - \cos(ah)]}{h^2}, \quad (4.15)$$

com  $a$  satisfazendo

$$\frac{\operatorname{sen}(ah)}{h\alpha \operatorname{sen}(a)} = 2 \frac{[1 - \cos(ah)]}{h^2}, \quad (4.16)$$

já que  $mh = 1$ . Observa-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(ah)}{\alpha \operatorname{sen}(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{[1 - \cos(ah)]}{h}, \quad (4.17)$$

recai na equação

$$\alpha a \operatorname{sen}(a) = 1, \quad (4.18)$$

cujas raízes fornecem os autovalores do problema contínuo (3.27).

As principais conclusões da análise dos autovalores estão resumidas no Teorema 4.2.1 a seguir.

**Teorema 4.2.1.** *Os autopares  $\{\lambda, \mathbf{v}\}$  da matriz associada ao sistema do modelo semidiscreto (4.8) são dados por*

$$\lambda = -2 \frac{[1 - \cos(ah)]}{h^2}, \quad \mathbf{v} = [\text{sen}(ah), \text{sen}(2ah), \dots, \text{sen}(mah)]^T, \quad (4.19)$$

em que  $a$  é raiz da equação não linear

$$\frac{\text{sen}(ah)}{\alpha \text{sen}(a)} = 2 \frac{[1 - \cos(ah)]}{h}, \quad 0 < a < m\pi. \quad (4.20)$$

Além disso, com  $h \rightarrow 0$  tem-se que  $\lambda \rightarrow -a^2$ .

*Demonstração.* A última afirmação segue ao tomar o limite de  $h \rightarrow 0$  para  $\lambda$  dado em (4.19), isso pode ser feito usando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{h \rightarrow 0} -2 \frac{[1 - \cos(ah)]}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2a \text{sen}(ah)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} -a^2 \cos(ah) = -a^2. \quad (4.21)$$

□

No intuito de saber mais sobre os autovalores  $\lambda$ , facilitando-se a análise, será permitido que  $a$  varie continuamente substituindo-lhe por  $x$ . Com essa notação, se

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{h}{2\alpha} \frac{\text{sen}(hx)}{[1 - \cos(hx)]}, \quad 0 < x < m\pi, \quad (4.22)$$

então a equação não linear (4.16) pode ser escrita de uma maneira mais conveniente como

$$\varphi_\alpha(x) = \text{sen}(x), \quad 0 < x < m\pi. \quad (4.23)$$

Similarmente ao caso contínuo, dependendo da constante  $\alpha$ , todas as raízes de (4.23) podem ser complexas, todas as raízes podem ser reais, ou pode haver apenas algumas raízes complexas conjugadas. O Teorema 4.2.2 fornece um importante resultado, elencando condições sob as quais as raízes de (4.23) são reais e distintas. Este resultado é bastante semelhante ao caso contínuo (Corolário 3.2.6), mas vale a pena apresentá-lo, pois no caso semidiscreto há um número finito de autovalores e a função envolvida é outra.

**Teorema 4.2.2.** *Existe um par de números positivos  $[x^*, \alpha^*]$  tais que as funções  $\varphi_\alpha(x)$  e  $\text{sen}(x)$  possuem a mesma reta tangente em  $x = x^*$  quando  $\alpha = \alpha^*$ . Além disso, fornecido  $\alpha > \alpha^*$ , todos os autovalores da matriz  $A$  são reais e distintos.*

*Demonstração.* Primeiramente, note que, como  $0 < x < m\pi$ , então

$$\varphi'_\alpha(x) = -\frac{h^2}{2\alpha} \frac{1}{[1 - \cos(hx)]} < 0, \quad \text{e} \quad \varphi''_\alpha(x) = \frac{h^3}{2\alpha} \frac{\text{sen}(hx)}{[1 - \cos(hx)]^2} > 0. \quad (4.24)$$

Ademais, usando a regra de L'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_\alpha(x) &= \frac{1}{2\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(hx) + hx \cos(hx)}{x \text{sen}(hx)} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x \cos(hx) - x^2 \text{sen}(hx)}{x^2 \cos(hx)} \\ &= \frac{1}{\alpha x}.\end{aligned}\quad (4.25)$$

De modo que

$$0 < \varphi_\alpha(x) \leq \frac{1}{\alpha x}.\quad (4.26)$$

Consequentemente,  $\varphi_\alpha$  é positiva, decrescente, convexa e limitada superiormente. No que segue, se  $\varphi_\alpha(x)$  e  $\text{sen}(x)$  compartilham a mesma reta tangente em um ponto  $x$ , então

$$-\frac{h^2}{2\alpha} \frac{1}{[1 - \cos(hx)]} = \cos(x).\quad (4.27)$$

Mas, como ambas as curvas contém o ponto de tangência, então deve-se ter

$$\frac{h}{2\alpha} \frac{\text{sen}(hx)}{[1 - \cos(hx)]} = \text{sen}(x).\quad (4.28)$$

Combinando as equações (4.27) e (4.28) obtém-se

$$\cos(x) \frac{\text{sen}(hx)}{h} + \text{sen}(x) = 0.\quad (4.29)$$

Agora, para simplificar a explanação, será feita a restrição  $0 < x < \pi$ . É possível notar que o lado esquerdo da equação (4.29) muda de sinal no intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , logo há pelo menos uma raiz real nesse intervalo. Portanto, se  $\varphi_\alpha(x)$  e  $\text{sen}(x)$  compartilham a mesma reta tangente em  $(x^*, y^*)$ , então  $x^*$  deve ser uma raiz de (4.29) e consequentemente de (4.27) e (4.28). A partir dessa constatação, substituindo  $x = x^*$  em (4.27) e isolando o parâmetro  $\alpha$ , obtém-se

$$\alpha^* = \frac{h}{2} \frac{\text{sen}(hx^*)}{[1 - \cos(hx^*)] \text{sen}(x^*)}.\quad (4.30)$$

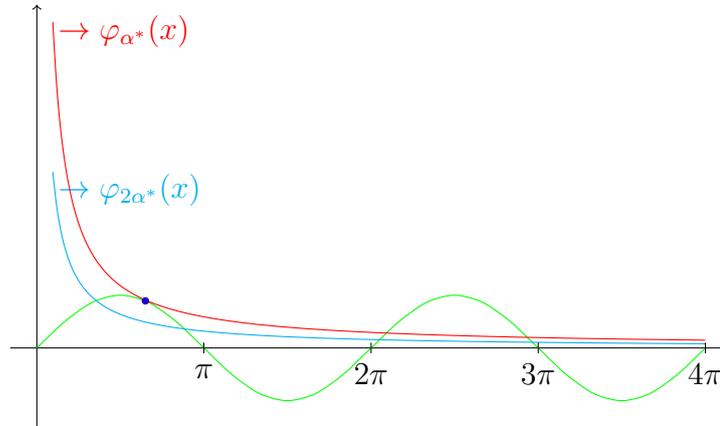
Com essa escolha de  $\alpha$  verifica-se que  $\varphi_{\alpha^*}(x^*) = \text{sen}(x^*)$  e  $\varphi'_{\alpha^*}(x^*) = \cos(x^*)$ .

Portanto,  $x^*$  é na verdade raiz de (4.27) e (4.28); ou seja,  $x^*$  é uma raiz dupla de (4.23). Não obstante, se  $\xi(x) = \varphi_{\alpha^*}(x) - \text{sen}(x)$ , com base em (4.24) segue que  $\xi'' > 0$ , donde infere-se que  $x^*$  não pode ser raiz tripla. Isso prova a primeira parte do teorema.

Para finalizar a demonstração, supõe-se que o parâmetro  $\alpha$  seja escolhido de modo que  $\alpha = \rho\alpha^*$ , com  $\rho > 1$ . Nesse caso, tem-se

$$\varphi_\alpha(x^*) = \frac{1}{\rho} \varphi_{\alpha^*}(x^*) = \frac{\text{sen}(x^*)}{\rho} < \text{sen}(x^*).\quad (4.31)$$

Com isso, restringindo ao intervalo  $[0, 2\pi]$ , como  $\varphi_\alpha(x)$  é decrescente, a curva passa abaixo do ponto de tangência  $(x^*, y^*)$  com  $y^* = \text{sen}(x^*)$ , produzindo dois pontos de interseção, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Raízes de (4.23) da interseção de  $\varphi_{\alpha^*}(x)$  e  $\varphi_{2\alpha^*}(x)$  com  $\sin(x)$  para  $m = 4$ .


Fonte: O autor, 2024..

As abscissas dos pontos de interseção são raízes de (4.22). Como em  $[0, m\pi]$  isso ocorre  $m - 1$  vezes se  $m$  é par, pode-se concluir que a equação não linear (4.28) admite  $m$  raízes distintas, as quais representam  $m$  autovalores distintos da matriz  $A$  do sistema. Uma conclusão análoga vale se  $m$  for ímpar.  $\square$

**Observação 4.2.3.** Na prática, a raiz  $x^*$  não é conhecida antecipadamente e a condição  $\alpha > \alpha^*$  pode não ser fácil de ser alcançada. Nesse caso, a escolha mais simples de  $\alpha$  para garantir que todos os autovalores de  $A$  sejam distintos é  $\alpha > \frac{2}{\pi}$ . Essa conclusão decorre de (4.26).

Nota-se a analogia com o caso contínuo, em que a condição  $\alpha > \frac{2}{\pi}$  também é suficiente para garantir que todos os autovalores sejam reais.

Sendo assim, é possível concluir que a estabilidade numérica da solução de (4.8) é garantida se  $\alpha > \frac{2}{\pi}$ , pois, dessa maneira, todos os autovalores da matriz  $A$  serão reais e negativos.

### 4.3 Aproximação Numérica Através de Equações Integrais

Da teoria das EDO's, a solução única do PVI (4.8) pode ser expressa como

$$\mathbf{v}(t) = e^{At}\mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}r(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (4.32)$$

É evidente que  $\mathbf{v} \in C^1[0, T]$ . Tomando  $\alpha$  em conformidade com o Teorema 4.2.2, essa solução é simples de ser calculada, pois a matriz  $A$  do sistema é diagonalizável. Seja  $\alpha$  escolhido como no Teorema 4.2.2 e seja  $A = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$ , com

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m], \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad \text{e} \quad 0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m. \quad (4.33)$$

Com isso, a solução pode ser expressa como

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{V}e^{\Lambda t}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{V}\int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}\mathbf{V}^{-1}r(\tau)f(\tau) d\tau. \quad (4.34)$$

Denotando  $\mathbf{V}^{-1} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m]$  e observando que  $\mathbf{V}^{-1}A = \Lambda\mathbf{V}^{-1}$ , obtém-se

$$\Lambda\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_m] = \begin{bmatrix} \lambda_1 w_1^{(1)} & \lambda_1 w_2^{(1)} & \dots & \lambda_1 w_m^{(1)} \\ \lambda_2 w_1^{(2)} & \lambda_2 w_2^{(2)} & \dots & \lambda_2 w_m^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m w_1^{(m)} & \lambda_m w_2^{(m)} & \dots & \lambda_m w_m^{(m)} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

ou ainda

$$\Lambda\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 e_1^T \mathbf{V}^{-1} \\ \lambda_2 e_2^T \mathbf{V}^{-1} \\ \vdots \\ \lambda_m e_m^T \mathbf{V}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

em que  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , é o  $j$ -ésimo vetor da base canônica em  $\mathbb{R}^m$ . Seja  $\mathbf{y}_j^T = e_j^T \mathbf{V}^{-1}$ , então

$$\Lambda\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}A = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{y}_1^T \\ \lambda_2 \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \lambda_m \mathbf{y}_m^T \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Mas,

$$\mathbf{V}^{-1}A = \begin{bmatrix} w_1^{(1)} a_{11} + w_2^{(1)} a_{21} + \dots + w_n^{(1)} a_{n1} & \dots & w_1^{(1)} a_{1m} + w_2^{(1)} a_{2m} + \dots + w_m^{(1)} a_{mm} \\ w_1^{(2)} a_{11} + w_2^{(2)} a_{21} + \dots + w_n^{(2)} a_{n1} & \dots & w_1^{(2)} a_{1m} + w_2^{(2)} a_{2m} + \dots + w_m^{(2)} a_{mm} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1^{(m)} a_{11} + w_2^{(m)} a_{21} + \dots + w_n^{(m)} a_{n1} & \dots & w_1^{(m)} a_{1m} + w_2^{(m)} a_{2m} + \dots + w_m^{(m)} a_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

ou

$$\mathbf{V}^{-1}A = \begin{bmatrix} e_1^T \mathbf{V}^{-1}A \\ e_2^T \mathbf{V}^{-1}A \\ \vdots \\ e_m^T \mathbf{V}^{-1}A \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

De (4.37) e (4.39), infere-se que  $\mathbf{y}_j^T A = \lambda_j \mathbf{y}_j^T$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Os vetores  $\mathbf{y}_j$  são denominados autovetores à esquerda de  $A$ .

Nota-se também que

$$\begin{aligned}
e^{\Lambda t} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\varphi} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \dots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} w_1^{(1)} & e^{\lambda_1 t} w_2^{(1)} & \dots & e^{\lambda_1 t} w_m^{(1)} \\ e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} w_2^{(2)} & \dots & e^{\lambda_2 t} w_m^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_m t} w_1^{(m)} & e^{\lambda_m t} w_2^{(m)} & \dots & e^{\lambda_m t} w_m^{(m)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{y}_1^T \boldsymbol{\varphi} \\ e^{\lambda_m t} \mathbf{y}_m^T \boldsymbol{\varphi} \\ \dots \\ e^{\lambda_m t} \mathbf{y}_m^T \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Denotando,  $\boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{y}_j^T \boldsymbol{\varphi}$ , então

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} e^{\Lambda t} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\varphi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ e^{\lambda_m t} \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \dots \\ e^{\lambda_m t} \boldsymbol{\gamma}_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \boldsymbol{\gamma}_1 e^{\lambda_1 t} + v_2^{(1)} \boldsymbol{\gamma}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + v_m^{(1)} \boldsymbol{\gamma}_m e^{\lambda_m t} \\ v_1^{(2)} \boldsymbol{\gamma}_1 e^{\lambda_1 t} + v_2^{(2)} \boldsymbol{\gamma}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + v_m^{(2)} \boldsymbol{\gamma}_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots \\ v_1^{(m)} \boldsymbol{\gamma}_1 e^{\lambda_1 t} + v_2^{(m)} \boldsymbol{\gamma}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + v_m^{(m)} \boldsymbol{\gamma}_m e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} \\
&= \left[ \boldsymbol{\gamma}_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \right] + \left[ \boldsymbol{\gamma}_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \right] + \dots + \left[ \boldsymbol{\gamma}_m e^{\lambda_m t} \mathbf{v}_m \right] \\
&= \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\gamma}_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Com  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{f}(t)$  e  $\mathbf{g}_j(t) = \mathbf{y}_j^T \mathbf{f}(t)$ , a solução pode ser reescrita como

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{j=1}^m \left[ \boldsymbol{\gamma}_j e^{\lambda_j t} + \int_0^t r(\tau) \mathbf{g}_j(\tau) e^{\lambda_j(t-\tau)} d\tau \right] \mathbf{v}_j, \tag{4.42}$$

que é análoga à solução do problema contínuo apresentado em (3.138).

Agora, procedendo da mesma maneira como no caso da expressão de série infinita para  $u(x, t)$ , se a energia  $E(t)$  for aproximada usando uma regra de quadratura com pesos  $\boldsymbol{\omega}_k$  e pontos  $x_k$ , tem-se

$$\int_0^1 u(x, t) dx \approx \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\omega}_k u(x_k, t) \approx \sum_{k=1}^m \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{v}_k(t) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{v}(t), \tag{4.43}$$

em que  $\omega$  é o vetor de pesos. Desprezando os erros de aproximação, para  $E \in C^1[0, T]$  é necessário resolver a equação

$$E(t) = \sum_{j=1}^m \left[ \gamma_j e^{\lambda_j t} + \int_0^t r(\tau) \mathbf{g}_j(\tau) e^{\lambda_j(t-\tau)} d\tau \right] \omega^T \mathbf{v}_j. \quad (4.44)$$

Isso resulta na seguinte equação integral de Volterra de primeira espécie, para a incógnita  $r_m(t)$

$$E(t) = \mathbf{F}_m(t) + \int_0^t \mathbf{K}_m(t, \tau) r_m(\tau) d\tau, \quad (4.45)$$

com

$$\mathbf{F}_m(t) = \sum_{j=1}^m \gamma_j e^{\lambda_j t} \omega^T \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{K}_m(t, \tau) = \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\tau) \omega^T \mathbf{v}_j e^{\lambda_j(t-\tau)}. \quad (4.46)$$

De certo modo, (4.45) pode ser interpretada como uma versão discreta da equação de Volterra para a função contínua desconhecida  $r(t)$  (caso exista), no sentido que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|r_m(t) - r(t)\|_{C[0, T]} = 0. \quad (4.47)$$

Nesse caso, se for possível resolver essa equação para cada  $m = 1, 2, 3, \dots$ , obter-se-á uma sequência  $r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t), \dots$  de aproximações para a solução  $r(t)$  do problema inverso do caso contínuo. Parece plausível que essa sequência de aproximações converge para a solução  $r(t)$  do problema inverso do caso contínuo. No entanto, isso é meramente especulativo, não se sabe a priori se isso realmente ocorre, e não serão tratadas questões de convergência do ponto de vista teórico neste trabalho. Uma condição necessária para a existência de soluções para (4.45) é que  $E(0) = \mathbf{F}_m(0)$ . Mesmo que a condição de compatibilidade

$$E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad (4.48)$$

seja satisfeita, não é evidente que  $E(0) = \mathbf{F}_m(0)$ , pois

$$\mathbf{F}_m(t) = \mathbf{V}^{-1} e^{At} \mathbf{V} \omega^T \varphi, \quad (4.49)$$

implicando que

$$\mathbf{F}_m(0) = \omega^T \varphi. \quad (4.50)$$

Mais do que isso, mesmo se  $E(0) = \mathbf{F}_m(0)$ ,  $E(t)$  possivelmente esta contaminada por ruído, isso levaria a um problema de mínimos quadrados

$$\operatorname{argmin}_{r \in C[0, T]} \|A_m(r_m) - (E(t) - \mathbf{F}_m(t))\|_{C[0, T]}, \quad (4.51)$$

sendo  $A_m : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$  dado por

$$A_m(r_m) = \sum_{j=1}^m \int_0^t r_m(\tau) \mathbf{g}_j(\tau) e^{\lambda_j(t-\tau)} d\tau \omega^T \mathbf{v}_j = \int_0^t \mathbf{K}_m(t, \tau) r_m(\tau) d\tau. \quad (4.52)$$

Como  $\mathbf{K}_m(t, \tau)$  é contínuo, pela Definição 2.3.5,  $\mathbf{K}_m(t, \tau)$  é um núcleo fracamente singular. Assim, pelo Teorema 2.3.6,  $\mathbf{K}_m(t, \tau)$  é compacto, resultando que o problema (4.51) é mal-posto.

Logo, (4.45) pode não ter solução no sentido usual. Mesmo calculando a derivada dessa equação em relação à  $t$  e obtendo uma equação integral de Volterra da segunda espécie, não seria evidente que a solução dessa equação seria solução de (4.45).

Uma alternativa, tal como é feito em Salameh (2014), seria usar integração numérica com passo de tempo  $\Delta t$  e montar um sistema linear para as incógnitas

$$r_m^i = r_m(t_i), \quad t_i = \Delta t_i \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.53)$$

sendo  $N = \frac{T}{\Delta t}$ . Em Salameh (2014, p. 28–29), por exemplo, o autor utiliza a regra do trapézio para obter um sistema linear triangular. Contudo, seria necessário avaliar os autovalores  $\lambda_j$ , o que pode gerar custos computacionais consideráveis. Para evitar calcular os  $\lambda_j$ s será realizada a discretização temporal de (4.8).

## 4.4 Método do Ponto Médio Implícito

Uma alternativa para evitar o cálculo de autovalores e o uso das equações integrais apresentadas anteriormente, consiste em integrar numericamente o modelo discreto (4.8) e então construir outro sistema linear, a partir do qual o termo fonte será recuperado.

Para isso, dentre diversas possibilidades para a solução numérica de um problema de valor inicial

$$y'(t) = g(t, y(t)), \quad y(a) = y_0, \quad (4.54)$$

nos pontos  $t_j$  da malha,  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ , com passo de tempo  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , tal que  $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ ,  $t_{j+1/2} = t_j + \frac{1}{2}\Delta t$ , será adotado o método do ponto médio implícito

$$y_{j+1} = y_j + \Delta t g \left( t_j + \frac{\Delta t}{2}, \frac{y_{j+1} + y_j}{2} \right), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.55)$$

Como descrito em Burden e Faires (2016), esse método é de segunda ordem e absolutamente estável.

Para obter uma boa estrutura do sistema linear decorrente da discretização, será considerado  $N = m$ . Aplicando (4.55) no problema semidiscreto (4.8), tem-se

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j + \Delta t \left[ A \left( \frac{v_{j+1} + v_j}{2} \right) + r \left( t_{j+\frac{1}{2}} \right) f \left( t_{j+\frac{1}{2}} \right) \right], \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (4.56)$$

Rearranjando os termos, verifica-se que as aproximações sucessivas satisfazem

$$B\mathbf{v}_{j+1} = C\mathbf{v}_j + \Delta t \hat{r}_j \hat{f}_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4.57)$$

em que

$$B = \left( I - \frac{\Delta t}{2} A \right), \quad C = \left( I + \frac{\Delta t}{2} A \right), \quad \hat{r}_j = r(t_{j+\frac{1}{2}}), \text{ e } \hat{\mathbf{f}}_j = \mathbf{f}(t_{j+\frac{1}{2}}). \quad (4.58)$$

Como todos os autovalores da matriz  $A$  são negativos, a matriz  $B$  é não singular. Logo, pode-se escrever

$$\mathbf{v}_{j+1} = G\mathbf{v}_j + \Delta t \hat{r}_j B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \text{ sendo } G = B^{-1}C. \quad (4.59)$$

Iterativamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= G\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0, \\ \mathbf{v}_2 &= G\mathbf{v}_1 + \Delta t \hat{r}_1 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 = G^2\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 G B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \Delta t \hat{r}_1 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1, \\ \mathbf{v}_3 &= G\mathbf{v}_2 + \Delta t \hat{r}_2 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_2 = G^3\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 G^2 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \Delta t \hat{r}_1 G B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 + \Delta t \hat{r}_2 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= G^m\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 G^{m-1} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \Delta t \hat{r}_1 G^{m-2} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 + \dots + \Delta t \hat{r}_{m-1} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{m-1}. \end{aligned}$$

Usando (4.43) para calcular aproximações da energia  $E(t_k)$ , desprezando os erros de aproximação, obtém-se

$$\begin{aligned} E_1 &= \boldsymbol{\omega}^T G\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0, \\ E_2 &= \boldsymbol{\omega}^T G^2\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 \boldsymbol{\omega}^T G B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \Delta t \hat{r}_1 \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1, \\ E_3 &= \boldsymbol{\omega}^T G^3\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 \boldsymbol{\omega}^T G^2 B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \Delta t \hat{r}_1 \boldsymbol{\omega}^T G B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 + \Delta t \hat{r}_2 \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_2, \\ &\vdots \\ E_m &= \boldsymbol{\omega}^T G^m\mathbf{v}_0 + \Delta t \hat{r}_0 \boldsymbol{\omega}^T G^{m-1} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 + \Delta t \hat{r}_1 \boldsymbol{\omega}^T G^{m-2} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 + \dots + \Delta t \hat{r}_{m-1} \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{m-1}. \end{aligned}$$

Esse conjunto de equações lineares pode ser representado na forma matricial como

$$\Delta t \mathbf{F} \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{g}, \quad (4.60)$$

em que

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \boldsymbol{\omega}^T G B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 & \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ \boldsymbol{\omega}^T G^{m-1} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0 & \boldsymbol{\omega}^T G^{m-2} B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_1 & \dots & \boldsymbol{\omega}^T B^{-1} \hat{\mathbf{f}}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = [\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m]^T, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{g} = [E_1 - \boldsymbol{\omega}^T G\mathbf{v}_0, \dots, E_m - \boldsymbol{\omega}^T G^m\mathbf{v}_0]^T. \quad (4.63)$$

Vale ressaltar que em (4.61), na prática, a matriz  $B^{-1}$  nunca é calculada explicitamente, pois o cálculo da inversa demanda alto custo computacional. Em vez disso, são calculados

os coeficientes iterativamente. Para tanto, resolve-se sistemas lineares do tipo  $By = \hat{f}_i$  na diagonal principal, depois percorre-se a coluna atualizando o vetor  $y$  e resolvendo um novo sistema linear para determinar o coeficiente. Uma boa alternativa para resolver os sistemas lineares  $By = \hat{f}_i$  consiste em aproveitar a esparsidade da matriz  $A$  e calcular a fatoração LU de  $B$  uma única vez.

## 4.5 Regularização do Problema Linear

Com a discretização pelo método do ponto médio implícito, desde que se tenha um conjunto de valores de energia  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , as incógnitas  $\hat{r}_j$  podem ser obtidas resolvendo o sistema linear (4.60).

Entretanto, cabe salientar que, embora pareça simples determinar as aproximações do termo fonte resolvendo o sistema linear triangular (4.60), é comum que  $E_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  estejam contaminados por ruído e, dessa forma, é conhecido apenas um vetor  $\tilde{E}$ , tal que

$$\tilde{E} = E + \epsilon \in \mathbb{R}^m, \quad (4.64)$$

sendo  $E = [E_1, E_2, \dots, E_m]^T$ . Ou seja, tem-se disponível o dado  $\tilde{\mathbf{g}}$  e não  $\mathbf{g}$ , por isso tendo em vista a discussão da Seção 2.5.2, deve-se resolver o problema

$$\tilde{r} = \underset{\hat{r} \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}} \|\Delta t \mathbf{F} \hat{r} - \tilde{\mathbf{g}}\|_2 \quad \text{sujeito a} \quad \underset{\hat{r} \in \mathbb{R}^m}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{L} \hat{r}\|_2, \quad (4.65)$$

optando-se por adotar  $L \in \mathbb{R}^{(m-2) \times m}$  como sendo a matriz de derivação de segunda ordem

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

introduzida para obter aproximações suaves. Nada impede de se utilizar outra estrutura para  $L$ , tal como a matriz de derivação de primeira ordem, por exemplo (Hansen, 1989). Todavia, neste trabalho, pretende-se investigar os resultados fornecidos a partir da matriz (4.66).

Para calcular a solução  $\tilde{r}$  pode ser utilizada a GSVD do par  $(\mathbf{F}, L)$ . Desse modo, após avaliar numericamente que  $\sigma_i \neq 0$ , constrói-se a solução

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{m-2} \frac{u_i^T \tilde{\mathbf{g}}}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m-1}^m (u_i^T \tilde{\mathbf{g}}) \mathbf{x}_i. \quad (4.67)$$

Contudo, devido ao mal condicionamento da matriz  $\mathbf{F}$  e a presença de ruído, a solução  $\tilde{r}$  é afetada e pode diferir da solução desejada  $\hat{r}$ . A fim de contornar essa dificuldade, será

utilizada a TGSVD para obter a solução, de tal maneira que

$$\tilde{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=m-1-k}^{m-2} \frac{u_i^T \tilde{\mathbf{g}}}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=m-1}^m (u_i^T \tilde{\mathbf{g}}) \mathbf{x}_i, \quad (4.68)$$

Para determinar o parâmetro  $k$  adequado, será empregado o DP, isto é, o método iterativo para no primeiro  $k$  tal que

$$\|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{F}\tilde{\mathbf{r}}_k\|_2 \leq \tau \|\epsilon\|_2. \quad (4.69)$$

com  $\tau \gtrsim 1$ .

## 5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, para verificar a eficiência do método proposto, será considerado o erro relativo nas aproximações do termo fonte

$$\text{RE} = \frac{\|r - \tilde{r}\|_2}{\|r\|_2}, \quad (5.1)$$

em que  $r$  representa o termo fonte exato e  $\tilde{r}$  denota o termo fonte recuperado a partir de dados com ruído da forma

$$\tilde{E} = E + \epsilon \in \mathbb{R}^n, \quad (5.2)$$

sendo  $\epsilon$  um vetor aleatório de média zero, escolhido de tal maneira que  $\|\tilde{E} - E\|_2 = \text{NL}\|E\|_2$ , com NL representando o nível de ruído relativo normal dos dados. O fato de  $\epsilon$  ser um vetor de média zero está relacionado com a distribuição normal das componentes  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , do vetor  $\epsilon$  (distribuição Gaussiana), o que é esperado nesse caso, já que o ruído é proveniente, principalmente, de erros de medição.

Resumidamente, as simulações numéricas deste trabalho, realizadas em *MATLAB*, consistem no seguinte:

- Definir o valor de  $m$ ;
- Entrar com os vetores  $E$ ,  $\hat{f}$ ,  $\mathbf{v}_0$  e o parâmetro  $\alpha$ ;
- Adicionar um vetor de ruído  $\epsilon$  ao vetor  $E$  e obter o vetor com imprecisões  $\tilde{\mathbf{g}}$ ;
- Determinar a matriz  $F$  e entrar com a matriz  $L$ ;
- Calcular a GSVD do par  $(F, L)$ ;
- Criar um processo iterativo, truncando a solução dada pela GSVD ao atingir o DP;
- Mostrar a solução aproximada  $\tilde{\mathbf{r}}_k$  para o termo fonte;
- Calcular  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Vale mencionar que o vetor de ruídos  $\epsilon$  foi gerado pela rotina *randn* do *MATLAB*, e o cálculo da GSVD é obtida pela rotina *cgsvd*, disponível no pacote *Regularization Tools* em Hansen (1994).

## 5.1 Exemplos Numéricos

No intuito de ilustrar a eficácia do método da TGSVD, serão apresentados alguns exemplos numéricos para recuperar o termo fonte de problemas cujos dados possuem ruídos. Nas implementações foram feitas várias escolhas de  $m$ , com  $\Delta t = h = \frac{1}{m}$ ,  $T = T_f = 1$  e  $\alpha$  escolhido de tal maneira que todos os autovalores da matriz  $A$  sejam reais. Vale mencionar que estes exemplos foram criados de modo que exista solução analítica, sendo possível assumir que a equação do calor é válida nos contornos.

### 5.1.1 Exemplo 1

Nesse exemplo, será considerado o problema teste com solução analítica dada por

$$r(t) = e^{-t}[2 + \text{sen}(\Upsilon\pi t)], \quad \Upsilon > 0,$$

$$u(x, t) = \frac{36}{5}te^{-t}[2 + \text{sen}(\Upsilon\pi t)]p(x), \quad p(x) = -8x^8 + 29x^7 - 35x^6 + 14x^5,$$

condição inicial  $u(x, 0) = 0$ ,

$$f(x, t) = \frac{504}{5} \left[ t(32x^6 - 87x^5 + 75x^4 - 20x^3) + \left( 1 - t + \frac{\Upsilon\pi t \cos(\Upsilon\pi t)}{2 + \text{sen}(\Upsilon\pi t)} \right) p(x) \right],$$

e a função energia

$$E(t) = \frac{te^{-t}(2 + \text{sen}(\Upsilon\pi t))}{2}.$$

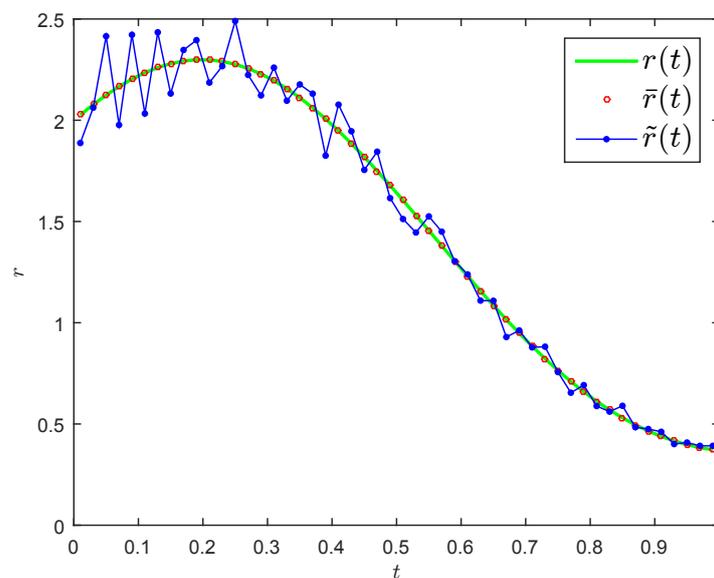
Vale notar que  $\varphi(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , simplifica o cálculo do vetor  $\mathbf{g}$  do lado direito de (4.60) já que  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ . Para os experimentos numéricos será adotado  $\Upsilon = 3/2$ , e para garantir que todos os autovalores da matriz  $A$  sejam reais, será tomado  $\alpha = 1$ .

Primeiramente, para elucidar a necessidade do emprego de métodos de regularização no problema inverso com dados contaminados por algum tipo de ruído, o sistema linear (4.60) foi resolvido por substituição direta, usando dados sem e com ruído, sendo as fontes discretas obtidas dessa forma denotadas por  $\bar{r}$  e  $\tilde{r}$ , respectivamente. As fontes discretas recuperadas para  $m = 50$  e dados com 1% de ruído são exibidos na Figura 4.

A instabilidade das aproximações para  $r(t)$  a partir de dados com ruído reforça a necessidade da incorporação de um método de regularização. Não obstante, os erros relativos das aproximações, apresentados na Tabela 1, mostram que para dados sem ruído o erro relativo de reconstrução diminui na medida que  $m$  aumenta, enquanto que para dados com ruído o erro relativo aumenta.

As próximas simulações foram realizadas a partir de dados com três níveis de ruído: 0, 25%, 1% e 2, 5%. As aproximações, para dados com 1% de ruído, estão apresentados nas Figura 5.

Figura 4 – Fonte recuperada a partir de dados sem e com ruído para NL=1%.



Fonte: O autor, 2024.

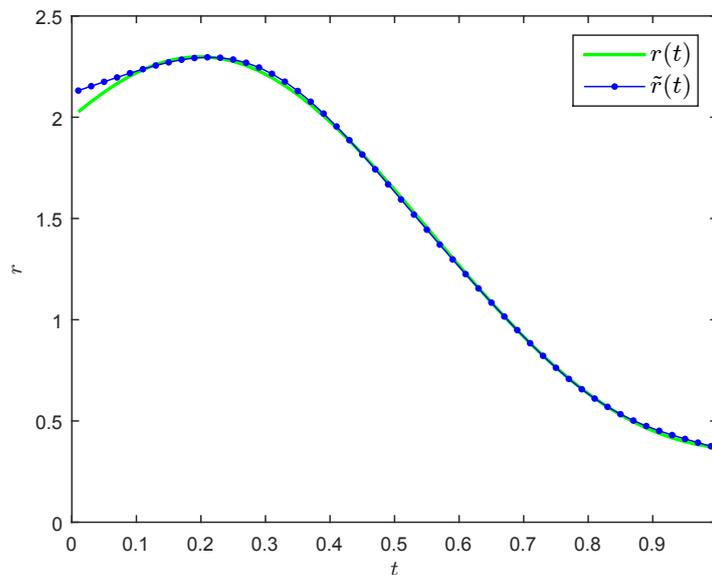
Tabela 1 – Erros relativos das aproximações numéricas sem regularização.

NL	$m$	$RE$
0%	50	$5,08 \cdot 10^{-4}$
	100	$1,27 \cdot 10^{-4}$
	150	$5,67 \cdot 10^{-5}$
1%	50	$6,89 \cdot 10^{-2}$
	100	$1,25 \cdot 10^{-1}$
	150	$1,54 \cdot 10^{-1}$

Fonte: O autor, 2024..

Para finalizar a explanação em relação ao método de regularização usado neste exemplo, os erros relativos para os três níveis de ruído, incluindo os parâmetros de regularização correspondentes, estão apresentados na Tabela 2.

Os resultados, além de mostrarem que os parâmetros de regularização são adequados, também corroboram com a teoria da regularização em relação ao DP: o erro diminui à medida que o nível de ruído se aproxima de zero, ao passo que os parâmetros de regularização aumentam, nesse caso.

Figura 5 – Fonte recuperada a partir de dados com ruído de NL=1% para  $m = 50$ .

Fonte: O autor, 2024.

Tabela 2 – Erros relativos e parâmetros de regularização

NL	$m$	$RE$	$k$
0,25%	50	$6,03 \cdot 10^{-3}$	6
	100	$4,30 \cdot 10^{-3}$	8
	150	$3,87 \cdot 10^{-3}$	6
1%	50	$1,16 \cdot 10^{-2}$	4
	100	$1,54 \cdot 10^{-2}$	4
	150	$1,03 \cdot 10^{-2}$	5
2,5%	50	$3,36 \cdot 10^{-2}$	2
	100	$4,48 \cdot 10^{-2}$	3
	150	$4,11 \cdot 10^{-2}$	3

Fonte: O autor, 2024..

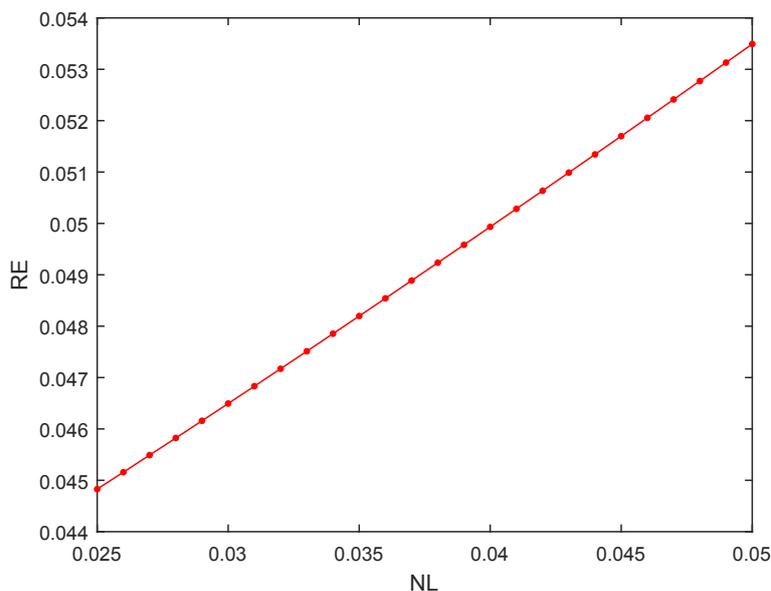
Neste exemplo, o fator de propagação de ruídos é da ordem de  $\epsilon$ , assim como mostra a Figura 6. Mais precisamente, o erro relativo em função de  $\epsilon$  é tal que

$$|RE(\epsilon)| \leq C \cdot \epsilon, \quad (5.3)$$

sendo  $C \approx 0,35$ .

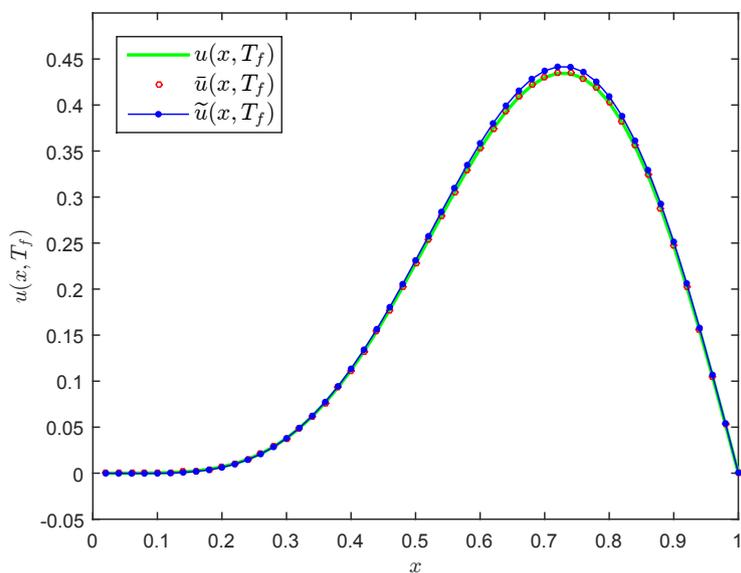
A fim de ilustrar a precisão do método proposto em relação à aproximação para  $u(x, t)$  a partir da fonte recuperada,  $\tilde{r}$ , e os dados  $u(x, 0)$  e  $f(x, t)$ , apresentam-se os resultados obtidos para  $T_f = 1$ ,  $m = 50$  e ruído de 1% na Figura 7, sendo  $\bar{u}(x, T_f)$  e  $\tilde{u}(x, T_f)$  as soluções numéricas obtidas com as aproximações para  $r(t)$  a partir de dados sem e com ruído, respectivamente.

Figura 6 – Erro relativo em função do nível de ruído.



Fonte: O autor, 2024.

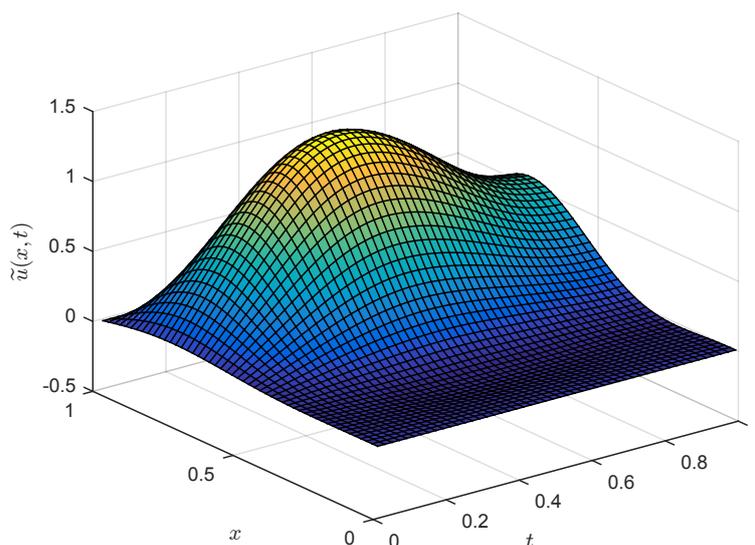
Figura 7 – Aproximações da solução a partir de dados sem e com ruído de NL=1% para  $m = 50$  em  $T_f = 1$ .



Fonte: O autor, 2024.

Para finalizar este exemplo, é apresentada na Figura 8 a solução numérica em todos os passos de tempo, algo que não é feito nos demais exemplos, pois erros consideráveis nos passos de tempo anteriores se propagam e se tornam notáveis na aproximação da solução no tempo final.

Figura 8 – Aproximações da solução a partir de dados sem e com ruído de NL=1% para  $m = 50$



Fonte: O autor, 2024.

### 5.1.2 Exemplo 2

Neste exemplo, considera-se o problema inverso cuja solução  $\{r(t), u(x, t)\}$  é dada por

$$r(t) = e^t, \quad u(x, t) = e^t [2 \operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x)].$$

Diferentemente do exemplo anterior, aqui será considerada uma condição inicial não nula

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x), \quad x \in [0, 1], \text{ e}$$

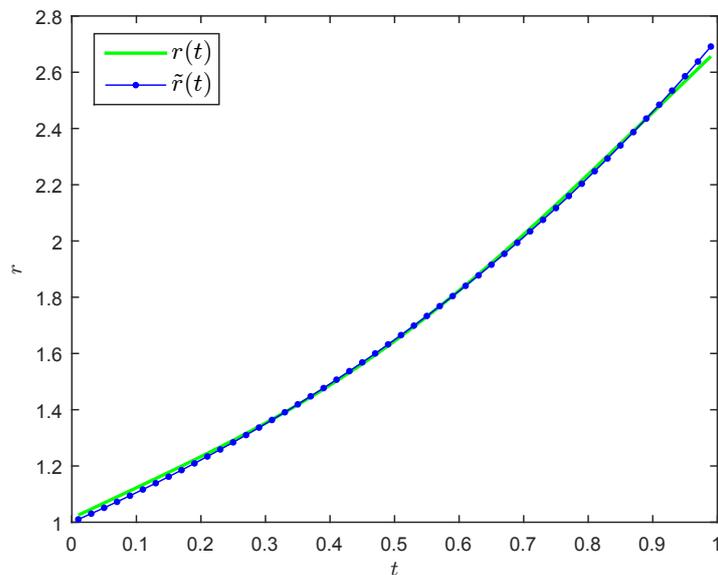
$$f(x, t) = 2(1 + \pi^2) \operatorname{sen}(\pi x) - (1 + 4\pi^2) \operatorname{sen}(2\pi x).$$

Nesse caso, a função energia é descrita por  $E(t) = \frac{4}{\pi} e^t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Para este exemplo, considerou-se  $\alpha = 2$ .

Para as simulações numéricas, analogamente ao exemplo anterior, utilizou-se os mesmos níveis de ruído e valores para  $m$ . Na Figura 9 apresentam-se os resultados das aproximações, na qual é possível constatar um resultado semelhante ao exemplo anterior. O fator de propagação de ruídos também foi semelhante ao Exemplo 1, isso porque a solução para  $r(t)$  nesses exemplos é suave.

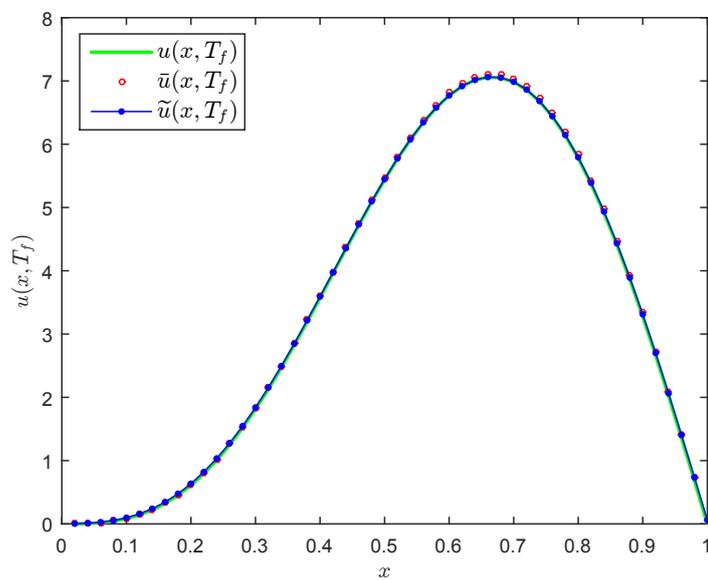
Para completar, apresentam-se na Figura 10 os resultados das aproximações numéricas para  $\bar{u}(x, t)$ ,  $\tilde{u}(x, t)$  a partir das aproximações para  $r(t)$ .

Figura 9 – Fonte recuperada a partir de dados com ruído de NL=1% para  $m = 50$ .



Fonte: O autor, 2024.

Figura 10 – Aproximações da solução a partir de dados sem e com ruído de NL=1% para  $m = 50$  em  $T_f = 1$ .



Fonte: O autor, 2024.

### 5.1.3 Exemplo 3

Neste exemplo, para explorar mais o método proposto, a fonte a ser recuperada é uma função não suave, gerando assim dificuldades numéricas. Considera-se então o problema de recuperar o par  $\{r(t), u(x, t)\}$ ,

$$r(t) = 1 + |2t - 1|,$$

$$u(x, t) = 100e^{-t/2}(2 + \cos(4\pi t)) \left( -\frac{4}{7}x^8 + \frac{29}{14}x^7 - \frac{5}{2}x^6 + x^5 \right),$$

com os dados de entrada

$$\varphi(x) = 300 \left( -\frac{4}{7}x^8 + \frac{29}{14}x^7 - \frac{5}{2}x^6 + x^5 \right),$$

$$f(x, t) = -\frac{100e^{-t/2}(2 + \cos(4\pi t))}{1 + |2t - 1|} (-32x^6 + 87x^5 - 75x^4 + 20x^3) \quad (5.4)$$

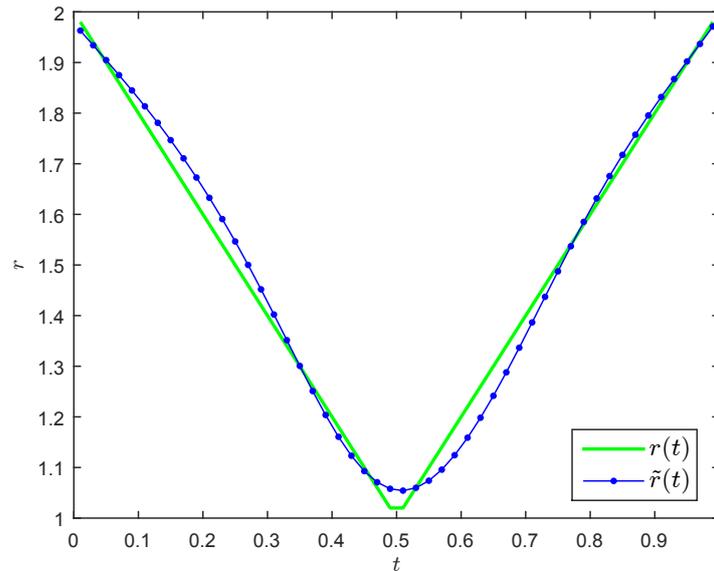
$$-50e^{-t/2} \left( \frac{8\pi \sin(4\pi t) + 2 + \cos(4\pi t)}{1 + |2t - 1|} \right) \left( -\frac{4}{7}x^8 + \frac{29}{14}x^7 - \frac{5}{2}x^6 + x^5 \right) \quad (5.5)$$

e a função energia

$$E(t) = \frac{125}{252}e^{-t/2}(2 + \cos(4\pi t)).$$

Novamente usou-se  $\alpha = 2$ . A fim de exigir bastante robustez do método proposto, foram considerados os níveis de ruído  $NL = 1\%$ ,  $NL = 2,5\%$  e  $NL = 5\%$ . Os resultados obtidos para dados sem ruído tiveram bom comportamento, semelhante ao Exemplo 1, não havendo a necessidade de exibi-los aqui. Mesmo que a função não seja suave, optou-se por manter a matriz  $L$  para introduzir suavidade, no intuito de investigar como o método se comporta. A fonte recuperada com regularização para  $NL = 1\%$ ,  $m = 50$ , está apresentada na Figura 11.

Figura 11 – Fonte recuperada a partir de dados com ruídos de  $NL=1\%$  para  $m = 50$ .



Fonte: O autor, 2024.

Devido ao fato que  $r(t)$  é não suave, o fator de propagação de ruído é incerto, não possibilitando chegar a resultados conclusivos. Embora não se tenha realizada uma análise

mais profunda sobre esse assunto, é razoável que os fatores de propagação de ruído ao ser utilizada a TGSVD se comportam de forma análoga ao caso da TSVD e que dependem da regularidade da solução.

## 6 Conclusão

O trabalho desenvolvido permitiu investigar o problema inverso da equação do calor com condição de contorno de Wentzell-Neuman não local, que ainda é pouco explorada na literatura. O problema foi abordado analiticamente e numericamente.

Para provar a existência e unicidade de solução do problema direto, sob condições suficientes, recorreu-se ao método de Fourier generalizado. Para isso, foi verificado que as autofunções do problema espectral auxiliar constituem uma base de Riesz para o espaço  $L^2[0, 1]$ , pois a sequência de autofunções possui uma sequência biortogonal e é quadraticamente próxima a uma base ortonormal. Além disso, foi provado que há, no máximo, um número finito de autovalores complexos do problema espectral auxiliar; isso permitiu provar que a solução do problema direto é uma função real, independente do valor de  $\alpha$ .

No contexto do problema inverso, observou-se que o operador do problema é uma equação integral, em que o núcleo é fracamente singular. Sendo assim, o operador envolvido é compacto e definido em espaços de dimensão infinita. Com isso, concluiu-se que se trata de um problema inverso mal-posto, segundo a definição de Hadamard. Contudo, sob condições suficientes, foi provada a existência e unicidade de solução do problema inverso.

Na abordagem numérica, foi possível resolver computacionalmente exemplos de problemas inversos da equação do calor com condição de contorno de Wentzell-Neuman não local, através de um método numérico. Constatou-se que o sistema linear decorrente da discretização e do emprego do método do ponto médio implícito se caracteriza como mal condicionado, além de apresentar ruído nos dados. Em virtude disso, foi necessário utilizar um método de regularização, optando-se pelo método da TGSVD, cujo truncamento foi com base no DP. Os experimentos numéricos, utilizando dados com ruído, mostraram que o método proposto é capaz de produzir resultados com erro de aproximação da mesma ordem do ruído nos dados de entrada.

No que tange a pesquisas futuras, torna-se importante fazer análises da convergência do método numérico e encontrar exemplos para serem resolvidos numericamente, cujos dados de entrada estejam de acordo com as condições dos teoremas da existência e unicidade de solução do problema direto e inverso. Não obstante, também pode ser estendido o método exposto para problemas bidimensionais, além de testar outros métodos de discretização.

## Referências

- BAZÁN, F. S.; BEDIN, L.; BOZZOLI, F. Numerical estimation of convective heat transfer coefficient through linearization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 102, p. 1230–1244, 2016. ISSN 0017-9310.
- BAZÁN, F. S. V.; ISMAILOV, M.; BEDIN, L. Time-dependent lowest term estimation in a 2d bioheat transfer problem with nonlocal and convective boundary conditions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor Francis, v. 29, n. 9, p. 1282–1307, 2021.
- BOURGEOIS, L.; CHAULET, N.; HADDAR, H. On simultaneous identification of the shape and generalized impedance boundary condition in obstacle scattering. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 34, n. 3, p. A1824–A1848, 2012.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 10nd. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.
- BÄNSCH, E.; GAHN, M. A mixed finite-element method for elliptic operators with Wentzell boundary condition. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 40, n. 1, p. 87–108, 10 2018. ISSN 0272-4979.
- CANNON, J. *The One-Dimensional Heat Equation*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1984.
- CANNON, J.; LIN, Y.; WANG, S. Determination of source parameter in parabolic equation. *Mechanica*, v. 27, p. 85–94, 1992.
- CANNON, J. R.; LIN, Y.; WANG, S. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation. *The ANZIAM Journal*, Cambridge University Press, v. 33, n. 2, p. 149–163, 1991.
- CANNON, J. R.; MEYER, G. H. On diffusion in a fractured medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 20, n. 3, p. 434–448, 1971.
- DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. *Linear Operators, Part 2: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*. [S.l.]: Wiley, 1988. (Wiley Classics Library). ISBN 9780471608479.
- DURUFLÉ, M.; HADDAR, H.; JOLY, P. Higher order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems. *Comptes Rendus Physique*, v. 7, n. 5, p. 533–542, 2006. ISSN 1631-0705. Electromagnetic modelling.
- ELDÉN, L. A weighted pseudoinverse, generalized singular values, and constrained least squares problems. *BIT Numerical Mathematics*, Springer, v. 22, p. 487–502, 1982.
- FABIAN, M.; HABALA, P.; HÁJEK, P.; MONTESINOS, V.; ZIZLER, V. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. [S.l.]: Springer New York, 2010. (CMS Books in Mathematics). ISBN 9781441975140.
- FELLER, W. Diffusion processes in one dimension. *rans. Amer. Math. Soc.*, American Mathematical Society, v. 77, p. 1–31, 1954.

- GOLDSTEIN, G.; GOLDSTEIN, J.; GUIDETTI, D.; ROMANELLI, S. Maximal regularity, analytic semigroups, and dynamic and general wenzell boundary conditions with a diffusion term on the boundary. *Annali di Matematica*, v. 199, p. 127–146., 5 2020.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. 4th. ed. Maryland: Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p.
- HANSEN, P. C. Regularization, gsvd and truncated gsvd. *BIT*, v. 29, n. 3, p. 491–504, 1989.
- HANSEN, P. C. Regularization tools: A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms*, v. 6, p. 1–35, 1994.
- HANSEN, P. C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- HAZANEE, A.; LESNIC, D.; ISMAILOV, M.; KERIMOV, N. An inverse time-dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 20, p. 6258–6272, 2015. ISSN 0307-904X.
- HEWITT, E.; STROMBERG, K. *Real and Abstract Analysis*. New York: Springer, 1985.
- HINTERMANN, T. Evolution equations with dynamic boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 113, n. 1-2, p. 43–60, 1989.
- ISMAILOV, M. Inverse source problem for heat equation with nonlocal wenzell boundary condition. *Results in Mathematics*, Springer, v. 73, p. 1–11, 2018.
- ISMAILOV, M. I.; KANCA, F.; LESNIC, D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, p. 4138–4146, 2011.
- JERIBI, A. *Perturbation Theory for Linear Operators: Denseness and bases with applications*. 1. ed. Singapore: Springer Singapore, 2021. ISBN 978-981-16-2528-2.
- KRESS, R. *Linear Integral Equations*. 3. ed. [S.l.]: Springer Science+Business, 2014. ISBN 978-1-4614-9592-5.
- KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: Wiley, 1978. (Wiley classics library). ISBN 9780471507314.
- MARCHENKOV, D. On the convergence of spectral expansions of functions for problems with a spectral parameter in a boundary condition. *Differential Equations*, Springer, v. 41, p. 1496–1500, 2005.
- MARCHENKOV, D. Basis property in  $l_p(0,1)$  of the system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition. *Differential Equations*, Springer, v. 42, p. 905–908, 2006.
- MOROZOV, V. A. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. New York: Springer-Verlag, 1984. 257 p.
- RENARDY, M.; ROGERS, R. C. *An Introduction to Partial Differential Equations*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2004.

- 
- SALAMEH, F. A. A. M. *Analytical and Numerical Solutions of Volterra Integral Equation of The Second Kind*. Tese (Doutorado) — An-Najah National University, 2014.
- SAUER, N. Dynamic boundary conditions and the carslaw-jaeger constitutive relation in heat transfer. *SN Partial Differential Equations and Applications*, v. 1, 12 2020.
- SLODICKA, M. A parabolic inverse source problem with a dynamical boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*, v. 256, p. 529–539, 2015.
- VENTTSEL, A. D. On boundary conditions for multidimensional diffusion processes. *Theory of Probability Its Applications*, v. 4, n. 2, p. 164–177, 1959.
- YOUNG, R. M. *An introduction to nonharmonic Fourier series*. London: Academic Press, 1980. (Pure and applied mathematics a series of monographs and textbooks 93).