



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Programa de Bacharelado em Matemática

Eduardo Teixeira de Oliveira

**Teoria de atratores, Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação ao
modelo S.I.R.**

Florianópolis
2025

Eduardo Teixeira de Oliveira

Teoria de atratores, Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação ao modelo S.I.R.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a
Coordenação do curso de Matemática da Universidade
Federal de Santa Catarina.

Orientador: Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa.

Florianópolis
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Oliveira, Eduardo Teixeira de
Teoria de atratores, Teorema de Poincaré-Bendixson e
aplicação ao modelo S.I.R. / Eduardo Teixeira de Oliveira ;
orientador, Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa, 2025.
84 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências
Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática -
Bacharelado, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. Modelo S.I.R.. 3.
Teoria de atratores. 4. Teorema de Poincaré-Bendixson. 5.
Teoria qualitativa de EDO's. I. Sousa, Alexandre do
Nascimento Oliveira. II. Universidade Federal de Santa
Catarina. Graduação em Matemática - Bacharelado. III. Título.

Eduardo Teixeira de Oliveira

Teoria de atratores, Teorema de Poincaré-Bendixson e aplicação ao modelo S.I.R.

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa
Universidade Federal de Santa Catarina

Camilo Campana
Universidade Federal de Santa Catarina

Matheus Cheque Bortolan
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Felipe Lopes Castro
Coordenador do Curso

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa
Orientador

Florianópolis, Dia 23 de Junho de 2025

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria Janice Teixeira de Oliveira e Aleir Correa de Oliveira.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus e à minha família, em particular meus pais e minha irmã, visto que, sem eles, absolutamente nada disso seria possível. Sou grato também a todos os professores pelos quais passei, desde o ensino fundamental até a conclusão de minha graduação, pela informação teórica e pela formação do indivíduo que sou. Por fim, estendo meus agradecimentos aos meus amigos de longa e curta data, por caminharem comigo e pelas memórias construídas juntos.

Parte do trabalho foi realizado enquanto bolsista do PET Matemática UFSC, como projeto de iniciação científica. Desse forma, Agradeço ao PET e ao FNDE pelo fomento dessa pesquisa.

RESUMO

A priori, o estudo se focou na análise qualitativa de EDO's, por meio de teoremas de boa colocação local e global de soluções de EDO's, ou seja, resultados envolvendo existência, unicidade e continuação de soluções. Em sequência, para estudar o comportamento assintótico de EDO's autônomas, utilizamos a Teoria de atratores para semigrupos, entendendo condições gerais para a existência de atratores globais. Além disso, apresentamos a Teoria de Poincaré-Bendixson, com enfoque no teorema homônimo e, por fim, aplicamos esse resultado num modelo biológico. A fim de determinar sob quais condições certas doenças serão eventualmente erradicadas ou não, propomos uma análise do modelo S.I.R. com reinfeção para o caso não autônomo. Utilizamos um sistema tridimensional de EDO's para modelar a doença e, por uma ótica qualitativa, estudamos o comportamento assintótico de soluções desse sistema. Mais especificamente, ao entendermos a dinâmica gerada pelas soluções dessas EDO's (dada por um semigrupo bem definido globalmente), verificamos que essas inevitavelmente são atraídas por um plano, cuja população total é constante, e assim, aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson, podemos caracterizar um atrator do semigrupo dependendo dos parâmetros do modelo, no caso, se $\gamma \leq a+b+c$ a população de suscetíveis tende à população total e, caso contrário, a população de infectados sempre permanece positiva.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, Semigrupos, Atratores, Poincaré-Bendixson, S.I.R.

Lista de Figuras

1.1	Interpretação geométrica da propriedade Lipschitz.	17
1.2	Domínio da F e vizinhança δ de (t_0, x_0)	18
1.3	Função $f(x) = x^{2/3}$	21
1.4	Soluções distintas para o problema de Cauchy $x' = x^{2/3}$ e condição inicial $x(0) = 0$	21
1.5	Esboço dos domínios $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}$	23
1.6	Esboço de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$	23
1.7	Soluções da EDO $x' = x^2$ para diferentes condições iniciais.	29
1.8	Tipos de convergência para o bordo	30
1.9	Compacto do qual a imagem de ϕ não escapa ao se aproximar de b	31
2.1	Semigrupo agindo em \mathbb{R}^2	36
2.2	Semidistância de Hausdorff.	40
2.3	Conjunto A atraído por B	41
2.4	Retrato de fase da EDO (2.2)	45
2.5	Retrato de fase da EDO (2.3).	47
3.1	Ilustração do Fluxo Laminar	59
3.2	Ilustração do Teorema do Fluxo Tubular.	59
3.3	Ilustração para o Lema da sequência monótona	61
3.4	Os três possíveis casos de comportamentos assintóticos no plano.	65
3.5	O Atrator de Lorenz. Soluções para condições iniciais $P_1 = (0, 2, 0)$ e $P_2 = (0, -2, 0)$ e parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$	66
4.1	Diagrama do modelo S.I.R..	70
4.2	Simulação do S.I.R. com $\gamma = 1.5$	82
4.3	Simulação do S.I.R. com $\gamma = 5.0$	83
4.4	Simulação do S.I.R. com $\gamma = 10.0$	83

Sumário

Introdução	11
1 Teoria qualitativa de EDO's	13
1.1 Existência e unicidade de soluções	14
1.2 Soluções maximais	26
2 Teoria de atratores	34
2.1 Semigrupos	34
2.2 ω -limites	44
2.3 Existência de atratores globais	55
3 Teorema de Poincaré-Bendixson	58
4 Modelo S.I.R.	69
4.1 Simulação numérica	80
Conclusão	84
Referências	85

Notações

- \mathbb{N} Conjunto dos números naturais incluindo o zero, ou seja, $\{0, 1, 2, \dots\}$.
- \mathbb{N}^* Conjunto dos números naturais sem o zero, ou seja, $\{1, 2, \dots\}$.
- $]a, b[$ Intervalo aberto definido por $a < b$, ou seja, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- $B_r(x)$ Bola de centro $x \in X$ (em que (X, d) é espaço métrico) e raio $r > 0$, ou seja, $\{y \in X \mid d(y, x) < r\}$.
- $\langle x, y \rangle$ Produto interno entre os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, ou seja, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ então $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- $f^{(d)}$ d -ésima derivada de $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que $d \in \mathbb{N}^*$.
- Indica que a demonstração de uma afirmação está concluída.
- Indica que a demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário está concluída.

Introdução

O estudo da matemática abstrata muitas vezes é visto como desconexo com a realidade, porém, mais frequentemente quanto se pensa, pontes são criadas entre esse mundo abstrato e questões atuais, de interesse da população e de outras áreas da ciência. A área de Sistemas Dinâmicos é um desses galhos da matemática que consegue criar vínculos interessantes com o dia-a-dia.

Uma dessas ditas pontes, é a modelagem matemática que busca descrever, de maneira analítica, problemas biológicos, físicos, meteorológicos etc., a fim de, com ferramentas matemáticas e possivelmente abstratos, extrair resultados que seriam difíceis de obter apenas analisando dados, por exemplo. Grandes protagonistas nessa área de modelagem são as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's).

Entender como a taxa de variação de uma função se relaciona com si mesma e com seu parâmetro pode trazer ideias interessantes sobre como esse fenômeno (pela EDO modelado) se comporta. De fato, muitas vezes, isso é mais do que suficiente para conseguir informações que, antes da tradução do problema para linguagem matemática, não eram disponíveis ou seriam muito trabalhosas de se obter a não ser por essa ótica.

Com essa ótica, escolhemos um modelo específico para estudarmos: o S.I.R. (Suscetíveis, Infectados e Recuperados). Esse sistema de EDO's é bem conhecido e permite-nos estudar como uma doença se propaga e como ela afeta a população. Dessa forma, o objetivo central desse trabalho é concluir sob quais condições, uma doença modelada pelo S.I.R. acabará eventualmente ou não. Apesar de ser uma pergunta facilmente elaborada e compreendida, sua resposta tem caráter técnico e necessita de uma bagagem significativa de “pré-requisitos” para ser expressada (grandíssima parte desse conhecimento prévio será explicada em detalhes no trabalho, porém, recomendamos que o leitor seja familiar com o estudo de espaços métricos).

Estruturamos o trabalho de maneira a deixar o modelo S.I.R. para o final, precedido pelos resultados e teorias necessárias para compreendê-lo. Assim, o primeiro capítulo mostra ao leitor aos principais resultados do estudo qualitativo de EDO's (baseado em [Viana and Espinar \[2011\]](#)), como os teoremas de existência e unicidade, maximalidade de soluções e continuidade com relação as condições iniciais, sendo eles todos necessários para garantirmos a boa definição do semigrupo para o S.I.R.. Semigrupos, por sua vez, serão introduzidos no capítulo dois (para o qual utilizamos [Aragão-Costa \[2012\]](#) e [Oliveira-Sousa](#)) junto com o restante da Teoria de atratores (incluindo ω -limites), que explicarão a dinâmica do S.I.R.. No capítulo três, trabalharemos com dinâmica planar (que pode ser vista com maiores detalhes em [Doering and Lopes \[2014\]](#) e [Hale \[2009\]](#)), apresentando resultados como o Teorema do fluxo tubular, Lema da sequência

monótona, Critério de Dulac e o importante Teorema de Poincaré-Bendixon, sendo esses dois últimos fundamentais para caracterizarmos o atrator do S.I.R.. Por fim e, sem dúvidas não menos importante, o último capítulo (construído com as referências [Carrasco Moreno \[2021\]](#) e [López-de-la Cruz and Oliveira-Sousa \[2025\]](#)) define o S.I.R., prova a existência e unicidade de soluções máximas para o mesmo, boa definição global de semigrupo e existência de atrator global e caracteriza seus pontos de equilíbrio bem como seu atrator, sendo esse último o resultado que fundamentalmente responde a pergunta central do trabalho.

1 Teoria qualitativa de EDO's

Nesse capítulo, apresentaremos alguns resultados clássicos sobre EDO's, como existência e unicidade de soluções e intervalo maximal de existência. Para tal nos baseamos em [Viana and Espinar \[2011\]](#).

Primeiramente, vamos introduzir algumas definições básicas.

Definição 1.1. *Uma equação diferencial ordinária (real), escrita também como EDO, é uma igualdade diferencial da forma*

$$F(t, x, x', \dots, x^{(d)}) = 0. \quad (1.1)$$

Aqui, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{(d+1)n+1}$, $x, x', \dots, x^{(d)} \in \mathbb{R}^n$ são variáveis dependentes de $t \in \mathbb{R}$, n é dito ser a **dimensão** da EDO e d a **ordem**. Quando F não depender explicitamente do parâmetro t , ou seja, $F = F(x, x', \dots, x^{(d)})$, a EDO será chamada de **autônoma**.

Trabalharemos mais comumente com EDO's **semilineares**, ou seja, equações da forma

$$x^{(d)} = F(t, x, x', \dots, x^{(d-1)}).$$

Definição 1.2. *Uma função d -vezes continuamente diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser **solução** de (1.1) se*

- (i) $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto;
- (ii) $(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(d-1)}(t)) \in \mathcal{U}$ para todo $t \in I$;
- (iii) $\phi^{(d)}(t) = F(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(d-1)}(t))$, para todo $t \in I$.

Definição 1.3. *Um problema de Cauchy ou problema de valor inicial (PVI) é um sistema da forma*

$$\begin{cases} x^{(d)} = F(t, x, x', \dots, x^{(d-1)}), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \\ \vdots \\ x^{(d-1)}(t_0) = x_{d-1}. \end{cases},$$

em que $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$ para todo $i \in \{1, \dots, d-1\}$ e $(t, x_0, \dots, x_{d-1}) \in \mathcal{U}$, em que \mathcal{U} é o domínio de F . Uma **solução** de um problema de Cauchy é uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz a Definição 1.2 e, além disso $\phi(t_0) = x_0$, $\phi'(t_0) = x_1, \dots, \phi^{(d-1)}(t_0) = x_{d-1}$.

A fim de simplificar notação, a partir daqui, vamos assumir que estamos trabalhando com a seguinte EDO de ordem 1

$$x' = F(t, x), \quad (1.2)$$

ou com o problema de Cauchy abaixo

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

em que $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, \mathcal{U} é aberto, $t, t_0 \in \mathbb{R}$ e $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Isso é razoável, uma vez que sempre podemos transformar uma EDO de ordem maior em uma EDO de ordem 1, fazendo uma mudança de variáveis e considerando a dimensão dn ao invés de n .

1.1 Existência e unicidade de soluções

Veremos nesta seção que, sob certas condições, para cada condição inicial do tipo $x(t_0) = x_0$, sempre existe uma solução para esse problema de Cauchy. Isso será verdade para qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$. Caso tenhamos mais hipóteses sobre F , podemos também garantir a existência e unicidade, como veremos abaixo.

Para existência e unicidade, apresentaremos o Teorema de Picard que, para ser provado, necessita do Teorema do ponto fixo de Banach. Antes de introduzirmos esse último, definiremos contração. Considere, para esse capítulo, (X, d) um espaço métrico qualquer.

Definição 1.4. Dada uma aplicação $T : X \rightarrow X$, T é dita ser uma **contração** se existe $0 < C < 1$ (chamada de **constante de contração**) tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq Cd(x, y) \text{ para todos } x, y \in X.$$

Teorema 1.5 (Teorema do ponto fixo de Banach). *Se (X, d) for um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ for uma contração, então existe um único $y \in X$ tal que $T(y) = y$. Mais que isso, y atrai pontos de X , no sentido que para qualquer $x \in X$,*

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x).$$

Demonstração. Seja $x \in X$. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n := T^n(x)$, em que $T^n(x) = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n\text{-vezes}}(x)$. Considere então a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mostremos que ela é de Cauchy.

De fato, note que como T é uma contração, vale que

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \\ &\leq C d(T^n(x), T^{n-1}(x)) \\ &\vdots \\ &\leq C^n d(T(x), x). \end{aligned}$$

Dessa forma, perceba que dados $m, n \in \mathbb{N}^*$ (suponha sem perda de generalidade que $m \geq n$),

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq C^{m-1} d(T(x), x) + C^{m-2} d(T(x), x) + \dots + C^n d(T(x), x) \\ &= C^n (C^{m-1-n} + C^{m-2-n} + \dots + 1) d(T(x), x) \\ &\leq \frac{C^n}{1-C} d(T(x), x). \end{aligned}$$

É fácil ver que, com essa desigualdade, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é de Cauchy, portanto converge. Seja $y \in X$ tal que $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Note agora que $T(x_n) = x_{n+1}$, logo $T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Além disso, por T ser contração, $d(T(x_n), T(y)) \leq C d(x_n, y)$ e assim, $T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(y)$. Portanto $T(y) = y$ e y é ponto fixo de T .

Mostremos agora que y é o único ponto fixo de T . Suponha que exista $z \in X$ ponto fixo de T , ou seja, $T(z) = z$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(y, z) &= d(T(y), T(z)) && \Rightarrow && (1-C)d(y, z) \leq 0, \\ &\leq C d(y, z) \end{aligned}$$

mas $C < 1$ e $d(y, z) \geq 0$. Obteremos então que $y = z$. ■

Antes de enunciarmos o Teorema de Picard, provemos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 1.6. $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de (1.3) se, e somente se, $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds$ para todo $t \in I$.

Demonstração. Sejam $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução de (1.3) e $t \in I$. Pelo Teorema Fundamental do

Cálculo,

$$\begin{aligned}\phi'(t) = F(t, \phi(t)) &\Rightarrow \int_{t_0}^t \phi'(s) ds = \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds \\ &\Rightarrow \phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds \\ &\Rightarrow \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds.\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que para todo $t \in I$, $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds$. Derivando ambos os lados, pelo Teorema Fundamental do Cálculo novamente, obtemos $\phi'(t) = F(t, \phi(t))$. Além disso, avaliando em t_0 , $\phi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, \phi(s)) ds \Rightarrow \phi(t_0) = x_0$. ■

Notação: No que segue, utilizaremos $\|\cdot\|$ como notação para norma de um espaço vetorial normado qualquer. Mesmo ao trabalharmos com diferentes espaços vetoriais, manteremos a mesma notação para todos, porém é evidente que a todo momento a norma utilizada é a apropriada e usual para o respectivo espaço (a menos que seja dito o contrário).

Definição 1.7. *Uma função $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita ser **Lipschitz** se existe $L > 0$ (chamada de **constante de Lipschitz**) tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in D(f)$. Note que L não é única.

Definição 1.8. *Uma função $f : D(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de duas variáveis é dita ser **localmente Lipschitz na segunda variável** se para cada $(t_0, x_0) \in D(f)$ existirem $L_0, \delta_0 > 0$ tais que*

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L_0 \|y - x\|$$

para todo $(t, y), (t, x) \in B_{\delta_0}((t_0, x_0)) \cap \mathcal{U}$.

Observação 1.9. *Podemos interpretar geometricamente essa propriedade. Ser localmente Lipschitz em $x \in D(f)$ é basicamente poder inserir um cone de duas folhas de centro em $(x, f(x))$ de forma que ele só intersecte o gráfico de f em $(x, f(x))$. Isso pode ser visto na Figura 1.1 onde temos pontos em que f é Lipschitz mas também um ponto em que ela não é.*

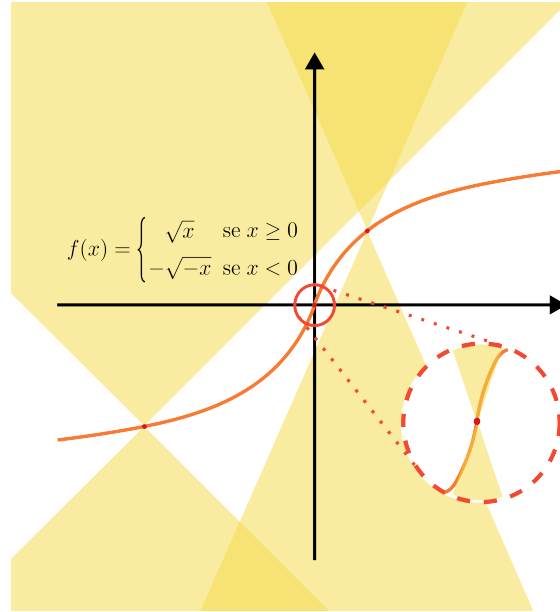


Figura 1.1: Interpretação geométrica da propriedade Lipschitz.

Agora estamos em condições de enunciar o nosso primeiro teorema de existência e unicidade. Nesse caso, observe que a existência é somente local; futuramente exploraremos como estender essas soluções para seu intervalo de existência maximal.

Teorema 1.10 (Teorema de Picard). *Suponha $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável, com $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto. Então*

- (i) *Para todo $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ existem algum intervalo aberto $I \ni t_0$ e alguma solução $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI definido por F e (t_0, x_0) , ou seja,*

$$\phi'(t) = F(t, \phi(t)), \text{ e } \phi(t_0) = x_0;$$

- (ii) *Se $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ são soluções (não do PVI) e existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ então $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração. (i) Seja $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$. Fixe $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset \mathcal{U}$. Aqui, a norma relativa ao espaço \mathbb{R}^{n+1} será a seguinte:

$$\|(t, x)\| := \|x\| + |t|,$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma usual do \mathbb{R}^n . Sejam $L = L(\delta)$ uma constante de Lipschitz de F em $\overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}$ e $M = M(\delta) = \sup \left\{ \|F(t, x)\| \mid (t, x) \in \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \right\}$.

Tome $\varepsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{L} \right\}$ e defina

$$Y = Y(t_0, x_0, \delta, \varepsilon) := \left\{ \phi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow \overline{B_\delta(x_0)} \text{ cont\u00ednua} \mid \phi(t_0) = x_0 \right\}.$$

Note que Y \u00e9 espa\u00e7o m\u00e9trico completo com a seguinte dist\u00e2ncia:

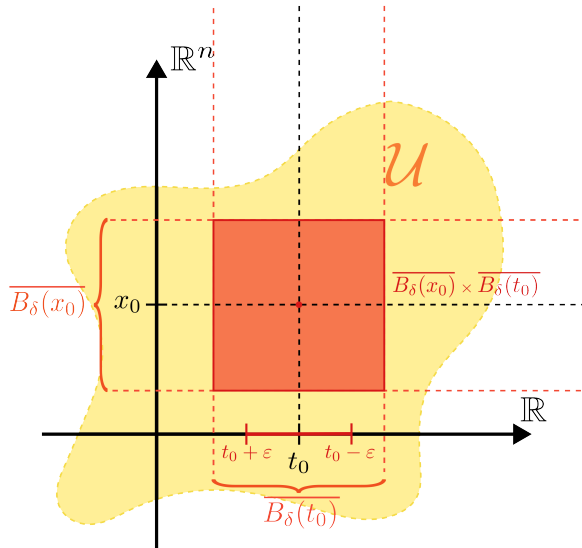


Figura 1.2: Dom\u00ednio da F e vizinhan\u00e7a δ de (t_0, x_0) .

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|$$

(Aqui, $\|\cdot\|$ \u00e9 a norma usual do \mathbb{R}^n). Vamos definir agora o Operador de Picard, que \u00e9 induzido pelo Lema 1.6:

$$\mathcal{L} : Y \rightarrow Y$$

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto \mathcal{L}(\phi) :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow \overline{B_\delta(x_0)} \\ t &\mapsto \mathcal{L}(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds \end{aligned}$$

Mostremos que \mathcal{L} est\u00e1 bem definido

- $\mathcal{L}(\phi)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, \phi(s)) ds = x_0$;
- $\mathcal{L}(\phi)(t) \in \overline{B_\delta(x_0)}$, para todo $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. De fato, seja $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ fixado. Temos

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{L}(\phi)(t), x_0) &= \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds - x_0 \right\| \\
&= \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \left\| \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds \right\| \\
&\leq \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \left| \int_{t_0}^t \|F(s, \phi(s))\| ds \right| \\
&\leq |t - t_0| M \\
&< \varepsilon M \\
&< \delta.
\end{aligned}$$

Portanto \mathcal{L} está bem definida.

Mostremos agora que \mathcal{L} é contração. Sejam $\phi_1, \phi_2 \in Y$,

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{L}(\phi_1), \mathcal{L}(\phi_2)) &= \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi_1(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t F(s, \phi_2(s)) ds \right\| \\
&= \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \left\| \int_{t_0}^t [F(s, \phi_1(s)) - F(s, \phi_2(s))] ds \right\| \\
&\leq \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} \left| \int_{t_0}^t \|F(s, \phi_1(s)) - F(s, \phi_2(s))\| ds \right| \\
&\leq \sup_{t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[} |t - t_0| L \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| \\
&\leq \varepsilon L d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

Portanto \mathcal{L} é contração com constante $C = \varepsilon L$ (pois $\varepsilon < 1/L$).

Por fim, lançando mão do Teorema 1.5 e do Lema 1.6, constatamos que existe $\phi_0 :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$ tal que $\phi_0(t) = \mathcal{L}(\phi_0)(t)$, para todo $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, ou seja, existe solução para o Problema de Cauchy em questão.

(ii) Provemos agora a propriedade de unicidade das soluções. Sejam $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas soluções quaisquer tais que $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ para algum $t_0 \in I_1 \cap I_2$.

Seja $\mathcal{I} = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \phi_1(t) = \phi_2(t)\}$. Note que $\mathcal{I} \neq \emptyset$ pois $t_0 \in \mathcal{I}$ e, além disso, \mathcal{I} é fechado pela continuidade de ϕ_1 e ϕ_2 . Mostremos agora que \mathcal{I} é aberto em $I_1 \cap I_2$.

Seja $s_0 \in \mathcal{I}$, assim $\phi_1(s_0) = y_0 = \phi_2(s_0)$ para algum $(s_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Pela prova anterior aplicada a (s_0, y_0) , encontramos: $\delta > 0$ tal que para ε suficientemente pequeno,

$$\mathcal{L} : Y(s_0, y_0, \delta, \varepsilon) \rightarrow Y(s_0, y_0, \delta, \varepsilon)$$

é contração e admite um único ponto fixo. É claro que $\phi_j|_{]s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon[} \in Y(s_0, y_0, \delta, \varepsilon)$ com ε pequeno o suficiente, para $j \in \{1, 2\}$.

Temos também, por hipótese, que $\phi_j'(t) = F(t, \phi_j(t))$, para todo $t \in]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$, portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\phi_j(t) = y_0 + \int_{s_0}^t F(s, \phi_j(s)) ds, \text{ para todo } t \in]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[.$$

Assim $\phi_j|_{]s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon[}$ é ponto fixo para $j \in \{1, 2\}$ e, por sua unicidade, $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ para todo $t \in]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$, ou seja, $]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[\subset \mathcal{I}$. Portanto \mathcal{I} é aberto. Como $I_1 \cap I_2$ é conexo e \mathcal{I} é aberto e fechado em $I_1 \cap I_2$, $\mathcal{I} = I_1 \cap I_2$. ■

Vejam agora um exemplo em que não conseguimos garantir a unicidade de soluções para toda condição inicial.

Exemplo 1.11. Considere $x' = x^{2/3}$. Resolvendo analiticamente, obtemos que dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = \left(\frac{t + 3\sqrt[3]{x_0} - t_0}{3}\right)^3$ é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Perceba que $f(x) = x^{2/3}$ é Lipschitz na segunda variável em toda a reta exceto na origem: Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = \left| \frac{x_2^{2/3} - x_1^{2/3}}{x_2^{3/3} - x_1^{3/3}} \right| = \left| \frac{x_2^{1/3} + x_1^{1/3}}{x_2^{2/3} + x_2^{1/3}x_1^{1/3} + x_1^{2/3}} \right| \xrightarrow{x_1, x_2 \rightarrow 0} +\infty.$$

Logo f não é Lipschitz em 0, como podemos observar também na Figura 1.3.

Dessa forma, como visto na Figura 1.4, existem duas soluções sempre que $x_0 = 0$:

$$\phi(t) = \left(\frac{t - t_0}{3}\right)^3 \text{ e } \psi(t) = 0.$$

Esse é um contra exemplo para a hipótese da função ser Lipschitz no Teorema anterior. Dessa forma, perguntamos-nos se podemos reduzir as hipóteses do Teorema 1.10 a fim de provar, pelo menos, a existência de uma solução para qualquer condição inicial. Isso é de fato possível: com apenas a hipótese de F ser contínua, conseguimos garantir que existe uma solução local. Porém, antes de apresentarmos esse resultado, precisamos verificar um pequeno detalhe quanto ao tempo de existência $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ apresentado na demonstração anterior.

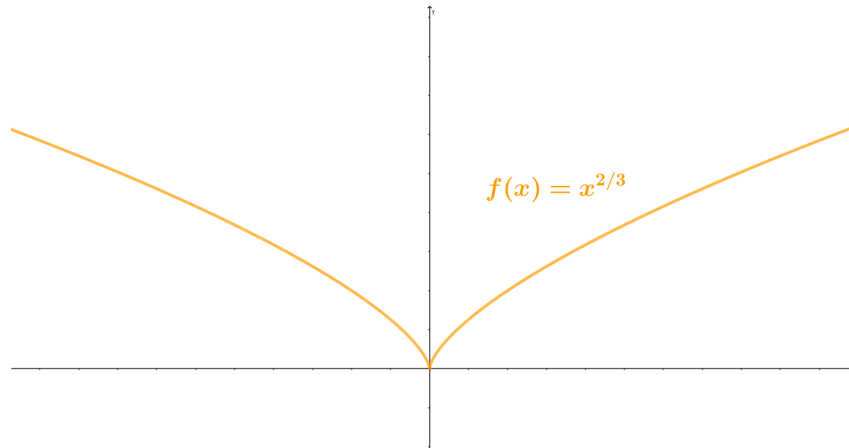


Figura 1.3: Função $f(x) = x^{2/3}$.

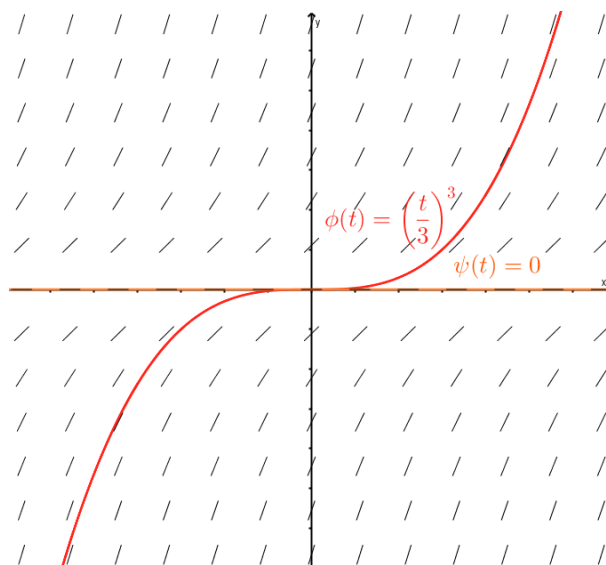


Figura 1.4: Soluções distintas para o problema de Cauchy $x' = x^{2/3}$ e condição inicial $x(0) = 0$.

É possível melhorar o intervalo de existência, retirando a restrição do ε em relação à constante de Lipschitz L . Dessa forma, conseguimos o mesmo resultado do Teorema 1.10 assumindo (do tempo de existência) apenas que

$$\varepsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}.$$

A ideia é, usando indução, provar que

$$d(\mathcal{L}^k(\phi_1), \mathcal{L}^k(\phi_2)) \leq L^k \frac{|t - t_0|^k}{k!} \|\phi_1 - \phi_2\| \text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*,$$

ou seja, para k suficientemente grande, \mathcal{L}^k é contração e, pelo [Viana and Espinar, 2011, Corolário 2.14], \mathcal{L} tem ponto fixo. Para maiores detalhes, veja [Viana and Espinar, 2011, Seção 2.1.3]. Para provarmos o Teorema de Peano, lançaremos mão o Teorema de Ascoli-Arzelà

(para mais detalhes veja [Botelho, 2021, Teorema 1.5.2]) e da Regra de Leibniz (para o qual, recomendamos [Lima, 2004, Teorema 3, Capítulo 3]), cujos enunciados seguem abaixo.

Teorema 1.12 (Teorema de Ascoli-Arzelà). *Seja $(f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)_n$ sequência de funções que satisfazem:*

- (i) $(f_n)_n$ é **equicontínua**, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in [a, b]$, se $|x - y| < \delta$ então $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (δ depende apenas de ε que, por sua vez, independe de índice ou de x e y);
- (ii) $(f_n)_n$ é **uniformemente limitada**, ou seja, existe $M > 0$ (independente de índice) tal que $\|f_n(x)\| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Então existe $(f_{n_k})_k$ subsequência uniformemente convergente.

Teorema 1.13 (Regra de Leibniz). *Seja $f(t, x)$ uma função tal que f e f_x sejam contínuas em $D(f)$ e seja $K \subset D(f)$ compacto. Então temos que*

$$\frac{d}{dx} \left(\int_K f(t, x) dt \right) = \int_K f_x(t, x) dt.$$

Teorema 1.14 (Teorema de Peano). *Se $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então para todo $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ existem $I \ni t_0$ intervalo aberto e $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solução do problema de Cauchy definido por F e (t_0, x_0) .*

Demonstração. A prova consiste em aproximarmos F por funções C^∞ , aplicar o Teorema 1.10 para essas funções, e garantir convergência uniforme de uma subsequência dessas soluções para um candidato à solução do problema para F .

Afirmção 1. Sejam $a, b \geq 1$ inteiros, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^a$ aberto e $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^b$ uma função contínua. Então existem funções $f_n : \mathcal{U}_n \rightarrow \mathbb{R}^b$, $n \in \mathbb{N}^*$ de classe C^∞ tais que:

1. $(\mathcal{U}_n)_n$ é uma sequência crescente de abertos de \mathbb{R}^a tais que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_n = \mathcal{U}$;
2. $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em cada compacto $K \subset \mathcal{U}$.

De fato: Considere $(\rho_n : \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sequência de funções C^∞ com suporte $B_n := B_{\frac{1}{n}}(0)$ e com $\int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(x) dx = 1$ (Note que como $\rho_n(x) = 0$ para todo $x \notin \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)} = \overline{B_n}$,

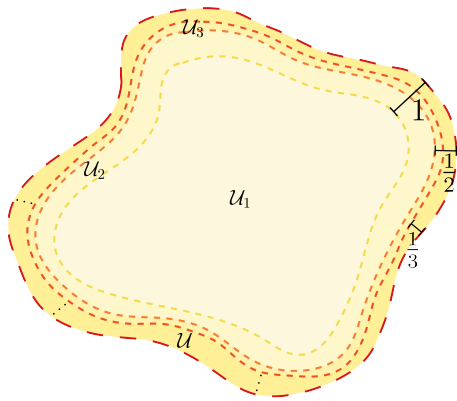


Figura 1.5: Esboço dos domínios $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}$.

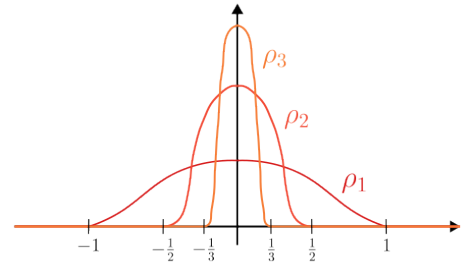


Figura 1.6: Esboço de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$

$\int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(x) dx = \int_{B_n} \rho_n(x) dx$. Defina então, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}_n := \{x \in \mathcal{U} \mid \overline{B_{\frac{1}{n}}(x)} \subset \mathcal{U}\}$

$$f_n : \mathcal{U}_n \longrightarrow \mathbb{R}^b$$

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(y) f(x+y) dy$$

Note que $f(x+y)$ faz sentido quando $x+y \in \mathcal{U}$. Já quando $\|y\| \geq \frac{1}{n}$, $\rho_n(y) = 0$ e assim, convencionamos que a expressão $\rho_n(y)f(x+y)$ é 0 quando $x+y \notin \mathcal{U}$. Dessa forma f_n está bem definida.

Claramente o item 1 é verificado, então nos voltemos ao item 2. Seja $K \subset \mathcal{U}$ compacto. Por continuidade, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f_n(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon$ para todo $x_1 \in K$ e para todo $x_2 \in \mathcal{U}$ com $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$. Podemos tomar n suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} < \delta$ e $K \subset \mathcal{U}_n$, assim, como ρ_n está suportada em $\overline{B_n}$ e sua integral é igual a 1,

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\| &= \left\| \int_{B_n} [\rho_n(y)f(x+y) - \rho_n(y)f(x)] dy \right\| \\ &\leq \int_{B_n} \rho_n(y) \|f_n(x+y) - f(x)\| dy \\ &\leq \int_{B_n} \rho_n(y) \varepsilon dy \\ &= \varepsilon \text{ para todo } x \in K. \end{aligned}$$

Portanto $(f_n)_n$ converge uniformemente para f para cada compacto $K \subset \mathcal{U}$.

Nos resta provar que f_n são C^∞ . Fazendo uma substituição de variável $z = x+y$ podemos observar que na expressão

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(z-x) f(z) dz,$$

apenas ρ_n depende explicitamente de x , fazendo com que o integrando seja infinitamente diferenciável com relação à x . Dado $x_0 \in \mathcal{U}_n$ qualquer, considere $V \subset \mathcal{U}_n$ vizinhança aberta de x_0 e $L \subset \mathcal{U}_n$ compacto tal que a bola de centro x e raio $\frac{1}{n}$ esteja totalmente contida em L para todo $x \in V$. Assim, para todo $x \in V$,

$$f_n(x) = \int_L \rho_n(z - x) f(z) dz$$

Dessa forma, o integrando é \mathcal{C}^1 em relação a x e o domínio de integração é compacto, logo, pela Regra de Leibniz (veja Teorema 1.13), obtemos para todo $x \in V$,

$$f'_n(x) = \int_L -\rho'_n(z - x) f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^a} -\rho'_n(z - x) f(z) dz.$$

Repetindo esse processo indutivamente, obtemos que

$$f_n^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}^a} (-1)^k \rho_n^{(k)}(z - x) f(z) dz$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, f_n é \mathcal{C}^∞ e a afirmação está provada. \square

Dessa forma, existem $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sequência crescente de abertos de \mathbb{R}^{n+1} tais que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_i = \mathcal{U}$ e $(F_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sequência de funções \mathcal{C}^∞ que convergem uniformemente para F em cada compacto $K \subset \mathcal{U}$. Como $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ são \mathcal{C}^∞ , elas são localmente Lipschitz na segunda variável e, portanto, podemos aplicar o Teorema 1.10. Antes disso, note que para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$, pois $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathcal{U}_i = \mathcal{U}$. Como a sequência $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ é crescente, podemos ignorar os primeiros $i_0 - 1$ conjuntos e renumerar a sequência a partir de \mathcal{U}_{i_0} . Para simplificar, chamaremos essa sequência de $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Agora que (t_0, x_0) pertence ao domínio de todas as F_i 's, podemos seguramente aplicar o Teorema 1.10 para obter uma sequência $(\phi_i :]t_0 - \varepsilon_i, t_0 + \varepsilon_i[\rightarrow \overline{B_{\delta_i}(x_0)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ de funções que são, respectivamente, soluções para os PVI's definidos por $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ e (t_0, x_0) .

Afirmção 2. O raio ε_i pode ser escolhido independente de $i \in \mathbb{N}^*$.

De fato: Como apontado anteriormente, podemos escolher $\varepsilon < \min \left\{ \delta_i, \frac{\delta_i}{M_i} \right\}$, em que $M_i = \sup_{(t,x) \in \overline{B_{\delta_i}(t_0)} \times \overline{B_{\delta_i}(x_0)}} \|F_i(t, x)\|$. Como $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformemente para F em compactos, $(M_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ converge para M e, como a sequência $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ é crescente, podemos tomar $\delta := \delta_1$ (por exemplo) e retirar a dependência de δ sobre o índice. Assim, $(\min \left\{ \delta_i, \frac{\delta_i}{M_i} \right\})_{i \in \mathbb{N}^*}$ converge para $\min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\} > 0$ e, em particular $\varepsilon := \min_{i \in \mathbb{N}^*} \varepsilon_i$. \square

Afirmção 3. As funções ϕ_i são Lipschitz com constante independente de $i \in \mathbb{N}^*$.

De fato: Como ϕ_i é solução de um PVI, segue, pelo Lema 1.6, que

$$\phi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F_i(s, \phi_i(s)) ds \quad \text{para todo } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Dessa forma, dados $t_1, t_2 \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$,

$$\begin{aligned} \|\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t_1} F_i(s, \phi_i(s)) ds - \left[x_0 + \int_{t_0}^{t_2} F_i(s, \phi_i(s)) ds \right] \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} F_i(s, \phi_i(s)) ds \right\| \\ &\leq M|t_1 - t_2|, \end{aligned} \tag{1.4}$$

podemos então tomar M como sendo a constante de Lipschitz de ϕ_i independente de $i \in \mathbb{N}^*$. \square

Afirmção 4. Existe $(\phi_{i_j})_{j \in \mathbb{N}^*} \subset (\phi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ subsequência uniformemente convergente em compactos de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

De fato: Vamos utilizar o Teorema de Ascoli-Arzelà (Teorema 1.12). A equicontinuidade é facilmente verificada a partir de (1.4). Baseado na mesma desigualdade podemos provar o fato de $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ser uniformemente limitada. Seja $t \in K \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, K compacto. Por (1.4) obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi_i(t)\| &= \|\phi_i(t) - \phi_i(t_0) + \phi_i(t_0)\| \\ &\leq M|t - t_0| + \|x_0\| \\ &< M\varepsilon + \|x_0\|, \end{aligned}$$

ou seja, $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ é uniformemente limitada em K .

Agora, em condições de aplicar o Teorema 1.12, obtemos $(\phi_{i_j})_{j \in \mathbb{N}^*} \subset (\phi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ subsequência uniformemente convergente em K , para cada K compacto de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. \square

Tome $\phi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ função para a qual $(\phi_{i_j})_{j \in \mathbb{N}^*} \subset (\phi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformemente em compactos de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. Resta mostrar que ϕ é de fato solução para nosso problema de Cauchy original.

Como ϕ_{i_j} é solução para seu respectivo PVI, pelo Lema 1.6 podemos escrever

$$\phi_{i_j}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F_{i_j}(s, \phi_{i_j}(s)) ds \quad \text{para todo } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Fixado $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, e passando o limite com $j \rightarrow +\infty$, obtemos (devido à convergência uniforme de $\phi_{i_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \phi$ e $F_i \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} F$)

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \phi(s)) ds \quad \text{para todo } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Portanto, do Lema 1.6 ϕ é solução para o PVI em questão e a prova está concluída. ■

Obtemos, com os resultados anteriores, soluções locais para problemas de valor inicial. Agora vamos abordar como podemos estender os intervalos de definição dessas soluções, ou melhor, como encontrar soluções maximais (no sentido de maior domínio) para cada condição inicial.

1.2 Soluções maximais

Definimos, para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ o conjunto de todas as soluções do PVI

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

como:

$$S(t_0, x_0) = \{\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \phi \text{ é solução do PVI (1.5)}\}.$$

Para encontrarmos uma solução maximal, precisamos introduzir alguma relação de ordem.

Definição 1.15. *Dados $\phi_1, \phi_2 \in S(t_0, x_0)$, dizemos que $\phi_1 \leq \phi_2$ se, e somente se, $I_1 \subset I_2$ e $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ para todo $t \in I_1$.*

Essa relação é de **ordem parcial**. De fato,

- Reflexividade: $\phi_1 \leq \phi_1$, pois $I_1 \subset I_1$ e $\phi_1 = \phi_1$;
- Transitividade: se $\phi_1 \leq \phi_2$ e $\phi_2 \leq \phi_3$ então $\phi_1 \leq \phi_3$, pois $I_1 \subset I_2 \subset I_3$ e $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_3(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_1$;
- Anti-simetria: se $\phi_1 \leq \phi_2$ e $\phi_2 \leq \phi_1$ então $\phi_1 = \phi_2$, pois $I_1 \subset I_2 \subset I_1$ e $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ para todo $t \in I_1$.

A relação é dita parcial pois pode ocorrer de haver duas soluções em $S(t_0, x_0)$ que não são relacionáveis através dessa relação (um exemplo seria quando os intervalos de definição se intersectam mas nunca um está contido no outro). Um conjunto $X \subset S(t_0, x_0)$ será dito **totalmente ordenado** se dados quaisquer $\phi_1, \phi_2 \in X$ tivermos que $\phi_1 \leq \phi_2$ ou $\phi_2 \leq \phi_1$.

Definição 1.16. Chamaremos de *solução maximal* uma função $\phi \in S(t_0, x_0)$ tal que não exista $\tilde{\phi} \in S(t_0, x_0)$ com $\phi \leq \tilde{\phi}$ e $\phi \neq \tilde{\phi}$.

A proposição a seguir afirma que toda solução pode ser estendida para uma solução maximal. Antes disso, porém, vamos enunciar também um importante resultado que utilizaremos em sua demonstração (para mais detalhes sobre esse lema, veja [Halmos, 2001, Lema 16.1]).

Lema 1.17 (Lema de Zorn). *Se um conjunto X parcialmente ordenado é tal que, todo subconjunto $A \subset X$ totalmente ordenado é superiormente limitado, então existe um elemento $x \in X$ maximal de X .*

Proposição 1.18. *Para todo $\phi \in S(t_0, x_0)$, existe $\phi_0 \in S(t_0, x_0)$ solução maximal de $S(t_0, x_0)$ tal que $\phi \leq \phi_0$.*

Demonstração. Dado $\phi \in S(t_0, x_0)$, defina $S_\phi := \left\{ \tilde{\phi} \in S(t_0, x_0) \mid \phi \leq \tilde{\phi} \right\}$.

Afirmção 1. Para todo subconjunto $X \subset S_\phi$ totalmente ordenado e não vazio, existe $\tilde{\phi}_0 \in S_\phi$ tal que $\tilde{\phi} \leq \tilde{\phi}_0$ para todo $\tilde{\phi} \in X$.

De fato: denote, para cada $\tilde{\phi} \in X$, $I_{\tilde{\phi}} := D(\tilde{\phi})$ e defina $I = \bigcup_{\tilde{\phi} \in X} I_{\tilde{\phi}}$. Agora, considere

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_0 : \quad I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ I_{\tilde{\phi}} \ni t &\mapsto \tilde{\phi}(t) \end{aligned} ,$$

em que $\tilde{\phi} \in X$ é qualquer.

Ora, $\tilde{\phi}_0$ está bem definida uma vez que, como X é totalmente ordenado, dado qualquer $\psi \in X$, um dos seguintes cenários ocorre:

- $\psi \leq \tilde{\phi}$, assim $I_\psi \subset I_{\tilde{\phi}}$ e $\psi(t) = \tilde{\phi}(t)$ para todo $t \in I_\psi$;
- $\tilde{\phi} \leq \psi$, assim $I_{\tilde{\phi}} \subset I_\psi$ e $\tilde{\phi}(t) = \psi(t)$ para todo $t \in I_{\tilde{\phi}}$.

Em qualquer um dos casos, ψ e $\tilde{\phi}$ concordam na intersecção de seus domínios. Finalmente, por construção, claramente $\tilde{\phi}_0 \in S_\phi$ e $\tilde{\phi} \leq \tilde{\phi}_0$ para todo $\tilde{\phi} \in X$ e a afirmação está provada. \square

Dessa forma, obtemos que S_ϕ é um conjunto parcialmente ordenado tal que, para todo subconjunto X totalmente ordenado, existe um limitante superior de X . Portanto pelo Lema de Zorn (Lema 1.17), existe $\phi_0 \in S_\phi$ elemento maximal. Por fim, basta mostrar que ϕ_0 é elemento maximal de $S(t_0, x_0)$. Seja $\psi \in S(t_0, x_0)$ tal que $\phi_0 \leq \psi$. Dessa forma, $\psi \in S_\psi =$

$\{\tilde{\psi} \in S(t_0, x_0) \mid \psi \leq \tilde{\psi}\}$ e então, por definição de elemento maximal, $\psi \leq \phi_0$. Portanto, pela propriedade de anti-simetria, concluímos que $\psi = \phi_0$ e o resultado está provado. ■

Note que, esse resultado nos garante apenas a existência de um elemento maximal. Para obtermos unicidade, precisamos exigir unicidade da EDO. Com essa condição a mais, que será definida abaixo, não precisamos usar o Lema de Zorn.

Definição 1.19. *Uma EDO $x'(t) = F(t, x(t))$ possui a **propriedade da unicidade de soluções** se, e somente se, dados quaisquer $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluções tais que $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0)$ para algum $t_0 \in I_1 \cap I_2$ implicar que $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

Observação 1.20. *Note que o Teorema 1.10 nos diz que F ser Lipschitz é uma condição suficiente, porém ela não é necessária. Um exemplo disso seria $x' = \sqrt{x} + 1$, que tem unicidade de solução em $(0, 0)$.*

Proposição 1.21. *Se a EDO (1.2) possui a propriedade da unicidade de soluções, então para todo $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ existe um único elemento maximal de $S(t_0, x_0)$.*

Demonstração. Seja $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ arbitrário. Defina

$$I := \bigcup_{\phi \in S(t_0, x_0)} I_\phi \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \phi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n \\ I_\phi \ni t \mapsto \phi(t) \end{array} .$$

Similarmente ao provado na Proposição 1.18, ϕ_0 está bem definida, uma vez que possuímos a propriedade da unicidade de soluções. De fato, dado $\psi \in S(t_0, x_0), t_0 \in I_\phi \cup I_\psi$ e $\phi(t_0) = x_0 = \psi(t_0)$, assim, por hipótese, $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in I_\phi \cup I_\psi$. Claramente, por definição, $\psi_0 \in S(t_0, x_0)$ e é elemento maximal desse conjunto. Basta mostrar a unicidade. Seja $\psi_0 \in S(t_0, x_0)$ elemento maximal. Por construção de ϕ_0 , já sabemos que $\psi_0 \leq \phi_0$, então $\phi_0 = \psi_0$, pois, caso não o fosse, ψ não seria solução maximal. ■

Definição 1.22. *Caso as hipóteses da Proposição 1.21 sejam satisfeitas, a solução maximal única gerada pela mesma será chamada de **solução máxima**.*

Perceba que ser máxima é mais forte que ser maximal, uma vez que antes, poderíamos ter duas soluções maximais (não são “majoradas” por soluções diferentes de si) diferentes mas que

não eram comparáveis por \leq ; já a solução máxima, indica que ela é **a solução** (de determinada condição inicial) com o maior domínio de definição, pois, por construção, contém os domínios de todas as outras soluções.

Nem sempre, porém, a solução máxima tem seu intervalo de definição sendo toda a reta real. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 1.23. Considere a EDO $x' = x^2$. Resolvendo analiticamente, obtemos a solução geral $\psi(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t_0 - t)}$ (veja a Figura 1.7). Podemos verificar também que o intervalo de existência depende da condição inicial, de fato $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$I = \begin{cases}]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[& , \text{ se } x_0 > 0 \\ \mathbb{R} & , \text{ se } x_0 = 0 \\]t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty[& , \text{ se } x_0 < 0 \end{cases} .$$

Sabemos também que essa solução é máxima, uma vez que $\|\phi(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow t_0 + 1/x_0} \infty$ (logo não pode ser estendida) quando $x_0 \neq 0$.

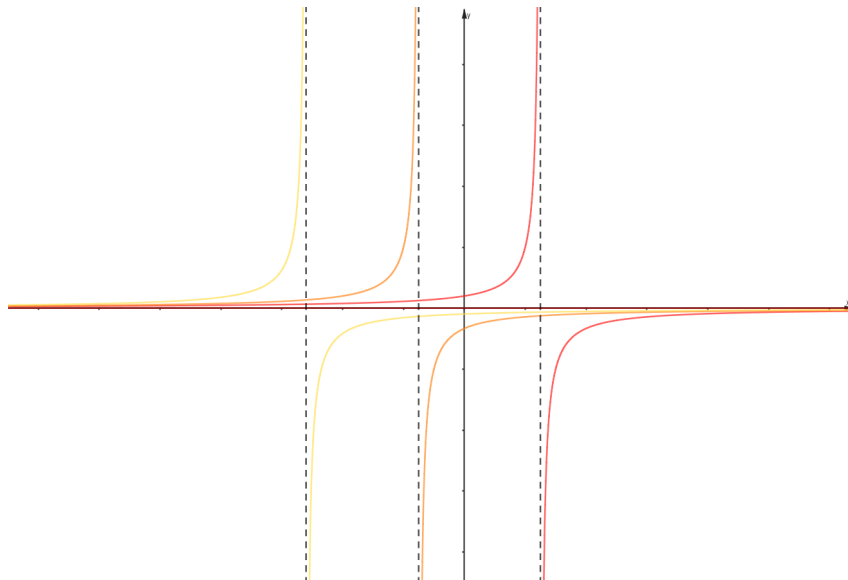


Figura 1.7: Soluções da EDO $x' = x^2$ para diferentes condições iniciais.

Esse exemplo motiva o seguinte estudo: caracterizar a maximalidade de uma solução de acordo com o comportamento assintótico da mesma em relação ao bordo de seu domínio de definição.

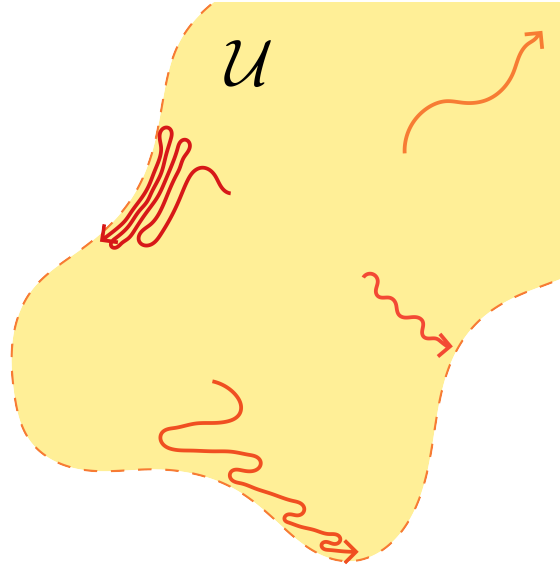


Figura 1.8: Tipos de convergência para o bordo

Teorema 1.24. *Seja $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ solução maximal da EDO (1.2). Então pelo menos um desses ocorre:*

- (i) $b = +\infty$ ou se $b < +\infty$ então para todo $K \subset \mathcal{U}$ compacto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t, \phi(t)) \notin K$ para todo $t \in]b - \varepsilon, b[$;
- (ii) $a = -\infty$ ou se $a > -\infty$ então para todo $K \subset \mathcal{U}$ compacto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(t, \phi(t)) \notin K$ para todo $t \in]a, a + \varepsilon[$;

Demonstração. Faremos a demonstração para b , visto que para a é completamente análogo.

Suponha $b < +\infty$ (o caso $b = +\infty$ é claramente satisfeito). Dado qualquer compacto $K \subset \mathcal{U}$, fixe $\delta > 0$ tal que $\overline{B_{2\delta}(t)} \times \overline{B_{2\delta}(x)} \subset \mathcal{U}$ para todo $(t, x) \in K$. Tome $\varepsilon = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$, em que $M = \sup \left\{ \|F(t, x)\| \mid (t, x) \in \overline{B_\delta(K)} \right\}$ e $B_\delta(K) := \bigcup_{x \in K} B_\delta(x)$.

Mostremos agora que $(t, \phi(t)) \notin K$ para todo $t \in]b - \varepsilon, b[$. De fato, suponha por contradição que existe $\bar{t} \in]b - \varepsilon, b[$ tal que $(\bar{t}, \phi(\bar{t})) \in K$ e denote $\bar{x} := \phi(\bar{t})$. Então, pelo Teorema 1.10, existe uma solução $\bar{\phi} :]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ com condição inicial $\bar{\phi}(\bar{t}) = \bar{x} = \phi(\bar{t})$. Além disso, as duas soluções devem coincidir na intersecção de seus domínios de definição.

Isso implica na boa definição da seguinte função:

$$\begin{aligned} \Phi :]a, b[\cup]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon[&\longrightarrow \mathbb{R}^n \\]a, b[\ni t &\longmapsto \phi(t) \cdot \\]\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon[\ni t &\longmapsto \bar{\phi}(t) \end{aligned}$$

Então $\phi \leq \Phi$ e $\phi \neq \Phi$, pois $\bar{t} + \epsilon > b$ (visto que $\bar{t} \in]b - \epsilon, b[$). Isso contradiz o fato de ϕ ser solução maximal e conclui a demonstração. ■

Uma consequência desse teorema é um critério para verificar se uma solução maximal está definida para toda a reta.

Corolário 1.25. *Se $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução maximal da EDO (1.2). Então*

(i) *Se $b < +\infty$ então $\|\phi(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow b} +\infty$;*

(ii) *Se $a < -\infty$ então $\|\phi(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow a} +\infty$.*

Demonstração. Faremos a demonstração do Item (i), visto que (ii) é completamente análogo.

Se $b < +\infty$, então podemos tomar $t_0 \in]a, b[$ tal que $[t_0, b]$ é um intervalo compacto. Perceba que, pelo Teorema 1.24, $(t, \phi(t))$ deve escapar de qualquer compacto quando $t \rightarrow b$. Dessa forma, se $\|\phi\| \xrightarrow{t \rightarrow b} R < +\infty$, poderíamos construir um compacto $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $K = [t_0, b] \times \overline{B_R(0)}$ e $\phi(t) \in K$ (como mostrado na Figura 1.9) para todo $t \in [t_0, b]$, contradizendo a tese do teorema anterior. ■

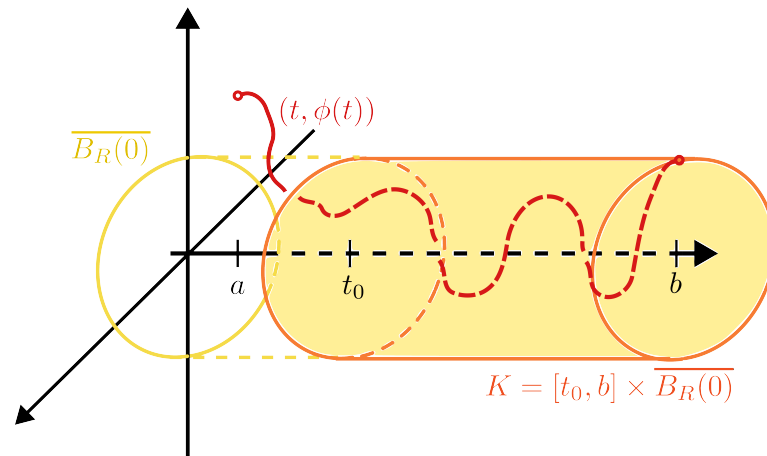


Figura 1.9: Compacto do qual a imagem de ϕ não escapa ao se aproximar de b .

Vamos aplicar esse corolário em dois exemplos.

Exemplo 1.26. *Seja $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que existe $R > 0$ e*

$$\langle x, F(t, x) \rangle \leq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| \geq R.$$

Então toda solução maximal definida por F está definida num intervalo da forma $]a, +\infty[$.

Demonstração. Seja $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ solução maximal qualquer da EDO em questão. Note que

$$\begin{aligned} (\|\phi(t)\|^2)' &= 2 \langle \phi(t), \phi'(t) \rangle \\ &= 2 \langle \phi(t), F(t, \phi(t)) \rangle \\ &\leq 0 \text{ para todo } t \in]a, b[\text{ tal que } \|\phi(t)\| \geq R. \end{aligned}$$

Dessa forma, existe $t_0 \in]a, b[$ tal que $\|\phi(t)\| \leq \max\{\|\phi(t_0)\|, R\}$ para todo $t \in]a, b[\cap [t_0, +\infty[$.

Portanto, para cada $s \in]a, b[$ fixado, $\phi(t) \in \overline{B_\delta(0)}$ em que $\delta := \max\{\|\phi(s)\|, R\}$ para todo $t \geq s$. Como $\overline{B_\delta(0)}$ é compacto, segue do Corolário 1.25 que $b = +\infty$. ■

Exemplo 1.27. Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com derivadas de primeira ordem contínuas e **dissipativa**, ou seja, existem $c, d > 0$ com $\langle x, F(x) \rangle \leq -c\|x\|^2 + d$ para todo x . Portanto a solução maximal do PVI

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

está definida para toda a reta real.

De fato, seja $\phi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução máxima desse PVI (existência garantida pela Proposição 1.21). Observe que, para $t \in]a, b[$

$$\begin{aligned} (\|\phi(t)\|^2)' &= 2 \langle \phi(t), \phi'(t) \rangle \\ &= 2 \langle \phi(t), F(\phi(t)) \rangle \\ &\leq -2c\|\phi(t)\|^2 + 2d. \end{aligned}$$

Resolvendo por variáveis separáveis, obtemos que

$$\|\phi(t)\|^2 \leq \frac{e^{-2c(t-t_0)}}{-4c^2\|x_0\|^2 - 4cd} + \frac{d}{c} =: f(t).$$

Note que se $a > -\infty$ concluímos que $\lim_{t \rightarrow a} \|\phi(t)\|^2 \leq \lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a) < +\infty$, o que contradiz o Corolário 1.25. Portanto $a = -\infty$. Analogamente, concluímos que $b = +\infty$ e então ϕ está definida para toda a reta real.

Por fim, vamos apresentar um resultado que será importante para garantirmos a existência de semigrupos (objeto que será apresentado no próximo capítulo) para o S.I.R. no Capítulo 4

e outros exemplos no Capítulo 2. Para a demonstração do Teorema abaixo, recomendamos ver [Viana and Espinar, 2011, Teorema 3.4.2].

Teorema 1.28 (Teorema da dependência contínua com relação às condições iniciais). *Suponha $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e localmente Lipschitz na segunda variável, com $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e considere para cada $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ a solução máxima $\phi_{t_0, x_0} : I_{t_0, x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ do problema de Cauchy definido por F e (t_0, x_0) . Então*

(i) $E := \{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid (t_0, x_0) \in \mathcal{U} \text{ e } t \in I_{t_0, x_0} \}$ é aberto;

(ii) A função

$$\begin{aligned} \Phi : \quad E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\longmapsto \phi_{t_0, x_0}(t) \end{aligned}$$

é contínua.

2 Teoria de atratores

Uma vez introduzidos ao contexto de EDO's pelo capítulo anterior, podemos agora estudar mais a fundo a dinâmica assintótica de soluções dessas equações. Para tal, neste capítulo, estudaremos a Teoria de atratores/semigrupos que será de extrema importância quando analisarmos o modelo S.I.R. no Capítulo 4. Usamos como base para o que segue as bibliografias [Aragão-Costa \[2012\]](#) e [Oliveira-Sousa](#).

Assim como indicado no Capítulo 1, (X, d) denota um espaço métrico.

2.1 Semigrupos

Começemos essa seção definindo o que é um semigrupo.

Definição 2.1. *Uma família $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ (que denotaremos por $T(\cdot)$) de aplicações contínuas do espaço métrico X nele mesmo é chamado de **semigrupo** em X , quando ele possuir as seguintes propriedades:*

- (i) $T(0)x = x$ para todo $x \in X$;
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$;
- (iii) A aplicação $[0, \infty[\times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é uma aplicação contínua.

Observação 2.2. *Algumas observações importantes quanto a Definição 2.1:*

1. No item (iii), estamos munindo o conjunto $[0, \infty[\times X$ da topologia produto (com a métrica da soma);
2. Perceba que $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ é comutativo com relação à composição, pois

$$T(t)T(s) \stackrel{(ii)}{=} T(t+s) = T(s+t) \stackrel{(ii)}{=} T(s)T(t) \text{ para todo } t \geq 0;$$

3. Caso tivéssemos que, para cada $t > 0$, $T(t)$ é um homeomorfismo, poderíamos definir $T(-t) := T(t)^{-1}$ para todo $t > 0$. Assim, o conjunto $\{T(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ seria um grupo com a operação composição (de fato seria abeliano pelo item anterior).

Definição 2.3. $A \subset X$ diz-se **invariante** pelo semigrupo $T(\cdot)$ quando para todo $t \geq 0$, $T(t)A = A$.

Exemplo 2.4. Um conjunto $A \subset X$ ser invariante por $T(\cdot)$ não significa que $T(t)|_A = Id$ para todo $t \geq 0$. De fato, considere a EDO

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x. \quad (2.1)$$

Podemos verificar que os autovalores $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ da matriz acima são complexos. Assim sua solução (para condição inicial $x(0) = (c_1, c_2)$) é da forma

$$\phi(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

em que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

É intuitivo pensar que a dinâmica das soluções dessa EDO é descrito pela equação acima. Isso ocorre, uma vez que o conjunto

$$\left\{ T(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \mid t \geq 0 \right\}$$

é um semigrupo. De fato,

$$(i) \quad T(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ -\sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id;$$

(ii) Sejam $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s) & \sin(s) \\ -\sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s) & \cos(t)\sin(s) + \sin(t)\cos(s) \\ -\sin(t)\cos(s) - \cos(t)\sin(s) & \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t+s) & \sin(t+s) \\ -\sin(t+s) & \cos(t+s) \end{pmatrix} \\ &= T(t+s); \end{aligned}$$

(iii) A continuidade é imediata do fato de cada entrada de $T(t)x$ ser contínua em relação à x e t .

Agora, considere $A = B_1(0, 0) \subset \mathbb{R}^2$. Note que A é invariante sob ação de $T(\cdot)$. De fato, seja $(x, y) \in A$ e $t \geq 0$

$$T(t)(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(t) + y\text{sen}(t) \\ y\cos(t) - x\text{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} \|T(t)(x, y)\| &= \sqrt{(x\cos(t) + y\text{sen}(t))^2 + (y\cos(t) - x\text{sen}(t))^2} \\ &= \sqrt{x^2(\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)) + y^2(\cos^2(t) + \text{sen}^2(t))} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

ou seja, $T(t)(x, y) \in A$. Por outro lado, $(a, b) = (x\cos(t) - y\text{sen}(t), x\text{sen}(t) + y\cos(t)) \in A$ e $T(t)(a, b) = (x, y)$, portanto $A = T(t)A$ para todo $t \geq 0$ e A é invariante. Porém, para $t \neq 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, $T(t)(x, y) = (x\cos(t) + y\text{sen}(t), y\cos(t) - x\text{sen}(t)) \neq (x, y)$, logo $T(t)|_A \neq \text{Id}$.

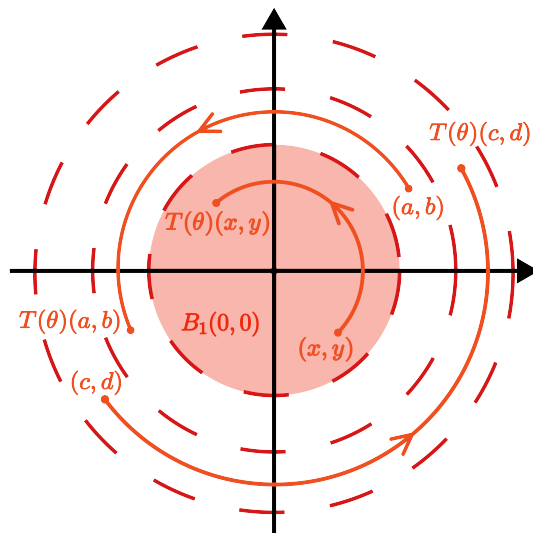


Figura 2.1: Semigrupo agindo em \mathbb{R}^2 e rotacionando os pontos em torno da origem.

Observação 2.5. Dada uma família de conjuntos invariantes por $T(\cdot)$, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$, a união desses conjuntos também é invariante por $T(\cdot)$, ou melhor,

$$T(t) \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ para todo } t \geq 0.$$

Já a interseção, só será verdade que

$$T(t) \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ para todo } t \geq 0,$$

se $T(t)$ for injetor para todo $t \geq 0$.

Definição 2.6. Seja $T(\cdot)$ semigrupo e $Y \subset X$.

1. Para cada $t \geq 0$, definimos a **imagem** de Y por $T(t)$ como o conjunto $T(t)Y := \{T(t)y \mid y \in Y\}$;
2. Definimos a **semiórbita positiva** de Y como o conjunto

$$\gamma^+(Y) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)Y;$$

Muitas vezes, é importante considerar a órbita a partir de um certo momento no tempo.

3. Dado $s > 0$, definimos a **semiórbita positiva** de $T(s)Y$ como o conjunto

$$\gamma_s^+(Y) = \bigcup_{t \geq s} T(t)Y.$$

Podemos, também, definir uma noção de solução para um dado semigrupo $T(\cdot)$.

Definição 2.7. Dado $T(\cdot)$ semigrupo, chamamos $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ de **solução global** para $T(\cdot)$ se para todo $t \geq 0$ e para todo $\tau \in \mathbb{R}$,

$$T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau).$$

Intuitivamente, evoluir $\xi(\tau)$ em t pelo semigrupo é o mesmo que calcular $\xi(t + \tau)$.

Se ξ é solução global de $T(\cdot)$, definimos a **órbita global** de ξ como o conjunto imagem

$$\gamma(\xi) := \{\xi(\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Uma propriedade simples de ser verificada é o fato de que toda órbita global de uma solução de um semigrupo (ou simplesmente chamada de uma órbita global de $T(\cdot)$) é invariante pelo semigrupo.

De fato, sejam $T(\cdot)$ semigrupo e ξ solução global do mesmo. Sejam $\xi(\tau) \in \gamma(\xi)$ elemento arbitrário da órbita global de ξ em que $\tau \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. Note que $t + \tau \in \mathbb{R}$, logo, por definição de solução global,

$$T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau) \in \gamma(\xi).$$

Além disso, perceba que denotando $\tau^* := \tau - t \in \mathbb{R}$, provamos a última inclusão da seguinte forma:

$$\xi(\tau) = \xi(t + (\tau - t)) = T(t)\xi(\tau^*) \in T(t)\gamma(\xi).$$

Podemos também perceber que soluções globais são contínuas. Esse resultado segue diretamente do fato de que $\xi(t) = T(t - \tau)\xi(\tau)$ e da Propriedade (iii) da Definição 2.1.

A propriedade de invariância e órbitas globais são vinculadas pela proposição a seguir. Além disso, esse resultado oferece uma caracterização para conjuntos invariantes.

Proposição 2.8. *Um conjunto $A \subset X$ é invariante por $T(\cdot)$ se, e somente se, A é uma união de órbitas globais de $T(\cdot)$.*

Demonstração. Suponha A uma união de órbitas globais de $T(\cdot)$. Pelo mostrado logo acima, toda órbita global é invariante e então, a união delas também o será pela Observação 2.5. Portanto A é invariante.

Reciprocamente, suponha que A é invariante e tome $x_0 \in A$. Por hipótese, sabemos que $x_0 \in T(t)A$ para todo $t \geq 0$ e, em particular, existe $x_{-1} \in A$ tal que $T(1)x_{-1} = x_0$. Novamente, existe $x_{-2} \in A$ tal que $x_{-1} = T(1)x_{-2}$ e, assim, $x_0 = T(2)x_{-2}$. Repetindo esse processo, obtemos $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}^*} \subset A$ em que $x_{-(n-1)} = T(1)x_{-n}$ e $T(n)x_{-n} = x_0$. Indutivamente, para $m \geq n$, $T(n)x_{-m} = x_{n-m}$.

Defina

$$\xi : \mathbb{R} \longrightarrow X$$

$$\tau \longmapsto \begin{cases} T(\tau)x_0 & , \text{ se } \tau \geq 0, \\ T(\tau + n)x_{-n} & , \text{ se } \tau \in [-n, 1 - n]. \end{cases}$$

Note que ξ está bem definida, uma vez que se $\tau \in [-n - 1, -n] \cap [-n, 1 - n]$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $T(-n + n)x_{-n} = T(0)x_{-n} = x_{-n} = T(1)x_{1-n} = T(-n + (1 + n))x_{-n-1}$. Mostremos agora que ξ é solução global.

Seja $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Se $\tau \geq 0$, temos que

$$T(t)\xi(\tau) = T(t)T(\tau)x_0 = T(t + \tau)x_0 = \xi(t + \tau).$$

Já se $\tau < 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\tau \in [-n, 1 - n]$ e podemos separar em outros dois casos.

Caso 1: $t + \tau \geq 0$. Por consequência,

$$T(t)\xi(\tau) = T(t)T(\tau + n)x_{-n} = T(t + \tau + n)x_{-n} = T(t + \tau)x_0 = \xi(t + \tau);$$

Caso 2: $t + \tau < 0$. Seja $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $t + \tau \in [-m, 1 - m]$, então $m \leq n$ e

$$\begin{aligned} T(t)\xi(\tau) &= T(t)T(\tau + n)x_{-n} \\ &= T(t + \tau + m + (n - m))x_{-n} \\ &= T(t + \tau + m)T(n - m)x_0 \\ &= T(t + \tau + m)x_{-m} \\ &= \xi(t + \tau). \end{aligned}$$

Em ambos os casos obtemos que ξ é solução global então a demonstração está concluída. ■

Precisamos introduzir uma noção de “distância” para avaliar a dinâmica assintótica dos conjuntos desse espaço métrico. Para tal, veja a definição a seguir.

Definição 2.9. A *semidistância de Hausdorff* entre A e B (subconjuntos de X) é dada por:

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

A semidistância de Hausdorff é importante, pois precisamos de uma maneira de descrever quando um conjunto está dentro de outro ou não (ou até mesmo o quanto dele está dentro de outro). Esse tipo de noção não é capturada pela distância usual. Vide exemplo abaixo.

Exemplo 2.10. Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} : $A = [-1, 0]$ e $B = [0, 2]$. A distância usual em \mathbb{R} nos diria que eles tem distância 0, mas claramente A não está contido em B . Já a semidistância de Hausdorff de A para B é 1 e a semidistância de B para A é 2 (o que é muito mais informativo). Esse exemplo também evidencia que a semidistância de Hausdorff *não é simétrica* (logo não é uma distância).

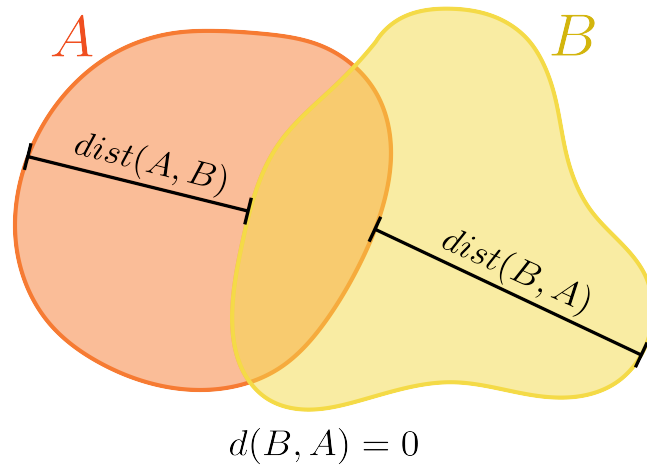


Figura 2.2: Semidistância de Hausdorff.

Lema 2.11. Para todo $A, B, C \subset X$ conjuntos não vazios, vale a desigualdade triangular

$$\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B).$$

Demonstração. Dados $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$ arbitrários, temos

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, c) + d(c, b) \xrightarrow{\inf \text{ em } B} d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B) \\ &\xrightarrow{\inf \text{ em } C} d(a, B) \leq d(a, C) + \overbrace{\inf_{c \in C} d(c, B)}^{\leq \text{dist}(C, B)} \\ &\xrightarrow{\sup \text{ em } A} \text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B) \end{aligned}$$

A demonstração está concluída. ■

Observação 2.12. Note que essa semidistância nos oferece uma nova caracterização para inclusão de conjuntos. De fato, $A \subset \overline{B}$ se, e somente se, $\text{dist}(A, B) = 0$.

Agora com uma maneira de medir o quão próximos dois conjuntos estão um do outro, podemos criar a noção de atração entre conjuntos.

Definição 2.13. Dados $A, B \subset X$, diz-se que A *atrai* B sob ação de $T(\cdot)$ quando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

Definição 2.14. Dado $A \subset X$ e $\varepsilon > 0$, definimos o conjunto

$$\mathcal{O}_\varepsilon(A) := \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$

como a ε -vizinhança de A .

Unindo as duas definições anteriores, podemos escrever que $B \subset X$ é atraído por $A \subset X$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_\varepsilon \geq 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A) \text{ para todo } t \geq t_\varepsilon.$$

Agora, estamos em vias de definir o objeto que dá nome ao capítulo: atrator global.

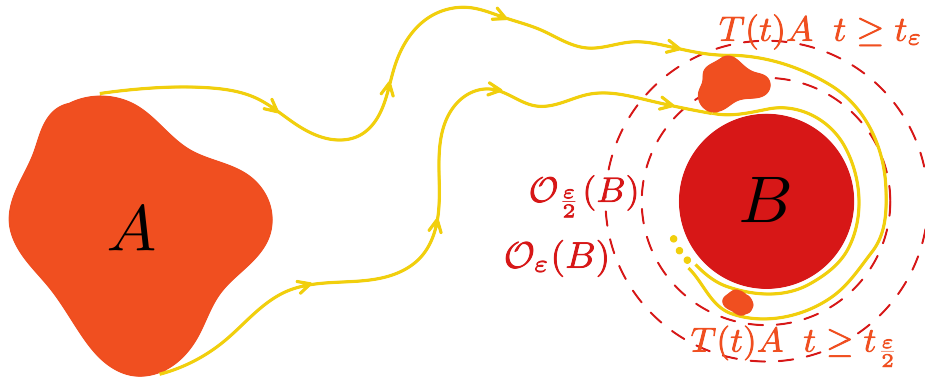


Figura 2.3: Conjunto A atraído por B .

Definição 2.15. Chamaremos $\mathcal{A} \subset X$ de **atrator global** (que será frequentemente referenciado apenas de **atrator**) para o semigrupo $T(\cdot)$ quando é compacto, invariante e atrai cada um dos subconjuntos limitados de X pela ação de $T(\cdot)$.

Proposição 2.16. Um atrator de um semigrupo $T(\cdot)$, quando existe, é único.

Demonstração. Sejam \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 atratores globais para $T(\cdot)$. Como \mathcal{A}_1 é compacto, ele é limitado de X , dessa forma, como \mathcal{A}_2 atrai todos os limitados de X ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0.$$

Por outro lado, como \mathcal{A}_1 é invariante por $T(\cdot)$, temos que

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \text{dist}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2),$$

ou seja, $\mathcal{A}_1 \subset \overline{\mathcal{A}_2} = \mathcal{A}_2$, sendo essa última igualdade válida pois \mathcal{A}_2 é compacto e, por consequência, fechado.

Analogamente, trocando os papéis de \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , obtemos que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ e a demonstração é concluída. ■

É interessante (e muitas vezes difícil) descrever a estrutura do atrator em um nível geométrico. Nesse sentido, os dois resultados seguintes dão caracterizações úteis para esse objeto.

Teorema 2.17. *Se um semigrupo $T(\cdot)$ possui um atrator $\mathcal{A} \subset X$, então \mathcal{A} é a união de todos os subconjuntos invariantes e limitados de X , ou seja, \mathcal{A} é o maior invariante limitado.*

Demonstração. Como \mathcal{A} é limitado (pois é compacto) e invariante,

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{\substack{B \subset X \\ \text{lim. e inv.}}} B.$$

Por outro lado, dado $B \subset X$ limitado e invariante, \mathcal{A} atrai B , ou seja,

$$\text{dist}(B, \mathcal{A}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(B, \mathcal{A}) \stackrel{B \text{ inv.}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Portanto, $B \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, logo \mathcal{A} contém todos os invariante limitados e a demonstração está concluída. ■

Corolário 2.18. *Se um semigrupo $T(\cdot)$ possui um atrator $\mathcal{A} \subset X$, então \mathcal{A} é a união de todas as órbitas globais limitadas de $T(\cdot)$.*

Demonstração. Como \mathcal{A} é invariante, pela Proposição 2.8, \mathcal{A} é uma união de órbitas globais que, por \mathcal{A} ser limitado, serão todas limitadas.

Por outro lado, dado ξ uma solução global limitada, é fácil ver que $\gamma(\xi)$ será limitado e, como a órbita é invariante, segue que \mathcal{A} contém $\gamma(\xi)$ pelo Teorema 2.17. ■

Perceba que conseguimos mostrar alguns resultados interessantes sobre o atrator, porém ainda não sabemos sob quais condições ele existe. Esse é o objetivo central desse capítulo, provar a existência de um atrator global para certos semigrupos.

Antes de finalizar essa seção, porém, vamos introduzir mais algumas definições.

Definição 2.19. Um semigrupo $T(\cdot)$ é dito ser **limitado** se para qualquer $B \subset X$ limitado tivermos que $\gamma^+(B)$ é também um subconjunto limitado de X . $T(\cdot)$ será **eventualmente limitado** se para qualquer $B \subset X$ existir $\tau = \tau(B) \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B)$ é um subconjunto limitado de X .

Observação 2.20. Note que se $T(\cdot)$ possui um atrator global \mathcal{A} , então $T(\cdot)$ é eventualmente limitado. De fato, dado $B \subset X$ e tomando $\varepsilon = 1$, como \mathcal{A} é atrator (logo atrai B), temos que existe $\tau \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B) \subset \mathcal{O}_1(\mathcal{A})$. Portanto, como \mathcal{A} é limitado, $\mathcal{O}_1(\mathcal{A})$ também o é e, por consequência, o mesmo vale para $\gamma_\tau^+(B)$.

Na definição de atração (B atraído por A , por exemplo), vimos que B pode ficar contido em vizinhanças arbitrariamente pequenas de A . Dessa forma, porém, a atração não garante que eventualmente o conjunto B esteja contido em A .

Definição 2.21. Dados $A, B \subset X$, dizemos que A **absorve** B pela ação de $T(\cdot)$ se existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$.

Por fim, abaixo segue um outro conceito que será fundamental para garantir a existência de um atrator.

Definição 2.22. Diz-se que $T(\cdot)$ é **limitado dissipativo** quando existe um subconjunto limitado $B \subset X$ que absorve cada um dos subconjuntos limitados de X .

Observação 2.23. Na definição acima, poderíamos substituir a palavra “absorve” por “atrai” uma vez que uma definição implica na outra.

Suponha que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo no sentido de absorção e denote por $B \subset X$ o conjunto que absorve todos os limitados de X . Claramente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 \geq 0$ tal que para todo $t \geq t_0$ e para todo $A \subset X$ limitado, $T(t)A \subset B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(B)$, e assim B atrai todo limitado de X .

Por outro lado, se $T(\cdot)$ é limitado dissipativo no sentido de atração, existe $B \subset X$ que atrai todos os limitados de X . Em particular, para $\varepsilon = 1$ e denotando $B' := \mathcal{O}_\varepsilon(B)$, para todo $A \subset X$ conjunto limitado, existe $t_0 \geq 0$ tal que para todo $t \geq t_0$

$$T(t)A \subset B'.$$

Portanto B' absorve todos os limitados de X . ■

Para melhor compreendermos o comportamento assintótico de conjuntos sob ação do semigrupo introduziremos a ideia de ω -limites.

2.2 ω -limites

Tal qual na seção passada, aqui também teremos o objeto titular com foco: ω -limite. Esse conjunto (que logo abaixo definiremos) será de extrema importância para existência de atratores.

Definição 2.24. Dado $B \subset X$, definimos seu ω -limite como o conjunto

$$\omega 1 \ \omega(B) := \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B} \right) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

A definição acima é a usual. Introduzimos também uma outra definição:

$$\omega 2 \ \omega(B) := \left\{ x \in X \mid \exists (t_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+ \times B, t_n \rightarrow +\infty \text{ e } x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n \right\}.$$

A proposição a seguir mostra que as definições acima são de fato equivalentes.

Proposição 2.25. Dado $B \subset X$, temos que $\omega 1 \iff \omega 2$.

Demonstração. Denotaremos por $\omega(B)_1$ o conjunto ω -limite definido por $\omega 1$ e $\omega(B)_2$ o conjunto ω -limite definido por $\omega 2$. Mostremos que $\omega(B)_1 = \omega(B)_2$.

Seja $x \in \omega(B)_1$, logo para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \overline{\gamma_n^+(B)}$. Por definição de fecho e de semiórbita positiva, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $t_n \geq n$ e $x_n \in B$ tal que tal que

$$d(x, T(t_n)x_n) < \frac{1}{n}.$$

Dessa forma, claramente $t_n \rightarrow +\infty$ e $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$, ou seja, $x \in \omega(B)_2$.

Por outro lado, seja $x \in \omega(B)_2$, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$ em que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$. Dado $t > 0$ arbitrário, existe $n(t) \in \mathbb{N}^*$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n(t)$, ou seja, $x \in \overline{\gamma_t^+(B)}$. Como t foi escolhido arbitrariamente, $x \in \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} = \omega(B)_1$. ■

Utilizaremos ambas as definições de acordo com a conveniência do momento. Nesse momento, apresentaremos dois exemplos que ilustram os três pilares fundamentais dessa teoria juntos: semigrupos, atratores e ω -limites.

Exemplo 2.26. Considere a seguinte EDO:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \tag{2.2}$$

Vamos encontrar a solução dessa EDO. Note que a matriz que define a EDO 2.2 tem autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$ com respectivos autovetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Com isso, as soluções da EDO 2.2 (para cada condição inicial $x(0) = (c_1, c_2)$) são escritas como:

$$x(t) = c_1 e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

Podemos então ilustrar o retrato de fase dessa EDO como na Figura 2.4. A imagem nos indica

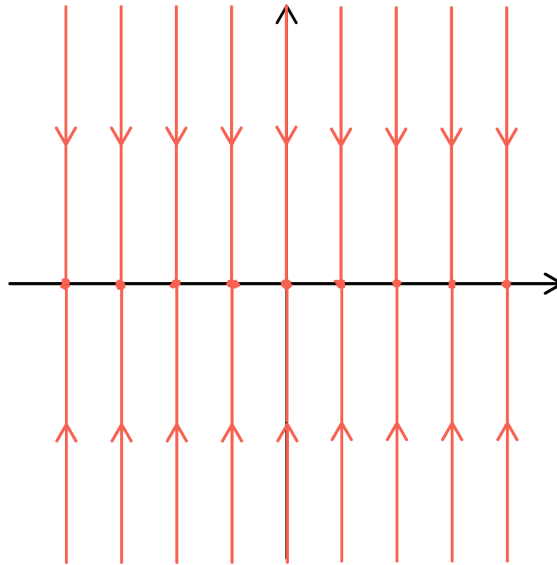


Figura 2.4: Retrato de fase da EDO (2.2)

que todas as soluções são atraídas pelo eixo horizontal, isso ocorre, mas nesse caso não podemos ter atrator, visto que caso houvesse, deveríamos ter toda a reta contida no atrator, o que tornaria-o não compacto.

O conjunto

$$T(\cdot) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \mid t \geq 0 \right\}$$

é o semigrupo associado à EDO 2.2. De fato:

- Avaliando $T(t)|_{t=0}$,

$$T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id;$$

- Para todo $t, s \geq 0$,

$$T(t+s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(t+s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} = T(t)T(s);$$

- A aplicação $[0, \infty[\times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^2$ é contínua, pois é a exponencial de uma matriz.

Note que para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \omega((x_1, x_2)) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+ \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)(x_1, x_2) = x \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

é um invariante que atrai todos os limitados do \mathbb{R}^2 (pois atrai todos os pontos de \mathbb{R}^2), porém, não é compacto (pois não é limitado). Dessa forma, essa EDO é um exemplo em que não podemos encontrar um atrator, apenas um eixo atraente ilimitado.

Exemplo 2.27. Considere a seguinte EDO:

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x. \quad (2.3)$$

Note que os autovalores da matriz que define a EDO (2.3) são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ com

respectivos autovetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, podemos escrever as soluções da EDO 2.3 (para cada condição inicial $x(0) = (c_1, c_2)$) como:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

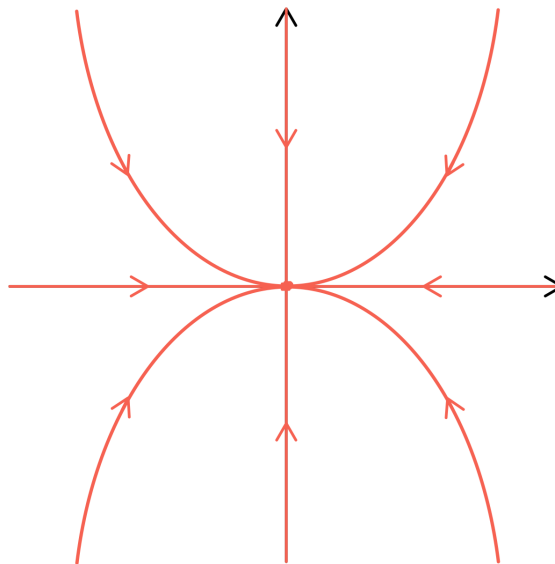


Figura 2.5: Retrato de fase da EDO (2.3).

Podemos então ilustrar o retrato de fase dessa EDO como na Figura 2.5. A imagem nos indica que todas as soluções são atraídas pelo conjunto unitário $\{(0,0)\}$. Ele na verdade será mais que um atrator, será o atrator de $T(\cdot)$.

O conjunto

$$T(\cdot) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \mid t \geq 0 \right\}$$

é o semigrupo associado à EDO 2.3. De fato:

- Avaliando $T(t)|_{t=0}$,

$$T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id;$$

- Para todo $t, s \geq 0$,

$$T(t+s) = \begin{pmatrix} e^{-(t+s)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t+s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} = T(t)T(s);$$

- A aplicação $[0, \infty[\times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^2$ é contínua, pois todas as suas entradas são contínuas.

Para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \omega((x_1, x_2)) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+ \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)(x_1, x_2) = x \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que $\mathcal{A} = \{(0, 0)\}$ é um invariante que atrai todos os limitados do \mathbb{R}^2 (pois $((0, 0))$ é o único invariante que atrai limitados). Diferente do Exemplo 2.26, o conjunto \mathcal{A} é compacto e, portanto, é o atrator da EDO (2.3).

Segue abaixo algumas propriedades do ω -limite que seguem diretamente de sua definição.

Teorema 2.28. Dados $B, C \subset X$ e ξ solução global, valem as seguintes propriedades:

- (i) $\omega(\emptyset) = \emptyset$;
- (ii) $\omega(B)$ é fechado;
- (iii) $\omega(B \cup C) \subset \omega(B) \cup \omega(C)$;
- (iv) Se $B \subset C$, então $\omega(B) \subset \omega(C)$;
- (v) $\omega(T(t)B) = \omega(B)$ para todo $t \geq 0$;
- (vi) $\omega(\xi(t)) = \omega(\xi(s))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Dessa forma, podemos denotar somente por $\omega(\xi)$;

(vii) Se B é invariante, então $\omega(B) = \overline{B}$;

(viii) $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. (i) $T(t)\emptyset = \emptyset \Rightarrow \gamma_t^+(\emptyset) = \bigcup_{s \geq t} \emptyset = \emptyset \Rightarrow \omega(\emptyset) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\emptyset} = \emptyset$.

(ii) Isso é evidente, uma vez que, por definição, $\omega(B)$ é interseção de fechados.

(iii) Seja $x \in \omega(B \cup C)$, então existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B \cup C$ tais que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Como a sequência $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é convergente, as subsequências

$$(T(t_n)x_n)_{n \in \{n \in \mathbb{N}^* \mid x_n \in B\}} \text{ e } (T(t_n)x_n)_{n \in \{n \in \mathbb{N}^* \mid x_n \in C\}}$$

também convergem para x , logo $x \in \omega(B) \cap \omega(C)$.

(iv) Seja $x \in \omega(B)$, então existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ tais que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Como $B \subset C$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset C$ e $x \in \omega(C)$.

(v) Sejam $t > 0$ e $x \in \omega(T(t)B)$, então existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset T(t)B$ tais que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe $b_n \in B$ tal que $x_n = T(t)b_n$ e assim, definindo $t_n^* := t_n + t$, note que $(t_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$, $t_n^* \rightarrow +\infty$ e

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)T(t)b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n + t)b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n^+)b_n.$$

Portanto $x \in \omega(B)$.

Por outro lado, dado $x \in \omega(B)$, existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ tais que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Seja $n(t) \in \mathbb{N}^*$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n(t)$ e considere a subsequência $(t_n)_{n \geq n(t)}$. Agora, perceba que $T(t)x_n \in T(t)B$ para cada $n \geq n(t)$ e

$$x = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} T(t_n)x_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n(t)}} T(t_n)x_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n(t)}} T(t_n - t + t)x_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n(t)}} T(t_n - t)T(t)x_n$$

Portanto $x \in \omega(T(t)B)$.

(vi) Note que $\xi(t) = T(t)\xi(0)$, então obtemos que $\omega(\xi(t)) = \omega(T(t)\xi) \stackrel{(v)}{=} \omega(\xi(0))$ para todo $t \geq 0$.

(vii) Note que, como B é invariante, $\gamma_t^+(B) = B$ para todo $t \geq 0$ e então

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{B} = \overline{B}.$$

(viii) Sejam $t > 0$ $y \in T(t)\omega(B)$, então existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ tais que $y = T(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Definindo $t_n^* := t + t_n$, note que $t_n^* \rightarrow +\infty$ e assim, $y \in \omega(B)$, pois $y = T(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t + t_n)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n^*)x_n$. ■

Analogamente à definição de ω -limite, podemos definir o α -limite, porém com tempo negativo. Dessa forma, podemos entender a dinâmica em tempos positivos e negativos (para soluções globais, como será explicado à seguir).

Definição 2.29. *Seja $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global de $T(\cdot)$. O conjunto α -limite de ξ será definido como*

$$\alpha(\xi) := \left\{ x \in X \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ tal que } x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi(t_n) \right\}.$$

Perceba que como o semigrupo só está definido para tempos não negativos, definimos o α -limite apenas para soluções globais.

Uma característica de um semigrupo $T(\cdot)$, que será necessária para obtermos resultados para o ω -limite, é a compacidade assintótica.

Proposição 2.30. *Se para qualquer $B \subset X$, $\omega(B)$ é compacto e $\omega(B)$ atrai B , então $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se existe um conexo $G \supset B$ que é atraído por $\omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo. Em particular, se B é conexo, $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Seja $t > 0$. Já sabemos do Teorema 2.28 (viii) que $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$, assim, basta mostrar que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Seja $x \in \omega(B)$, então existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ tais que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Para o $t > 0$ fixado previamente, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geq n_0$, dessa forma, defina

$$H := \{T(t_n - t)x_n \mid n \geq n_0\}.$$

Por hipótese, $\omega(B)$ atrai B , então para todo $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande

$$d(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) < \frac{1}{n}.$$

Por definição de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande, existe $z_n \in \omega(B)$ tal que $d(T(t_n - t)x_n, z_n) < \frac{1}{n}$. Como $\omega(B)$ é compacto (por hipótese), $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admite subsequência convergente para $z \in \omega(B)$ e por consequência, $(T(t_n - t)x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admite uma subsequência convergente para z . Sem perda de generalidade, considere $T(t_n - t)x_n \rightarrow z$. Por um lado, temos que $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \rightarrow y$. Por outro lado, pela Propriedade (iii) da Definição 2.1, obtemos $T(t)T(t_n - t)x_n \rightarrow T(t)z$. Então, pela unicidade do limite, concluímos que $y = T(t)z \in T(t)\omega(B)$.

Para a segunda parte da demonstração, suponha que G é conexo e tome $\omega(B) = C \cup D$ cisão de $\omega(B)$ ($C, D \subset X$ disjuntos e simultaneamente abertos e fechados na topologia de $\omega(B)$ induzida de X). Como $\omega(B)$ é compacto e C e D são fechados contidos em $\omega(B)$, C e D também são compactos e, como são disjuntos, $d(C, D) = \delta > 0$. Como $\omega(B)$ atrai G , dado $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, existe $t_0 > 0$ tal que $\gamma_{t_0}^+(G) \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(C) \cup \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(D)$.

Perceba porém que, novamente por (iii) da Definição 2.1, $T([t_0, +\infty[)G$ é conexo (imagem do conexo $[t_0, +\infty[\times G$ por função contínua), mas $T([t_0, +\infty[)G = \gamma_{t_0}^+(G)$, então $\gamma_{t_0}^+(G)$ é conexo e por consequência deve estar contido em $\mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(C)$ ou $\mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(D)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\gamma_{t_0}^+(G) \subset \mathcal{O}_{\frac{\varepsilon}{2}}(C)$, logo, como C é fechado, $\overline{\gamma_{t_0}^+(G)} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(C)$. Mas, por definição,

$$\omega(B) \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(G)} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(C),$$

então $D = \omega(B) \cap D = \emptyset$. Portanto $\omega(B)$ é conexo. ■

Os lemas abaixo caracterizam (sob certas hipóteses) o ω -limite de um conjunto B como o menor fechado que atrai B , ou seja,

$$\omega(B) = \bigcap_{\substack{F \subset X \text{ fch.} \\ F \text{ atrai } B}} F.$$

Lema 2.31. *Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio. Se F é um conjunto fechado que atrai B , então $\omega(B)$ está contido em F .*

Demonstração. Suponha, por contradição que existe $x \in \omega(B) \setminus F$. Então como F é fechado, $d(x, F) = \delta > 0$. Como F atrai B , para $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, existe $t_0 > 0$ tal que $\text{dist}(T(t)B, F) < \frac{\delta}{2}$ para todo $t \geq t_0$. Em particular, $d(T(t)b, F) < \frac{\delta}{2}$ para todo $b \in B$ e $t \geq t_0$.

Por outro lado, como $x \in \omega(B)$, $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)b_n$ para $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ ($t_n \rightarrow +\infty$) e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$. Assim, para $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande tal que $t_n \geq t_0$, temos que $d(T(t_n)b_n, F) < \frac{\delta}{2}$. Logo, da continuidade da função distância, obtemos que $d(x, F) \leq \frac{\delta}{2}$ contradizendo que $d(x, F) = \delta$. Portanto $\omega(B) \subset F$. ■

Lema 2.32. *Seja $B \subset X$ não-vazio tal que $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto para algum $t_0 \geq 0$. Então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B .*

Demonstração. Como $B \neq \emptyset$, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ e ao tomar $t_n = n + t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a sequência $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \gamma_{t_0}^+(B) \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ possui subsequência convergente (pois $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto) e, então esse limite está em $\omega(B)$. Portanto $\omega(B)$ é não-vazio.

Do Teorema 2.28 (ii), $\omega(B)$ é fechado e, por definição, $\omega(B) \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ que é compacto. Portanto $\omega(B)$ é compacto.

Provemos por contradição que $\omega(B)$ atrai B . Suponha que isso não ocorra, ou seja, existem $\varepsilon > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ tais que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.4)$$

Tome $n_0 > 0$ tal que $t_n \geq t_0$ para todo $n \geq n_0$. Defina o conjunto

$$H = \{T(t_n)x_n \mid n \geq n_0\} \subset \gamma_{t_0}^+(B)$$

e note que como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto, existe uma subsequência em H convergente para algum $x \in \omega(B)$. Isso contraria a Equação (2.4) e, portanto $\omega(B)$ atrai B . Com isso, podemos usar a Proposição 2.30 para concluir que $\omega(B)$ é invariante finalizar a demonstração. ■

Uma importante característica de semigrupos ainda não apresentada é a compacidade assintótica. Essa propriedade será importante para os próximos resultados e para a existência de atratores.

Definição 2.33. *Um semigrupo $T(\cdot)$ é dito ser **assintoticamente compacto** se para qualquer sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset X$ limitada e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$, a sequência $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possui subsequência convergente.*

Observação 2.34. *Em referências como Hale [2010] ou Bortolan et al. [2020], essa definição é apresentada como “Um semigrupo $T(\cdot)$ é dito ser **assintoticamente compacto** se para qualquer $B \subset X$ não vazio, limitado, fechado e positivamente invariante, existe $J \subset B$ compacto tal que J atrai B ”. Porém sob certas condições, as definições se equivalem. Para detalhes quanto a relação entre essas duas definições, recomendamos [Oliveira-Sousa, Capítulo 2].*

O seguinte resultado será importante para demonstrarmos o Teorema de Poincaré-Bendixson (Teorema 3.10) na seção seguinte.

Proposição 2.35. *Se existe $K \subset X$ compacto que atrai limitados, então $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset X$ limitada e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$. Note que $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, logo, do fato de que K atrai limitados,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t_n)B, K) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, K) = 0.$$

Além disso, pela Definição 2.9, temos que $d(T(t_n)x_n, K) \leq \text{dist}(T(t_n)B, K)$, dessa forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T(t_n)x_n, K) = 0$$

e da compacidade de K obtemos o resultado desejado. ■

Para finalizar essa seção, listemos abaixo as principais propriedades do ω -limite que a hipótese de assintoticamente compacto nos garante. Algumas delas já foram exploradas anteriormente, porém com hipóteses diferentes, assim, enfatizamos o quão útil a compacidade assintótica em termos de ω -limite .

Teorema 2.36. *Seja $T(\cdot)$ assintoticamente compacto . Dado $B \subset X$ limitado e não-vazio, as seguintes propriedades são válidas:*

- (i) $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B ;
- (ii) $\omega(B)$ é o menor fechado de X que atrai B ;
- (iii) Se existe um conexo $C \supset B$ que é atraído por $\omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo. Em particular, se B é conexo, $\omega(B)$ é conexo.

Demonstração. (i) Como B é não-vazio, podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ (que é limitada, pois B o é) e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$. Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto , temos que $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possui uma subsequência convergente e, pela definição de ω -limite , esse limite pertence ao $\omega(B)$.

Mostremos que toda sequência de $\omega(B)$ possui subsequência convergente. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sequência qualquer de B , logo, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existem $(x_k^n)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset B$ e $(t_k^n)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $t_k^n \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ e

$$x_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} T(t_k^n) x_k^n.$$

Desse limite, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $k_n \in \mathbb{N}^*$ tal que $t_{k_n}^n \geq n$ e

$$d(x_n, T(t_{k_n}^n) x_{k_n}^n) < \frac{1}{n}. \tag{2.5}$$

Pela compacidade assintótica, podemos extrair soma subsequência convergente de $(T(t_{k_n}^n)x_{k_n}^n)$, a qual denotaremos como ela mesma (para evitar notação excessiva) e seu limite por x . Claramente $x \in \omega(B)$, mais que isso porém, de (2.5) e da continuidade da distância, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_{k_n}^n)x_{k_n}^n = x \in \omega(B).$$

Portando $\omega(B)$ é compacto.

Agora, provemos que $\omega(B)$ é invariante. Já provamos no Teorema 2.28 (viii) que $\omega(B)$ é positivamente invariante. Reciprocamente, fixe $t > 0$ e $x \in \omega(B)$, logo existem $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset B$ tais que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n$. Considere $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n \geq n_0$ e $t_n^* := t_n - t \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Note que para $n \geq n_0$

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0}} T(t_n)x_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0}} T(t_n - t + t)x_n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0}} T(t)T(t_n^*)x_n.$$

Como $t_n^* \rightarrow +\infty$, da compacidade assintótica, existe $z \in X$ e subsequência convergente de $(T(t_n^*)x_n)_{n \geq n_0}$ (a qual denotaremos pela própria sequência), tal que $T(t_n^*)x_n \rightarrow z$, ou seja, $z \in \omega(B)$ e

$$x = T(t) \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0}} T(t_n^*)x_n = T(t)z \in T(t)\omega(B).$$

Portanto $\omega(B) = T(t)\omega(B)$ para todo $t \geq 0$.

Para finalizar esse item, basta mostrar que $\omega(B)$ atrai B . Suponha, por contradição, que existem $\varepsilon > 0$ e sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $t_n \rightarrow +\infty$ e

$$\text{dist}(T(t_n)B, \omega(B)) \geq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, porém, podemos encontrar $x_n \in B$ tal que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \varepsilon.$$

Da compacidade assintótica novamente, existe $x \in X$ e, a menos de subsequência convergente, $T(t_n^*)x_n \rightarrow x$ (logo $x \in \omega(B)$). Pela continuidade da distância,

$$\varepsilon \leq d\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} T(t_n)x_n, \omega(B)\right) = d(x, \omega(B)) = 0,$$

o que contradiz o fato de $\varepsilon > 0$. Portanto $\omega(B)$ atrai B .

(ii) Do Lema 2.31 já sabemos que

$$\omega(B) \subset \bigcap_{\substack{F \subset X \text{ fch.} \\ F \text{ atrai } B}} F.$$

Já do Item (i) dessa demonstração e do Teorema 2.28 (ii), temos respectivamente que $\omega(B)$ atrai B e que $\omega(B)$ é fechado, então

$$\omega(B) \supset \bigcap_{\substack{F \subset X \text{ fch.} \\ F \text{ atrai } B}} F$$

e obtemos que $\omega(B)$ é o menor fechado que atrai B .

(iii) Pelo provado no Item (i) dessa demonstração, $\omega(B)$ é compacto então vale a Proposição 2.30. ■

2.3 Existência de atratores globais

Finalmente, estamos em condições de apresentar o principal resultado desse capítulo. O Teorema abaixo garante a existência de um atrator global e, mais do que isso, oferece uma caracterização interessante para o mesmo.

Teorema 2.37 (Existência de atrator global). *Seja $T(\cdot)$ semigrupo em X . Então $T(\cdot)$ possui um atrator global se, e somente se, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Além disso, se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X$ denotam respectivamente o atrator de $T(\cdot)$ e a coleção de todos os conjuntos limitados não-vazios de X , então*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B).$$

Demonstração. Suponha que exista $\mathcal{A} \subset X$ atrator global de $T(\cdot)$. Como o atrator é um conjunto que atrai todos os limitados de X , pela Observação 2.23 isso é equivalente a dizer que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo.

Para a compacidade assintótica, tome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset X$ sequência limitada de pontos e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$. Considere $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ e perceba que como ele é limitado,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) = 0$$

e, em particular,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B} d(T(t_n)x, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(T(t_n)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}^*$ existe $a_k \in \mathcal{A}$ tal que

$$d(T(t_{n_k})x_{n_k}, a_k) < \frac{1}{k}.$$

Da compacidade de \mathcal{A} , a sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ possui subsequência convergente para $a \in \mathcal{A}$ (a qual denotaremos da mesma forma), logo

$$d(T(t_{n_k})x_{n_k}, a) \leq d(T(t_{n_k})x_{n_k}, a_k) + d(a_k, a) < \frac{1}{k} + d(a_k, a).$$

Concluimos então que $T(t_{n_k})x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a$ e, portanto, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto .

Reciprocamente, suponha que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Considere

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B),$$

mostremos que esse conjunto é de fato o atrator global de $T(\cdot)$. Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto, pelo Teorema 2.36 (i), para cada $B \in \mathcal{B}$, $\omega(B)$ é compacto, invariante e atrai B . Então \mathcal{A} é invariante pela Observação 2.5 e atrai todos os limitados de X . Basta mostrar a compacidade.

Por hipótese, $T(\cdot)$ é limitado dissipativo, então tome $D \subset X$ o subconjunto limitado que absorve todos os conjuntos limitados de X . Note que dado $B \in \mathcal{B}$, \overline{D} é fechado e absorve B , logo pelo Lema 2.31 $\omega(B) \subset \overline{D}$. Dessa forma, como $\mathcal{A} \subset D$ e \mathcal{A} é invariante, pelo Teorema 2.28 (iv) e (vii), $\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A}) \subset \omega(D)$. Por fim, como $D \in \mathcal{B}$, $\omega(D) \subset \mathcal{A}$, obtemos $\mathcal{A} = \omega(D)$ e, novamente pelo Teorema 2.36 (i), \mathcal{A} é compacto. ■

Exemplo 2.38. *Voltemos ao Exemplo 1.27. Note que, da mesma forma como desenvolvido nesse exemplo, obtemos que, para toda solução máxima $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de*

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

com F dissipativa,

$$\|\phi(t)\|^2 \leq \frac{e^{-2c(t-t_0)}}{-4c^2 \|x_0\|^2 - 4cd} + \frac{d}{c} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{c}, \text{ se } x_0 \in B \subset X \text{ limitado.}$$

Portanto, B é atraído por $\overline{B_{\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}}(0)}$ compacto de \mathbb{R}^n . Portanto $T(\cdot)$ é limitado dissipativo e, da Proposição 2.35 e do Teorema 2.37, $T(\cdot)$ possui atrator global. Em conclusão, se F é dissipativa, o semigrupo definido por suas soluções possui atrator global.

Exemplo 2.39. Considere a EDO $x' = x - x^3$. Resolvendo por separação de variáveis, obtemos para cada condição inicial $t_0 = 0$ e $x(0) = x_0$ (como a EDO é autônoma, podemos considerar $t_0 = 0$) a solução

$$\phi_{x_0}(t) = \begin{cases} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1-x_0^2}{x_0^2} + e^{2t}}} & \text{se } x_0 > 0, \\ -\frac{e^t}{\sqrt{\frac{1-x_0^2}{x_0^2} + e^{2t}}} & \text{se } x_0 < 0, \\ 0 & \text{se } x_0 = 0. \end{cases}$$

Definindo o semigrupo $T(t)x_0 = \phi_{x_0}(t)$, podemos provar que o conjunto $\mathcal{A} := [-1, 1]$ é o atrator global de $T(\cdot)$.

Note que $\phi_0 \equiv 0$, $\phi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ se $x > 0$ e $\phi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -1$ se $x < 0$, sendo essas soluções limitadas quando $|x| \leq 1$. De fato são as únicas, uma vez que $\alpha(\phi_x) = \infty$ se $|x| > 1$. Dessa forma, como o atrator é a união das órbitas de todas as soluções globais limitadas $\mathcal{A} = [-1, 1]$.

3 Teorema de Poincaré-Bendixson

Esse capítulo apresentará uma análise da dinâmica em sistemas planares, porém não buscamos explorar muito dessa área de estudo, uma vez que nosso foco é adquirir conhecimento o suficiente para que possamos provar e utilizar o Teorema de Poincaré-Bendixson. As duas principais bibliografias utilizadas nesse estudo são Hale [2009] e Doering and Lopes [2014].

Começemos com algumas definições fundamentais para esse capítulo e o importante Teorema do Fluxo Tubular.

Definição 3.1. *Seja E um espaço euclidiano (espaço vetorial real normado) de dimensão $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. Um **campo vetorial** de $B \subset E$ é uma função $f : B \rightarrow E$ que mapeia cada ponto de B em um vetor de E . Se $E \subset \mathbb{R}^2$, chamaremos f também de **campo planar**;
2. Um **ponto regular** p de f (campo vetorial de E) é tal que $f(p) \neq \vec{0}$. Um **ponto de equilíbrio** de f é um ponto não regular de f ;
3. Uma **seção transversal** (ou **seção local**) de f em $x \in E$ é um subconjunto aberto e conexo $S \subset H \subset E$ (em que H é um hiperplano de dimensão $n - 1$) centrado em x , transversal ao vetor $f(x) \neq 0$ em x e para todo $y \in S$, $f(y) \neq 0$ aponta para o mesmo lado de S (A existência de tal seção é garantida pelo Teorema do Fluxo Tubular).

Para motivarmos o teorema a seguir, tomemos o campo constante $\tilde{f} = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ com a condição inicial $x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A solução de

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{f}(x(t)), \\ x(0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

é claramente $x(t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. É como se, localmente, o fluxo fosse formado por uma família de retas paralelas, vide Figura 3.1.

Teorema 3.2 (Teorema do Fluxo Tubular). *Sejam $f : B \subset E \rightarrow E$ um campo C^r em que $r \geq 0$, B é um aberto de E que, por sua vez, é um espaço euclidiano de dimensão $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in B$ é um ponto regular de f . Fixemos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para E e considere o campo constante $\tilde{f} = e_1$ definido no cubo $C = \{x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E \mid |x_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$. Então existe difeomorfismo (função C^∞ com inversa também C^∞) $h : V_p \rightarrow C$ que conjuga localmente os fluxos de f e de \tilde{f} , onde V_p é uma vizinhança aberta de p em B .*

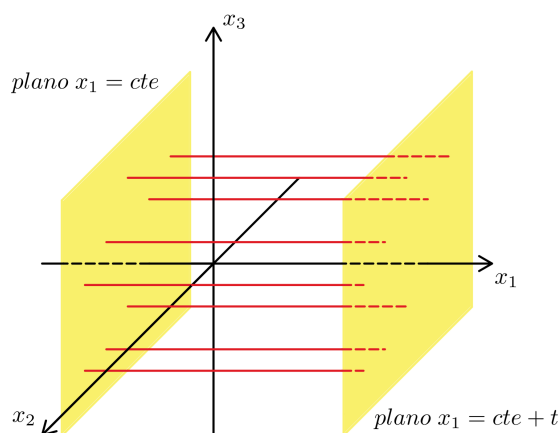


Figura 3.1: Ilustração do Fluxo Laminar

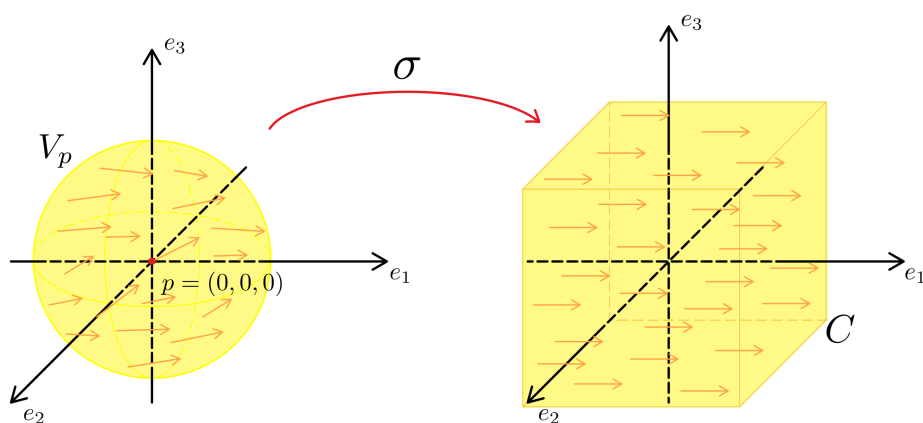


Figura 3.2: Ilustração do Teorema do Fluxo Tubular.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada com detalhes em [Doering and Lopes, 2014, Teorema 4.8]. Intuitivamente, próximo o suficiente de um ponto regular, o fluxo se comporta como o fluxo laminar (veja Figura 3.2). Como mencionado anteriormente, uma aplicação desse teorema é que ele garante a existência de seções locais que, por sua vez, serão ferramentas imprescindíveis nos resultados futuros.

O que segue é uma sequência de resultados essenciais para demonstrarmos o Teorema título desse capítulo. Deixemos fixado $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial que pode ser entendido como a EDO

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

tal que para toda condição inicial $(0, x_0) \in \mathbb{R}^3$, a solução máxima $\phi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$ do PVI

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

existe, tem domínio de definição $I_{x_0} \supset [0, +\infty[$ e $\phi_{x_0}(t) \in E$ para todo $t \geq 0$.

Definição 3.3. Com f fixada acima, seja $x \in E$ ponto qualquer.

1. Referiremos-nos ao **fluxo** de f como o semigrupo $T(\cdot) = \{T(t) \mid t \geq 0\}$ definido como

$$\begin{aligned} T(t) : E &\longrightarrow E \\ x_0 &\longmapsto T(t)x_0 = \phi_{x_0}(t) \end{aligned}$$

Note que, como impomos a condição de que para todo $x_0 \in E$ e para todo $t \geq 0$, $\phi_{x_0}(t) \in E$, temos que $T(t)x_0 \in E$ e obtemos a boa definição do semigrupo.

2. Diremos que a órbita $\gamma(\xi_x)$ é **periódica** (em que $\xi_x : \mathbb{R} \rightarrow E$ é solução global de $T(\cdot)$ com $\xi_x(0) = x$), se existe $\tau > 0$ tal que $\xi_x(t + \tau) = \xi_x(t)$ para todo $t \geq 0$.

No que segue, deixaremos fixado o semigrupo $T(\cdot)$ como definido acima. Voltemos-nos a um resultado importante para esse capítulo: Lema da sequência monótona. Antes de enunciarmos e provarmos o mesmo, porém, fixe p um ponto regular e S uma seção transversal contendo p . Defina agora

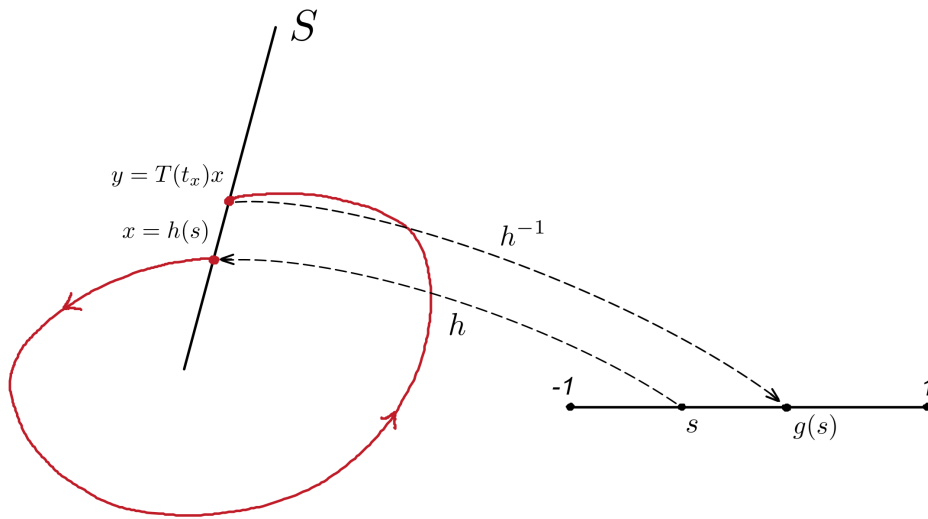
$$V := \{x \in S \mid \text{existe } t_x > 0 \text{ tal que } T(t_x)x \in S \text{ e } T(t)x \in \mathbb{R}^2 \setminus S \text{ para todo } 0 < t < t_x\} \quad (3.2)$$

e $W := h^{-1}(V)$ em que $h : [-1, 1] \rightarrow S$ é um homeomorfismo. Defina também $g : W \rightarrow]-1, 1[$ como $g(s) = h^{-1}(T(t_{h(s)})h(s))$.

Como um último preparativo para o Lema da sequência monótona, vamos rapidamente lembrar os enunciados do Teorema da curva de Jordan (que pode ser visto com detalhes em [Do Carmo, 2010, Teorema 1, Seção 5.7]) e do Teorema do valor intermediário (veja [Lima, 2004, Corolário 6, Capítulo 1]).

Teorema 3.4 (Teorema da Curva de Jordan). *Seja J uma curva simples fechada em \mathbb{R}^2 separa o plano em dois. Ou seja, $\mathbb{R}^2 \setminus J = S_i \cup S_e$, onde S_i e S_e são duas componentes conexas (por caminho) abertas, respectivamente o interior da curva (limitado) e o exterior da curva (ilimitado).*

Figura 3.3: Ilustração para o Lema da sequência monótona



Teorema 3.5 (Teorema do valor intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua. Se $\min \{f(a), f(b)\} < y < \max \{f(a), f(b)\}$, existe $a < x < b$ tal que $f(x) = y$.*

Lema 3.6 (Lema da sequência monótona). *Seja $x \in S$ um ponto da seção transversal local S de p . Se $\gamma(\xi_x)$ volta a bater em S para tempos crescentes $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, então a sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em que $x_n = T(t_n)x$, é monótona em S no seguinte sentido: no segmento S , x_n sempre está entre x_{n-1} e x_{n+1} . Além disso, existem $t_n < t_{n+1}$ tal que $x_n = x_{n+1}$ se, e somente se, $\gamma(\xi_x)$ é periódica.*

Demonstração. Para a primeira parte, note que, pela Afirmação 1 abaixo, precisamos mostrar que a sequência $(g^n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente, em que $g^n(s) = g(g^{n-1}(s))$ para $n \in \mathbb{N}^*$, $g^0(s) = s$ e g é a função definida acima.

Afirmação 1. Se $(g^n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente, então a sequência

$$(h(g^n(s)))_{n \in \mathbb{N}} = (T(t_n)h(s))_{n \in \mathbb{N}} = (\xi(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

também será monótona.

De fato, suponha que $(g^n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona crescente mas $(h(g^n(s)))_{n \in \mathbb{N}}$ não é monótona. Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $h(g^n(s)) < h(g^{n+1}(s))$ para todo $\mathbb{N}^* \ni n \leq n_0 - 1$, mas $h(g^{n_0}(s)) \geq h(g^{n_0+1}(s))$.

- Se $h(g^{n_0}(s)) = h(g^{n_0+1}(s))$: obtemos contradição com o fato de h ser injetora;

- Se $h(g^{n_0}(s)) > h(g^{n_0+1}(s))$: como $g^{n_0}(s) < g^{n_0+1}(s)$, $[g^{n_0}(s), g^{n_0+1}(s)]$ é conexo e está contido no domínio de h que, por sua vez, é contínua, podemos aplicar o Teorema do valor intermediário (ver Teorema 3.5) para encontrar $t_0 \in]g^{n_0}(s), g^{n_0+1}(s)[$ tal que $h(t_0) \in]g^{n_0-1}(s), g^{n_0}(s)[\cap]g^{n_0}(s), g^{n_0+1}(s)[$, contradizendo a injetividade de h .

Portanto $(h(g^n(s)))_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona. □

Considere a curva de Jordan C (veja o Teorema 3.4) dada pela união entre o segmento em S que conecta x à $y = T(t_x)x$ e o conjunto $\{T(t)x \in V \mid t \in [0, t_x]\}$ (lembrando que V e t_x estão definidos em (3.2)). Na segunda parte, trataremos o caso em que $x = y$, então aqui, vamos supor que $h^{-1}(x) < h^{-1}(y)$, ou seja, $s < g(s)$. Denote o interior e o exterior de C respectivamente por S_i e S_e (podemos fazer isso pelo Teorema da curva de Jordan 3.4). Dessa forma, a parte $h(]g(s), 1[) \subset S$ deve estar totalmente contida ou em S_i ou em S_e , pois caso contrário, teríamos uma órbita intersectando outra (o que não pode ocorrer), ou teríamos uma órbita cruzando o segmento que liga x à y em S no sentido contrário ao sentido que a órbita de x deixa S (contradizendo o Teorema do Fluxo Tubular 3.2).

Portanto, $g^2(s)$ está bem definido e pertence à $]g(s), 1[$. Indutivamente, temos que a sequência $(g^n(s))_{n \in \mathbb{N}^*}$ é monótona. Suponha agora, $s_1 > s$, s_1 em W com $g(s_1)$ definida. Então pela mesma lógica anterior, obtemos que $g(s_1) > g(s)$ e temos que g é crescente. Portanto está provada a primeira parte.

Provemos agora a segunda parte. Suponha que existem $t_n < t_{n+1}$ tal que $x_n = x_{n+1}$ e considere $\tau = t_{n+1} - t_n$. Então

$$\begin{aligned} \xi_x(t + \tau) &= T(t - t_n)\xi_x(t_{n+1}) \\ &= T(t - t_n)x_{n+1} \\ &= T(t - t_n)x_n \\ &= T(t - t_n)\xi_x(t_n) \\ &= \xi_x(t) \text{ para todo } t \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto a órbita de x é periódica.

Reciprocamente, suponha que existe $\tau > 0$ tal que $\xi_x(t) = \xi_x(t + \tau)$ para todo $t \geq 0$. Tome t_n qualquer e $t_{n+1} = t_n + \tau$, logo $t_{n+1} > t_n$ e

$$T(t_n)x = \xi_x(t_n) = \xi_x(t_n + \tau) = \xi_x(t_{n+1}) = T(t_{n+1})x.$$

Portanto $x_n = x_{n+1}$. ■

As próximas três proposições detalham o comportamento de conjuntos ω -limites em um campo planar. Esses resultados serão importantes na demonstração do Teorema 3.10.

Proposição 3.7. *Se $\gamma(\xi_x)$ é periódica, para $x \in E$, então $\omega(x)$ é a própria órbita periódica.*

Demonstração. Seja ξ_x uma solução global tal que $\xi_x(0) = x$. Do Teorema 2.28(vi), temos que $\omega(\gamma(\xi_x)) = \omega(x)$. Além disso, do fato de que $\gamma(\xi_x)$ é periódica, $\gamma(\xi_x) = T([0, \tau])\{x\}$, ou seja, $\gamma(\xi_x)$ é imagem do compacto $[0, \tau] \times \{x\}$ por função contínua (pela Definição 2.1 (iii)), logo é compacto. Do fato que $\gamma(\xi_x)$ é invariante (observado logo após a Definição 2.7) e do discutido acima, temos que $\omega(x) = \omega(\gamma(\xi_x)) = \overline{\gamma(\xi_x)} = \gamma(\xi_x)$. ■

Proposição 3.8. *Para todo $x \in E$, $\omega(x)$ não pode intersectar uma seção local do campo em mais de um ponto.*

Demonstração. Sejam $x \in E$ e $y \in \omega(x) \cap S$, então existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $x_n = T(t_n)x \rightarrow y$. Como $y \in S$, podemos assumir que $x_n \in S$, pois caso $x_n \notin S$, basta trocar t_n por t_n^* para que $x_n = T(t_n^*)x \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (chamamos essa mudança de projeção pelo fluxo).

Se a órbita de x é periódica, então, pela Proposição 3.7, a órbita é o próprio $\omega(x)$. Portanto, pelo Lema 3.6, $\{y\} = \omega(x) \cap S$, pois uma órbita periódica só tem uma batida em S (ou seja, interseca S em apenas um ponto).

Se a órbita de x é não periódica, x_n 's são pontos distintos de $\omega(x) \cap S$ que convergem para $y \in S$. Note que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma subsequência da sequência definida no Lema 3.6. Por outro lado, tomando $y' \in \omega(x) \cap S$, existe $(t'_n) \subset \mathbb{R}^+$ com $t'_n \rightarrow +\infty$ tal que $x'_n = T(t'_n)x \rightarrow y'$ e $x'_n \in S$ (a menos de projeção pelo fluxo) para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo x'_n é também subsequência da sequência definida no Lema 3.6. Mas sabemos que sequências monótonas têm no máximo uma subsequência convergente, ou seja, $y' = y$. Portanto $\{y\} = \omega(x) \cap S$. ■

Proposição 3.9. *Se $T(\cdot)$ possui atrator global, $x \in E$ e $\omega(x)$ contém uma órbita periódica, então $\omega(x)$ coincide com a órbita periódica.*

Demonstração. Do Teorema 2.37, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e vale o Teorema 2.36. Seja $y \in \omega(x)$ tal que $\gamma^+(y)$ é periódica e $\gamma^+(y) \subset \omega(x)$. Queremos mostrar que $\gamma^+(y) = \omega(x)$.

Suponha, por contradição que $\omega(x) \not\subset \gamma^+(y)$. Então $\omega(x) \setminus \gamma^+(y) \neq \emptyset$. Note que $\omega(x)$ atrai x , pois vale o Teorema 2.36(i). Desse mesmo resultado vale que $\omega(x)$ é conexo. Note que $\gamma^+(y)$ é um conjunto fechado, assim $\omega(x) \setminus \gamma^+(y) \neq \emptyset$ e não é fechado (pois caso contrário

$\omega(x) = (\omega(x) \setminus \gamma^+(y)) \dot{\cup} \gamma^+(y)$ seria cisão não trivial de $\omega(x)$). Assim existem $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \omega(x) \setminus \gamma^+(y)$ e $y_0 \in \gamma^+(y)$ tal que $y_n \rightarrow y_0$.

Como $y_0 \in \gamma^+(y)$, $f(y_0) \neq 0$ e podemos tomar uma seção local S de f em y_0 . Projetando pelo fluxo se necessário, podemos supor que $y_n \in S$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Pela Proposição 3.8, sabemos que $\omega(x) \cap S$ é no máximo um ponto. Portanto $y_n = y_0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, o que é uma contradição. Concluimos então que $\omega(x) = \gamma^+(y)$. ■

Finalmente estamos em vias de enunciar e demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 3.10 (Poincaré-Bendixson). *Seja $T(\cdot)$ limitado dissipativo com finitos pontos de equilíbrio e $x \in E$ ($f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), então vale uma das teses abaixo:*

- (i) $\omega(x)$ é um único ponto de equilíbrio;
- (ii) $\omega(x)$ é uma órbita periódica;
- (iii) $\omega(x)$ é uma união de finitos pontos de equilíbrio e um conjunto de órbitas γ_s tais que $\alpha(\gamma_s)$ e $\omega(\gamma_s)$ são ambos pontos de equilíbrio para cada γ_s .

Demonstração. Como $T(\cdot)$ é limitado dissipativo, existe $K \subset \mathbb{R}^2$ limitado que atrai todos os limitados. Portanto \overline{K} é compacto que atrai limitados e, pela Proposição 2.35, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto, que por consequência resulta em $\omega(x)$ ser compacto, não vazio, invariante e conexo (veja Teorema 2.36). Separemos em casos:

(i) $\omega(x)$ não possui pontos regulares.

Nesse caso, como $\omega(x)$ é não-vazio, ele possui pelo menos um ponto, como este não pode ser regular, ele é de equilíbrio. Mais do que isso, como $\omega(x)$ é conexo, esse conjunto será unitário, pois existem apenas finitos pontos de equilíbrio (logo são pontos isolados).

(ii) $\omega(x)$ possui pontos regulares e contém uma órbita periódica.

Pela Proposição 3.9, $\omega(x)$ é a própria órbita periódica.

(iii) $\omega(x)$ possui pontos regulares mas nenhuma órbita periódica.

Seja $y \in \omega(x)$. Pelo Teorema 2.28 (iv), $\omega(y) \subset \omega(\omega(x))$. Além disso, como $\omega(x)$ é fechado (Teorema 2.28 (ii)) e invariante, novamente pelo Teorema 2.28 (vii), $\omega(y) \subset \omega(x)$. Mais ainda, existe $z \in \omega(y)$ (do Teorema 2.36).

Mostremos agora que z não é ponto regular. Suponha por contradição que z o seja. Podemos então tomar S seção local de f por z . Como $z \in \omega(y)$, existe $y_n = T(t_n)y \rightarrow z$ com $t_n \rightarrow +\infty$. Projetando pelo fluxo, se necessário, podemos assumir $y_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Mas, pela Proposição 3.8, $\omega(x) \cap S$ é no máximo um ponto, ou seja, y_n 's coincidem que, pelo Lema 3.6, significa que a órbita de y é periódica. Isso contradiz o fato de estarmos no caso em que $\omega(x)$ não possui órbitas periódicas, portanto z é ponto de equilíbrio. Dessa forma, pelo mesmo argumento dado no Item (i) $\omega(y) = \{z\}$.

Analogamente, é possível mostrar que $\alpha(y)$ é também um ponto de equilíbrio. Então, em essência, neste caso, mostramos que $\omega(x)$ é constituído por pontos de equilíbrio e as soluções globais que os conectam. ■

Observação 3.11. *O resultado análogo pode ser provado para os α -limites ao invés de ω -limites.*

A aplicação desse resultado será melhor compreendida no capítulo seguinte, quando o utilizarmos na caracterização do atrator do S.I.R.. Porém, note que, por si só, esse Teorema é muito interessante, uma vez que ele resume por completo todos os possíveis conjuntos ω -limite de pontos em um campo planar (veja Figura 3.4).

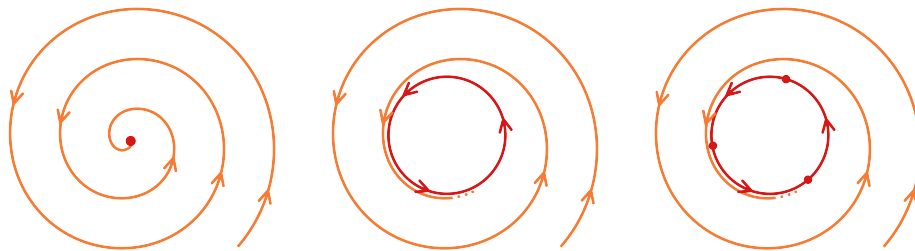


Figura 3.4: Os três possíveis casos de comportamentos assintóticos no plano.

Exemplo 3.12. *Quando não estamos em \mathbb{R}^2 , os conjuntos ω -limite de pontos podem ficar muito mais complexos, uma vez que, em \mathbb{R}^3 , por exemplo, o Teorema de Poincaré-Bendixson não vale. Um exemplo disso seria o Atrator de Lorenz. Defina o sistema de EDO's*

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = x(r - z) - y, \\ z' = xy - bz, \end{cases}$$

em que as constantes $\sigma, r, b > 0$ e $\sigma > b + 1$. Esse sistema possui um atrator global \mathcal{A} (chamado de Atrator de Lorenz). As soluções desse sistema para condições iniciais diferentes geram gráficos como a Figura 3.5.

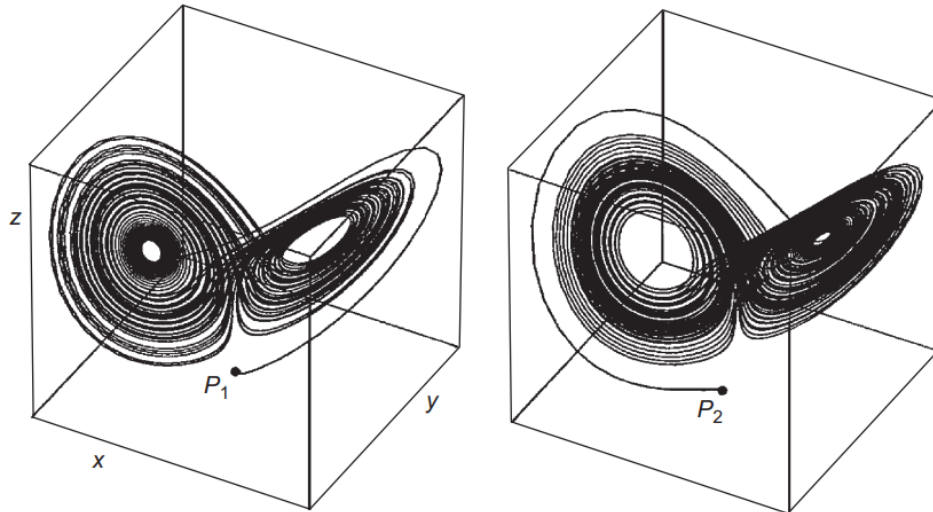


Figura 3.5: O Atrator de Lorenz. Soluções para condições iniciais $P_1 = (0, 2, 0)$ e $P_2 = (0, -2, 0)$ e parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$.

Fonte: [Hirsch et al., 2013, Figura 14.1]

Perceba que, nesse caso, o ω -limite desses pontos fica denso em uma região do espaço. Para mais detalhes, recomendamos [Hirsch et al., 2013, Capítulo 14]

Um resultado importante que auxiliará na aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson é o Critério de Dulac (ou de Bendixson-Dulac). Esse resultado também é pertinente à análise futura do modelo S.I.R. e é uma interessante consequência do Teorema de Green (veja [Stewart, 2012, Teorema 1, Seção 16.4]).

Teorema 3.13 (Teorema de Green). *Seja C uma curva fechada simples, suave e positivamente orientada em um plano e seja D a região interior delimitada por essa curva. Se f_1, f_2 são funções de (x_1, x_2) definidas em um aberto que contém D tais que suas derivadas parciais são contínuas nessa região, então*

$$\oint_C (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dA.$$

Teorema 3.14 (Critério de Dulac). *Seja $f = (f_1, f_2)$ um campo definido num aberto simplesmente conexo $E \subset \mathbb{R}^2$ tal que*

- f_1 e f_2 são continuamente diferenciáveis em E ;
- Existe $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável tal que

$$\frac{\partial (gf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (gf_2)}{\partial x_2}$$

é estritamente positivo ou estritamente negativo em todo E .

Então $T(\cdot)$ (gerado por f como na Definição 3.3) não tem órbitas periódicas em E .

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\partial(gf_1)}{\partial x_1}(y_1, y_2) + \frac{\partial(gf_2)}{\partial x_2}(y_1, y_2) > 0, \text{ para todo } y = (y_1, y_2) \in E.$$

Suponha, por contradição, que existe C órbita periódica contida em E . Note que, por um lado, considerando $C_i \subset E$ a região interna delimitada por C (pelo Teorema 3.4),

$$I := \iint_{C_i} \left[\frac{\partial(gf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(gf_2)}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 > 0.$$

Por outro lado, podemos aplicar o Teorema 3.13 e obter

$$\begin{aligned} I &:= \oint_C g(-f_2 dx_1 + f_1 dx_2) \\ &= \int_0^1 g(\gamma(t)) \langle (-f_2(\gamma(t)), f_1(\gamma(t))), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 g(\gamma(t)) \langle (-f_2(\gamma(t)), f_1(\gamma(t))), (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))) \rangle dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

em que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a curva cuja imagem é C , e na penúltima igualdade usamos o fato de que γ é solução da EDO definida pelo campo, obtendo assim uma contradição. Portanto não existe órbita periódica C . ■

Exemplo 3.15. Mostremos uma simples aplicação do Teorema 3.14 ([Doering and Lopes, 2014, Exercício 30, p.277]). Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = x(3 - 2x - 2y) =: f_1(x, y), \\ y' = y(2 - 2x - y) =: f_2(x, y). \end{cases}$$

Podemos mostrar que não existem órbitas periódicas no quadrante $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$.

De fato, definindo $g(x, y) = -\frac{1}{xy}$ para todo $(x, y) \in P$, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(gf_1)}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial(gf_2)}{\partial y}(x, y) &= \frac{-x(3 - 2x - 2y)}{xy} + \frac{-y(2 - 2x - y)}{xy} \\ &= \frac{2x^2 + y^2 + 4xy - 3x - 2y}{xy} > 0 \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in P$. Portanto, pelo Critério de Dulac, não existem órbitas periódicas em P .

4 Modelo S.I.R.

Esse último capítulo foi baseado nas referências Carrasco Moreno [2021] e López-de-la Cruz and Oliveira-Sousa [2025]. Focaremos-nos agora em aplicar toda a teoria previamente apresentada em um exemplo que, mesmo sendo teórico ainda, está claramente relacionado com um problema aplicado de interesse da população em geral. Sem mais delongas, vamos introduzir propriamente o modelo S.I.R. .

Definição 4.1. *O modelo S.I.R. é um sistema de três EDO's autônomas de primeira ordem como abaixo:*

$$(4.1) \quad \begin{cases} S' = q - \gamma \frac{S\mathcal{I}}{\mathcal{N}} - aS + b\mathcal{I}, & (4.1a) \\ \mathcal{I}' = \gamma \frac{S\mathcal{I}}{\mathcal{N}} - (a + b + c)\mathcal{I}, & (4.1b) \\ \mathcal{R}' = c\mathcal{I} - a\mathcal{R}. & (4.1c) \end{cases}$$

Mais especificamente, S , \mathcal{I} e \mathcal{R} representam respectivamente as funções real valoradas que, para cada instante de tempo $t \geq 0$, informam a quantidade de pessoas **suscetíveis**, **infectadas** e **recuperadas** em relação a uma determinada doença que acomete a população de estudo. \mathcal{N} , por sua vez, é a **população total** (que varia no decorrer do tempo), sendo expressa pela equação

$$\mathcal{N} = S + \mathcal{I} + \mathcal{R}. \quad (4.2)$$

Por fim, são assumidas constantes não negativas descritas abaixo.

- a : **taxa de mortalidade/emigração;**
- b : **taxa de reinfeção;**
- $\frac{1}{c}$: **tempo médio que um indivíduo permanece infectado;**
- q : **nascimentos/imigrações;**
- γ : **taxa de infecção.**

Com essa definição, podemos entender que o S.I.R. modela o comportamento do número de indivíduos de uma região específica (cidade, país, etc.) sob a influência de uma doença transmissível por meio da interação entre uma pessoa suscetível com uma pessoa infectada (como a gripe, por exemplo). A restrição quanto ao tipo de doença que o S.I.R. modela é evidenciada no momento em que escrevemos $\gamma S(t)\mathcal{I}(t)$, pois ao calcularmos o produto de $S(t)$ com $\mathcal{I}(t)$,

estamos considerando todas as possíveis iterações entre indivíduos suscetíveis e infectados no instante t e, ao multiplicarmos pela taxa de infecção γ obtemos, dentre todas as iterações, a quantidade de indivíduos suscetíveis que tornaram-se infectados pelo contato com um infectado. Dessa forma, para que um suscetível seja infectado, estamos assumindo interação entre as populações.

O modelo leva em conta também, para calcular a taxa de variação de \mathcal{S} , \mathcal{I} e \mathcal{R} , fatores como pessoas novas nascendo e imigrando pra a região de estudo, ou indivíduos que saem da região ou morrem (decorrente da doença ou não). Mais do que isso, o que torna o modelo apresentado diferente do S.I.R. comumente estudado é o parâmetro b . Esse permite que haja reinfeção, ou seja, um indivíduo pode ficar doente, se recuperar sem imunidade e ser infectado novamente. Doenças como o COVID-19 apresentam esse fator, então julgamos ser interessante acrescentá-lo. Para melhor entender a dinâmica entre essas populações, veja o diagrama na Figura 4.1.

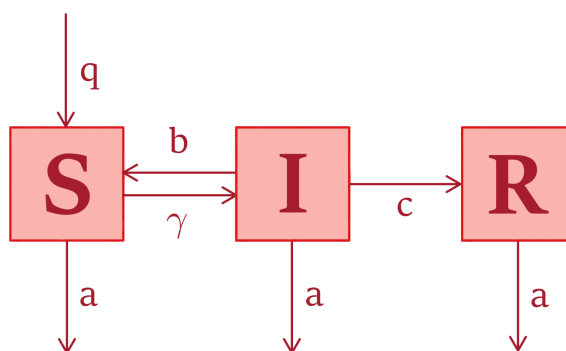


Figura 4.1: Diagrama do modelo S.I.R..

Agora que conhecemos bem o objeto de estudo desse capítulo, vamos reafirmar nosso objetivo central: constatar sob quais condições uma doença modelada pelo S.I.R. eventualmente será erradicada ou não. Por “erradicada”, referimos-nos a população de infectados ser nula ou, como veremos no futuro, ser eventualmente nula. Essa meta é interessante visto que é facilmente compreensível e de interesse comum de uma população afetada por uma doença. Evidentemente, pelo apresentado anteriormente, atingiremos nosso alvo por meio da caracterização do atrator global do semigrupo definido pelo S.I.R.. Antes disso, porém, precisamos garantir a existência de um semigrupo.

Note que, como estamos trabalhando com um problema de cunho biológico, uma restrição importante é que estamos trabalhando apenas com valores não-negativos de $\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{I}(t)$ e $\mathcal{R}(t)$ para todo $t \geq 0$ (já que não existe população negativa). Dessa forma, o espaço de fase natural em que estaremos trabalhando é o primeiro octante, em que todas as coordenadas são não-

negativas:

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\}.$$

Teorema 4.2 (Boa colocação para o S.I.R.). *Para cada condição inicial $x_0 = (\mathcal{S}_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{R}_0) \in X$, o sistema (4.1) possui uma solução inteiramente contida em X , ou seja, existe $\phi_{x_0} := (\mathcal{S}_{x_0}, \mathcal{I}_{x_0}, \mathcal{R}_{x_0}) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, X)$ em que $x_0 = \phi_{x_0}(0)$, $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{x_0}(0)$, $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{x_0}(0)$ e $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{x_0}(0)$. Além disso, a solução gera um semigrupo $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ definido como*

$$\begin{aligned} T(t) : X &\longrightarrow X \\ x_0 &\longmapsto T(t)x_0 := \phi_{x_0}(t) \end{aligned}.$$

Demonstração. Reescrevemos as equações (4.1a)-(4.1c) como

$$\mathcal{S}' = f_a(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), \quad \mathcal{I}' = f_b(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}' = f_c(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}).$$

Mostremos que $f = (f_a, f_b, f_c)$ é de classe \mathcal{C}^1 em X . Para tal, calculemos a matriz Jacobiana de f .

$$J(f) = \begin{pmatrix} -\gamma \frac{\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{R})}{\mathcal{N}^2} - a & -\gamma \frac{\mathcal{S}(\mathcal{S} + \mathcal{R})}{\mathcal{N}^2} + b & \gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}^2} \\ \gamma \frac{\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{R})}{\mathcal{N}^2} & \gamma \frac{\mathcal{S}(\mathcal{S} + \mathcal{R})}{\mathcal{N}^2} - a - b - c & -\gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}^2} \\ 0 & c & -a \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Note que, se desconsiderarmos os termos $\gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}}$ em f_a e f_b , teríamos que as derivadas parciais todas de $f_a + \gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}}$, $f_b - \gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}}$ e f_c existem e são contínuas em X e portanto f é Lipschitz (a menos desse termo). Como ocorre a divisão por \mathcal{N} , não conseguimos garantir a continuidade em $(0, 0, 0)$, dessa forma, devemos buscar uma outra forma de tratar esse fator.

Considere

$$g(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}}, & (\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Provemos que g é Lipschitz em X , munido da métrica $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$.

Seja $(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) \in X$ tal que $\mathcal{N} = \mathcal{S} + \mathcal{I} + \mathcal{R} > 0$. Como $\mathcal{S} \leq \mathcal{N}$, temos que

$$d(g(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), g(0, 0, 0)) = \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}} \leq \mathcal{I} \leq d((\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), (0, 0, 0)).$$

Sejam $(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \in X$ tais que $\mathcal{N} = \mathcal{S} + \mathcal{I} + \mathcal{R} > 0$ e $\mathcal{M} = \mathcal{U} + \mathcal{V} + \mathcal{W} > 0$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(g(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), g(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})) &= \left| \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}} - \frac{\mathcal{U}\mathcal{V}}{\mathcal{M}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}} - \frac{\mathcal{S}\mathcal{V}}{\mathcal{N}} \right| + \left| \frac{\mathcal{S}\mathcal{V}}{\mathcal{N}} - \frac{\mathcal{S}\mathcal{V}}{\mathcal{M}} \right| + \left| \frac{\mathcal{S}\mathcal{V}}{\mathcal{M}} - \frac{\mathcal{U}\mathcal{V}}{\mathcal{M}} \right| \\ &\leq \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{N}} |\mathcal{I} - \mathcal{V}| + \frac{\mathcal{S}\mathcal{V}}{\mathcal{M}\mathcal{N}} |\mathcal{M} - \mathcal{N}| + \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{M}} |\mathcal{S} - \mathcal{U}|. \end{aligned}$$

Mas $\mathcal{S} \leq \mathcal{N}$, $\mathcal{V} \leq \mathcal{M}$ e $|\mathcal{M} - \mathcal{N}| \leq |\mathcal{S} - \mathcal{U}| + |\mathcal{I} - \mathcal{V}| + |\mathcal{R} - \mathcal{W}|$, logo

$$\begin{aligned} d(g(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), g(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})) &\leq 2(|\mathcal{S} - \mathcal{U}| + |\mathcal{I} - \mathcal{V}| + |\mathcal{R} - \mathcal{W}|) \\ &\leq 2d((\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})). \end{aligned}$$

Portanto, para todo $(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \in X$, temos que $d(g(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), g(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})) \leq 2d((\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}), (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}))$, ou seja, g é Lipschitz em X e, pelo discutido anteriormente, f também o é.

Do Teorema 1.10 (ii), o S.I.R. possui a propriedade da unicidade de soluções e assim, pela Proposição 1.21 existe a solução máxima $\phi_{x_0} = (\mathcal{S}_{x_0}, \mathcal{I}_{x_0}, \mathcal{R}_{x_0})$ para (4.1) com condição inicial $(0, x_0) \in [0, +\infty[\times X$.

Verifiquemos agora que ϕ_{x_0} permanece em X para todo $t \geq 0$ e para todo $x_0 \in X$. Note que, da Definição 1.2, ϕ_{x_0} é contínua, logo, para que essa solução assuma valores negativos, ela precisa primeiramente tomar um valor nulo (pelo Teorema 3.5). Dessa forma separemos em três casos:

- Existe $t_0 \geq 0$ tal que $\mathcal{S}_{x_0}(t_0) = 0, \mathcal{I}_{x_0}(t_0) \geq 0, \mathcal{R}_{x_0} \geq 0$, então por (4.1a) $\mathcal{S}'_{x_0}(t_0) = b\mathcal{I}_{x_0}(t_0) \geq 0$;
- Existe $t_0 \geq 0$ tal que $\mathcal{S}_{x_0}(t_0) \geq 0, \mathcal{I}_{x_0}(t_0) = 0, \mathcal{R}_{x_0} \geq 0$, então por (4.1b) $\mathcal{I}'_{x_0}(t_0) = 0$;
- Existe $t_0 \geq 0$ tal que $\mathcal{S}_{x_0}(t_0) \geq 0, \mathcal{I}_{x_0}(t_0) \geq 0, \mathcal{R}_{x_0} = 0$, então por (4.1c) $\mathcal{R}'_{x_0}(t_0) = c\mathcal{I}_{x_0}(t_0) \geq 0$.

Portanto, se eventualmente a solução assumir um valor nulo em alguma de suas entradas, a entrada nula assumirá valores maiores ou iguais a esse valor nulo após esse momento, ou seja, a solução nunca será negativa (permanece em X).

Mostremos agora que a solução ϕ_{x_0} está definida para todo $t \geq 0$. Ao somarmos todas as

equações (4.1a)-(4.1c), obtemos a equação diferencial para \mathcal{N}

$$\mathcal{N}' = q - a\mathcal{N}. \quad (4.4)$$

Resolvendo (4.4) com condição inicial $\mathcal{N}(0) = \mathcal{N}_0 = \mathcal{S}_0 + \mathcal{I}_0 + \mathcal{R}_0$ por fator integrante, obtemos que $\mathcal{N}_{x_0}(t) = e^{-at}\mathcal{N}_0 + \frac{q}{a}[1 - e^{-at}]$ para todo $t \geq 0$. Perceba agora que

$$\mathcal{S}_{x_0}(t), \mathcal{I}_{x_0}(t), \mathcal{R}_{x_0}(t) \leq \mathcal{N}_{x_0}(t) = e^{-at}\mathcal{N}_0 + \frac{q}{a}[1 - e^{-at}],$$

mais ainda, quando $t \rightarrow +\infty$, $\mathcal{N}_{x_0}(t) \rightarrow \frac{q}{a}$, ou seja, eventualmente, $\mathcal{S}_{x_0}, \mathcal{I}_{x_0}, \mathcal{R}_{x_0}$ ficam limitadas por uma constante. Disso, ϕ_{x_0} não explode, pois cada uma de suas coordenadas estão limitadas por 0 e $\frac{q}{a}$, e do Corolário 1.25 (i) concluímos que ϕ_{x_0} está definida para todo $t \geq 0$.

Por fim, basta verificar que a família de aplicações $\{T(t) \mid t \geq 0\}$ definido no enunciado é de fato um semigrupo. Ele está bem definido, pela unicidade da solução e

- (i) $T(0)x_0 = \phi_{x_0}(0) = x_0$ para todo $x_0 \in X$;
- (ii) $T(t+s)x_0 = \phi_{x_0}(t+s) = \phi_{\phi_{x_0}(s)}(t) = T(t)\phi_{x_0}(s) = T(t)T(s)x_0$;
- (iii) A continuidade segue diretamente do Teorema 1.28.

No item (ii), na segunda igualdade, usamos o fato de que $g(t) := \phi_{x_0}(t+s)$ e $h(t) := \phi_{\phi_{x_0}(s)}(t)$ são ambas soluções do S.I.R. com condição inicial $x(0) = \phi_{x_0}(s)$, logo da unicidade de soluções, $g = h$. Portanto, o S.I.R. possui um semigrupo bem definido e a demonstração está finalizada. ■

Agora que possuímos uma única solução, definida para todo tempo não-negativo, para cada condição inicial, podemos estudar o comportamento dessas soluções para tirar conclusões sobre o a doença. Para tal, utilizaremos o semigrupo, que sabemos estar bem definido, que nos ajudará a compreender o comportamento assintótico dessa infecção.

Podemos começar essa análise com um fato importante apontado na demonstração anterior: a população total tende a ser constante. Mais que isso, veremos no resultado abaixo que o plano $\mathcal{B}_0 := \left\{ (x, y, z) \in X \mid x + y + z = \frac{q}{a} \right\}$ é positivamente invariante e atrai todas as soluções do Sistema (4.1).

Teorema 4.3 (Existência de atrator global para o S.I.R.). *Dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $\mathcal{B}_\varepsilon := \left\{ (x, y, z) \in X \mid x + y + z \leq \frac{q}{a} + \varepsilon \right\}$ é compacto e absorvente sob ação de $T(\cdot)$. Além disso, existe atrator global $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}_0)$ para $T(\cdot)$, em que $\mathcal{B}_0 := \left\{ (x, y, z) \in X \mid x + y + z = \frac{q}{a} \right\}$ e \mathcal{B}_0 é positivamente invariante.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como \mathcal{B}_ε é fechado e limitado, ele é compacto, mais ainda, para toda condição inicial $\mathcal{N}(0) = \mathcal{S}_0 + \mathcal{I}_0 + \mathcal{R}_0$, considerando $x_0 = (\mathcal{S}_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{R}_0)$, a solução de (4.4) é tal que $\mathcal{N}_{x_0}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{q}{a}$, então para esse $\varepsilon > 0$ fixado, existe $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tal que para todo $t \geq t_0$, vale que $\left| \mathcal{N}_{x_0} - \frac{q}{a} \right| < \varepsilon$, ou seja,

$$-\varepsilon < \mathcal{S}_{x_0}(t) + \mathcal{I}_{x_0}(t) + \mathcal{R}_{x_0}(t) + \frac{q}{a} < \varepsilon \Rightarrow \mathcal{S}_{x_0}(t) + \mathcal{I}_{x_0}(t) + \mathcal{R}_{x_0}(t) < \varepsilon - \frac{q}{a} < \frac{q}{a} + \varepsilon$$

e $T(t)x_0 = \phi_{x_0}(t) = (\mathcal{S}_{x_0}(t), \mathcal{I}_{x_0}(t), \mathcal{R}_{x_0}(t)) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Dessa forma, claramente \mathcal{B}_0 atrai todas as soluções de (4.1). Mais que isso, ele atrai todos os limitados de X , pois ele atrai todos os pontos (que implica na atração de compactos, mas como, em dimensão finita, todo limitado é pré compacto, isso resulta na atração de limitados), dessa forma $T(\cdot)$ é limitado dissipativo (veja Observação 2.23). Da Proposição 2.35 também concluímos que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.

Portanto, pelo Teorema 2.37, existe atrator global para $T(\cdot)$ caracterizado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B),$$

em que \mathcal{B} é a família dos conjuntos limitados de X . Note agora que $\omega(\mathcal{B}_0) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B)$ pois \mathcal{B}_0 é limitado de X e, por outro lado, para cada $B \in \mathcal{B}$ (podemos assumir B não-vazio), como \mathcal{B}_0 é fechado e atrai B , pelo Lema 2.31 concluímos que $\omega(B) \subset \omega(\mathcal{B}_0)$ e que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}_0)$.

Por fim, se $x_0 = (\mathcal{S}_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{R}_0) \in \mathcal{B}_0$, então $\mathcal{N}_0 = \frac{q}{a}$ e assim

$$\mathcal{N}(t) = e^{-at} \mathcal{N}_0 + \frac{q}{a} [1 - e^{-at}] = \frac{q}{a} [e^{-at} + 1 - e^{-at}] = \frac{q}{a}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Dessa forma, $\phi_{x_0}(t) \in \mathcal{B}_0$ e $T(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0$ para todo $t \geq 0$. Isso conclui a demonstração. ■

Esse teorema nos motiva a estudar agora o comportamento desse nosso sistema dinâmico no conjunto \mathcal{B}_0 (que é um subconjunto de um plano). Para tal vamos lançar mão do estudado no Capítulo 3. Antes disso, porém, vamos encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (4.1), pois eles serão fundamentais ao caracterizarmos mais precisamente o atrator global encontrado acima.

No que segue, falaremos também sobre a estabilidade desses pontos de equilíbrio. Esse tema pode ser encontrado em detalhes em [Viana and Espinar, 2011, Capítulo 8] e [Hale, 2009, Capítulo 3], porém deixaremos abaixo algumas das principais definições que usaremos nos resultados seguintes.

Definição 4.4. Considere a EDO $x' = F(x)$ e um ponto de equilíbrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1. x_0 é dito ser **estável** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda solução maximal com condição inicial $\phi(t_0) \in B_\delta(x_0)$ está definida para todo $[t_0, +\infty[$ e $\|\phi(t)\| \leq \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, +\infty[$;
2. x_0 é **exponencialmente estável** se é estável e existem $C, D > 0$ tais que toda solução maximal com condição inicial $\phi(t_0) \in B_\delta(x_0)$ satisfaz $\|\phi(t)\| \leq Ce^{-D(t-t_0)} \|\phi(t_0)\|$ para todo $t \in [t_0, +\infty[$;
3. x_0 é um **ponto de sela de tipo k** se $F'(x_0)$ tem todos seus autovalores com partes reais não nulas, sendo $k \geq 0$ deles com parte real positiva.
4. Denominamos os conjuntos abaixo da seguinte forma:

(a) $W^u(x_0) = \left\{ y \in X \mid \exists \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ solução global, } \xi(0) = y \text{ e } \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x_0 \right\}$ é o **conjunto instável de x_0** ;

(b) Para $\delta > 0$,

$W_\delta^u(x_0) = \{y \in X \mid \exists \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ solução global, } \xi(0) = y \text{ e } \xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \forall t \leq 0\}$ é um **conjunto instável local de x_0** ;

(c) $W^s(x_0) = \left\{ y \in X \mid T(t)y \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x_0 \right\}$ é o **conjunto estável de x_0** .

Exemplo 4.5. Um exemplo de ponto de equilíbrio estável mas não exponencialmente estável é o ponto $(0, 0)$ na EDO do Exemplo 2.4:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Como já discutido nesse exemplo (do Capítulo 2), as soluções são rotações em torno da origem. Dessa forma, para todo $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon$ e assim para toda condição inicial em $B_\delta((0, 0))$, a solução maximal está definida para toda a reta e, como sua imagem é uma circunferência de raio ε , sua norma está limitada por ε e portanto $(0, 0)$ é ponto de equilíbrio estável. Contudo, note que como a norma dessas soluções são constantes, elas não satisfazem a desigualdade necessária para que $(0, 0)$ seja ponto de equilíbrio exponencialmente estável.

Proposição 4.6. Considere os pontos $E_1, E_2 \in \mathcal{B}_0$ tais que

$$E_1 = \left(\frac{q}{a}, 0, 0 \right) \quad \text{e} \quad E_2 = \left(\frac{q(a+b+c)}{a\gamma}, \frac{q(\gamma-a-b-c)}{\gamma(a+c)}, \frac{cq(\gamma-a-b-c)}{a\gamma(a+c)} \right).$$

- Se $\gamma \leq a + b + c$, E_1 é o único ponto de equilíbrio de (4.1). Mais ainda, se $\gamma < a + b + c$, então E_1 é exponencialmente estável;
- Se $\gamma > a + b + c$, E_1 e E_2 são pontos de equilíbrio de (4.1), sendo E_1 um ponto de sela de tipo 1 e E_2 um ponto exponencialmente estável.

Demonstração. Os pontos de equilíbrio $(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) \in X$ são tais que

$$\begin{cases} 0 = q - \gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}} - a\mathcal{S} + b\mathcal{I}, & (4.5a) \\ 0 = \gamma \frac{\mathcal{S}\mathcal{I}}{\mathcal{N}} - (a + b + c)\mathcal{I}, & (4.5b) \\ 0 = c\mathcal{I} - a\mathcal{R}. & (4.5c) \end{cases}$$

De (4.5c) sabemos que $a\mathcal{R} = c\mathcal{I}$ e de (4.5a)+(4.5b)+(4.5c) obtemos $0 = q - a(\mathcal{S} + \mathcal{I} + \mathcal{R})$ que, por sua vez, permitem-nos concluir que

$$0 = q - a(\mathcal{S} + \mathcal{I}) - c\mathcal{I} \text{ e então } \mathcal{S} = \frac{q - c\mathcal{I} - a\mathcal{I}}{a}.$$

Dessa ultima igualdade, podemos substituir na Equação (4.5a) e chegar em

$$\begin{aligned} 0 &= q - \gamma \frac{(q - c\mathcal{I} - a\mathcal{I})\mathcal{I}}{a \left(\frac{q - c\mathcal{I} - a\mathcal{I}}{a} + \mathcal{I} + \frac{c}{a}\mathcal{I} \right)} - (q - c\mathcal{I} - a\mathcal{I}) + b\mathcal{I} \\ &= -\gamma \frac{q\mathcal{I} - c\mathcal{I}^2 - a\mathcal{I}^2}{q} + (a + b + c)\mathcal{I} \\ &= \gamma \frac{a + c}{q} \mathcal{I}^2 + (a + b + c - \gamma)\mathcal{I}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Podemos agora encontrar as raízes do polinômio de segundo grau (4.6), sendo eles: $\mathcal{I}_1 = 0$ e $\mathcal{I}_2 = \frac{q(\gamma - a - b - c)}{\gamma(a + c)}$. Para $\mathcal{I}_1 = 0$ e $\mathcal{I}_2 = \frac{q(\gamma - a - b - c)}{\gamma(a + c)}$ obtemos os pontos de equilíbrio $E_1 = (\mathcal{S}_1, \mathcal{I}_1, \mathcal{R}_1)$, $E_2 = (\mathcal{S}_2, \mathcal{I}_2, \mathcal{R}_2) \in X$ como abaixo:

$$E_1 = \left(\frac{q}{a}, 0, 0 \right) \text{ e } E_2 = \left(\frac{q(a + b + c)}{a\gamma}, \frac{q(\gamma - a - b - c)}{\gamma(a + c)}, \frac{cq(\gamma - a - b - c)}{a\gamma(a + c)} \right).$$

Claramente $\mathcal{S}_1 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{R}_1 = \frac{q}{a}$ e $\mathcal{S}_2 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{R}_2 = \frac{q}{a}$, ou seja, $E_1, E_2 \in \mathcal{B}_0$. Note ainda que no caso em que $\gamma \leq a + b + c$, obtemos que $\mathcal{I}_2, \mathcal{R}_2 < 0$, ou seja, E_2 não faz sentido biologicamente. Dessa forma, dizemos que nesse caso, apenas E_1 é ponto de equilíbrio.

Para estudarmos a estabilidade, atentemos-nos à Equação (4.3). Se $\gamma \leq a + b + c$, os autovalores de (4.3) avaliada em E_1 são $\lambda_1 = -a < 0$ (com multiplicidades algébrica e geométrica igual a dois) e $\lambda_2 = \gamma - a - b - c \leq 0$ (com multiplicidades algébrica e geométrica igual a um).

Dessa forma, por [Viana and Espinar, 2011, Proposição 8.6], E_1 é exponencialmente estável quando $\gamma \leq a+b+c$ (note que, se $\gamma = a+b+c$, por [Viana and Espinar, 2011, Proposição 8.5], E_1 é estável apenas). Por outro lado, se $\gamma > a+b+c$ o autovalor $\lambda_2 = \gamma - a - b - c > 0$ é positivo e assim E_1 se torna ponto de sela de tipo um. Mais ainda, pelo Critério de Routh–Hurwitz (veja [Martcheva, 2015, Teorema 5.1]), a Matriz (4.3) avaliada em E_2 tem polinômio característico com todas as raízes negativas (ou com partes reais negativas), logo por [Viana and Espinar, 2011, Proposição 8.6] novamente, E_2 é exponencialmente estável. ■

Voltando-nos ao plano \mathcal{B}_0 , note que como $\mathcal{S} + \mathcal{I} + \mathcal{R} = \frac{q}{a}$, podemos escrever $\mathcal{R} = \frac{q}{a} - \mathcal{S} - \mathcal{I}$ e então a população de recuperados da doença está unicamente determinado pela população de suscetíveis e infectados no plano. Do fato de \mathcal{B}_0 ser positivamente invariante,

$$\begin{aligned} T(\cdot)(t)|_{\mathcal{B}_0} : \quad \mathcal{B}_0 &\longrightarrow \mathcal{B}_0 \\ x_0 = (\mathcal{S}_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{R}_0) &\longmapsto \left(\mathcal{S}_{x_0}(t), \mathcal{I}_{x_0}(t), \frac{q}{a} - \mathcal{S}_{x_0}(t) - \mathcal{I}_{x_0}(t) \right) \end{aligned}$$

Dessa forma podemos trabalhar apenas com as Equações (4.1a) e (4.1b) e definir o fluxo (perceba que agora estamos em \mathbb{R}^2) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f := (\mathcal{S}', \mathcal{I}') : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mathcal{S}_0, \mathcal{I}_0) &\longmapsto \left(q - \gamma \frac{a\mathcal{S}_0\mathcal{I}_0}{q} - a\mathcal{S}_0 + b\mathcal{I}_0, \gamma \frac{a\mathcal{S}_0\mathcal{I}_0}{q} - (a+b+c)\mathcal{I}_0 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Teorema 4.7. *O atrator \mathcal{A} do semigrupo $T(\cdot)$ gerado pelo modelo S.I.R. (4.1) é dado pelo conjunto*

- (i) $\{E_1\}$, se $\gamma \leq a + b + c$;
- (ii) $\{E_1, E_2\} \cup \{\tilde{\xi}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ em que ξ é solução global de $T(\cdot)$ tal que $\alpha(\tilde{\xi}) = E_1$ e $\omega(\tilde{\xi}) = E_2$, se $\gamma > a + b + c$.

Demonstração. (i) Se $\gamma < a + b + c$, note que do fato de $\mathcal{S} \leq \mathcal{N}$ e da Equação (4.1b), temos

para cada condição inicial $(\mathcal{S}(0), \mathcal{I}(0), \mathcal{R}(0)) = (\mathcal{S}_0, \mathcal{I}_0, \mathcal{R}_0) \in X$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}' &\leq \mathcal{I}(\gamma - (a + b + c)) =: \mathcal{I}\alpha \Rightarrow \mathcal{I}(t) \leq e^{\alpha t} |\mathcal{I}_0| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \\ \mathcal{R}' &= c\mathcal{I} - a\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}(t) = e^{-at}\mathcal{R}_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)}\mathcal{I}(s)ds \\ &\Rightarrow |\mathcal{R}(t)| \leq e^{-at}\mathcal{R}_0 + \int_0^t e^{-at+s(a+\alpha)}ds \\ &\Rightarrow |\mathcal{R}(t)| \leq e^{-at}\mathcal{R}_0 + \frac{1}{a+\alpha} \int_{-at}^{t\alpha} e^u du \\ &\Rightarrow |\mathcal{R}(t)| \leq e^{-at}\mathcal{R}_0 + \frac{1}{a+\alpha} (e^{\alpha t} - e^{-at}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{S}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{q}{a}$ e então $(\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t), \mathcal{R}(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} E_1$.

Para $\gamma = a + c + c$, analogamente ao feito acima, obtemos

$$\mathcal{I}' \leq 0 \Rightarrow \mathcal{I} \equiv 0 \text{ e } |\mathcal{R}| \leq e^{-at}\mathcal{R}_0 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Portanto $\mathcal{S}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{q}{a}$ e $(\mathcal{S}(t), \mathcal{I}(t), \mathcal{R}(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} E_1$. Dessa forma, se $\gamma \leq a + b + c$, então $\mathcal{A} = \{E_1\}$.

(ii) Assuma que $\gamma > a + b + c$. Do Teorema da Variedade Instável (ver [Hale, 2009, Teorema 6.1]), como E_1 é um ponto de sela do tipo 1, existe uma única solução global $\tilde{\xi}$ tal que $W_\delta^u(E_1) = \gamma(\tilde{\xi}) \cup \{E_1\}$ para algum $\delta > 0$. Do mesmo resultado, temos também que $\gamma(W_\delta^u(E_1)) = W^u(E_1)$, ou seja,

$$W^u(E_1) = \gamma(\tilde{\xi}) \cup \{E_1\}. \quad (4.8)$$

Além disso, sabemos que $\omega(\tilde{\xi}) = E_2$, de fato, caso $\omega(\tilde{\xi}) = E_1$, teríamos que $\gamma(\tilde{\xi}) \subset W^s(E_1) = \{(\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R}) \in X \mid \mathcal{I} = 0\}$ ¹, mas $W^s(E_1)$ e $W^u(E_1)$ são invariantes por $T(\cdot)$ e são disjuntos (a menos da solução constante igual a E_1), logo obteríamos uma contradição.

Uma vez provada a existência de $\tilde{\xi}$, queremos mostrar que $\mathcal{A} = \overline{\gamma(\tilde{\xi})}$. Perceba que $\overline{\gamma(\tilde{\xi})} \subset \mathcal{A}$ pelo Corolário 2.18. Agora considere $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ solução global limitada arbitrária e $\gamma(\xi) \subset \mathcal{A}$ sua órbita global. Primeiramente, observemos que o S.I.R. não possui órbitas periódicas em \mathcal{B}_0 . Para tal, apliquemos o critério de Dulac para o fluxo (4.7) com a função $g(\mathcal{S}, \mathcal{I}) = \frac{1}{\mathcal{I}}$, ou

¹ Isso é facilmente perceptível, uma vez que no caso de $\mathcal{I} \equiv 0$, analogamente à conta feita no caso $\gamma = a + b + c$, concluímos que as soluções tendem a E_1 quando $t \rightarrow +\infty$.

seja

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (gf_1)}{\partial \mathcal{S}} + \frac{\partial (gf_2)}{\partial \mathcal{I}} \right) (\mathcal{S}, \mathcal{I}) &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} \left(\frac{q}{\mathcal{I}} - \gamma \frac{a\mathcal{S}}{q} - a \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{I}} + b \right) + \frac{\partial}{\partial \mathcal{I}} \left(\gamma \frac{a\mathcal{S}}{q} - (a + b + c) \right) \\ &= -\frac{a}{q} - \frac{a}{\mathcal{I}} + 0 \\ &< 0 \text{ para todo } (\mathcal{S}, \mathcal{I}) \in \mathcal{B}_0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.14, não existem órbitas periódicas em \mathcal{B}_0 . Assim, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson na sua versão com α -limites (lembramos-nos da Observação 3.11) aplicado a \mathcal{B}_0 , temos que $\alpha(\xi) = E_1$, ou $\alpha(\xi) = E_2$ ou $\alpha(\xi) = \overline{\gamma(\tilde{\xi})}$.

- Caso $\alpha(\xi) = E_1$, então $\gamma(\xi) \subset W^u(E_1)$, logo $\xi \equiv E_1$ ou existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t_0) \neq E_1$;
 - Se $\xi \equiv E_1$, $\gamma(\xi) \subset \overline{\gamma(\tilde{\xi})}$ e concluímos;
 - Se existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\xi(t_0) \neq E_1$, então por (4.8), $\xi(t_0) \in \gamma(\tilde{\xi})$ e pela invariância de $W^u(E_1)$, $\gamma(\xi) = \gamma(\tilde{\xi})$ e novamente concluímos;
- Caso $E_2 \in \alpha(\xi)$, como E_2 é exponencialmente estável (pela Proposição 4.6), $\xi \equiv E_2$ e também concluímos.

Portanto, em qualquer caso, obtemos que $\gamma(\xi) \subset \overline{\gamma(\tilde{\xi})}$ e então $\mathcal{A} \subset \overline{\gamma(\tilde{\xi})}$. ■

Observação 4.8. *Podemos agora definir o número básico de reprodução como*

$$R_0 := \frac{\gamma}{a + b + c},$$

que representa a média de indivíduos suscetíveis que um indivíduo infectado pode infectar durante o período de infecção. Sabemos então que $\gamma \leq a + b + c$ se, e somente se, $R_0 \leq 1$ e conseguimos entender a dinâmica do S.I.R. por essa outra ótica.

Uma vez que temos o Teorema 4.7, podemos finalmente responder a pergunta central do trabalho, postulada na introdução: sob quais condições uma doença, modelada pelo S.I.R., acabará eventualmente ou não? Do fato de que a caracterização do atrator está unicamente determinada pela relação entre os parâmetros γ, a, b e c obtemos uma clara descrição do futuro da doença apenas analisando esse números reais. No caso, obtemos que, se $\gamma \leq a + b + c$ (ou $R_0 \leq 1$), então a doença acaba e, caso contrário, ($\gamma > a + b + c$, ou $R_0 > 1$) a doença nunca acaba (pois na Proposição 4.6 a população de infectados de E_2 é positiva).

É razoável fazermos essas afirmações dadas as nossas hipóteses, basta nos recordarmos que um atrator atrai limitados. A medida que o tempo passa, as populações de estudo (suscetíveis, infectados e recuperados) se aproximam (em quantidade de indivíduos) da quantidade descrita pelo atrator. Isso ocorre do fato de que estamos supondo que uma realização dessa doença é uma solução (para uma condição inicial) do Sistema de EDO's (4.1), então ao evoluir o tempo, caminhamos sobre a solução que, por sua vez, é atraída pelo atrator (talvez a doença nunca chegue a ter exatamente a população descrita no atrator, pois na realidade trabalhamos com tempo finito, porém podemos ficar arbitrariamente próximos desse valor teórico dado tempo suficiente).

4.1 Simulação numérica

Para finalizarmos a seção, traremos alguns exemplos numéricos que facilitarão o entendimento das conclusões que tiramos do Teorema 4.7. Para tal, vamos calcular numericamente soluções para o Sistema (4.1). Nessa análise, utilizamos a linguagem de programação Júlia e o pacote DifferentialEquations. Segue abaixo o código usado para essas simulações.

```

1  using DifferentialEquations, Plots
2
3  function sir(du, u, p, t)
4      a, b, c,  $\gamma$ , q = p
5      S, I, R = u
6      N = S + I + R
7      du[1] = q - ( $\gamma$ *S*I)/N - a*S + b*I
8      du[2] = ( $\gamma$ *S*I)/N - (a + b + c)*I
9      du[3] = c*I - a*R
10 end
11
12 function solve_sir_3d(u_0, t_interval, a, b, c,  $\gamma$ , q)
13     u_0_f64 = Float64.(u_0)
14     p_f64 = Float64[a, b, c,  $\gamma$ , q]
15     prob = ODEProblem(sir, u_0_f64, t_interval, p_f64)
16     sol = solve(prob)
17
18     S = [u[1] for u in sol.u]
19     I = [u[2] for u in sol.u]

```

```

20     R = [u[3] for u in sol.u]
21
22     x0, y0, z0 = S[1], I[1], R[1]
23     texto_ponto = "($ (round(x0, digits=2)),
24     $(round(y0, digits=2)), $(round(z0, digits=2)))"
25
26     plt = plot3d(S, I, R,
27     xlabel = "Suscetíveis", ylabel = "Infectados",
28     zlabel = "Recuperados",
29     label = "Trajetória", lw = 2, color = :red,
30     legend = :topright)
31
32     scatter3d!([x0], [y0], [z0], label = texto_ponto,
33     color=:black, ms=8)
34
35     return plt
36 end
37
38 function plot_sir_overlapped(u_0, t_interval, a, b, c,  $\gamma$ , q)
39     u_0_f64 = Float64.(u_0)
40     p_f64 = Float64[a, b, c,  $\gamma$ , q]
41     prob = ODEProblem(sir, u_0_f64, t_interval, p_f64)
42     sol = solve(prob)
43
44     t = sol.t
45     S = [u[1] for u in sol.u]
46     I = [u[2] for u in sol.u]
47     R = [u[3] for u in sol.u]
48     N = [s + i + r for (s, i, r) in zip(S, I, R)]
49     N_eq = q / a
50
51     plt = plot(
52     t, S, label = "Suscetíveis", color = :blue, lw = 2,
53     xlabel = "Tempo (dias)", ylabel = "População",
54     legend = :right)

```

```

55     plot!(t, I, label = "Infectados", color = :red, lw = 2)
56     plot!(t, R, label = "Recuperados", color = :green,
57         lw = 2)
58     plot!(t, N, label = "População Total", color = :gray,
59         lw = 2, linestyle = :dash)
60
61     tick_vals, tick_labels = Plots.yticks(plt)[1]
62     if !(N_eq in tick_vals)
63         push!(tick_vals, N_eq)
64         push!(tick_labels, "q/a")
65     end
66     sorted = sortperm(tick_vals)
67     yticks!(plt, (tick_vals[sorted],
68         tick_labels[sorted]))
69 end

```

Nas três simulações que fizemos, consideramos a população inicial $\mathcal{S}_0 = 15$, $\mathcal{I}_0 = 10$ e $\mathcal{R}_0 = 2$ e parâmetros $a = 1.5$, $b = 0.5$, $c = 0.7$ e $q = 10.0$, sendo γ o único valor alterado entre os diferentes gráficos.

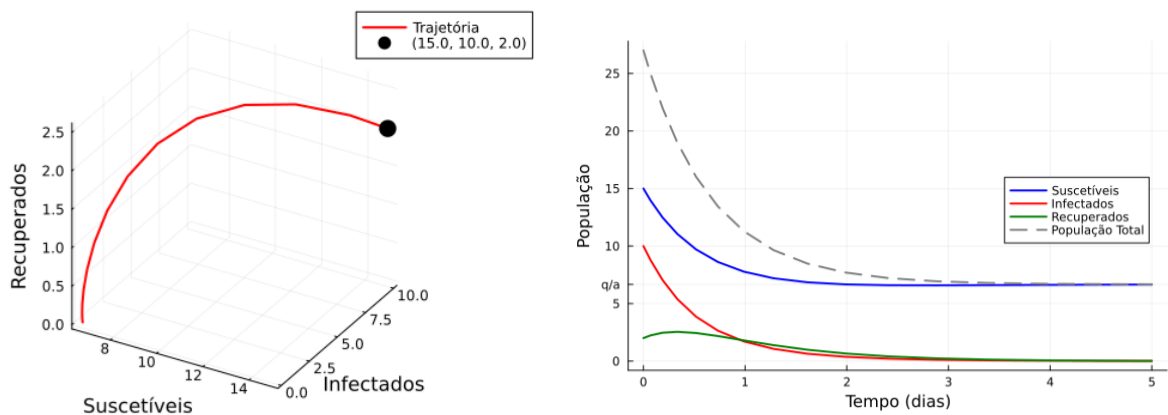


Figura 4.2: Simulação do S.I.R. com $\gamma = 1.5$

Na Figura 4.2 temos que $\gamma < a + b + c$, logo, como esperado, obtemos que as populações de recuperados e infectados tendem à zero, enquanto a população de suscetíveis tende à $\frac{q}{a}$. Já nas Figuras 4.3 e 4.4, $\gamma > a + b + c$, então observamos que a população de infectados não se anula. Podemos ainda notar que, mesmo no caso em que a doença não acaba, existe diferença significativa no comportamento das soluções a depender da magnitude do parâmetro

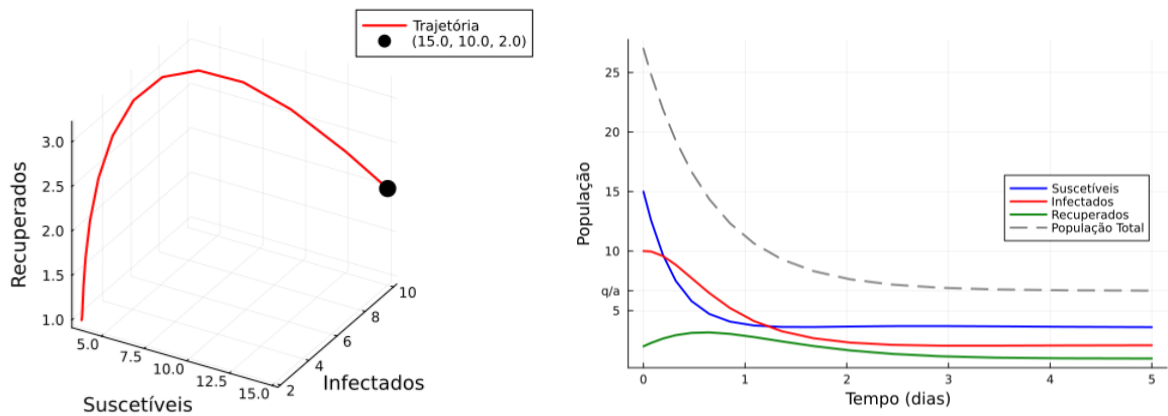


Figura 4.3: Simulação do S.I.R. com $\gamma = 5.0$

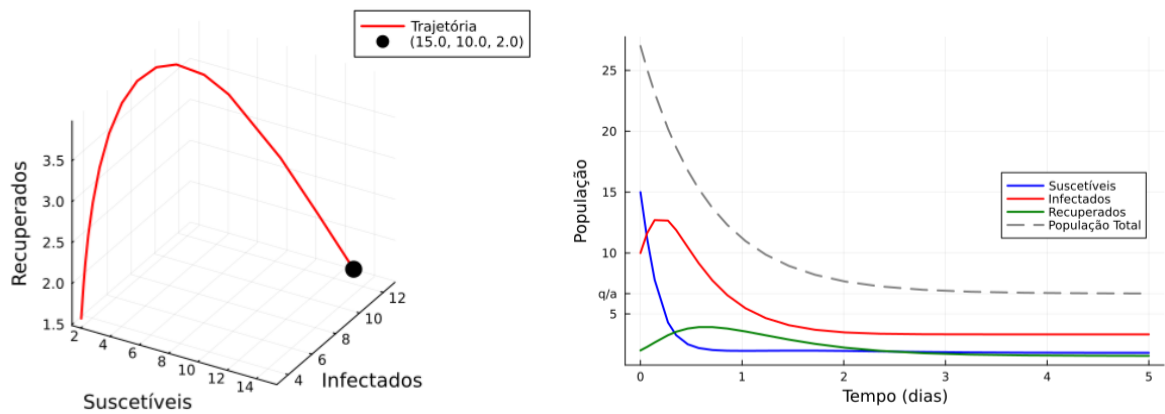


Figura 4.4: Simulação do S.I.R. com $\gamma = 10.0$

γ . Se $\gamma = 5.0$, notamos que a população de suscetíveis consegue se recuperar após a queda brusca inicial, posicionando-se acima da curva de infectados a longo prazo. Já no caso em que $\gamma = 10.0$, o número de infectados cresce e obtemos uma população com maioria de infectados. Isso evidencia que, mesmo que não consigamos diminuir a taxa de transmissão ao nível de erradicar a doença, é importante tomar medidas para diminuí-la o máximo possível, uma vez que isso garante uma população saudável maior (e infectada menor) ao longo prazo.

Conclusão

O estudo aprofundado do modelo biológico S.I.R. trouxe importantes conclusões práticas: uma doença modelada pelo S.I.R. é erradicada se $\gamma \leq a + b + c$ e não acaba se $\gamma > a + b + c$. Além disso, encontramos diversas aplicações interessantes para as teorias de EDO's, atratores e campos planares, tanto a nível teórico como prático (vide os teoremas da Seção 4). Dessa forma, é importante continuarmos estudando a teoria de equações diferenciais e suas aplicações, tanto no âmbito matemático em si, como em ambientes diferentes e nos mais diversos escopos, como na epidemiologia com a modelagem da transmissão de doenças.

É válido, porém, questionar quais doenças reais podem ser descritas pelo nosso modelo (ou outros). Isso é a principal motivação para continuarmos o estudo do S.I.R. . Podemos, por exemplo, considerar o caso não autônomo, em que um ou mais dos parâmetros γ, a, b, c ou q sejam não contantes, e dependam do tempo; adicionar mais equações, que descrevem outras populações, como por exemplo, uma população B que representa os recuperados sem imunidade (ao invés de considerar apenas uma taxa de reinfeção, como fizemos aqui); implementar ruídos de cunho estocástico para eventuais migrações ou mortes imprevisíveis; modificar o tempo de infecção com retardos que representam o caso da doença demorar a apresentar sintomas etc.

Adicionando essas ou outras modificações ao nosso modelo, esperamos conseguir abranger um escopo cada vez mais geral de doenças e poder tirar conclusões mais precisas sobre o mundo real. Todavia, é evidente que, a depender do modelo que consideramos, as estratégias usadas nesse trabalho deverão ser modificadas, aprofundadas ou até mesmo descartadas, abrindo espaço para outras teorias e métodos que também buscam entender qualitativamente esse problema.

Referências

- É. R. Aragão-Costa. Sistemas gradientes, decomposição de morse e funções de Lyapunov sob perturbação. *Universidade de São Paulo*, Tese de doutorado, 2012.
- M. C. Bortolan, A. N. Carvalho, and J. A. Langa. *Attractors under autonomous and non-autonomous perturbations*, volume 246. American Mathematical Soc., 2020.
- F. S. Botelho. *Functional analysis, calculus of variations and numerical methods for models in physics and engineering*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2021.
- R. Carrasco Moreno. Modelos matemáticos que describen la evolución de epidemias. 2021.
- M. P. Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- C. I. Doering and A. O. Lopes. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA, 2014.
- J. K. Hale. *Ordinary differential equations*. Courier Corporation, 2009.
- J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Number 25. American Mathematical Soc., 2010.
- P. R. Halmos. *Teoria ingênua dos conjuntos*. Editora Ciência Moderna, 2001.
- M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2013.
- E. L. Lima. *Análise real*, volume 2. Impa Rio de Janeiro, 2004.
- J. López-de-la Cruz and A. N. Oliveira-Sousa. Sir models with vital dynamics, reinfection, and randomness to investigate the spread of infectious diseases. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 140:108359, 2025.
- M. Martcheva. *An introduction to mathematical epidemiology*, volume 61. Springer, 2015.
- A. N. Oliveira-Sousa. Sistemas dinâmicos autônomos. *PETMAT UnB*. <https://mat.unb.br/pet/Publica%C3%A7%C3%B5es.html>, 2016. Acessado em: 6 de Junho de 2025.
- J. Stewart. *Calculus: early transcendentals*. Cengage learning, 2012.
- M. Viana and J. Espinar. Equações diferenciais: Uma abordagem de sistemas dinâmicos. <https://edoimpa.br/Livro>, 2011. Acessado em: 6 de Junho de 2025.