



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
CENTRO TECNOLÓGICO DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Aline Thaise Zermiani

**Articulações entre Pensamento computacional e algébrico no desenvolvimento de
atividades: proposição e análise de tarefas para a sala de aula**

Blumenau

2024

Aline Thaise Zermiani

Articulações entre Pensamento computacional e algébrico no desenvolvimento de atividades: proposição e análise de tarefas para a sala de aula

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro Tecnológico De Ciências Exatas e Educação da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Guilherme Wagner.

Blumenau

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pela autora através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Zermiani, Aline Thaise

Articulações entre pensamento computacional e algébrico no desenvolvimento de atividades : Proposição e análise de tarefas para a sala de aula / Aline Thaise Zermiani ; orientadora, Guilherme Wagner, 2024.

51 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Graduação em Matemática - Licenciatura, Blumenau, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática - Licenciatura. 2. Pensamento computacional. 3. Atividades plugadas e desplugadas. 4. Pensamento algébrico. 5. Teoria da Objetivação. I. Wagner, Guilherme. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Licenciatura. III. Título.

Aline Thaise Zermiani

Título: Articulações entre Pensamento computacional e algébrico no desenvolvimento de atividades: proposição e análise de tarefas para a sala de aula

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “licenciada em matemática” e aprovado e em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática.

Blumenau. 18 de dezembro de 2024.



Documento assinado digitalmente

FRANCIS FELIX CORDOVA PUMA

Data: 18/12/2024 13:04:00-0300

CPF: ***.649.087-**

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Coordenador do curso

Banca examinadora:



Documento assinado digitalmente

Guilherme Wagner

Data: 18/12/2024 12:39:32-0300

CPF: ***.486.759-**

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Dr. Guilherme Wagner
Orientador



Documento assinado digitalmente

Everaldo Silveira

Data: 18/12/2024 12:30:01-0300

CPF: ***.569.417-**

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Dr. Everaldo Silveira
Avaliador



Documento assinado digitalmente

JORGE CASSIO COSTA NOBRIGA

Data: 18/12/2024 15:44:46-0300

CPF: ***.922.771-**

Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbrega
Avaliador

Dedico este trabalho ao meu professor de matemática, Cabral, que acreditou em mim antes mesmo de eu me descobrir capaz. Dedico também a cada aluno que fez parte da minha caminhada, vocês fizeram eu me apaixonar ainda mais pela arte de ensinar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por toda a fé depositada em mim. Meus pais, pelo apoio, incentivo e oportunidades que me proporcionaram, e minha irmã Caroline, por estar ao meu lado e ser meu ombro amigo sempre que precisei. Obrigada por todo o amor e força que me deram, espero poder orgulhá-los cada vez mais.

À minha amiga Manoela, o presente que a UFSC me deu e companheira em toda essa jornada. Você foi meu maior incentivo durante esses anos, obrigada por caminhar comigo.

À minha amiga Monique, que está presente em minha vida desde a infância. Obrigada por me acompanhar em tantas etapas e se fazer presente, mesmo de longe.

Aos meus professores Cabral e Luciana, obrigada por me apresentarem o mundo da matemática de forma tão bonita, é uma honra poder me inspirar em vocês.

A todos os mestres que passaram pela minha vida, obrigada por cada ensinamento e contribuição. Em especial a todos os professores da graduação que se tornaram amigos, obrigada por fazerem parte da minha história. Hoje, mais do que nunca, admiro cada um pela determinação e amor pela profissão.

Aos meus alunos, todos vocês marcaram minha vida e me transformaram, como indivíduo e professora.

A todos os colegas da graduação que de alguma forma contribuíram para minha formação e fizeram da universidade um ambiente mais leve e divertido.

Ao meu orientador divo, Guilherme, cujo conhecimento e dedicação me inspiram e emocionam. Você abriu portas na minha vida, obrigada por acreditar em mim e me incentivar sempre.

À todas as pessoas que fizeram parte dessa trajetória de alguma forma, levo cada um em meu coração.

RESUMO

O trabalho aborda as articulações entre o pensamento computacional e pensamento algébrico no ensino de matemática. A relação entre esses dois campos é realizada, primeiramente, pela apresentação dos conceitos e características de cada um para, na sequência, fazer a análise das suas semelhanças. Esta análise ocorreu através da revisão da literatura dos conceitos em tela a partir de diversos autores. Tomando esta análise foram construídas atividades que possibilitassem a articulação entre os dois pensamentos. Estas foram elaboradas com base na Teoria da Objetivação e as habilidades de abstração, reconhecimento de padrões, generalização e construção algoritmos, a partir das unidades conceitual e contextual, nas quais as habilidades são exploradas em diferentes contextos. Com todas essas ferramentas foi possível explorar, a partir de contextos algébricos, e focando no trabalho com sequências, as habilidades comuns entre o pensamento algébrico e computacional, criando assim uma ligação direta entre ambos.

Palavras-chave: Pensamento computacional; Pensamento algébrico; Teoria da Objetivação; Atividades *plugadas* e *desplugadas*.

ABSTRACT

This paper discusses the links between computational thinking and algebraic thinking in mathematics teaching. The relationship between these two fields is first presented in terms of the concepts and characteristics of each, followed by an analysis of their similarities. This analysis was carried out by reviewing the literature on the concepts in question, based on various authors. Based on this analysis, activities were developed to make it possible to articulate the two thoughts. These were designed based on Objectivation Theory and the skills of abstraction, pattern recognition, generalization and algorithm construction, from the conceptual and contextual units, in which the skills are explored in different contexts. With all these tools it was possible to explore, from algebraic contexts, and focusing on working with sequences, the common skills between algebraic and computational thinking, thus creating a direct link between the two.

Keywords: Computational thinking; Algebraic thinking; Objectification theory; Plugged and unplugged activities.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	12
2.1. Pensamento computacional.....	12
2.1.1. Conceitos.....	12
2.1.2. Características e desdobramentos no ensino.....	15
2.2. Pensamento Algébrico.....	19
2.3. O encontro do Pensamento Computacional e Algébrico.....	27
3. METODOLOGIA.....	30
4. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS.....	34
4.1. Atividade 1 - O que é algoritmo?.....	34
4.2. Atividade 2 - Reconhecimento de padrões na fórmula da área do triângulo.....	37
4.3. Atividade 3 - Abstraindo informações.....	39
4.4. Atividade 4 - Sequências e PA.....	42
4.5. Atividade 5 - Generalizando sequências e construindo algoritmos.....	44
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	49

1. INTRODUÇÃO

Ainda que a presença de tecnologia seja abundante nos dias atuais e documentos norteadores da educação, como o Currículo Base da Educação Infantil e do Ensino Fundamental do Território Catarinense, citarem a cultura digital, tecnologia digital e pensamento computacional, pouco é apresentado sobre como trabalhá-lo, não só em matemática, mas em outros componentes curriculares também.

O Pensamento Computacional (PC) está presente em um documento complementar¹ à Base nacional comum curricular (BNCC), que deveria ser implementado em todas as escolas até outubro de 2023. Procurando uma forma de criar um diálogo direto entre o pensamento computacional e os conhecimentos conceituais que são desenvolvidos no ambiente escolar, é possível encontrar semelhanças entre ele e os conhecimentos de álgebra, logo, a investigação será voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, na versão de 2018 da BNCC, o PC é mencionado diversas vezes dentro do componente curricular de matemática, traçando uma relação direta com o conhecimento da álgebra

Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra [...] podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (Brasil, 2018, p.271).

Muitos pesquisadores acreditam que esse conceito está diretamente ligado ao pensamento algébrico e seu desenvolvimento (Valente *et al*, 2017). O objetivo não é uma busca pela fusão de ambos a fim de encontrar um que descreva todas as características, mas reconhecer que existe uma ligação entre eles e uma semelhança que pode ser enxergada, tanto na estrutura lógica quanto na modelagem de situações. E apesar da semelhança, o pensamento computacional permite que essas habilidades sejam desenvolvidas fora da bolha matemática, abrangendo um campo maior que este.

Segundo Perceval *et al* (2023), que faz uma análise das potencialidades do ensino do pensamento computacional no ensino da álgebra, ao visualizar os fundamentos do PC, é possível perceber que eles

são essenciais ao desenvolvimento do Pensamento Matemático, pois conceitos como abstração, reconhecimento de padrões e decomposição são, geralmente, mobilizados na resolução de problemas matemáticos. Já, a construção e/ou execução de algoritmos, nem sempre é foco das aulas de Matemática, no entanto, a BNCC aponta que um dos objetivos do ensino de Matemática é o desenvolvimento

1

<http://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cneceb-n-2-2022-bncc-computacao/file>

do PC[...]. Assim, os algoritmos precisam ganhar espaço, em outras palavras, serem objetos das aulas (Perceval *et al*, 2023, p. 5).

Os autores fazem uma ponte entre as características citadas acima com o desenvolvimento da álgebra e, conseqüentemente, do pensamento algébrico, através da exploração de padrões, sendo as principais características exploradas a abstração, reconhecimento de padrões e generalização, semelhante ao que apresenta Radford (2013). É possível criar um paralelo entre essas habilidades e os próprios passos para a resolução de problemas. Segundo Herbert e Brown (1997), a resolução de problemas que envolvem padrões pode ser dividido em três etapas: a primeira corresponde à busca do padrão, identificar informações relevantes (abstrair), a segunda é a reconhecimento do padrão, definir esse padrão de formas diferentes e, por último, a generalização, que diz respeito à interpretação e aplicação do que foi aprendido. A partir dessas etapas, é possível observar que a criação de algoritmos não é apresentada como parte desta resolução, porém os algoritmos não precisam ser apresentados seguindo a regra computacional, mas através de uma abordagem mais simples e acessível aos estudantes, como um fluxograma, objeto que está presente nas habilidades da BNCC.

Portanto, essa proposta de pesquisa procura uma articulação entre os dois e tem como objetivo o desenvolvimento de atividades que possam promover e potencializar essa relação, explorando os componentes em comum que ambos os pensamentos apresentam, a partir de uma revisão de literatura e os referenciais estudados, de maneira a dar mais respostas às reflexões de Valente *et al* (2017).

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Pensamento computacional

2.1.1. Conceitos

Para articular, de forma coerente, os dois pensamentos a serem trabalhados, é preciso entender o que cada um deles significa e representa. Inicialmente, apresentaremos sobre o pensamento computacional, seus significados e características. O pensamento computacional é um conceito que teve sua primeira aparição em um trabalho de Papert (1980) no qual ele chamava esse conceito de “pensamento procedimental”. O autor, em seu livro, usou a linguagem de programação Logo para idealizar atividades nas quais os alunos pudessem elaborar soluções para dados problemas usando computadores como ferramentas, assim, os alunos aprenderiam a criar soluções algorítmicas que um computador pudesse realizar.

Após sua primeira apresentação, o PC passou a ser estudado por mais pesquisadores e ganhou visibilidade mesmo em 2006, quando Jeannette M. Wing, professora de Ciência da Computação da Universidade Columbia, publicou um artigo sobre o que era o pensamento computacional e suas características. Ela, então, se torna pioneira nessa área e uma referência sobre o assunto, em sua primeira publicação ela definiu o PC como

A combinação do pensamento crítico com os fundamentos da Computação define uma metodologia para resolver problemas, denominada Pensamento Computacional. É uma distinta forma de pensamentos com conceitos básicos da Ciência da Computação para resolver problemas, desenvolver sistemas e para entender o comportamento humano, habilidade fundamental para todos (Wing, 2006, p. 2).

Posteriormente, a autora o definiu como “Processos de pensamento envolvidos na formulação de problemas e as suas soluções de modo que as mesmas são representadas de uma forma que pode ser eficazmente executada por um agente de processamento de informações” (Wing, 2010, p. 1) e, finalmente, em 2014, sendo

Os processos de pensamento envolvidos na formulação de um problema e que expressam sua solução ou soluções eficazmente, de tal forma que uma máquina ou uma pessoa possam realizar. É a automação da abstração e o ato de pensar como um cientista da computação (Wing, 2014, p. 1).

Assim como suas próprias pesquisas a levaram a diferentes concepções, com o avanço da tecnologia, esse campo de pesquisa se expandiu e o termo “Pensamento computacional” ganhou mais visibilidade, levando outros pesquisadores a se aprofundarem e ponderarem sua interpretação sobre o termo. Segundo Kurshan (2016, s/p) “Mesmo após diversos estudos e quase uma década de esforços para definir o Pensamento Computacional, ainda existem

críticas que sugerem que não sabemos o que o Pensamento Computacional significa ou sua forma de medir”. Brackmann (2017) busca sintetizar as definições, apresentando o seguinte

Uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. (Brackmann, 2017, p. 29)

De forma muito próxima, Bundy (2007) e Nunes (2011) definem o PC como as habilidades que geralmente são usadas para a criação de programas computacionais e passam a assumir um papel metodológico na resolução de problemas em diferentes áreas. De maneira muito similar, o Google for Education, plataforma do Google destinada à educação, apresenta o pensamento computacional como “uma abordagem usada para solução de problemas utilizando o que se sabe sobre Computação” (Google for Education, 2015). Furber (2012, p. 29) também define de forma semelhante “É o processo de reconhecer aspectos da computação em um mundo que nos cerca e, aplicar ferramentas e técnicas da Ciência da Computação para entender e argumentar sobre sistemas e processos naturais e artificiais”.

Como é possível observar, muitas concepções focam na capacidade de resolução de problemas, e não apenas na área da computação, mas em quaisquer áreas. Segundo McMaster *et al* (2010), apesar de ser uma prática fundamental da área da ciência da computação, não é suficiente para retratar a totalidade do campo, assim como não possui uma aplicação apenas nele. De forma semelhante a qual Wing caracteriza o Pensamento Computacional, Liukas (2015) define-o como um pensamento executado por pessoas, e não computadores, que inclui pensamento lógico, habilidade de reconhecer padrões, raciocinar através de algoritmos e ser capaz de decompor e abstrair um problema. O autor também fala que é a capacidade de pensar os problemas de modo que um computador possa solucioná-los.

Alguns autores veem o PC como um processo ou raciocínio lógico, como Ribeiro, Foss e Cavalheiro (2014), que interpretam o Pensamento Computacional como uma generalização do raciocínio lógico. Ele se apresenta como um processo de transformação de entradas e saídas, no qual ambas podem ser elementos de um conjunto qualquer e de diferentes tipos, e as regras usadas para sua compreensão não necessitam ser regras da lógica, mas qualquer conjunto de instruções bem definidas. Esses mesmos autores definem o objeto da computação como os processos.

E, finalmente, para o autor Nunes (2011, s/p), PC “é o processo cognitivo utilizado pelos seres humanos para encontrar algoritmos para resolver problemas”, além disso, ele diz que essa é a base para a Ciência da Computação que pode ser aplicada a outras áreas do

conhecimento para possibilitar a sistematização ou organização das soluções de problemas. Para ele o raciocínio é manifestado na infância e se perde, pois não é explorado.

O Conselho Nacional de Pesquisa das Academias Nacionais dos Estados Unidos publicou um relatório de oficinas no escopo e natureza do Pensamento Computacional no qual apresenta o que os participantes da oficina conceituam e opinaram quanto ao uso e ao que é o PC. Para situações cotidianas em que ele é usado, foram apresentadas situações como quando um aparelho não funciona direito e é reiniciado para voltar a funcionar normalmente, uma pessoa pensando computacionalmente percebe que desligando e restaurando, ela reseta o estado interno do aparelho para um estado novo e conhecido, permitindo que os processos internos dele sejam executados a partir de um estado conhecido.

Os participantes também descreveram o que é PC como “uma coleção de ferramentas de metal e conceitos de ciência da computação que ajudam as pessoas a resolverem problemas, desenvolverem sistemas e entenderem o comportamento humano” (National Research Council, 2010, p. 10, tradução minha). Apesar de usarem termos e ideias da ciência computacional, eles concordaram que pode ser usado em outras áreas.

As definições de PC apresentadas pelos participantes permeiam ideias relacionadas, como uma relação direta com o pensamento processual desenvolvido por Papert, relações diretas com o pensamento matemático, expansão das habilidades humanas para desenvolver um pensamento abstrato que ajude a lidar com situações complexas, formulação de processos para fazer coisas, uso de linguagens e métodos adequados e uma ponte entre ciência e engenharia. O PC é visto como uma linguagem usada para entender o universo, e uma habilidade básica, comparando a habilidade de escrever, ler, falar e aritmética. Todas essas são maneiras de descrever e explicar problemas complexos e situações para outras pessoas, exatamente o que o PC também faz. Há um foco muito grande na abstração, segundo Robert Constable, participante do estudo, as camadas de abstração do pensamento computacional estão conectadas de uma forma que a matemática e a física, por exemplo, não conseguem reproduzir. A partir disso, o PC também é uma forma de explicar e representar a complexidade através da automação.

David Perkins, nos anos 1990, escreveu sobre o conceito “*Person Plus*”, cujo modelo apresentava várias dimensões para resolução de problemas em equipe. Segundo Moursund, outro participante da oficina, essas três dimensões são ferramentas que ampliam a capacidade mental, ferramentas que ampliam a capacidade física e educação e treinamento. O componente final de Moursund é a resolução de problemas em equipe, independentemente do

tamanho da equipe, ela é formada pelos conhecimentos de cada um, a cultura e a educação formal e informal.

2.1.2. Características e desdobramentos no ensino

Assim como Nunes (2011) afirma, Jeanette Wing também apresenta exemplos de como o PC pode ser usado em outras áreas, além da ciência da computação, como a abordagem para sequenciar o genoma humano, uma aplicação do pensamento computacional fora da ciência computacional. Esse processo deu origem a um algoritmo, “shotgun sequencing”, que permite fazer esse sequenciamento de fitas de DNA.

Pode-se analisar os aspectos do PC nesse exemplo. Algoritmo incorpora a noção de um procedimento precisamente formulado, aplicado de forma repetitiva, o que acontece na pesquisa, correspondência de padrões e refinamento iterativo, além disso, há a ideia de aleatoriedade como uma vantagem na fragmentação repetitiva que é um aspecto importante do PC.

Juntamente com a primeira concepção do que é o pensamento computacional, Wing também apresenta quais são suas características. Esse pensamento envolve resolver problemas, montar sistemas e entender o comportamento humano recorrendo aos conceitos fundamentais da ciência da computação. Essa ferramenta auxilia na resolução de problemas simples e complexos, através do uso de ferramentas mentais e assim como em um computador, a dificuldade para resolução de um problema é influenciada pela capacidade da máquina de resolvê-lo.

Ele inclui a capacidade de usar outras situações semelhantes para resolver um problema novo, usando de uma comparação, transformação ou simulação, fazendo com que algo muito complexo se torne mais fácil de compreender. Além disso, é possível usar de recursos como a generalização, abstração, reconhecimento de padrões e decomposição para modelar uma situação e escolher uma representação apropriada para um problema ou modelar os aspectos relevantes de um problema para torná-lo tratável.

As características do PC feitas por Wing (2006) são baseadas na ciência informática, que estuda a computação, o que pode ser processado e como processá-lo. Segundo ela, as características são:

- *Conceptualizar, não programar:* É necessário conseguir refletir em muitos níveis de abstração para ser um cientista informático, a informática não se resume a programar.

- *Competência fundamental, e não mecanização*: é preciso que todo ser humano tenha uma competência fundamental e não seja mecanizado. Wing comenta que a mecanização do pensamento surgirá quando os cientistas conseguirem fazer os computadores pensarem como humanos.
- *Um modo como os humanos pensam, não os computadores*. É o modo como os homens resolvem problemas. O uso dos computadores permite que muitas coisas aconteçam, que antes dos computadores eram inimagináveis, porém eles são monótonos, e não são imaginativos como os humanos.
- *Complementa e combina o pensamento matemático e de engenharia*. A informática tem fundamentos matemáticos, então ela recorre ao pensamento matemático e ao pensamento da engenharia, pela construção de sistemas que interagem com o mundo real. A liberdade em construir mundos virtuais permite a concepção de sistemas para além do mundo físico.
- *Ideias, não artefatos*. Não são apenas artefatos presentes na vida cotidiana, mas os conceitos computacionais usados para resolver problemas e interagir com outras pessoas.
- *Para todos, em todo o lado*. Essa característica é descrita como “O pensamento computacional será uma realidade quando for tão indissociável das iniciativas do ser humano que desaparecerá como uma filosofia explícita” (Wing, 2006, p. 4).

Muitas das características exploradas pelo PC são encontradas no processo de ensino-aprendizagem dos alunos, no qual eles desenvolvem certas ações mentais, por isso a ideia de estudar o pensamento computacional no ensino básico surgiu, fortemente, após o trabalho de Papert em 1980 e os trabalhos de Wing deram uma base conceitual para analisar esse campo dentro das escolas. A importância de rever isso vem do crescimento que a computação teve ao longo dos anos. Essas análises e o levantamento da importância de se entender melhor essa área acarretou em diversos workshops e estudos, destinados a explorar a natureza do PC e suas implicações cognitivas e educacionais, além de estudos sobre a prática pedagógica.

Um estudo feito por Grover e Pea (2013) procurou investigar o PC na educação básica e como estavam os avanços nesse campo dentro da educação. Os autores apresentaram cursos desenvolvidos que exploram a prática do PC, como o curso ofertado pelo CS Principles²,

² <http://www.csprinciples.org/>

coordenado pelo College Board e a Fundação Nacional de Ciência (NSF), que baseia o ensino em 7 princípios do PC, são eles:

1. Computação é uma atividade humana criativa.
2. Abstração reduz informações e detalhes para focar nos conceitos relevantes para entender e solucionar o problema.
3. Dados e informações facilitam a criação de conhecimento.
4. Algoritmos são ferramentas para desenvolver e expressar soluções para problemas computacionais.
5. Programação é um processo criativo que produz artefatos computacionais.
6. Dispositivos digitais, sistemas e as redes que interconectam eles permitem e promovem abordagens computacionais para a resolução de problemas.
7. A computação permite inovação em outras áreas, incluindo ciência, ciência social, ciências humanas, artes, medicina, engenharia e empreendedorismo.

Atualmente, os conceitos abaixo são a base para o currículo no ensino de PC:

- Abstração e generalização de padrões (incluindo modelos e simulações).
- Processamento sistemático de informações.
- Sistema de símbolos e representações.
- Noções algorítmicas de fluxo de controle.
- Decomposição estruturada de problemas (modularização).
- Pensamento iterativo, recursivo e pensamento em paralelo.
- Lógica condicional.
- Restrições de eficiência e desempenho.
- Depuração e detecção de erros sistemáticos.

O trabalho de Grover e Pea (2013) faz as articulações inseridas dentro do sistema educacional estadunidense, conhecido como K-12, que é equivalente à educação básica no Brasil. Os autores afirmam que países como Rússia, África do Sul, Austrália e Nova Zelândia já implementaram a ciência da computação dentro da educação básica e indagam sobre as discussões que essa mudança gera. Pensar na implementação disso no ensino básico abre um leque de debates sobre sua necessidade, como seria a organização curricular para sua inclusão, trazendo-o como uma disciplina isolada e obrigatória, ou algo optativo, destinado apenas aos alunos que possuem interesse em áreas STEM³ (Science, Technology, Engineering

³ Ciências naturais, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

and Mathematics) e como o pensamento computacional se diferencia do que os estudantes já desenvolvem nas disciplinas regulares.

Denning and Freeman (2009) citam que apesar do paradigma da computação conter “ecos” de engenharia, ciência e matemática, ela é diferente pois tem o foco central em processos de informação. Apesar dos conhecimentos em matemática e ciências permitirem a resolução de problemas por parte dos alunos, os autores acreditam que entender o PC é essencial para que eles entendam o mundo como ele é hoje e se destaquem, por exemplo, em uma sociedade em que a computação é tão presente.

O texto traz o Scratch⁴ como uma ótima opção para usar com os alunos, pois permite explorar o movimento de elementos e personagens, tem uma computação simples e possibilita uma aprendizagem mais fácil. Muitos programas que são introdutórios para a computação usam os três estágios de progresso “usar-modificar-criar” para ajudar os alunos a irem de modificadores a criadores dos artefatos computacionais.

Apesar de toda sua importância, há uma disparidade entre o investimento na implementação dessas ideias no currículo e as pesquisas e cursos sobre isso, no qual o primeiro recebe muito mais incentivo. Além disso, há uma diferença muito grande nesse campo, pois em sua maioria, os cientistas e especialistas em computação são do gênero masculino. Assim, há necessidade de formações que garantam a equidade entre os gêneros, buscando o incentivo às meninas e mulheres.

O texto de Grover e Pea (2013) também comenta sobre discussões que são feitas para tentar descobrir como usar o PC no ensino de outras disciplinas, qual a pedagogia adequada para ensinar isso e como apropriar os conhecimentos conforme as idades das turmas. Os resultados de turmas que tiveram esse currículo que abrange PC também pode ajudar a determinar quais lacunas devem ser preenchidas ainda, o que falta para atingirem os resultados esperados.

O PC também pode ser encontrado em situações que não apresentem programação. O cotidiano é rodeado por aparelhos tecnológicos, que não necessariamente precisam ser computadores, e da mesma forma auxiliam seu usuário na resolução de possíveis problemas, logo, o pensamento computacional também é usado nesses aparelhos. Os aparelhos são usados por pessoas de diferentes idades, como crianças e pessoas idosas, cada grupo com suas necessidades diferentes e, conseqüentemente, problemas diferentes.

⁴ <https://scratch.mit.edu/>

2.2. Pensamento Algébrico

A matemática surge intimamente ligada com as necessidades sociais, econômicas e políticas das civilizações. Sua evolução aconteceu conforme as civilizações evoluíram, como a necessidade do cálculo de áreas, cálculo de diferentes preços, etc, mas apesar disso, também são encontrados registros de problemas que não tinham uma ligação direta com a vida cotidiana. Segundo Eves (2007, p. 25), “A matemática mais antiga e aquela resultantes dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza forma e numero, e por ai que começaremos localizando de inicio o surgimento no homem primitivo do conceito de numero e do processo de contar”.

Nas civilizações babilônicas e egípcias havia duas correntes matemáticas: a geométrica e a numérica, em ambas usavam-se o pensamento proporcional, muito desenvolvido na Mesopotâmia. Muitos problemas que surgiram nessa época foram encontrados por historiadores, um que apresentava uma forma de resolver chamada de falsa posição, que é considerado um dos maiores avanços da Mesopotâmia em termos do pensamento aritmético, conforme Radford (2001). Esse método consiste em atribuir falsos valores às quantidades procuradas e ajustá-las proporcionalmente, conforme a necessidade. Além disso, ele dá uma base para a transição de aritmética para a álgebra. O uso de uma falsa quantidade para iniciar a questão é pensada de forma mais profunda, pois a verdadeira quantidade, o resultado, pode ser pensado através de outra quantidade, por isso falsa quantidade aparece como uma metáfora para a quantidade real.

Há uma relação muito direta entre o raciocínio da falsa posição e o surgimento dos primeiros indícios do pensamento algébrico. Um dos estudos que mostra essa ligação foi feito por François Thureau-Dangin (1938) em que ele encontrou uma relação entre o método e os métodos algébricos modernos. Sua principal ideia era supostamente baseada no fato de que em alguns problemas o escriba tomava o número 1 como falsa quantidade, fazendo a troca do número por x , a resolução se aproxima de muito dos métodos modernos. Ele assume que o número 1 representa a incógnita e foi escolhido dessa forma, pois os escribas não conheciam um símbolo para colocar no lugar dele. Radford (2012) desconsidera isso, dizendo que acredita que o uso do um foi útil para sistematizar os métodos de resolução dos problemas numéricos, o que contribuiu para o desenvolvimento do pensamento proporcional. Os problemas em que a resolução se aproxima de uma álgebra, o desconhecido é representado pelo próprio nome conceitual do que representam. Em vez disso, a ideia algébrica do

desconhecido passou a ser vista como uma metáfora da falsa quantidade, algumas manipulações muito semelhantes com equações também eram encontradas em alguns problemas, levando a uma ideia de falsa posição, o que seria equivalente a incógnita.

Na matemática pós-grega foram encontrados indícios da conexão conceitual entre o método da falsa posição e ideias algébricas. No século XIV é feito um tratado anônimo do ábaco, “*Il trattato d'algebra*”, no qual o desconhecido é definido como uma posição, mais adiante, em 1522, Francesco Ghaligai escreve uma obra “*Prattica d'Arithmetica*”, na qual ele mostra que houve uma troca de ideias quanto ao desenvolvimento conceitual do desconhecido, começando a surgir métodos para que fosse possível lidar com uma incógnita algébrica. O trabalho de aritmética de Diofanto e os métodos desenvolvidos por ele são intimamente ligados com o método da falsa posição, o que causa um estranhamento em entendê-los sem conhecer o método usado. A obra de Diofanto é datada no ano de 250 e trata da resolução de problemas numéricos. Em seu trabalho, diferente dos problemas babilônios, não são usados problemas cotidianos, mas sim envolvendo espécies específicas, números desconhecidos. Com as mudanças filosóficas acontecendo na Grécia antiga e uma busca por entender as origens e racionalidade humana, os estudos de Diofanto não se encaixavam em um nicho próprio para prosperar.

Diofanto transformou os problemas da Babilônia em problemas sobre as espécies gregas abstratas, fazendo com que elevasse essa disciplina de não científica a científica. Ele introduz a ideia de incógnita como um *arimos*, segundo ele é uma multidão de unidades indeterminadas, podendo ser também uma multidão indeterminada de partes fracionárias. Essa ideia é muito próxima do que os filósofos gregos acreditavam, que tudo poderia ser conhecido por um número, no qual ele é uma multidão conhecida. Além disso, a ideia de *arimos* também permitiu que um novo cálculo fosse desenvolvido, no qual, em linguagem moderna, problemas como $x * x^2 = x^3$ fossem muito importantes e possíveis. A possibilidade de pensar de uma nova forma ocorreu, pois naquela época as ideias neoplatonistas eram muito fortes.

Além da ideia de arimos, Diofanto também foi o primeiro a descrever como encontrar esse valor desconhecido, o que podemos observar como a montagem de uma equação, na matemática conhecida hoje, e o tratamento de mesmas espécies, para chegar em um caso do tipo $axn = bxm$. Os métodos de resolução de Diofanto, diferente do que se espera em resoluções hoje, não tem como finalidade descrever todas as soluções possíveis

para um problema, mas sim encontrar tantas soluções quanto quisermos, desde que a solução não seja única.

Juntamente com a matemática numérica, havia também o desenvolvimento da matemática geométrica, chamada de “geometria ingênua”, que está relacionada com a ideia de “equações de segundo grau”. Nesta geometria, problemas eram resolvidos usando a ideia de escalas, que no caso representa o próprio pensamento proporcional. Essa matemática não lidava diretamente com incógnitas em todas as suas resoluções, mas com proporções das medidas conhecidas. Alguns problemas permeiam ideias como metade da soma dos lados de uma figura, o que se aproxima das ideias algébricas de metade da soma, e é aqui que se inicia uma ligação entre as ideias algébricas numéricas e geométricas.

Para analisar o surgimento da linguagem algébrica é necessário compreender, primeiramente, que o objetivo não era desenvolver uma linguagem simbólica abstrata e transcultural, mas é fundamental na forma como comunicamos experiências científicas, mesmo que seu uso aconteça em âmbitos socioculturais, não é restrito ao domínio matemático. O desenvolvimento da escrita passou de uma escrita pictográfica arcaica, com uso de imagens, para uma escrita cuneiforme, devido à facilidade e às ferramentas disponíveis na época, o que acarretou em uma diminuição de símbolos e um registro mais simples do que era comunicado oralmente. Nos textos matemáticos mesopotâmicos há duas particularidades encontradas por historiadores: não há uma matemática especializada nos textos, nem uma tentativa de mostrar alguma e os textos não apresentam uma capacidade de “convencer” o leitor sobre a resolução de cada problema, geralmente indicando apenas o resultado final encontrado. O motivo pelo qual vemos isso, atualmente, como um “silêncio” não é a ausência de símbolos nem a incapacidade de escrever uma expressão matemática, mas uma forma socialmente aceita de transmitir e registrar informações, demarcando como as coisas devem ser escritas.

Antes de Diofanto, os escribas que realizavam todos os registros em escrita cuneiforme não tinham responsabilidade de explicar resoluções e cálculos, apenas as apresentavam, após o matemático, a partir do século V antes da era comum, argumentar e explicar foram duas atividades sociais importantes que moldaram o pensamento grego. Ele denotava o desconhecido como letras que representavam uma abreviatura da palavra.

Enquanto mesopotâmicos escribas usaram a experiência semiótica da vida cotidiana e usaram palavras como o comprimento ou a largura de um retângulo para lidar com suas incógnitas (usando expressões como 'tanto quanto' ou 'a contribuição do comprimento' para se referir ao que hoje chamamos de coeficientes de um

polinômio), Diofanto transformou a palavra «arithmos» em um conceito mais geral. Devido à sua generalidade, este conceito pode ser aplicado a uma grande variedade de situações. O «arithmos» tornou-se assim um verdadeiro símbolo algébrico. (Radford, 2001, p. 32, tradução minha).

Através do símbolo, resoluções e problemas antigos foram revisitados e reformulados, o simbolismo levou a um tratamento mais sistemático e geral dos problemas. A introdução do simbolismo baseado em *arithmos* permitiu um jeito autônomo de se pensar, ao mesmo tempo que requereu uma nova semantização e com ela, novas dificuldades para entendê-la, o que Diofanto já havia reconhecido em suas obras, que seu tratamento poderia ser difícil para os que a desconhecem.

Após compreender como surgiu, Radford passa a estudar sobre o pensamento algébrico e aritmético para compreender suas relações e interligações a partir da aprendizagem como um encontro coletivo da matemática. Muitas vezes a álgebra e a aritmética são apresentadas da mesma forma, ou compreendidas como uma mesma coisa, o que não é a realidade, e isso é muito comum quando se trata da álgebra escolar. Radford, Vergel e Rojas (2022) apresentam algumas concepções do que é essa álgebra escolar, para alguns autores. Para Mason (1985) o simbolismo alfanumérico não é necessário para o pensar algebricamente, para Kieran (2007), álgebra é um processo de raciocínio que envolve a noção de indeterminação, para Carraher e Schliemann (2007) a álgebra é intrínseco a aritmética, Kaput, Blanton e Moreno (2008) afirmam que atividades simbólicas são algébricas, as que tem uma generalização expressa de outra forma, são denominadas “quase-algébricas” e, finalmente, para Radford (2010), uma caracterização do pensamento algébrico é composta por três componentes, diretamente relacionados: o sentido de indeterminação – objetos básicos como: incógnitas, variáveis e parâmetros – “como aquele oposto à determinação numérica” (Radford, 2010, p. 39); analiticidade, o reconhecimento da natureza operacional dos objetos básicos que envolve processos de dedução, ou seja, partir de certas premissas para chegar a determinados resultados; e a designação simbólica ou expressão semiótica de seus objetos, ou seja, a forma específica de nomear ou referir-se aos objetos.

Essas concepções são fundamentais para entender o que é álgebra e o conhecimento algébrico. Para Radford (2020, p. 16) o conhecimento “é um sistema de processos corpóreos, sensíveis e materiais de ação e reflexão, constituídos histórica e culturalmente”, sendo o sistema algo em movimento e sucinto a modificações. O conhecimento é intrínseco às práticas políticas e sociais do ser humano, diferente do que Platão acreditava, para Radford, o conhecimento não é um mundo à parte e sim um processo.

Na teoria da objetivação, o pensamento algébrico é definido a partir de seu contexto e caracterização, “a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do objeto sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de raciocínio que é feito com grandezas.” (Radford, 2021, p. 173). A partir disso, o autor apresenta três características principais para caracterizar esse pensamento: os objetos do raciocínio, a forma como eles são simbolizados e como se raciocina sobre os objetos do raciocínio.

Ao lidar com grandezas desconhecidas e símbolos para representá-las, acontece uma ressignificação das operações envolvidas, no qual a operação soma se torna diferente em situações como $2 + 3$ e $2 + x$. A partir de todo esse processo, o estudante faz diversas deduções ao longo do caminho, que é o que constrói seu raciocínio.

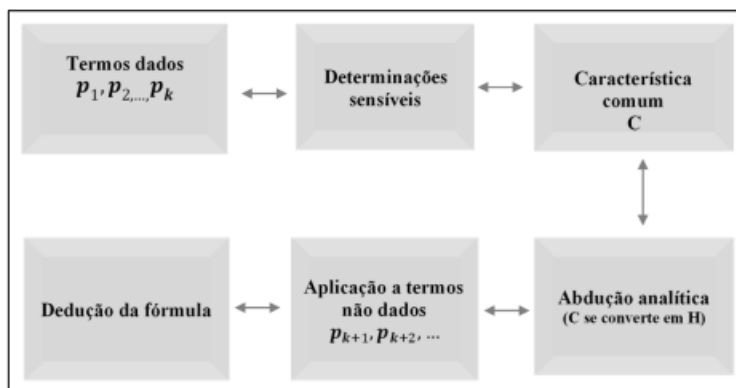
Desse processo surgem duas consequências, a primeira é que o pensamento algébrico não é caracterizado pelo uso de símbolos alfanuméricos. É possível pensar em uma situação em que o aluno resolva a partir do método de tentativa e erro, o que caracteriza um pensamento aritmético, pois o raciocínio usado não é dedutivo. Conforme Radford afirma, o uso de letras na álgebra não é condição necessária nem suficiente para criar o pensamento algébrico. A segunda consequência é que a álgebra não é uma aritmética generalizada, a álgebra permite uma visão analítica sobre certos problemas que o pensamento aritmético não consegue resolver. Além disso, o indivíduo passa a enxergar as equações como uma relação e a lidar com grandezas desconhecidas, como se fossem conhecidas.

A partir dessa caracterização, o texto passa a ser dividido em domínios matemáticos, e o pensamento algébrico é discutido em cada um deles. O primeiro é a generalização de sequências. Uma sequência pode ser de números ou figuras. Alunos mais novos, como exemplificado na experiência feita pelo autor, ao resolverem uma sequência, nem sempre preservam a estrutura inicial apresentada, mas reconhecem uma recorrência, na qual é preciso conhecer o termo anterior para construir o próximo. A capacidade de entender o processo para obtenção de figuras não implica que o aluno faz uma álgebra, pois nem sempre denota uma variável na situação, apenas faz uma generalização sofisticada aritmética.

Generalização de padrões é a forma mais comum de se introduzir ideias de álgebra na escola. Segundo Radford (2013) a generalização algébrica de padrões envolve capturar ou identificar um ponto em comum ou característica comum, observada sobre alguns elementos de uma sequência; a generalização ou aplicação desta comunalidade a todos os termos da sequência que está sendo considerada, ou seja, aos termos subsequentes da sequência; e a

capacidade de usar essa propriedade comum para deduzir uma expressão direta que permite calcular o valor de qualquer termo na sequência.

Figura 1 - Estrutura da generalização algébrica de sequências.



Fonte: Radford (2013, p.7)

Os alunos que tentam uma generalização através da aritmética não adentraram no domínio da álgebra ainda. Segundo Vygotsky (1986, p. 133): “O enquadramento da criança é puramente situacional, com a palavra ligada a algo concreto, enquanto o enquadramento do adulto é conceitual”. A generalização aritmética acontece também quando o aluno trabalha com uma característica comum entre alguns termos, usando-a para encontrar o próximo, e não para encontrar qualquer um que queira, sem uma expressão geral. Esse processo se aproxima do processo de tentativa e erro, no qual o aluno chega em uma fórmula e testa com um número finito de número, isso é chamado de “indução ingênua”, pois se assemelha a ideia de indução proposta por Fowler (1994, p. 253), se $P(1)$ e $P(N) \rightarrow P(N + 1)$ é válido para todo N , então $P(N)$ é válido para todo N . Essa indução ingênua corresponde a diversas abduções que ocorrem em fórmulas propostas, e embora ela possa chegar em uma fórmula algébrica, não envolve a dedução da mesma. O que difere o pensamento algébrico e o aritmético é o critério de analiticidade usado.

O segundo domínio são as determinações sensíveis. O aluno escolhe certos elementos, por exemplo, para determinar o próximo termo da figura, assim pode-se olhar para a relação de recorrência entre os termos consecutivos (quantidade) ou focar nas linhas de cada termo (forma). São formas diferentes de ver os termos da sequência. Percebe-se algo em comum e generaliza-se para outros termos, o que é chamado de abdução (por Pierce), que se feita apenas de um termo para outro resulta na dedução aritmética, não em uma fórmula ou regra geral. A abdução algébrica deve ser uma generalização de forma analítica, ela é um princípio para chegar em uma fórmula.

A generalização da comunidade (característica comum) dos termos forma o que é chamado, pela terminação aristotélica, de gênero, o que mantém os termos juntos, a generalização algébrica é baseada na realização de uma comunidade local, que posteriormente é generalizada para todos os termos da sequência. Encontrar essa característica comum exige que o aluno entenda o que é importante.

Radford apresenta os três níveis de generalização: primeiro é uma generalização de ações na forma de um arquétipo operacional, uma fórmula. Os alunos abordam com sucesso casos particulares - são representados por números conhecidos e operações. O segundo é a generalização contextual, usam-se índices contextuais para deduzir a “fórmula”. A generalização simbólica é dada quando as variáveis são expressas através de símbolos arbitrários. Marca um passo importante em que o aluno deixa de simbolizar com um “_”, por exemplo, e passa a simbolizar com uma letra. A semiótica e a generalização são pontos muito importantes dentro do processo de comunicação e produção de conhecimento dos alunos. Pesquisas mostram que mesmo sem o uso de representações alfanuméricas de álgebra, o processo de generalização de sequências de padrões mostra um conhecimento algébrico.

Dentro do estudo sobre a álgebra, a compreensão de equações também é importante. Sua interpretação pode ser caracterizada de duas formas, no “sistema semiótico concreto” (SSC) uso de objetos concretos para representar a ideia de equação ou “sistema semiótico icônico” (SSI) uso de ícones que representam os objetos concretos na construção. O uso do SSC permite que os alunos manipulem os valores desconhecidos com representações mais lúdicas, o que os ajuda na significação dos elementos. Para entender suas relações, o autor analisa uma atividade aplicada em uma turma de segundo ano, em que os alunos tomam consciência do SSC. Esse trabalho foi feito junto com outros professores, pois segundo Radford, o trabalho coletivo aqui é muito importante no processo, as discussões são proveitosas para os alunos.

O que precisa ser entendido é que, na teoria da objetivação, o espaço de discussão coletiva não é um lugar para os estudantes ou a professora exibirem suas proezas. É um local de crescimento coletivo, de produzir um trabalho comum, de compartilhar maneiras de pensar procedimentos para resolver o problema apresentado e de assegurar que os estudantes se envolvam genuinamente com as ideias uns dos outros, ou seja, que eles se envolvam com essas ideias de forma responsável, compreendendo-as, discutindo-as, contestando-as ou refinando-as, por exemplo. (Radford, 2021, p. 186).

Na Teoria da Objetivação, a aprendizagem é vista como uma tomada de consciência, assim, perguntas que instiguem o aluno a explicar o assunto de forma explícita faz com que ele consiga alcançar essa tomada de consciência conceitualmente profunda. Na explicação

sobre como foi resolvida a questão do experimento, podemos observar que foi feito passo a passo, se assemelhando a uma ideia de algoritmo (PC). A discussão e crítica aos textos escritos por outros são vistas como uma oportunidade de aprender mais juntos.

O texto de Vergel, Radford e Rojas (2022) discute algumas pesquisas e análises de casos que foram feitas por alguns autores. Vergel (2015) trabalhou com o reconhecimento de padrões e generalização através de sequências de figuras apoiadas em representação tabular. Em uma turma, uma professora trabalhou com sequências de figuras geométricas com os alunos para posteriormente, trabalhar com sequências com termos numéricos, de forma que os alunos pudessem relacionar cada termo com o valor correspondente. A ideia foi trabalhar em conjunto, no texto o autor discute sobre a relação entre indivíduo, consciência e atividade, que participam da materialização do sujeito e a consciência é sua relação com o mundo.

Em atividades como essa, o conhecimento algébrico surge da interação entre os alunos, “Quando é acionado, o conhecimento algébrico começa a se transformar, a se materializar. É isso que se materializa (ou seja, o que se atualiza), mediado pela atividade, o que chamamos de conhecimento.” (Vergel *et al*, 2022, p. 1182), o conhecimento é o produto dessa mediação. A materialidade da atividade (representada nas perguntas do professor, nas intervenções dos alunos, bem como na sua produção matemática) é o que faz o conhecimento algébrico emergir de certa forma (Radford, 2018; Vergel, 2015). A produção de uma das alunas é analisada, na qual ela consegue determinar quantas vezes o número 3 deve ser somado ao primeiro termo para chegar ao 15º termo, mas não uma fórmula geral para todos eles, chamamos isso de uma generalização aritmética sofisticada, ela não lida com as variáveis envolvida, mas com ajustes pontuais do valor até encontrar o que se procura. Ainda, ela não consegue deduzir uma fórmula do trabalho que fez, apenas uma expressão multiplicativa.

Os autores propõem, conseqüentemente, pensar numa zona conceitual em que se confundem formas sofisticadas de generalização aritmética e protoformas de pensamento algébrico (baseadas na proto analiticidade).

Outro projeto discutido é um realizado com professores do ensino fundamental em diversas escolas, eles realizaram atividades que seriam aplicadas com todos os alunos da rede para desenvolvimento de habilidades matemáticas, em Bogotá. Foram dadas diversas sequências, com números e/ou figuras e eles respondiam o que se pedia, a ideia era encontrar o termo geral, em uma dessas atividades, o texto apresenta uma resolução de uma professora dos anos iniciais, na qual ela faz uma generalização aritmética sofisticada para encontrar o

100º termo da sequência, sua produção era muito semelhante à da aluna que foi mencionada no estudo anterior.

“A pesquisa de Vygotsky (2007) mostra que a palavra desempenha um papel fundamental na totalidade da consciência e não em suas funções isoladas, pois assumir palavras com significado específico contribui para fixar uma ideia ou conceito na consciência.” (Vergel *et al*, p. 1187, 2022). A partir das reflexões epistemológicas e da análise semiótica propostas neste trabalho, é possível, portanto, pensar no que propomos chamar de zona conceitual de formas de pensamento aritmético sofisticado e protoformas de pensamento algébrico, área que se caracterizaria, fundamentalmente, pela sobreposição ou entrelaçamento dessas duas formas de pensamento matemático e que pode ser inscrita no quadro do que tem sido chamado de zona de emergência do pensamento algébrico (Radford, 2010).

É possível passar de uma generalização aritmética, para uma aritmética sofisticada e então, para algébrica. “uma das contribuições de Vygotsky (2001) foi posicionar a relação crucial que existe entre a instrução e o amadurecimento das funções psíquicas prontas para amadurecer, pois com a instrução adequada (Obuchenie) as funções psicológicas, que estão próximas do desenvolvimento, serão capazes para fazer isso.” (Vergel *et al*, p. 1188, 2022).

2.3. O encontro do Pensamento Computacional e Algébrico

Após buscar diversas concepções de pensamento computacional, analisando-as, é possível encontrar semelhanças muito diretas entre ele e o pensamento algébrico, principalmente em suas características e o ambiente em que podem ser usados, nesse caso, usaremos ambos em um contexto matemático. Apesar de ser derivado da área da ciência da computação, isso não limita seu uso a uma área específica, sendo possível pensá-lo em diferentes contextos e situações, que buscam a resolução ou entendimento de um problema.

Observar as semelhanças entre esse e o pensamento algébrico mostram que existem alguns pontos em comum muito nítidos, principalmente nas habilidades para resolução de problemas, pois na álgebra, a abstração e generalização são pilares fundamentais para a compreensão, e as resoluções levam para diversos tipos de regras e fórmulas, que podem ser vistos como algoritmos.

Existem alguns aspectos principais, que segundo Liukas (2015) são os pilares do Pensamento Computacional, e serão usados no desenvolvimento das atividades, buscando

uma ponte entre problemas matemáticos e o desenvolvimento dessas habilidades. O autor define-os da seguinte forma:

- Abstração: Processo de eliminar detalhes irrelevantes para se concentrar nas coisas que realmente importam.
- Decomposição: Processo pelo qual problemas são divididos em fragmentos menores. Quem trabalha com programação costuma dividir os códigos em pedaços menores. Assim fica mais fácil compreendê-los e consertá-los.
- Identificação de padrões: Encontrar semelhanças e padrões a fim de resolver problemas complexos com maior eficiência. Para isso, busca-se características comuns a todos os problemas, ou pelo menos similares.
- Algoritmo: Conjunto de passos específicos para resolver um problema. Em programação, os algoritmos são usados para criar soluções reutilizáveis para os problemas.

Ao trabalhar com resolução de problemas envolvendo padrões é preciso que o professor identifique o progresso dos alunos, como eles entendem o padrão, como eles descrevem o mesmo e se conseguem expandi-lo matematicamente de alguma forma, sejam com palavras, equações, gráficos, etc, e, por fim, verificar se eles conseguem aplicar os padrões encontrados de maneira a generalizá-los. Além de todo esse processo apresentado, o desenvolvimento do pensamento computacional e algébrico também é favorecido quando, a partir de análise de sequências, os indivíduos passam a formular e testar conjecturas, usando de sua capacidade de generalização. Sobre isso, Perceval *et al* (2023) afirma que “o PC contribui para a compreensão do estudo da Álgebra e torna-se uma importante estratégia para a resolução de problemas, visto que permite ao estudante explorar o problema por meio dos seus conceitos/pilares.” (p. 6).

A partir dessas ideias, reconhece-se que ao analisar uma sequência, o estudante permeia todas essas etapas, sendo possível dividir o problema em partes menores (decomposição), identificar as informações relevantes (abstração), procurar pontos em comum (identificação de padrões) e descrever passos para resolução (algoritmo). Percebe-se que esse passo a passo se assemelha ao apresentado na Figura 1, feito por Radford, ao trabalhar com sequências. Além dessas etapas, o reconhecimento de padrões permite que os estudantes façam uma generalização do que é conhecido, se uma característica se repete, então é possível pensá-la para um número maior de termos, por exemplo.

3. METODOLOGIA

A Teoria da Objetivação é pautada na busca por compreender a aprendizagem que identifica os alunos como sujeitos históricos e culturais, e como toda sua consciência cultural constituída e em formação levam os indivíduos, juntamente com seus professores, a se posicionarem em práticas matemáticas. Essa teoria abre espaço para a concepção de três conceitos principais: o saber, que pode ser traduzido como pura potencialidade do indivíduo, o conhecimento, que é a atualização do saber e a aprendizagem, que corresponde a tomada de consciência de objetos e sistemas de pensamento sintetizados a partir da prática social.

Para que seja possível a estruturação de todo o processo que permeia a atualização do saber e tomada de consciência dentro de sala de aula, Radford (2015) propõe a organização de tarefas de forma sequencial, elevando o grau de dificuldade, e sempre considerando os conhecimentos e interesses dos alunos envolvidos.

Segundo o dicionário Oxford Languages, o termo atividade corresponde “a qualidade do que é ativo” ou a “faculdade ou possibilidade de agir, de se mover, de fazer, empreender coisas”. Moretti, Panossian e Radford (2018) explicam como o conceito de atividade, para Radford, difere do que é visto no dicionário, ou o que é entendido pelo senso comum, pois relaciona-se à ideia de atividade como energia. Essa energia é composta de diversos fluxos que a movem. Um fluxo afetivo, composto por um fluxo de motivo e um de desejos, inclui também um fluxo de ações na qual os sujeitos se apoiarão ao realizar a atividade. “Dizer que a atividade é uma energia, quer dizer que é algo que está formado, por vezes, por uma ativação e que nós nos colocamos por nossa própria ativação física-intelectual com o fim de fazer algo” (Moretti, Panossian; Radford, 2018, p. 255).

Dentro do contexto da sala de aula, a atividade é chamada também de “labor conjunto”, pois, para Radford (2020), os processos de ensino-aprendizagem são vistos como uma única atividade entre alunos e professores, desenvolvendo o labor conjunto entre eles.

Os trabalhos de Leontiev sobre a Teoria da Atividade fundamentam o trabalho em sala de aula. Ele entendia a atividade como “os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com objetivo que estimula o sujeito a exercer esta atividade, isso é, o motivo” (Leontiev, 1988, p. 68). O autor ainda afirma que a atividade é guiada por um motivo, que age como um agente impulsionador, vinculado ao objeto para o qual a atividade se dirige, e a partir da qual busca-se satisfazer necessidades que estão diretamente vinculadas às emoções e sentimentos, que vão além de cumprir uma obrigação.

Além da concepção da atividade, dentro da Teoria da Objetivação, ainda há ferramentas que compõem seu desenvolvimento, como a unidade conceitual, que representa o conceito a ser ensinado ao aluno, e a unidade contextual, que abrange o contexto no qual essa unidade conceitual será inserida. Esses dois conceitos referem-se ao pano de fundo no qual as atividades estão inseridas.

Para desenvolver as atividades apresentadas na seção a seguir, foi preciso procurar questões que possibilitariam o desenvolvimento das quatro características principais do pensamento computacional e serem exploradas: abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmos. A maior inspiração para o seu desenvolvimento foi o estudo de atividades voltadas ao pensamento computacional e, a partir disso, procurar uma forma de inserir o pensamento algébrico no contexto.

A primeira atividade foi desenvolvida com o intuito de promover a compreensão do que é um algoritmo, pois os alunos que não possuem nenhuma familiaridade com programação podem desconhecer esse termo, mesmo que a ideia seja simples. É importante levar os estudantes a entenderem a importância de todos os passos, para isso, a escolha da descrição de uma atividade cotidiana aparece como uma maneira de lidar com uma situação recorrente, pois é mais fácil para identificar as dificuldades do algoritmo, caso exista algum.

Após compreender isso, é necessário criar um diálogo com o pensamento algébrico também. Na segunda parte, a escolha de uma questão simples é feita para que os alunos não tenham dificuldade ao escrever um algoritmo para sua resolução. A escolha desse problema se deu devido a possibilidade de trabalhar outras habilidades ao mesmo tempo, como a decomposição, e como a interpretação é importante em todo o processo. Apesar de não ter um grau de dificuldade muito grande, ela exige um nível mais alto de atenção.

O foco da segunda atividade é o reconhecimento de padrões, e a ideia de usá-la surgiu pois, na primeira vez que vi essa questão, a imagem que a representava estava errada e induzia ao erro dos estudantes. O objetivo do seu uso dentro da prova da OBMEP era que os alunos encontrassem esse padrão na área do triângulo, por isso, o intuito do seu uso permanece o mesmo, foram feitas adaptações nas perguntas para facilitar a compreensão dos alunos, direcionando eles à mesma conclusão, mas de formas diferentes.

Para o desenvolvimento de atividades, o objetivo foi usar a abstração de forma direta, para então, introduzir a nomenclatura de sequências. A escolha de usar o problema das pontes de Königsberg ocorreu devido à Teoria de Grafos, que teve origem a partir desse problema e permite a representação de diversos problemas através de vértices (pontos) e arestas (os

caminhos e ligações). Dentro dessa teoria, é muito comum a construção de algoritmos que resolvam problemas representados por grafos, sejam eles sobre caminhos ou não.

A análise das duas representações das pontes de Königsberg visa o entendimento do que é importante, pois os detalhes da foto não alteram sua resolução, além da nomenclatura usada, como o grafo categoriza cada tipo de informação, e como as diferencia. No caso, usa-se as letras para diferenciar o que é cada coisa e o índice como uma forma de indicar que cada uma é diferente.

A partir do entendimento dessa nomenclatura, a segunda parte da atividade promove um trabalho com sequência numérica, dessa forma, inicia-se uma introdução às sequências. Assim como falado anteriormente, Radford, ao trabalhar com o pensamento algébrico, promove um trabalho diretamente ligado a sequências, logo, a partir desse momento, o foco é trabalhar as habilidades dentro de sequências diferentes, numéricas ou não. Nesse contexto, fica mais nítido onde cada habilidade aparece, pois os alunos passam pelo processo de abstração, decomposição e reconhecimento de padrões para compreender a sequência e seus termos seguintes. O foco principal dessa sequência numérica é lidar com as diferentes nomenclaturas, para que o estudante entenda, abstraia, as diferentes representações.

A quarta atividade é uma extensão da terceira, pois há o trabalho com sequências, desta vez de figuras. A escolha de relacionar, de certa forma, com a progressão aritmética, permitiu que duas progressões fossem representadas de forma unida e discreta, cada uma sendo representada por uma cor de quadrado diferente. Aqui, os alunos podem passar pelo processo de abstração ao compreender o que os quadrados representam, pois para calcular a quantidade de quadrados, a posição deles não interfere no valor.

Além de trabalhar com a quantidade de quadrados, a proposta que eles montem as próximas figuras visa compreender como eles enxergam a sequência apresentada, pois nesse caso, o intuito é formar o quadriculado, logo, posicionar o quadrado de forma errada interfere na figura criada.

Por fim, a última atividade é a união de tudo o que foi trabalhado anteriormente. A questão escolhida também é da OBMEP e, na prova, ela é apresentada de forma que os alunos trabalhem apenas com o padrão no número de cartas acrescentadas, pois assim como é proposto nela, é possível encontrar uma fórmula que descreva isso. A ideia de adicionar as demais perguntas, para cálculo das cartas em determinada figura, surgiu como uma forma de induzir o estudante a analisar a formação de cada torre, usando a decomposição para isso. Essa questão é mais complexa que as outras, e demanda mais tempo para toda a análise

necessária, mas ao olhar para as torres separadamente, encontrando os padrões entre as construções, é possível chegar no resultado esperado.

Para englobar as atividades e a construção de algoritmos, que aparece explicitamente na primeira questão, proponho o uso do Scratch a partir da resolução da última questão. A plataforma Scratch foi desenvolvida pelo MIT em 2007, ela usa da programação em blocos para a construção de jogos, histórias, cenários e diversas outras possibilidades. Por não exigir um conhecimento prévio de linguagem de programação para seu manuseio, esse recurso se torna acessível aos alunos dentro do ambiente escolar, podendo ser usado em computadores ou tablets. Assim como Denning and Freeman (2009) afirmam, o Scratch permite que o aluno use, modifique e crie suas próprias ideias, logo, além da programação proposta, ainda é possível usar da criatividade e adicionar outros recursos à programação.

4. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

As atividades desenvolvidas foram pensadas a partir do estudo das características dos pensamentos algébrico e computacional, usando como base trabalhos já desenvolvidos, principalmente sobre o desenvolvimento do pensamento computacional, como o livro “Computação e Eu: Livro do professor”⁵ de Bianca Leite Santana, Luis Gustavo de Jesus Araujo, Roberto Almeida Bittencourt, 2019 e “O pensamento computacional no currículo de Matemática”⁶, de Rui Gonçalo Espadeiro.

Não há uma delimitação do público alvo para as atividades, mas devido a formalização e conteúdos necessários, recomenda-se que seja aplicado em turmas de 8º ano do Ensino Fundamental. Além disso, as quatro primeiras atividades buscam desenvolver as habilidades escolhidas de formas diferentes, e a última foi pensada para unir tudo o que foi trabalhado anteriormente, usando uma linguagem mais formal, logo, aumentando o nível de dificuldade.

4.1. Atividade 1 - O que é algoritmo?

O objetivo desta atividade é mostrar aos alunos como os algoritmos funcionam e como eles fazem parte da vida cotidiana, mesmo que não os vejamos explicitamente. Como uma forma de promover a compreensão da importância do detalhamento ao criar instruções, eles receberão uma tarefa e precisarão detalhá-la da maneira mais fiel possível. Abaixo está a atividade proposta.

Algoritmos fazem parte da nossa vida, mesmo que não chamemos eles dessa forma. Podemos pensar em uma receita, por exemplo, temos as entradas, que correspondem aos ingredientes, os procedimentos a serem feitos, ou seja, como juntar e preparar esses ingredientes, e a saída, que é o alimento pronto. Pensando dessa forma, podemos perceber que várias atividades podem ser descritas através de uma série de instruções. Vamos treinar, construa um algoritmo que descreva o processo para fazer um sanduíche com os ingredientes que você mais gosta.

Ao propormos a construção de um algoritmo que representa uma atividade rotineira buscamos mostrar a importância da minuciosidade na descrição como, por exemplo, a importância na ordem dos comandos. É esperado que eles descrevam essa atividade seguindo uma ordem lógica, sendo preciso pegar um recipiente, seja copo ou garrafa, se a água for da

⁵ ISBN: 978-65-901321-2-3. Disponível em <https://sites.google.com/view/computacaofundamental/sextotoano>

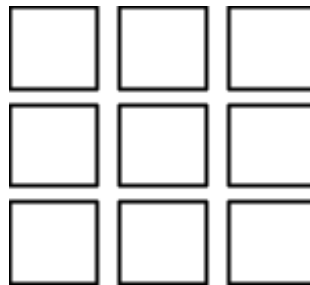
⁶ Disponível em <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/2737>

torneira, é preciso abri-la e posicionar o recipiente abaixo, para que a água o encha. É interessante pedir para que os alunos tentem encenar o processo, com o autor do algoritmo narrando, assim, consigam perceber quais elementos faltam.

Em um segundo momento, direcionaremos a atividade para um contexto matemático:

Observe o seguinte problema: Dado um tabuleiro de tamanho 3x3, distribua nele os números de 1 a 9, de modo que a soma de todas as linhas, colunas e diagonais seja igual a 15.

Figura 2 - Tabuleiro 3x3.



Fonte: Elaborado pela autora.

Monte um algoritmo que descreva o processo para encontrar a resposta, lembre-se que você não deve explicitar a resposta, mas sim instruir a pessoa que vai ler o seu algoritmo a como chegar nela. Após isso, reflita sobre o posicionamento de cada número, existe mais de uma configuração possível?

Nesse momento temos, novamente, a construção de um algoritmo e sugere-se que os alunos troquem os algoritmos, tentando chegar na resposta seguindo o passo a passo feito pelo colega. Para chegar na resposta final, que será apresentada mais adiante, o estudante deverá, de certa forma, decompor o problema. Como o problema proposto informa qual a soma de cada linha, diagonal e coluna, então a primeira coisa a ser feita é encontrar quais são as somas possíveis, compostas por três números distintos entre 1 e 9 que resultem em 15. A partir das opções encontradas, é preciso entender onde serão colocados cada um dos algarismos. Vejamos, temos posições que aparecem mais vezes que outras, o que significa que a posição central, por exemplo, fará parte de quatro somas, assim como as posições dos cantos farão parte de três somas, portanto, é necessário descobrir em quantas somas distintas um dado número aparece. Posteriormente, o posicionamento de cada um deve ser feito a partir do que aparece o maior número de vezes, até os que aparecem com menos frequência. A resposta esperada é dada na figura abaixo.

Figura 3 - Resolução do tabuleiro.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Elaborado pela autora

A última pergunta apresentada busca induzir a análise dessas somas, para que o estudante consiga compreender o que cada posição significa. Na imagem abaixo, temos uma situação em que a tabela foi rotacionada, porém as posições se mantiveram, logo, é uma opção de resposta correta, em quem as somas analisadas são sempre 15.

Figura 4 - Segundo exemplo de resolução.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fonte: Elaborado pela autora

Na figura a seguir, temos a troca de posição de dois números, o 6 e 4, em relação à solução da figura 3. Apesar da soma da diagonal em que os dois estão permanecer 15, o restante não se mantém, logo, é possível observar como essa mudança afeta as demais somas, das linhas e colunas.

Figura 5 - Exemplo de mudança de posição.

6	9	2
3	5	7
8	1	4

Fonte: Elaborado pela autora

Essa atividade possibilita que o estudante desenvolva um conhecimento de algoritmos, seguindo o que a questão pede, além de desenvolver a abstração, a qual o aluno deverá recorrer para compreender quais informações são essenciais nesse processo.

4.2. Atividade 2 - Reconhecimento de padrões na fórmula da área do triângulo.

Essa atividade promove, através da investigação de uma questão, que os alunos compreendam um padrão para o uso da fórmula da área do triângulo. Entende-se que os estudantes já tenham conhecimento dessa fórmula, pois isso será necessário para o entendimento do que será proposto. A atividade usa como base uma questão da OBMEP 2014, Segunda Fase, Nível 3. A mesma foi adaptada para a situação proposta.

Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 cm até chegar em B, depois anda mais 10 cm até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Partindo do ponto A e seguindo o caminho que ela fez inicialmente, ela anda x centímetros, e está em um ponto F do contorno.

- 1. Com as informações fornecidas, você consegue desenhar o trajeto feito pela formiga? Quantos centímetros ela andou?*
- 2. Vamos imaginar uma situação em que x seja 19 cm e marque o ponto F. Qual a área do triângulo ADF?*
- 3. Suponha que o valor de x seja 23 cm, qual a área de ADF? Se x valer 27 cm, qual será a nova área? Você percebeu algo entre esses dois valores?*
- 4. Qual a maior área possível para o triângulo ADF?*

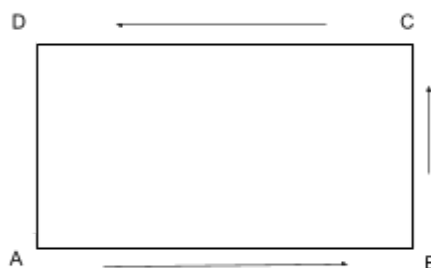
Essa atividade busca construir uma relação entre o lado do triângulo que liga um dos vértices da base ao vértice oposto a ela e sua altura, sendo que enquanto a altura permanecer a mesma, a área não será alterada. O bom entendimento do aluno quanto ao percurso feito pela formiga permitirá que ele calcule as áreas pedidas e, assim, perceber que independente da posição do ponto F, desde que ele se encontre entre os vértices B e C, a área do triângulo ADF será sempre a mesma.

O foco dessa atividade é que, através da observação e dos cálculos solicitados, o estudante consiga perceber o padrão quando trata-se da área do triângulo. Enquanto F estiver entre B e C, a área se mantém a mesma, logo, é possível perceber que o valor do lado não influenciará nesse cálculo. Além disso, procurar a maior área que o triângulo pode ter induz a compreensão de que o valor de x não influenciará nisso diretamente, pois se o trajeto percorrido for 31 cm, por exemplo, a área de ADF será a mesma do momento em que o trajeto percorrido foi 19 cm, mais um padrão que pode ser observado, pelo fato do triângulo estar inserido no retângulo.

Analisando cada pergunta separadamente, a primeira é feita para que o aluno entenda o percurso feito pela formiga, e que a distância percorrida por ela foi de 50 cm. Nessa

questão, a interpretação é crucial para o entendimento das questões seguintes. Logo, se essa descrição for equivocada, é possível que o aluno não conclua o esperado.

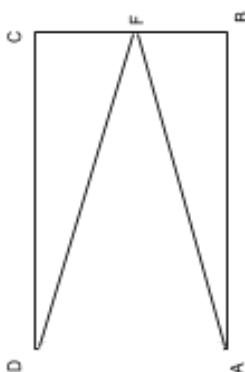
Figura 6 - Caminho percorrido.



Fonte: Elaborado pela autora.

A segunda pergunta busca a compreensão de como calcular a área de um triângulo presente nesse retângulo. O uso de x para representar a distância entre A e F busca uma notação algébrica mais explícita, e aqui o aluno precisará entender que essa letra não representa um valor fixo, mas sim uma informação que está sendo alterada, mas se referindo sempre a essa distância. Como o valor de x é menor que a distância entre AB, então o ponto F está sobre AB, e a área de ADF pode ser calculada a partir da base AD e altura AF, logo, terá uma área de 95 cm^2 . Uma dificuldade que pode ser encontrada é a visualização do triângulo. Olhá-lo com o retângulo na horizontal pode levar o estudante ao erro, por não identificar corretamente a base e altura, logo, uma sugestão seria instruí-los a visualizar o retângulo na vertical, como na figura abaixo.

Figura 7 - Visualização do triângulo ADF.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na terceira pergunta proposta, quando o valor de x está entre 20 cm e 30 cm, o valor da área não muda, pois a posição do vértice F, sobre BC, não altera o valor da área, que será

calculada a partir da base AD e altura AB. Os cálculos propostos são feitos para levar o aluno a perceber que essa área se mantém, tendo um valor de 100 cm^2 , e a observação a ser feita entre as duas situações é justamente essa, a área se mantém. Aqui temos a percepção do padrão para essa área enquanto o ponto F permanecer sobre BC, caso o aluno consiga concluir isso, ele encontrou um padrão: a posição do vértice oposto a base não interfere na área do triângulo, pois não depende dela.

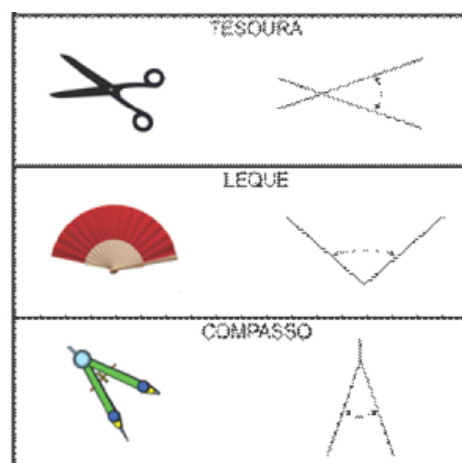
A última pergunta busca selar, de certa forma, essa observação, com o registro verbal ou escrito disso. Para ajudar os alunos a visualizarem melhor que acontece, usar ferramentas como o GeoGebra pode facilitar esse processo, com applets e construção que permitam a interação, pode levar o estudante a compreender que isso vale para todo triângulo. A maior área a ser encontrada é 100 cm^2 , pois é a situação em que a altura do triângulo é a maior possível.

4.3. Atividade 3 - Abstraindo informações

Dentro do campo da matemática existem diversos problemas que surgem e, para facilitar o entendimento e resolução, apenas as informações necessárias são usadas, deixando de lado detalhes que não interferem no resultado. Podemos pensar nessas simplificações através de imagens.

Observe as representações abaixo. Você consegue perceber como é possível diferenciar cada um dos objetos através do seu formato?

Figura 8 - Representações de objetos.

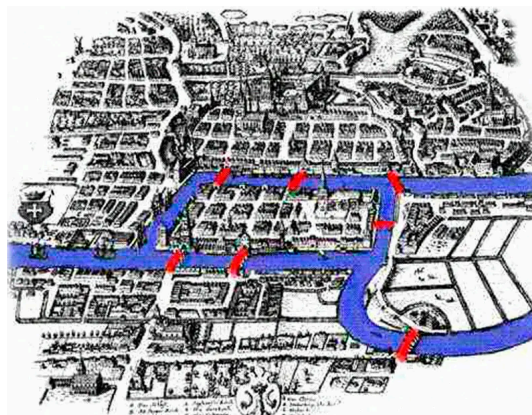


Fonte: Kléber Mendes Vieira (2010).

Pensando nisso, existe um problema antigo da matemática da Pontes de Königsberg, que consiste em uma cidade que possui 7 pontes que ligam 4 pedaços de

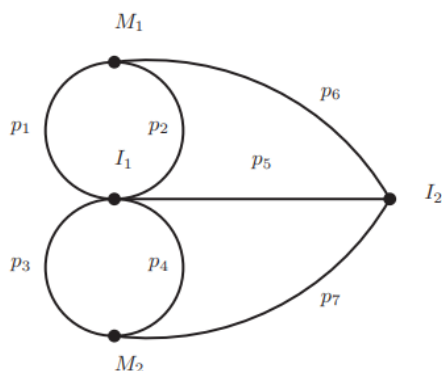
terra, e o objetivo é passar por todas as pontes, de forma que nenhuma delas se repita no trajeto. Esse problema não tem solução, pois não é possível fazer isso, e para que os matemáticos chegassem a essa conclusão, foi preciso olhar para o problema de uma forma diferente, enxergando apenas os detalhes relevantes. Olhe a imagem que representa essa cidade e depois, uma forma de simplificar esse problema. Você consegue identificar o que cada elemento representa na segunda figura?

Figura 9 - Pontes de Königsberg.



Fonte: Adérito Araújo / Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra/Montagem sobre reprodução⁷.

Figura 10 - Grafo que representa o Problema das Pontes de Königsberg.



Fonte: Freitas e Borges (2015, p. 45)

A apresentação desse problema tem o propósito de que os estudantes entendam quais são as informações necessárias para resolver esse problema, que no caso são apenas os pontos de terra e suas ligações. Espera-se que eles entendam que p_i representam as pontes, M_i as margens e I_i as ilhas. Criar esse paralelo entre ambas as situações permitem que o indivíduo desenvolva a sua abstração não apenas para entender o que é cada elemento, mas sua

⁷ <https://super.abril.com.br/historia/o-problema-urbanistico-que-deu-origem-a-teoria-dos-grafos>

nomenclatura também, entendendo que a letra usada representa algo diferente, assim como os índices, indicam pontes diferentes, por exemplo, mas tratam do mesmo objeto.

Pensando no exercício que você fez, vamos fazer um desafio. Pedro está criando uma sequência de números, que ele está representando usando a letra N e um índice para indicar qual é o termo, por exemplo, primeiro é chamado de N_1 , o segundo de N_2 e assim por diante, até o número que ele escolher calcular. Além de representá-los dessa forma, ele criou uma regra para saber qual o valor de cada termo, que é $N_j = 2j - 1$, na qual a letra j representa o termo calculado, e esse é o valor que deve ser substituído, assim, o primeiro termo será $N_1 = 2 * 1 - 1 = 1$.

1. Encontre os valores de N_1 a N_7 .
2. Qual o valor de N_{45} ?
3. Considere $j = 10$, calcule N_j , N_{j+2} e N_{2j} .
4. Existe algum valor dessa sequência que será um número par? Por que?

A partir desse momento o estudante está lidando com uma nomenclatura muito comum no manuseio com sequências, e que será usada nas próximas atividades. A opção de apresentar o nome de cada termo e tratá-lo dessa forma busca o entendimento de que esse nome é uma representação, e significa uma posição na sequência, que é dada pelo valor de j . A regra usada para formar a sequência levará o aluno a construir uma sequência de números ímpares, sendo 1 o primeiro ímpar positivo, 3 o segundo ímpar positivo e assim por diante.

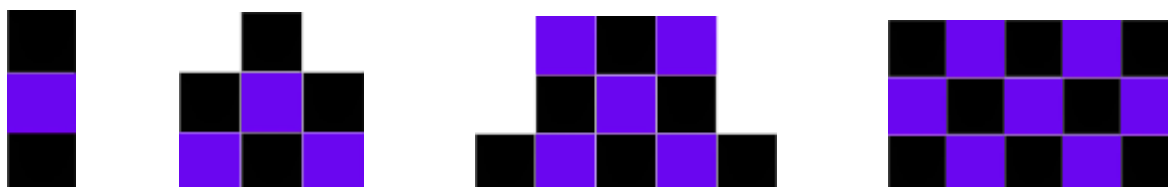
A primeira pergunta é para o aluno compreender como a sequência é formada, além da sua compreensão de que entre N_1 e N_7 existem outros valores também. A segunda pergunta tem uma proposta semelhante, para o cálculo de um valor maior da sequência. A terceira pergunta usa uma proposta um pouco diferente, na qual o aluno deverá compreender as operações feitas com o índice j . Isso é feito com o objetivo de que ele compreenda a ideia de que o índice $j+2$ representa o termo que está duas posições à frente de j , pois nas atividades seguintes trabalharemos com o termo $n+1$, logo, o termo seguinte. A última pergunta explora o reconhecimento de padrões ao perceber que os números são todos ímpares, e a justifica encontra-se na própria regra, ao usar um número múltiplo de 2 e subtrair uma unidade, o resultado sempre será um valor ímpar.

4.4. Atividade 4 - Sequências e PA.

Nesta atividade os alunos receberão uma sequência de imagens compostas por quadrados roxos e pretos, e devem encontrar o padrão na formação em cada uma das imagens. O objetivo dessa atividade é induzir os estudantes a encontrarem essas semelhanças e trabalharem com uma progressão aritmética, mas sem toda a formalidade que ela exige.

Observe a sequência de figuras abaixo:

Figura 11 - Sequência de figuras.



Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos retirar algumas informações a partir da observação dela, inclusive prever como devem ser as próximas figuras da sequência.

- 1. Quantos quadrados formam a sexta figura dessa sequência?*
- 2. Desenhe como serão formadas as figuras 5, 6 e 7. Use as cores para diferenciar os quadrados roxos e pretos.*
- 3. Se quiséssemos descobrir quantos quadrados formam a 32ª figura, seria possível encontrar uma fórmula que nos permitisse isso, sem a necessidade de calcular cada uma das figuras?*
- 4. Se analisarmos cada cor separadamente, seria possível determinar quantos quadrados roxos e pretos formam a figura 40?*
- 5. Se somarmos todos os quadrados usados para formar as figuras de 1 a 15, quanto obteremos? Seria possível fazer essa conta sem que precisássemos montar todas as figuras?*

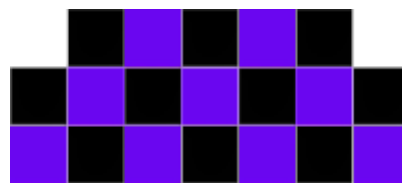
Nesta atividade os alunos estão trabalhando com a abstração e generalização dos termos das sequências, e as perguntas são apresentadas de forma que o estudante possa desenvolver o conhecimento e generalizar as informações.

Vamos analisar as perguntas. A primeira promove um entendimento do aluno de como as figuras se formam, para encontrar a sexta imagem, ele precisa compreender como as que são apresentadas foram montadas, assim, ele perceberá um padrão na adição dos quadrados de cada cor. Os quadrados roxos representam uma Progressão Aritmética de razão 2, com

primeiro termo igual a 1, e os quadrados roxos representam uma Progressão Aritmética também de razão 2, e com primeiro termo igual a 2.

A pergunta “Desenhe como serão formadas as figuras 5, 6 e 7. Use as cores para diferenciar os quadrados roxos e pretos” busca ampliar o conhecimento da formação de figuras, além de compreender a quantidade que as forma, espera-se que o estudante encontre como os quadrados se organizam, pois os mesmos são posicionados de forma estratégica, por isso na quarta figura estão formando um retângulo. A partir da quarta figura, a quinta será da seguinte forma:

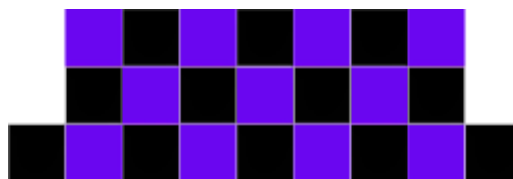
Figura 12 - Quinto termo da sequência.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os quadrados sempre serão adicionados de forma que os que têm mesma cor se disponham um de cada lado, logo, do lado direito serão adicionados um quadrado roxo e um preto, e do lado esquerdo ocorrerá o mesmo. Juntamente a isso, deve-se manter as colunas formadas por três quadrados, logo, para formar a figura 6, por exemplo, adicionamos um quadrado roxo nos espaços vazios na parte de cima, e um quadrado preto que iniciará uma nova coluna.

Figura 13 - Sexto termo da sequência.



Fonte: Elaborada pela autora.

Essa disposição explica porque as figuras formadas representam um quadriculado, além disso, é possível perceber que a cada três figuras, teremos um retângulo formado, isso acontece na figura 1, 4, 7, 11 e assim por diante.

Para introduzir a ideia de generalização, caminhando para uma elaboração mais abstrata, a terceira pergunta, “Se quiséssemos descobrir quantos quadrados formam a 32ª figura, seria possível encontrar uma fórmula que nos permita isso, sem a necessidade de calcular cada uma das figuras?” busca esse resultado. A ideia de propor que isso seja feito

sem montar todas as figuras é para induzir o aluno a buscar outra maneira de pensar essa formação, focando na sua lei de formação, por exemplo.

A pergunta seguinte trata sobre o número de quadrados de forma separada, o que permite que o aluno investigue cada cor separadamente, e encontre, também, uma maneira de dizer a quantidade de quadrados em uma figura x . Essa pergunta pode ser respondida juntamente com a anterior, se o aluno usar da decomposição e analisar cada caso para encontrar o total, ele estará respondendo a essa pergunta também. Caso isso não aconteça, ele terá a oportunidade de analisar dessa forma.

Por fim, a última pergunta, “Se somarmos todos os quadrados usados para formar as figuras de 1 a 15, quanto obteremos? Seria possível fazer essa conta sem que precisássemos montar todas as figuras?” procura uma semelhança com a ideia de somas dos termos de uma PA, assim, os alunos conseguiriam trabalhar com o somatório de todas as figuras, compreendendo como cada uma delas é formada e o que essa soma total significa. Como citado inicialmente, a proposta é introduzir essas ideias de progressão aritmética, sem trabalhar com a formalização da mesma.

A escolha de usar uma figura composta por quadrados de duas cores diferentes, nas quais ambas as cores possuem um número diferente de quadrados em cada figura, visa desenvolver a capacidade de decompor esse problema, pois em todos os casos, é necessário interpretar o que acontece com cada cor separadamente. Além disso, trabalha-se a generalização dos termos das figuras, o que se espera que os alunos façam de forma algébrica, mas além disso, que eles compreendam a generalização de cada um dos elementos.

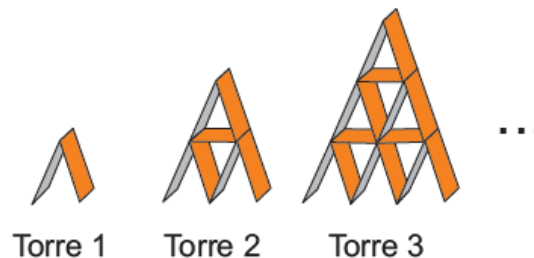
4.5. Atividade 5 - Generalizando sequências e construindo algoritmos

Essa proposta de atividade une o que se espera, que o aluno tenha aprendido com as atividades anteriores. Além disso, é preciso que os alunos tenham um conhecimento básico de Scratch, para ser possível realizar o que está proposto. A primeira parte será destinada à construção do conhecimento algébrico, usando a generalização, decomposição, reconhecimento de padrões e abstração, como já foi tratado anteriormente, para a compreensão de como as torres são formadas, visto que há uma regra a ser seguida em como são montadas. Para responder as perguntas, espera-se que o aluno busque recursos algébricos, assim, unindo os padrões encontrados ao que se pede.

A sua motivação parte de uma questão da OBMEP 2018, Primeira fase, Nível 1, que apresenta o seguinte problema.

Janaina faz torres com cartões, seguindo o padrão da figura. A primeira torre foi feita com 2 cartões, a segunda com 7 e a terceira com 15, e assim por diante.

Figura 14 - Sequência de cartões.



Fonte: OBMEP (2018).

1. *Quantas cartas formam a torre número 10?*
2. *Quantas cartas formam a torre número 20?*
3. *É possível determinar quantas cartas formam a torre n ?*
4. *Você consegue descrever como essas torres são formadas, quando adicionamos as cartas em uma torre n , para criar a $n+1$? Além disso, é possível encontrar o número de cartas adicionadas de uma torre a outra?*

Após encontrar essas fórmulas e entender do que se trata, os alunos deverão montar um algoritmo no Scratch, no qual a entrada será o número da torre procurada, e a saída o valor de cartas que a formam e quantas foram adicionadas à anterior para formar a desejada.

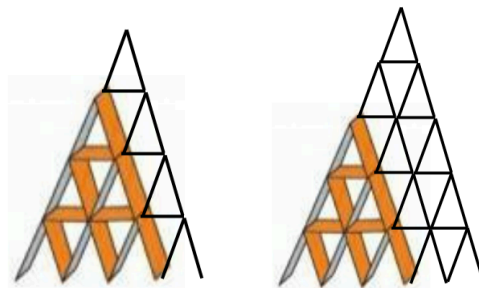
Essas atividades unem tudo o que foi trabalhado anteriormente, usando o que foi desenvolvido de forma conjunta, além de usar um recurso diferente, que é o Scratch, como forma de incluir uma atividade *plugada*. Para resolver essa questão é imprescindível que os alunos observem-na de forma decomposta, os diversos detalhes e diferenças na construção, quando visualizados de forma integral, podem causar confusão. Para formar cada figura, olharemos duas situações: primeiro, as cartas adicionadas na base, formada por uma “casinha” de duas cartas, segundo, os “triângulos” adicionados em cima dessas, formadas por três cartas. É fácil observar que o número de “casinhas” corresponderá sempre ao número da figura, na primeira temos uma “casinha”, para formar a quarta figura, teremos quatro, logo, iniciamos com $2n$ cartas, sendo n o termo desejado.

A partir da base da torre, olharemos para a formação que acontece acima dela. Consideraremos que as cartas na vertical marcam a divisão entre os andares da torre, então a torre 1 possui um andar, a torre 2 possui dois andares e assim sucessivamente. É importante essa observação para que o estudante entenda como as próximas figuras serão formadas, a

partir da análise do que ele fez criando as torres seguintes, é possível observar os padrões que aparecem.

Por enquanto já foi observada adição das “casinhas” na base e o número de andares da torre, ambos correspondem ao número da torre a ser observada. Podemos perceber que acima da “casinha” nova adicionada, a torre deve ser completada, e isso acontece adicionando os triângulos de carta. Na segunda torre foi adicionado um triângulo acima da “casinha” nova, na terceira foram adicionados dois, na quarta figura foram adicionados três, como na imagem abaixo.

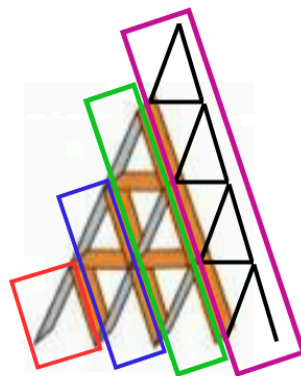
Figura 15 - Quarto e quinto termo da sequência.



Fonte: Elaborada pela autora.

A partir dessa análise, é possível concluir que são adicionados $n - 1$ triângulos à nova torre. Olhando em um panorama geral, cada dupla de cartas da base pode ser relacionada a um número de triângulos, isso acontece pois cada torre nova é construída “em cima” da antiga, então toda a configuração se repete, apenas com cartas a mais.

Figura 16 - Análise da quarta torre.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observando a quarta figura, o retângulo vermelho corresponde à primeira torre, que não possui triângulos adicionados, pois para $n = 1$, $n - 1 = 0$. O retângulo azul corresponde a parte adicionada para formar a segunda torre, e possui um triângulo, o retângulo verde correspondente a parte adicionada à segunda torre para formar a terceira e

possui dois triângulos. Por fim, o retângulo roxo representa a quantidade de cartas adicionada para formar a quarta torre, com três triângulos.

Vamos calcular a quantidade de cartas dessa torre. Sabemos que ela possui $2 * 4$ cartas na base, e os triângulos podem ser representados por $3 * (0 + 1 + 2 + 3)$, a multiplicação por 3 corresponde ao número de cartas que formam os triângulos, e a soma, o número de triângulos presentes em cada retângulo colorido descrito acima. Juntando tudo, temos que a quantidade de cartas, que podemos chamar de $Q_4 = 2 * 4 + 3 * (1 + 2 + 3) = 8 + 3 * 6 = 26$.

A análise de outras torres levarão à mesma conclusão, encontrar esse valor para as torres 10 e 20 se tornam mais fáceis, de certa forma, pois se o aluno compreender que esse valor varia conforme o valor de n , ele consegue montar essa fórmula sem necessariamente generalizá-la para todo n . O estudante compreendeu como o cálculo foi feito, mas sem registrá-lo com uma certa formalização, pode apenas calcular para $n = 10$, sem generalizá-lo para todo n . A terceira pergunta busca instigar o aluno a fazer essa generalização, espera-se que ele consiga chegar em alguma representação semelhante a $Q_n = 2n + 3 * (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1))$. Há também a possibilidade de representar a soma entre parênteses com um somatório, é uma forma de introduzir essa notação, caso os alunos se sintam confortáveis para usá-lo.

A compreensão de quantas cartas são adicionadas na torre n para formar a $n + 1$ também pode ser feita ao procurar a quantidade total de cartas na torre $n + 1$. Neste momento é importante compreender qual torre está sendo observada, para não causar nenhuma confusão. Vamos analisar a adição de cartas à torre 3 para formar a torre 4. Para formar uma nova torre, o início será sempre na adição das duas cartas na base, juntamente a essa, há a adição de 3 triângulos acima dessa dupla, como é possível observar na Figura 15. Logo, ao olharmos para a torre 3, na qual serão adicionadas as cartas, temos $2 + 3 * 3$ cartas adicionadas, o que resulta em 11 cartas. Generalizando isso para qualquer torre, temos que o número adicionado é dado por $A_n = 2 + 3n$.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O caminho percorrido para a finalização deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi marcado pelas mudanças e adaptações pelas quais o projeto inicial passou. A primeira proposta correspondia ao desenvolvimento e aplicação de atividades sobre pensamento computacional com estudantes buscando compreender como esse processo influencia o seu aprendizado do pensamento algébrico. Devido ao tempo que a aplicação e análise de todos esses dados levaria a proposta de analisar empiricamente a relação entre os pensamentos foi abandonada e se construiu uma proposta para desenvolver atividades que dialogassem com toda a teoria estudada, sendo esta uma alternativa mais acessível e que se mantinha fiel à proposta inicial.

A partir de todas as análises realizadas, foi possível concluir que apesar de ser um termo desenvolvido recentemente, e que ainda passa por divergências, o pensamento computacional já é implementado em diversos documentos, e sua relação com a matemática é conhecida. O pensamento algébrico, em contrapartida, teve seu desenvolvimento ao longo dos séculos, acompanhando as mudanças no campo científico e a modernização dessa área. Apesar de suas diferenças em questões de data, ambos têm uma relação direta com a resolução de problemas e suas semelhanças surgem da organização de suas ferramentas para esse objetivo.

Os questionamentos sobre suas intersecções alimentam ainda mais a discussão sobre suas similaridades, e como resultado disso, o desenvolvimento de atividades surge como uma maneira de explicar as características do PC em um contexto algébrico, principalmente no trabalho com sequências. As atividades elaboradas surgiram a partir de outras obras que buscam o desenvolvimento do pensamento computacional e possibilitam a aprendizagem e construção do pensamento algébrico à luz das habilidades do PC.

Ao final desse estudo conclui-se que é possível criar, em meio a diferentes atividades, uma relação muito próxima do pensamento algébrico com o pensamento computacional, no qual ambos podem surgir dentro de um mesmo contexto. É importante salientar que as atividades propostas não foram validadas empiricamente, elas foram desenvolvidas com base na revisão de literatura feita e a análise das articulações possíveis entre os dois pensamentos que baseiam essa pesquisa.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRACKMANN, Christian. *Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através de Atividades Desplugadas na Educação Básica*. 2017. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em 27 jun 2024.

BUNDY, A. *Computational Thinking is Pervasive*. *Journal of Scientific and Practical Computing*, v. 1, p. 67–69, 2007.

CAMPOS, G.; CAVALHEIRO, S.; FOSS, L.; et al. Organização de Informações via Pensamento Computacional: Relato de Atividade Aplicada no Ensino Fundamental. *20o. Workshop de Informática na Escola (WIE 2014)*, Congresso Brasileiro de Informática na Educação - CBIE 2014., 2014.

CARRAHER, D. W., & SCHLIEMANN, A. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning*. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

COLE, Michael; SCRIBNER, Sylvia. Introducción. In: VYGOTSKY, Lev Semionovitch. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Austral, 2017. p. 17-36.

DAVÍDOV, Vasili Vasilievich. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Trad. Marta Shuare. Moscu: Progreso, 1988.

DENNING, P., & FREEMAN, P. (2009). Computing's paradigm. *Communications of the ACM*, 52(12), 28–30.

EVES, Howard. *Introdução a historia da matemática* – Tradução: Hygino H. Domiongues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2007.

FREITAS, Raquel A. M. M.; LIBÂNEO, José C.O experimento didático formativo na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental. *Educ. Pesqui.*, São Paulo, v. 48, e246996, 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ep/a/JGhPMWNtWJqB6FPnWtCbpwH/?lang=pt>. Acesso em 27 jun 2024.

FREITAS, A.; BORGES, L. M. As pontes de Königsberg. C.Q.D. - *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, dez. 2015. Bauru, v. 5, p. 44-48. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp>. Acesso em 27 jun 2024.

FOWLER, D. *Could the Greeks have used mathematical induction? Did they use it? Critical remarks on an article by S. Unguru*. *Physis*, Firenze, v. 31, n. 1 p. 253-266, 1994.

FURBER, S. Shut down or restart? - The way forward for computing in UK schools. London, England: *The Royal Society*, 2012.

GOOGLE FOR EDUCATION. What is Computational Thinking? *Computational Thinking for Educators*, 2015. Disponível em: <https://edu.google.com/resources/programs/exploring-computational-thinking/>. Acesso em: 27 jun 2024.

GROVER, S.; PEA, R. Computational Thinking in K-12: A Review of the State of the Field. *Educational Researcher*, v. 42, n. 1, p. 38–43, 2013.

HEDEGAARD, Mariane. *A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino*. In: DANIELS, Harris (org.). Uma introdução a Vygotsky. São Paulo: Loyola, 2002. p. 199-227.

HEDEGAARD, Mariane. *The educational experiment*. In: HEDEGAARD, Mariane; FLEER, Marilyn. *Studying children: a cultural-historical approach*. London: Open University Press, 2008. p. 181-201.

KAPUT, J. J.; BLANTON, M. L.; & MORENO, L. *Algebra from a symbolization point of view*. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum. 2008.

KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. (ed.). *Algebra in the early grades*. New York: Routledge, 2008. p. 19-55.

KIERAN, C. *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels*. Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER, F. (ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007. p. 707-762.

KURSHAN, B. Thawing from a Long Winter in Computer Science Education. *Forbes*, p. 2, fev. 2016. Disponível em: <https://www.forbes.com/sites/barbarakurshan/2016/02/25/thawing-from-a-long-winter-in-computer-science-education/>. Acesso em 27 jun 2024.

LEONTIEV, A. N. Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar. Em Vigotski et al., *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem* (p.119-142). São Paulo: Ícone, 1988.

LIUKAS, L. *Hello Ruby: adventures in coding*. Feiweil & Friends, 2015

MASON, J.; GRAHAM, A.; PIMM, D.; GOWAR, N. *Routes to/ roots of algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press, 1985.

MCMMASTER, K.; RAGUE, B.; ANDERSON, N. *Integrating Mathematical Thinking, Abstract Thinking, and Computational Thinking*. 40th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference, out. 2010.

MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L.; RADFORD, L. Questões em torno da Teoria da Objetivação. *Obutchénie: R. de Didat. E Psic. Pedag.* Uberlândia, v.2, n.1, p.251-272, jan./abr. 2018.

MOURSOUND, Dave. 2006. *Computational Thinking and Math Maturity: Improving Math Education in K-8 Schools*. Eugene, Oregon: University of Oregon Press.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. *Report of a Workshop on the Scope and Nature of Computational Thinking*. Washington, DC: The National Academies Press. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.17226/12840>. Acesso em 27 jun 2024.

NUNES, D. J. *Ciência da Computação na Educação Básica*. ADUFRGS - Sindical, 6. jun. 2011. Disponível em: <http://gestaouniversitaria.com.br/artigos/ciencia-da-computacao-na-educacao-basica--3>. Acesso em 27 jun 2024.

RADFORD, L. *En torno a tres problemas de la generalización*. En: L. RICO; M. C. CAÑADAS; J. GUTIÉRREZ; M. MOLINA; I. SEGOVIA (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Comares, 2013. p. 3-12.

RADFORD, L. *Layers of generality and types of generalization in pattern activities*. PNA, Granada, v. 4, n. 2, p. 37-62, 2010.

RADFORD, L. *Methodological Aspects of the Theory of Objectification*. *Perspectivas da Educação Matemática*. Campo Grande, v. 8, n.18, p. 547-567, 2015.

RADFORD L. O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física. (2021).

RADFORD, L. *On the development of early algebraic thinking*. PNA, 6(4), 117-133. 2012.

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En: B. D'AMORE; L. RADFORD (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD, 2017. p. 97-114.

RADFORD, L. *The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school*. In: C. KIERAN (Ed.). *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer, 2018. p. 3-25.

RADFORD, L. The Historical Origins of Algebraic Thinking. In: Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., Lins, R. (eds) *Perspectives on School Algebra. Mathematics Education Library*, vol 22. Springer, Dordrecht. (2001).

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o*

ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, p. 15-42, 2020.

RIBEIRO, L.; NUNES, D. J.; CRUZ, M. K. DA; MATOS, E. DE S. Computational Thinking: Possibilities and Challenges. 2nd *Workshop-School on Theoretical Computer Science*. Anais, 2013.

VALENTE, J. A. et al. Alan Turing tinha Pensamento Computacional? Reflexões sobre um campo em construção. *Tecnologias Sociedade e Conhecimento*, Campinas, v. 4, Dez. 2017. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/ojs/>. Acesso em 27 jun 2024.

VERGEL, R. *Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano*. PNA, Granada, v. 9, n. 3, p. 193-215, 2015.

VERGEL R.; RADFORD L.; ROJAS P. J. Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema*, Rio Claro (SP), v.36, n.74, p.1174-1192, dez. 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/vj9J4nRpz5tgZ7msqNrS5Ym/?lang=es>. Acesso em 27 jun 2024.

VIÈTE, F. *Introduction to the analytic art*. (trad. R. Witmer). New York: Dover, 1983.

Vieira, Kléber Mendes. *O ensino do conceito de ângulo: limites e possibilidades*; Kléber Mendes Vieira; 2010.

VIGOTSKY, Lev Semionovitch. *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

VIGOTSKY, Lev Semionovitch. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

VYGOTSKY, L. S. *Obras escogidas*: Vol. 2. Madrid: Visor, 2001.

VYGOTSKY, L. *Pensamiento y habla*. Traducción de A. Ariel González. 1a ed. Buenos Aires: Ediciones Colihue, 2007.

VYGOTSKY, L. S. *Thought and language*. 1a ed. Cambridge: The mit Press, 1986.

WING, J. M. Computational thinking. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33, 2006.

WING, J. M. *Computational Thinking: What and Why?* , 17. out. 2010. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/Computational-Thinking%3A-What-and-Why-Wing/b080b8a2c91559a1d779270453e62a4806328550>. Acesso em: 27 jun 2024.

WING, J. *Computational Thinking with Jeannette Wing*. Columbia Journalism School, 2014.

ZUCKERMAN, Galina. Developmental education: a genetic modeling experiment. *Journal of Russian & East European Psychology*, London, v. 49, n. 6, p. 45-63, 2011.