Mudança de dimensão: gesto intelectual essencial à aprendizagem da geometria segundo Raymond Duval

Org. Méricles Thadeu Moretti
Roberta Nara Sodré de Souza

Raymond Duval
Roberta Nara Sodré de Souza
Méricles Thadeu Moretti
Daiana Zanelato dos Anjos
Adalberto Cans
Adriano Moser

Ed. GPEEM/PPGECT/UFSC

Florianópolis

2025

SUMÁRIO

Mudança de dimensão: gesto intelectual essencial à aprendizagem da geometria segundo Raymond Duval

Edição GPEEM/PPGECT/UFSC
Florianópolis
2025

Organizadores:
Méricles Thadeu Moretti
Roberta Nara Sodré de Souza

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mudança de dimensão [livro eletrônico] : gesto intelectual essencial à aprendizagem da geometria segundo Raymond Duval / Raymond Duval...[et al.] ; organização Méricles Thadeu Moretti, Roberta Nara Sodré de Souza. -- Florianópolis, SC : Ed. dos Autores, 2025.
PDF

Outros autores: Roberta Nara Sodré de Souza, Méricles Thadeu Moretti, Daiana Zanelato do Anjos, Adalberto Cans, Adriano Moser.
Bibliografia.
ISBN 978-65-01-30699-5

1. Aprendizagem 2. Educação 3. Geometria - Estudo e ensino I. Duval, Raymond. II. Souza, Roberta Nara Sodré de. III. Moretti, Méricles Thadeu. IV. Anjos, Daiana Zanelato dos. V. Cans, Adalberto. VI. Moser, Adriano. VII. Moretti, Méricles Thadeu. VIII. Souza, Roberta Nara Sodré de.

25-248913 CDD-516.007

Índices para catálogo sistemático:

1. Geometria : Estudo e ensino 516.007

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415

Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

Capa: fotografia de uma calçada em Belém/Lisboa.

APRESENTAÇÃO

No Capítulo I, intitulado “INSTRUÇÕES DE USO: de ´O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!´ aos alunos em primeiro lugar, seus professores e educadores”, Raymond Duval retoma o texto “O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!” publicado em 2023, mas desta vez imprimindo, como o próprio título sugere, um olhar didático-pedagógico ao texto.

No Capítulo II, intitulado “As apreensões e as mudanças de dimensão na aprendizagem da geometria” de Roberta Nara Sodré de Souza e Méricles Thadeu Moretti, elementos teóricos importantes são abordados para a construção de conceitos geométricos considerando os seus diferentes aspectos semióticos e cognitivos, traz proposições fundamentais a serem consideradas pelo docente em escolhas didáticas no campo da educação matemática para os níveis de ensino Fundamental e Médio.

Adriano Moser, Adalberto Cans e Méricles Thadeu Moretti no Capítulo III intitulado “As rupturas conceituais que fluem da desconstrução dimensional cognitiva de objetos tridimensionais” analisam as rupturas conceituais que surgem durante o processo cognitivo da desconstrução dimensional de objetos tridimensionais, especialmente, quando representados em perspectiva. Ademais, sugerem alguns elementos semiocognitivos buscando explicar como a desconstrução dimensional opera na aprendizagem da Geometria Espacial.

O Capítulo IV, intitulado “A operação semiocognitiva de mudança de dimensão em Raymond Duval: uma linha do tempo” de Daiana Zanelato dos Anjos e Méricles Thadeu Moretti apresenta uma linha histórica que busca refletir, ao ponto que, analisa o desenvolvimento da ideia de operação semiocognitiva de mudança de dimensão em Raymond Duval.

Em anexo, o texto original em francês de Raymond Duval é apresentado.

Os autores

CAPÍTULO I

INSTRUÇÕES DE USO:
de “O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!” aos alunos em primeiro lugar, seus professores e educadores

Raymond Duval[I]

Trad. Méricles T. Moretti[II]

[I] Professor emérito da Universidade do Littoral Côte d´Opale (ULCO/Dunkerque).

[II] Prof. do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/UFSC. https://orcid.org/00000002-3710-9873.

INTRODUÇÃO

Para nos conscientizarmos de como OLHAR para VER o que é preciso ver em uma imagem, um desenho, uma pintura, uma figura geométrica euclidiana ou uma fotografia, precisamos COMPARÁ-LAS fazendo a nós mesmos duas perguntas:

Q.1 O que a gente reconhece à primeira vista?

Q.2 Quais contrastes permitem distinguir formas ou superfícies significativamente diferentes?

No verão de 2019, 600 guarda-chuvas multicoloridos, abertos e justapostos, cobriram a Place François Villon, em Aix-en-Provence, e foram fotografados por Méricles Thadeu Moretti (Figura 1(*Figura 1*)[1] :

[1] As indicações em itálico das figuras mencionadas são referências às figuras do texto em Duval (2023a, 2023b).

Figura 1 Foto dos guarda-chuvas na Place François Villon em Aix-en-Provence.

Fonte: *Figura 1* em Duval (2023a, 2023b).

O interesse dessa foto é que ela permite três comparações duas a duas entre os cinco tipos de representações bidimensionais seguintes:

Bi.1 Um quadro e uma figura geométrica euclidiana plana;

Bi.2 Representações visuais planas e a representação da terceira dimensão do espaço percebido;

Bi.3 Representações bidimensionais semióticas e os objetos físicos representados.

Além disso, ela nos permite comparar todas essas representações bidimensionais com os objetos reais com a profundidade do espaço que vemos, ou que poderíamos ter visto se estivéssemos lá no momento.

Na foto, a gente pode reconhecer várias coisas à primeira vista; podem ser distinguidas por sua forma, pelas linhas que as separam daquilo a que estão justapostos e por sua cor:

C.1 Os guarda-chuvas abertos;

C.2 As sombras dos guarda-chuvas no chão;

C.3 As cores dos guarda-chuvas;

C.4 As nervuras de cada guarda-chuva;

C.5 Os interstícios de luz entre as sombras na praça.

Para responder às perguntas Q.1 e Q.2 levantadas pelas comparações das representações bidimensionais Bi.1, Bi2 e Bi3, precisamos apenas observar qual dos quatro elementos C.1, C.2, C.3 e C.4 que compõe o conteúdo da foto destaca-se à primeira vista.

1. Bi.1 Um quadro e uma figura geométrica euclidiana plana

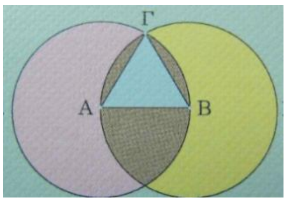
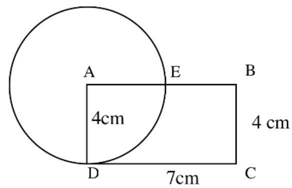
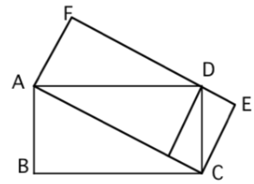
1.Q.1 O que a gente reconhece à primeira vista?

À primeira vista significa "instantaneamente", em um tempo menor do que dizer "um", ou seja, em menos de um segundo! Isso exclui a possibilidade de reconhecer duas ou mais coisas ao mesmo tempo; é o caso, por exemplo, quando algo salta aos olhos antes mesmo de você ter olhado para ele uma vez que a sua atenção está concentrada em outra coisa. Esse reconhecimento lateral depende da experiência anterior e, acima de tudo, dos interesses de cada indivíduo, que orientam sua curiosidade e o que ele faz espontaneamente por si mesmo. Essa variável é idiossincrática, não nos permite identificar os fatores que desencadeiam a consciência das diferentes formas de olhar para uma pintura, de uma figura plana euclidiana construída instrumentalmente.

1.Q.2 Quais são os contrastes que permitem distinguir formas ou superfícies significativamente diferentes?

Uma forma é um contorno fechado que se destaca de um fundo, que obviamente não deve ser confundido com o suporte material para a representação (uma parede, uma folha de papel ou uma tela eletrônica). Entretanto, em todas as representações bidimensionais desenhadas à mão livre ou usando uma ferramenta em um material, há sempre a possibilidade de mudança na distinção das formas que vemos à primeira vista. Por exemplo, na comparação da Figura 2 (*Figura 3 - seção 1.2* em Duval (2023a, 2023b)), as formas que reconhecemos na configuração euclidiana de quatro cores não são as mesmas, dependendo do que vemos:

Figura 2 Comparação de três configurações visuais 2D/2D.

		
C1. Configuração codificada pela associação de 3 dos 4 pontos de interseção para designar unidades figurais 1D ou 2D	**C2.** Configuração duplamente codificada (letras e valores numéricos), e associada a uma declaração de problema	**C3.** Configuração codificada associada a um enunciado do problema

Fonte: *Figura 3* em Duval (2023a, 2023b).

- o triângulo verde, em que um dos lados é o segmento que une os centros A e B dos círculos roxo e amarelo, que formam o fundo do qual o triângulo verde se destaca;

- o retângulo verde e o orifício triangular verde que o revela, eles formam o fundo contra o qual se destacam uma luneta violeta e uma amarela; e as extremidades dessas duas lúnulas delimitam dois segmentos circulares truncados pelo orifício triangular.

Em outras palavras, todas as figuras geométricas euclidianas:

- devem ser vistas em termos da relação entre a figura e o fundo do qual ela emerge, que não é a folha de papel ou tela;

- dão origem a uma mudança no reconhecimento de formas e superfícies que podem ser distinguidas à primeira vista.

1.Q.2.1 Especificidade de representações bidimensionais traçadas intencionalmente

Em ambos os casos, a propriedade que dá às representações bidimensionais seu poder semiocognitivo, seja desenhada à mão livre ou usando uma ferramenta, é que as formas podem ser PARCIALMENTE SOBREPOSTAS e não apenas justapostas.

Essas duas possibilidades de basculamento e a mesma possibilidade de sobreposição parcial são encontradas nas configurações euclidianas, embora não haja cores para distinguir as diferentes formas matematicamente relevantes. Por exemplo, para e que são as configurações que sobrepõem parcialmente um círculo e um retângulo:

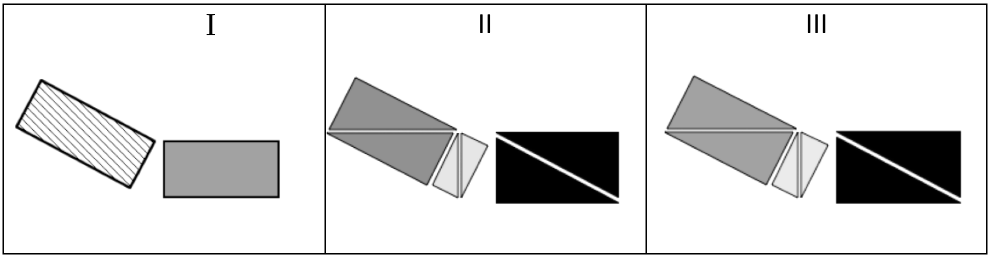
- Os dois lados do retângulo AD e AE, designados no enunciado do problema, são destacados do plano de fundo formado pelo círculo e pelo retângulo;

- Os dois raios da circunferência AD e AE são destacados do retângulo e da circunferência, ambos truncados pelo setor circular ADE, o que os torna o plano de fundo da figura.

A única diferença entre a configuração quadricolor euclidiana e essa figura, que é articulada com uma declaração de problema, se dá pelo fato de que as alternâncias se dão entre contornos de superfície e linhas lineares de segmentos.

A comparação dessas duas configurações da Figura 2 (*Figura 3*) nos leva a introduzir a noção semiocognitiva de UNIDADES FIGURAIS 2D E UNIDADES FIGURAIS 1D para analisar todas as representações bidimensionais desenhadas ou pintadas intencionalmente. O uso heurístico da terceira configuração da Figura 2 (*Figura 3*), que compreende apenas unidades figurais 2D, é obtido por meio de reconfigurações sucessivas, que exigem o uso de três cores para serem distinguidas e, portanto, vistas, Figura 3 (*Figura 8 - Seção 1.2, a configuração C3 em* Duval (2023a, 2023b)).

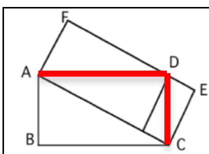
Figura 3 Decomposição e reconfiguração de duas unidades figurais 2D.



Fonte: *Figura 8* em Duval (2023a, 2023b).

A dificuldade do uso heurístico, Figura 4 (*Figura 7*), é que é necessário reconhecer o lado AB (unidade figural 1D) comum a dois retângulos (unidades figurais 2D) e o lado DE (unidade figural 1D) comum a dois retângulos (2D), um dos quais é o mesmo que o lado AB.

Figura 4 A condição semiocognitiva pré-requisitada.

	A dificuldade está em reconhecer AD e DC como diagonais e não apenas como lados de dois pequenos retângulos oblíquos.

Fonte: *Figura 7* em Duval (2023a, 2023b).

1.Q.2.2 Como as fotos, que são representações bidimensionais e não semióticas, diferem das tabelas e figuras geométricas?

Voltemos à foto dos 600 guarda-chuvas multicoloridos abertos (Figura 1 (*figura 1*)). Ao contrário das representações bidimensionais anteriores, as fotos não podem ser analisadas de acordo com a proporção figura/solo. As unidades figurais C.1, C.2, C.3, C.4 e C.5 estão todas justapostas e igualmente visíveis desde o início. Elas não revelam unidades figurais totalmente diferentes, dependendo de como inclinamos nosso olhar. Essa diferença radical decorre do fato de que são produzidas de forma automática e instantânea por uma câmera, que determina seu conteúdo (Figura 5 (*Figura 2*)) as passagens entre a foto e a realidade fotografada (Figura 6 (*Figura 12 - seção 1.5* em Duval (2023a, 2023b)). Há apenas uma mudança das unidades figurais mais próximas para aquelas que aparecem cada vez mais distantes, o que depende da configuração da lente da câmera.

E essa mudança para o distante vai até a indistinção de todas as unidades figurais justapostas.

Figura 5 Análise das transições entre a fotografia e a realidade fotografada.

A foto que é **uma representação**

Enquadramento
pelo sistema óptico

Os 600 guarda-chuvas que foram fotografados

$\frac{\text{2D imagem}}{\text{2D Suporte físico plano}}$

Produção automática
pelo aparelho

$\frac{\textbf{3D Guarda – chuvas abertos}}{\textbf{3D Uma praça ensolarada}}$

Fonte: *Figura 2* em Duval (2023a, 2023b).

Figura 6 Os três processos cognitivos para reconhecer o que vemos ou olhamos.

Objeto **3D/3D** Guarda-chuvas abertos cobrindo uma praça ensolarada	Produção automática mediada pelo aparelho	Conteúdo da imagem 2D sobre um suporte físico plano

VER

OLHAR

Todos os objetos materiais no espaço que envolve nosso próprio corpo

Transparência multissensorial contínua

Orientação reflexiva ou intencionalmente controlada em objetos $\frac{\text{1D, 2D ou 3D}}{\text{3D}}$ acima do horizonte ou antes do horizonte na superfície da Terra

VIZUALISAR

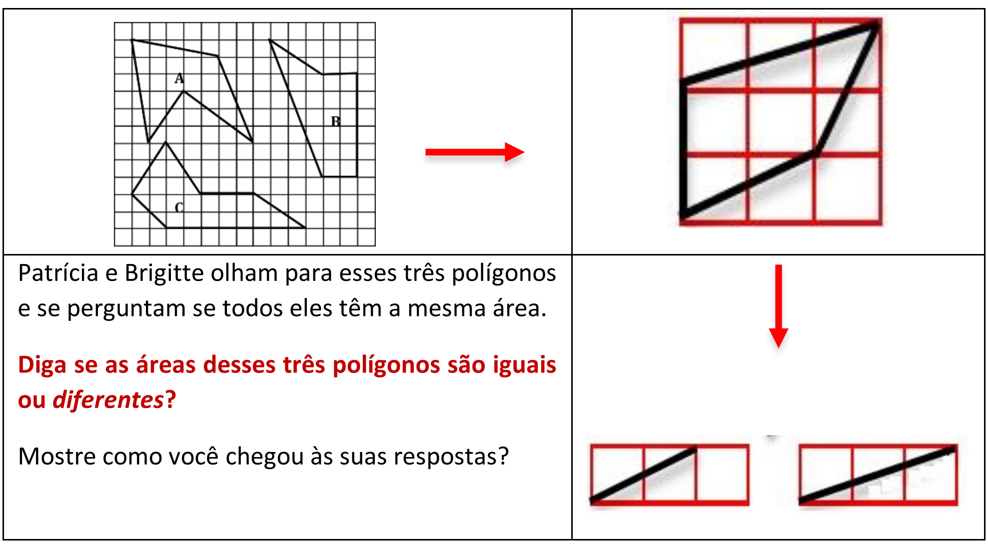
A configuração	**Produção**	CONTEÚDO	Relação de referência	
$\frac{2D}{2D}$ obtida respeitando as exigências de construção	**semiótica intencional**	da representação	(denotação) determinada por termos ou valores numéricos	OBJETO matemático **VISUALIZADO** **e** NOMEADO

Fonte: *Figura 12* em Duval (2023a, 2023b).

1. Q.2.3 O que acontece quando um fundo exterior à figura é introduzido?

O caso mais simples acontece quando introduzimos uma grade para calcular a área de qualquer polígono contando o número de casas da grade, Figura 7 (*Figura 9 - Seção 1.3* em Duval (2023a, 2023b)). Assim, para comparar as áreas de polígonos que incluem o mesmo quadrilátero irregular, precisamos decompor seus lados em três diagonais (1D) de duas casas justapostas (2D) e uma (1D) de três casas justapostas (2D). Mas essa abordagem aparentemente simples esbarra em um grande obstáculo visual. A grade exige o reconhecimento visual e o processamento de cada um das casas e de sua diagonal considerados uma a uma, e obscurece totalmente o reconhecimento visual de todas as possíveis unidades figurais 1D e 2D possíveis.

Figura 7 O que você precisa reconhecer em um relance.



Fonte: *Figura 9* em Duval (2023a, 2023b).

O caso mais complexo, mas que se tornou uma das ferramentas de visualização matemática, é o das representações gráficas cartesianas. Aqui, obviamente, temos o suporte de uma grade plana, mas a introdução de dois eixos graduados orientados significa que cada ponto de interseção pode ser associado a um par de dois números. No entanto, isso também leva a uma ruptura cognitiva entre uma compreensão local centrada inteiramente nesses pares e a compreensão qualitativa geral de linhas retas, curvas e todas as unidades figurais 2D (círculo, elipse etc.) que permitem que sejam construídas a partir de equações. A maioria dos alunos não ultrapassa o limiar dessa ruptura cognitiva, e o poder heurístico da visualização de equações de primeiro e segundo graus lhes escapa.

2. Bi.2 Como uma representação bidimensional plana pode visualizar a terceira dimensão do espaço percebido?

Na foto da Place François Villon (Figura 1 (*Figura 1*)), a terceira dimensão pode ser vista no tamanho cada vez menor dos guarda-chuvas, nas sombras no chão e nas lacunas de luz entre as sombras e as nervuras dos guarda-chuvas. Todas essas unidades figurais 2D e 1D diminuem rapidamente até se tornarem indistinguíveis. A gente não consegue nem mesmo contar o número de guarda-chuvas que vê. A profundidade de campo de uma fotografia depende da configuração da lente da câmera, que é o ponto de vista da área coberta pelos guarda-chuvas abertos.

Figura 8 A terceira dimensão: percepção, representação em perspectiva e homoteticidade de linhas que se cruzam[2].

1. Percepção da terceira dimensão do espaço

2. A Trindade, afresco na igreja de Santa Maria Novella em Florença. Masaccio, 1425-1426

3. Razões homotéticas de linhas retas concorrentes.[3]

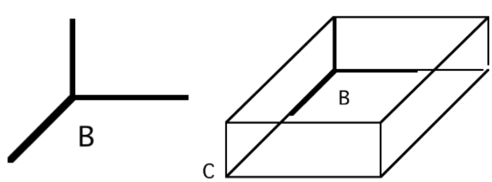
Fonte: *Figura 11* em Duval (2023a, 2023b).

[2] DUVAL (2018, p. 236).
[3] Fig. 7 em DUVAL (1995, p. 153); LEMONIDIS (1990, p. 58-59).

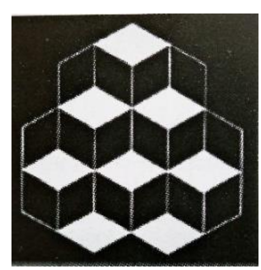
2. Bi.2. 1 Qual é a relação entre a figura e o fundo em representações bidimensionais planas da terceira dimensão?

Entre as representações da terceira dimensão por meio da construção de perspectiva e fotografias, há os desenhos do espaço percebido, Figura 8 (*Figura 11*). A terceira dimensão é introduzida por uma linha do horizonte que contrasta as formas 2D altamente esquematizadas dos objetos no céu com as formas 2D igualmente esquematizadas dos objetos na superfície da Terra. Nessa representação, a proximidade e a distância dos objetos representados podem ser vistas pela redução do tamanho das unidades figurais 2D, como nas fotografias. Com a introdução da terceira dimensão, a relação entre a figura e o fundo do qual ela se destaca se baseia em oposições entre frente e verso, perto e longe, côncavo e convexo, saliente ou retraído, e não mais entre contornos de superfície 2D e segmentos lineares 1D. Dessas três oposições, a que permite as mudanças mais surpreendentes no olhar é aquela entre ver côncavo/convexo ou saliente/reentrante. Isso se deve ao fato de que ela ocorre entre unidades figurais da mesma dimensão, independentemente do número de dimensões, Figura 9 (*Figura 10*).

Figura 9 A ambiguidade dos desenhos e a mudança do olhar.



Figuras transparentes: alternam o número de dimensões. A parte superior da caixa e o lado CB que estão totalmente visíveis ou a face interior e o lado CB?



Figuras em preto e branco ou em cores: nenhuma alteração no número de dimensões

(D'Amore, 2015, p. 441).

Fonte: *Figura 10* em Duval (2023a, 2023b).

Por exemplo, a trifurcação 1D no ponto B pode ser vista em relevo ou rebaixada. Ela pode ser vista na parte superior como um vértice do paralelepípedo 3D, e a caixa sem tampa que ela representa pode ser vista em relevo (a caixa é então vista de baixo) ou rebaixada (a caixa é então vista de cima). A terceira configuração de duas cores justapõe cubos 3D e compreende 10 trifurcações 1D que podem ser vistas em relevo ou rebaixadas. Se o ponto B, que não está marcado, for visto em relevo, há 5 cubos visíveis e sobrepostos como se formassem uma pirâmide.

Mudar nosso olhar de uma forma de ver para outra não é fácil. Primeiro, é preciso manter a representação por um determinado período. E como há uma maneira de ver que se impõe mais rapidamente do que a outra, especialmente para a justaposição de cubos, é necessário fazer exercícios começando com a figura do meio para praticar.

2. Bi.2. 2 O uso de papel como suporte e representações geométricas bidimensionais

As múltiplas unidades figurais que compõem as configurações geométricas não devem ser confundidas com o suporte de papel em que são desenhadas. Entretanto, esse suporte material é usado em muitas atividades de dobradura, que implicitamente respeitam numerosas atividades lúdicas de dobradura.

Outro auxílio didático mais interessante é o papel vegetal, que pode ser virado ou dobrado. Ele é usado para construir um ponto que seja simétrico com outro ponto em relação a um eixo de simetria axial. O que é essencial de um ponto de vista estritamente cognitivo é que o gesto de virar o papel vegetal (2D), que é feito no espaço físico (3D), não foi percebido pelos alunos. Eles se prenderam ao resultado observado. Essas observações destacaram uma lei cognitiva fundamental para a compreensão e, portanto, para o aprendizado da matemática. O que vemos em uma representação geométrica bidimensional só faz sentido se estivermos cientes dos gestos ou operações usados para obtê-la. O que vemos em uma representação geométrica bidimensional só faz sentido se estivermos cientes dos gestos ou operações que permitem sua obtenção. Por exemplo, o uso de um papel vegetal facilita o deslocamento de nosso olhar na terceira configuração da Figura 9 (*Figura 10*), para inverter as oposições frente/verso e levantado/rebaixado das 24 unidades figurais 2D que contém.

Para evitar qualquer confusão no uso da notação 3D para duas coisas diferentes, a terceira dimensão em representações bidimensionais planas é denominada **2D/3D**, enquanto os gestos e as operações no espaço físico são denominados **3D/3D**. Além disso, podemos reconhecer a forma de todos os objetos físicos 3D/3D, por exemplo, modelos de cubos, esferas e pirâmides com nossas mãos, sem vê-los, apenas tocando-os.

3. Bi.3 Qual é a relação entre as representações semióticas bidimensionais e os objetos físicos representados?

O poder do registro da organização bidimensional das unidades figurais 1D, 2D e 3D é que, como o registro das línguas faladas, ele pode criar representações semióticas independentemente da realidade ou de qualquer verossimilhança, Figura 10 (*Figura 14 - Seção II* em Duval (2023a, 2023b))

Figura 10 Os quatro tipos de registros que produzem representações gráficas[4].

	Registros **DISCURSIVOS.** Linearidade **das expressões que são unidades de significado**	Registros **NÃO DISCURSIVOS**: Compreensão de uma organização bidimensional de unidades figurais 1D, 2D ou 3D
Registros **multifuncionais**: o tratamento é **NÃO ALGORÍTMIZÁVEL**	**I. LÍNGUAS FALADAS: três operações hierarquicamente incluídas** (nomeação de objetos, enunciação e raciocínio) Dois modos de produção: ***a fala e a escrita***	**II. Configuração geométrica**: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológica, desconstrução dimensional) **ICÔNICO**: desenho, esboço
Registros **monofuncional**: o processamento é **ALGORITMIZÁVEL**	**III. ESCRITA SIMBÓLICA** (sistemas de numeração, escrita algébrica, linguagens formais). **Operações de substituição ilimitadas.** Modo de produção: **escrita**	**IV. GRÁFICOS** **ESQUEMAS:** Junções entre pontos, marcadas por **setas** **GRÁFICOS CARTESIANOS:** Três operações (zoom, interpolação e mudança de eixo)

Fonte: *Figura 14* em Duval (2023a, 2023b).

Objetos fisicamente impossíveis, como o triângulo de Penrose ou as escadas de Escher, são os exemplos mais famosos. As representações de

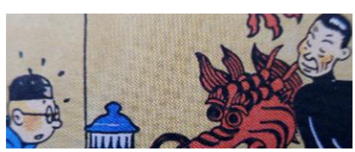
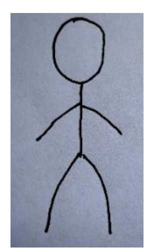
[4] Fig. 4.6 em Duval (2017, p. 85).

objetos fisicamente impossíveis também são independentes de qualquer consideração de tamanho, ao contrário das ilusões perceptivas, como a ilusão de Müller-Lyer do tamanho percebido de um segmento ou a ilusão de Delboeuf de dois círculos concêntricos. Longe de serem objeções à confiabilidade das figuras geométricas, a visualização de objetos fisicamente impossíveis revela a contribuição heurística de explorar e modelar o registro da organização bidimensional de unidades figurais. A questão da relação entre as representações semióticas bidimensionais e os objetos físicos representados é a semelhança ou não semelhança.

3. Bi.3.1 Graus de iconicidade

As representações de objetos reais (3D/3D) mudam completamente dependendo de onde você olha para eles e os pinta, desenha ou fotografa: de frente, de perfil, em um ângulo, de cima, de baixo... Isso permite definir um critério de semelhança entre a figura (2D) e o objeto real (3D/3D) representado, observando separadamente o contorno fechado da figura e as características significativas dentro do contorno fechado. Podemos então distinguir três graus de semelhança ou iconicidade, dependendo se o contorno é fechado ou suas características internas mantêm ou não essa semelhança, Figura 11 (*Figura 21 - Seção III.2 O critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade* em Duval (2023a, 2023b)):

Figura 11 Graus de iconicidade no reconhecimento visual de faces.

		
A. Representação figural: Retrato de Ginevra de Benci (1474?)	B. Representação esquemática: Rosto de perfil e rosto de frente (1936 em preto, 1946 em cores)	C. Representação simbólica

Fonte: *Figura 21* em Duval (2023a, 2023b) representação figural, representação esquemática e representação simbólica, que também podem ser chamadas de representação figural, representação semifigural e representação esquemática.

3. Bi.3.2 Os três processos cognitivos subjacentes a todas as representações bidimensionais semióticas ou não semióticas

A relação causal entre objetos físicos 3D/3D e suas múltiplas representações 2D possíveis é o ponto crucial na análise de tudo o que vemos e reconhecemos quase instantaneamente. E aqui precisamos distinguir três processos cognitivos, e não apenas dois (Figura 6 (*Figura 12 - Seção I.5 Decomposição e criatividade das representações semióticas em comparação com as representações não semióticas* em Duval (2023a, 2023b)). Há, é claro, a diferença radical entre a foto: Figura 5 (*Figura 2 - Análise das passagens entre a foto e a realidade fotografada* em Duval (2023a, 2023b)) e o poder heurístico de criar representações bidimensionais que são independentes da realidade (Figura 6 (*Figura 12*)), o primeiro e o terceiro processos). E há também a transparência multissensorial de nosso corpo para tudo o que está próximo ou distante, por meio da qual estamos constantemente presentes para o que está próximo ou distante: (Figura 6 (*Figura 12*, *o segundo processo* em Duval (2023a, 2023b)).

O primeiro obstáculo à compreensão da geometria é que esses três processos de funcionamento cognitivo não são diferenciados no ensino da geometria para alunos de 6 a 16 anos. Os currículos são organizados como se ver e manipular fossem suficientes para adquirir conhecimento e, em seguida, ser capaz de reconhecer quando e como usá-lo.

4. Como se faz a correspondência entre as unidades discursivas de sentido de um enunciado e as unidades figurais designadas em um enunciado?

O desafio didático dessa pergunta diz respeito à oposição cognitiva fundamental entre o que as figuras geométricas visualizam e o vocabulário referente às propriedades e aos objetos geométricos. É necessário DIZER PARA VER o que é matematicamente pertinente em uma definição, teorema ou em um enunciado de problema? Ou A GENTE PODE ENTENDER uma definição ou um enunciado de problema SE NÃO VER a que ele se refere em termos de unidades figurais 1D, 2D ou 3D?

Três comparações entre as representações produzidas pelos dois registros multifuncionais e não algoritmizáveis (Figura 12 (*Figura 17 - Seção II* em Duval (2023a, 2023b)) fornecem algumas respostas a essas duas perguntas).

4.1 Classificação do vocabulário de acordo com o número de dimensões das unidades figurais

Todos os termos do vocabulário geométrico básico são caracterizados pelo número de dimensões das unidades figurais que eles nomeiam: Figura 12 (*Figura 17 - Seção II.2* em Duval 2023a, 2023b)).

Elas são classificadas de acordo com as unidades figurais 2D/2D, 1D/2D e 0D/2D, que formam a margem vertical da tabela. As propriedades, que são sempre termos de relacionamento entre duas unidades figurais, dividem-se em dois tipos:

- Aquelas que caracterizam uma unidade figural 2D, na qual se opõem a outras propriedades do mesmo tipo;

- Aquelas que são independentes de qualquer unidade figurais 2D, embora possam caracterizá-las.

As setas na margem vertical indicam unidades figurais que se fundem visualmente em uma unidade figural de um número maior de dimensões. As setas entre duas caixas na parte interna da tabela indicam sentenças que podem ser formuladas pegando-se um termo de cada uma das duas caixas e ligando-as a um verbo (“ser”, “pertencer”).

Figura 12 Classificação do vocabulário geométrico básico.[5]

VISUALIZAÇÃO	OBJETOS FIGURAIS	PROPRIEDADES **relação entre DUAS unidades figurais 1D**	
		pertencentes a uma unidade figural 2D	**independente de pertencer a uma unidade 2D**
Unidades figurais 2D instantaneamente reconhecíveis (figuras típicas)	Quadrado, triângulo, paralelogramo, círculo, ângulo	Regular, convexo, côncavo, n lados, isósceles, equilátero, retângulo, agudo, obtuso, reto	Simetria axial Simetria central
Unidades figurais 1D mescladas perceptualmente em unidades 2D	Reta, segmento, lado, diagonal, raio, corda, curva, arco		Secante, paralela, Perpendicular, tangente
Unidades figurais 0D identificável, ou somente codificável em uma unidade 1D	Pontos **notáveis**: interseção, vértice, centro. Pontos **implícitos** que não podem ser vistos		Simetria

Fonte: *Figura 17* em Duval (2023a, 2023b).

4.2 a Desconstrução dimensional de unidades figurais reconhecidas

A desconstrução dimensional de formas 2D/2D ou 3D/2D é um processo cognitivo subjacente à percepção visual que é o oposto do indicado pelas setas descendentes na coluna da direita da Figura 13 (*Figura 13*). Portanto, vai contra a visualização matemática, que é indicada pelas setas ascendentes na coluna da esquerda. A descontração dimensional envolve a divisão das figuras 3D/2D em três faces 2D/2D visíveis... e, em seguida, a divisão das unidades figurativas 2D/2D nas linhas retas subjacentes a cada lado do polígono e das unidades figurais 1D/2D nos pontos de interseção, que

[5] Duval (2015, p. 164).

são os vértices dos polígonos. Isso nos leva a classificar os termos geométricos e os diferentes contextos nos quais eles podem ser usados ((Figura 12 (*Figura 17*)) de acordo com os dois movimentos opostos das setas na Figura 13 (*Figura 13*).

A necessidade de desconstrução dimensional de formas 2D/2D ou 3D/2D surgiu para combinar os termos do vocabulário geométrico de declarações matemáticas com as unidades figurais das visualizações associadas às declarações.

4.3 A mudança dimensional no mapeamento de unidades discursivas de sentido e das unidades figurais designadas

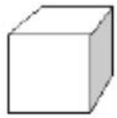
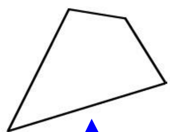
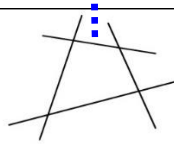
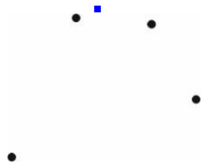
Para entender como trabalhamos e pensamos em geometria, e para sermos capazes de fazer parte disso nós mesmos, é necessário que uma sinergia entre os dois registros multifuncionais e não algoritmizáveis tenha começado a se desenvolver, Figura 13 (*Figura 13 - Seção 1*.6 em Duval (2023a, 2023b)).

Na Figura 13, essa sinergia é indicada pelas setas vermelhas oblíquas entre as setas azuis ascendentes na coluna da esquerda e as setas azuis descendentes na coluna da direita.

As setas azuis apontando para cima refletem o fato de que, para "ver em geometria", é necessário subir uma dimensão. Portanto, você pode facilmente ir de 01/2D para 1D/2D, mas não de 2D/2D para 3D/2D. E passar de 2D/2D para 3D/2D não significa que você possa ver todas as mudanças de plano ou face dos objetos físicos 3D/3D. Por outro lado, o trabalho com modelos 3D/3D desenvolve a maneira como as visualizações 3D/2D são vistas e usadas.

As setas azuis descendentes refletem o fato de que, para dizer o que é matematicamente relevante em uma configuração nD /2D, é preciso descer pelo menos uma dimensão. O vocabulário das propriedades correspondentes às unidades figurais 1D e 0D é o que é primordial em todos os enunciados de definições e teoremas.

Figura 13: Desconstrução dimensional das formas percebidas.

Número de dimensões	Visualização	USO MATEMÁTICO DA LINGUAGEM E DO VOCABULÁRIO GEOMÉTRICO
3D		**Um poliedro**
2D		Um polígono: - a **face de um poliedro**; - ou a figura obtida **por um plano de interseção** com um poliedro.
1D		**Retas** que são: - perpendiculares, paralelas ou que se cruzam; - ou **suporte de segmentos**.
0D		**Pontos de interseção** que são: - as extremidades de um segmento; - o ponto médio de um segmento; - os vértices de um polígono.

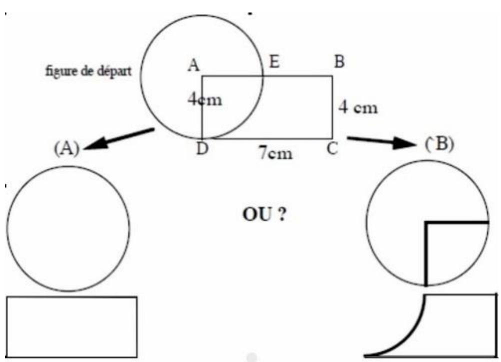
Fonte: *Figura 13* em Duval (2023a, 2023b).

É extremamente lamentável para os alunos, professores e pedagogos que a investigação psicológica e didática sobre a percepção do espaço, a compreensão dos textos e as diferentes formas de raciocínio não tenha considerado todos estes fatores. E, no entanto, é necessário tê-los em conta do ponto de vista matemático, psicológico e epistemológico. Como deve então ser ensinada a geometria no ensino fundamental?

4.4 A armadilha didática da utilização de letras para designar os pontos de intersecção

Existem vários termos ou sintagmas nominais possíveis para designar pontos (0D). A escolha depende da unidade figurativa 1D ou 2D a que pertencem: vértice, centro, ponto médio, ponto de passagem etc. Inversamente, não existe uma unidade figurativa precisa para um ponto qualquer, não importe onde, em qualquer parte do plano em uma unidade 1D ou 2D. É preciso utilizar uma letra para o nomear e mostrar como unidade figurativa 2D e, por conseguinte, para o poder designá-la numa afirmação ou explicação. Eu próprio trapaceie neste texto, como todo mundo, ao utilizar letras na comparação de duas figuras: Figura 2 (*Figura 3* - C1) e Figura 9 (*Figura 10*), mas não a Figura 8 (*Figura 11*). A armadilha começa a fechar-se assim que se começa a usar letras com palavras, porque rapidamente se está fazendo uso apenas de letras para escrever, e as palavras rapidamente são só ditas oralmente. E para os que ouvem ou leem, as palavras encontram-se em grande quantidade nos livros didáticos, nas fichas de trabalho e no que é institucionalizado no final das sequências didáticas. Esta designação "cega", para utilizar a descrição dos signos de Leibniz, tem uma razão mais profunda. Resulta da subordinação da geometria às unidades figurativas **1D/3D**, **2D/3D** e **3D/3D**, ou seja, à necessidade de fixar pontos para medir ou calcular distâncias ou comprimentos, ângulos, áreas e volumes. As consequências deste ensino são espetaculares e muitas vezes irreversíveis para a aprendizagem matemática posterior. Vemos muitos alunos tentarem medir unidades 1D/2D no papel para calcular perímetros e áreas, ou simplesmente desistir (Figura 14 (*Figura 4*), Figura 15 (*Figura 6*) e Figura 7 (*Figura 9*). Quanto às avaliações nacionais, por pudor ou censura, não falemos delas!

Figura 14 Questionários de avaliação para a Configuração C2.

<table>
<tr><td colspan="2">Este desenho à mão livre (os tamanhos reais estão em cm) mostra um retângulo ABCD e um círculo com centro A que passa por D. Encontre o comprimento do segmento [EB].</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table>
<tr><td>AE visto como um raio de 4 cm</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>Respostas medindo a linha (cerca de 2 cm na linha mostrada)</td><td>16%</td></tr>
<tr><td>Respostas por estimativa perceptual (E quase no meio de AB: cerca de 3,5)</td><td>26%</td></tr>
<tr><td>Outras respostas</td><td>30%</td></tr>
<tr><td>Sem resposta</td><td>16%</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2 unidades 2D parcialmente sobrepostas ou 2 unidades 2D perceptualmente ocultas?</td><td>Resultados de uma amostra representativa de 2604 alunos de uma população de aproximadamente 800.000 alunos (11 anos de idade)</td></tr>
</table>

Fonte: *Figura 4* em Duval (2023a, 2023b).

Figura 15 Resultados para o mesmo problema em três níveis escolares.

	6ème 11-12 anos	5ème 12-13 anos	4ème 13-14 anos
Uma diagonal divide um retângulo em dois triângulos congruentes	**5%**	**0**	**6%**
Medida dos lados e depois bloqueio	**10%**	**30%**	**45%**
Invariância por meio de compensação (Piaget)	***10%***	***10%***	***2%***
Medida dos lados e depois o cálculo (2 ,5) × (5cm); (2,3) × (5,5cm)	**10%**	**14%**	**10%**

Fonte: *Figura 6* em Duval (2023a, 2023b).

Será necessário repetir aqui o que é absolutamente necessário começar por separar:

- as atividades centradas nos modos de ver as formas geométricas;

- as atividades que implicam cálculos e, portanto, a utilização de fórmulas;

- e as tarefas centradas na tomada de consciência das operações discursivas necessárias à formulação de enunciados.

5. Fazer estas experiências por si próprio, descobrir coisas que não sabia antes e tornar-se intelectualmente independente em matemática

Começar por olhar com atenção para a fotografia dos 600 guarda-chuvas justapostas e tentar responder às duas questões iniciais Q. 1 e Q. 2 (O que reconheces à primeira vista? Quais são os opostos que permitem distinguir formas ou superfícies significativamente diferentes?) antes de continuar.

Em seguida, como num verdadeiro manual de emprego ou montagem, é preciso olhar atentamente para todas as comparações de figuras que são sucessivamente apresentadas, e tentar ver e dizer por si mesmo as diferenças que descobre.

Há certas seções do texto que não são utilizadas nestas instruções; elas concernem o registro das línguas faladas (seção II.1), da escrita simbólica e do registro das línguas faladas (seção II.2).

Finalmente, voltemos ao título "O prazer de ver, compreender, dizer e inventar... em matemática, claro!" Tudo isso ao mesmo tempo, se pode pensar. Mas o movimento constante entre estas quatro abordagens semiocognitivas é a forma de trabalhar em geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DUVAL, R. O Prazer de Ver, Entender, Expressar e Inventar...em Matemática, é Claro! *in* Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. MORETTI, Méricles T.; SABEL, Eduardo (Orgs.). Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2023a.
Disponível em https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982
DUVAL, R. Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer… en mathématiques, bien sûr ! REVEMAT, 2023b.
Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/3547

DUVAL, R. Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble: Presses Universitaires, 2015.
DUVAL, R. (2018). Pour l'éducation du regard en géométrie élémentaire et en peinture (Traduction Bruno d'Amore). *La matematica e la sua didattica trad Bruno d'Amore*, *26* (2), 211-245. https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2018/10/Duval-Per-leducazione-allo-sguardo-in-geometria-elementare-e-in-pittura-MD-2018-26-2-3.pdf
DUVAL R., *Sémiosis et Pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intelectuels.* Chap. II, Fig. 1 Fonctions et opérations discursives d'une langue, Fig. 1, p. 90-91. La fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, p.110-112, 1995.
LEMONIDIS, E. C. (1990). Conception, réalisation et résultats d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. Thèse ULP, Strasbourg, 1990.

CAPÍTULO II

As apreensões e as mudanças de dimensão na aprendizagem da geometria

Roberta Nara Sodré de Souza[I]
Méricles Thadeu Moretti[II]

[I] Profª. do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) - Campus Itajaí. https://orcid.org/0009-0002-9282-4252

[II] Prof. do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/UFSC. https://orcid.org/00000002-3710-9873

INTRODUÇÃO

No campo da Educação Matemática as escolhas didáticas envolvidas de intencionalidade referente aos aspectos epistemológicos e aos quais direcionamos à construção de conceitos, são fundamentais para chegarmos aos objetivos que propomos à aprendizagem. No que se relaciona a aprendizagem da geometria e como abordarmos, em sala de aula, podemos, como docentes, potencializar o desenvolvimento de habilidades cognitivas importantes à resolução de problemas que envolvem mudanças de dimensão em formas geométricas.

Comumente, nos depararmos, em nossa prática da docência de matemática, com as perguntas “o que eu faço agora?”, “faltam dados no problema?”. As interrogações e dificuldades surgem principalmente na resolução de problemas que envolvam formas geométricas e que exijam passagens entre diferentes dimensões para sua resolução.

Nos parece intuitivo que o estudante consiga reconhecer em problemas que contenham formas geométricas, elementos em dimensões diferentes da figura dada, porém, para que possam operar essa habilidade nas atividades propostas, precisamos desenvolvê-la nos estudantes. Neste sentido, nos questionamos em quais momentos encontramos em nossa prática o viés epistemológico que aborda, de forma intencional, a mudança de dimensão em formas geométricas para o desenvolvimento dessa habilidade cognitiva? Para o desenvolvimento conceitual de objetos conceituais que envolvem as formas geométricas, contemplamos atividades cognitivas que permitem as mudanças entre diferentes dimensões que o objeto permite explorar?

Nossas ações didáticas nos espaços escolares são valiosas e possibilitam o desenvolvimento de conceitos matemáticos, que são essenciais na vivência cidadã permitindo que os sujeitos explorem os avanços dos conhecimentos científicos. Nossa reflexão, tal qual os novos estudos e pesquisas no campo didático que assumem o papel de desenvolver o saber matemático tendo como eixo norteador o aprimoramento do raciocínio, da análise e da visualização mostra-se fundamental no percurso didático do professor de matemática. Na geometria e no estudo das formas, podemos dar visibilidade às discussões em nossas intervenções que irão permitir provocar situações em que os estudantes precisarão reconhecer e aplicar modificações em figuras geométricas relacionadas as mudanças dimensionais para resolver os problemas. Neste sentido, alinhamo-nos com Duval (2011) no indicativo de que precisamos operar a desconstrução dimensional das formas reconhecidas imediatamente evidenciando as formas que não estão à primeira vista nas resoluções de problemas que envolvam formas geométricas.

A maioria dos problemas em geometria são compostos por figuras que podem constituir-se em elementos não heurísticos para a cognição dos estudantes, daí a importância de estudarmos as formas no sentido da aprendizagem matemática. Ao nos apropriarmos de modo consciente das discussões propostas neste livro sobre as mudanças dimensionais das formas geométricas podemos desenvolver a intencionalidade para com os nossos objetivos de aprendizagem selecionando problemas e atividades a serem realizadas pelos estudantes, que permitam atingir à construção dos conceitos geométricos das formas segundo o viés que discutimos nesse livro.

1 OS SIGNOS E OS OBJETOS MATEMÁTICOS

Por serem compostos de estruturas abstratas, os objetos do conhecimento matemático, tanto para sua comunicação como também para podermos interagir com esse conhecimento, necessitam de um corpo simbólico.

Considerando o viés intrínseco dos signos na representação e comunicação dos objetos matemáticos, as ligações simbólicas formaram os registros de comunicação que usamos e foram aceitos socialmente por meio de processos históricos. As estruturas simbólicas de representação e comunicação utilizadas na linguagem matemática, só possuem sentido ao emitirem significados. Os signos irão assim revelar as primeiras imagens dos objetos matemáticos, por meio deles estabelecemos conexões com nossos próprios esquemas de pensamento.

O papel dos sistemas simbólicos na formação dos conceitos matemáticos, se destaca na teoria de Duval (1993, 1995, 2011, 2016) que entrelaçada com a semiótica de Pierce, estudou as relações entre os signos, que envolve a formação das noções matemáticas. Ao papel dos signos e suas operações na constituição de significados aos objetos de conhecimento matemático denominou de **registros de representação semiótica.**

Para que um sistema de representação simbólica de conceitos matemático possa ser considerado um registro de representação, ele necessariamente deve possibilitar três atividades cognitivas: a formação de uma representação identificável que respeite algumas regras do sistema simbólico utilizado; o tratamento, uma transformação interna da representação e a conversão, considerada como a transformação de uma representação em outra representação de outro registro, mantendo a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial (DUVAL 1993, 1995, 1996).

Duval (2012) considera que não existe a apreensão conceitual de um objeto matemático sem a utilização de sistemas semióticos para representá-lo. O recurso a muitos registros é apontado como uma condição necessária para que os objetos matemáticos não se confundam com seus registros de representação viabilizando que sejam ampliados na sua significação pelos sujeitos. Ao transitar entre diferentes registros de representações semióticas de um objeto matemático é possível diferenciar os símbolos do objeto matemático ideal em si, dessa forma, o sujeito, constrói a imagem do referido objeto, não o confundindo com um registro de representação. Como exemplo, podemos exemplificar a construção do conceito de retângulo, se apresentamos ao nosso estudante essa definição apenas escolhendo uma das formas particulares de representar o retângulo, não perpassando por outras diversas, o estudante poderá vir a confundir o objeto matemático com este único registro de representação semiótica, tomando este registro de representação semiótico como o próprio objeto.

Entre as representações, destacam-se três planos: as representações subjetivas e mentais como sendo as imagens conscientes, as próprias concepções, as ideias que possuímos acerca do mundo e dos objetos sem serem expressas por símbolos; as representações internas ou computacionais se referindo aquelas tratadas internamente de maneira inconsciente e, por fim, as representações semióticas que são externas e conscientes, constituídas pelo emprego de signos que pertencem a um sistema de representações (DUVAL, 1993).

O trânsito entre diferentes representações compreende variações dadas sobre o registro inicial relacionadas a associações de variações para um segundo registro associado, essas variações precisam ser coordenadas pelo sujeito que nesse processo aprende. A isso denominamos coordenação entre registro de representações e é por meio dela que o conhecimento é ampliado (DUVAL, 1995). A conversão entre registros de representação semiótica exige dos sujeitos o estabelecimento de diferenciação entre significado das suas unidades significantes desses registros.

Percebe-se que no ensino médio é comum que os estudantes se referiram às representações de objetos matemáticos da geometria em terceira dimensão (3D) nominando-as em segunda dimensão (2D), mesmo após abordagem didática do docente sobre as figuras espaciais. Também observo interpretações diversas dos estudantes para um mesmo problema que traz uma forma geométrica, dependendo de formatos, sombreamentos, grifos disponibilizados nos problemas submetidos a eles, essa discussão se confirmou em nossa pesquisa de doutoramento (SOUZA, 2018). Neste sentido, a construção dos objetos matemáticos por meio de suas representações semióticas, também no campo da geometria, necessita a nossa atenção a fim de oportunizar escolhas que possam estar potencializando a aprendizagem e trazendo melhorias à execução de nossa prática, trazendo elementos de forma consciente sobre nossas intencionalidades na construção cognitiva do saber de nossos estudantes no decorrer dos níveis Fundamental e Médio.

2 A FORMA DOS OBJETOS E A APREENSÃO GESTALTICA

Nosso olhar sobre formas se diferencia em função de elementos que o compõe. Reconhecemos o todo antes da parte, vemos a linha destacada a frente antes de seu plano de fundo. Ao olharmos uma figura geométrica na composição de um desenho plano de uma casa, por exemplo, temos a tendência em reconhecer a totalidade da casa e não as figuras geométricas que a compõe. Existem elementos no olhar de uma forma que nos são intrínsecos, dados suas diferentes características visuais. As construções das formas geométricas disponibilizadas aos estudantes também são influenciadas pelas características visuais diferentes que compõe o seu campo de percepção. Essas diferenças visuais das formas são reveladas pelas leis básicas da *Gestalt*.

A *Gestalt*, ou psicologia da forma, representa um movimento de filósofos, iniciado no fim do século XIX, na Áustria. Os estudos experimentais realizados por esse movimento, trouxeram respostas sobre as formas mais harmônicas à nossa percepção visual, que foram denominados de "boa forma" (GOMES FILHO, 2009). No nosso caso, procuramos entender melhor esse sistema de leitura das formas, para permitir uma aproximação com a leitura das figuras geométricas, colocadas em atividades de ensino, já que essa teorização contribui nos aspectos relacionados a percepção de uma "boa forma".

Nossa percepção, ocorre por variações de contrastes, que podem ocorrer por diferenças de estímulo visual por diferentes unidades da forma, sejam elas: ponto, linha, plano, volume, configuração real ou esquemática. São sete leis básicas que compõem a~~s~~ capacidade~~s~~ perceptiva~~s~~ da leitura visual de um objeto (GOMES FILHO, 2009)**:**

- Unidades: o conjunto de todos os elementos que dão a própria forma ao objeto. Podemos ver unidades principais e secundárias ao ver um todo, como um rosa ou cada uma de suas pétalas;
- Segregação: a separação, a percepção ou identificação das unidades de um todo. Alguns aspectos destacam ou evidenciam mais essa capacidade perceptiva, como exemplo, o maior ou menor contraste de cores que propicia a nossa leitura visual uma maior intensidade da segregação;
- Unificação: se relaciona a coesão visual de um objeto, trazendo ou não um maior equilíbrio e harmonia da forma em

si. Essa capacidade perceptiva se manifesta em maior ou menor intensidade, a proximidade, a semelhança, o fechamento e uma boa continuidade e permitem melhor unificação. Exemplo: símbolo Yin-yang, que mostra uma simetria perfeita, além do contraste de cores e contornos circulares;

- Fechamento: capacidade perceptiva que mostra uma continuidade na estrutura, agrupando elementos na constituição de uma figura mais completa. Nossa percepção se dirige de maneira natural para as linhas fechadas;
- Continuidade: refere-se a organização de nossa percepção na visão de como as partes apresentam sequências que fluem, onde os elementos acompanham no sentido de uma direção para a melhor forma possível de um objeto. Exemplo: as formas que permitem ilusão de ótica em movimento com desenhos geométricos;
- Proximidade: a capacidade perceptiva que constitui a tendência de agrupar num todo os objetos com elementos ópticos próximos uns dos outros compondo uma unidade na forma. Exemplo: a tendência em olharmos um relógio de ponteiro como um todo;
- Pregnância da Forma: é a lei básica da percepção visual que indica a tendência de dirigirmos espontaneamente a nossa leitura visual ao campo de estruturas mais simples, mais unificada, clara, equilibrada, homogênea e regular, como os

> letreiros com fontes mais simplificadas e espaçadas, formas arquitetônicas compostas por padrões de paralelismo, proporções e simetria.

As sete leis da *Gestalt* ainda se subdividem em outras subcategorias, assim, este conhecimento dá consciência à nossa intervenção com os estudantes quanto as escolhas didáticas relacionadas aos conceitos geométricos, seja em um texto que possui formas que carregam conceitos, ou na seleção de problemas que serão dispostos para o desenvolvimento de conceitos, permitindo-nos melhorar a análise sobre elementos facilitadores da leitura visual das formas e ~~a~~ melhor adequação à comunicação das mesmas aos estudantes.

3 TIPOS DE APREENSÕES DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

No contexto de um problema matemático a desenvolver no qual o estudante encontra um estímulo visual por meio de uma figura geométrica, diferenças perceptivas podem ocorrer já de início, determinando escolhas de procedimentos de resolução ou bloqueios.

As figuras geométricas possuem uma organização interna de elementos em diferentes dimensões, além de limitações visuais no contexto das formas disponibilizadas. Para que as formas geométricas disponibilizadas em problemas possam fazer o papel desejado pelo educador, elas precisam possibilitar explorar as conexões entre a percepção dos seus elementos e as operações entre formas e dimensões, o que nem sempre ocorre. Uma figura geométrica, contida num problema, nem sempre, é utilizada como um caminho facilitador do raciocínio matemático em questão (DUVAL, 1998).

Contudo, sua função heurística mostra-se importante ao desenvolvimento de habilidades cognitivas que contribuem para a sua resolução e a construção de conceitos (SOUZA, 2018).

Para Duval (1994) são quatro as apreensões possíveis para uma figura geométrica:

- a apreensão perceptiva: a que permite identificar de imediato uma forma ou um objeto bidimensional ou tridimensional;

- a apreensão discursiva: que acontece quando um enunciado ou explicação acompanha um desenho;

- a apreensão sequencial: que se refere a construções de figuras e depende de suas propriedades e das restrições técnicas dos instrumentos utilizados;

- a apreensão operatória: que se relaciona às modificações ou transformações possíveis de uma figura inicial.

A forma de pensar as possíveis modificações, ocorrem já de primeiro momento, sob a forma de ver a figura. A apreensão perceptiva não exige conhecimento matemático, contudo, pode comandar a apreensão operatória, já que as possíveis modificações de uma figura podem permitir reorganizações perceptivas (MORETTI, 2013). É por meio da apreensão operatória, que podemos conseguir ideias para resolver um problema, por exemplo, ao prevermos caminhos de subdivisões, criarmos linhas auxiliares ou rotações, permitimos que a figura possa exercer o seu papel heurístico (DUVAL, 1998).

Os diferentes caminhos a serem utilizados para desenvolvermos as apreensões são importantes para operarmos diversos problemas que envolvem formas geométricas para Duval (1998), são as modificações:

- mereológicas: são modificações de repartições de uma figura em subfiguras, ou acréscimo de outras é chamada de modificação mereológica.

- Óticas: são modificações que ocorrem ao deformarmos, ampliarmos ou reduzirmos as figuras em outras, que são as suas imagens com tamanho diferenciado.

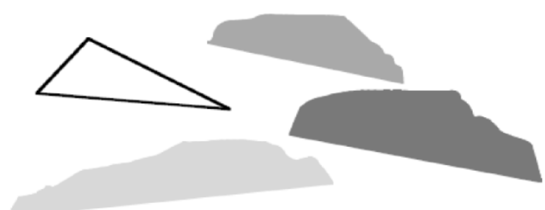
- Posicionais: referem-se às modificações onde ocorre a mudança de posição, geralmente em relação ao plano paralelo, a rotação e a translação das figuras dadas.

As modificações nas figuras geométricas podem trazer diferenças significativas permitindo ver mais facilmente ou não elementos que a figura inicial mostrava certa dificuldade para evidenciar. Inclusive, o simples diferenciar ou não uma linha de fundo em objetos na terceira dimensão, ou de indicativos para a reorganização da figura inicial, ou ainda de traços auxiliares utilizados fora do contorno da forma indicando medidas, são exemplos de fatores que podem desencadear dificuldades do estudante na utilização heurística da figura geométrica do problema.

Nas atividades que envolvem figuras geométricas, também é observado nas pesquisas, a ocorrência da dificuldade de olhar a figura e reduzir às informações que constam na mesma para dimensões inferiores a que é dada (MORETTI; BRANDT, 2015). As mudanças dimensionais, de terceira dimensão (3D), que são as figuras espaciais, para a segunda dimensão (2D) que são as figuras planas, de 2D para a primeira dimensão (1D), que são as figuras lineares, e de 1D para dimensão zero (0D) que são as figuras adimensionais, exemplificadas pelo conceito de ponto, são essenciais na maioria das atividades de geometria, que contemplam figuras. A simples percepção de um ponto médio localizado numa figura em 2D, não se faz por uma observação natural por parte do estudante, já que existe uma passagem para 1D, ao observar o lado ao qual esse ponto pertence e está subdividindo e ainda a percepção em 0D, considerando ser o ponto médio referido adimensional.

Por exemplo, na atividade abaixo, Figura 1, pede-se ao estudante que dado o modelo de um triangulo, reconstrua-o, em outro espaço, utilizando as réguas em papel não graduadas disponibilizadas.

Figura 1 Construção de um triângulo.



Fonte: adaptado de Duval (2005).

Para que a atividade fosse desenvolvida nota-se que Duval (2005) procura utilizar uma boa forma, assim o triângulo, mostra-se como um desenho vazado e não sólido de forma a promover uma apreensão perceptiva mais ágil que o levaria a identificar os lados em primeira dimensão, fazendo, dessa forma a passagem nesse registro de representação mudando da segunda dimensão para a primeira dimensão (SOUZA, 2018). Já no encontro dos lados, ao fazer marcações e posicionamentos das réguas não graduadas, o estudante faria uma nova mudança dimensional ao perceber os pontos, vértices, na marcação das medidas dos lados do triângulo para transpô-lo a outra região do papel, mudando assim para a dimensão zero, determinando os vértices. No aspecto referente as conversões, tratamentos na figura que representa o objeto matemático "triângulo", percebe-se a conversão da língua natural para uma figura geométrica e desta para um tratamento de construção de segmentos de primeira dimensão, mas também em forma de figura geométrica, não mudando o registro. Além da apreensão perceptiva que o estudante precisaria realizar na primeira leitura e olhar à proposta da atividade unida as formas geométricas disponibilizadas, a apreensão sequencial, solicitada ao requerer a construção da figura em outro espaço da folha. A apreensão sequencial requer uma série de procedimentos ligados a outros conceitos matemáticos, como a questão da manutenção dos ângulos do triângulo dado, e manipulação dos objetos de medição com um objetivo final. A não visualização da sequência de construção poderá vir a impedir a desconstrução para a primeira dimensão e a dimensão zero, ou chegar a resultados inconsistentes na atividade proposta.

Observamos que uma atividade lançada aos estudantes pode estar vinculada a vários tipos de apreensão e mudanças dimensionais, às quais, por vezes, os aprendizes não foram estimulados a desenvolver e não apreenderam. como docentes podemos ter a crença que as habilidades de apreensão e mudança dimensional sejam intrínsecas e que se construam por si só. Vários conceitos geométricos estão vinculados dentro das mudanças dimensionais e das apreensões que os estudantes precisam desenvolver de forma que possam conseguir executar a proposta da atividade que as contém, são habilidades que são desenvolvidas no ambiente escolar dependendo de nossas escolhas didáticas conscientes.

Para que possamos contribuir na educação matemática de nossos estudantes, no campo da geometria, precisamos nos voltar aos elementos epistemológicos da constituição do saber sobre seus objetos do conhecimento em nossa abordagem didática e nisso estão juntas as apreensões e as mudanças de dimensão das formas geométricas discutidas neste capítulo. Não temos a intenção, dentro desse material, discutir toda a amplitude teórica deste tema, mas poder trazer pontos relevantes à percepção docente estimulando ver os processos cognitivos que estão unidos ou não as nossas escolhas e que precisam de maior aprofundamento. A composição de trajetórias de ensino que abordem elementos cognitivos, fortemente importantes à aprendizagem da geometria, precisam abarcar o desenvolvimento de situações diversas das formas geométricas, desde as percepções e apreensões com a união a situações discursivas, os tipos de modificações e além das sequencias construtivas envolvidas estarem unidas ao vai e vem entre as diferentes dimensões das figuras.

CONCLUSÕES

As diferentes figuras geométricas que se apresentam na abordagem didática dos objetos de conhecimento da geometria, não apenas no campo da educação matemática, podem constituir-se em elementos não heurísticos à cognição dos estudantes se abordados na sua concepção didática sem a amplitude epistemológica que lhe é característica, em especial sobre os gestos intelectuais das apreensões e da desconstrução dimensional.

Especificamente trouxemos elementos sobre os objetos matemáticos que os diferenciam, na sua relação com o real, dos demais objetos do conhecimento tratados na escola. O fato de abordarmos conceitos abstratos, como os da matemática, nos revelam o aspecto semiótico como essencial e leva o foco da aprendizagem a ser centrado no sujeito, no objeto e na semiótica envolvida, nos seus registros de representação e suas especificidades.

Em relação aos conceitos geométricos, observa-se que as formas, consideradas na perspectiva adotada neste campo, como registros de representações semióticos, tornam-se fortemente relevantes no ensino e os diferentes aspectos do estudo da forma a se apresentar e os aspectos dimensionais propostos são fundamentais para que ocorram as apreensões desejadas e a formação conceitual que objetivamos.

As mudanças dimensionais nas figuras geométricas são necessárias a trajetória do estudante do Ensino Básico, porém, muitas vezes, não estruturamos, como docentes da área, o caminho de nossas escolhas didáticas dentro das amplitudes de aspectos cognitivos envolvidos. Estes aspectos que logo mais encontramos na resolução de problemas com formas geométricas estão necessariamente envolvidos com mudanças dimensionais, e que por vezes, ficam na dependência de serem desenvolvidos por meio de ações didáticas isoladas que possibilitamos por meio de nossas escolhas, sem a intencionalidade necessária.

A ação dos educadores da matemática, especialmente do Ensino Básico, quando das seleções de material didático, que tragam a visão da cognição sobre as diferentes apreensões e as mudanças dimensionais das figuras geométrica é fortemente importante. Não podemos agir de forma ampla e consciente em nossa prática se não conhecemos a amplitude de aspectos semiocognitivos envolvidos ao intencionar a manipulação de formas geométricas.

Ao promover em nossas discussões significações relevantes que envolvem os conceitos da Geometria, considerando nas seleções aspectos semióticos e de mudanças dimensionais da forma, podemos levar os estudantes a potencializar as suas aprendizagens nesse campo de conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DUVAL, R. Questions épistémologiques et cognitives, avant d’entrer dans une classe de mathématiques. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *REVEMAT*: Florianópolis, V.11, n.2, p1-78, 2016.

DUVAL, R Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. *REVEMAT*, v.7, n.1, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, 2012.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas.* Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. GODIN, Marc. Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand* N n° 76, pp. 7 à 27, 2005.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. In C Mammana and V Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*. Dordrecht: Kluwer, 1998.

DUVAL, R. Quel cognitif retenir em didactique des mathématiques? *RDM*, v.16, n.3, 1996.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Les differents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometrique. *Répères*. Pont-à-Mousson, Topiques éditions, n. 17, p. 121-138, 1994.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, *IREM* de Starsbourg, n. 5, p. 37-65, 1993.

GOMES FILHO, J. Gestalt do objeto: *Sistema de leitura visual da forma*. Sao Paulo: Escrituras (9. ed.), 2009.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, v.15, n.2, p. 289-303, maio/ago., 2013.

SOUZA, R. N. S. S. Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem da geometria. *Tese (Doutorado).* Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. UFSC, Florianópolis, 2018.

CAPÍTULO III

As rupturas conceituais que fluem da desconstrução dimensional cognitiva de objetos tridimensionais

Adriano Moser[I]
Adalberto Cans[II]
Méricles Thadeu Moretti[III]

[I] Prof. Me., Secretaria de Estado da Educação do Estado de Santa Catarina SED/Balneário Piçarras/SC, Brasil. https://orcid.org/0000-0001-6440-7801.

[II] Prof. Dr., Secretaria de Estado da Educação do Estado de Rondônia. SEDUC/Porto Velho/RO, Brasil. https://orcid.org/0000-0001-7580-6373.

[III] Prof. do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/UFSC. https://orcid.org/00000002-3710-9873.

INTRODUÇÃO

Dada a natureza ideal dos objetos matemáticos, a apreensão conceitual desses objetos não só se diferencia de qualquer outro tipo de conhecimento, como também exige saberes que imprimem maior custo cognitivo do que outros. A geometria por exemplo, ao exigir uma interação sincrônica entre o enunciado e as unidades figurais da figura representada, sendo esta construída ou não, é o ramo que "exige atividade cognitiva mais completa, porque ela solicita o gesto, a linguagem e o olhar. Nela, é necessário construir, raciocinar e ver, indissociavelmente" (DUVAL, 2022, p. 3).

Além disso, mesmo que a organização dos objetos geométricos exija uma dedicação específica por parte do estudante, a fim de formalizar associações entre seus axiomas e teoremas, é o olhar que pode se constituir no maior desafio a construção de um aprendizado significativo, uma vez que somos intuídos a contemplar os elementos geométricos da mesma forma com que contemplamos socialmente os objetos a nossa volta, isto é, de forma icônica segundo a teoria de Raymond Duval.

"Ver" em matemática, portanto, precisa ser sustentado e coordenado não somente pelo reconhecimento da forma geométrica em si, tendo como parâmetro somente sua configuração global, mas especialmente pelas suas propriedades qualitativas[1]. Assim sendo, um novo olhar, uma nova concepção de interesses precisa ser considerada quando o objetivo é compreender e formular um processo resolutivo para um problema de geometria. Nesse sentido, Duval é enfático ao descrever a maneira com que precisamos contemplar o espaço geométrico, ao afirmar que:

> [...] o espaço não é mais abordado sob o aspecto de grandeza e mudança de escalas de grandeza, nem sob o das propriedades topológicas e afins discriminando formas, ele é abordado sob o aspecto de suas **dimensões** e da mudança do número de suas dimensões. A mudança do número de dimensões está no centro do olhar geométrico sobre as figuras (DUVAL, 2022, p. 4, grifo nosso).

Desse modo, a noção de espaço não pode ser considerada como suficiente para o aprimoramento dos saberes geométricos, não porque o reconhecimento quantitativo – comprimento, área, volume etc., ou representativo – tipo de traçado, posição, sombreamento etc., das formas não

[1] Refere-se a propriedades como: paralelismo, perpendicularidade, angularidade, ortogonalidade, simetrias etc., ou seja, relações entre unidades figurais de uma figura geométrica.

sejam importantes. Mas, principalmente porque o problema está no uso limitado da capacidade heurística da representação figural, que porventura seja construída ou que já esteja exposta no problema. Visto que, a percepção imediata (olhar icônico) condiciona a compreensão somente analisando a configuração geométrica na mesma dimensão da representação dada.

Dessa forma, o entendimento de um problema em geometria, exige além dos saberes matemáticos inerentes aos objetos geométricos visuais inseridos em seu contexto, a **habilidade perceptiva** de contemplar dimensionalmente a figura, ampliando assim a possibilidade de conjugar conceitos, acrescentar novos traçados (olhar não icônico) de modo a vislumbrar propriedades e com elas fazer uso máximo do potencial heurístico da representação figural para a compreensão e resolução do problema proposto. Em outros termos, referimo-nos a desconstrução dimensional como uma atividade capaz de enfrentar o fenômeno cognitivo do hiato dimensional na geometria (DUVAL, 2005, 2022).

Duval (1995, 2012, 2004, 2017, 2022) em seus estudos, no que tange a aprendizagem da geometria, define as operações semiocognitivas que atuam em todo problema de natureza geométrica, como sendo gestos intelectuais autônomos ativados pelo contexto geométrico e uma vez evocados, de acordo com a eficiência com que interagem, podem ampliar ou não o potencial heurístico da representação figural, bem como favorecer ou não o encaminhamento de uma resolução eficaz.

Inicialmente, Duval (2012, 2022) afirma que em toda iniciativa de formular uma compreensão de uma situação que envolva objetos geométricos, cognitivamente entram em cena os olhares icônicos: do botanista e do agrimensor ou os olhares não icônico: seja do construtor ou do inventor, que junto com os gestos interpretativos autônomos denominados pelo autor de apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial; coordenarão as transformações figurais sendo elas na mesma dimensão do objeto original (reconfiguração intermediaria) ou explorando o objeto a partir do reconhecimento de unidades figurais em dimensões inferiores (desconstrução dimensional). Esse processo ocorre com intuito de conjecturar um percurso didático resolutivo eficiente para o problema. Contudo, a partir de em uma releitura de Moretti e Cans (2024) a respeito das apreensões, consideramos incluir nesse arcabouço teórico também a subdivisão da apreensão perceptiva em imediata e atentiva, e acrescentar a apreensão heurística.

Dada a importância desses mecanismos semiocognitivos, evocados na aprendizagem da geometria, e da necessidade de que o leitor tenha pelo menos uma breve definição e assim possa refletir a respeito da operação semiocognitiva da desconstrução dimensional de objetos tridimensionais e das possíveis rupturas durante o processo de compreensão e expansão do raciocínio resolutivo, o quadro abaixo assume a expectativa de expor, de forma resumida, esses mecanismos de modo prático e operacional.

Quadro 1 - Mecanismos semiocognitivos relacionados a aprendizagem da geometria.

Operação Cognitiva	**Especificação**	**Descrição**
Olhares icônicos	Botanista	Reconhece o contorno das formas
	Agrimensor	Explora a forma geométrica mobilizando propriedades para definir medidas
Olhares não-icônicos	Construtor	Constitui-se no uso de instrumentos manuais ou software para construir os objetos geométricos
	Inventor	Forma-se a partir das intervenções sobre a representação figural promovendo modificações
Apreensões	Perceptiva imediata	Atua no reconhecimento perceptivo da figura, sendo coordenada somente pelas leis de reconhecimento da *Gestalt*
	Perceptiva atentiva	Atua no reconhecimento perceptivo da figura em sinergia com a apreensão discursiva
	Discursiva	Atua na identificação e interpretação do conjunto de definições, propriedades e teoremas evocados da relação da figura e do enunciado
	Operatória	Atua na modificação da representação figural
	Heurística	Atua sincronicamente com a apreensão operatória e a apreensão perceptiva atentiva
	Sequencial	Atua em atividades de construção ou descrição de figuras geométricas
Desconstruções geométricas	Reconfiguração intermediaria	Modifica a figura de dimensão nD em subfiguras de mesma dimensão da original
	Desconstrução dimensional	Analisa, identifica e modifica a figura de dimensão nD a partir do reconhecimento conceitual de subfiguras de dimensão (n-1)D com n = 3, 2 ou 1

Fonte: os autores a partir de DUVAL (2022), MORETTI; CANS (2024).

Há uma tendência natural de atribuir-se um gesto atencional maior a uma imagem do que a um conjunto de palavras, entretanto, “no mundo de hoje, cada vez mais da imagem nos meios semióticos, o **aprender a ver** torna-se cada vez mais importante" (MORETTI, 2013, p. 1, grifo nosso). Ver matematicamente relaciona texto e imagem, assim, deve-se dar especial atenção ao que traz o enunciado, dado que, "as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese. [...] uma figura geométrica não se mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito" (DUVAL, 2012, p. 133).

Este cuidado se justifica, uma vez que, diante de uma figura geométrica o olhar impulsionado pelo desejo de resolver o problema, irá coordenar o reconhecimento e a aceitação do papel que o registro figural está desempenhando, podendo ou não instigar um "desmanche" para que a partir de uma reconfiguração aflore um percurso didático resolutivo para o problema.

Mesmo que em algumas situações a reconfiguração da figura ocorra somente a nível cognitivo, podendo ou não conservá-la na dimensão de partida, este trabalho visa trazer à reflexão fundamentos teóricos que levem o professor a reconhecer a essencialidade do reconhecimento das unidades figurais e suas relações com o objeto, a partir da habilidade de aplicar a desconstrução dimensional sobre a figura. Todavia, estamos conscientes de que esse gesto intelectual não ocorre de forma natural e, portanto, é necessário desenvolvê-lo nos estudantes.

Por outro lado, dependendo do nível de exigência do problema, pode inicialmente criar-se a falsa impressão de que o reconhecimento de elementos geométricos em dimensões inferiores ao objeto figural norteador da problemática não seja necessário, o que não é verdade, visto que os teoremas, as definições e propriedades formalizam-se entre objetos lineares e suas intersecções. Portanto, é fundamental contemplarmos o objeto geométrico principalmente quanto a sua vocação de se modificar a partir do direcionamento discursivo (CANS; MORETTI, 2024).

Duval, em seus estudos, descreve tal habilidade e cita exemplos dentro de um cenário geométrico bidimensional. O que indica a necessidade de se discutir a desconstrução dimensional também no contexto da geometria espacial, pois, estaríamos falando do mesmo custo cognitivo? A dificuldade de aprendizagem dos estudantes com relação aos sólidos geométricos, no Ensino Médio, teria relação com a ignorância dessa habilidade?

Dessa forma, para este trabalho procuramos por elementos teóricos e experimentais, que possibilitem trazer algumas análises sobre a importância do reconhecimento e de como a desconstrução dimensional opera na aprendizagem em Geometria Espacial.

1 - A percepção dos objetos geométricos a partir dos princípios gestálticos

Inicialmente é necessário tomar conhecimento de que o reconhecimento visual parte de uma complexa interação entre o ambiente e o sujeito, pois segundo a teoria da *Gestalt* “o que acontece no cérebro não é idêntico ao que acontece na retina”, uma vez que o fenômeno da percepção está sob constante influência da composição do meio a ser reconhecido como também da organização estrutural do sistema nervoso (GOMES FILHO, 2008, p. 19).

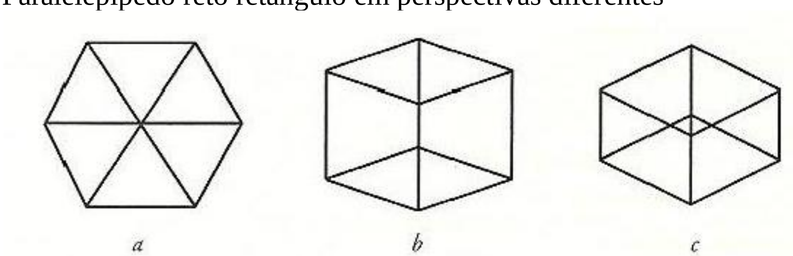
Além do mais, o reconhecimento a partir da percepção ocular atua seguindo alguns padrões buscando reduzir o custo cognitivo do processamento visual, e, portanto, a tomada de consciência do que está no nosso campo de visão a ser constituído se forma a partir do aspecto global dos elementos, não contemplando de forma natural a assimilação de elementos dimensionalmente inferiores ao objeto focalizado, principalmente quando se trata de modelos tridimensionais representados a partir de perspectivas no plano (GOMES FILHO, 2008; DUVAL, 1995, 2004, 2017).

Isto porque o reconhecimento inicial de qualquer representação geométrica tem sua essência definida no quanto se contrasta com o seu material de suporte (em geral plano de fundo), subjugando sua tomada ou não de consciência no que a *Gestalt* define como princípios que naturalmente ordenam e estruturam a nossa primeira percepção, destacando assim a importância com que as variáveis qualitativas (linha reta ou curva, contorno aberto ou fechado, o tipo do traçado, sua cor, sua orientação, etc.) assumem quando é construída a representação semiótico.

Entre os fatores gestálticos relacionados a nossa capacidade de reconhecimento visual, o "fator de fechamento" se destaca na nossa dinâmica perceptiva imediata, uma vez que, impera uma tendência de organização das unidades para uma ordem global, na prática, somos sugestionados a definir o que vemos em todos fechados, por exemplo uma representação de um paralelepípedo (3D/2D) ao invés dos polígonos (2D/2D) que o compõe. Se associarmos também o "fator de boa continuidade", intuitivamente assumimos a expectativa de que toda unidade linear se prolongue na mesma direção conservando o mesmo movimento, fica evidente que "ver" geometricamente uma figura é preciso partir de um esforço intelectual (GOMES FILHO, 2008).

Mesmo com representações materiais (3D/3D) dos sólidos geométricos, na maior parte das vezes o estudante terá em seu campo de visão um registro em perspectiva (3D/2D), elevando assim o custo cognitivo para discernir mentalmente os elementos que pertencem ou não ao plano frontal paralelo à sua percepção. Além das variáveis qualitativas já mencionadas, os princípios gestálticos, principalmente os fatores do fechamento e de boa continuidade das formas ampliam a importância de subsidiar o reconhecimento visual a partir do registro discursivo que compõe o problema. A seguir, a Figura 1, traz um exemplo simples, um paralelepípedo reto retângulo em três perspectivas diferentes:

Figura 1 – Paralelepípedo reto retângulo em perspectivas diferentes



Fonte: GOMES FILHO (2008, p. 22).

Considerando-se que o evento mostrado na Figura 1 está a associar as figuras (1a, 1b e 1c) a um paralelepípedo reto-retângulo não só em perspectiva diferentes, mas principalmente em níveis diferentes de reconhecimento do sólido geométrico. A figura (1a), em função da regularidade de suas diagonais, estimula o fator de boa continuidade o que por sua vez direciona o olhar a fechar o reconhecimento global com maior tendência bidimensional. Já a figura (1b) em virtude do alinhamento de duas de suas arestas e sem apresentar nenhuma ruptura no traçado faz com que o reconhecimento dimensional seja ambíguo (2D ou 3D), e por fim, a figura (1c), a irregularidade de como as linhas foram traçadas reduzindo a ação do fator de boa continuidade facilita a aceitação da perspectiva tridimensional (GOMES FILHO, 2008).

Nesse sentido, qualquer concepção imediata de uma representação figural inserida num problema, precisa estender o processo visual sustentado pela certeza de que é necessário, segundo Duval, "operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel" (DUVAL, 2011, p. 87).

Portanto, a percepção sustentada nas hipóteses é o ponto chave para a proficiência geométrica, todavia o gesto de associar uma configuração geométrica espacial ao seu estatuto conceitual é mais exigente e seu "desmanche" dimensional $(3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D)$ exige um maior nível de operações semiocognitivas. Acreditamos que sem esse mergulho conceitual, as iniciativas de resolução são frágeis e propensas a decisões equivocadas, função da distorção natural que o desenho em perspectiva promove no sólido geométrico.

2 - Desconstrução dimensional: o cerne do olhar geométrico

As discussões a respeito da desconstrução dimensional na aprendizagem de geometria, sem o refinamento adequado da Teoria

Semiocognitiva de Duval (1995, 2011, 2012, 2022), equivocadamente podem associá-la a um desmanche no uso literal da palavra, por exemplo, partir de um cubo (3D) para retângulos quadrados (2D) e por sua vez para segmentos (1D), perpendiculares ou não entre si, até chegar a elementos adimensionais, o que não é verdade. A desconstrução dimensional das formas $(nD \rightarrow (n - 1)D)$, por exemplo, é um gesto cognitivo, assim, a apreensão perceptiva atentiva inicia um reconhecimento não só das unidades figurais que compõe a forma, como também formaliza suas relações conceituais. Para Duval esse tipo de desconstrução:

> Permite analisar a transformação de uma forma dada em outra forma de mesma dimensão, mesma que ela pareça completamente diferente. A enunciação das propriedades justificando essa transformação se faz considerando as unidades figurais de um nível imediatamente inferior: os planos para as figuras 3D, as redes de retas para as figuras planas, ou mesmo os pares de pontos (um ponto e sua imagem) (DUVAL, 2011, p. 89).

Em qualquer gesto que vise um processo de compreensão e resolução de um problema em geometria, havendo uma figura ou a necessidade de construí-la, coordenar as declarações provenientes de ambos os registros textual e figural só será eficiente se cognitivamente ocorrer a desconstrução dimensional. Em geral para a geometria plana o olhar precisa desvincular somente dos princípios da percepção gestáltica, principalmente o fator do fechamento, já na geometria tridimensional em perspectiva no plano, é preciso também discernir suas propriedades tendo como elemento conflitante a subjetividade espacial em alguns de seus elementos geométricos (DUVAL, 1995, 2004, 2017).

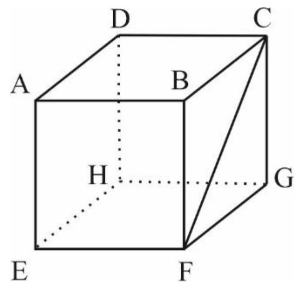
Para uma figura presente num problema de geometria, complexa ou não, principalmente no ensino fundamental, deve-se oportunizar no processo de ensino e de aprendizagem a possibilidade de exceder-se sua iconicidade, mesmo que o simples reconhecimento da forma já defina a questão. Isso porque, a maneira matemática de "ver" exige treinamento, sem o qual não se tem a sensibilidade visual necessária para associar as fundamentações teóricas que definem o objeto geométrico em questão. Dessa forma, nos limitaremos a desencadear um processo resolutivo por memorização, mas sem a real compreensão dos fatos (DUVAL, 2012).

O uso da técnica de desenho em perspectiva traz consigo elementos potencialmente conflitantes, uma vez que o eixo que define a profundidade precisa ser posicionado no mesmo plano que os demais, sendo, portanto, essencial sempre direcionar o olhar para identificar e definir as unidades figurais que irão compor sua base representativa, amparado nas hipóteses reveladas no enunciado. Uma vez que não existe desconstrução dimensional desarticulada do discurso geométrico, a iniciativa de ampliar as relações, propriedades referentes as representações semióticas em perspectiva (3D/2D), vinculadas ao problema que se deseja resolver, quando reconhecidas, reduzem de forma significativa caminhos equivocados. Até porque, o acesso ao objeto segue rigorosamente pela associação e coordenação das unidades de sentido, seja no registro da língua natural, seja no registro figural (SOUZA; MORETTI; ALMOULOUD, 2019).

A seguir, utilizando o exemplo descrito por Moretti (2002), a correspondência entre os pontos do hexaedro regular da Figura 2 e sua projeção no plano, exemplificamos a importância de se opor a percepção gestáltica e acessar o reconhecimento do objeto geométrico teorizando a figura.

Considerando o cubo abaixo, pergunta-se, o triângulo CBF é retângulo?

Figura 2 - Hexaedro regular.



Fonte: adaptado de MORETTI (2002, p. 360).

O uso comum nos livros didáticos da imagem acima tende a reduzir a afirmação de que o triângulo CBF não seja retângulo, o que não retira a peculiaridade de que a perspectiva (3D/2D) desenhe uma abertura obtusa entre os segmentos BC e BF. Contudo, o sincronismo entre os registros figural e textual orienta ~~a~~ partir da definição da unidade geométrica de base, cubo (3D), e cognitivamente direcionar sua atenção para as superfícies planas que contém faces quadradas (2D/2D), caracterizando o primeiro gesto de desconstrução dimensional. É essencial ter em mente que, o objeto tridimensional permanece, o que está em cena é o redirecionamento da percepção para um dos infinitos planos que o formam e assim, reconhecer através das propriedades que definem um quadrado que os segmentos BC e BF são perpendiculares entre si em B e, portanto, o ângulo em B é reto. Desse modo, retornando ao objeto inicial (cubo), pode-se confirmar que o triângulo CBF, quanto aos seus ângulos internos, é um triângulo retângulo.

O exemplo acima, trata de um sólido frequentemente mostrado no ambiente de sala de aula, ademais, sua representação 3D/3D está presente no cotidiano, como por exemplo o cubo mágico, em decorrência disto, haveria a necessidade cognitiva de realizar a desconstrução dimensional da forma?

Observe-se que, mesmo em sua simplicidade, o questionamento estava firmado numa relação entre unidades figurais bidimensionais (triângulo, ângulo), e que qualquer dedução imediata ou tem sua origem em um processo de desconstrução dimensional já realizado e por memória faz-se o resgate da certeza, ou simplesmente a resposta é associada a uma situação semelhante, nesse caso, não caracterizando um aprendizado significativo.

Com efeito, a solução desse exemplo é governada pelo enunciado, a convicção desse cenário é evidenciada por Duval quando afirma "as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez, do que é dito no enunciado como hipótese. Isso implica numa subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva [...]" (DUVAL, 2012, p. 133).

Assumir essa postura ativa diante de qualquer problema de geometria, havendo ou não uma figura, não se resume somente a listar os elementos geométricos numa ordem decrescente quanto as suas dimensões. Quer dizer, torna-se extremamente necessário a análise do vocabulário, fazendo uso eficiente das funções discursivas. Este é, definitivamente, o maior obstáculo, dado ao fato que "a geometria requer a utilização de um vocabulário técnico pesado" (DUVAL, 2012, p. 28).

Se não bastasse o vocabulário próprio utilizado na geometria, há ainda a sua extensão semântica e a alguns termos que se misturam com o vocabulário comum, juntos formam sem sombra de dúvida o maior desafio para se adentrar na maneira matemática de ver, raciocinar e operar (DUVAL, 2012).

A necessidade de operar efetivamente sobre representações figurais tridimensionais constitui-se em obstáculo, conceitualmente por se tratar de uma porção limitada do espaço (LIMA, 2006). Os elementos geométricos que potencialmente pertencem a figura vão muito além das representações canônicas dos manuais escolares, em que o objeto se atende pelo contraste simplesmente de suas arestas e vértices.

Quando se estuda pirâmides no Ensino Médio, por exemplo, é comum modelar problemas que busquem quantificar o seu volume exigindo um tratamento algébrico para determinar sua altura, uma vez que o volume de uma pirâmide é a terça parte do produto da área de sua base por sua altura. O exemplo a seguir, integrou além da prova do ENEM 2016 a pesquisa[2] de Moser (2020) que tinha como proposta identificar as apreensões nas resoluções de problemas de geometria espacial no terceiro ano do Ensino Médio.

A Figura 3 mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m. Assim, os valores aproximados para a altura e o volume da pirâmide de Quéops, são?

[2] Mais detalhes sobre essa pesquisa são encontrados na referência Moser (2020).

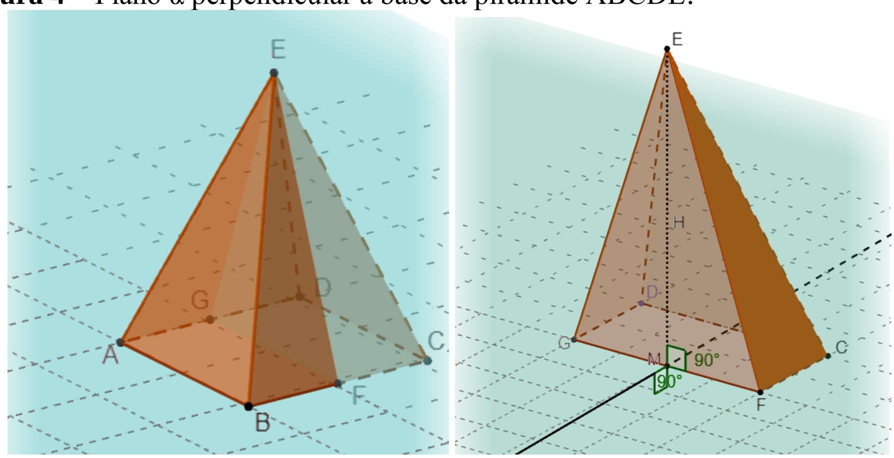
Figura 3 - Fotografia da pirâmide de Quéops em Gizé no Egito.

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Inicialmente, dada a natureza ideal dos objetos matemáticos, é necessário compor uma representação semiótica que permita o acesso as propriedades do objeto exposto na fotografia (DUVAL, 2012). Mesmo que a representação da pirâmide de base quadrada em perspectiva (3D/2D) tenha como consequência distorções no contorno de suas faces, os registros discursivo e figural são semanticamente compatíveis, ou seja, as hipóteses apresentadas no enunciado não exigem tratamentos sobre a figura a fim que haja o seu reconhecimento (SEMMER; SILVA; NEVES, 2013). Por outro lado, a determinação do seu volume exige um olhar capaz de suprimir a trivialidade da percepção usual e adentrar num gesto de reconhecimento dos elementos figurais que não estão visíveis na imagem (DUVAL, 1995, 2004, 2017).

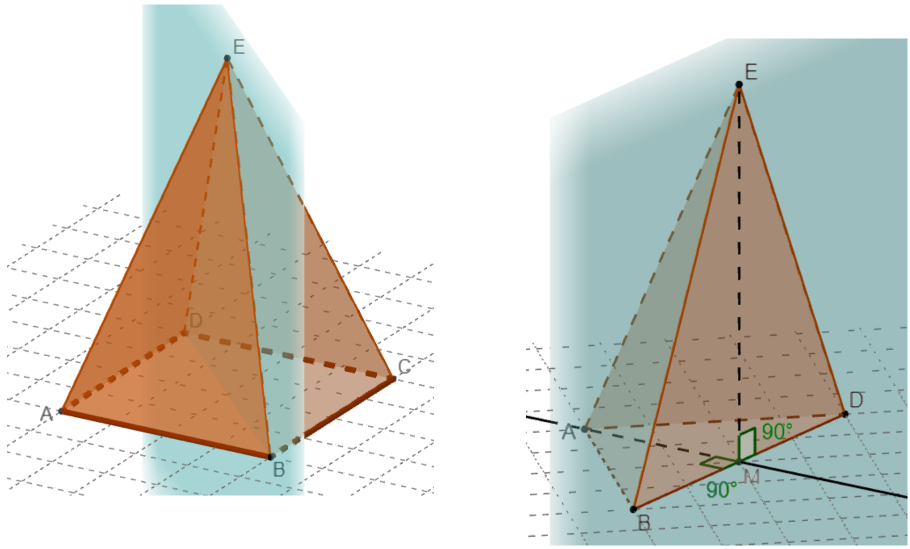
Considerando que todo sólido geométrico consiste numa porção limitada do espaço, por sua vez constituído por planos, nossa percepção visual será sempre parcial as unidades geométricas que definem a figura tridimensional (LIMA, 2006). Dessa forma o acesso a esses elementos, de modo particular o segmento que representa a altura da pirâmide do exercício em questão, por não pertencer aos planos que contém os pontos mais externos da pirâmide, só será acessada traçando-se planos perpendiculares a sua base tendo como um de seus pontos o vértice da pirâmide. Entre os infinitos planos possíveis vamos nos ater a expor na Figura 4 e na Figura 5 somente os planos α e β, respectivamente.

Figura 4 – Plano α perpendicular a base da pirâmide ABCDE.



Fonte: os autores.

Figura 5 – Plano β perpendicular a base da pirâmide ABCDE



Fonte: os autores.

Respectivamente, os planos α e β possibilitam direcionar o olhar para os triângulos EGF e ECB ambos isósceles por hipótese, caracterizando um importante reconhecimento (3D → 2D), todavia o percurso heurístico de toda resolução em geometria permeia pela interação sinérgica dos gestos cognitivos já citados no Quadro 1, o que significa seguir ampliando a lente teórica do objeto geométrico de modo a fixar a atenção nas unidades figurais 2D e 1D, os segmentos da base dos respectivos triângulos EGF e ECB, ou seja, acolher o fato de que os segmentos GF e AB são congruentes e, por hipótese, possuem o comprimento equivalente a 214 m, da mesma forma que o segmento AC de tamanho $214\sqrt{2}$ m representa a medida da diagonal do polígono da base da pirâmide. Ambas as informações resultam da redução dimensional (2D → 1D).

Por fim, um último direcionamento do olhar se faz necessário, assumir o fato de que o ponto médio M tanto do segmento GF quando do segmento AC em função de se tratar de uma pirâmide regular é uma das extremidades do segmento que representa sua altura, configurando assim a última redução dimensional (1D → 0D) para se justificar o uso do tratamento conhecido como teorema de Pitágoras no triângulo AME. Podendo assim concluir $7\sqrt{382} \cong 136{,}8$ m é sua altura, e consequentemente o volume da pirâmide corresponde a $(320572\sqrt{382})/3 \cong 2.088.507{,}4$ m³, um valor tão impressionante quanto sua própria estrutura.

3 - Análise e discussões

Mesmo que a princípio, determinar o volume de uma pirâmide regular de base quadrada não demonstre um nível elevado de complexidade, é preciso atuar sobre a representação figural, a partir dos gestos cognitivos próprios da geometria, de modo a reconhecer as propriedade e relações das unidades geométricas que constituem a figura espacial em questão, pois para Duval:

> O reconhecimento visual das formas escapa a todo controle intencional. Existem leis de organização de dados visuais, colocadas em evidência pela teoria da *Gestalt*, que impõem o reconhecimento de certas formas contra o reconhecimento de outras formas, mesmo se essas são verbalmente evocadas (DUVAL, 2022, p. 16).

Ao fazer uso dessa questão em sua intervenção didática, Moser (2020) constatou que, dos 11 estudantes que participaram da pesquisa, aproximadamente 45% deles demonstraram incoerência quanto ao reconhecimento dos segmentos que estariam associados ao percurso didático para se determinar não só a altura da pirâmide como também o seu volume, exemplo claro de um reconhecimento parcial das unidades geométricas e suas respectivas propriedades.

De fato, transpor a limitação visual que o olhar icônico estabelece sobre a imagem para adentrar no gesto da desconstrução dimensional (3D → 2D → 1D → 0D) através do olhar não icônico, por não se configurar como um gesto cognitivo natural da nossa percepção, exige assumir uma postura totalmente nova com relação ao objeto figural, de modo que em sintonia com as hipóteses enunciadas, o registro figural realmente atue heuristicamente para uma solução baseada nas propriedades que regem o objeto geométrico em questão, e não em ideias regidas pela percepção gestáltica (DUVAL, 1995, 2004, 2017).

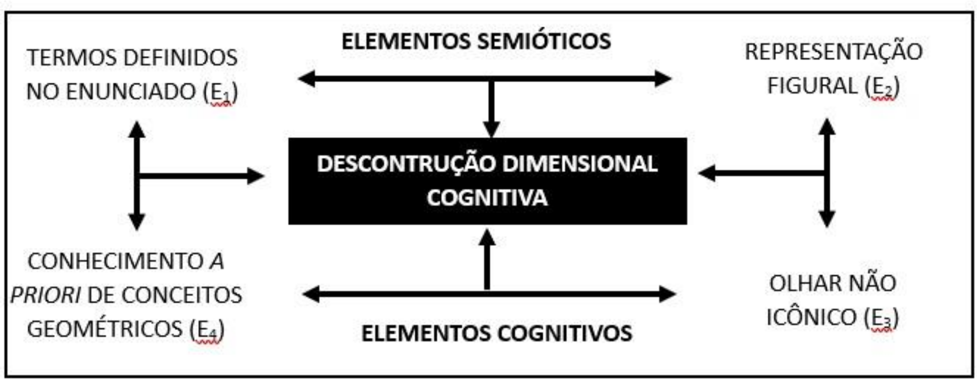
Executar o gesto cognitivo da desconstrução dimensional a partir de um problema de Geometria Espacial, não só contempla uma etapa a mais (3D → 2D) para acessar a base teórica do objeto envolvido, mas principalmente o acesso a sua representação quando em perspectiva, que por incidência do anamorfismo torna imprescindível o uso e a atuação da visualização não icônica, visto que, a percepção global da figura geométrica (3D/2D) é convidativa a reconhecimentos superficiais e equivocados (SEMMER; SILVA; NEVES, 2013).

Esses fatos, expõem a necessidade de que as propostas e estratégias de ensino que abordem a Geometria Espacial, principalmente na Educação Básica, contemplem o reconhecimento das propriedades que definem os objetos geométricos, assim como, representações em modelos 3D, o que oportunizaria a atuação conjunta da apreensão perceptiva visual e tátil, desse modo, a rede de informações proveniente do objeto em sua representação 3D/3D, ao estabelecer relações conceituais com maior fonte de estímulos, poderia se constituir em uma ferramenta de auxílio para atenuar as rupturas de reconhecimento causadas pelo anamorfismo nas figuras, quando representadas em 3D/2D. Uma vez que, de acordo com Castro, Arrais e Paula (2021, p. 11) a memória visual, possui a “capacidade de recordar-se de algo, que no momento não está mais no campo de visão”.

Além do mais, baseado no fato de que a imagem de uma figura geométrica qualquer “apresenta certas propriedades do objeto e oculta outras” (DUVAL, 2018, p. 6), na utilização do desenho em perspectiva para representar um sólido geométrico durante o percurso de aprendizagem é pertinente também, contemplar representações com diferentes pontos de vista do mesmo objeto. A ampliação da experiência visual em relação às unidades figurais elementares que semioticamente constituem a figura, bem como às subfiguras que a compõe, mesmo sob influência do anamorfismo, é significativa na composição dos olhares (DUVAL, 1995, 2004, 2017).

Conforme afirma Duval (2011, p. 88), “uma representação só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação”, nesse sentido, a desconstrução dimensional, gesto cognitivo central e responsável por indicar caminhos metodológicos para a resolução de problema de natureza geométrica, está ancorada em algumas operações ou elementos semiocognitivos que vamos denominar de E_i: de natureza semiótica temos as indicações verbais presente no enunciado (E_1) e a imagem/figura (E_2), já de origem cognitiva temos o olhar não icônico (E_3) e o conhecimento *a priori* de conceitos geométricos (E_4), Figura 6.

Figura 6 – Alguns elementos semiocognitivos que geram a Desconstrução Dimensional Cognitiva das formas.



Fonte: os autores.

DUVAL (2022, p. 22), ao afirmar que a "desconstrução dimensional é inteiramente subordinada a um discurso axiomático ou axiomatizável", evidencia os elementos semióticos E_1 e E_2 como componentes iniciantes que deliberarão estímulos visuais no caso do registro discursivo e representações figurais nD/2D para n = {3, 2, 1}; e estímulos visuais e táteis para representações figurais 3D/3D. De forma sinérgica e dinâmica entram em cena os elementos cognitivos E_3 e E_4. O olhar não icônico, com sua habilidade de se desprender da percepção gestáltica, permite iniciar a decomposição das formas discriminadas na forma geométrica, porém, sempre coordenada pelos conceitos geométricos preestabelecidos e reconhecidos no enunciado, posto que, numa figura geométrica é notável a ocorrência de "unidades figurais que podem ser identificadas perceptivamente e que nem sempre coincidem com as que estão designadas no enunciado" (DUVAL, 2017, p. 210).

Para entender melhor esse mecanismo, podemos voltar a questão do ENEM 2016 descrita anteriormente. De início os estímulos visuais provenientes dos elementos semióticos (E_1 e E_2) precisam evocar os elementos cognitivos (E_3 e E_4) com a intenção de tecer uma rede de significados que irão formalizar um processo válido para se determinar o volume da pirâmide.

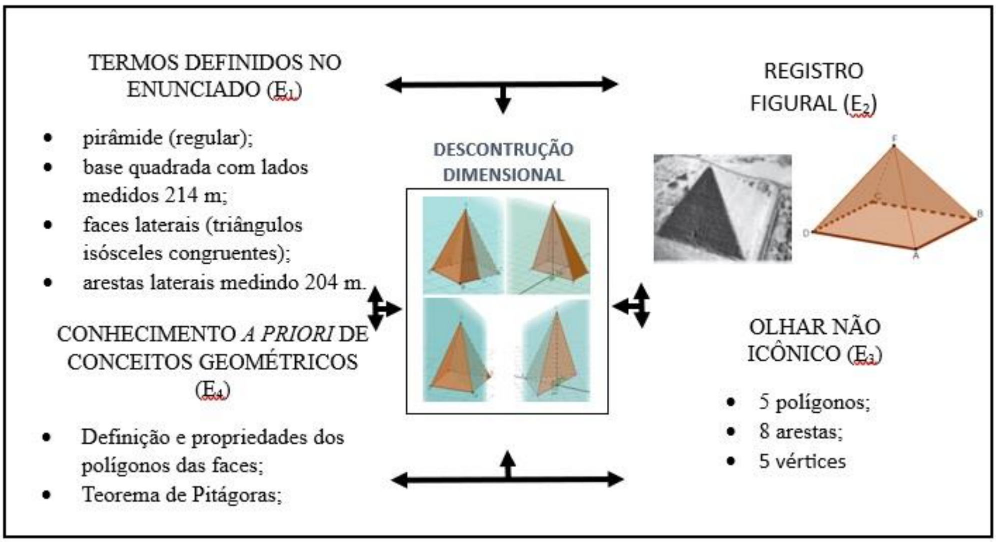
Mesmo que a Figura 6 induza uma organização quanto a atuação dos elementos semiocognitivos, o sincronismo sendo dinâmico e coordenado por gestos intelectuais, qualquer tentativa de descrever a ordem com que a desconstrução dimensional vai elencando as propriedades geométricas é, no melhor cenário, muito aquém do que realmente acontece durante esse processo que antecede a atuação da apreensão heurística.

Entretanto, cognitivamente Duval nos presenteia com um exemplo ilustrativo quando diz que:

> [...] a figura de um cubo ou de uma pirâmide (3D/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, de triângulos etc. (unidades figurais 2D/2D). E os polígonos são por sua vez decompostos em segmentos de retas (unidades figurais 1D/2D). E as retas, ou os segmentos, podem ser decompostos em "pontos" (unidades 0D/2D) (DUVAL, 2022, p. 18).

Embora haja congruência semântica entre a representação visual e o que é dito no enunciado da questão do ENEM 2016, a desconstrução dimensional (3D → 2D → 1D → 0D) em seu percurso para formalizar a nível de consciência o reconhecimento das unidades e suas relações conceituais, exige saberes teóricos (E_4) para superar a incongruência dimensional entre os registros discursivo e figural (3D/2D), para assim expor a heurística de acessar o volume da pirâmide através da determinação da medida do segmento de sua altura, através do tratamento figural teorema de Pitágoras (DUVAL, 1995, 2011, 2004, 2017).

Figura 7 – Ilustração dos elementos semiocognitivos atuando na questão do ENEM



Fonte: os autores.

CONCLUSÕES

No presente estudo, buscamos analisar a atuação do gesto cognitivo denominado desconstrução dimensional no contexto tridimensional. Com base na teoria de Duval e nas leis da *Gestalt* notamos que a representação de uma figura em perspectiva (3D/2D), comum no percurso de ensino da Geometria Espacial, apresenta peculiaridades que, quando ignoradas, reduzem e até bloqueiam a capacidade de operar o potencial heurístico que é próprio a toda figura geométrica.

Dentro de um ambiente regido por propriedades geométricas enunciadas em um problema, o potencial heurístico ou a capacidade da figura de se “reinventar” é rigorosamente dependente de um olhar que não se prenda na percepção imediata. Dito de outra maneira, a figura tridimensional quando representada em perspectiva, pela ação do anamorfismo expõe distorções visuais que sem a atuação da apreensão perceptiva atentiva permitirá que o olhar icônico, pela sua submissão aos princípios gestálticos, seja responsável por gerar rupturas conceituais entre os elementos figurais e discursivos.

Depreendemos do estudo, que o exercício da desconstrução dimensional está associado a ação eficiente e sinérgica de alguns elementos semiocognitivos (os E_i’s), em que, a percepção visual ao acessar os registros semióticos discursivo (E_1) e figural (E_2) deverá evocar o elemento cognitivo do olhar não icônico (E_3). Este, em sintonia com o conhecimento geométrico (E_4), atuam sinergicamente buscando a descoberta e a compreensão de todas as reconfigurações possíveis da figura. Contudo, é importante reconhecer que no contexto tridimensional, a imagem em perspectiva e a necessidade de acessar os planos que irão conter os elementos lineares que formalizam as propriedades do objeto, ampliam consideravelmente o custo cognitivo de atuar heuristicamente sobre a figura.

Percebemos ainda, que o uso de modelos tridimensionais de sólidos geométricos, constitui-se em uma importante ferramenta para atuar no gerenciamento consciente do olhar, visto que, a possibilidade de ampliar a memória visual através da percepção tátil de algumas propriedades que definem o objeto geométrico, contribui para que os estudantes desenvolvam a habilidade de analisar e interpretar informações que transcendem a percepção imediata.

Enfim, acreditamos que a compreensão ampliada e significativa dos objetos tridimensionais e do próprio espaço geométrico estão permeados pelo gesto cognitivo da desconstrução dimensional, que possibilita "ver" a forma geométrica pelas suas propriedades, e pode suprimir qualquer obstáculo que advém da complexidade da Geometria Espacial, como por exemplo o anamorfismo que sofre suas representações no plano. Dessa forma concluímos pela necessidade crescente de ampliarmos o conhecimento e a aplicação do gesto intelectual da desconstrução dimensional sobre as figuras tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CASTRO, Joelma F.; SANTOS, Edilson de A. dos; ARRAIS, Luciana F. L. **Percepção matemática na educação infantil: Contribuições para a prática educativa.** Revista Contexto & Educação, [S. l.], v. 38, n. 120, p. e12461, 2023. DOI: 10.21527/2179-1309.2023.120.12461. Disponível em: https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/12461.
Acesso em: 10 out. 2024.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berné: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. de: RESTREPO, Myriam V., Cali/Colômbia: Programa Editorial Universidad del Valle, 1 ed., 2004.

DUVAL, Raymond. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n. 10, p. 5–53, 2005.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registos de representações semióticas. Org. de: CAMPOS, Tânia M. M., Trad. de: DIAS, Marlene A., 1 ed., São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. de: MORETTI, M. T., **Revemat,** v. 07, n. 1, p. 118–138, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118 Acesso em: 12 de ago. 2024.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. de: RESTREPO, Myriam V., Cali/Colômbia: Programa Editorial Universidad del Valle, 2 ed., 2017.

DUVAL, Raymond. Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. Trad. Bruno D´Amore. **Rivista - La matematica e la sua didattica**. Anno 26, ottobre, n. 2, 2018.

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: Desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. [Tradução Cleide Ribeiro Mota Arinos; José Luiz Magalhães de Freitas; Méricles Thadeu Moretti]. **Revemat**, v. 17, p. 1–52, jan./dez. Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2022. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e85937

GOMES FILHO, J. **Gestalt do objeto: Sistema de leitura visual da forma**. 8 ed. São Paulo: Escrituras, 2008.

LIMA, Elon Lages, Coleção: A Matemática do Ensino Médio – Vol. 2, Rio de Janeiro: SBM, 6ª Ed. 2006.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**, ano 02, n. 6, p. 343–362. Itajaí, set/dez. 2002. Disponível em: https://periodicos.univali.br/index.php/rc/article/view/180/152 Acesso em: 19 de set. 2024.

MORETTI, Méricles Thadeu. Estudo das apreensões e dos olhares em geometria.VI **Congresso Internacional de Ensino da Matemática** – ULBRA, Canoas – Rio Grande do Sul, Brasil. 2013.

MORETTI, Méricles T.; CANS, Adalberto. Releitura das Apreensões em Geometria e a Ideia de Expansão Figural a Partir dos Estudo de Raymond Duval**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática –**

JIEEM, v. 16, n. 3, p. 303–310, 2024. Disponível em: https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/10789 Acesso em: 18 de julho 2024.

MOSER, Adriano. As apreensões em geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas. Joinville, 2020. 175p.

SEMMER, Simone; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; NEVES, Marcos Cesar Danhoni. Anamorfose no Ensino de Geometria. ALEXANDRIA - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 3, p. 61–86, novembro 2013.

SOUZA, Roberta N. Sodré; MORETTI, Méricles T.; ALMOULOUD, Saddo Ag. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.l.], v. 21, n. 1, abr. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39101 Acesso em: 23 agosto 2024.

CAPÍTULO IV

A Operação Semiocognitiva de Mudança de Dimensão em Raymond Duval: uma linha do tempo

Daiana Zanelato dos Anjos[I]
Méricles Thadeu Moretti[II]

[I] Secretaria de Estado da Educação de SC Orcid: http://orcid.org/0000-0001-5844-805X

[II] Prof. do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica/UFSC. https://orcid.org/00000002-3710-9873.

INTRODUÇÃO

A operação semiocognitiva de mudança de dimensão é central na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) no que se refere ao estudo de Geometria. A análise semiótica relativa à uma figura geométrica se dá pela determinação de unidades figurais constitutivas, possibilidades de articulação dessas unidades figurais nas figuras e a modificação das figuras obtidas (DUVAL, 2004, p. 157), nesta última está a mudança de dimensão ou desconstrução dimensional. A presente pesquisa apresentou a operação semiocognitiva de mudança de dimensão na obra de Raymond Duval e o seu desenvolvimento ao longo do tempo, construindo assim, uma linha do tempo. Para tanto, foram investigados cinco textos de Duval, três artigos e dois capítulos de livro disponíveis em português ou espanhol:

- (Texto 1) “Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência”, **publicado em 1988** e traduzido para o português, será referenciado como Duval (2012a);
- (Texto 2) “Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento”, **publicado em 1993** e traduzido para o português, será referenciado como Duval (2012b);
- (Texto 3) Capítulo IV do livro icônico “Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales” **publicado em 1995** e traduzido para o espanhol, será referenciado como Duval (2004).
- (Texto 4) “As condições cognitivas de aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos” **publicado em 2005** e traduzido para o português, será referenciado como Duval (2022);
- (Texto 5) Capítulo 1 do e-book intitulado “Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval” **publicado em 2023** pelos Organizadores Méricles Thadeu Moretti e Eduardo Sabel, serão referenciados como Duval (2023).

A ordem cronológica apresentada anteriormente segue a data de publicação dos textos. Cronologicamente, a operação semiocognitiva de mudança de dimensão foi aprimorada ao longo dos anos por Raymond Duval: quais tipos de transformações tal operação semiocognitiva sofreu?

1- DO QUE SE TRATA A OPERAÇÃO SEMIOCOGNITIVA DE MUDANÇA DE DIMENSÃO?

Para Duval (2004, p. 157), os elementos constitutivos de uma figura geométrica são uma combinação de valores dos tipos dimensional e qualitativo. As variáveis dimensionais estão ligadas ao número de dimensões da figura geométrica, já a variável qualitativa, refere-se às variações de forma, contorno, cor e tamanho. Em especial, Duval (2004, 2012a, 2012b, 2022) percebeu em seus estudos que há uma predominância de unidades de dimensão 2 em relação às dimensões inferiores no que se refere ao tratamento de figuras geométricas, justificando essa ocorrência às leis gestálticas de continuidade (GOMES FILHO, 2009). Duval (2004, p. 161) percebeu que os estudantes evitam realizar a mudança dimensional de dimensões 2 para dimensões inferiores, uma vez que essa mudança se faz por uma apreensão operatória, ou seja, há a necessidade de operar sobre a figura geométrica dada, realizando reconfigurações na figura de partida.

Este preâmbulo nos encaminha para uma conceituação sobre a operação semiocognitiva de mudança de dimensão posta por Duval desde o artigo publicado em 1988. Vamos tomar inicialmente a mudança de dimensão como sendo uma operação (tratamento) a ser realizada sobre a figura geométrica com o intuito de ver para além do que o registro discursivo mostra e aquilo que a percepção pura teima em focalizar.

Diante dessa ideia de conceitualização inicial, que partiu do que foi apresentado na obra em que se encaixa o Texto 4, trabalhamos no sentido de compreender o desenvolvimento dessa operação semiocognitiva ao longo dos estudos de Raymond Duval. Nas linhas que seguem, mostraremos, em cada obra das quatro enunciadas anteriormente, o desenredo apresentado pelo autor no trabalho com a ideia de mudança de dimensão.

2 - TEXTO 1: CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA E MUDANÇA DE DIMENSÃO

Em seu artigo de 1988 intitulado "Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência", Duval tem como preocupação a mudança que aconteceu no ensino de matemática no que se refere às maneiras de ver as figuras geométricas. O autor (2012a) indica que havia uma proibição de ensinar a visualização heurística aos estudantes, focalizando apenas na identificação de formas e contornos das figuras geométricas. Dessa forma, Duval (2012a) concentra o trabalho do Texto 1 na apresentação de três maneiras diferentes de ver as figuras geométricas, as apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial (2012a, p. 118).

À apreensão perceptiva Duval (2012a, p. 124) apresenta atenção, uma vez que é indicado que "os alunos se apegam, na grande maioria, a apreensão perceptiva". Nesta situação apresentada, Duval (2012a, p. 124) aponta que as apreensões perceptiva e discursiva devem caminhar em sinergia ao ver uma figura geométrica, uma vez que, ao ler o enunciado e construir a figura ou analisá-la, muitos estudantes não retornam ao enunciado.

Especificamente, no que se refere à apreensão operatória, que é aquela em que algumas modificações mereológicas, óticas ou posicionais são realizadas na figura, Duval (2012a) focaliza a atenção nas modificações mereológicas do tipo reconfiguração intermediária. As modificações mereológicas permitem que uma forma inicial seja modificada como um todo fracionado em partes homogêneas ou heterogêneas (DUVAL, 2012a, p. 127). O interesse em fracionar uma figura geométrica vem de que "as partes elementares obtidas por fracionamento, podem ser reagrupadas em várias subfiguras”, todas pertencentes à figura inicial, originando a operação de reconfiguração intermediária. Percebe-se que nesta operação são realizadas modificações em unidades constitutivas das figuras tratando variações visuais qualitativas, uma vez que, que as mudanças ocorrem nas formas e acontece, o que Duval (2004, p. 165) chama de reagrupamento do contorno global da figura.

As modificações exigidas na reconfiguração intermediária estão relacionadas à aspectos qualitativos das figuras geométricas e não dimensionais. No mais, Duval (2012a) aponta neste artigo, que não seria possível analisar todo o campo da apreensão operatória, limitando este estudo à reconfiguração intermediária.

3 – TEXTO 2: O ENSINAR A VER E A MUDANÇA DE DIMENSÃO

O texto intitulado “Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento”, publicado em 1993, tem como foco a diversidade e complexidade das transformações semióticas.

Neste sentido, Duval (2012b, p. 272) ao apresentar a operação semiocognitiva de tratamento, mostra a operação de reconfiguração como um tratamento particular para as figuras geométricas, dando ao registro uma característica heurística. Neste sentido, o autor ainda aponta que

> o único modo de discriminar as unidades significantes de uma representação é realizar a observação, por um lado, variações de representações sistematicamente efetuadas em um registro e, por outro lado, as variações concomitantes de representação em outro registro” (DUVAL, 2012b, p. 285).

Em relação ao tema em voga, que é a mudança de dimensão, podemos perceber que a unidade constitutiva qualitativa é apresentada (reconfiguração) e que é enfatizada a atividade de construção de figuras. Esta atividade privilegia a formação de representação de um objeto matemático, um dos pontos para que uma representação seja considerada registro de representação. Essa atividade de construção de figuras ainda é elencada por Duval (2012b, p. 287) como aspecto produtor heurístico das figuras. O autor ainda indica que a aprendizagem sobre os tratamentos figurais deve estar centrada na apreensão operatória e não na sequencial e discursiva (DUVAL, p. 289). E como vimos, na apreensão operatória está a mudança de dimensão, mas que neste texto não se aprofundou nos aspectos mais específicos.

No Texto 2, o exemplo de reconfiguração considerado mostra homotetia no plano e as configurações em profundidade que podem levar o estudante à abordagem de outras noções como a noção de baricentro (DUVAL, 2012b, p. 294).

4 – TEXTO 3: A DIMENSÃO COMO UNIDADE CONSTITUTIVA DE UMA FIGURA GEOMÉTRICA

Como mencionado anteriormente, para ver uma figura geométrica é necessário atentar aos seus elementos constitutivos que combinam as variáveis de dimensão e qualitativa. Para o autor, na operação cognitiva de tratamento sobre uma figura geométrica lidamos com as apreensões que podem ser do tipo: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial (DUVAL, 2004). Na operação operatória é necessário realizar modificações ou reconfigurações no sentido de modificar a figura de partida em outras subfiguras e assim, passamos a ter a ideia de parte-todo, assim como, ultrapassamos a apreensão perceptiva da figura inicial que, muitas vezes, “se focaliza automaticamente sobre as unidades figurais de dimensão 2” (DUVAL, 2004, p. 160).

Na apreensão operatória sobre figuras geométricas, a operação de reconfiguração reorganiza a figura inicial em subfiguras e essa reorganização proporciona na subfigura final um contorno global diferente da figura inicial, o que pode permitir àquele que opera uma visão distinta de propriedades geométricas. Com essa ideia, Duval (2004) nos instiga a perceber que para o estudante é necessário a exploração da figura geométrica, uma vez que a percepção rápida e imediata somada a lei gestáltica de continuidade podem nos prender ao “primeiro golpe de olhos” (DUVAL, 2004, p. 170). Na exploração e reconfiguração necessárias, se percebe um fenômeno chamado por Duval (2004, p. 171) de não-congruência dimensional na coordenação entre figura e raciocínio, uma vez que, as explorações heurísticas tendem a privilegiar as unidades de dimensão 2 em detrimento de unidades de dimensões inferiores. Duval (Ibidem) alerta que o raciocínio “necessita de um trabalho em um número de dimensões inferior no qual os objetos se encontram figuralmente representados”.

A mudança de dimensão no Texto 3 aparece mais fortemente quando o autor menciona a aplicação na geometria espacial, em casos mais simples (DUVAL, 2004, p. 171). Ao mencionar a mudança de dimensão em perspectiva, Duval (Ibidem) nos aponta que “uma representação em perspectiva é uma representação plana em que a terceira dimensão não está presente a não ser sugerida por alguns índices”. Assim, o autor alerta que ao ser representada no plano, a representação da terceira dimensão precisa ser indicada, ou seja, como menciona a lei gestáltica de continuidade, a tridimensionalidade é um efeito que deve ser criado por meio de artifícios (GOMES FILHO, 2009). A representação em 3D exclui a variação de um ponto de vista, ou seja, se privilegia um ponto de vista particular e, ao esconder uma parte da figura, forma parte da resolução do problema (DUVAL, 2004, p. 172). No mais, a leitura da figura se faz necessária por meio de variáveis visuais suplementares, como por exemplo, cor (aumento no número de índices de posição no espaço de unidades figurais de dimensão 0, 1 ou 2.

Como forma de resolução para essa questão, Duval (2004, p. 172) aponta que com um modelo e a exploração de permite chegar em subfiguras diferentes se pode selecionar subfiguras de dimensão 2 que permitem a resolução dos problemas.

Como podemos perceber, Raymond Duval no Texto 3, indicou a dificuldade dos estudantes em operar em figuras geométricas mudando de dimensão (das maiores para as menores). Com o problema posto, apresentou a necessidade de trabalhar as apreensões operatória do tipo reconfiguração no sentido de reorganizar figuras, focando nos reagrupamentos que alteram o contorno global e de forma ainda inicial na mudança de dimensão, ao qual centralizou no caso da representação em perspectiva.

5 – TEXTO 4: FIGURAS NÃO ICÔNICAS E A DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL

O título dessa seção ilustra bem o que Duval (2022) enuncia em seu artigo que chamamos neste estudo de Texto 4. O autor inicia o texto mencionando que deve haver uma sinergia entre dois registros de representação para a compreensão em geometria: figural e o discursivo. Nesse texto, assim como no Texto 3, o foco é a aprendizagem de geometria, que o autor (DUVAL, 2022, p. 3) indica como um dos domínios de conhecimentos que possui atividade cognitiva mais completa, uma vez que, não basta resolver problemas, é preciso aprender a ver, interpretando gesto, linguagem e olhar. Não obstante, é um dos campos da matemática mais difíceis de ensinar e "mesmo quando os objetivos permanecem muito modestos, os resultados alcançados são decepcionantes" (DUVAL, 2022, p. 3).

A ideia de mudança de dimensão no que se refere à figura geométrica "consiste em decompô-las não importa qual a forma discriminada, quer dizer reconhecida como uma forma nD/2D, em unidades figurais de um número de dimensões inferior à esta forma" (DUVAL, 2022, p. 18) e, neste texto é chamada de desconstrução dimensional. Dos textos até aqui apresentados, no Texto 3 encontramos uma tentativa de conceitualização do termo desconstrução dimensional, um pouco avançada do que foi iniciado no Texto 1 de 1988.

Os modos de ver em Duval (2022, p. 2) são dois: o icônico e o não icônico. No modo de ver icônico é aquela de figuras convencionalmente utilizadas e mostradas em livros didáticos e em sala de aula. Já o modo não-icônico requer a desconstrução das formas icônicas e não está subordinado às propriedades geométricas da figura (MORETTI, 2013). As desconstruções de formas possíveis são: instrumental, decomposição heurística e a desconstrução dimensional.

No que nos afeta, focaremos apenas na desconstrução dimensional, uma vez que, além de ser o foco deste trabalho é indicado por Duval (2022, p. 2) como sendo o processo central da visualização geométrica. Nesse sentido, a mudança dimensional é condição para que a visualização e o discurso funcionem em sinergia e para que, assim se reconheça os objetos de conhecimento de cada um dos registros (DUVAL, 2022, p. 21). Essa noção é exemplificada a seguir:

> a enunciação das propriedades características de um paralelogramo, por exemplo, implica em desconstruir dimensionalmente uma figura simples 2D/2D em uma configuração de unidades figurais 1D ou 0D/2D. Porque as propriedades de um objeto 2D/2D são as relações entre os objetos representados pelas unidades figurais 1D/2D" (DUVAL, 2022, p. 21).

A desconstrução proposta acima é subordinada pelo registro discursivo e vai contra os processos de organização e de reconhecimento perceptivo da forma (DUVAL, 2022). E no que se refere à dimensão 0D (ponto) que na mudança dimensional é importante perceber que o ponto (0D) só aparece na intersecção de unidades figurais 1D/2D, indicado como uma característica irredutível e por meio de letras e não como visualização.

De forma contrária ao exposto, a intuição geométrica está muito baseada na percepção e esta é indicada como um problema já que impõe um modo comum de ver as figuras. Nisso, escapa um dos mecanismos cognitivos da visualização matemática: a desconstrução dimensional das formas

(DUVAL, 2022, p. 4). A desconstrução figural focaliza no aspecto da dimensão da figura geométrica e na mudança de dimensão. Mas é importante ressaltar, assim como lembra o autor, baseado na ideia de "intuição geométrica" do matemático francês Jules Henri Poincaré, que as figuras geométricas têm característica não icônica, ou seja, não parecem com nada da realidade, necessitando assim. de hipóteses que são dadas por meio do registro discursivo. Dessa forma, para que se desenvolvam as abordagens discursivas em geometria, deve-se desenvolver a desconstrução dimensional de formas.

Por fim, Duval (2022, p. 44) enuncia um novo fenômeno cognitivo fundamental: "o hiato entre o número de dimensões considerados para identificar uma unidade figural no que é visualizado e o número de dimensões levadas em conta para nomear os objetos e as relações que identificamos". E ainda, o autor esclarece que da palavra à visualização há um aumento de dimensões para efetuar a operação e no sentido contrário, esse número diminui. Nesta mesma ideia, Duval (2022, p. 45-46) finaliza apresentando uma ordem didática de exposição na introdução escolar de conhecimentos.

Como podemos perceber, o avanço à ideia de mudança de dimensão foi imenso neste Texto 4, o que indicaria este como referência aos leitores e pesquisadores que estudam esta temática específica.

6 – TEXTO 5: FOTOS, IMAGENS E FIGURAS GEOMÉTRICAS

Partindo de uma foto retirada na Praça François Villon em Aix-en Provence na França, Duval (2023) lança duas questões para reflexão: O que fotos, imagens e figuras geométricas, todas produzidas sobre uma superfície

2D de um meio físico 3D, transmitem? e como podemos reconhecer e o que cada uma dessas representações revela? Com essas indagações e a foto mencionada, o autor inicia o Texto 5 intitulado “O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!”. No título do artigo, Duval (2023) já dá indícios da discussão, uma vez que menciona os termos ver e inventar. No que percebemos de textos anteriores, o autor permanece centrando os estudos nos modos de ver em matemática e na questão heurística em torno da geometria. Duval (2023) neste texto também se concentra nos registros produtores de representação semiótica, introduzindo uma abordagem analítica para responder às perguntas mencionadas anteriormente no sentido de apresentar pontos para conscientização do estudante no modo de trabalhar no componente curricular de matemática.

Duval (2023, p. 60) apresenta que a fragilidade no ensino de matemática está localizada no fato de que “estamos apenas apresentando, explicando e ensinando conhecimentos matemáticos prontos”, ao invés de nos concentrarmos no trabalho de entender como os estudantes veem, dizem e substituem uma representação semiótica por outra.

No que se refere à mudança de dimensão, o autor se concentra nas unidades figurais e no que elas representam no plano e no espaço, assim como, para visualização em matemática. Duval (2023), entre outros pontos, focaliza a visualização de figuras 3D no plano (2D) e nos fenômenos que afetam a percepção da terceira dimensão.

Como mencionado por Gomes Filho (2009, p. 45), para a apreensão em 3D é necessário criar um efeito por meio de artifícios em uma superfície plana, percebido pelo emprego de luz, brilho, sombra, texturas, entre outros e, neste caso, Duval (2023, p. 41), mostra que o contraste de cores delimita zonas 2D e uma única unidade 2D é percebida como justaposição de unidades figurais 3D. Para tal conclusão, Duval (2023) trabalhou as ideias de horizonte e linha de fuga, ambas advindas dos estudos de perspectiva, inclusive, em obras de arte. Nisso, o autor buscou entender que a percepção da terceira dimensão no espaço se opõe à percepção 3D no plano e em razões homotéticas.

Duval (2023, p. 43) salienta que o ensino de geometria deveria estar organizado numa educação sobre o olhar, uma vez que, “olhar implica necessariamente que reconhecemos tudo ou parte do que vemos”, e ainda, que sejamos capazes de transitar de uma a outra representação visual.

Neste trabalho, Duval (2003, p. 45) indicou uma hierarquização para as unidades figurais na visualização geométrica: “as unidades figurais menores se fundem com as maiores” e “as unidades de dimensão inferior podem pertencer a duas unidades dimensionais superiores”. Assim como, na desconstrução de unidades figurais 1D em 0D é com frequência negligenciada quando a construção é instrumental em configurações 2D.

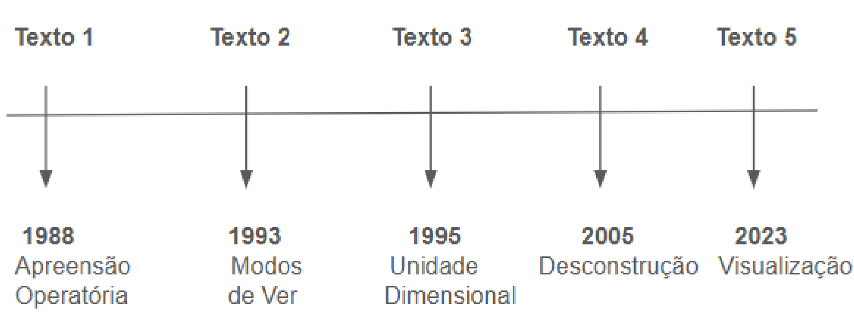
6 - CONSIDERAÇÕES: UMA LINHA DO TEMPO

A ideia da mudança de dimensão ou de reconfiguração, trabalhada por Duval desde 1988, pelo menos, é de forte impacto na aprendizagem matemática dos estudantes, não só por se tratar de geometria que é uma área de conhecimento complexa, mas por apresentar em seu cerne a identificação de unidades figurais e a visualização figural. A visualização figural extrapola a apreensão perceptiva, na qual os nossos olhos são viciados e exige mudanças que transformam a figura de partida por meio da apreensão operatória.

Percebemos, com este trabalho, que Duval avançou na ideia de mudança de dimensão, aprimorando a conceitualização, que foi apresentada no Texto 4 (DUVAL, 2022). Além disso, ao desenvolver a partir de 2005, a ideia de sinergia requerida entre os registros figurais e discursivos, principalmente, na visualização geométrica, há um refinamento dessa ideia no artigo de 2023, em que, diante disso, apresenta pontos para conscientização do estudante no modo de trabalhar no componente curricular de matemática.

Diante dos resultados deste trabalho, elaboramos uma linha do tempo com as marcações dos anos de publicação dos artigos por Raymond Duval e de palavras-chave, que indicariam a ideia central de cada Texto estudado, conforme a figura a seguir:

Figura 1: Linha do Tempo - mudança de dimensão em R. Duval



Fonte: Os Autores

As palavras-chave aos serem postas em um único discurso indicam o que a ideia de mudança de dimensão representa no que se refere à Teoria dos Registros de Representação Semiótica e, de certa forma, ao que, com o passar dos anos e dos estudos de Duval, foi se tornando central.

Percebemos que a mudança de dimensão impacta na apreensão heurística (apreensão perceptiva atentiva + apreensão operatória); em muitos casos, a mudança de dimensão é um caminho à expansão cognitiva, ou seja, é um caminho que permite levar ao acesso ao conteúdo matemático (MORETTI; CANS, 2023). Sabendo que o cerne da TRRS é a compreensão sobre o acesso ao objeto de conhecimento matemático, considera-se assim, que a ideia de mudança de dimensão é mais um aspecto que leva a essa compreensão, dessa vez, no caso específico da geometria.

BIBLIOGRAFIA

DUVAL, R Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. *REVEMAT*, v.7, n.1, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, 2012a.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de M. T. Moretti. Revemat, Florianópolis, v. 7, n. 2, 2012b.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas.* Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand* N, n° 76, p. 7- 27, 2005.

DUVAL, Raymond. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

GOMES FILHO, J. Gestalt do objeto: Sistema de leitura visual da forma. Sao Paulo: Escrituras (9. ed.), 2009.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, v. 15, n. 2, p. 289-303, maio/ago., 2013.

MORETTI, M. T.; CANS, A. Releitura das Apreensões em Geometria e a Ideia de Expansão Figural a Partir dos Estudos de Raymond Duval. Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática, v. 16, n. 3, p. 303–310, 2023.

SOUZA, R. N. S. S. Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem da geometria. *Tese (Doutorado).* Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. UFSC, Florianópolis, 2018.

ANEXO

MODE D'EMPLOI :

de « **Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer…** en mathématiques, bien sûr !»

à l'usage des élèves d'abord, de leurs enseignants et des didacticiens[1]

R. Duval[I]

[I] Professeur émérite da Université du Littoral Côte d´Opale (ULCO/Dunkerque).

Pour prendre conscience de la manière DE REGARDER pour VOIR ce qu'il faut voir dans une image, un dessin, un tableau, une figure géométrique euclidienne, ou une photo, il faut LES COMPARER en se posant deux questions :

Q.1 Qu'est-ce qu'on reconnaît au premier coup d'œil ?

Q.2 Quelles sont les oppositions qui permettent d'y distinguer des formes ou des surfaces significativement différents ?

Durant l'été 2019, 600 parapluies multicolores ouverts et juxtaposés ont recouvert la place François Villon à Aix- en-Provence. Méricles Thadeu Moretti en a pris une photo. L'intérêt de cette photo est de permettre trois comparaisons deux à deux parmi toutes celles possibles entre les cinq types de représentations bi-dimensionnelles que nous venons d'énumérer :

Bi.1 Un tableau et une figure géométrique euclidienne plane

Bi.2 Les représentations visuelles planes et la représentation de la troisième dimension de l'espace perçu

[1] « Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer… en mathématiques, bien sûr ! » fait référence au texte DUVAL (2023, annexe).

Bi.3 Les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques et les objets physiques représentés

Figure 1 (*Figure 1*)[1] Photographie des parapluies à la Place François Villon en Aix-en-Provence.

En outre elle permet de comparer toutes ces représentations bi-dimensionnelles avec la les objets réels avec la profondeur de l'espace que l'on voit, ou que l'on a pu voir si on avait alors été sur place.

Sur la photo, on peut reconnaître plusieurs choses au premier coup d'œil. Elles se distinguent par leur forme, par les tracés qui les sépare de à quoi elles sont juxtaposées et par leur couleur :

[1] Le mot e chiffre en italique se réfèrent au texte de Duval (2023, annexe).

C.1 Les parapluies ouverts.

C.2 Les ombres des parapluies sur le sol.

C.3 Les couleurs des parapluies.

C.4 Les baleines de chaque parapluie.

C.5 Les interstices de lumière entre les ombres sur la place

Pour répondre aux questions Q.1 et Q.2 que les comparaisons des représentations bi-dimensionnelles Bi.1, Bi2 et Bi3 soulèvent, il suffit de regarder laquelle des quatre choses C.1, C.2, C.3 et C. 4 qui constituent le contenu de la photo s'impose au premier coup d'œil.

1. Bi.1 Un tableau et une figure géométrique euclidienne plane

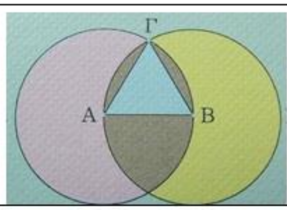
1.Q.1 Qu'est-ce qu'on reconnaît au premier coup d'œil ?

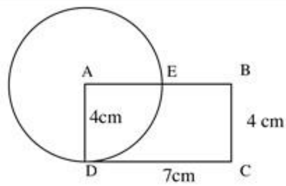
Au premier coup d'œil signifie « instantanément » en un temps plus bref que celui de dire « un », c'est dire en moins d'une seconde ! Cela exclut la possibilité de reconnaître deux ou choses en même temps. C'est le cas, par exemple, lorsque quelque chose vous saute yeux avant même que vous ne l'ayez regardé parce que votre attention est focalisée sur autre chose. Cette reconnaissance latérale dépend des expériences antérieures et surtout des intérêts de chacun qui orientent sa curiosité et ce qu'il fait spontanément de lui-même. Cette variable est idiosyncrasique. Elle ne permet pas d'identifier les facteurs qui déclenchent une prise de conscience des différentes manières de regarder une peinture une figure euclidienne plane qui a été instrumentalement construite.

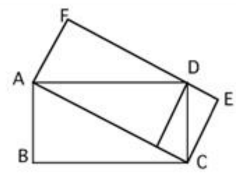
1.Q.2 Quelles sont les oppositions qui permettent d'y distinguer des formes ou des surfaces significativement différents ?

Une forme est un contour fermé, qui se détache d'un fond qu'il ne faut évidemment pas confondre avec le support matériel de la représentation (une paroi, une feuille de papier ou un écran électronique). Or dans toutes les représentations bi-dimensionnelles qui sont tracées à main levée ou à l'aide d'un outil sur un matériel, un basculement dans la distinction des formes que l’on voit au premier coup d’œil est toujours possible. Par exemple, dans la comparaison de la Figure 2, les formes que l’on reconnait dans la configuration euclidienne quadricolore ne sont pas les mêmes selon que l’on voit :

Figure 2 (*Figure 3*) Comparaison de trois configurations visuelles 2D/2D.







C1. Configuration codée par les associées à 3 des 4 points d’intersection permettant de **désigner des unités figurales 1D ou 2D**	C2. Configuration doublement codée (lettres et valeurs numériques), et associée à un énoncé de problème	C3. Configuration codée, associée à un énoncé de problème

— Le triangle vert dont l’un des côtés est le segment joignant les centres A et B des cercles violet et jaune, qui constituent le fond dont le triangle vert se détache

— Le rectangle vert et le trou triangulaire vert qui le laisse apparaître. Ils sont alors le fond dont se détachent une lunule violette et une lunule jaune se détachent. Et les extrémités de ces deux lunules délimitent deux segments circulaires tronqués par le trou triangulaire.

Autrement dit toutes les figures géométriques euclidiennes :

— Doivent se regarder en fonction du rapport entre la figure et le fond dont elle se détache, lequel n’est pas la feuille de papier ou l’écran

— Donnent lieu à un basculement de reconnaissance des formes et des surfaces que l’on distingue au premier coup d’œil.

1.Q.2.1 *Spécificité des représentations bi-dimensionnellement intentionnellement tracées*

Dans les deux cas, la propriété qui fait la puissance sémio-cognitives des représentations bi-dimensionnelles tracées, à main levée ou l’aide d’un outil vient des formes peuvent être PARTIELLEMENT SUPERPOSÉES et pas seulement juxtaposées.

On retrouve ces deux possibilités de basculement et la même possibilité de recouvrement partiel dans les configurations euclidiennes, bien qu'il n'y ait pas de couleurs pour distinguer les différentes formes mathématiquement pertinentes. Par exemple, pour et qui sont alors configuration superposant partiellement un cercle et un rectangle :

— Les deux côtés du rectangle AD et AE, désignés dans l'énoncé du problème, se détachent du fond constitué par le cercle et le rectangle

— Les deux rayons du cercle AD et AE se détachent du rectangle et du cercle, les deux étant tronqués par le secteur circulaire ADE, et qui sont alors le fond de la figure.

La seule différence entre la configuration euclidienne quadricolore et cette figure coordonnée à un énoncé de problème, vient de ce que les basculements se font entre des contours de surface et des tracés linéaires de segments.

Figure 3 (*Figure 8*) Décomposition morcelant et reconfiguration de deux unités figurales 2D

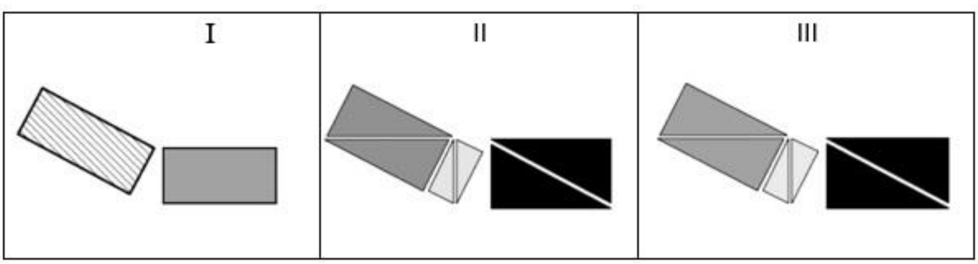
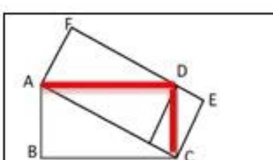


Figure 4 (*Figure 7*) La condition sémio-cognitive prérequis



La difficulté est de reconnaître AD et DC comme des diagonales et non pas seulement comme les côtés des deux petits rectangles obliques

La comparaison de ces configurations de la Figure 2 nous conduit donc à introduire la notion sémio-cognitive D'UNITÉS FIGURALES 2D ET D'UNITÉS FIGURALES 1D pour analyser toutes les représentations bi-dimensionnelles intentionnellement tracées ou peintes. L'utilisation heuristique de la troisième configuration de la Figure 2, qui ne comporte que des unités figurales 2D, se fait par des reconfigurations successives, qui pour être distinguées et donc vues, requiert l'utilisation de trois couleurs, Figure 3. La difficulté de son utilisation heuristique, Figure 4, vient de qu'il faut reconnaître le côté AB (unité figurale 1D) commun à deux rectangles (unités figurales 2D) et le côté DE (unité figurale 1D) commun à deux rectangles (2D) dont l'un est le même que celui du côté AB.

1. Q.2.2 *En quoi les photos, qui sont des représentations bi-dimensionnelles, non-sémiotiques différent-elle des tableaux et des figures géométriques ?*

Revenons maintenant à la photo des 600 parapluies multicolores ouverts. AUX différences des représentations bi-dimensionnelles précédentes, les photos ne peuvent pas être analysées en fonction du rapport figure/fond. Les unités figurales C.1, C.2, C.3, C. 4, et C.5 sont toutes juxtaposées et également données à voir d'emblée. Elles ne laissent pas apparaître des unités figurales totalement différentes en fonction d'un basculement de notre regard. Cette différence radicale vient de ce qu'elles sont produites automatiquement et instantanément par un appareil, qui en détermine le contenu : Figure 5; Figure 6. Les trois processus cognitifs de reconnaissance de ce que l'on voit ou regarde). Il y a seulement un glissement des unités figurales les plus proches à celles celle qui apparaissent de plus en plus éloignées, qui dépend du réglage de l'objectif de l'appareil. Et ce glissement vers le lointain va jusqu'à l'indistinction de toutes les unités figurales juxtaposées.

Figure 5 (*Figure 2*) Analyse des passages entre la photo et la réalité photographiée.

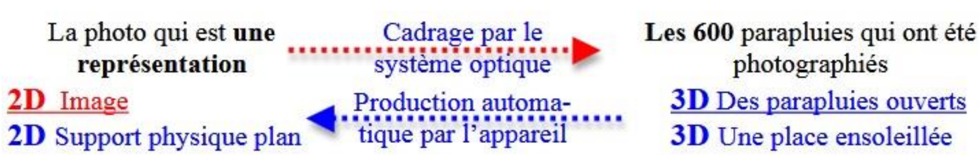
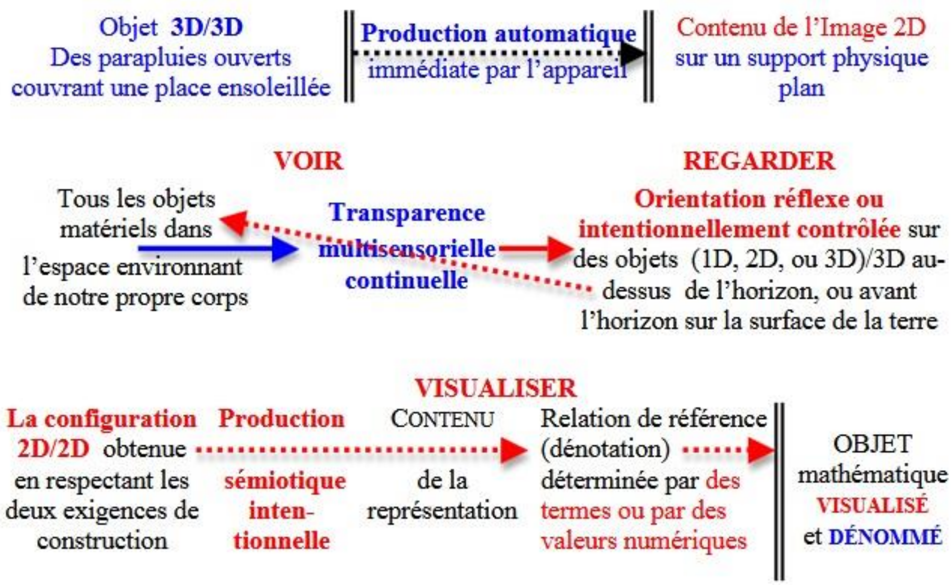


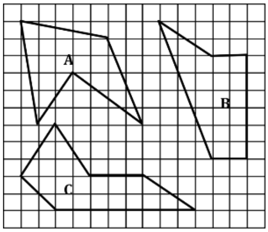
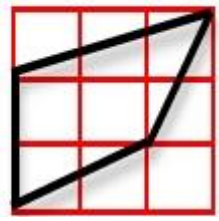
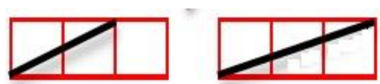
Figure 6 (*Figure 12*) Les trois processus cognitifs de reconnaissance de ce que l'on voit ou regarde



1. Q.2.3 *Que se passe-t-il quand on introduit un fond extérieur à la figure ?*

Le cas le plus simple est celui où l'on introduit un quadrillage pour faire calculer l'aire d'un polygone quelconque en comptant le nombres de cases du quadrillage, Figure 7. Ainsi pour comparer les aires de polygones qui comprennent le même quadrilatère irrégulier, il faut décomposer ses côtés en trois diagonales (1D) de deux cases juxtaposées (2D), et une (1D) de trois cases juxtaposées (2D). Mais cette démarche apparemment simple se heurte à un obstacle visuel majeur. Le quadrillage impose la reconnaissance visuelle et le traitement de chacune des cases et de sa diagonale prises une à une, et il occulte totalement la reconnaissance visuelle de toutes les unités figurales 1D et 2D possibles.

Figure 7 (*Figure 9*) Ce qu'il faut rapidement reconnaître en quelques coups d'œil

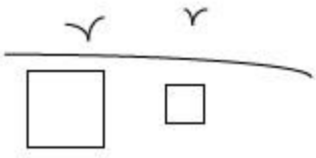
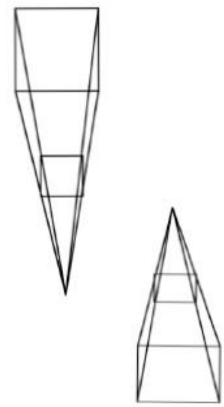
	
Patricia et Brigitte observent ces trois polygones et se demandent s'ils ont tous la même aire. Dites si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou sont différentes. Montrez comment vous êtes arrivés à vos réponses	

Le cas plus complexe, mais aussi celui qui est devenu l'un des outils de visualisation mathématique, est de celui des représentations graphiques cartésiennes. Là, nous avons évidemment le support d'un quadrillage du plan, mais l'introduction de deux axes gradués orientés permet d'associer chaque point d'intersection à un couple de deux nombres. Or cela entraîne également une rupture cognitive entre une appréhension locale entièrement centrée sur ces couples et l'appréhension globale qualitative des droites, des courbes, et aussi de toutes les unités figurales 2D (cercle, ellipse, etc.) qu'elles permettent de construire à partir des équations. La plupart des élèves ne franchissent pas le seuil de cette rupture cognitive, et la puissance heuristique de visualisation des équations du premier et du second de degré leur échappe.

2. Bi.2 Comment une représentation bi-dimensionnelle plane peut-elle visualiser la troisième dimension de l'espace perçu ?

Sur la photo de la place François Villon, la troisième dimension se voit avec la diminution de la grandeur des parapluies, des ombres sur le sol et des interstices de lumière entre les ombres et des baleines des parapluies. Toutes ces unités figurales 2D et 1D diminuent rapidement jusqu'à devenir indiscernables. On ne peut même pas compter les parapluies que l'on distingue. La profondeur de champ d'une photo dépend du réglage de l'objectif de l'appareil, qui est le point de visée de la place recouverte par les parapluies ouverts.

Figure 8 (*Figure 11*) La troisième dimension : perception, représentation en perspective et homothétie de droites concourantes

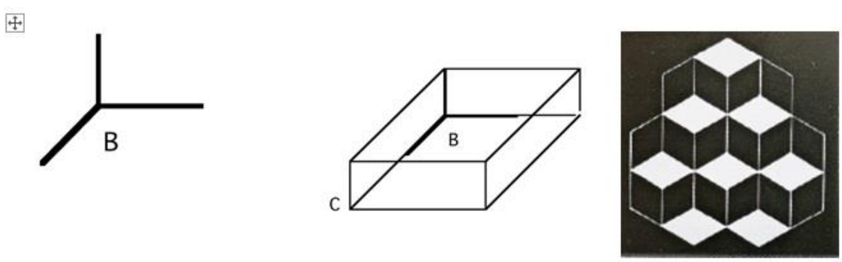
		
1. Perception de la troisième dimension de l'espace.	2. La Trinité, fresque dans l'église Santa Maria Novella à Florence. Masaccio, 1425-1426	3. Rapports homothétiques des droites concourantes

Sur les représentations bi-dimensionnelles euclidiennes ou sur les tableaux, la troisième dimension est introduite par la construction de la perspective à partir d'un point de fuite, et par l'organisation des unités figurales à partir d'un point de visée qui est l'œil, Figure 8. Le tableau de Masaccio dans l'église Santa Maria Novella à Florence en a été est la première réalisation. Sur ce tableau, le point de fuite est déterminé par les rapports homothétiques de droites concourantes. Et le point de visée, qui est déterminé en fonction de la hauteur des yeux de celui qui va regarder le tableau, se situe en dehors de toutes les unités figurales 1D ou 2D qui composent le tableau.

2. Bi.2. 1 *Quel rapport entre la figure et le fond dans les représentations bi-dimensionnelles planes de la troisième dimension ?*

Entre les représentations de la troisième dimension par la construction de la perspective et les photographies, il y a les dessins de l'espace perçu, Figure 8. La troisième dimension est introduite par une ligne d'horizon qui oppose les formes 2D très schématisées des objets dans le ciel à celles 2D également schématisées des objets qui sont sur la surface de la terre. Dans cette représentation la proximité et l'éloignement des objets représentés se voit par la diminution de la grandeur des unités figurales 2D, comme sur les photographies. Avec cette introduction de la troisième dimension, le rapport entre la figure et le fond dont elle se détache, porte sur les oppositions devant/derrière, proche/loin, en relief/en creux, saillant/rentrant, et non plus entre des contours de surface 2D et des segments linéaires 1D. Parmi ces trois oppositions, celles qui permet les basculements de regard les plus surprenants est celle entre voir en creux et voir en relief ou saillant et rentrant. Car elle se fait entre des unités figurales de même dimension, quel que soit le nombre de dimensions :

Figure 9 (*Figure 10*) L'ambiguïté des dessins et le basculement du regard.



Figures transparentes : basculement du nombre de dimensions.
Est-ce la face supérieure de la boite et le côté CB qui sont entièrement visibles ou la face intérieure et le côté CB ?

Figures en noir et blanc, ou en couleurs : pas de basculement du nombre de dimensions (D'Amore 2015, p. 441)

Par exemple, la trifurcation 1D au point B se voit en relief ou en creux. On la retrouve en haut comme un sommet du parallélépipède 3D, la boîte sans couvercle qu'il schématise pouvant être vue en relief (la boîte est alors vue par en-dessous) ou en creux (la boîte est alors vue par-dessus). La troisième configuration bicolore juxtapose des cubes 3D, et comprend 10 trifurcations 1D qui peuvent être vues soit en relief soit en creux. Si le point B, qui n'est pas marqué est vu en relief on compte 5 cubes visibles et superposés comme pour faire une pyramide. Et si le point B est vu en relief, on compte 6 cubes visibles comme pour reposer une pyramide sur sa pointe.

Faire basculer notre regard d'une manière voir à l'autre n'est pas évident. Il faut d'abord fixer la représentation plus ou moins longtemps. Et comme il y a une manière de voir que s'impose plus vite que l'autre, surtout pour la juxtaposition des cubes, cela exige des exercices en commençant par la figure du milieu pour s'entraîner.

2. Bi.2. 2 *L'utilisation du support papier et les représentations bi-dimensionnelles géométriques*

Les multiples unités figurales qui composent les configurations géométriques ne doivent pas être confondues avec le support papier sur lesquels elles sont tracées. Cependant, ce support matériel est utilisé de nombreuses activités de pliages qui se font en respectant implicitement de nombreuses activités ludiques de pliage.

Il y a aussi autre support matériel didactiquement plus intéressant, le papier calque que l'on peut retourner ou plier. Il est utilisé pour construire le point symétrique d'un autre par rapport à l'axe de symétrie axiale. Ce qui essentiel d'un point de vue strictement cognitif est que le geste de retournement du calque (2D), qui se fait dans l'espace physique (3D) n'avait pas été remarqué par les élèves. Ils s'en tenaient au résultat constaté. Cette observation a permis de de mettre en évidence une loi cognitive fondamentale pour comprendre, et donc apprendre en mathématiques. Ce que l'on constate visuellement sur une représentation bi-dimensionnelle géométrique n'a de sens que si l'on prit conscience des gestes ou des opérations qui permettent de l'obtenir. Ainsi l'utilisation d'un calque facilite le basculement du regard dans la troisième configuration de la Figura 9, pour effectuer le retournement de oppositions devant/derrière et en en relief/ en creux des 24 unités figurales 2D qu'elle contient.

Pour éviter toute confusion dans l'utilisation de la notation 3D pour deux choses différentes, la troisième dimension dans les représentations bi-dimensionnelles planes est notée **2D/3D,** les gestes et les opérations dans l'espace physique sont notés **3D/3D**. En outre, on peut reconnaître la forme de tous les objets physiques 3D/3D, par exemple, les maquettes de cubes, de sphères, de pyramides avec nos mains, sans les voir, rien qu'en touchant.

3. Bi.3 Quels rapports entre les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques et les objets physiques représentés ?

La puissance du registre d'organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales 1D, 2D et 3D est de pouvoir créer, comme le registre des langues parlées, des représentations sémiotiques indépendamment de la réalité, ou de tout vraisemblance, Figure 10. Les objets physiquement impossibles tels le triangle de Penrose ou les escaliers d'Escher en sont les exemples les plus célèbres.

Figure 10 (*Figure 14*) Les quatre types de registres producteurs de représentation sémiotiques

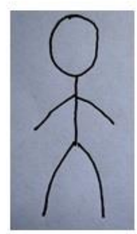
	Registres **DISCURSIFS.** Linéarité **d'expressions qui sont des unités de sens**	Registres **NON-DISCURSIFS** : Appréhension d'une **organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales** 1D, 2D ou 3D
Registres **multifonctionnels :** les traitements sont **NON - ALGORITHMISABLES**	**I. LES LANGUES PARLEES :** trois opérations hiérarchiquement incluses (désignation d'objets, énonciation et raisonnement) Deux modalités de production : ***la parole et l'écriture***	**II. Configuration géométriques** : **trois opérations indépendantes** (construction instrumentale, partage et reconfiguration méréologiques, déconstruction dimensionnelle) **ICONIQUE** : dessin, croquis
Registres **monofonctionnels :** les traitements sont **ALGORITHMISABLES**	**III. LES ECRITURES SYMBOLIQUES** (Systèmes de numération, Ecriture algébrique, Langues formelles) **Opérations de substitution illimitée.** Modalité de production : ***l'écriture***	**IV. GRAPHES** **SCHEMAS :** Jonctions entre des points, marquée par des **flèches** **GRAPHIQUES CARTESIENS** : Trois **opérations** (zoom, interpolation, et changement d'axes)

Les représentations d'objets physiquement impossibles sont également indépendantes de toute considération de grandeur, à la différence des illusions perceptives, telle celle de Müller –Lyer concernant la perception de la grandeur d'un segment, ou celle de Delboeuf concernant deux cercles concentriques. Loin d'être des contre-exemples ou des objections à la fiabilité des figures géométriques, la visualisation d'objets physiquement impossibles révèle l'apport heuristique d'exploration et de modélisation du registre d'organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales. La question des rapports entre les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques et les objets physiques représentés est celle de leur ressemblance ou de leur non-ressemblance.

3. Bi.3.1 *Des degrés d'iconicité*

Les représentations d'objets réels (**3D/3D**) changent du tout au tout selon le point où on se place pour les regarder et les peindre, les dessiner, ou les photographier : de face, de profil, de biais, par en-dessus, par en-dessous…

Figure 11 (*Figure 21*) Degrés d'iconicité dans la reconnaissance visuelle d'un visage.

		
A. Représentation figurative : Portrait de Ginevra de Béni (1474 ?)	B. Représentation schématique : Visage de profil et visage de face (1936 en noir, 1946 en couleur)	C. Représentation symbolique

Cela permet de définir un critère de ressemblance entre la figure (2D) et l'objet 3D/3D représenté en regardant séparément le contour fermé de la figure et les caractéristiques significatives à l'intérieur du contour fermé. On peut alors distinguer trois degrés de ressemblance ou d'iconicité, selon que le contour fermé ou ses caractéristiques internes conservent ou non cette ressemblance, Figure 11 : la représentation figurative, la représentation schématique, et la représentation symbolique, que l'on pourrait aussi appeler représentation figurative, représentation semi-figurative et représentation schématique.

3. Bi.3.2 *Les trois processus du fonctionnement cognitif sous-jacent à toutes les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques ou non-sémiotiques*

Le rapport de causalité entre les objets physiques 3D/3D et leurs multiples représentations possibles 2D est le point crucial dans l'analyse de tout ce que l'on voit et reconnaît quasi-instantanément. Et là nous devons distinguer trois processus cognitifs, et non pas seulement deux, Figure 6. Il y a évidemment la différence radicale qui oppose les photo (Figure 5) et la puissance heuristique de création des représentations bi-dimensionnelle qui est indépendante de la réalité (Figure 6, le premier et le troisième processus). Et il y a d'abord la transparence multisensorielle de notre corps à tout ce qui lui est proche ou lointain, à travers laquelle on est constamment présent à ce qui est proche ou lointain (Figure 6 - le deuxième processus)

Le premier obstacle pour comprendre en géométrie vient de ce que ces trois processus du fonctionnement cognitif ne sont pas distingués dans l'enseignement de la géométrie aux élèves de 6 à 16 ans. Les curriculums sont organisés comme s'il suffisait de voir et de manipuler pour acquérir des connaissances et pour pouvoir ensuite reconnaître quand et comment les utiliser.

4. Comment se fait la mise en correspondance des unités discursives de sens d'un énoncé, et des unités figurales d'un énoncé désignés dans un énoncé ?

L'enjeu didactique de cette question porte sur l'opposition cognitive fondamentale entre ce que les figures géométriques visualisent et le vocabulaire concernant les propriétés et les objets géométriques. Faut-il DIRE POUR VOIR ce qu'il faut reconnaître ce qui est mathématiquement pertinent dans une définition, un théorème ou un énoncé de problème ? Ou PEUT-ON COMPRENDRE une définition ou un énoncé de problème SI ON NE VOIT PAS ce qu'il désigne par des termes d'unités figurales 1D, 2D ou 3D ?

Trois comparaisons entre les représentations produites par les deux registres multifonctionnels et non-algorithmisables (Figure 10), apportent des éléments de réponse à ces deux questions.

4.1 Classification du vocabulaire en fonction du nombre de dimensions des unités figurales

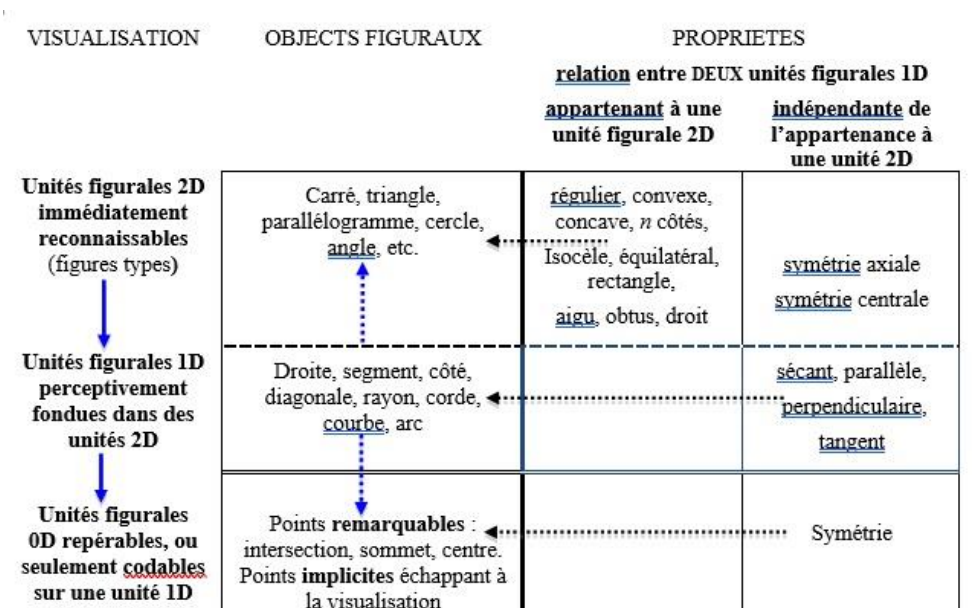
Tous les termes du vocabulaire géométrique de base se caractérisent par le nombre de dimensions des unités figurales qu'il nomme, Figure 12.

Leur classification se fait en fonction des unités figurales 2D/2D, 1D/2D et 0D/2D, qui constituent la marge verticale du tableau. Les propriétés, qui sont toujours des termes de relation entre deux unités figurales, se distinguent en deux types :

— Celles qui caractérisent une unité figurale 2D, dans laquelle elles s'opposent à d'autres propriétés du même type,

— Celles qui sont indépendantes de toute unités figurales 2D, bien qu'elles puissent les caractériser.

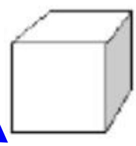
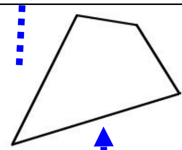
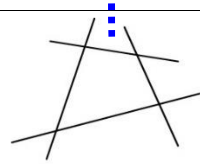
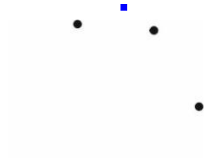
Figure 12 (*Figure 17*) Classification du vocabulaire géométrique de base.



Les flèches dans la marge verticale indiquent les unités figurales qui fusionnent visuellement dans une unité figurale d'un nombre plus grand de dimensions. Les flèches entre deux cases intérieures du tableau indiquent les phrases que l'on peut énoncer en prenant un terme dans chacune des deux cases et en les articulant par un verbe (« être », « appartenir »)

4.2 La déconstruction dimensionnelle des unités figurales reconnues

Figure 13 (*Figure 13*) Déconstruction dimensionnelle des formes perçues.

NOMBRE DE DIMENSIONS	**VISUALISATON**	EMPLOI MATHÉMATIQUE DE LA LANGUE ET VOCABULAIRE GÉOMÉTRIQUE
3D		Un **polyèdre**
2D		Un **polygone** — soit une **face de polyèdre** — soit la figure obtenue **par un plan d'intersection** d'un autre polyèdre
1D		**Droites** étant entre elles — perpendiculaires, parallèles, ou concourantes ... — ou **supports** de **segments.** .
0D		**Points** d'intersection qui sont : — les extrémités d'un segment — le milieu d'un segment — les sommets d'un polygone

La déconstruction dimensionnelle des formes 2D/2D ou 3D/2D est processus cognitif sous-jacent à la perception visuelle qui est l'inverse de celui indiqué par les flèches descendantes dans la colonne droite de la Figure 13. Elle va donc contre la visualisation mathématique qui est indiquées par les flèches montantes dans la colonne gauche.

La déconstruction dimensionnelle connut dissocie les figures 3D/2D en trois faces visibles 2D/2D ? puis à dissocier les unités figurales 2D/2D en droites sous-jacentes à chacun des côtés du polygone, et les unités figurales 1D/2D en point d'intersection qui sont les sommets des polygones. Et cela conduit à classer les termes géométriques ainsi que leurs différents contextes de leur emploi possible (Figure 12) en fonction des deux mouvements inverses des flèches de la Figure 13.

La déconstruction dimensionnelle des formes 2D/2D ou 3D/2D ne doit pas être confondue avec la décomposition heuristique des formes 2D en d'autres formes 2D, pour les reconfigurer autrement (Figure 3).

La nécessité de la déconstruction dimensionnelle des formes 2D/2D ou 3D/2D s'est imposée pour mettre en correspondance les termes du vocabulaire géométrique des énoncés mathématiques et les unités figurales des visualisations associées aux énoncés.

4.3 Le décalage dimensionnel dans la mise en correspondance des unités discursives de sens et des unités figurales désignées

Comprendre comment on travaille et on pense en géométrie et l'aptitude à en faire soi-même un peu requièrent qu'une synergie entre les deux registres multifonctionnels et non-algorithmisables ait commencé à se développer, Figure 13. Sur la figure, cette synergie est indiquée par les flèches rouges obliques entre les flèches bleues montantes dans la colonne de gauche et celles descendantes dans la colonne de droite.

Les flèches bleues montantes traduisent le fait que pour « voir en géométrie », il faut passer dans une dimension supérieure. Ainsi on peut facilement monter de 01/2D à 1D/2D, mais non de 2D/2D à 3D/2D. Et monter de 2D/2D à 3D/2D n'implique que l'on voie tous les changements de plan ou de faces pour les objets physiques 3D/3D. En revanche, manipuler des maquettes 3D/3D développait la manière de voir et d'utiliser les visualisations 3D/2D.

Les flèches bleues descendantes traduisent le fait que pour dire ce qui est mathématiquement pertinent dans une configuration *n*D/2D, il faut descendre d'au moins une dimension. Le vocabulaire des propriétés correspondant aux unités figurales 1D et 0D est celui qui est primordial dans tous les énoncés de définition et de théorèmes.

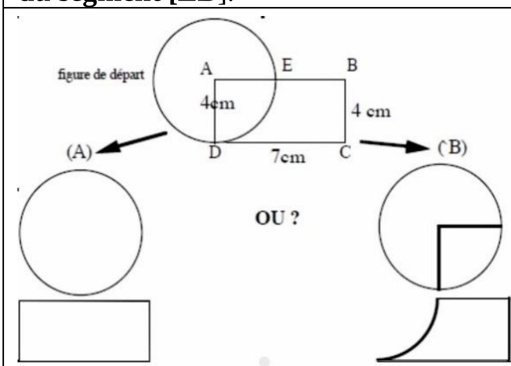
Il est extrêmement regrettable pour les élèves, pour les enseignants et pour les didacticiens, que les recherches, psychologiques et didactiques sur la perception de l'espace, et sur la compréhension des textes comme sur les différentes formes de raisonnement, n'aient pas pris en compte tous ces facteurs. Or leur prise en compte s'impose tant d'un point de mathématique que psychologique et épistémologique. Comment se fait alors l'enseignement de la géométrie dans les deux cycles du Primaire et du Collège ?

4.4 Le piège didactique de la désignation des points d'intersection par des lettres

Il y a plusieurs termes ou syntagmes nominaux possibles pour désigner les points (0D). Le choix dépend de l'unité figurale 1D ou 2D à laquelle ils appartiennent : sommet, centre, milieu, point de croisement… A l'inverse, il n'y a pas d'unité figurale précise pour un point quelconque n'importe où**,** dans le plan, sur une unité 1D ou 2D. On est obligé de prendre une lettre pour le nommer et le faire voir comme une unité figurale 2D, et donc pour pouvoir le désigner dans un énoncé ou une explication. J'ai moi-même triché un peu dans ce texte, comme tout le monde, en utilisant des lettres dans la comparaison de deux figures (Figure 2, C1 et Figure 7, mais non la Figure 3). Le piège commence à se refermer dès qu'on emploie des lettres avec mots, car très vite on n'utilise que les lettres pour écrire, les mots étant seulement rapidement dits oralement. Et pour ceux qui écoutent ou qui lisent, les occurrences des mots sont en vrac dans les manuels, dans les fiches de travail, et dans ce qui est institutionnalisé au terme des séquences didactiques.

Cette désignation « aveugle » pour reprendre la qualification des signes par Leibniz, a une raison plus profonde. Elle vient d'une subordination de la géométrie aux unités figurales **1D/3D, 2D/3D** et **3D/3D,** c'est-à-dire à la nécessité de fixer des points pour mesurer ou calculer des distances ou des longueurs, des angles, des aires et des volumes. Les conséquences de cet enseignement sont spectaculaires et souvent irréversibles pour les apprentissages ultérieurs de mathématiques. On voit beaucoup d'élèves vouloir mesurer sur le papier des unités 1D/2D pour calculer des périmètres, des aires, ou tout simplement renoncer (Fig. 14, Fig. 15 et Fig. 7). Quant aux évaluations nationales, que ce soit par pudeur ou par censure, n'en parlons pas !

Figure 14 (*Figure 4*) Questionnaires d'évaluation pour la Configuration C2

<table>
<tr><td colspan="2">Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm) on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Trouve la longueur du segment [EB].</td></tr>
<tr><td>
</td><td>AE vu comme un rayon de 4cm - 9%

Réponses par mesure du tracé - 16%
(environ 2cm sur le tracé présenté)

Réponses par estimation perceptive - 26%
(e presque au milieu de AB : environ 3,5)

Autres réponses - 30%

Absence de réponses - 10%</td></tr>
<tr><td>2 unidades 2D parcialmente sobrepostas ou
2 unidades 2D perceptualmente ocultas?</td><td></td></tr>
</table>

Est-il besoin de répéter ici qu'il absolument nécessaire de commencer par séparer

— les activités centrées sur les manières de voir des figures géométriques

— les activités de calculs et donc sur l'utilisation de formules,

— et les tâches centrées la prise de conscience des opérations discursives requises pour formuler des énoncés ?

Figure 15 (*Figure 6*) Résultats pour le même problème posés à trois niveaux scolaires.

	6ème 11-12 ans	5ème 12-13 ans	4ème 13-14 ans
Une diagonale divise un rectangle en deux triangles égaux	**5%**	**0**	**6%**
Mesure des côtés, **puis blocage**	**10%**	**30%**	**45%**
Invariance par compensations (Piaget)	***10%***	***10%***	***2%***
Calcul à partir des mesures des côtés sur le dessin **(2 ,5)** × **(5cm)** **(2,3)** × **(5,5cm)**	**10%**	**14%**	**10%**

5. Pour faire soi-même ces expériences, découvrir ce qu'on ne soupçonnait pas avant, et devenir intellectuellement autonome en mathématiques.

Il faut commencer par regarder attentivement la photo des 600 parapluies juxtaposés, en cherchant à répondre aux deux questions initiales Q.1 et Q.2 (Qu'est-ce qu'on reconnaît au premier coup d'œil ? Quelles sont les oppositions qui permettent d'y distinguer des formes ou des surfaces significativement différents ?) avant de continuer.

Ensuite, comme dans un véritable mode d'emploi ou de montage, il faut regarder attentivement toutes les comparaisons de figures qui sont successivement présentées, et chercher à voir et dire soi-même les différences que l'on découvre.

Il y a certaines sections ou sections du texte qui ne sont pas utilisées dans ce mode emploi. Elles concernent le registre des langues parlées des écritures symboliques (DUVAL, 2023 - Section II.1) et le registre des langues parlées (DUVAL, 2023, Section II.2).

Et pour finir revenons sur le titre « **Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer…** en mathématiques, bien sûr !». Tout çà en même temps ! pourrez-vous penser. Mais faire des aller et venues incessant entre ces quatre démarches sémio-cognitives est la manière de travailler en géométrie.

Référence

DUVAL, R. Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer… en mathématiques, bien sûr ! Florianópolis : REVEMT, 2023 (annexe).
Disponible à l´adresse https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/3547

Publicações do Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática disponíveis em:

https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982

- Florilegium de investigaciones que envuelven la teoria semiocognitiva del aprendizaje matemático de Raymond Duval (parte 3).

- Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagemmatemática de Raymond Duval (parte 2).

- Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.

- Análise de atividades didáticas segundo a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval.

- Gráficos e equações: abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval.

- Regra dos sinais: saga e implicações didáticas.