UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Liliane Nicola

Explorando o jogo Escova no ensino de Matemática

Florianópolis
2024

Liliane Nicola

Explorando o jogo Escova no ensino de Matemática

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Nicola, Liliane
Explorando o jogo Escova no ensino de Matemática / Liliane Nicola ; orientador, Gilles Gonçalves de Castro, 2024.
68 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Jogos de baralho. 3. Jogos matemáticos. 4. Escova de quinze. I. Castro, Gilles Gonçalves de . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Liliane Nicola

Explorando o jogo Escova no ensino de Matemática

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dra. Edna Araujo dos Santos de Oliveira
UFSC - CED

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
UFSC - Departamento de Matemática

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
UFSC - Departamento de Matemática

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 16/07/2024 15:53:12-0300
CPF: ***.897.119-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Profª. Drª Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
GILLES GONCALVES DE CASTRO
Data: 17/07/2024 10:06:14-0300
CPF: ***.977.489-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Orientador:

Florianópolis, 2024.

Aos que mesmo diante das incertezas procuram
incentivar a busca pelo conhecimento.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois só Ele sabe os medos, angústias e choros que vivenciei nesta trajetória.

Ao meu esposo por toda ajuda e incentivo, por ter paciência e por sempre me lembrar quais motivos me trouxeram até aqui.

Aos meus pais, meus familiares e meus amigos pela disponibilidade em ajudar e pela paciência por nem sempre estar presente.

A minha amiga Susi por todas as viagens até a UFSC, pelos cafés compartilhados, pelos choros e companheirismos em cada etapa.

Aos meus colegas, por se disponibilizarem a ajudar, por todas as reuniões onlines de estudos e pelas amizades desenvolvidas nesse processo.

Aos professores do IFC - Campus Sombrio pelo incentivo e ajudas ao longo das disciplinas.

Ao meu orientador e a professora Maria Inez e em nome deles aos demais professores do programa que sempre nos incentivaram.

Ao IMPA e a UFSC por acreditar nos professores do país.

“Há uma única ciência, a Matemática, a qual ninguém se pode jactar de conhecer porque suas conquistas são, por natureza, infinitas; dela toda gente fala, sobretudo os que mais a ignoram.” (Mello e Souza)

RESUMO

Utilizando como recurso um jogo de baralho denominado Escova de Quinze, o objetivo deste trabalho é explorar suas potencialidades no Ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Ao olhar sobre os desafios da educação que vão além do ensino e aprendizagem, pretende-se dar significado ao uso de jogos na sala de aula, tornando os mais que um instrumento motivador. Nesse sentido, este trabalho irá construir um referencial à luz da Educação Matemática sobre as metodologias de Uso de Jogos na sala de aula e Investigação Matemática, utilizando-as como embasamento teórico para fundamentar a prática docente. Refletindo sobre os apontamentos metodológicos, criou-se um produto educacional, com adaptações autorais do Jogo Escova, no qual são exploradas cinco dinâmicas sobre o ensino da unidade de Números. A construção do material tem por objetivo servir de apoio ao professor que poderá utilizá-lo para suprir lacunas de aprendizagem ou explorar novos conceitos, tornando o estudante protagonista. Neste sentido construiu-se um site para disponibilizar as dinâmicas junto com tópicos referentes a metodologia. As atividades serão alinhadas com as habilidades da Base Nacional Comum Curricular. Espera-se que as atividades utilizando jogos sejam aliados do docente na busca por diminuir a distância que existe entre a Matemática e os estudantes, colaborando para uma aprendizagem mais significativa.

Palavras-chave: Jogos de baralho; Escova de quinze; Educação Matemática; Jogos matemáticos; Números.

ABSTRACT

Using a card game denominated “Escova de 15” as a resource, the objective of this work is to explore its potential in Mathematics Education in the final years of Elementary School. When looking at the challenges of education that go beyond teaching and learning, our aim is to give meaning to the use of games in the classroom, making them more than a motivating instrument. In this sense, this work will build a reference in the light of Mathematics Education about the methodologies for Using Games in the classroom and Mathematical Investigation, using them as a theoretical basis to support teaching practice. Reflecting on the methodological notes, our aim is to create an educational product with original adaptations of the game “Escova de 15”, in which five dynamics of teaching the Numbers unit are explored. The construction of the material aims to support the teacher who can use it to fill learning gaps or explore new concepts, making the student the protagonist. The activities will be aligned with the skills of the National Common Curricular Base. Activities using games are expected to be allies of the teacher in the search to reduce the distance that exists between Mathematics and students, contributing to more meaningful learning.

Key-words: Card game; Escova de 15; Mathematics Education; Math Games; Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFC	Instituto Federal Catarinense
IFSC	Instituto Federal de Santa Catarina
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os saberes do professor estão atrelados a todas as suas experiências, o que começa antes mesmo da escolha profissional. Ainda na minha infância conheci um jogo, chamávamos de Escova, hoje descobri que é um jogo comum em comunidades de origem italiana e que seu nome original é *Scopa di Quindici*.

Na minha formação inicial, realizamos durante os estágios um evento itinerante, denominado Dia da Matemática na escola, em que visitávamos as escolas que estavam recebendo os estagiários levando jogos matemáticos e desafios de raciocínio lógico, alguns prontos, outros criados nas aulas de laboratório. No ano em que realizei o Estágio Supervisionado I, a professora solicitou que levássemos novas ideias, então peguei o jogo da minha infância e comecei explorar a adição e suas propriedades, sem aquelas regras específicas do jogo tradicional, apenas para trabalhar o raciocino lógico e o cálculo mental.

Na prática docente sempre usei o jogo Escova em algum momento, às vezes no começo do ano para conhecer os alunos como atividade diagnóstica, às vezes nas aulas com o sexto ano para explorar conceitos e também em aulas de reforço. E por conta disso, escolhi esse material para tratar na minha dissertação, dando um enfoque para Investigação Matemática, metodologia que estudei ao longo da minha especialização no IFSC - Campus Araranguá, e que venho buscando colocar nas minhas práticas docentes.

Nas pesquisas sobre o jogo Escova, encontrei dois trabalhos, é o caso de Gajko (2018) que na sua dissertação realiza uma adaptação para o que chamaram Escova do Zero para trabalhar números inteiros e Schmitt (2021) que traz uma possibilidade de explorar probabilidade e combinatória usando o mesmo jogo numa turma de 3º ano do Ensino Médio.

No decorrer da trajetória profissional, é importante realizar reflexões sobre a prática. Nesse sentido, ao elaborar o produto educacional dessa dissertação estávamos buscando um caminho para ensinar uma Matemática que vai além de demonstrações e aplicações de fórmulas, mas que se preocupa com o desenvolvimento do pensamento.

Essa dissertação tem por finalidade explorar o jogo Escova criando um material que sirva de apoio ao professor de sala de aula. O material tem como público alvo o Ensino Fundamental anos finais. Esse material pode ser utilizado em etapas posteriores ou adaptado para trabalhar com Ensino Fundamental anos iniciais, sendo útil também para apoio pedagógico e retomada de conceitos

Em relação aos objetos do conhecimento abordados, enfatizaremos habilidades da unidade temática Números tomando como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que aponta que o objetivo desta unidade é que o estudante desenvolva o pensamento numérico, tornando-se capaz de julgar, interpretar e argumentar (Brasil, 2018). Optamos em estruturar nossas atividades utilizando o jogo com um enfoque em atividades investigativas, nos amparando em estudos da Educação Matemática.

Esta dissertação está subdividida em capítulos. No Capítulo 2 encontra-se um referencial teórico sobre o uso de jogos na aula de Matemática e a Investigação Matemática. No Capítulo 3 encontra-se uma descrição das atividades elaboradas e no Capítulo 4 discutiremos tópicos da Matemática explorada nas atividades.

Nas seções abaixo estão descritos o objetivo geral e os objetivos específicos.

1.1 OBJETIVO GERAL

Explorar as potencialidades do Jogo Escova no Ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver um referencial à luz da Educação Matemática sobre as metodologias de Uso de Jogos e Investigação Matemática para auxiliar os docentes na sua prática;
- Criar um material utilizando o jogo Escova que permitam trabalhar atividades exploratórias dentro do ensino da unidade de Número;
- Relacionar conceitos teóricos dos números naturais com o material a ser desenvolvido.

2 METODOLOGIAS

No contexto educacional é comum nos depararmos com comparações que mostram que a escola de hoje é a mesma do século passado. Não é apenas o mesmo espaço físico, a disposição das carteiras que permanecem inalteradas, um olhar mais atento pode constatar que a forma de ver o ensino e o papel do estudante e do professor neste processo também é a mesma (Pereira; Chagas, 2016).

A Educação Matemática estuda soluções alternativas para o ensino de Matemática que precisa acompanhar as mudanças da sociedade, não apenas no que diz respeito ao que é ensinado, mas também sobre como ensinar. Neste capítulo, explanaremos sobre o uso de jogos na sala de aula como possibilidade para a Investigação Matemática que são tendências da Educação Matemática e que estão atreladas ao nosso produto educacional.

Quando pensamos no ensino, é preciso lembrar que entender um novo conceito é mais do que memorizá-lo, e o professor está em constante aprendizagem, não apenas por aprender enquanto ensina, mas porque precisa buscar metodologias que embasem sua prática. Nesse sentido, acreditamos que para modificar a prática, utilizar outras metodologias em sala de aula, o professor precisa que seu conhecimento sobre as possibilidades esteja consolidado. Se faz necessário que o docente consiga fazer uma transposição entre aquilo que lê (teoria) e sua prática (realidade escolar). Esperamos que este capítulo ajude outros professores a entender mais sobre essas metodologias, e irem além do que sugerimos, aplicando essas metodologias em outros contextos do ensino de Matemática.

O objetivo do ensino de Matemática é, sobretudo, permitir que os alunos vivenciem o próprio ambiente problemático de produção da Matemática. Ao aluno deve ser dado o direito de aprender, no entanto, métodos unicamente expositivos reduzem os papéis tanto dos professores quanto dos estudantes (Oliveira, 2020). Nesse sentido, Fiorentini, Miorim *et al.* (1990), expõem aquilo que defendemos, que o aprender não pode ser mecânico, sem entender o que faz, também não pode se esvaziar em brincadeiras, é preciso que o estudante participe, raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber.

Dentro deste contexto, a Educação Matemática aponta caminhos para tornar o estudante protagonista de sua aprendizagem, tais metodologias objetivam expor o papel da disciplina de Matemática na formação do ser humano, apresentando maneiras diferentes de ensinar e aprender. Entre essas tendências encontram-se: o uso de jogos nas aulas de Matemática e a Investigação Matemática que serão tratadas nos próximos tópicos deste capítulo.

2.1 O USO DE JOGOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Nesta seção, elucidaremos o que nos levou a optar pelo uso de jogos nas aulas de Matemática, elencando aspectos que utilizamos como aporte teórico para o nosso produto educacional. Realizaremos apontamentos e reflexões que acreditamos serem importantes para o professor antes de trazer os jogos para sala de aula, enfatizando a pertinência do uso deste recurso no processo de ensino e aprendizagem.

As atividades lúdicas são inerentes ao ser humano e se apresentam como um objeto cultural, sendo transmitido por tradição entre as gerações. Exercer as atividades lúdicas representa uma necessidade para as pessoas em qualquer momento de suas vidas (Grando, 2007).

Corroborando com Grando, Smole, Diniz e Milani (2007) expõem que todo jogo desafia, traz alegria e movimento, mas essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos de Matemática, é ela que convida os alunos a participar das atividades com interesse. O uso de jogos nas aulas de Matemática não é um assunto novo, sendo conhecido seu potencial para a educação. Porém, apesar do recurso ser conhecido, entender como alinhar a metodologia com os objetivos de aprendizagem é essencial para o jogo ser mais que uma situação motivadora.

Quando o jogo é inserido nas aulas de Matemática é preciso que se altere o modelo de ver e conceber os processos de ensino e aprendizagem, garantindo que a metodologia não fique restrita a apenas um tipo de material. Nesse sentido, os jogos devem ser vistos como ferramentas, que dão suporte metodológico e não como um apêndice em sala de aula, uma vez que permitem que se modifique o ambiente, convidando o estudante a investigar, criar, explorar e brincar com a Matemática (Grando, 2000).

Os jogos como recurso didático têm papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas, no entanto, é necessário atrelar seu uso a momentos de reflexão, sistematização e formalização de conceitos (Brasil, 2018). Ao ser um catalisador do ensino e aprendizagem, o jogo torna-se um material de ensino com potencial para explorar habilidades para manipular símbolos, estabelecer analogias e convenções e assimilar as regras inerentes aos jogos.

A BNCC, (Brasil, 2018), determina competências gerais e específicas que podem ser exploradas ao utilizar os jogos em sala de aula. Ao jogar estamos interagindo, socializando, nos comunicando, o que contribui para o desenvolvimento pessoal e cultural, nosso e do outro. Os jogos são impregnados nas diferentes culturas, eles nos ajudam a entender a sociedade e sua história. Ao jogar estamos realizando uma construção social, por existir dependência do outro para a brincadeira acontecer (Grando, 2007).

No que diz respeito a Matemática, a BNCC expõe que o estudante deve ser capaz de enfrentar situações em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, que não precisam ter um aspecto prático-utilitário. Ao jogar em grupo, o estudante mobiliza aspectos associados a empatia, resolução de conflitos, cooperação e esse ambiente promove o respeito ao outro, desenvolvendo competências associadas ao saber agir coletivamente (Brasil, 2018).

Na discussão com os pares, o aluno desenvolve seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. No desenvolvimento do aluno as ideias do outro são importantes, pois o levam a pensar nas suas próprias ideias. E por meio dessa troca, muda-se a perspectiva, somente na interação com o outro somos obrigados a ser coerente, pois existe uma regulamentação que deve ser seguida pelos jogadores (Smole; Diniz; Milani, 2007).

Pensando na formação do indivíduo, deve-se valorizar o desenvolvimento conceitual e atitudinal, sendo responsabilidade do professor incentivar o desenvolvimento de métodos de estudo, autoconfiança, trabalhar em grupo, ser cooperativo e ético (Grando, 2000).

A conduta diante dos desafios que um jogo impõe, leva o estudante a interagir e se integrar, podendo se apropriar de conceitos. Essa interação ocorre cooperativamente, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles, essas ações extrapolam o conteúdo matemático e contribuem para a cidadania (Brasil, 2018).

Para Silva e Kodama (2004), o jogo além de ser produtivo na aprendizagem também tem um aspecto afetivo, já que seu elemento mais importante é invocar o lúdico. Associando isto ao trabalho em equipe, permite que o estudante lide com os bloqueios frente a Matemática. Ainda que o jogo por si só não garanta a aprendizagem, a predisposição dos estudantes é um aspecto muito importante para o Ensino de Matemática.

Ao propor atividades com jogos a reação mais comum é de alegria, os estudantes aceitam mais os desafios e se sentem mais seguros. As posturas, as atitudes e a emoção durante essas atividades são as mesmas necessárias para a aquisição do conhecimento (Grando, 2000).

O jogo reduz a consequência dos erros e dos fracassos, ele é uma atividade séria, mas sem consequências frustrantes, todo erro é superável, já que é uma forma natural da ação das jogadas, a cada nova jogada é possível rever respostas, tentar outra rota, essa consciência faz parte da aprendizagem e da autonomia (Smole; Diniz; Milani, 2007).

Além disso, ao jogar, o estudante precisa analisar possibilidades, julgar qual é a mais vantajosa e neste sentido ele aprende a tomar decisões. Durante a atividade os estudantes (adversários) se ajudam, esclarecendo regras, apontando estratégias, de modo que a socialização do conhecimento do jogo se sobrepõe a competição.

Nessas trocas, os estudantes discutem, escutam, argumentam e refletem, uns com os outros, mudam as perspectivas. E essas ações são próprias do processo de abstração reflexiva. Além disso, ao resgatar atividades que estimulem a criatividade e a imaginação dos estudantes estamos trabalhando o processo de abstração Matemática, intrinsecamente ligada ao pensamento humano (Grando, 2000).

Neste sentido, os jogos permitem que o estudante participe ativamente do seu processo de aprendizagem. Entre os aspectos lúdicos naturais do jogo estão a imaginação, a capacidade de interagir e de lidar com a imprevisibilidade, pois não é possível controlar todos os resultados. Assim, ao utilizá-lo cria-se um ambiente natural para a superação, exigindo alguma aprendizagem e um certo esforço em busca por solução (Smole; Diniz; Milani, 2007).

O objetivo do ensino é dar autonomia ao estudante, mais do que fazer ou compreender ele precisa relacionar, coordenar, articular com o objeto e com o outro de modo que essas habilidades permitam que ele aprenda a aprender (Grando, 2007).

Ao utilizar esse recurso exploramos competências que auxiliam na aprendizagem da Matemática, ao jogar, o estudante exercita a curiosidade, a reflexão, realiza observações, testa e investiga hipóteses, comunica descobertas, isso acontece, por exemplo, ao mudar as estratégias para vencer o jogo, verificando outros caminhos. Essas ações possibilitam o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de argumentar, podendo utilizar a Matemática para validar resultados (Brasil, 2018).

Há várias formas de utilizar jogos no ensino. Se considerarmos o aspecto pedagógico do jogo, é importante que ele seja útil ao processo educacional, e sirva como um instrumento facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação. A ação do jogo simplifica a linguagem matemática, ao jogar o estudante consegue aprimorar sua habilidade de raciocínio, análise e compreensão de conceitos matemáticos (Grando, 2000).

Para explorar a Matemática, formalizar estruturas presentes ou subjacentes ao jogo, é preciso realizar uma intervenção pedagógica, durante e após o jogo. Essa ação do professor, deve estar bem estruturada para permitir que os estudantes realizem investigações e discussões que os levem a alcançar as habilidades pré-definidas.

Quando queremos tornar o jogo útil para o processo de ensino e aprendizagem, é importante fazer mais do que simplesmente jogar. Acreditamos que o jogo, nas aulas de Matemática, pode servir para construção de um novo conceito, para fixação/aplicação de conceitos já desenvolvido, sem perder seu aspecto lúdico. Nesse sentido, Grando (2000) destaca que para quem joga, seu prazer está no próprio jogo, na tentativa de vencê-lo, no desafio que se coloca a cada momento da ação.

Para nós o jogo é uma atividade desafiadora, com regras claras que tem começo, meio e fim e que todos participam ativamente de forma igualitária. Como recurso pedagógico deve ter objetivos matemáticos que exigem do jogador a tomada de decisões.

Entendemos que o papel do professor é expor as regras do jogo, auxiliando os estudantes a entendê-las, realizar intervenções objetivas, buscando motivar a cooperação entre os estudantes. No entanto, o professor não deve se isolar. É preciso assumir papéis distintos: juiz, organizador, questionador e observador, enriquecendo o jogo sem interferir nas decisões e estratégias desenvolvidas pelos estudantes.

Segundo Grando (2000), nas atividades com jogos, o professor passa a interagir com alunos e seu papel se modifica, ele se expõe mais, faz descobertas, aprende, orienta e realiza as mediações entre o conhecimento e os estudantes. Portanto, é pertinente que o professor escolha jogos alinhados com a sua ação pedagógica, priorizando as habilidades que deseja desenvolver nos educandos.

Ao realizar atividades em que os estudantes jogam espontaneamente, as noções matemáticas são construídas intuitivamente. No entanto, a intervenção do professor é necessária para sistematizar os conceitos ou pensamentos matemáticos emergentes, é importante explorar as relações, regularidades e as possíveis aplicações das ideias em outras situações (Grando, 2000).

Ao jogar é preciso usar criatividade, analisar jogadas prévias, recorrer a recursos de outros jogos conhecidos, construir estratégias, de modo que o resultado garanta a vitória. As estratégias criadas e testadas podem ser explicitadas ou não, e nesse sentido todo jogo se apresenta como um problema cujo desafio é vencer. A cada rodada novas possibilidades surgem. A análise destas possibilidades é marcada por tomada de decisões, sobre qual a estratégia pode ser mais eficaz e desenvolve a capacidade de planejamento (Grando, 1995).

Porém, para haver compreensão sobre o jogo é preciso ir além da ação, se faz necessário explorar a interação, a dinâmica e as estruturas subjacentes. Quando o estudante discute as estratégias ele constrói conhecimento, é nesse processo que começa a fazer Matemática, pois são nessas análises do jogo que se encontram os conceitos matemáticos.

Mas o que é um jogo de estratégia? Grando (2000), estabelece que este tipo de jogo é dinâmico, capaz de gerar conflitos para os jogadores, as dificuldades são estabelecidas tanto pelas regras quanto pelas jogadas do adversário. As regras estabelecem movimento ao jogo, são elas que definem o que pode ou não, e limitam as ações. O próprio adversário também é um limitador já que existe interdependência entre as jogadas. É possível realizar antecipações, hipóteses, testar regularidades e definir estratégias, é a análise das possibilidades que favorece a previsão, a antecipação do jogo e podem determinar o vencedor.

Definimos, com base em Grando (2000), que o jogo utilizado em nosso produto educacional é um jogo de estratégia. Ele tem regras claras e uma meta estabelecida (reunir o maior número de cartas), precisa de dois ou mais jogadores, que podem escolher sua ação a cada rodada, de tal modo, que cada jogada limita a ação do adversário. Ao final fica claro quem venceu a partida.

Ao realizar uma nova partida, o estudante pode utilizar os mesmos conceitos, mas a situação não será a mesma, exigindo novas estratégias. Essa repetição é importante para explorar as habilidades dos alunos e é mais eficaz do que listas de exercícios monótonas. É interessante que o professor estimule o registro das estratégias usadas durante o jogo, o que pode ser feito por escrito ou verbalmente, ainda que inicialmente essa situação gere desconforto. Esses registros facilitam a discussão das estratégias em grupo, o que é importante para validar e verificar qual caminho é mais coerente.

É essencial propiciar momentos de discussão da Matemática que podem ser realizadas em pequenos grupos ou com toda turma. Essas situações podem ser desencadeadas durante o jogo, ou posteriormente, usando outros recursos. É ao longo dessas análises e reflexões que são estruturados os conceitos, onde ocorre a compreensão das estruturas matemáticas inerentes à ação do jogo. Grando (1995), reforça que ao final dessas discussões o professor deve orientar os estudantes para serem sistematizados os conceitos por meio de uma linguagem matemática.

Tomando como referência Grando (2000), sintetizamos seis momentos que acreditamos serem relevantes ao trabalhar com jogos na sala de aula, e que serão utilizados em nosso produto educacional:

1º momento: exploração do material, familiarização das regras, comparação com outros jogos, simulação de jogadas (partida modelo).

2º momento: jogo pelo jogo, internalizando as regras, explorando as noções matemáticas inerentes. Esse momento pode acontecer mais de uma vez.

3º momento: ação do professor no jogo. Pode ocorrer concomitantemente com o 2º momento, o professor realiza questionamentos, observa, incentiva os estudantes a analisarem suas jogadas, podem ser realizados questionamentos, individuais ou para toda turma, relativos às estratégias.

4º momento: registro dos pontos, cálculos utilizados. Esse momento permite formalizar e sistematizar conceitos. Deve ser feito se o professor acreditar que contribui para a aprendizagem e depende dos objetivos e da natureza do jogo. Esse registro também pode acontecer desde o 3º momento, mas é importante que os estudantes já estejam familiarizados com o jogo. Aqui o professor pode misturar grupos, fazer perguntas sobre jogadas possíveis e solicitar que registrem o que foi questionado nos momentos anteriores.

5º momento: formalização do que foi encontrado no 4º momento, discussão das questões e análises, realização de conjecturas. Pode ser feito um registro das hipóteses levantadas, do que foi testado e validado, esse registro pode ser por escrito ou para o grande grupo. Nesse momento ocorre a socialização do 4º momento e depende dos objetivos e da natureza do jogo. O 4º e 5º momento ocorrem simultaneamente, pois no momento do registro os estudantes podem sentir necessidade de novos testes. Essa exposição de resultados deve ocorrer ao longo do processo.

6º momento: jogar com competência. Após realizar as análises das estratégias, permitir que os estudantes retomem ao jogo e utilizem os conceitos explorados no 5º momento.

Sabemos que os desafios da educação vão além do ensino e aprendizagem e neste sentido, destacamos que não há solução simples e que muitas vezes o professor faz o que pode com os recursos que têm. O docente, na busca por materiais e metodologias que possam motivar seus alunos ou melhorar sua prática, precisa analisar criticamente o que é sugerido e refletir sobre alguns aspectos como os objetivos, a realidade da sala de aula, os alunos envolvidos, o momento adequado e as adaptações necessárias.

Não existem fórmulas prontas, cada contexto requer uma análise específica, pois o que funciona para uma turma pode não ser adequado para outra. Mais do que simplesmente escolher um material ou uma metodologia, é essencial ter clareza sobre os objetivos educacionais a serem alcançados.

Nosso produto educacional tecerá sugestões sobre como integrar jogos à aula de Matemática, combinando-os com atividades exploratórias para promover uma abordagem investigativa da disciplina. As atividades exploratórias serão encaminhamentos que o professor pode realizar durante os jogos e que objetivam orientar o aluno na investigação, a fim de que ele perceba alguma regularidade e busque generalizá-la, fazendo conjecturas, mas a atividade investigativa em si é mais ampla. Nesse sentido, é fundamental que o professor entenda como funciona a Investigação Matemática como metodologia para conseguir estruturar sua aula para além do material disponibilizado.

2.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Entendemos que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento orientador para a prática de ensino dos professores da educação básica. Nesse sentido, é importante destacar que Brasil (2018) defende que a Investigação Matemática é uma abordagem privilegiada que atua simultaneamente como objeto de estudo e estratégia de aprendizagem.

A Investigação Matemática possui um potencial significativo para desenvolver competências fundamentais para o letramento matemático, tais como raciocínio, representações, comunicação e argumentação, além de estimular a criatividade e a perseverança diante de desafios. Tais habilidades permitem que os alunos apliquem o conhecimento matemático em diferentes contextos (Brasil, 2018).

Ainda que a Matemática seja uma ciência hipotética-dedutiva, construída num sistema de axiomas e postulados, a BNCC, Brasil (2018, p. 265), ressalta que é necessário considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática, destacando a necessidade de oportunizar aos alunos momentos que permita a eles relacionarem e associarem observações empíricas, como representações, com conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas.

Nos amparando na teoria de aprendizagem de Vygotsky, destacamos que esta metodologia precisa de um professor disposto a superar a pedagogia da transmissão em que o estudante é agente passivo (Miranda, 2005). É necessário que o professor seja capaz de estabelecer uma relação entre conceitos, atuando como instigador, realizando reflexões durante suas mediações, atento às interações dos alunos. Na Investigação Matemática, o professor precisa também ser investigador.

Mas afinal, o que é investigar? O termo investigar nos remete a ideia de encontrar soluções, desvendar mistérios, nos debruçarmos sobre uma situação e encontrar respostas. Para os matemáticos, a investigação está atrelada a descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Nesse sentido, as atividades investigativas possuem características próprias, fundamentalmente é um processo de conjectura, teste, demonstração (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003).

Quando trazemos a Investigação Matemática para dentro da sala de aula, algumas formas de ver e conceber o ensino e a aprendizagem e a própria Matemática são alteradas. Diferente da sala de aula convencional, em que o professor é visto como detentor do conhecimento e os alunos raramente podem intervir, quando trabalhamos com a Investigação Matemática é necessário que os estudantes participem ativamente, sendo incentivados a apresentar soluções e estratégias, num processo de ação e reflexão, para além de formular questões e conjecturas os estudantes aprendem a argumentar e a questionar seus pares e o professor (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013).

Nesse processo, como a Investigação Matemática não consiste em respostas prontas, certo ou errado, trata-se de raciocinar sobre conceitos e estabelecer novas relações entre objetos matemáticos, a maneira de ver a Matemática também se altera, quebrando o paradigma da Matemática vista como uma ciência exata, pois os conceitos são construídos em movimentos para frente e para trás (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003).

Dentro desta metodologia, o professor precisa entender que é possível programar como ela inicia, mas não como acabará, já que o modo como os estudantes vão interagir não é controlável. Além disso, nas atividades de investigação o professor não é um agente passivo, ele tem um papel fundamental e precisa estar atento ao que os alunos estão fazendo, assumindo uma postura interrogativa e também proporcionando informações úteis, valorizando as conexões matemáticas e extra matemáticas, fazendo os estudantes refletirem sobre elas (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013).

A aplicação da metodologia de investigação pode ser dividida em três fases:

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. Essas fases podem ser concretizadas de muitas maneiras. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p.25).

Ao utilizar essa metodologia na sala de aula o professor continuará a apresentar os conceitos, os procedimentos matemáticos, mas a forma de fazer deixa de ser descontextualizada e passa a ser feito durante o processo de investigação, nos momentos em que os estudantes demonstrarem a necessidade desses conceitos para construir relações (Ponte *et al.*, 1998). É por isso que o professor precisa pensar em questões para que o aluno, munido de seus conhecimentos prévios, consiga ir descobrindo padrões e estabelecendo generalizações, formulando conjecturas (Maccali, 2015).

Nas atividades de Investigação o aluno é convidado a raciocinar, a mobilizar os conhecimentos prévios sobre a Matemática e, por meio deles, testar, conjecturar e realizar novas descobertas. Neste processo, o estudante vai além da definição de um conceito matemático, ele se apropria do conceito ao correlacionar este conceito a outros conceitos e entender como utilizá-lo. Neste movimento de fazer inferências, utilizando informações já existentes, que é possível chegar a novas conclusões (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013).

Ao relacionar o trabalho que estão realizando com seus conhecimentos prévios, os estudantes passam a entender o que é a Matemática, desmistificando a ideia de que os conteúdos matemáticos são isolados, que podem ser separados em caixas (Ponte *et al.*, 1998). Para isso é fundamental que o professor selecione tarefas que permitam aos estudantes trabalharem com representações matemáticas apropriadas aos seus níveis, essas representações podem ser mais formais como o uso da linguagem algébrica, ou mais informais, como esquemas (Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2013).

Mais do que regular a atividade, o professor é um elemento-chave que vai direcionar, validar as arguições, fazer novas perguntas e assim também avaliar o processo, entendendo como seus estudantes estão pensando, coletando informações. A avaliação ocorre durante todas as etapas. Enquanto o professor faz observações e registros ou até mesmo solicitando que os estudantes anotem suas colocações ao longo das aulas. Nessas trocas a habilidade de escrita é estimulada. Também é possível realizar avaliações solicitando que os estudantes tragam suas conclusões para o grande grupo, estimulando a comunicação, a argumentação e a validação entre os pares. Um registro avaliativo não exclui o outro, sendo que em todos os casos a observação e intervenção do professor é essencial.

No produto educacional, existem alguns momentos em que o professor poderá trabalhar utilizando a Investigação Matemática, buscando tornar as habilidades de realizar conjecturas e demonstrações mais acessíveis. Ao possibilitar esse fazer Matemática o professor e o estudante conseguem realizar a integração das explanações teóricas com atividades práticas.

Quanto mais ferramentas e metodologias o professor conhecer e usar, maior é a possibilidade de tornar efetivo o processo de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido é importante entender que existem outros caminhos para além do Uso de Jogos e da Investigação Matemática. Não há respostas prontas e qualquer atividade exige um olhar do professor sobre a sua realidade.

No próximo capítulo abordaremos as dinâmicas presentes no nosso produto educacional, sugerindo como o professor pode utilizá-las associando as metodologias descritas aqui.

3 PRODUTO EDUCACIONAL

Nosso produto educacional está disponível no site: Matemática do Jogo Escova[1]. Nele são expostos algumas dinâmicas, utilizando o mesmo jogo base que chamamos de Escova. Nosso produto é um material destinado aos professores, e com esse intuito em nosso espaço deixamos materiais de leituras e roteiros que podem ser adaptados pelos docentes. A comunidade em geral consegue fazer uso deste produto, pois nele se encontram as regras de cada dinâmica, permitindo jogar por jogar e explorar o cálculo mental.

Este capítulo destina-se a expor cada dinâmica, quais seus objetivos e suas regras. O recurso explorado aqui, pode ser utilizado como material para reforço, pois é possível retomar os objetivos do 6º ano em qualquer outra etapa, também pode ser explorada com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental e com o Ensino Médio, sempre alinhando com os objetivos pertinentes ao contexto de cada turma.

A BNCC divide a Matemática em cinco grandes unidades temáticas, nosso trabalho dará maior enfoque a unidade temática Números, que têm como finalidade "... o desenvolvimento do pensamento numérico, envolvendo a construção do número, equivalência e ordem, enfatizando registros, usos, significados e operações." (Brasil, 2018, p. 268).

Dentro dessa unidade, no Ensino Fundamental anos iniciais, espera-se que os estudantes consigam resolver problemas com números naturais explorando diferentes significados das operações, julgando os resultados e justificando matematicamente seus procedimentos. Em relação ao cálculo, espera-se que desenvolvam diversas estratégias para obter os resultados, incluindo o cálculo mental (Brasil, 2018).

No decorrer do processo de ensino e aprendizagem, sabemos que o sucesso dos estudantes não é linear e homogêneo, pois cada indivíduo tem seu ritmo próprio de aprender. Por isso, é comum que estudantes no Ensino Fundamental anos finais, apresentem dificuldade nas habilidades associadas a unidade temática Números.

A aprendizagem de Matemática acontece num processo de construção conceitual. Por isso, se faz necessário retomar tópicos para que as lacunas no desenvolvimento sejam superadas, permitindo a assimilação de novos conceitos. O próprio currículo base, retoma aspectos no 6º ano, ao explorar o conjunto dos números naturais e as operações, possibilitando que sejam desenvolvidas as habilidades pertinentes ao ensino de Números dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, acreditamos que ao explorar o cálculo mental por meio do jogo, o estudante compreenda de forma mais significativa os números e suas propriedades, contribuindo para a aprendizagem de conceitos matemáticos mais complexos. As habilidades e conceitos a partir das estratégias do cálculo mental aumentam o conhecimento

[1] Produto educacional está disponível no site: https://sites.google.com/view/matematicadojogoescova de autoria própria, Nicola (2024).

sobre campo numérico e contribuem para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Comumente, a escola valoriza o cálculo utilizando papel e lápis, sem explorar o raciocínio implícito e tornando o processo sem significado para o estudante. O cálculo mental por sua vez amplia as possibilidades de resolver uma mesma conta, ocorre a reflexão sobre o significado dos cálculos intermediários, facilitando o entendimento dos algoritmos por meio da observação das regularidades, isso estabelece uma relação mais pessoal entre o estudante e o conhecimento matemático (Grando, 2000).

Ao valorizar a construção de uma linguagem própria, Grando (2000) aponta que o jogo pode auxiliar na elaboração e compreensão da linguagem matemática e de sua estrutura lógica. Nesse sentido, de forma subjacente, exploramos a unidade temática Álgebra.

A BNCC reforça a necessidade de que os estudantes identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas para desenvolver posteriormente o pensamento algébrico. Além disso, destaca a importância do desenvolvimento da Matemática como uma linguagem simbólica, da representação e da argumentação, que podem ser exploradas por meio de generalizações e propriedades (Brasil, 2018).

Nossas dinâmicas vão abordar diversos aspectos do jogo como recurso pedagógico, utilizando as classificações de Grando (2000), nosso jogo pode ser classificado como de competição, pois estimula o desejo de pensar cuidadosamente nas estratégias. Em alguns momentos, se caracteriza como um jogo de habilidade e de cálculo, pois o estudante irá experimentar a habilidade lógica e de cálculo, por meio do uso de estratégias matemáticas em relação às propriedades de cada operação e propicia o cálculo mental. Dependendo de como for aplicada a dinâmica, o jogo pode ser entendido como um jogo de fixação de conteúdos, no sentido de fixar ou aplicar um conceito já aprendido.

O principal recurso dessa sequência de atividades é o baralho. Caso haja algum impedimento para o uso do baralho no local de aplicação, as cartas podem ser produzidas, elas podem ser impressas e plastificadas. Acreditamos que o baralho poderá ser mais interessante como jogo, por ter uma questão histórica e cultural, e nesse sentido, já fazer parte do contexto dos estudantes. Fica a critério do professor analisar o que é mais adequado a sua realidade.

O baralho pode e deve ser usado como recurso de contagem, uma vez que cada carta apresenta o número e a representação de sua quantidade. Dependendo do nível dos estudantes, o professor pode utilizar recursos manipuláveis como o material dourado, tampinhas, palitos, permitindo que o estudante explore as operações básicas. É interessante que gradualmente esses recursos sejam deixados de lado, para desenvolver a memória e também a autonomia dos grupos, pois à coerência dos resultados será julgada pelos próprios colegas/adversários.

Dividimos esse capítulo em vários tópicos. No primeiro momento, vamos expor o jogo original, que será adaptado nas dinâmicas. Na sequência, as competências da BNCC que podem ser trabalhadas, seguido das dinâmicas em si, que exploram conteúdos e habilidades distintas que serão mencionados em cada subitem.

3.1 ESCOVA DE QUINZE: O JOGO ORIGINAL

Utilizando um baralho espanhol de 40 cartas (um a sete, mais as três figuras por naipe) em que as cartas dama (10), cavalo (11) e rei (12) valem respectivamente 8, 9 e 10. As outras cartas atribui-se seu próprio valor.

Podem participar 2 à 4 pessoas, individualmente ou em pares. Arbitrariamente, alguém distribui as cartas, inicia o jogo quem está a sua direita, que será o próximo a entregar as cartas (depois da contagem de pontos), o jogo segue no sentido anti-horário.

Na primeira rodada são colocadas 4 cartas na mesa (viradas para cima) e cada participante recebe 3 cartas, que não devem ser expostas ao grupo. O objetivo do jogo é pegar o maior número possível de cartas.

Na sua vez de jogar, o participante precisa, com apenas uma carta da mão e quantas da mesa quiser, somar quinze (quanto mais cartas da mesa, melhor). Se ele conseguir a soma quinze, deve mostrar para os demais que irão validar seu cálculo, recolhe as cartas da mesa, junta com a da sua mão utilizada na soma, e coloca no seu monte, esses são seus pontos.

Caso não consiga obter a soma quinze, o jogador deve descartar uma carta da mão colocando-a com as cartas expostas na mesa (virada para cima), de modo que os outros jogadores possam utilizá-la na sua vez de jogar. Esse descarte também acontece se não tiver cartas na mesa, uma vez que não será possível obter quinze. Depois de três jogadas, todos os jogadores estarão sem cartas na mão.

Novamente são distribuídas três cartas para cada um, sendo que as da mesa não devem ser repostas ainda que essa esteja vazia. As cartas serão distribuídas a cada rodada até que termine o baralho. Somente quando não houver mais cartas para distribuir e tão pouco nas mãos dos jogadores o jogo termina e os pontos são contabilizados.

Cada carta normal vale um ponto. Existem formas de obter pontos extras:

Cartas de ouro: as cartas de ouro são especiais de modo que o jogador que conseguir ter mais cartas desse naipe no seu monte ganha um ponto adicional;

Sete: Os setes também são importantes, quem tem mais setes, ganha um ponto adicional e quem conseguir o sete de ouro, denominado <u>sete belo</u>, também ganha um ponto adicional;

Escova: O jogador realiza uma escova quando leva todas as cartas da mesa. Neste caso, deve marcar a escova colocando uma das cartas do seu monte perpendicular às demais, cada vez que realiza uma escova um ponto é adicionado.

Essas regras são expostas antes da partida para que o jogador crie estratégias que garantam que essas cartas estarão no seu monte, afinal ganha quem fizer mais pontos.

Sempre que o jogo acaba (não tem mais cartas para distribuir) as cartas que ficam na mesa somadas resultam num valor que é múltiplo de 5. Se não for, significa que alguém errou a soma. Essa característica é explorada no trabalho de Schmitt (2021).

As regras aqui descritas são as mesmas usadas quando a autora jogava com seus familiares. Em Copag (2020), você pode entender melhor a história do jogo e ver um modelo parecido de jogar.

Na próxima seção será abordada as competências gerais e específicas da BNCC (Brasil, 2018) que serão exploradas nas dinâmicas propostas em nosso produto educacional.

3.2 COMPETÊNCIAS DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Nesta seção elencaremos quais as competências da BNCC podem ser trabalhadas ao utilizar as dinâmicas desenvolvidas no nosso produto educacional.

3.2.1 Competências gerais

Descrevemos abaixo as competências gerais da BNCC, sobre as quais, alinhadas as habilidades, estruturamos nossas dinâmicas. Optamos por criar uma seção apenas para isso, para facilitar na elaboração das aulas do professor. Embora algumas dessas competências já tenham sido mencionadas anteriormente, aqui elas estão transcritas na íntegra.

Conforme a BNCC:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva;
>
> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
>
> Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural; Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo

> o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza;
>
> Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (Brasil, 2018, p. 9 e p.10).

As competências gerais, não são exploradas apenas quando estamos trabalhando conceitos matemáticos, mas principalmente nos momentos em que os estudantes estão interagindo coletivamente, o que pode ser feito quando usamos os jogos como recurso. o jogo escova e suas adaptações permite que o estudante aprenda agir coletivamente, desenvolvendo aspectos relacionados a responsabilidade, a ética. Além disso, em jogos de estratégias o estudante aprende a respeitar e ouvir opiniões e a tomar decisões. Apresentaremos na sequência as competências específicas da Matemática para o Ensino Fundamental anos finais.

3.2.2 Competências específicas

Ao longo das próximas seções, elencaremos as habilidades da Matemática e são elas que permitem trabalhar as competências específicas da Matemática dispostas na BNCC que estão descritas na sequência.

De acordo com a BNCC:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho;
>
> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo;
>
> Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes;
>
> Utilizar processos e ferramentas matemáticas validando estratégias e resultados;
>
> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados);
>
> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a

> identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (Brasil, 2018, p. 267).

As competências específicas são exploradas ao longo das dinâmicas, cada uma delas acaba propiciando que o estudante desenvolva algum aspecto, o que pode acontecer ao longo do jogo, nas reflexões sobre as atividades exploratórias, durante as investigações na construção dos conceitos, de modo que nem todos os momentos englobam todas elas, mas seus aspectos são trabalhados em alguma atividade dentro do produto educacional. Acreditamos que o uso de jogos aliado as atividades exploratórias geram um ambiente propício para que o estudante desenvolva tais competências. As próximas seções vão expor as dinâmicas que podem ser trabalhadas usando adaptações do jogo original.

3.3 DINÂMICA 1: CONHECENDO O BARALHO

Esta dinâmica não irá utilizar o jogo em si. Nossa sugestão é que seja realizada antes de qualquer outra proposta presente neste trabalho. Ela explora conceitos para além da aula de Matemática. O professor pode convidar outros professores para trabalhar interdisciplinarmente sobre este tema, pois permite explorar aspectos relacionados à cultura e à sociedade. Em relação ao conteúdo matemático é possível trabalhar os seguintes objetos: sequências, igualdade e incógnita.

Antes de apresentar o jogo Escova a turma, o professor pode abordar questões culturais associadas ao baralho ao mesmo tempo que explora conceitos de igualdade e incógnita. O jogo de cartas é comum no Brasil, seu uso em sala permite um resgate de tradições. Nesse sentido, pode ser realizado um trabalho interdisciplinar com as disciplinas de História, Geografia, Arte e Educação Física.

Sugerimos que o professor convide os estudantes a conhecer os diferentes tipos de baralhos, suas origens, os naipes e seus nomes, os estudantes podem criar seus baralhos, novos jogos, discutirem jogos que fazem parte da cultura do local onde a escola está inserida. Essas questões podem ser exploradas pelos estudantes utilizando pesquisas onlines ou de campo, buscando as tradições locais, regionais ou globais. No site: Blog COPAG,[2] Copag (2020), é possível encontrar textos que exploram a história das cartas e podem ser utilizados pelos estudantes para pesquisa.

Em relação à Matemática, de forma simples o baralho é uma ferramenta versátil para trabalhar a ideia de sequência, de maior e menor e também entender que símbolos podem representar valores. É possível explorar a ideia de código, nossa sugestão é construir uma tabela associando os símbolos aos seus valores comuns, no caso o Ás que assume o valor do 1 ou em alguns casos vale 14, o Valete representado pela letra

[2] No site:https://blog.copag.com.br/ estão disponíveis diversas matérias sobre o baralho.

J que vale 11, a Dama que vale 12, representada pela letra Q, e o Rei que vale 13, representado pela letra K. A tabela também permite trabalhar as noções de maior e menor.

Ao trocar um número por um símbolo estamos estabelecendo um código e uma igualdade. Também existe uma associação entre o símbolo do número e a quantidade, feita no baralho por meio de imagens. Cartas diferentes assumem o mesmo valor, exemplo 3 de ouro e 3 de copas. Pode ser solicitado que os estudantes construam sequências, completem tabelas e criem suas próprias cartas e regras.

Após essa atividade, se o professor julgar pertinente, pode apenas trabalhar o jogo sem adaptações (seção 3.1). Também é possível explorar uma das outras dinâmicas expostas na sequência, sempre buscando alinhar suas escolhas aos objetivos de sua aula. Na próxima seção, elencaremos sugestões para o ensino da adição.

3.4 DINÂMICA 2: ADIÇÃO COM O JOGO ESCOVA ADAPTADO

As próximas dinâmicas têm como base o jogo Escova (seção 3.1), para isso sugerimos que seja utilizado o baralho convencional, também chamado baralho Francês. Utilizaremos uma carta de cada naipe do 1 ao 10, em que o 1 é representado pelo Às, totalizando 40 cartas. Não há necessidade de troca de representações, ou seja, atribui-se às cartas seu próprio valor e as cartas J, Q e K devem ser retiradas.

Sobre a pontuação, cada carta vale um ponto e a contagem de pontos ocorre quando acabam as cartas do baralho, de modo que o máximo de pontos é 40. Sugerimos que seja feito dessa forma, para tornar mais simples o entendimento do estudante em relação ao que é necessário para garantir a vitória. Se o professor quiser pode inserir novas regras ou até utilizar as que fazem parte do jogo original.

O baralho é um recurso interessante, pois já possui seu próprio instrumento de contagem. Cada carta vem com os símbolos desenhados representando seu valor, um 4 de copas terá 4 copas desenhadas em seu centro. Se julgar necessário, o professor pode utilizar materiais manipulativos para contagem como material dourado, tampinhas, palitos, adaptando a sua realidade.

Em relação aos participantes ele pode ser jogado individualmente ou em duplas, neste caso entendemos que cada dupla é um jogador. Como o jogo pode ter 2 ou 4 jogadores, no caso de jogar em duplas 2 a 8 estudantes podem jogar.

Nesta dinâmica, realizaremos o jogo original da escova com o baralho adaptado, explorando o conceito da adição com números naturais. Ela pode ser aplicada em qualquer etapa da Educação Básica, no entanto, foi estruturada para o Ensino Fundamental anos finais, em particular para o 6º ano. Aqui exploraremos o uso de jogos atrelado as atividades exploratórias, buscando a Investigação Matemática.

Serão exploradas as seguintes habilidades da BNCC:

> **(EF06MA01)** Comparar e ordenar números naturais;
>
> **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos mentais ou escritos, exatos com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos;
>
> **(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. (Brasil, 2018, p. 301 e p. 303).

O objetivo geral é realizar somas mentais explorando a agilidade. A regra é somar quinze utilizando apenas uma carta da mão e o máximo de cartas da mesa, pois para ganhar o jogador deve obter o maior número de cartas. Durante o jogo, intuitivamente, o estudante aplicará as propriedades da soma (comutativa, associativa) e estabelecerá relação de igualdade de expressões numéricas. Esses conceitos serão analisados nas etapas posteriores, que denominamos como 4º e 5º momento quando tratamos sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática no Capítulo 2 (p. 20).

Ainda no 3º momento, quando o professor está observando os estudantes jogarem, é possível questionar um ou outro integrante se existe uma jogada melhor, também pode solicitar ao final do jogo para determinarem quantos pontos o adversário fez sem contar as cartas.

Elencamos algumas sugestões de questões que podem ser feitas pelo professor durante o 3º momento para guiar as estratégias dos estudantes:

a. Sabendo que são 40 cartas e você fez 23 pontos, ficou 2 cartas na mesa, quantos pontos o adversário fez? Quem ganhou o jogo?

b. Existe outra jogada para que o colega faça mais pontos? Quais cartas ele poderia pegar?

c. Existe outra soma possível utilizando a mesma carta da mão?

Essas questões podem ser feitas grupo por grupo, ou expostas na lousa, para discutir com toda turma. No caso do item **a**, colocamos uma situação hipotética, mas o professor pode utilizar informações do próprio grupo.

Depois que os estudantes já estejam familiarizados com o jogo e já tiverem testado estratégias, chegamos no 4º momento. Nesta etapa sugerimos que os estudantes façam registros no caderno das cartas utilizadas ao conseguir somar quinze e ao final do jogo quanto ficou sobre a mesa. Esses registros permitem que o professor controle como estão sendo as partidas.

Sugerimos que depois dos registros, ainda no 4º momento, a turma seja dividida em grupos, diferentes daqueles que já jogaram juntos e que sejam entregues algumas questões, aqui o professor pode escrever na lousa, projetar, encaminhar em algum grupo, também pode adaptar as questões a linguagem que julgar mais fácil para os estudantes, é sempre válido realizar a leitura com os grupos.

Fica a critério do professor se todos vão receber todas as questões ou se cada grupo receberá questões diferentes, para essa discussão é importante que cada um leve suas anotações.

Seguem algumas questões que julgamos pertinentes e que podem ser adaptadas:

1. Quais as somas possíveis usando duas cartas? Usando três cartas? Quatro cartas?

2. Tem como fazer 11 pontos em uma rodada?

2.1. Qual o máximo de pontos em uma rodada?

2.2. Quantas vezes você conseguiu a pontuação máxima?

3. Usando 6 e 9 obtemos 15, existe outra soma possível usando a carta de número 9?

3.1 E de número 6?

3.2 Se existem, elenque quais são as cartas e destaque qual é a opção mais vantajosa?

Em todos os itens é possível modificar as perguntas ou separar. No item 3 é possível criar variações usando as somas: $7+8$ e $10+5$ e entregar para grupos distintos.

Com orientação do professor, já no 5º momento, os estudantes podem realizar testes e escrever suas colocações em linguagem própria, sugerimos que levem suas construções para o grande grupo, escritas ou apresentadas. Depois dessa discussão com a turma, todos juntos podem construir os conceitos e propriedades referentes ao que encontraram.

Nessa etapa, se julgar pertinente, é possível realizar demonstrações e fazer outras análises explorando mais os aspectos associados à metodologia de Investigação Matemática (seção 2.2). No entanto, como mencionamos, não há como determinar como uma investigação termina, e sua eficiência depende do perfil da turma e do professor.

No Capítulo 4, iremos expor alguns conceitos sobre adição que julgamos pertinentes a essa dinâmica e sugerimos sua leitura antes de explorar o jogo na sala de aula. No próximo tópico analisaremos como trabalhar os critérios de divisibilidade utilizando o mesmo jogo.

3.5 DINÂMICA 3: DIVISORES E OS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Exploraremos nesta dinâmica alguns critérios de divisibilidade dos números 2, 3 e 5, sendo esse nosso objeto do conhecimento. Também é possível usar a mesma ideia para a divisibilidade por 6.

Subdividimos essa dinâmica em três tópicos, um para cada critério e nelas serão trabalhadas as seguintes habilidades da BNCC:

> **(EF06MA05)** Estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 5.
>
> **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva. (Brasil, 2018, p. 301).

Essa dinâmica utiliza o jogo adaptado descrito na Dinâmica 2 (p. 31). A regra principal do jogo é mantida nos três casos, realizar as somas, tentando pegar o maior número de cartas e utilizando apenas uma carta da mão. Portanto, o cálculo mental continua sendo explorado, aumentando o grau de dificuldade. Essa atividade pode ser estendida para outros números, ficando a critério do professor essas adaptações.

O público alvo continua sendo o 6º ano do Ensino Fundamental, anos finais, ressaltamos que pode ser trabalhado em qualquer etapa, desde que estejam alinhados aos objetivos do professor.

3.5.1 Divisibilidade por dois

A parte operacional do jogo se mantém, cada participante recebe 3 cartas, 4 são colocadas na mesa. Modifica-se a regra: ao invés de somar quinze é preciso obter uma soma que seja divisível por 2, usando uma carta da mão e quantas da mesa forem necessárias.

A dinâmica do jogo segue a mesma, quando conseguir obter uma soma, as cartas que compõem o total devem ser colocadas no monte dos pontos, se não for possível é necessário descartar uma carta na mesa. Ao terminar as cartas da mão, distribui-se novamente três para cada um até que acabe o baralho.

Consideramos pertinente que os estudantes registrem suas contas, se for necessário, realizem as divisões das somas no papel, verifiquem o que os colegas alegaram como certo, o que pode ser feito com ou sem o uso da calculadora.

Depois que os estudantes se adaptarem às regras e testarem estratégias, sugerimos que anotem quais cartas foram usadas quando pontuaram, o que chamamos de 4º momento (p. 20). Ambos os registros podem ser utilizados para avaliar o progresso dos grupos.

No 4º e 5º momento a turma irá analisar seus registros dos pontos, indicamos dividir os estudantes em grupos, análogo à dinâmica anterior, ficando a critério do professor. As questões podem ser expostas na lousa ou entregues para cada equipe, e novamente todos podem responder a todas as questões ou cada grupo fica responsável por fazer uma análise. O professor pode ainda realizar novos questionamentos. Nosso intuito é apenas fazer apontamentos, fica para o docente a função de observar o que pode ou não ser aplicado a sua realidade dentro dos seus objetivos. Convém reforçar a importância do professor explanar as indagações caso entregue elas impressas, realizando uma leitura com os grupos, deixando claro como podem obter as respostas e como realizar testes.

Algumas questões que julgamos pertinentes são:

1. Quando um número é divisível por 2?

2. Quando tenho uma carta de valor par na mão, sempre conseguirei uma soma divisível por 2?

2.1. E quando tenho uma carta de valor ímpar?

3. Quais as somas resultam em par?

3.1. Construa uma tabela usando duas cartas, três cartas, quatro cartas.

4. Qual o máximo de cartas que consigo pegar tendo um 2 em mãos? (mudar a carta da mão para cada grupo).

5. Qual o máximo de pontos em uma rodada?

5.1. Quantas vezes você conseguiu a pontuação máxima?

6. Posso afirmar que se tenho duas cartas com valor ímpares sempre conseguirei uma soma divisível por 2?

6.1. Se forem duas cartas com valor par?

6.2. Se as paridades das cartas forem diferentes?

Com a orientação do professor, no 5º momento, os estudantes podem realizar testes e escrever suas colocações em linguagem própria. Sugerimos que levem suas construções para o grande grupo, escritas ou apresentadas, depois dessa discussão com a turma é importante que juntos construam os conceitos e propriedades referentes ao que encontraram. Esperamos que os estudantes consigam concluir que todo número par é divisível por 2 e estabeleçam relação entre as somas e as paridades.

Convém destacar que antes mesmo de internalizar, formalmente ou não, o que é o conjunto dos números naturais e a operação de multiplicação, o conjunto dos números pares e ímpares já é conhecido pelos estudantes. Eles aprendem a separar quantidades em dois grupos. Os números pares são os que representam as quantidades que conseguimos separar em dois subconjuntos iguais, enquanto ao separar em dois uma quantidade representada por um número ímpar sobra um. Outra definição utilizada para números pares é observar a unidade, quando a unidade de um número é $0, 2, 4, 6$ ou 8 ele é par, do contrário é ímpar.

No Capítulo 4, exploraremos como é definido um número par e outros aspectos relacionados a Matemática, que podem ser discutidos com os estudantes ao trabalhar divisibilidade por dois. Seguiremos agora para a próxima adaptação da dinâmica que irá explorar a divisibilidade por três.

3.5.2 Divisibilidade por três

Em relação às regras do jogo, a única mudança para a divisibilidade por 2 é que agora procuramos um valor do qual o 3 é divisor. Usando uma carta da mão e quantas da mesa forem necessárias o jogador deve obter um número divisível por três, se conseguir deve juntar as cartas que foram somadas e colocar no seu monte, se não for possível descarte uma carta na mesa. Ao terminar as cartas da mão ocorre nova distribuição, três para cada um, até que acabe o baralho.

A ideia dos registros, que acontecem no 4º momento, segue a mesma da seção anterior (Divisibilidade por dois). Caso a atividade esteja sendo trabalhada como apoio pedagógico, ou com o 6º ano, é pertinente solicitar o registro dos cálculos para que o professor consiga acompanhar e entender as dificuldades dos estudantes. O registro também permite que os próprios estudantes controlem o jogo, ou seja, consigam verificar se o colega está falando um valor coerente.

No 4º momento, o registro das cartas utilizadas nas rodadas que pontuaram, é fundamental para realização das análises. Seguimos a mesma ideia do item anterior em relação ao trabalho em grupo e sobre o formato que podem ser entregues os questionamentos.

Algumas questões que podem ser feitas para explorar o jogo são:

1. Quando a soma é divisível por 3?

2. Se tenho apenas duas cartas ímpares, posso afirmar que a soma sempre será divisível por 3?

2.1. E se forem duas cartas pares? O que podemos concluir?

3. Quais as cartas que posso somar com a de valor 6 para obter um valor divisível por 3? E divisível por 9?

4. Se a carta que tenho em mãos é ímpar, mas 3 não é divisor do seu valor, quais as possibilidades de conseguir pontuar duas cartas? E três cartas? Construa essas situações.

É possível explorar nossa sugestão de perguntas de diversas formas. A ideia é permitir que os estudantes realizem testes e apresentem suas colocações para a turma e juntos validem as colocações uns dos outros. Se o professor julgar adequado, pode estruturar uma Investigação Matemática partindo do jogo e dessas questões.

Essas dinâmicas envolvendo os critérios também podem ser usadas como exercícios de fixação. Esperamos que os estudantes consigam concluir que em relação a um número ser divisível por 3, a paridade não é importante e que estabeleçam novas relações subjacentes a esse tópico. Seguiremos agora para a próxima adaptação da dinâmica que irá explorar a divisibilidade por cinco.

3.5.3 Divisibilidade por cinco

Agora o objetivo é que a soma da carta da mão com as da mesa seja divisível por 5, o restante das regras não são alteradas. A ideia dos registros segue a mesma dos itens anteriores. Novamente reforçamos a importância do registro dos cálculos de divisão que podem ser utilizados até mesmo como instrumento avaliativo pelo professor.

Em relação aos questionamentos que permitem uma exploração do jogo, elencamos algumas sugestões:

1. Se tenho uma carta divisível por 5 quais as somas de valores das cartas da mesa será adequada para mim?
2. Quais cartas são divisíveis por 5?
3. Quais as formas de pegar apenas duas cartas se não tenho uma carta divisível por 5?
4. Crie situações em que o jogador conseguiu pegar 3 cartas numa jogada. É possível determinar um padrão?
5. É possível pegar mais de 4 cartas em apenas uma jogada? Cite exemplos.
6. É possível sem fazer conta afirmar que um número é divisível por 5 ou não? O que é necessário analisar?

Também podem ser feitas perguntas parecidas com as anteriores. Esperamos que ao discutir essas questões em grupo a turma consiga definir qual a característica de um número divisível por 5.

Essas possibilidades, no caso as três dinâmicas propostas para trabalhar divisor, podem ser exploradas cada uma, por equipes distintas, para não se tornar muito repetitivo, ou o professor pode usar esse jogo para fixar os critérios de divisão.

Na próxima seção realizaremos a adaptação do jogo escova para trabalhar divisão com números naturais.

3.6 DINÂMICA 4: DIVISÃO COM NÚMEROS NATURAIS

Nesta dinâmica, exploraremos a operação de divisão com os números naturais do 1 ao 10 e o reconhecimento dos números primos, sendo esses nossos objetos do conhecimento. Esse jogo pode ser utilizado tanto para o 6º ano quanto em turmas do Ensino Fundamental dos anos iniciais.

Serão exploradas as seguintes habilidades da BNCC:

> **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos mentais ou escritos, exatos com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos;
>
> **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecendo relações expressas pelos termos “é divisor de”, “é múltiplo de”;
>
> **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva. (Brasil, 2018, p. 301).

As três habilidades já foram trabalhadas em dinâmicas anteriores, neste jogo daremos ênfase a operação de divisão, aplicando os critérios de divisibilidade e o conceito de número primo. Nesse sentido, esse jogo pode ser utilizado para fixação de conteúdo ou para explorar esses conceitos, cabe ao docente realizar adequações para alinhar a atividade aos seus objetivos.

A quantidade de participantes e a maneira de entregar as cartas segue a mesma dos jogos anteriores. São 3 para cada participante e 4 cartas expostas na mesa. Terminadas as cartas, são distribuídas novamente três para cada um até que acabe o baralho. Utilize o baralho adaptado da Dinâmica 2 (seção 3.4).

Nessa dinâmica temos algumas regras diferentes. Para pontuar é necessário encontrar uma soma na mesa que seja divisível por uma das cartas da sua mão, a carta da mão não participa da soma.

A dinâmica do jogo segue a mesma, se não for possível, ou seja, se não há na mão uma carta cujo valor é divisor da soma de algumas cartas da mesa, é necessário descartar uma carta na mesa. Se houver uma soma na mesa que o valor da carta da mão é divisor, o jogador junta a sua soma e coloca no seu monte, juntamente com a carta divisora.

Neste jogo é importante o professor solicitar o registro dos cálculos de divisão, não apenas do jogador, mas também dos adversários para verificar a veracidade das contas. Esses cálculos podem ser feitos sem nenhum auxílio, é o que se espera dos estudantes deste ano ou posterior, dentro das habilidades estabelecidas pela BNCC.

No entanto, sabemos que dependendo da turma as operações não estão consolidadas e o jogo deve ser utilizado como um recurso para incentivar a retomada de conceitos e até mesmo dos algoritmos usuais. Cabe ao professor alinhar os seus objetivos com a proposta e verificar se é necessário um registro do cálculo no papel. Também é possível explorar o uso da calculadora para verificar as respostas.

Em relação às adições, que serão realizadas com as cartas da mesa, acreditamos ser importante incentivar o cálculo mental, ainda que seja necessário material de contagem, como tampinhas e outros recursos.

Quando os estudantes estiverem habituados às regras, encaminhando-se para o que denominamos 4º momento, sugerimos o registro das jogadas que tiveram sucesso, quais cartas usaram para somar e por qual carta foi dividido. Também é interessante registrar os valores da mesa que não foi possível pontuar. Neste caso, pode ser feito um registro tabelado com todos os valores possível nas rodadas que o jogador não teve sucesso. Os registros do 4º momento são fundamentais para análise no momento posterior (ler mais sobre os momentos do jogo, p. 20).

Depois do registro, é conveniente uma troca de grupos, assim aumentam-se os dados coletados facilitando a exploração. Elencamos as perguntas que julgamos pertinentes para analisar os conceitos já mencionados. Salientamos que, além da divisão em si e dos critérios de divisibilidade, que podem ser trabalhados como exercício de fixação, é possível explorar o conceito de número primo. Seguem algumas sugestões de questionamentos:

1. Qual carta era a melhor opção para se ter em mãos? Com suas palavras justifiquem porque consideram essa uma boa carta.

2. Tinham somas/valores que não eram possíveis de pontuar? Quais?

3. Quando era vantagem ter um 2 na mão?

3.1 Se tivesse um 2 na mesa, quais opções de carta na mão permitiam usar ele para pontuar sem somar com outras da mesa?

4. Quando tínhamos apenas a carta 5 na mesa, qual/quais carta(s) permitiam pontuar? (aqui modificar o valor para grupos distintos sempre colocando um número primo).

4.1. Existem outras cartas que têm a mesma restrição?

5. Se a soma na mesa fosse 13, era possível alguém levar todas as cartas? E se fosse 11? E 23?

5.1 Se sim, quais eram as cartas que a pessoa deveria ter na mão?

Espera-se que os estudantes identifiquem que o 1 é divisor de todos os números e que existem números que só tem dois divisores. Caso, já tenha sido trabalhado o conceito de números primos, que os estudantes reconheçam que esses números são os mais difíceis de pontuar, pois só tem dois divisores.

As questões pensadas servem tanto para reflexão do conteúdo abordado no jogo, como para introduzir conceitos. A maneira como serão exploradas com o grande grupo fica a critério do professor. É importante incentivar que os estudantes escrevam e testem hipóteses, para depois expor suas colocações para a turma e consolidar os conceitos, seja como reflexão de estratégias de jogo ou como questões exploratórias investigativas. Podendo ainda dar ênfase a Investigação Matemática (seção 2.2).

Vamos agora para última dinâmica ainda utilizando o jogo Escova, que irá abordar o conceito de múltiplo.

3.7 DINÂMICA 5: MÚLTIPLO DE UM NÚMERO NATURAL

Esta dinâmica tem como objeto de estudo a multiplicação com números naturais e o conceito de múltiplo. Nossa sugestão é que sejam trabalhados com os múltiplos do 2 ao 9, mas é possível explorar valores maiores, tornando o jogo mais complexo. Novamente, o público alvo é o 6º ano, mas pode ser utilizado em turmas do Ensino Fundamental dos anos iniciais e também em anos posteriores.

Serão exploradas as seguintes habilidades da BNCC:

> **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos mentais ou escritos, exatos com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos;
>
> **(EF06MA05)** Estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é fator de". (Brasil, 2018, p. 301).

As habilidades mencionadas já foram trabalhadas em dinâmicas anteriores. Neste jogo daremos ênfase ao conceito de múltiplo. Diferente dos demais, nossa ideia aqui é trabalhar o operacional e, portanto, não teremos questões a serem discutidas.

Esse jogo foi estruturado para ser utilizado posterior a explicação, para fixar conceitos. É possível trabalhar a relação expressa por: "é múltiplo de", ou simplesmente, a tabuada e o cálculo mental da adição e da multiplicação. Se o professor julgar pertinente, pode fazer reflexões sobre o jogo atrelando a Investigação Matemática e outras adequações para alinhar a atividade aos seus objetivos.

A dinâmica da distribuição das cartas segue a mesma: 3 para cada jogador, 4 dispostas na mesa, quando acabam as cartas da mão distribui mais três até acabar o baralho. Na mesa, as cartas só devem ser dispostas na primeira rodada (revise as regras em p. 31).

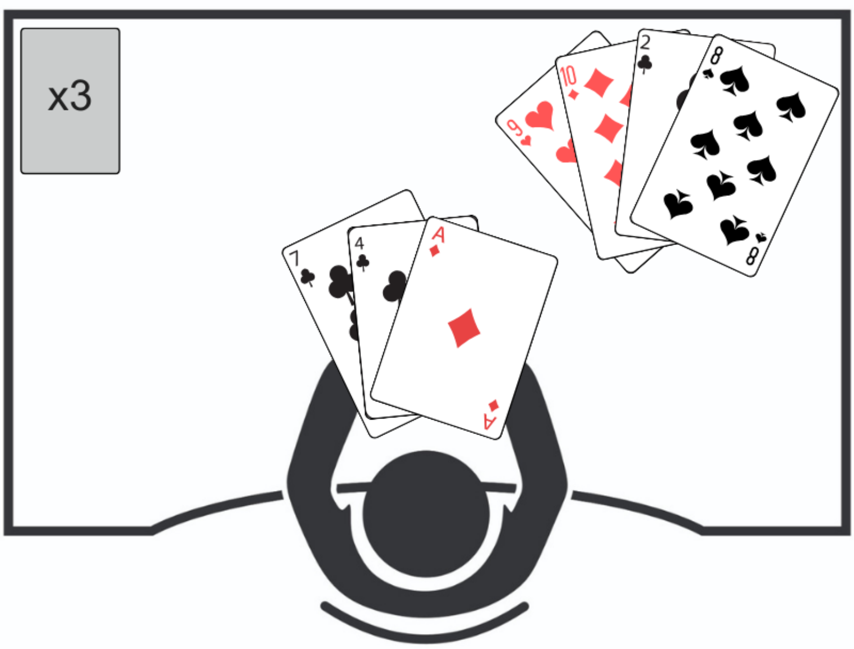
Antes de iniciar a partida deve-se definir qual múltiplo é o escolhido do jogo. Aconselhamos que seja um número de 2 a 9, quanto menor mais fluído fica o jogo. Essa escolha pode ser feita pelo professor, que pode dispor cada grupo de estudantes com um fator (número fixo) diferente, fazendo trocas de jogadores ao longo da aula, ou definido pelos estudantes em seus grupos, também é possível sortear um novo fator a cada nova partida (após contabilizar os pontos).

Após definirem o número que será explorado os múltiplos, é necessário entender qual a regra para pontuar, que nesta dinâmica difere-se das demais. O jogador deverá escolher uma carta da mão, multiplica-lá pelo fator escolhido para o jogo e o resultado, sendo o múltiplo deste fator fixo, deverá ser obtido somando as cartas da mesa. A carta da mão não participa da soma. Continua sendo possível utilizar quantas cartas da mesa forem necessárias, buscando sempre o maior número de cartas, uma vez que o vencedor é quem tem mais cartas.

É válido colocar sobre a mesa uma folha que indique qual o fator escolhido para o jogo, ou seja, qual o número que está sendo explorado o conjunto dos múltiplos. Por exemplo, ao trabalhar os múltiplos de 2, coloque uma folha indicando que ele deve multiplicar a carta da mão por 2, esse lembrete visual facilita a dinâmica. Dependendo do nível dos alunos pode ser utilizado uma tabuada auxiliar.

O registro das jogadas permite que o professor tenha um controle sobre o trabalho. Também é pertinente solicitar que o estudante comunique ao grupo qual o valor que pretende obter, facilitando a conferência das jogadas pelos pares. Na Figura 1 está sendo trabalhado os múltiplos de 3.

Figura 1 – Múltiplo de 3



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Neste caso, o estudante pode comunicar 7 vezes 3 igual a 21 que obtenho somando as cartas 10, 9, e 2. Outra escolha pertinente é a carta 4, para usá-la, o estudante deve comunicar 4 vezes 3 igual a 12 que obtenho somando as cartas 10 e 2.

Pensando em estratégia de jogo, a primeira escolha é mais vantajosa, pois além de obter mais pontos o jogador impede que o adversário pontue na próxima rodada, uma vez que sobra apenas a carta 8 que não é múltiplo de 3.

Ao longo do jogo continua sendo fundamental que o professor realize observações, solicite registros, faça indagações sobre as jogadas dos grupos, permitindo que ocorram reflexões sobre as decisões e sobre as propriedades das operações trabalhadas.

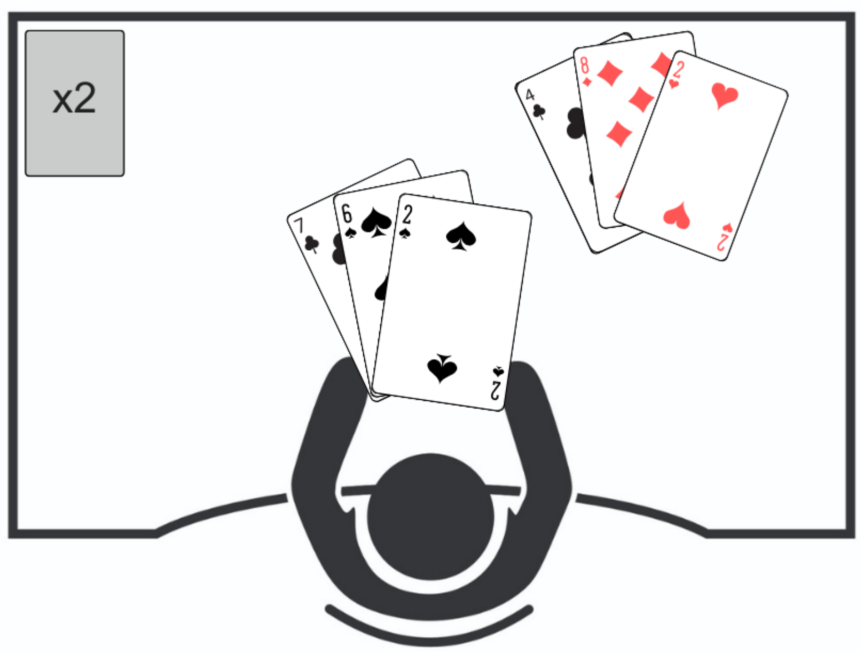
O professor pode questionar os estudantes se estão realizando a melhor jogada, se existe outro caminho. Tendo paciência no processo para não interferir nas jogadas. Essas questões devem ser realizadas depois que os estudantes já estiverem habituados ao jogo, no que denominamos 4º momento.

As análises também podem ser feitas numa etapa posterior, com o grande grupo, para não quebrar a fluidez do jogo. Neste caso, os estudantes podem explorar juntos qual é a melhorar estratégias e para isso ter registro das jogadas é fundamental.

Como mencionamos, essa dinâmica permite que sejam feitas reflexões e análises da matemática do jogo, no entanto, nossa ideia é que o professor utilize como um recurso para fixação de conteúdo e por isso não estruturamos questões. Contudo, para que o professor consiga visualizar situações que podem ser desencadeadas ao longo da dinâmica, analisaremos algumas possibilidades que permitem discutir estratégias buscando a melhor jogada que acabam explorando a Matemática,

Pensando no jogo trabalhando os múltiplos de 2, observe a jogada da Figura 2. Se tiver em mãos a carta 7, na mesa deve ter a soma 14, que é possível obter, ao juntar todas as cartas.

Figura 2 – Múltiplo de 2

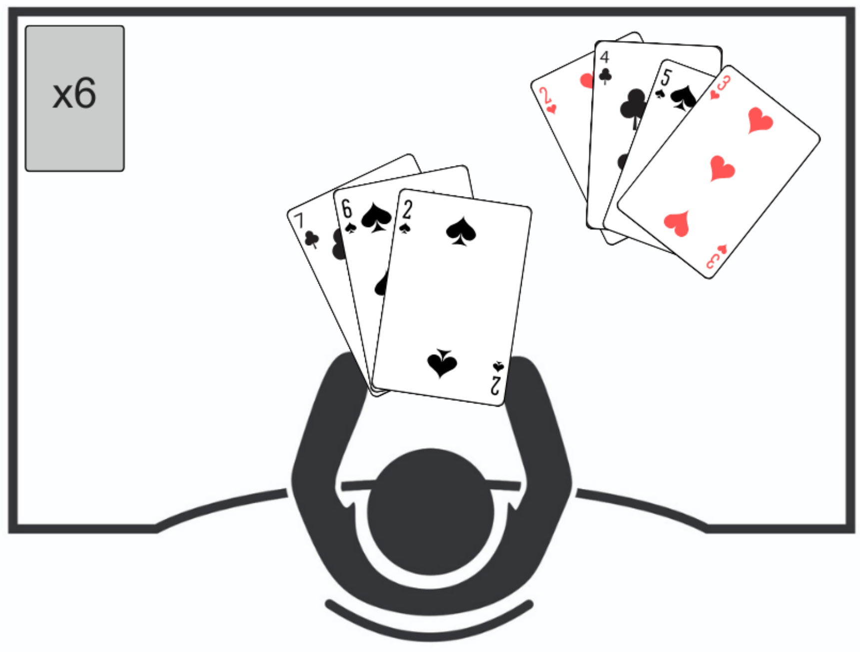


Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

Ainda na mesma análise da jogada, temos a opção de utilizar a carta 6 da mão, pois 6 vezes 2 resulta em 12 que pode ser obtido ao juntar as cartas e 4 e 8 da mesa. Pode-se concluir que a primeira jogada é mais vantajosa que a segunda, pois a pontuação é maior e não sobram cartas na mesa. Em relação à Figura 2, se trocarmos o fator para os múltiplos de 6, a única jogada possível seria utilizar a carta 2 da mão e 4 e 8 da mesa.

Observe a Figura 3, em que está sendo trabalhado os múltiplos de 6. O jogador precisaria usar as cartas 5 e 3 da mesa para obter 8, além da carta 4. Neste caso, a única carta da mão que permite pontuar continua sendo o 2.

Figura 3 – Múltiplo de 6



Fonte: Elaborado pelos autores, 2024

No próximo capítulo, encontra-se um material referente aos conceitos trabalhados nas dinâmicas, são definições matemáticas com comentários de exemplos de como esses conceitos podem aparecer durante a aplicação dos jogos.

4 NÚMEROS E OPERAÇÕES

Neste capítulo teceremos comentários sobre os conceitos matemáticos abordados no nosso produto educacional, com ênfase no conjunto dos números naturais. Utilizaremos como texto base os livros da coleção PROFMAT: Matemática Discreta, Morgado e Carvalho (2015), e Aritmética, Hefez (2016).

O professor, em sua prática, não precisa apresentar uma Matemática axiomática para os estudantes, mas esse conhecimento deve subsidiar seu trabalho, dando-lhe respaldo teórico em sua atividade docente. Acreditamos que tais conceitos já estão estruturados em sua formação (inicial ou continuada), no entanto, iremos enunciá-los ao longo deste capítulo fazendo um contraponto com as dinâmicas do Capítulo 3.

Os Números são um dos objetos principais de que se ocupa a Matemática, eles são objetos abstratos desenvolvidos pelo homem para servir como modelos que permitem contar e medir e, portanto, comparar quantidades de uma grandeza.

Utilizaremos como definição que número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade, quando se trata dos números naturais essa comparação é chamada contagem. Essa definição, embora não sejam suficiente para demonstrações, permite entender com clareza para que serve e a motivação da invenção dos números.

A medida em que a humanidade se civilizou, apoderou-se do modelo abstrato de contagem (um, dois, três, ...) conhecido hoje como números naturais ($\mathbb{N}$). O nosso sistema de numeração decimal, permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ e 9. Os primeiros números naturais têm nomes: o sucessor do número um chama-se “dois”, o sucessor de dois chama-se “três”. A partir de um certo ponto, esses nomes tornam-se muito complicados, tornando-se preferível designar os grandes números por sua representação decimal.

Os conjuntos constituem um meio auxiliar de entendimento dos números. Esse aperfeiçoamento, ao longo dos séculos, do conjunto dos números, foi provocado pelas necessidades do sistema social cada vez mais complexo atrelado ao desejo de formalizar a Matemática tendo como base a lógica.

Decorridos milênios, hoje é possível descrever precisamente o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) utilizando as sínteses feitas por Giuseppe Peano no início do século XX. Os axiomas de Peano, como são conhecidos, são os seguintes:

i) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural;

ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

iii) Existe um único número natural, denotado por 0 (zero), que não é sucessor de ninguém;

iv) Seja P um conjunto de números naturais. Se $0 \in P$ e se o sucessor de todo elemento de P ainda pertence a P, então $P = \mathbb{N}$.

Os números naturais constituem uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significado. Cada um desses objetos (um número natural) possui apenas um lugar determinado nesta sequência. Nenhuma outra propriedade lhe serve de definição. Todo número tem um único sucessor e, com exceção do zero, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor).

Existe uma discussão longa sobre o zero ser ou não natural, em virtude de que sua definição aconteceu após a construção dos números naturais. Tal questão, no entanto, vai além do que analisaremos em nosso trabalho. Optamos por tratar o zero como natural para que nossas explanações estejam relacionadas a prática da sala de aula.

O último dos axiomas de Peano (*iv*) é conhecido como o *axioma da indução* e é a base de demonstrações de proposições referentes aos números naturais (demonstrações por indução). Ele também pode ser enunciado sob forma de propriedades:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponha que:

i) $P(0)$ é válida e

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$, onde $n+1$ é o sucessor de n;

Conclusão: $P(n)$ é válida para todo n natural.

Adotaremos que o sucessor do número natural n é $n+1$, tal notação é utilizada em sala e nos livros de Matemática. Entender que sucessor é $n+1$ facilita a comparação de números inteiros em etapas posteriores.

Em geral, os estudantes conseguem exemplificar esse conceito, mas não conseguem determinar qual operação matemática está por trás das suas respostas. Cabe ao professor definir e retomar isso sempre que necessário.

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais. A adição, em que aos números $n, p \in \mathbb{N}$ faz correspondência a soma $n+p$ e, a multiplicação que lhes associa ao produto $n \cdot p$. Formalmente essas operações são definidas com auxílio do Axioma da Indução.

No conjunto dos naturais dizemos que essas operações são fechadas, pois ao realizá-las obtemos um número que pertence ao mesmo conjunto. Ambas operações serão exploradas em nosso trabalho nas próximas seções deste capítulo.

4.1 ADIÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

Definição 4.1. A adição é uma operação binária que associa cada par ordenado de números naturais com um número natural, chamado de soma dos números naturais do par ordenado dado.

Nos anos finais do Ensino Fundamental é retomada a adição, para que se consolide as ideias associadas a essa operação e também suas propriedades, sendo que estas serão úteis nos demais conjuntos numéricos.

Durante o uso do jogo escova, a soma pode ser explorada em vários momentos conforme as dinâmicas descritas no Capítulo 3. O objetivo é desenvolver o cálculo mental e também, posteriormente, explorar, nos momentos de Investigação Matemática, as propriedades da adição.

Propriedades da adição:

Propriedade associativa: Dados quaisquer números naturais a, b e c, temos que:

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

Propriedade comutativa: Dados a e b quaisquer números naturais,

$$a + b = b + a;$$

Lei do cancelamento: Dados a, b e c quaisquer números naturais de modo que

$$a + c = b + c \text{ então } a = b;$$

Elemento neutro: Para qualquer número natural a temos que $0 + a = a$, de modo que 0 é o elemento neutro da adição.

Quando estamos somando temos duas ideias associadas a essa operação, são elas a de acrescentar e a de juntar. Isso pode ser identificado quando o estudante conta seus pontos (juntando uma carta a outra), ou quando ele está analisando qual carta deve acrescentar àquela que tem na mão para resultar em 15. Nesse momento a ideia de quanto falta, associada a subtração, também pode ser explorada.

Observe alguns exemplos dentro das situações dos jogos:

Exemplo 4.1. Tenho um 9 na mão, quanto preciso para obter 15?

Temos nesta situação a ideia de acrescentar. Analisando com outra perspectiva temos:

Exemplo 4.2. Preciso de 15, tenho 9, quanto falta?

Neste caso, a ideia associada é da operação de subtração.

Também pode ser explorado as maneiras possíveis de obter o valor necessário para somar quinze.

Exemplo 4.3. Tendo como referência os exemplos anteriores, em que tenho a carta 9 em mãos, logo a solução trivial é procurar uma carta cujo valor seja 6. Suponha que na mesa tenha o 3 de copas, o 3 de espada, o 4 e o 2 de ouros, ou seja, a resposta automática seria não é possível pontuar, pois se tenho um 9 preciso de um 6. Por outro lado, ao juntar duas cartas $3 + 3$ ou $4 + 2$ é possível obter o mesmo valor.

O estudante está trabalhando as ideias associadas a operação sem que perceba, no entanto, é importante que o professor use estes verbos (juntar, acrescentar) para que nas situações problemas o aluno consiga identificar qual operação é necessária e qual atitude tomar.

Nessa análise, mencionada no Exemplo 4.3, o estudante estará validando o conceito de igualdade e das propriedades associativas e comutativas.

Espera-se que, ao longo das partidas, o estudante consiga visualizar que para obter 6 ele pode usar as somas $2 + 4$, $3 + 3$, $1 + 2 + 3$, entre outras opções, dependendo do que está na mesa naquela rodada. O mesmo vale, quando em outra rodada ele tem a carta 6 e constata que agora precisa do 9, podendo substituir o 9, somando duas ou mais cartas.

Essas percepções, que nos parecem triviais, não são automáticas para os estudantes. A formalização das propriedades pode ser feita em etapa posterior, quando forem discutir as jogadas, ou realizar uma análise investigativa, mas formalizar isso é importante.

Se o professor apenas expor essas propriedades na lousa, ou realizar a leitura, é provável que o estudante não conseguia fazer uma transposição entre aquilo que está sendo dito e o que acontece na hora do cálculo, mesmo que durante a explanação concorde e entenda o professor. No Capítulo 3, ao expor a dinâmica sobre adição (p. 31), elencamos algumas perguntas que podem facilitar a exploração das propriedades da adição.

Em todas as dinâmicas a adição será trabalhada, mas seu papel se modifica conforme os objetivos do jogo. Quando não é o objeto de estudo, sua exploração no jogo é um exercício de fixação, aplicando as propriedades e desenvolvendo o cálculo mental.

A operação de adição permite descrevermos a relação de ordem $m < n$.

4.1.1 Relação de ordem dos números naturais

Definição 4.2. Sejam $m,\ n \in \mathbb{N}$, sendo $m < n$, lê-se: m menor do que n, isso significa que existe algum $p \in \mathbb{N}$ e $p \neq 0$ tal que $n = m + p$.

Em outras palavras, n é o sucessor do sucessor, do sucessor, ..., do sucessor de m, iterado tantas vezes quanto for o valor de p.

Desta relação $m < n$ temos as seguintes propriedades:

Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas:

$$m = n, m < n \text{ ou } n < m.$$

Monotocidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$m + p < n + p.$$

E para $p > 0$:

$$m \cdot p < n \cdot p.$$

Boa-ordenação: Todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Em outras palavras, existe um elemento $x_0 \in X$ que é menor que os demais elementos em X, ou seja, $x_o < x, \forall\, x \in X$ com $x \neq x_0$

Apenas usando o baralho como instrumento é possível explorar as propriedades mencionadas, conforme proposto na Dinâmica 1. Quando trabalhamos as sequências do baralho é possível analisar diferentes estruturas. Um aspecto que pode ser trabalhado é comparar adições e multiplicações de conjuntos de números, conforme discutiremos a seguir:

Exemplo 4.4. Suponha dois conjuntos de cartas em que a soma das cartas do conjunto A é a mesma que a soma das cartas do conjunto B, analogamente, ao multiplicar os valores do conjunto A obtemos o mesmo resultado que no conjunto B. Considere que o conjunto A é formado pelas cartas 7 de copas, 5 de espadas, e 3 ouros, e o conjunto B pelas cartas 7 de espadas, 5 de copas, e 3 paus.

Podem ser feitas questionamentos utilizando o exemplo para explorar as propriedades da relação de ordem.

1. O que acontece se adicionarmos um 2 de ouro no conjunto de copas e 1 de ouro no conjunto das espadas?

1.1. Se somarmos as cartas em qual grupo o valor será maior?

1.2 É possível determinar sem fazer a soma? Como podemos garantir isso?

2. Se multiplicarmos o somatório das cartas de copas por 4 e de espadas por 3 é possível determinar onde teremos o maior número?

2.2 É possível determinar sem cálculos? Como podemos garantir isso?

Aqui o professor pode solicitar que os estudantes testem hipóteses, troquem as cartas por outros valores e registrem os cálculos para ver se suas afirmações sobre qual conjunto apresenta resultado maior está correto. Também é possível solicitar que coloquem as cartas dispostas em ordem e misturar naipes. Espera-se que os estudantes consigam, ainda que realizando contas, estipular que se $2 > 1$ e o valor das somas era igual, então onde colamos o 2 teremos o maior resultado e que usem a mesma ideia na multiplicação. Essas conclusões devem ser expostas para o grande grupo e formalizadas junto ao docente.

Ponderando sobre o conjunto dos Números Naturais, além da adição e suas propriedades, outros conceitos se fazem presentes nas nossas dinâmicas e serão definidos nas próximas seções.

4.2 MULTIPLICAÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

Definição 4.3. A multiplicação é uma operação binária que associa a cada par ordenado de números naturais, um número natural chamado produto dos números naturais do par ordenado (fatores).

Assim como a adição, a multiplicação também é retomada nos anos finais do Ensino Fundamental e muitos estudantes apresentam dificuldade de entender o processo dessa operação.

Quando exploramos a multiplicação no 6º ano junto ao conjunto dos naturais, espera-se que o estudante sistematize e consolide as ideias associadas a essa operação e também suas propriedades. As operações com números naturais são exploradas nos demais conjuntos numéricos e servem de base na aprendizagem de outros objetos associados aos números e a outras unidades temáticas, como a álgebra.

Durante o uso do jogo Escova, nas dinâmicas sobre múltiplos, divisores e a operação de divisão (p. 33, 37, 40), ainda que não seja diretamente, estamos trabalhando a multiplicação. A exploração, no jogo, desta operação tem aspecto de exercício de fixação, cujo objetivo é desenvolver o cálculo mental e aplicar as propriedades da multiplicação, reconhecendo padrões das sequências de múltiplos.

Embora no jogo não exploremos as ideias associadas a operação de multiplicar, dando ênfase mais a memorização, ressaltamos a necessidade de trabalhar essas noções com os estudantes para que a aprendizagem não fique restrita a forma mecânica e sem sentido.

Quando estamos multiplicando temos quatro ideias associadas a operação: soma de parcelas iguais, proporcionalidade, formação retangular e combinação. Explorar essas ideias e as propriedades facilita o entendimento de conceitos posteriores.

Elencamos, em nosso trabalho, as propriedades da multiplicação para serem discutidas em sala de aula, essa exploração pode acontecer após o jogo da adição, utilizando a metodologia que o professor julgar adequada numa linguagem que os estudantes entendam, procurando dar sentido as aplicações.

Propriedades da multiplicação para números naturais:

Elemento Neutro: Para qualquer número natural a temos que: $1 \cdot a = a$ e $a = 1 \cdot a$.

De modo que, 1 é chamado elemento neutro da multiplicação.

Propriedade distributiva: Dados quaisquer números naturais a, b e c, temos que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

e,

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Propriedade associativa: Dados a, b e c números naturas, temos que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Propriedade comutativa: Dados quaisquer números naturais a e b, temos que:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Lei do cancelamento: Dados quaisquer números naturais a, b e c com $a \neq 0$, temos que:

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$

Elemento nulo: Para todo $a \in \mathbb{N}$ temos que $0 \cdot a = 0$. Denominamos o zero o elemento nulo da multiplicação.

Consequência do Elemento Nulo: Dados quaisquer a e $b \in \mathbb{N}$, temos que:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Logo, não existem divisores de zero.

Para tratar dessas propriedades da multiplicação o professor pode utilizar a Dinâmica 1 e criar exemplos e questões, como as realizadas no Exemplo 4.4. A propriedade distributiva da multiplicação é utilizada na Dinâmica 3, mas para formalizá-la é importante criar questões que permitam que o estudante realize testes e estruture conjecturas, também é possível explorar essas questões nas Dinâmicas 4 e 5.

O ensino de Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, o que perpassa conhecer os números e suas relações, mas vai além, é necessário que o estudante desenvolva habilidades para reconhecer o significado de operar com números para obter outros, entendendo as operações e interpretando seus resultados em diversas situações.

Trabalharemos nas próximas seções com a divisibilidade, explorando os números primos, a divisão Euclidiana, os conjuntos dos múltiplos e divisores, conceitos explorados em nossas dinâmicas, tecendo comentários de relação com os jogos quando for pertinente.

4.3 DIVISIBILIDADE

Considerando o conjunto dos naturais, a divisão não é uma operação fechada, pois nem sempre é possível dividir nos números naturais, ou seja, existem casos de divisibilidade que não é possível obter um número natural. Reconhecer quando um número é divisível por outro e quem são os seus divisores é importante no processo de aprendizagem do estudante.

A divisão é retomada nos anos finais do Ensino Fundamental, sendo que nesta etapa devem ser abordadas as ideias associadas a essa operação, as propriedades e a relação entre essa operação e a multiplicação. Também é nos anos finais, em específico no 6º ano, que o estudante deve ser capaz de reconhecer padrões nos conjuntos de divisores e múltiplos, estabelecendo critérios que permitam definir se um número natural é ou não divisor de outro (Brasil, 2018).

Durante o uso do jogo Escova, a divisão será explorada em várias dinâmicas (p. 33, p. 37) e, dependendo da condução do professor podem servir para desenvolver o cálculo mental e o algoritmo da divisão, ou se desejar como atividade exploratória dos critérios de divisibilidade e do reconhecimento de padrões.

Quando estamos dividindo temos duas ideias associadas a essa operação, são elas a de dividir em partes iguais e a de quantas vezes cabe (medir). Essas ideias podem ser trabalhadas no jogo dos critérios de divisibilidade (Dinâmica 3, p. 33), no qual o estudante soma as cartas (uma da mão com uma ou mais da mesa) buscando um valor que divida por 2, por 3 ou por 5. Ao fazer essa busca, o estudante pode usar o conceito de quantas vezes cabe.

Caso já tenha o total, ele pode repartir a soma em partes iguais, o que também acontece na Dinâmica 4, quando ele tem somas dispostas na mesa e precisa analisar se uma das cartas da mão divide o montante. Em ambos os casos, as ideias se misturam, por depender do modo como o estudante irá fazer os cálculos, se por comparação (quantas vezes cabe) ou por separação (repartir em partes iguais).

O professor pode abordar essas ideias utilizando situações problemas estruturadas com as cartas do baralho, segue algumas sugestões:

1. Quando jogamos devemos repartir em partes iguais o total de cartas entre os jogadores, se for 20 cartas e 5 jogadores quantas cartas cada um receberá? (Aqui é

possível alterar os valores).

2. Sabendo que o total de cartas é 40, 4 cartas ficam sobre a mesa, e cada jogador recebe 3 quantos podem jogar?

3. Qual o máximo de cartas cada estudante pode receber e se ao invés das 40 cartas da escova tivéssemos o baralho completo (com 52 cartas)?

Fica a critério do docente utilizar ou não o jogo para explorar essas ideias associadas a operação, modificando as situações.

Antes de explorar outros aspectos da divisibilidade atrelados ao jogo, como as propriedades e os critérios de divisibilidade, é preciso analisarmos os conceitos de múltiplos e divisores, que estão associados a esta relação e a multiplicação.

4.3.1 Múltiplos e divisores

Definição 4.4. Sejam n, $m \in \mathbb{N}$, com $m \neq 0$, diremos que m divide n se, e somente se, existir um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m \cdot p$, ou seja, n for o produto do número natural m por algum número natural p. Indica-se $m \mid n$. Lê-se: m divide n. Neste caso, também dizemos que m é divisor de n ou que n é múltiplo de m

Os múltiplos e divisores de um número natural se relacionam da seguinte maneira:

- m é um divisor de n;
- m é um fator de n;
- n é um múltiplo de m;
- n é divisível por m e por p

Quando m não divide n, negamos a afirmação escrevendo: $m \nmid n$. Observe que caso m não seja divisor de n não é possível afirmar nada sobre n ser ou não divisor de m.

Notação: Para um número natural a, denotamos:

i) $D(a)$ é o conjunto dos divisores de a, $D(a) = \{b \in \mathbb{N}; b \mid a\}$;

ii) $M(a)$ o conjunto dos múltiplos de a, $M(a) = \{m \cdot a; m \in \mathbb{N}\}$.

O conceito de múltiplos está totalmente vinculado a multiplicação, pois para obtermos um múltiplo de um número a basta multiplicar esse número por qualquer número natural. Esse conceito é explorado na Dinâmica 5 (p. 40), que foi estruturada como exercício de fixação, mas é possível, por meio do registro dos alunos analisar questões como menor múltiplo comum entre números naturais.

Nas Dinâmicas 3 e 4 (p. 33, 37), além da operação da divisão, podem ser trabalhados algumas propriedades referentes a multiplicação e divisibilidade ao longo das discussões sobre o jogo.

Elencaremos propriedades referente a divisibilidade que são decorrentes da relação "divisor de", ou "divide":

i) Propriedade reflexiva: para qualquer número natural n com $n \neq 0$, temos que n divide n;

ii) Propriedade antissimétrica: Dados os números m e n naturais diferentes de zero, se m divide n e n divide m então $m = n$;

iii) 1 divide todo número natural: $1 \mid n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$;

iv) Todo número natural é divisor de zero: $d \mid 0, \ \forall \ d \in \mathbb{N}^*$;

Para os próximos itens considere: $a, \ b, \ c, \ d, \ p \in \mathbb{N}$.

v) Propriedade transitiva: sejam a e $b \in \mathbb{N}^*$, se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$;

vi) Seja $a \neq 0$, se $a \mid b$ então $a \mid q \cdot b \ \forall \ q \in \mathbb{N}$;

vii) Seja $a \neq 0$, se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (b + c)$;

viii) Propriedade do cancelamento: sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$, se $(ab) \mid (ac)$ então $b \mid c$;

ix) Propriedade de linearidade: seja $a \neq 0$ se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (db + pc)$.

Por ser reflexiva, antissimétrica e transitiva, a relação de divisividade no conjunto dos naturais com $n \neq 0$ é uma relação de ordem parcial.

Durante o jogo da divisão e nas reflexões sobre as atividades, espera-se que os estudantes observem que o "Ás", que vale um, é a melhor carta para se ter em mãos e que algumas cartas, ou somas de cartas, só possuem dois divisores, o 1 e o próprio valor da carta ou das somas de cartas e com o auxílio do professor consigam elencar:

i. O 1 é divisor de qualquer natural.

ii. Todo número é divisor de si mesmo.

Na Dinâmica 4 (p. 37), os estudantes podem obter somas que resultem em 11, ao somar, por exemplo $5 + 6$, $7 + 4$, entre outras variações. Em nossas sugestões relativas ao 5º momento desta dinâmica, elencamos que o professor instigue os grupos a analisar quais cartas permitem fazer uma escova, ou seja, levar todas as cartas da mesa.

Nesse caso, espera-se que eles observem que alguns números como 11, 13 só podem ser divisíveis por 1 e por ele mesmo e, portanto, apenas a carta de valor 1 levaria as demais, se for um valor menor: 2; 3; 5 e 7, teriam duas opções de cartas vantajosas.

Aqui entramos no conceito de números primos, esse conceito pode ter sido trabalho antes do jogo ou partindo do que se observa no jogo e das reflexões em grupo estabelecer a definição.

Definição 4.5. Um número natural n diferente de 0 e de 1 e que é divisível apenas por 1 e por si próprio é chamado **número primo**. Se denotarmos por p esses números, temos $D(p) = \{1,\ p\}$.

Um número natural $\mathbb{N}$ diferente de 0 e 1 que não é primo é chamado de **número composto**. Quer dizer, devem existir naturais n_1 e n_2 diferentes de n tal que, $n_1 \cdot n_2 = n$.

Entre as habilidades esperadas para o 6º ano está a reconhecer se um número é primo ou composto (Brasil, 2018). Uma das possibilidades para determinar se um número é divisível por outro é aplicar o algoritmo da divisão Euclidiana, pois esse é um método fácil e prático. A seguir estudaremos a divisão Euclidiana.

4.3.2 Divisão Euclidiana

A divisão Euclidiana é um algoritmo de divisão comumente utilizado em sala de aula por ser um processo prático para representação da divisão entre quaisquer dois números naturais, admitindo-se um resto também natural. Seu algoritmo pode ser explorado no 3º momento do jogo, em que os jogadores estarão testando as possibilidades e fazendo verificação das jogadas adversárias.

Estabelecemos anteriormente o conceito de divisor: dados dois números naturais a e b, com $a < b$, dizemos que b é divisível por a se, e somente se, existir um natural c tal que $b = a \cdot c$. O que acontece se não existir c? A divisão Euclidiana nos permite analisar essa situação por meio do resto.

Definição 4.6. Divisão Euclidiana: Sejam a e b dois números naturais com $b \neq 0$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = a \cdot q + r$ com $0 \leq r < a$. Neste caso, chamaremos:

b: dividendo;

a: divisor;

q: quociente;

r: resto.

Temos que a divide b se, e somente se, $r = 0$.

A divisão Euclidiana pode ser explorada tanto na Dinâmica 3 quanto na Dinâmica 5 (p. 31, 40). É importante que o estudante entenda e utilize esse algoritmo, no jogo os números trabalhados são pequenos, pois o maior valor é 10, o que permite trabalhar lacunas de aprendizagem. Por isso é sugerimos o registro dos cálculos.

Outra forma mais imediata de determinar se um número natural é divisível por outro, é observar certas características peculiares à estrutura dos números naturais no sistema decimal, e lhes aplicar alguns procedimentos de resultados imediatos. Está exploração é elencada na Dinâmica 3 (p. 33), em que são trabalhados os critérios de divisibilidade.

4.3.3 Critérios de divisibilidade

Ao longo do tempo, os matemáticos estabeleceram regras fundamentais que caracterizam os números naturais e permitem determinar com rapidez e praticidade se um número natural é divisível por outro, sem necessitar de procedimentos como a divisão Euclidiana. Essas regras são conhecidas como critérios de divisibilidade e serão descritas nesta seção.

Os critérios de divisibilidade serão explorados na Dinâmica 3 e podem ser aplicados nas Dinâmicas 4 e 5 (p. 33, 37, 40). Esperamos que o estudante, por meio das atividades exploratórias realizadas com as informações dos jogos, consiga fazer conjecturas sobre os critérios de divisibilidade e perceber que essa ferramenta facilita na resolução de cálculos envolvendo divisões.

Definição 4.7. Seja d um número natural não nulo, um **critério de divisibilidade** é uma condição C necessária e suficiente para um número natural ser divisível por d. Ou seja, um número natural n é divisível por d se, e somente se, a condição C é satisfeita.

Descreveremos em tópicos os critérios de divisibilidade explorados na Dinâmica 3, sendo eles por 2, 3 e 5, também optamos por descrever o critério de divisibilidade do 6, já que pode ser útil, tanto numa adaptação da Dinâmica 3 quanto nas Dinâmicas 4 e 5.

Os critérios são consequências da maneira como representamos usualmente os números naturais: utilizando o sistema decimal. Para apresentar os critérios de divisibilidade, consideremos um número natural $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, com $N \neq 0$, em que $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_n$ são algarismos, que no nosso sistema de numeração decimal podem ser $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$, ou 9.

4.3.3.1 Critério de divisibilidade por 2

Proposição 4.1. *Um número natural $A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ é divisível por 2 quando $a_0 = 0, 2, 4, 6$ ou 8, ou seja, um número natural é divisível por 2 quando seu algarismo da unidade é 0, 2, 4, 6 ou 8.*

Isso pode ser explicado pelo fato que

$$A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0,$$

pode ser escrito como:

$$A = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

As potências de 10 são múltiplos de 2 de modo que $2 \mid 10$, o que implica:

$$2 \mid a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

Logo, A será divisível por 2 se, e somente se, a_0 for divisível por 2, ou seja, se $a_0 \in \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$.

Definição 4.8. Dizemos que um número natural é denominado par se for divisível por 2. Caso contrário, dizemos que ele é ímpar.

Podemos ainda, considerar a divisão Euclidiana, para definir paridade, neste caso por definição temos:

Dado $a \in \mathbb{N}$, existem dois únicos números naturais k e r tais que $a = 2 \cdot k + r$ com $0 \leq r < 2$. Logo, existem duas possibilidades para o resto (r):

i) $r = 0$, assim $a = 2k$ e, portanto. a é par;

ii) $r = 1$, assim $a = 2k + 1$ e, portanto, a é ímpar.

Os termos par e ímpar surgem para o estudante antes mesmo de conhecer as operações de multiplicação e divisão. A concepção de par e ímpar é explorada atrelado a ideia de conjunto. Os números pares são aqueles que representam quantias que conseguimos separar (dividir) em dois subconjuntos de igual modo. Se nessa divisão sobram objetos, então o número é ímpar.

Quando trabalhamos o sistema de numeração decimal, com o conceito de unidade, dezena e centena, a definição de paridade ganha outro viés, é denominado par o número cuja unidade vale $0, 2, 4, 6$ ou 8, o que permite categorizar números maiores como par ou ímpar sem ter que dividir.

Acreditamos ser possível e relevante trazer para os estudantes a definição de paridade usando a divisão Euclidiana, o que pode ser explorado nas análises realizadas com as dinâmicas.

Durante o jogo dos critérios de divisibilidade (p. 33), o estudante além de observar que para ser divisível por 2 é preciso que o resultado obtido seja par, ele deve somar cartas. Nesse sentido, podem ser trabalhados aspectos da adição no que diz respeito a paridade. Esperamos que os estudantes por meio da reflexão e de investigação consigam realizar conjecturas próximas às propriedades descritas na sequência.

Propriedade da adição em relação à paridade:

i) A soma de dois números naturais de mesma paridade é par.

ii) A soma de dois números naturais de paridade oposta é ímpar.

Vamos analisar cada item:

i) Sejam a e b números naturais de mesma paridade:

1º caso: Consideramos a e b pares, o que significa que existem k e t naturais tais que $a = 2k$ e $b = 2t$. Portanto,

$$a + b = 2k + 2t = 2(k + t).$$

Seja $m \in \mathbb{N}$, tal que $m = k + t$. Temos que $a + b = 2m$. Então, pela Definição 4.8, $a + b$ é **par**.

2º caso: Consideramos agora a e b ímpares, o que significa que existem k e t naturais tais que:

$$a = 2k + 1 \text{ e } b = 2t + 1.$$

Assim,

$$a + b = 2k + 1 + 2t + 1 = 2k + 2t + 2 = 2(k + t + 1).$$

Consideramos $m \in \mathbb{N}$, tal que $m = k + t + 1$. Portanto $a + b = 2m$.

Concluímos, pela Definição 4.8, que, $a + b$ é igualmente, **par**.

ii) Consideremos agora a e b números naturais de paridades opostas.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a é par e b é ímpar.

Logo, existem k e t naturais tais que $a = 2k$ e $b = 2t + 1$ e, com isso temos:

$$a + b = 2k + 2t + 1 = 2(k + t) + 1.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m = k + t$. Logo,

$$a + b = 2m + 1.$$

Portanto, pela Definição 4.8, $a + b$ é **ímpar**.

Entender na prática essas propriedades, garante ao jogador mais agilidade. Vamos agora analisar o critério de divisibilidade por 3.

4.3.3.2 Critério de divisibilidade por 3

Proposição 4.2. *Um número natural $A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ será divisível por 3 se a soma dos dígitos $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ é divisível por 3, ou seja, A é divisível por* 3 *se a soma de seus algarismos é divisível por 3.*

Considerando que $A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ pode ser escrito como:

$$A = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

Quando dividimos as potências de 10 por 3 obtemos resto 1. Logo, cada potência de 10 pode ser escrita como:

$$10^k = 3q_k + 1 \text{ com } k > 0.$$

Deste modo podemos reescrever A,

$$A = a_0 + a_1 \cdot (3q_1 + 1) + a_2 \cdot (3q_2 + 1) + \cdots + a_n \cdot (3q_n + 1).$$

Colocando 3 em evidência obtemos:

$$A = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + 3 \cdot (a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots + a_n q_n).$$

Portanto, temos:

$$A = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + 3q.$$

Logo, $3 \mid N$ se, e somente se $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ é divisível por 3, isto é, se a soma dos valores absolutos dos algarismos de A for divisível por 3.

O critério de divisibilidade por 9 é semelhante a esse, ou seja, n será divisível por 9 se, e somente se a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Não esperamos que os estudantes realizem em suas análises conjecturas formais. É interessante notar que se o estudante souber os múltiplos de três, no jogo da divisibilidade (Dinâmica 3) ele precisará apenas somar as cartas, que já é a ação do jogo e estará utilizando o critério de divisibilidade. Esperamos que sejam estabelecidas relações sobre o conjunto dos números do qual 3 é divisor, ainda que de forma empírico, além de internalizar as propriedades, expandindo sua aplicação para valores maiores do que os explorados no jogo.

Vamos agora analisar o critério de divisibilidade por 5.

4.3.3.3 Critério de divisibilidade por 5

Proposição 4.3. *Um número natural $A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ será divisível por* 5 *quando $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$ ou seja, A é divisível por* 5 *se a unidade for* 0 *e* 5*.*

Como, $A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, é a representação decimal de A, temos que:

$$A = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

As potências de 10 são múltiplos de 5, de modo que $5 \mid 10$, o que implica:

$$5 \mid a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n.$$

Portanto, A será divisível por 5 se, e somente se, a_0 for divisível por 5, ou seja, se $a_0 \in \{0, 5\}$.

Novamente, retomando aos momentos do jogo, esperamos que ao observar seus registros o estudante seja capaz de afirmar que todo número que termina em 0 ou 5 e apenas esses números são divisíveis por 5.

Convém elucidar que dentro da Investigação Matemática, a depender das características da turma, é possível realizar e solicitar que os estudantes façam mais demonstrações. Em nossa proposta, ao analisar o jogo com as atividades exploratórias, não temos a pretensão de que sejam solicitadas demonstrações, no entanto, cabe ao professor analisar a viabilidade dessas demonstrações, tanto em sua conduta pedagógica quanto por parte dos estudantes.

Para finalizar, analisaremos o critério de divisibilidade por 6.

4.3.3.4 Critério de divisibilidade por 6

Proposição 4.4. *Um número natural* $A = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ *é divisível por* 6 *quando* $a_0 = 0, 2, 4, 6$ *ou* 8 *e a soma dos dígitos* $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ *é divisível por 3, ou seja, se, e somente se, for divisível, simultaneamente, por* 2 *e por* 3*.*

Observe que $2 \mid 6$ e $3 \mid 6$ então, se A é divisível por 6 sabemos (pela propriedade transitiva para a relação "divisor de", p. 53) que A é divisível por 2 e por 3. E, reciprocamente, se A é divisível por 2 e por 3, então A é divisível por 6, uma vez que $2 \cdot 3 = 6$ e 2 e 3 são primos.

Estabelecemos até aqui uma maneira prática de determinar se um número é divisível por $2, 3, 5$ e 6, no entanto, nas dinâmicas os estudantes estarão somando números, neste sentido é importante discutirmos algumas situações.

4.3.4 Divisibilidade e a adição

Vimos, no critério de divisibilidade por 2, que ao adicionamos dois números de mesma paridade obtemos um resultado par. Vamos estender essa propriedade para os demais naturais, tomando $n \in \mathbb{N}$ temos:

1º situação: Sejam a, b e n números naturais de modo que $n \mid a$ e $n \mid b$ então $n \mid a + b$.

Observe que pela definição de divisibilidade. existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$a = k_1 \cdot n \text{ e } b = k_2 \cdot n, \ .$$

Então:

$$a + b = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n = (k_1 + k_2) \cdot n.$$

Assumindo $k_1 + k_2 = q$ temos que: $a + b = q \cdot n$ e, portanto, $n \mid (a + b)$.

2º situação: Sejam a e b números naturais de modo que $n \mid a$ e $n \nmid b$ então $n \nmid a + b$.

Usando o algoritmo de Euclides e pela definição de divisibilidade conseguimos reescrever a e b, tais que:

$$a = k_1 \cdot n \text{ e } b = k_2 \cdot n + r \text{ com } r < n, \text{ e } k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, temos que:

$$a + b = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n + r = (k_1 + k_2) \cdot n + r,$$

sendo $k_1 + k_2 = q$ então $a + b = q \cdot n + r$, com $r < n$.

E, portanto, n não divide $(a + b)$.

3º situação: Sejam a e b números naturais não divisíveis por n. Pelo divisão Euclidiana conseguimos reescrever a e b, tais que $a = k_1 \cdot n + r_1$ com $r_1 < n$ e $b = k_2 \cdot n + r_2$ com $r_2 < n$. Neste caso, temos que:

$$a + b = k_1 \cdot n + r_1 + k_2 \cdot n + r_2 = (k_1 + k_2) \cdot n + r_1 + r_2.$$

Vamos analisar a soma dos restos. Temos 3 possibilidades:

1º caso: $r_1 + r_2 < n$;

2º caso: $r_1 + r_2 > n$;

3º caso: $r_1 + r_2 = n$.

No 1º e 2º caso temos que $n \nmid a + b$. Analisaremos o 3º caso.

Sendo

$$a + b = (k_1 + k_2) \cdot n + r_1 + r_2,$$

substituindo $r_1 + r_2 = n$, temos:

$$a + b = (k_1 + k_2) \cdot n + n.$$

Logo,

$$a + b = (k_1 + k_2 + 1) \cdot n,$$

assumindo $k_1 + k_2 + 1 = q$, obtemos:

$$a + b = q \cdot n.$$

O que nos permite concluir que quando a soma dos restos da divisão de dois números por n for igual a n então a soma destes dois números será divisível por n.

Sem perda de generalidade, ainda que tenhamos a soma de mais do que dois números, podemos determinar que a soma é divisível por n, se e somente se, a soma dos restos é divisível por n.

Esta análise pode ser utilizado nas Dinâmicas 4 e 5 (p.37, 40), pois embora tratem de divisão, é necessário realizar somas das cartas. Não esperamos que os estudantes observem isso em suas reflexões sobre os jogos, mas se o professor achar viável pode trazer essas discussões para o grupo, explorando o resto das divisões.

Para concluir nossas discussões matemáticas, analisaremos as possibilidades de cartas que podem ficar sobre a mesa em cada dinâmica.

4.4 DISCUSSÃO SOBRE AS CARTAS RESTANTES NA MESA

Tendo como base o jogo Escova, em nossas dinâmicas foram utilizadas cartas de 1 ao 10 de 4 naipes distintos de um baralho francês, totalizando 40 cartas. A soma destas cartas é dada por:

$$4 \cdot \sum_{n=1}^{10} n = 220. \tag{4.1}$$

Analisaremos agora, utilizando o total como referência, o que acontece em cada dinâmica. Lembrando que na Dinâmica 1 não foi utilizado o jogo, nela foi elencado possibilidades de trabalhar o baralho em sí, por isso iniciaremos nossa discussão com a Dinâmica 2, em que é explorado a adição.

4.4.1 Cartas restantes na Dinâmica 2

Nesta dinâmica seguimos as regras do jogo original, os jogadores retiram grupos de cartas cuja soma é 15. Em nossas colocações sobre o jogo original, discorremos que sempre que o jogo acaba (não tem mais cartas para distribuir) é possível verificar se há inconsistências nas somas, pois o valor da soma das cartas que restam na mesa será um múltiplo de 5. Vamos analisar essa afirmação, tomando como base Schmitt (2021).

Conforme vimos na Equação 4.1, a soma das cartas do jogo é 220 que não é múltiplo de 15. Temos que $15 \nmid 220$, logo, concluímos que não será possível ao final do jogo não sobrar cartas sobre a mesa. Podemos afirmar ainda que a menor soma possível é 10, pois:

$$220 = 15 \cdot 14 + 10.$$

Portanto, sobrará 10 na mesa quando houverem 14 grupos de somas 15. As outras possibilidades de restos são da forma $10 + 15k$, com $k \in \mathbb{N}^*$.

Observe ainda que $10 + 15k$ sempre será divisível por 5:

$$10 + 15k = 5 \cdot (2 + 3k).$$

Assim, podemos afirmar que sempre teremos uma soma que será múltiplo de 5.

Analisaremos agora a Dinâmica 3 que explora os critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5.

4.4.2 Cartas restantes na Dinâmica 3

Nesta dinâmica devemos obter somas (utilizando apenas uma carta da mão e quantas da mesa for necessário) que sejam divisíveis por 2, 3 ou 5. Assim como na descrição da dinâmica, analisaremos as cartas restantes para cada caso.

1º caso: divisibilidade por 2

Neste jogo, para pontuar se faz necessário retirar um grupo de cartas cuja soma é divisível por 2, ou seja, as somas podem ser representadas no formato $2k$ com $k \in \mathbb{N}^*$

Conforme vimos na Equação 4.1, a soma das cartas do jogo é 220, temos que $2 \mid 220$.

Ao longo das jogadas são realizadas retiradas sucessivos de múltiplos de 2, de modo que:

$$2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_3 \cdots + 2k_n + r = 220.$$

Em que $k_1,\ k_2 \cdots k_n \in \mathbb{N}^*$ e r representa a carta da mesa, ao subtrair de 220 um montante do tipo $2k$ obtemos outro montante que segue sendo par e assim sucessivamente, de modo que ou $r = 0$ ou r é par.

Portanto, para as cartas na mesa desta dinâmica temos duas opções ou não haverá cartas $r = 0$, ou, se houver, será um somatório par.

2º caso: divisibilidade por 3

Neste caso, os jogadores retiram grupos de cartas cuja soma é divisível por 3, ou seja, as somas podem ser representadas no formato:

$$3k \text{ com } k \in \mathbb{N}^*.$$

Sabemos, pela Equação 4.1, que a soma das cartas do jogo é 220. Temos que $3 \nmid 220$, e ainda:

$$220 = 3 \cdot 73 + 1.$$

Portanto, sempre sobrará alguma carta na mesa. Sendo o valor mínimo 1, ou seja, um Ás.

As outras possibilidades de restos são da forma $1 + 3k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, são os valores que ao dividirmos por 3 deixam resto 1.

3º caso: divisibilidade por 5

Aqui para pontuar se faz necessário retirar um grupo de cartas cuja soma é divisível por 5, ou seja, as somas podem ser representadas no formato $5k$ com $k \in \mathbb{N}^*$

Usando a Equação 4.1, sabemos que a soma das cartas do jogo é 220, temos que $5 \mid 220$ e, portanto, o 3º caso é semelhante ao 1º caso.

Ao longo das jogadas são realizadas retiradas sucessivos de múltiplos de 5, de modo que ao subtrair de 220 um montante do tipo $5k$ obtemos outro montante que segue sendo múltiplo de $5k$.

Concluímos então que ou não haverá cartas, ou a soma das cartas que sobram na mesa será um valor múltiplo de 5.

Analisaremos na sequência as somas das cartas restantes, nas dinâmicas em que a carta da mão não participa da conta.

4.4.3 Cartas restantes na Dinâmica 4

Na Dinâmica 4, a soma de um grupo de cartas da mesa deve ser divisível por uma das cartas da mão, e a carta não participa da soma. Aqui, sabemos que o Ás sempre irá tirar todas as cartas da mesa, mas as demais cartas dependem dos seus critérios de divisibilidade. Só podemos inferir que se o último a jogar tiver um Ás não vai sobrar carta, e se for o penúltimo pode sobrar qualquer valor n, com $n \in \mathbb{N}$ e $1 < n < 10$.

Qualquer outra carta tem possibilidades abrangentes, pois as cartas são retiradas em grupos distintos. Não há uma maneira prática de inferir qual valor irá ficar sobre a mesa.

4.4.4 Cartas restantes na Dinâmica 5

A Dinâmica 5 aborda os múltiplos, a carta da mão não participa da soma e o fator é fixo. Neste caso temos, n que é o fator fixo, do qual são gerados os múltiplos, e uma carta de valor x na mão. Quando pontuamos, tiramos a carta x da mão junto com as cartas da mesa cuja soma é do tipo $n \cdot x$. Deste modo, em cada jogada estamos tirando $(n+1) \cdot x$, ou seja, tiramos da mesa um múltiplo de $n+1$.

Nossa sugestão na dinâmica era explorar múltiplos menores que 10, vamos discutir as possibilidades de somas que podem restar na mesa para cada $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $1 < n < 10$.

Para $n = 2$, temos que as cartas são retiradas em grupos do tipo $3k$, logo, segue a mesma ideia exposta na subseção 4.4.2, no 2º caso: divisibilidade por 3. Portanto, sobrará na mesa um Ás, ou uma soma do tipo $3k + 1$.

Também já analisamos o que acontece para $n = 4$, em que as cartas são retiradas em grupos do tipo $5k$, subseção 4.4.2, no 3º caso: divisibilidade por 5. Sabemos que há duas possibilidades: não sobrar cartas, ou a soma ser múltiplo de 5.

Análogo ao que foi discutido nos casos $2k,\ 5k$ na subseção 4.4.2, no 1º e 3º caso, podemos definir o que acontece com $n = 3$, em que as cartas são retiradas em grupos do tipo $4k$. Como $4 \mid 220$, poderá não sobrar cartas na mesa ou a soma delas será um múltiplo de 4.

A mesma ideia é valida para $n = 9$, pois as cartas são retiradas em grupos do tipo $10k$. E, $10 \mid 220$. Portanto, poderá não sobrar cartas na mesa ou a soma das cartas restantes será um múltiplo de 10.

Para os demais casos, sempre teremos restos. É o que acontece para $5 \leq n \leq 8$ com $n \in \mathbb{N}$ em que as cartas são retiradas em grupos do tipo $6k,\ 7k,\ 8k$ e $9k$, respectivamente. Isto acontece porque 220, que é a soma das cartas do jogo, Equação 4.1, não é divisível por $6,\ 7,\ 8$ e 9. Analisaremos agora qual o valor mínimo das somas em cada caso e seu formato.

Quando $n = 5$, as cartas são retiradas em grupos de $6k$. Temos:

$$220 = 6 \cdot 36 + 4.$$

Podemos concluir que a soma mínima das cartas que ficam na mesa será 4. Nos demais casos, as somas serão do tipo $4 + 6k$, com $k \in \mathbb{N}$. Aqui podemos dizer que sempre vai sobrar um total múltiplo de 2, pois $4 + 6k = 2 \cdot (2 + 3k)$.

No caso em que $n = 6$, as cartas são retiradas em grupos do tipo $7k$. Temos:

$$220 = 7 \cdot 31 + 3.$$

Logo as cartas que ficarão sobre a mesa quando somadas serão do tipo $3 + 7k$, com $k \in \mathbb{N}$ e a soma mínima dessas cartas será 3.

Para $n = 7$, as cartas são retiradas em grupos do tipo $8k$. De modo que:

$$220 = 8 \cdot 27 + 4.$$

Logo, a soma mínima das cartas na mesa é igual a 4. Nos demais casos, as somas serão do tipo $4 + 8k$, com $k \in \mathbb{N}$. Podemos concluir ainda que sempre vai sobrar um total múltiplo de 4, pois:

$$4 + 8k = 4 \cdot (1 + 2k).$$

Quando $n = 8$, as cartas são retiradas em grupos do tipo $9k$. A soma mínima das cartas na mesa igual a 4. Nos demais casos, as somas serão do tipo $4 + 9k$, com $k \in \mathbb{N}$, uma vez que:

$$220 = 9k + 4.$$

Concluímos que como entre os números 2 e 10 apenas $2,\ 4,\ 5$ e 10 são divisores de 220 e são esses os únicos casos que podem não sobrar cartas na mesa, que no caso da Dinâmica 5, será quando o jogo for sobre o múltiplo de 3, 4 e 9.

Finalizamos nossa descrição dos conceitos matemáticos explorados em nosso produto educacional, no próximo capítulo iremos expor nossas considerações finais sobre os estudos realizados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo fez uso do jogo Escova, criando variações autorais por meio de dinâmicas, buscando explorar suas potencialidades e demonstrou a materialização de conhecimento curricular matemático. Procuramos enfatizar a unidade de Números trabalhados no Ensino Fundamental anos finais, em específico, objetos de conhecimentos do 6º ano.

Ao trabalhar com o jogo em sala de aula, é possível redefinir a percepção convencional sobre a Matemática, aproximando-a dos estudantes. O jogo e as reflexões relativas à Matemática promovem e constituem uma ambiência que mobiliza a troca, a construção coletiva de conhecimentos, a criatividade, a participação e o diálogo.

Nosso produto educacional é um ambiente online em que disponibilizamos as dinâmicas utilizando adaptações autorais do jogo Escova. Para cada novo jogo foram elencadas questões e reflexões que permitem ao professor desenvolver um trabalho de Investigação Matemática, permitindo que o estudante realize conjecturas, busque padrões e seja o protagonista de sua aprendizagem.

Esperamos que nosso material sirva de apoio ao professor em sala de aula e neste sentido que não se esgote aqui sua divulgação, temos a pretensão de expor esse jogo na Feira de Matemática, disseminando suas potencialidades para outros colegas.

A participação ativa do estudante na construção de aprendizagem matemática, tende a facilitar a compreensão dos conceitos e contribui para o desenvolvimento de habilidades essenciais. Essa mudança sobre a forma de conceber a aprendizagem torna o uso do jogo em sala de aula mais significativo, deixando de ser apenas elemento motivador.

Além disso, ao explorar o baralho como recurso cultural e o próprio jogo Escova, são trabalhados aspectos relacionados à cidadania, a ética, ao respeito, contribuindo para a construção de valores éticos e sociais. Nesse sentido, torna a formação dos estudantes mais completa e alinhada com os princípios da Base Nacional Comum Curricular.

Em relação à Matemática, acreditamos que as potencialidades deste jogo vão além do que foi exposto no trabalho. Em nossas leituras constatamos que podem ser explorados questões relativas aos números inteiros, o conceito de simétrico e a análise combinatória. Também, ao realizar as modificações e testes para elaborar as dinâmicas notamos que é possível explorar valor numérico de uma função. Convém refletir que não se pretende que todo o currículo de matemática seja lúdico, pois nem todos os conteúdos curriculares podem ser exemplificados por meio de jogos.

Indo além da utilização do jogo e atividades exploratórias, buscamos incentivar a Investigação Matemática como uma possibilidade para trabalhar conceitos matemáticos. Ressaltando sempre que é importante uma busca e um querer fazer diferente por parte dos docentes. Sabemos que as condições de trabalho docente (muitas horas de aula e pouco tempo para planejamento), as afinidades ou não com trabalhos lúdicos pelos estudantes (além das dificuldades), os tempos apertados para cumprimento do currículo impedem uma conduta de trabalho lúdico em todo o tempo. Por isso é importante haver um equilíbrio entre as diversas metodologias existentes. Neste sentido, evidenciamos ao longo das dinâmicas que o docente precisa alinhar seus objetivos com as ferramentas e as metodologias compatíveis com sua realidade, tendo como parâmetro que não existe solução pronta e nem mesmo algo que resolva todas as necessidades da educação.

Por isso, salientamos que as discussões sobre as metodologias da Educação Matemática não se esgotam aqui, esperamos que nossas indagações contribuam para despertar a curiosidade dos professores sobre o tema. Que a leitura desse trabalho desperte uma busca de outros olhares sobre o Ensino de Matemática, permitindo a construção de um entendimento cada vez mais qualificado sobre essas metodologias na busca por estratégias didáticas complementares.

REFERÊNCIAS

BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COPAG. **ESCOPA**. 2020. Disponível em: https://blog.copag.com.br/regras/escopa. Acesso em: 10 de maio de 2024.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. *et al.* Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, v. 4, n. 7, p. 5–10, 1990.

GAJKO, T. C. Uma investigação sobre o uso de jogos no ensino de números relativos. 2018.

GRANDO, R. C. O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática. 1995.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 239 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

GRANDO, R. C. Concepções quanto ao uso de jogos no ensino da matemática. **Revista de Educação Matemática, São Paulo**, v. 10, n. 12, p. 43–50, 2007.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - Coleção PROFMAT, 2ª edição, 2016.

MACCALI, L. Investigação matemática: possibilidade para o ensino da álgebra no ensino fundamental. **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática**, v. 19, 2015.

MIRANDA, M. I. Conceitos centrais da teoria de vygotsky e a prática pedagógica. **Ensino em**, 2005.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - Coleção PROFMAT, 2015.

NICOLA, L. **A Matemática do jogo escova**. 2024. Disponível em: https://sites.google.com/view/matematicadojogoescova. Acesso em: 30 de maio de 2024.

OLIVEIRA, S. G. As inovações tecnológicas na educação matemática e suas concepções. **REnCiMa. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática**, v. 11, n. 3, p. 126–140, 2020.

PEREIRA, S. S.; CHAGAS, F. A. O. Tecnologias na educação matemática: desafios da prática docente. **Itinerarius Reflectionis**, v. 12, n. 1, 2016.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. da; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, APM, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55–81, 2013.

PONTE, J. P. da *et al.* O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v. 7, n. 2, p. 41–70, 1998.

SCHMITT, R. B. G. O jogo escova: uma estratégia para as aulas de matemática no ensino médio. 2021.

SILVA, A. F. da; KODAMA, H. M. Y. Jogos no ensino da matemática. ii bienal da sociedade brasileira de matemática, ufba. **Recuperado de http://www. educadores. diaadia. pr. gov. br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Matiko. pdf**, 2004.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema: Ensino Fundamental: Jogos de Matemática de 6º a 9º ano**. [S.l.]: Porto Alegre: Artmed Editora, 2007. v. 2.