



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Saldanha Streibel

Soluções Topologicamente Triviais em Modelos com Potencial Não Analítico

Florianópolis
2025

João Saldanha Streibel

**Soluções Topologicamente Triviais em Modelos com Potencial Não
Analítico**

Tese de doutorado apresentada para o Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Doutor em Física Matemática e Teoria de Campos.

Orientado: Pawel Klimas.

Florianópolis
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Saldanha Streibel, João
Soluções Topologicamente Triviais em Modelos com
Potencial Não Analítico : Soluções Topologicamente Triviais
em Modelos com Potencial Não Analítico / João Saldanha
Streibel ; orientador, Pawel Klimas, 2025.
137 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Física. 2. Modelo signum-Gordon. 3. Massa espectral.
4. Potenciais não analíticos. 5. Soluções analíticas quase
exatas. I. Klimas, Pawel. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III.
Título.

João Saldanha Streibel

Soluções Topologicamente Triviais em Modelos com Potencial Não Analítico

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Lucas Nicolao
Universidade Federal de Santa Catarina

Paulo Eduardo Gonçalves de Assis
Universidade Federal de Catalão

Tiago Nunes
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre/doutor em Física.

Natalia Vale Asari
Pós-Graduação

Pawel Klimas
Orientador

Florianópolis, Dia 5 do mês de Agosto de 2025

Dedicado aos meus pais, à minha esposa Fernanda e à
nossa filha Giovanna, cuja primeira palavra foi “is-tei”,
estrela.

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo *sopro*.

À minha filha Giovanna por me ensinar o significado de amor incondicional. À minha esposa Fernanda por ser a melhor mãe do mundo pra nossa Giovanna, e melhor parceira de vida que eu poderia sonhar.

À minha mãe, pelo amor incondicional. Ao meu pai por todo o incentivo, desde sempre, na filosofia sobre os detalhes do mundo natural.

À minha irmã, cunhado e sobrinhos/afilhados, por todos os finais de semana em família, e por todo acolhimento e carinho em tempos difíceis. À minha tia Mariane, pelas conversas sobre Python.

Ao meu orientador, Pawel Klimas, por me apresentar essa classe de teorias de campo não diferenciáveis, e por nosso trabalho conjunto. Aos meus colegas Josué e JP, pela paixão compartilhada pelos mistérios do mundo físico.

RESUMO

Estudamos setores topologicamente triviais de teorias de campo com potenciais não analíticos, em torno de seu vácuo. Concentramo-nos em mínimos do tipo $|\phi|$ para campos reais semelhantes a Klein-Gordon, levando ao chamado modelo de **signum-Gordon**. Derivamos várias formas analíticas de soluções para esse modelo. Em particular, estendemos as ondas de choque já conhecidas em $(1 + 1)$ dimensões (Arodz et al. [2006]) a setores com simetria esférica em $d = 2$ e $d = 3$ dimensões espaciais – fortemente corroborados via métodos numéricos –, e construímos um arcabouço consistente para dimensões espaciais arbitrárias $d > 3$. Em seguida, utilizando métodos perturbativos, mostramos que o campo, por vezes considerado ‘ultramasivo’, exibe um regime de comportamento livre semelhante ao de altas energias do modelo de Klein-Gordon. Essa análise permitiu derivar uma expressão analítica para a **massa espectral** do modelo, que depende unicamente da amplitude de uma onda incidente. Isso evidencia uma quebra da simetria global de escala do modelo. Por fim, apresentamos métodos inéditos para resolver suas equações de Euler-Lagrange por meio de mapeamentos padrão de equações diferenciais para equações algébricas no espaço de Fourier-Bessel. Nessa abordagem, o termo associado ao potencial é tratado como uma contribuição não homogênea, construída à partir de um *ansatz* inspirado em Arodz et al. [2008]; esses procedimentos viabilizaram a obtenção de **soluções analíticas quase exatas** em $d = 3$ e estabeleceram as bases para generalizações a dimensões arbitrárias.

Palavras-chave: modelo signum–Gordon; massa espectral; potenciais não analíticos; soluções analíticas quase exatas.

ABSTRACT

We study topologically trivial sectors of field theories with non-analytic potentials around their vacuum. We focus on $|\phi|$ -type minima for real fields analogous to the Klein–Gordon field, leading to the so-called **signum–Gordon** model. We derive several analytical solution families for this model. In particular, we extend the shock-wave solutions known in $(1 + 1)$ dimensions (Arodz et al. [2006]) to spherically symmetric sectors in $d = 2$ and $d = 3$ spatial dimensions, and we construct a consistent framework for arbitrary spatial dimensions $d > 3$. Next, using perturbative methods, we show that the field—sometimes referred to as “ultramasive”—exhibits a free-like regime analogous to the high-energy behavior of the Klein–Gordon model. This analysis allows us to derive an analytical expression for the model’s **spectral mass**, which depends solely on the amplitude of an incident wave and thus demonstrates a breaking of the model’s global scale symmetry. Finally, we present novel methods for solving its Euler–Lagrange equations via standard mappings from differential to algebraic equations in Fourier–Bessel space. In this approach, the potential term is treated as a non-homogeneous contribution constructed from an ansatz inspired by Arodz et al. [2008]; these procedures enable the derivation of **quasi-exact analytical solutions** in $d = 3$ and lay the groundwork for generalizations to arbitrary dimensions.

Keywords: signum–Gordon model; spectral mass; non-analytic potentials; *quasi-exact* analytic solutions.

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| 1.1.1 Modelo físico de pêndulos acoplados, utilizado para demonstrar a formação de kinks e antikinks compactos. Imagem capturada por H. Arodz. | 22 |
| 1.1.2 Sistema de pêndulos invertidos sob ação da gravidade e acoplados por forças elásticas. | 22 |
| 1.1.3 (a) Potencial da função interpoladora ϕ que modela o sistema de pêndulos. (b) Potencial no modelo desdobrado (auxiliar). | 25 |
| 1.3.1 Representação gráfica das funções ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 , constituintes do oscillon mais elementar no intervalo $[0, 1]$. Os polinômios com tilde são definidos pela relação $\tilde{\psi}_k(t, x) \equiv \psi_k(t, 1 - x)$ | 30 |
| 1.3.2 Evolução dos oscillons: velocidades $V = 0.2$ e $V = 0.8$ registradas em $t = 0.12$ | 31 |
| 1.3.3 Construção de um oscillon generalizado | 31 |
| 1.3.4 Espalhamento de oscillons ($V = 0.4$, $\alpha = 0$): diagramas de Minkowski mostrando (a) a fase pré-espalhamento e (b) a fase pós-encontro dos suportes. | 33 |
| 1.3.5 Espalhamento de oscillons básicos $v = 0$ em configuração inicial antissimétrica: (a) velocidade $V = 0.5$, fase $\alpha = 0$; (b) velocidade $V = 0.7$ e fase $\alpha = 0$ | 34 |
| 1.3.6 Espalhamento de oscillons básicos $v = 0$ em configuração inicial simétrica: (a) velocidade $V = 0.093$, fase $\alpha = 0.414$; (b) velocidade $V = 0.093$ e fase $\alpha = 0.914$ | 34 |
| 1.4.1 Onda de choque simétrica em 1+1 dimensões para $a_0 = 1$. (a) Soluções parciais W_k . (b) Solução $\phi(t, x)$ para $t = 6.5$ | 36 |
| 1.4.2 (a) Espalhamento de oscillons simétricos gerando "jets", precedido por uma onda de choque. (b) Representação de uma onda de choque exata. | 37 |
| 1.4.3 Formação de onda de choque a partir de condições iniciais: (a) com $\varepsilon = 10^{-6}$, (b) com $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ | 38 |
| 1.4.4 Comparativo de ondas de choque: (a) e (c) originadas no espalhamento de oscillons, (b) e (e) efeito da evolução temporal de condições iniciais com perfil triangular. | 40 |
| 1.5.1 Colisão oscillon-kink. Fonte: Hahne and Klimas [2022] | 42 |

| | |
|---|----|
| 1.5.2 Espalhamento kink-antikink para $v = 0.75$. Esquerda: densidade hamiltoniana. Direita: ampliação da diferença entre o valor do campo e o vácuo -2 , ou seja, $\eta(t, x) + 2$, para a região dentro do retângulo verde no painel direito. Fonte: Hahne and Klimas [2024a]. | 44 |
| 1.6.1 (a) Q-ball com $l = 0$, (b) Q-ball com $l = 1$. (c) Q-shell com $l = 10$. Fonte: Klimas and Livramento [2017]. | 48 |
| 2.3.1 (a) Soluções parciais $W_k(z)$ e (b) a onda de choque em $t = 6.0$ em duas dimensões espaciais. | 60 |
| 2.4.1 (a) Soluções parciais $W_k(z)$ e (b) a seção da onda de choque em $x^3 = 0$ em $t = 6.0$ em três dimensões espaciais. | 63 |
| 2.5.1 Soluções numéricas fundamentais do oscilador harmônico. (a) Solução retardada $D_R(t)$ e (b) solução avançada $D_A(t)$ para $\omega = 2.0$, $\varepsilon = 0.005$. Para melhor visibilidade, em ambos os painéis, a força delta regularizada $\delta_\varepsilon(t)$ foi dividida por um fator 10. | 66 |
| 2.5.2 Solução numérica para $\phi(z)$ na Equação 2.1.9 para o caso $n = 2$, $W(0) = \frac{2}{3}$ e a função delta aproximada pela versão regularizada $\delta(z) \approx \delta_\varepsilon(z)$ ($\varepsilon = 10^{-6}$). (a) Vista ampliada da solução próxima a $z = 0$. (b) Solução completa obtida primeiro resolvendo a Equação 2.5.2 (linha preta) e, em seguida, a Equação 2.1.9 (linha tracejada vermelha). O ponto de junção entre as duas soluções é $z_m = -0.3$. A solução analítica é representada pela linha azul fina. | 68 |
| 2.6.1 Evolução numérica em um cenário em que o valor do campo é inicialmente constante em $W(0) = \frac{2}{3}$ (representado pelo patamar) em todo o espaço (exceto na região do cone de luz). Dentro do cone de luz do evento $(t, r) = (0, 0)$, o campo é liberado para evoluir. A barra de cores e a altura representam o valor do campo. A discretização de malha utilizada difere da simetria ideal analítica, mas o impacto mínimo observado na simulação sugere acúmulo desprezível de erro numérico. | 71 |
| 2.6.2 Simulação de referência para uma onda de choque com descontinuidade $W(0) = 2/3$, no tempo $t = 7.5$. A barra de cores e a altura representam o valor do campo. | 72 |

2.6.3 (a) Comparação entre um corte do perfil da onda de choque obtido por nossa simulação (em $y = 0$, $t = 7.25$) e a solução analítica para a onda de choque. (b) A derivada temporal do perfil de onda, tanto da solução numérica (em $y = 0$, $t = 7.25$) quanto da solução analítica. 72

2.6.4 Comportamento da solução de onda de choque em duas dimensões espaciais ($n = 2$). (a) Seção espaço-tempo (tx) onde a cor representa o valor da solução. (b) Evolução temporal da razão entre a energia obtida na simulação numérica e a energia teórica (solução analítica) no interior da região de choque. Os picos iniciais nessa razão provavelmente estão associados a erros numéricos provenientes da inclusão ou exclusão de certos pontos de grade (células quadradas discretas) no processo de integração de energia na simulação. 73

2.6.5 Estágios iniciais do enfraquecimento da onda de choque após sua fonte de energia ser desligada. A linha horizontal em preto indica o momento ($t = 2.00$) em que a condição (2.6.2), análoga a um termo de força delta, é removida. As linhas diagonais em vermelho representam o limite entre a região influenciada pela força delta (antes de $t = 2.00$) e a região onde ela não está mais ativa (após $t = 2.00$). Tais linhas aparecem em pares próximos e paralelos, separados por 2ε , onde ε é um parâmetro relacionado ao método específico usado para representar a função delta. 74

2.6.6 Os painéis (a) e (b) retratam os estágios iniciais do enfraquecimento da onda de choque após sua fonte de energia ser desligada. A linha preta horizontal indica o momento ($t = 2.00$) em que a condição (2.6.2), análoga a um termo de força delta, é removida. As linhas diagonais em vermelho representam o limite entre a região influenciada pela força delta (antes de $t = 2.00$) e a região onde ela não está mais ativa (após $t = 2.00$). Essas linhas aparecem em pares próximos e paralelos, separados por 2ε , onde ε é um parâmetro relacionado ao método específico de representação da função delta. Os painéis (c) e (d) mostram instantâneos do campo em tempos posteriores: $t = 10$ (c) e $t = 20$ (d). Note a perda gradual de simetria (isotropia) na distribuição do campo ao longo do tempo, visível sobretudo em (d). 75

3.2.1 A expressão $f(x) := -\partial_x^2 \varphi + V'(\varphi)$ avaliada em $t = 0$ para a configuração de campo da Expressão 3.2.1. Linhas sólidas representam o caso SG, $f_1(x) = A_0 k_0^2 \cos(k_0 x) + \text{sign}(\cos(k_0 x))$, enquanto linhas tracejadas correspondem ao caso da onda livre, $f_2(x) = A_0 k_0^2 \cos(k_0 x)$. (a) Caso de número de onda pequeno: $A_0 k_0^2 = 10^{-1}$, (b) Caso de número de onda grande: $A_0 k_0^2 = 10$. Aqui, $A_0 = 1$ para ambos os casos. A crescente concordância entre as duas curvas para valores maiores de $A_0 k_0^2$ indica propagação livre com relação de dispersão $\omega_0 \simeq \pm k_0$. Note que, mesmo para $A_0 k_0^2 = 10$, considerado relativamente pequeno, o comportamento linear predomina. 81

3.2.2 Amplitudes do campo e dos modos de Fourier no tempo final $t = 30$ para a evolução do campo SG com a condição inicial da Expressão 3.2.1. Os painéis (a) e (b) mostram, respectivamente, os valores do campo SG e as amplitudes dos modos de Fourier para a condição inicial da Expressão 3.2.1 com $A_0 k_0^2 = 10^4$. Os painéis (c) e (d) mostram os resultados correspondentes para $A_0 k_0^2 = 1$ 82

3.2.3 Valores do campo e amplitudes dos modos de Fourier no tempo final $t = 30$ para a evolução do campo SG com a condição inicial da Expressão 3.2.1. Os painéis (a) e (b) mostram, respectivamente, os valores do campo SG e as amplitudes dos modos de Fourier para a condição inicial (3.2.1) com $A_0 k_0^2 = 50$. Os painéis (c) e (d) apresentam os resultados correspondentes para $A_0 k_0^2 = 25$. Em particular, observe que, mesmo com a mistura de Fourier, o modo inicial $k = 10\pi$ permanece dominante em (d). 83

3.2.4 Função $\lambda(v)$ (linha tracejada) comparada com $\frac{2}{N} \ln |\lambda_n^{(N)}|$ (pontos) para (a) $A_0 = 1$ e (b) $A_0 = 2$ 90

3.2.5 Potencial NKG (3.2.8) para $N = 1, 5, 41$ com $A_0 = 1$ 90

3.2.6 Painel (a): Evolução temporal da magnitude da transformada de Fourier da parte espacial do campo SG, $|\mathcal{F}_x[\phi]|(t, k)$. Painel (b): Perfis $|\mathcal{F}_x[\phi]|(k_n, t)$ da Figura (a), em que $k_n = \{3k_0, 5k_0, 7k_0\}$ e $k_0 = \pi$. As condições iniciais são de uma onda plana em $t = 0$, com numero de onda $k = \pi$ e amplitude $A = 1$. O campo é simulado com condições de contorno periódicas. 91

3.2.7 Relação de dispersão do modo dominante ($n = 1$, círculo azul) e de cinco harmônicos gerados ($n = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, cruzeiras claras) obtidos a partir de uma transformada de Fourier tanto no tempo quanto no espaço. A linha traço-pontilhada indica uma relação de dispersão de Klein-Gordon com $m = 1$. Estes dados são complementares àqueles da Figura 3.2.6, sendo derivados do mesmo conjunto de dados. 92

3.2.8 A relação de dispersão “on-shell” de KG no espaço energia-momento é apresentada em (a), calculada via o método de produção de sinal, com a curva de dispersão real $m = 1$ superposta. Os dados foram obtidos apenas para a rama positiva de k , com $m = 1$. A Figura (b) mostra a massa inferida do campo a partir desses dados. Para o campo linear de KG, a massa permanece constante (aqui, $m = 1$). 94

3.2.9 Relação de dispersão de signum-Gordon para uma simulação com dado inicial $A = \frac{4}{\pi}$ implica, consistentemente, em $m = 1$ para diversos k . A Fig. (a) mostra o conjunto de frequências (espaço recíproco) do campo simulado no intervalo de tempo $t \in [0, 40]$ (que, nas condições de simulação, corresponde a um tempo curto). Na Fig. (b), os picos (modos principais) foram extraídos do mapa de (a) e exibidos como pontos claros, enquanto a relação de dispersão de Klein-Gordon $\omega = +\sqrt{k^2 + m^2}$ para $m = 1$ foi sobreposta. Também é mostrada a mesma relação de dispersão para $m = 0$, como comparação. Note a boa concordância, especialmente para $k > \pi/4$ 94

3.2.10 Espectro de amplitude inferido do campo SG sob sinais de amplitude $A_0 = 4/\pi$ (o que fornece massa efetiva $m_{eff} = 1$). Na Fig. (a) temos o mapa bruto, enquanto na Fig. (b) seus picos (círculos) são mostrados, junto às relações de dispersão de KG para $m = 1$ e $m = 0$ 95

4.1.1 A solução $\Phi(t, x)$ com $k = 1$ e $m_0 = 1$ no tempo $t = 0$, comparada à onda senoidal indicada. As amplitudes A_n decrescem rapidamente pois são proporcionais a n^{-3} , com n ímpar. 99

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.1.2 | Comparação entre a “onda plana” signum-Gordon em (a) e a solução Klein-Gordon em (b), ambas com “massa” $m_0 = m = 1$ e $k = \frac{\pi}{20}$. A graduação cores representa valor do campo. A escolha de k pequeno se dá para evidenciar o efeito da massa na propagação, que faz com que as ondas apareçam mais “deitadas” no diagrama de espaço-tempo. | 99 |
| 4.2.1 | Distribuições em espaço recíproco para alguns modos relevantes de $A_n \hat{\chi}(k)$ (no eixo vertical; o eixo horizontal enumera valores de k). Note como o segundo maior extremo de cada distribuição ocorre próximo de $ k_n^{\text{ex}} \simeq 2\pi n$ (exceto em $n = 1$), marcado pela linha vertical tracejada. | 103 |
| 4.2.2 | Os pontos em azul indicam (k_n, ω_n) da Tabela (4.2.1). Observa-se excelente concordância com a curva de dispersão de Klein-Gordon de massa $m = 6$, levemente abaixo do valor intuitivo 2π | 105 |
| 4.3.1 | Comparação entre soluções da equação de onda não homogênea, $\Phi_\omega(t, r)$ tipo “oscillon radiante”, que satisfazem $\Phi_\omega(1/2, t) = 0$. Observe que, em $r < 1/2$ a solução é afetada pelo termo não homogêneo $\sigma(t, r)$ (Expressão 4.3.3), enquanto fora dessa região, $r > 1/2$, ela efetivamente obedece a equação de onda livre. Para ser solução da equação de SG, o campo deve ser nulo em $r > 1/2$, e ter seu sinal em $r < 1/2$ igual ao negativo do sinal de $\sigma(t, r)$ | 111 |
| 4.3.2 | O oscillon em $d = 3$ como fluxo de radiação mínimo fora de sua região central, $r < 1/2$. Na Figura (a), a função fluxo de energia excedente, cujo mínimo local próximo a 3π converge para $\bar{F}(\omega_{\text{min}}) \simeq 2.8 \times 10^{-5}$ e acontece em $\omega_{\text{min}} \simeq 9.032$. A Figura (b) mostra a Expressão 4.3.15 com $\omega \rightarrow \omega_{\text{min}}$, representando o oscillon <i>quase</i> exato em $d = 3$ | 114 |
| B.0.1 | O potencial $V_s(\phi)$ avaliado em $N = 35$ para diferentes valores do parâmetro s no intervalo $[-0.2, 2.5]$ | 136 |

Lista de Tabelas

| | |
|---|-----|
| 4.2.1 Valores de ω_n e k_n para os primeiros modos, com as massas m estimadas pela relação de dispersão de KG. | 104 |
|---|-----|

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 18 |
| 1 Modelos com Potenciais Não Analíticos | 21 |
| 1.1 Aspecto histórico | 21 |
| 1.2 Compactons | 26 |
| 1.3 Oscillons | 28 |
| 1.4 Ondas de choque | 35 |
| 1.5 Espalhamento de compactons | 39 |
| 1.5.1 Interação entre kinks e oscillons | 41 |
| 1.5.2 A dinâmica das colisões de kinks | 43 |
| 1.6 Q-balls | 45 |
| 2 Ondas de Choque Exatas | 50 |
| 2.1 Ansatz para onda de choque em $(n + 1)$ dimensões | 50 |
| 2.2 Energia da onda de choque | 54 |
| 2.2.1 Distribuição de energia da onda de choque | 54 |
| 2.2.2 Energia dentro do cone de luz | 54 |
| 2.2.3 Energia na superfície do cone de luz | 56 |
| 2.3 Ondas de choque em $(2 + 1)$ dimensões | 58 |
| 2.3.1 Soluções parciais e relações de recorrência | 58 |
| 2.3.2 Energia da onda de choque em $(2+1)$ dimensões | 60 |
| 2.4 Ondas de choque em $(3 + 1)$ dimensões | 62 |
| 2.4.1 Soluções parciais e relações de recorrência | 62 |
| 2.4.2 Energia da onda de choque em $(3+1)$ dimensões | 64 |
| 2.5 Aproximação numérica da solução com força delta de Dirac | 65 |
| 2.6 Investigação numérica de ondas de choque em $(2+1)$ dimensões | 68 |
| 2.6.1 Solução de onda de choque com condição de contorno de Dirichlet | 70 |
| 2.6.2 Desintegração de onda de choque | 73 |
| 3 Massa Espectral | 76 |
| 3.1 Particularidades relevantes no modelo signum-Gordon | 77 |
| 3.2 Análise de Fourier | 79 |
| 3.2.1 Regime massivo vs sem massa | 80 |
| 3.2.2 Evolução dos modos de Fourier | 81 |
| 3.2.3 Equação de Klein-Gordon não-linear | 82 |
| 3.2.4 O caso particular de signum-Gordon | 86 |
| 3.2.5 Relação de dispersão dos harmônicos | 90 |
| 3.2.6 Métodos de Inferência de Massa | 92 |
| 4 Aplicação de Métodos de Fourier a Oscillons | 96 |
| 4.1 Onda quadrada | 97 |
| 4.2 Função retângulo e o oscillon simples em $(1 + 1)$ dimensões | 100 |
| 4.2.1 Interpretação da solução $\varphi(t, x)$ | 102 |
| 4.2.2 Análise do espaço recíproco | 102 |
| 4.3 Oscillons esfericamente simétricos em $(d + 1)$ dimensões | 105 |
| 4.3.1 Caso particular $d = 3$ | 109 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Conclusão | 115 |
| 5.1 | Ondas de choque | 115 |
| 5.2 | Massa espectral | 117 |
| 5.3 | Métodos de Fourier | 118 |
| | Referências | 120 |
| A | Integral dos modos de oscilação do oscillon $d = 3$ | 132 |
| B | Observações sobre ϕ como uma série regular | 134 |
| B.1 | Comparação com outras regularizações de $ \phi $ | 136 |

Introdução

A Teoria de Campos ocupa um lugar bem estabelecido na física teórica (Dirac [1927], Feynman [1949], Tomonaga [1946], Weinberg [1977], Wilczek [1999], Yang and Mills [1954]). Os campos físicos, tanto fundamentais quanto efetivos, são amplamente utilizados como modelos de matéria (Peskin and Schroeder [1995a], Ryder [1996], Weinberg [1995], Zee [2010]). A previsão, pela Eletrodinâmica Quântica, do desvio do momento magnético do elétron (Schwinger [1948]), e a compatibilidade dessa previsão com os dados experimentais (Kusch and Foley [1948]), são apenas um dos sucessos na descrição de fenômenos físicos utilizando a teoria de campos. Por outro lado, uma grande aplicabilidade da teoria de campos reside em descrições efetivas baseadas no estudo de soluções clássicas. Essas aplicações estendem-se do nível microscópico (descrição do núcleo atômico usando o modelo de Skyrme, por exemplo Makhanov et al. [1993], Zahed and Brown [1986, 2016], à física do estado sólido (defeitos topológicos Altland and Simons [2010], Jäykkä and Hietarinta [2013], Marino [2017], Stepanov [2023], Tai and Smalyukh [2020], Tong [2011]) e, finalmente, ao nível macroscópico (utilização de campos escalares para modelos de inflação do Universo, Albrecht and Steinhardt [1982], Bassett et al. [2006], Baumann [2009], Guth [1981], Kolb and Turner [1990], Linde [1982, 1990], Martin et al. [2014], Mukhanov [2005], Starobinsky [1980], Weinberg [2008]).

A análise aprofundada das propriedades de soluções clássicas, incluindo sua estabilidade e a dinâmica de suas interações, é um campo de estudo em constante desenvolvimento. O comportamento das soluções reflete as propriedades matemáticas dos modelos físicos, nos quais as simetrias desempenham um papel central. Uma classe especial de modelos, com um grau infinito de simetrias, é de particular interesse. Esses modelos são denominados integráveis (Ablowitz and Segur [1981], Faddeev and Takhtajan [1987], Korteweg and De Vries [1895], Zakharov and Shabat [1972]), e suas soluções, solitons (Ablowitz and Segur [1981], Faddeev and Takhtajan [1987], Manton and Sutcliffe [2004], Rajaraman [1982], Shnir [2018], Zakharov and Shabat [1972]). É importante ressaltar que, na literatura, o termo ‘soliton’ também é utilizado para descrever configurações relativamente estáveis com densidade de energia localizada. Especificamente, isso ocorre quando ‘kink’ e ‘soliton’ são utilizados como sinônimos, embora o significado de ‘kink’ seja mais abrangente. Ele se aplica tanto a kinks em modelos integráveis, como sine-Gordon ou os modelos de Toda, quanto em modelos não integráveis, cujo exemplo clássico é o modelo ϕ^4 . A integrabilidade impõe uma restrição extremamente forte à dinâmica das soluções. Consequentemente, o resultado do espalhamento de kinks ou

kink-antikinks em teorias integráveis é, na maioria dos casos, descrito por fórmulas exatas. Por outro lado, quando o modelo não é integrável, a dinâmica se torna extremamente complexa e exige estudos numéricos sistemáticos.

Além da integrabilidade, a auto-interação de campos é fundamental em teorias de campos. Em campos escalares, essa interação se manifesta na forma do potencial do modelo. Este potencial, por sua vez, determina os estados de energia mínima (vácuos da teoria) e influencia a definição de setores topológicos em diversos modelos.¹ Um exemplo clássico é o modelo ϕ^4 , que possui dois mínimos e correspondentes kinks e antikinks como configurações que interpolam entre esses mínimos. No caso do modelo sine-Gordon, o potencial possui um número infinito de mínimos, o que possibilita diversos tipos de kinks e anti-kinks interpolando entre diferentes vácuos.

Quando o potencial possui um único mínimo, as configurações de campo escalar em (1+1) dimensões são denominadas soluções não topológicas. De acordo com o teorema de Derrick [Derrick \[1964\]](#), soluções desse tipo não possuem setor estático, ou seja, todas elas dependem do tempo. Um dos principais focos desta tese é a análise de soluções desse tipo, tanto em uma dimensão espacial quanto em dimensões mais altas.

Enquanto o número de mínimos desempenha um papel central nas propriedades globais das soluções, a forma do potencial na vizinhança dos mínimos determina o comportamento do campo e a rapidez com que ele atinge a configuração do vácuo. No caso extremo, o vácuo pode ser atingido de forma quadrática, o que significa que o tamanho do kink ou de outra configuração de campo correspondente é finito. Esse assunto é revisado em detalhes no [Capítulo 1](#). Essas soluções são chamadas de compactas. Os *compactons* existem em modelos com potencial não diferenciável, onde as derivadas laterais do potencial são diferentes no mínimo do potencial. O caráter ‘sharp’ do potencial deu origem ao nome de potenciais que são chamados ‘V-shaped’ (aspecto da letra V). O caso mais simples de modelo que representa esta família de potenciais é o modelo signum-Gordon (SG), cujo potencial é proporcional ao valor absoluto do campo escalar, $V \sim |\phi|$.

Nesta tese, analisaremos exatamente essas soluções no modelo signum-Gordon. A não integrabilidade desse modelo implica em uma dinâmica de soluções complexa, com a presença de múltiplas componentes. Essas componentes emergem aproximadamente durante o

¹A estrutura topológica é determinada por invariantes topológicos de grupos de homotopia, que mapeiam o espaço físico para o espaço alvo dos campos. Consequentemente, nossa referência ao potencial tem validade apenas para uma classe específica de modelos.

espalhamento ou a desintegração de configurações iniciais. Portanto, a obtenção de soluções analíticas ou semianalíticas é crucial para uma compreensão abrangente do modelo. Este trabalho abordará a generalização de ondas de choque para dimensões superiores e explorará detalhadamente classes de soluções em uma dimensão espacial, com particular atenção ao papel de *massa* no modelo, utilizando a análise de Fourier como ferramenta principal. A análise de Fourier permite também a derivação de *oscillons* quase-exatos em (3+1) dimensões. Os resultados obtidos combinam abordagens analíticas e numéricas.

Esta tese de Doutorado organiza-se nos seguintes capítulos: O Capítulo 1 oferece uma revisão abrangente de modelos com potencial não analítico, incluindo os resultados já estabelecidos. Para fins didáticos, a nomenclatura e seus significados são detalhados. Embora o Capítulo 1 não apresente resultados inéditos desta tese, alguns dos tópicos foram previamente explorados pelo Autor. O Capítulo 2 dedica-se à generalização de ondas de choque com simetria radial e esférica em duas e três dimensões espaciais. O Capítulo 3 traz o conceito de massa espectral no modelo, de um ponto de vista perturbativo. Os métodos aí utilizados deram origem a um método de regularização do potencial em 'V' que não encontrou lugar particular nessa tese e, então, uma análise dessa regularização é feita no Apêndice B. O Capítulo 4 trata sobre a utilização de métodos de Fourier na abordagem do modelo, incluindo o conceito de massa efetiva (complementar à massa perturbativa/espectral) das soluções conhecidas de *oscillons* em 1+1 dimensões, além da derivação analítica de *oscillons* quase-exatos em 3+1 dimensões.

1 Modelos com Potenciais Não Analíticos

Embora os modelos explorados nesta tese sejam conhecidos há duas décadas, suas propriedades ainda desafiam os paradigmas convencionais, conferindo-lhes um caráter inovador. Com o objetivo de familiarizar o leitor com a terminologia e os resultados já publicados, esta seção dedica-se à apresentação e discussão de soluções e aspectos já consolidados.

1.1 Aspecto histórico

Os modelos com potenciais não analíticos em física de altas energias surgiram a partir de pesquisas pioneiras de H. Arodz, da Universidade Jaguelônica (Uniwersytet Jagiellonski), que iniciou uma nova área de estudos na teoria de campos. De maneira surpreendente, esses modelos foram descobertos durante demonstrações didáticas para alunos de ensino médio, conforme relatado pelo próprio autor: *"Anos atrás – em 2001 – quando me pediram para dar uma palestra popular sobre física moderna para alunos do ensino médio, escolhi falar sobre quebra espontânea de simetria (QES) e sólitons topológicos (defeitos). Embora não houvesse problema em preparar experimentos simples para ilustrar a QES, demonstrar um sóliton topológico foi um desafio. Finalmente, concentrei-me em um sistema bem conhecido de pêndulos harmonicamente acoplados, utilizado para demonstrar os sólitons de sine-Gordon. O problema era que o sistema tem um estado fundamental não degenerado (todos os pêndulos na posição para baixo), portanto, não há QES. Os sólitons de sine-Gordon não são sólitons topológicos. Então, modifiquei o sistema, impedindo que os pêndulos caíssem devido à gravitação. Isso foi conseguido adicionando duas hastes rígidas em ambos os lados (linhas amarelas fracas nas fotos), paralelas ao fio no qual os pêndulos estavam suspensos (invisível nas fotos). Todos os pêndulos foram colocados para cima, acima das hastes. Tal sistema tem dois estados fundamentais degenerados: todos os pêndulos repousam em uma haste ou na outra. Sólitons topológicos interpolam entre os estados fundamentais, veja a foto inferior. A palestra correu bem, os alunos estavam interessados.*

Vários dias depois, me ocorreu que, sendo um físico teórico, eu deveria fornecer uma descrição analítica desse sóliton. Trabalhar nisso foi um prazer. Descobri que o sóliton tem um tamanho finito definido, ou seja, os estados fundamentais são atingidos exatamente a uma certa distância finita de seu centro. Não há caudas exponenciais ou polinomiais inversas. Tais sólitons são chamados de compactons, e outros exemplos deles foram discutidos na literatura.

No entanto, até onde sei, o meu foi o primeiro exemplo de compacton relacionado à QES – compacton topológico. Descrevi-o no artigo Arodz [2002].

Logo percebi que meus sólitons são compactons porque o potencial do campo é em forma de V perto dos estados fundamentais, e que tais modelos de teoria de campos são muito interessantes por direito próprio. Dediquei a eles vários artigos a partir de Arodz [2004], Arodz and Klimas [2005], a maioria deles com a participação de meus alunos.²

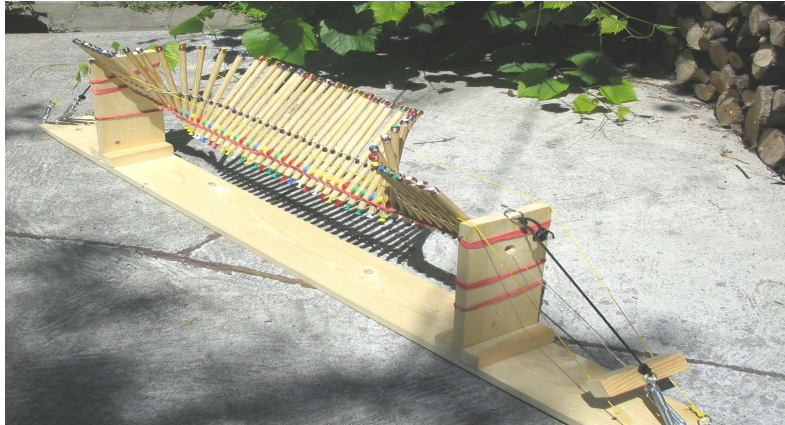


Figura 1.1.1: Modelo físico de pêndulos acoplados, utilizado para demonstrar a formação de kinks e antikinks compactos. Imagem capturada por H. Arodz.

A Figura 2.3.1 traz uma criação de H. Arodz, que demonstra o modelo mecânico de pêndulos invertidos. Nesse aparato, os pêndulos oscilam verticalmente dentro de um intervalo angular de $-\phi_0$ a ϕ_0 . Com exceção do primeiro e do último, que permanecem fixos em $\phi = 0$, os pêndulos intermediários são influenciados pela gravidade e pelo torque das molas que os conectam. Um esquema que representa o sistema está desenhado na Figura 2.4.1.

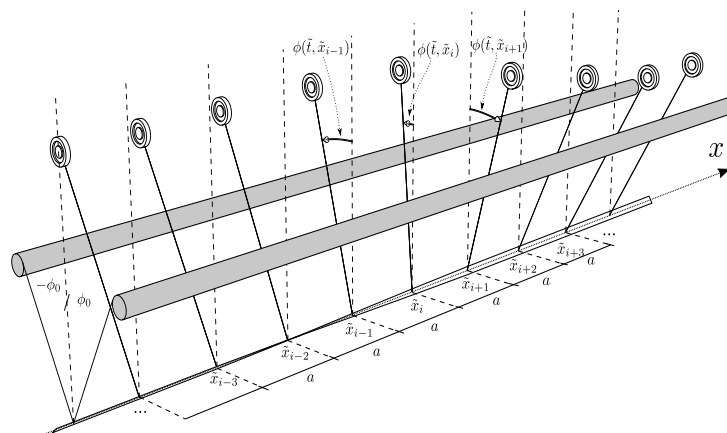


Figura 1.1.2: Sistema de pêndulos invertidos sob ação da gravidade e acoplados por forças elásticas.

²Tradução do texto original em inglês fornecido pelo Autor.

Cada pêndulo é caracterizado por uma massa m e um comprimento R . A distância entre os pontos de fixação dos pêndulos é designada por a . As equações de Newton que descrevem o sistema, $\frac{dL}{d\tilde{t}} = \tau_{\text{grav}} + \tau_{\text{elast}}$ podem ser escritas considerando $\phi(t, \tilde{x}_i)$ como o ângulo do pêndulo na posição \tilde{x}_i em relação à vertical, resultando em:

$$mR^2 \frac{d^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i)}{d\tilde{t}^2} = mgR \sin\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \quad (1.1.1)$$

$$+ \frac{\kappa}{a} \left(\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i + a) + \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i - a) - 2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \right) \quad (1.1.2)$$

em que κ denota o coeficiente de elasticidade da mola que promove a conexão entre os pêndulos. O termo final descreve o torque exercido sobre o pêndulo em função da sua inclinação relativa aos pêndulos adjacentes. A validade da Equação 1.1.2 restringe-se ao intervalo angular $-\phi_0 < \phi < \phi_0$. Além desse limite, o pêndulo interage com a haste através de colisões elásticas, exigindo a inclusão da condição de colisão ($\frac{d\phi}{d\tilde{t}} \rightarrow -\frac{d\phi}{d\tilde{t}}$ em $\phi = \pm\phi_0$) para uma descrição completa da dinâmica. A dinâmica do sistema é, portanto, completamente descrita pela combinação da equação de movimento com a condição de reflexão.

O sistema admite quebra espontânea de simetria, Arodz [2004]. Para valores de κ muito grandes, a posição vertical dos pêndulos é uma configuração estável (os pêndulos nas extremidades são fixos na direção vertical). Quando a constante κ diminui, o torque gravitacional torna-se mais relevante e, em certo instante, parte dos pêndulos cai para a haste localizada em $-\phi_0$ e outra parte cai para a haste oposta (ϕ_0). Os pêndulos que interpolam entre as duas hastes formam configurações discretas chamadas kink e antikink.

Quando a segunda derivada da função $\phi(\tilde{t}, \tilde{x})$, que interpola entre os pêndulos, é quase constante no intervalo $[x_i - a, x_i + a]$, o último termo admite uma aproximação pela segunda derivada espacial:

$$\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i + a) + \phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i - a) - 2\phi(\tilde{t}, \tilde{x}_i) \approx a^2 \frac{\partial^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial\tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=\tilde{x}_i}$$

Estamos interessados nas configurações físicas do sistema de pêndulos que satisfazem esta condição. Especificamente, postulamos que a função interpoladora $\phi(\tilde{t}, \tilde{x})$ pode ser determinada da equação diferencial parcial:

$$mR^2 \frac{\partial^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial\tilde{t}^2} = mgR \sin\phi(\tilde{t}, \tilde{x}) + \kappa a \frac{\partial^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial\tilde{x}^2}$$

Introduzindo as variáveis adimensionais

$$t = \sqrt{\frac{g}{R}} \tilde{t}, \quad x = \sqrt{\frac{mgR}{\kappa a}} \tilde{x}$$

chegamos à equação do modelo sine-Gordon com sinal invertido

$$\frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} - \sin \phi(t, x) = 0 \quad (1.1.3)$$

O procedimento descrito acima é equivalente à realização de um limite contínuo (limite de teoria de campos) no qual o número de pêndulos cresce, a distância entre os pêndulos a diminui e a constante elástica κ cresce, obedecendo $\kappa a = \text{const.}$

É crucial salientar que, de maneira análoga à equação discreta, a dinâmica do sistema contínuo é completamente definida pela Equação 1.1.3 e pela seguinte condição:

$$\partial_t \phi \rightarrow -\partial_t \phi, \quad \text{quando} \quad \phi = \pm \phi_0.$$

Em particular, tal condição implica que o potencial de campo $\tilde{V}(\phi)$, determinado pela relação $\frac{d\tilde{V}}{d\phi} = -\sin \phi$, exibe barreiras infinitas em $\pm \phi_0$.

Com o intuito de incorporar a referida condição à equação de movimento, introduz-se um novo campo escalar φ desprovido de restrições. Este campo é idêntico a ϕ no intervalo $[-\phi_0, \phi_0]$ e, fora deste, a relação entre ambos é definida por uma transformação de “dobramento” (*folding transformation*). O propósito desta transformação é mapear a dinâmica do campo auxiliar φ na dinâmica do campo interpolador ϕ . A referência [Arodz et al. \[2005\]](#) apresenta um exemplo desta transformação. O potencial estendido $V(\varphi)$ não tem mais barreiras infinitas, veja Figura 1.1.3. Em contrapartida, em torno de cada mínimo, o potencial satisfaz a condição $V(\pm\phi_0 + \varepsilon) = V(\pm\phi_0 - \varepsilon)$ sendo ε um pequeno desvio do campo em relação ao ponto de mínimo. A avaliação das derivadas laterais do potencial demonstra que, em geral, estas não se anulam nos mínimos do potencial. Em decorrência disso, o potencial $V(\varphi)$ no modelo auxiliar (*unfolded model*) apresenta mínimos com uma morfologia semelhante à letra ‘V’. Os potenciais dessa natureza são designados como *não analíticos* ou *potenciais com aspecto ‘V’* (*V-shaped potentials*).

Existem contextos físicos onde o potencial não diferenciável exibe uma quantidade arbitrária de mínimos e, tipicamente, uma simetria apenas aproximada em torno deles. Um

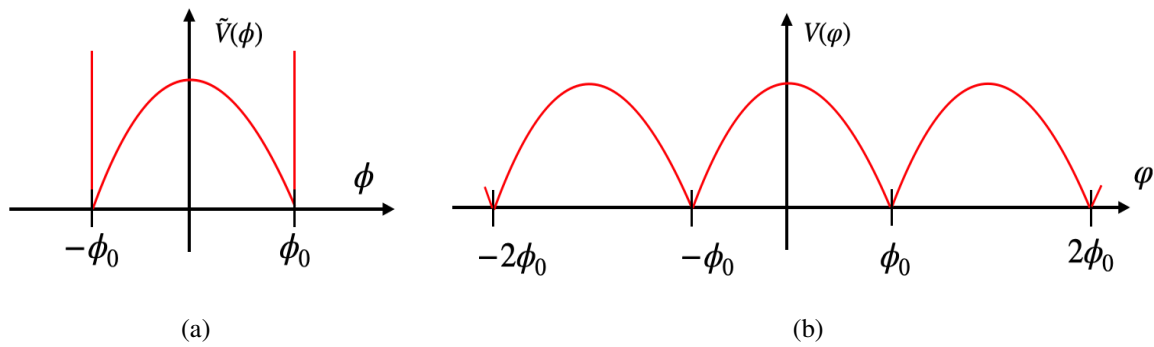


Figura 1.1.3: (a) Potencial da função interpoladora ϕ que modela o sistema de pêndulos. (b) Potencial no modelo desdobrado (auxiliar).

exemplo é o potencial $V(\varphi) = \lambda|\varphi^2 - a^2|$, analisado no estudo do espalhamento de kinks.

A análise do comportamento de um campo escalar próximo a um mínimo é crucial. Se as excitações do campo forem pequenas, podemos aproximar $\varphi(t, x)$ por $\varphi_{min} + \varepsilon(t, x)$ com $\varepsilon \ll 1$. Considerando $\varphi_{min} = \phi_0$, o potencial nas proximidades deste mínimo é definido por $V(\varphi) = \cos \varphi - \cos \phi_0$ quando $\varphi < \phi_0$ e por $V(\varphi) = \cos(\varphi - 2\phi_0) - \cos \phi_0$ quando $\varphi > \phi_0$. A expansão em série de Taylor até a ordem linear em ε conduz ao seguinte resultado:

$$V(\varphi) = V(\varphi_{min} + \varepsilon(t, x)) \approx \sin \phi_0 |\varepsilon(t, x)|.$$

O termo constante $\sin \phi_0$ exerce a função da constante de acoplamento λ e pode ser suprimido da equação mediante a redefinição das variáveis temporais e espaciais t e x . Em conclusão, a equação que governa a dinâmica da função $\varepsilon(t, x)$ assume a seguinte forma:

$$\partial_t^2 \varepsilon - \partial_x^2 \varepsilon + \lambda \text{sign}(\varepsilon) = 0 \quad (1.1.4)$$

a qual é designada como *equação de signum-Gordon*. A equação possui características universais, aplicando-se a um amplo conjunto de potenciais não diferenciáveis, desde que com derivadas laterais simétricas. Logo, a dinâmica do campo escalar nas vizinhanças desses mínimos é comum a tais modelos. Para assegurar que a configuração estática $\varepsilon = 0$ ($\varphi = \phi_0$) satisfaça a Equação 1.1.4, define-se $\text{sign}(0) := 0$.

H. Arodz e seus colaboradores foram pioneiros no estudo do modelo de signum-Gordon em uma dimensão espacial, seguido por outros pesquisadores. Este modelo possui uma vasta literatura com resultados numéricos e analíticos. Soluções não topológicas, incluindo oscillons e ondas de choque, são particularmente relevantes, assim como estudos sobre Q-balls

e Q-shells. As seções subsequentes apresentam uma revisão concisa de soluções em modelos com potencial não analítico.

1.2 Compactons

Uma das características estudadas por H. Arodz nos primórdios da literatura do modelo é referente ao tamanho definido dos kinks nas configurações topológicas. Soluções que se distinguem do vácuo unicamente em uma área espacial compacta são denominadas *compactons*. Antes da descoberta de Arodz, compactons não topológicos já haviam sido identificados na literatura. Esses compactons foram encontrados por Rosenau em 1993 durante a análise de uma versão modificada da equação de Korteweg-de Vries, [Rosenau and Hyman \[1993b\]](#). As soluções de compactons obtidas por Arodz foram as primeiras a serem observadas no contexto de quebra espontânea de simetria.

Com o objetivo de evidenciar o comportamento quadrático do campo em torno de um mínimo não analítico, consideraremos novamente a função interpoladora para o sistema de pêndulos invertidos. É suficiente analisar o comportamento do campo na vizinhança de ϕ_0 . Portanto, assumiremos que $\phi = \phi_0 - \delta\phi$, em que $\delta\phi$ é positivo e pequeno em comparação a ϕ_0 . O potencial nesta região é dado por $V(\phi) = \cos\phi - \cos\phi_0$. Uma solução estática possui energia dada pela soma da energia gradiente e da energia potencial:

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right].$$

A integral de energia pode ser expressa como:

$$E = \frac{1}{2} \int dx (\partial_x \phi \mp \sqrt{2V})^2 \pm \int dx \partial_x \phi \sqrt{2V}.$$

O segundo termo, de natureza topológica, é dado por $\int dU$, com $\frac{dU}{d\phi} = \sqrt{2V}$. Seu valor depende unicamente da carga topológica $Q_{top} = U(\phi_{vac_2}) - U(\phi_{vac_1})$. As soluções estáticas seguem as equações de primeira ordem:

$$\partial_x \phi = \pm \sqrt{2V} \tag{1.2.1}$$

denominadas equações de Bogomolnyi (BPS). O sinal positivo na equação corresponde a um kink $Q_{top} > 0$, enquanto o sinal negativo corresponde a um antikink $Q_{top} < 0$. Para um kink, a

equação (1.2.1) se reduz a $-\partial_x \delta\phi = \sqrt{\cos(\phi_0 - \delta\phi) - \cos\phi_0}$. Ao realizar a expansão em série de Taylor e considerar apenas os termos mais relevantes, obtemos:

$$\partial_x \delta\phi = -\sqrt{\lambda} \sqrt{\delta\phi} \quad (1.2.2)$$

onde $\lambda \equiv \sin\phi_0 > 0$. A manifestação do termo $\sqrt{\delta\phi}$ é uma característica inerente a potenciais não analíticos, ao passo que, em potenciais padrão (mínimos parabólicos), o lado direito da equação é proporcional a $\delta\phi$. Em decorrência, a equação admite a solução na forma:

$$\delta\phi = \frac{\lambda}{4}(x_0 - x)^2$$

que constitui uma aproximação (termo dominante) do comportamento da solução na vizinhança do valor do vácuo. Nesta situação, o vácuo é alcançado em x_0 , a uma distância finita do centro do kink. Em potenciais com mínimos quadráticos, a derivada de $\delta\phi$ é proporcional a $\delta\phi$, o que implica que $\delta\phi$ é expresso por uma função exponencial. Este resultado confirma o fato conhecido de que kinks em teorias com potenciais quadráticos nos mínimos apresentam caudas exponenciais.

Sob a condição de ϕ_0 não ser excessivamente grande, o perfil cosseno do potencial admite uma aproximação parabólica. Em decorrência disso, as soluções estáticas da equação de sine-Gordon (Equação 1.1.3) satisfazem a seguinte equação:

$$\partial_x^2 \phi + \phi = 0$$

para $-\phi_0 < \phi < \phi_0$. É importante notar que a equação de campo, tal como apresentada nesta fórmula, não determina as configurações de vácuo $\phi = \pm\phi_0$.

A solução de kink estático, $\phi_K(x)$, centralizada na posição $x = 0$, é expressa por:

$$\phi_K(x) = \begin{cases} -\phi_0 & \text{para } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \phi_0 \sin x & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \phi_0 & \text{para } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

O kink apresenta um tamanho de π . A solução de antikink $\phi_{\bar{K}}(x)$ é definida pela relação: $\phi_{\bar{K}}(x) = -\phi_K(x)$. Ao explorar as simetrias translacional e de Lorentz inerentes ao modelo, é

viável construir soluções de kink transladadas mediante a substituição $x \rightarrow x - a$ bem como soluções de kink em movimento com velocidade v através da substituição $x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$.

Além das soluções de kink, esta revisão abordará separadamente soluções compactas não topológicas, como oscillons e Q-balls. Uma característica importante dos compactons é seu tamanho finito, que possibilita a preparação de configurações iniciais sem interação significativa (ao contrário dos kinks com caudas exponenciais). A interação entre dois compactons ocorre apenas quando seus suportes se sobrepõem, tornando-os ideais para estudos de espalhamento, com configurações iniciais exatas.

1.3 Oscillons

Oscillons são soluções não topológicas, de natureza periódica ou quase periódica, que possuem energia finita (Bogolyubsky and Makhankov [1976], Copeland et al. [1995], Fodor et al. [2006], Gleiser [1994, 2007], Gleiser and Sicilia [2008, 2009], Honda and Choptuik [2002], Kolb and Tkachev [1994], Lee and Pang [1992], Rajaraman [1982], Segur and Kruskal [1987]). Essas soluções são encontradas em uma variedade de modelos de teoria de campos, desde cosmologia (Amin et al. [2010, 2012], Farhi and et al. [2005, 2008], Gleiser et al. [2010], Kolb and Tkachev [1994], Mukaida et al. [2017]) e modelos não perturbativos (Graham and Stamatopoulos [2006], Hertzberg [2010], Hindmarsh and Salmi [2008], Kasuya et al. [2003]) até realizações em laboratório (Salmi and Hindmarsh [2012], Umbanhowar et al. [1996]). Tipicamente, oscillons emitem radiação, resultando em perda de energia. No entanto, existem oscillons excepcionais, conhecidos como 'breathers', que são soluções exatas e persistem indefinidamente sem perda de energia por radiação, encontrados em modelos integráveis (Ablowitz and Clarkson [1991], Hirota [1972], Scott [1973]).

O modelo de signum-Gordon caracteriza-se como um modelo não integrável. A descoberta de oscillons exatos, que exibem a propriedade de não gerar radiação, constituiu uma significativa surpresa, demonstrando que modelos com potenciais não analíticos apresentam um vasto campo de investigação para os pesquisadores. A simetria de escala da equação de signum-Gordon, dada por $t \rightarrow t/\mu$, $x \rightarrow x/\mu$, $\phi \rightarrow \mu^2\phi$, implica que, se $\phi(t, x)$ é uma solução, então

$$\phi_\mu(t, x) = \mu^2\phi(t/\mu, x/\mu) \quad (1.3.1)$$

também é uma solução. Consequentemente, cada oscillon pertence a uma família infinita de

oscillons com diferentes tamanhos e períodos.

Conforme reportado em Arodz et al. [2008], o oscillon mais elementar é construído a partir da combinação de uma sequência de polinômios quadráticos, cada um definido em um domínio específico de espaço e tempo. Este oscillon apresenta um suporte de tamanho $L = 1$ e um período $T = 1$.

Devido à periodicidade da solução de oscillon, apresentaremos apenas seu segmento $\phi_0(t, x)$ restrito ao intervalo $0 \leq t \leq T$. Outros segmentos $\phi_k(t, x)$ são dados por

$$\phi_k(t, x) = \phi_0(t + kT, x), \quad kT \leq t \leq (k+1)T.$$

Para obter a solução, precisamos apenas de três polinômios quadráticos:

$$\psi_1(t, x) = \frac{x^2}{2} \quad (1.3.2)$$

$$\psi_2(t, x) = tx - \frac{t^2}{2} \quad (1.3.3)$$

$$\psi_3(t, x) = -t^2 + \frac{t}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}, \quad (1.3.4)$$

em que $\psi_3(t, 1-x) = \psi_3(t, x)$ e $T = 1$. A solução $\phi_0(t, x)$ é composta por quatro expressões distintas:

$$\phi_0(t, x) = \begin{cases} \varphi(t, x) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \varphi\left(\frac{1}{2} - t, x\right) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -\varphi\left(t - \frac{1}{2}, x\right) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ -\varphi(1 - t, x) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.3.5)$$

definidas por uma única função $\varphi(t, x)$ que caracteriza a forma do oscillon dentro do intervalo $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$. Esta função é dada por:

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} \psi_1(t, x) & 0 \leq x \leq t \\ \psi_2(t, x) & t \leq x \leq \frac{1}{2} - t \\ \psi_3(t, x) & \frac{1}{2} - t \leq x \leq t + \frac{1}{2} \\ \psi_2(t, 1-x) & t + \frac{1}{2} \leq x \leq 1 - t \\ \psi_1(t, 1-x) & 1 - t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.3.6)$$

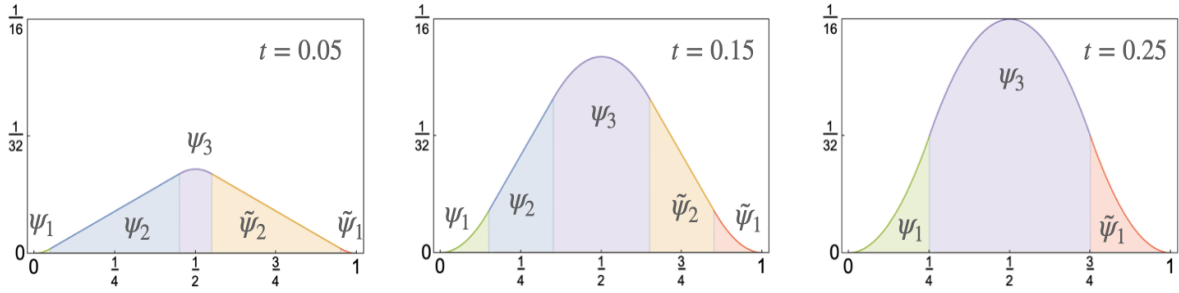


Figura 1.3.1: Representação gráfica das funções ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 , constituintes do oscillon mais elementar no intervalo $[0, 1]$. Os polinômios com tilde são definidos pela relação $\tilde{\psi}_k(t, x) \equiv \psi_k(t, 1 - x)$.

A configuração inicial, estabelecida em $t = 0$, é caracterizada por um campo de signum-Gordon nulo em todo o domínio espacial. As primeiras derivadas temporais do campo apresentam valores não nulos exclusivamente no intervalo: $[0, 1]$, configurando um perfil triangular expresso por:

$$\partial_t \varphi(t, x)|_{t=0} = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (1.3.7)$$

A Figura 1.3.1 ilustra a formação do oscillon básico descrito pela Expressão 1.3.7 em três momentos distintos: $t = 0.05$; $t = 0.15$ e $t = 0.25$. No instante $t = 0.25$ o oscillon atinge o ápice de sua amplitude, momento em que a derivada temporal se anula. A partir desse ponto, a amplitude do perfil decresce de forma gradual, culminando na anulação do campo em todo o espaço em $t = 0.5$. A configuração em $t = 0.5$ diverge da configuração inicial exclusivamente pelo sinal da derivada temporal do campo. No intervalo $[0.5, 1]$, o oscillon replica o movimento do intervalo $[0, 0.5]$, com a diferença de que o sinal do campo se inverte. As oscilações se repetem de forma indeterminada.

O oscillon compacto, no contexto do modelo signum-Gordon, não irradia sob ausência de perturbações externas (Klimas et al. [2018]). A aplicação da simetria de Lorentz possibilita a geração de oscillons em movimento (Hahne et al. [2020b]). A propriedade de anulação do campo nos instantes $t = n/2$, com n inteiro, não é invariante sob transformações de Lorentz, não se verificando em referenciais nos quais o oscillon se desloca. Em decorrência, oscillons em movimento exibem zeros isolados. A Figura 1.3.2 ilustra um exemplo de oscillons com velocidades distintas.

A compreensão analítica do movimento de oscillons é de grande importância. Estudos posteriores revelaram que oscillons são gerados a partir de configurações excitadas do campo

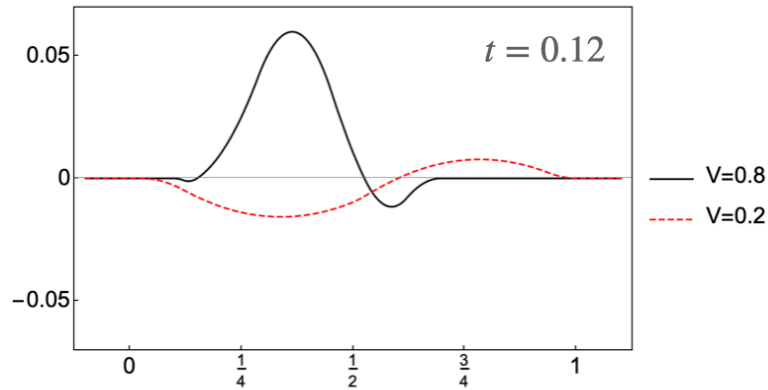


Figura 1.3.2: Evolução dos oscillons: velocidades $V = 0.2$ e $V = 0.8$ registradas em $t = 0.12$.

signum-Gordon, ou de outros campos relacionados com potenciais não analíticos (Klimas et al. [2018]). Esses resultados expandem a família de oscillons, incluindo aqueles com bordas em movimento não uniforme (Hahne et al. [2020b]), além dos oscillons básicos.

Uma generalização inicial dos oscillons básicos introduz oscillons com borda em movimento zig-zag, detalhado em Arodz and Swierczyński [2011], Hahne et al. [2020b]. A velocidade $0 \leq v < 1$ parametriza esse movimento, sendo que $v = 0$ recupera o caso do oscillon básico. Um aspecto notável é que a energia desses oscillons não varia com o valor específico desse parâmetro, sugerindo uma degenerescência que pode ser atribuída a uma simetria. A borda do oscillon consiste em linhas poligonais temporais. Conforme demonstrado em Świerczyński [2017], a transição de linhas para curvas temporais nas bordas dos oscillons levou à descoberta de uma família mais abrangente desses objetos.

A borda esquerda do oscillon é delimitada por $x_L(t)$, enquanto sua borda direita é delimitada por $x_L(t) + T$, veja Figura 1.3.3. A partir da trajetória da borda esquerda, a solução

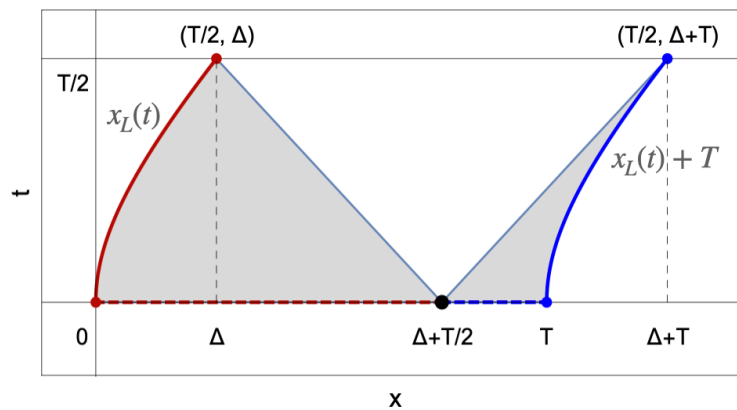


Figura 1.3.3: Construção de um oscillon generalizado

completa do oscillon pode ser construída da seguinte forma. Primeiro, devemos escrever a trajetória da borda em coordenadas de cone de luz $y_{\pm} = x \pm t$, de modo que $y_- = g(y_+)$ e $y_+ = g^{-1}(y_-)$ para alguma função g . O oscillon possui as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \phi(0, x) &= 0, \\ \partial_t \phi(0, x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq T, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

A relação entre as funções f e g é dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [x - g(x)] & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} + \Delta, \\ \frac{1}{2} [g^{-1}(x - T) - x + T] & \text{se } \frac{T}{2} + \Delta \leq x \leq T, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

onde Δ é definido como $\Delta = x_L(T/2)$. Definimos então uma função F derivada de f , tal que $F'(z) = f(z)/2$. As soluções do oscillon, válidas para o primeiro semiperíodo ($0 \leq t \leq T/2$), são expressas por:

$$\phi(t, x) = \begin{cases} F(x+t) - F(x-t+T) - \frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{8} & \text{se } x_L(t) \leq x \leq t, \\ F(x+t) - F(x-t) - \frac{t^2}{2} & \text{se } t \leq x \leq T-t, \\ F(x+t-T) - F(x-t) - \frac{t^2}{2} + \frac{T^2}{8} & \text{se } T-t \leq x \leq x_L(t) + T. \end{cases}$$

Mesmo com a generalização da forma de sua borda, a energia dos oscillons permanece invariante³, mantendo-se em $E = \frac{T^3}{24}$. A degenerescência da energia dos oscillons sugere que oscillons envolvidos em processos dinâmicos podem alterar sua forma de movimentação da borda sem necessidade de ganhar ou perder energia. De fato, observações em experimentos numéricos confirmam essa hipótese. O espalhamento de dois oscillons é um dos processos físicos que exibem esse comportamento, conforme estudado em [Hahne et al. \[2020b\]](#). Para a análise do espalhamento, utiliza-se um referencial inercial onde os oscillons possuem velocidades iguais e opostas. O espalhamento de dois oscillons básicos, com velocidades $V = \pm 0.7$ e fases $\alpha = 0$, é ilustrado na Figura 1.3.4. Neste exemplo, a configuração de campo apresenta simetria em relação à variável x . A fase do oscillon, um parâmetro importante para o espalhamento, é defi-

³Conseguimos provar, recentemente, que a simetria que assegura a invariância da energia é um difeomorfismo que mantém a área delimitada pelo perfil inicial de $\partial_t \phi$.

nida como seu estado de oscilação no instante em que os suportes dos oscillons se encontram. Como a evolução dos oscillons até o encontro é exata, a análise pode ser simplificada ao estudar apenas a configuração de campo no momento do encontro dos suportes. A evolução é numérica a partir do momento inicial, com solução exata limitada a duas regiões triangulares acima de $t = 0$, como ilustrado na Figura 1.3.4(a). No exemplo, os oscillons incidentes são simples, mas os emergentes apresentam borda oscilante. Observa-se também que a energia da colisão é parcialmente transformada em uma estrutura oscilatória central e parcialmente emitida como pequenos oscillons. Este mecanismo de emissão de oscillons a partir de configurações excitadas

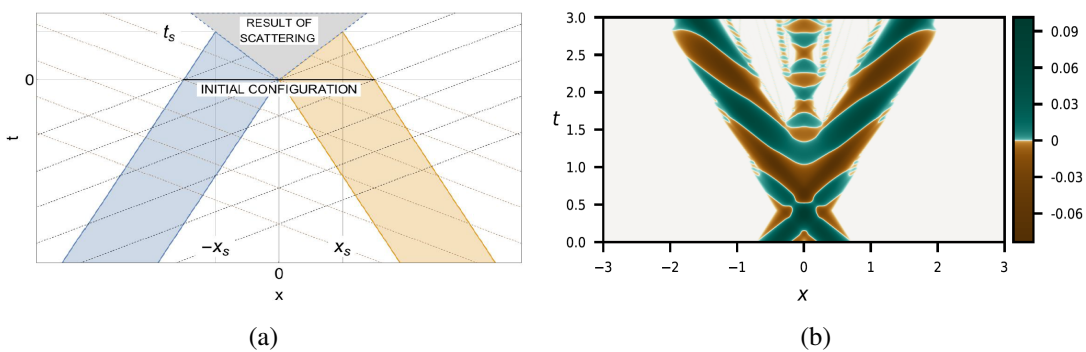


Figura 1.3.4: Espalhamento de oscillons ($V = 0.4$, $\alpha = 0$): diagramas de Minkowski mostrando (a) a fase pré-espalhamento e (b) a fase pós-encontro dos suportes.

do campo signum-Gordon é uma característica marcante. Os oscillons que carregam excesso de energia são naturalmente discretos. Isso é bem diferente da emissão de excesso de energia em modelos com mínimos quadráticos (como o modelo de Klein-Gordon), onde a radiação é liberada de forma contínua.

É importante observar que, em configurações simétricas, a estrutura central oscilatória difere de todos os oscillons conhecidos. Enquanto oscillons exatos mantêm um suporte de tamanho constante e bordas que se movem sincronizadamente na mesma direção, a estrutura central da Figura 1.3.4(b) exibe bordas com movimento oposto. Tal discrepância indica uma possível lacuna no nosso entendimento analítico das excitações do campo signum-Gordon.

Para configurações antissimétricas, o campo resultante requer $\phi(r, 0) = 0$ para $t > 0$. Como consequência, o espalhamento não gera uma estrutura oscilatória central, conforme ilustrado na Figura 1.3.5. Observa-se uma mudança no caráter dos oscillons emergentes em comparação com os incidentes. Devido à supressão da emissão de pequenos oscillons, a energia dos emergentes se mantém próxima à dos incidentes. Portanto, a alteração de caráter dos oscillons deve estar ligada à simetria que gera a degenerescência energética.

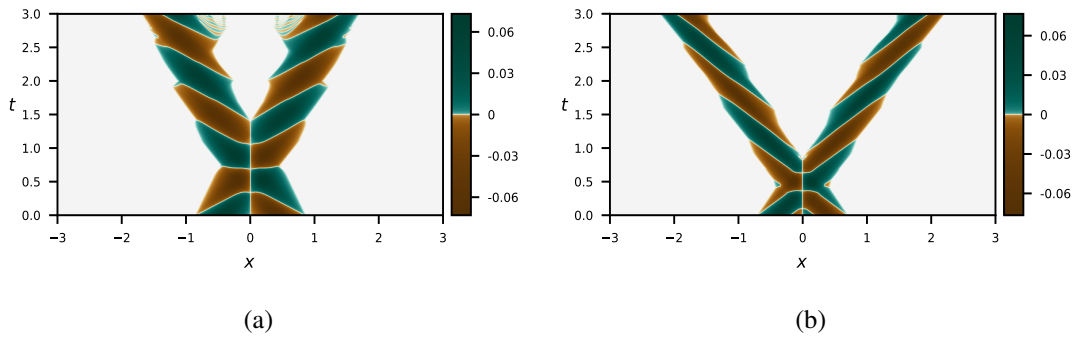


Figura 1.3.5: Espalhamento de oscillons básicos $v = 0$ em configuração inicial antissimétrica: (a) velocidade $V = 0.5$, fase $\alpha = 0$; (b) velocidade $V = 0.7$ e fase $\alpha = 0$.

Conforme os resultados em [Hahne et al. \[2020b\]](#), o espalhamento de oscillons em configurações antissimétricas resulta em pouca radiação, enquanto configurações simétricas emitem mais energia. No entanto, surpreendentemente, há casos de configurações simétricas que não emitem radiação. Este fenômeno depende de valores específicos de velocidade e fase dos oscillons. A Figura 1.3.6 mostra dois casos de espalhamento sem emissão de radiação. Este

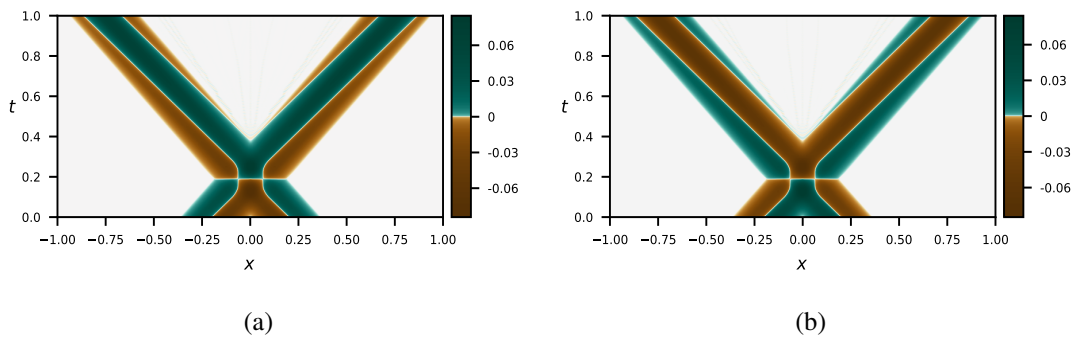


Figura 1.3.6: Espalhamento de oscillons básicos $v = 0$ em configuração inicial simétrica: (a) velocidade $V = 0.093$, fase $\alpha = 0.414$; (b) velocidade $V = 0.093$ e fase $\alpha = 0.914$.

exemplo reforça a singularidade das teorias com potencial não diferenciável. Em modelos com potenciais convencionais, a ausência de radiação é exclusiva de teorias integráveis, que possuem uma quantidade infinita de cargas conservadas. Em contraste, em modelos com potenciais não analíticos, a ausência de radiação é situacional, manifestando-se apenas para valores específicos dos parâmetros que definem as configurações iniciais.

Para finalizar, é pertinente discutir a existência de oscillons em outros modelos com potenciais não analíticos. A simetria de escala do modelo signum-Gordon, dada pela Equação 1.3.1, é precisa, resultando em oscillons de todas as dimensões e amplitudes. Em modelos genéricos com potenciais não diferenciáveis, a aproximação pelo potencial do modelo signum-

Gordon é válida apenas para pequenas excitações de campo próximas ao mínimo. Contudo, conforme demonstrado em [Klimas et al. \[2018\]](#), oscillons em um modelo não analítico análogo ao modelo de pêndulos apresentam estabilidade. A adição de termos quadráticos ao potencial $|\phi|$ não induz instabilidade. Os dados iniciais para o oscillon exato exibem uma evolução semelhante à do modelo signum-Gordon.

1.4 Ondas de choque

Para obter as primeiras soluções exatas no modelo signum-Gordon, utilizou-se a redução da equação parcial a uma equação ordinária. No caso das soluções conhecidas como ondas de choque, detalhadas em [Arodz et al. \[2005\]](#), o ansatz apresenta a seguinte forma:

$$\phi(t, x) = \theta(-z)W(z), \quad z = \frac{x^2 - t^2}{4}. \quad (1.4.1)$$

Este ansatz seleciona as soluções com forma não trivial dentro do cone de luz $z < 0$, anulando-se fora dessa região. A forma reduzida da equação signum-Gordon é dada por

$$zW'' + W' = \text{sign}(W).$$

Expressões com sinal fixo constituem as soluções parciais do problema. A conexão dessas soluções ocorre em pontos de zero, preservando a continuidade de $\frac{dW}{dz}$. Dado que o número de soluções parciais é ilimitado, é apropriado numerá-las com o índice $k = 0, 1, 2, \dots$, de maneira que

$$zW_k''(z) + W_k'(z) = (-1)^k. \quad (1.4.2)$$

Ao definir como $z_k = -a_k$ os zeros da solução, as condições que as soluções parciais devem satisfazer são: $W_k(-a_k) = 0 = W_{k+1}(-a_k)$ e $W_k'(-a_k) = W_{k+1}'(-a_k)$. A primeira condição imposta leva à seguinte expressão:

$$W_k(z) = (-1)^k \left(z + a_k + b_k \ln \frac{|z|}{a_k} \right).$$

Ressalta-se que os parâmetros b_k , juntamente com parâmetros a_k , ainda não foram determinados. A singularidade da função logarítmica em $z = 0$ exige que o coeficiente b_0 deva ser nulo. A imposição das condições remanescentes leva a restrições nos coeficientes a_k e b_k , especifica-

mente:

$$\frac{b_{k+1}}{a_k} = 2 - \frac{b_k}{a_k}, \quad \text{e} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{b_{k+1}}{a_k} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}. \quad (1.4.3)$$

Dado que $W_0(0) = a_0$, definir o valor do primeiro zero da onda é o mesmo que definir sua amplitude máxima ($\lim_{z \rightarrow 0^-} \phi$). Dado a_0 , a Expressão 1.4.3 implica em que $b_1 = 2a_0$. Embora os coeficientes b_k e e os zeros a_k possam ser obtidos recursivamente, é necessário resolver numericamente certas equações algébricas.

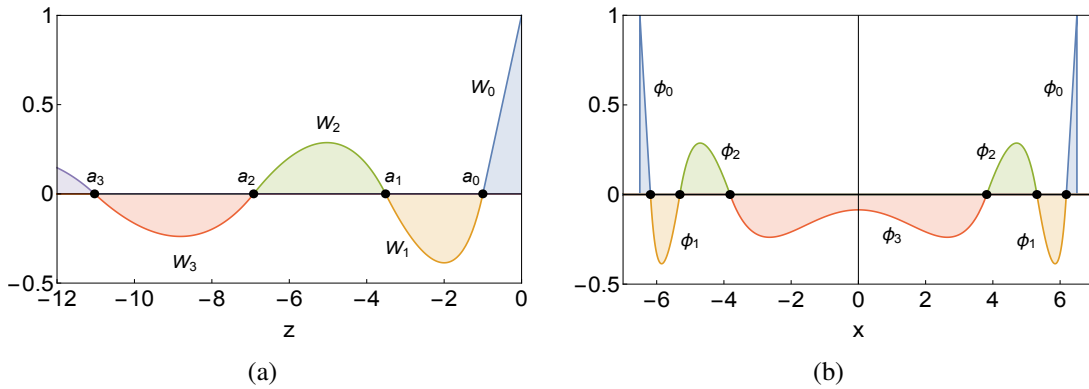


Figura 1.4.1: Onda de choque simétrica em 1+1 dimensões para $a_0 = 1$. (a) Soluções parciais W_k . (b) Solução $\phi(t,x)$ para $t = 6.5$.

A Figura 1.4.1(a) exibe a composição das cinco primeiras soluções parciais $W_k(z)$. A amplitude máxima da onda é determinada por $W_0(0) = 1$. A forma da onda de choque simétrica no tempo $t = 6.5$ é mostrada na Figura 1.4.1(b). A onda consiste em duas frentes que se movem em sentidos opostos à velocidade da luz. Durante a propagação das frentes, a região central da onda oscila, gerando novos zeros. As trajetórias desses zeros são descritas por hipérbolas:

$$x_k(t) = \pm \sqrt{t^2 - 4a_k}.$$

A velocidade dos zeros diminui de um valor infinito até a velocidade da luz à medida que o tempo tende ao infinito. Em Klimas [2007], foi apresentada uma generalização dessas ondas, considerando um potencial modificado com correção quadrática.

Durante cerca de quinze anos, as ondas de choque em 1+1 dimensões foram consideradas apenas uma curiosidade, sem aplicação evidente. A publicação dos primeiros resultados sobre o espalhamento de oscillons alterou essa perspectiva. Observa-se, em diversos casos de espalhamento de configurações simétricas (ou quase simétricas), que o campo signum-Gordon na região entre os oscillons emergentes sofre forte excitação, exibindo oscilações regulares,

logo após o encontro e separação dos oscillons principais. Um exemplo de espalhamento de dois oscillons simétricos, conforme discutido em [Hahne et al. \[2020b\]](#), é demonstrado na Figura 1.4.2(a). Parte da energia da colisão é liberada na região entre os oscillons emergentes. De forma surpreendente, os “jatos” de oscillons não surgem imediatamente após a colisão; em vez disso, são precedidos por uma onda que colapsa e gera os oscillons.⁴ Sugerimos, naquele momento, que a estrutura oscilatória poderia corresponder a uma onda de choque imperfeita, que colapsa. Para testar esta hipótese, ajustamos fórmulas para os zeros da onda de choque exata, resultando em uma concordância muito satisfatória. A Figura 1.4.2(b) apresenta uma representação de uma onda de choque exata no diagrama de Minkowski. Esta onda persiste indefinidamente.

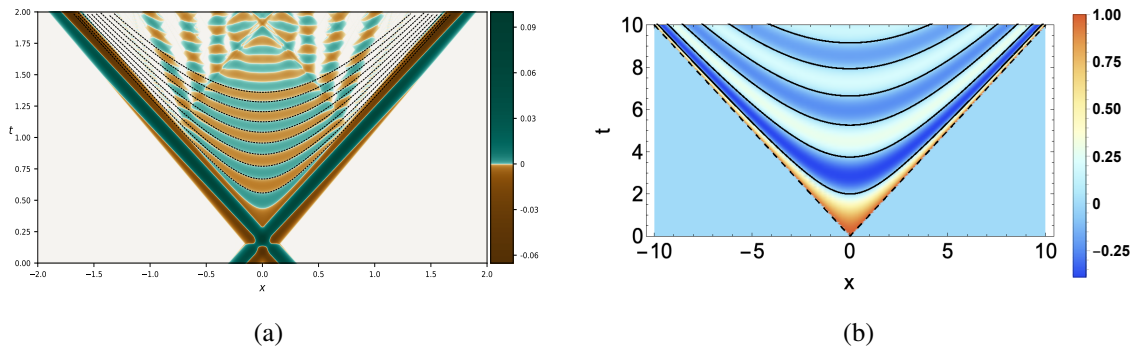


Figura 1.4.2: (a) Espalhamento de oscillons simétricos gerando "jets", precedido por uma onda de choque. (b) Representação de uma onda de choque exata.

A descoberta de ondas de choque como fases na evolução do campo signum-Gordon suscitou diversas questões. Dentre elas, a energia das ondas de choque era a principal. Nos estudos iniciais sobre ondas de choque, a energia da onda exata permaneceu sem análise. Igualmente, as condições iniciais que levam a essas configurações de campo não foram investigadas. Os primeiros resultados foram apresentados em [Hahne et al. \[2020a\]](#).

A análise de soluções analíticas para ondas de choque em 1+1 dimensões revelou que a energia do campo no interior do cone de luz (oscilações) cresce linearmente com o tempo, sendo proporcional ao produto da área ocupada pela onda no tempo t e o valor da descontinuidade do campo na superfície do cone de luz, representado por $W_0(0)$, ou seja $E = 2a_0t$. A persistência da onda implica uma transferência contínua de energia para o cone de luz, onde ela se manifesta. Isso suscita a questão do reservatório energético. Teoricamente, tal reservatório

⁴O estado de onda de choque, anterior à produção de oscillons, apresenta uma vaga semelhança com o estado de plasma que antecede a hadronização.

deve ser infinito. As frentes de onda de choque, que acumulam energia de gradiente, são as únicas configurações com energia infinita neste sistema.

A geração de ondas a partir de condições iniciais é outra questão crucial, especialmente relevante para a análise de processos dinâmicos envolvendo ondas de choque. Uma onda de choque exata no tempo inicial $t = 0$ está localizada em um ponto espacial, exigindo que o campo seja nulo em todo o espaço, com exceção da derivada temporal. Conforme [Hahne et al. \[2020a\]](#), as condições iniciais apropriadas são dadas por:

$$\phi(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_t \phi(t, x)|_{t=0} = a \delta_\varepsilon(x), \quad (1.4.4)$$

em que δ_ε representa a regularização da função Delta de Dirac. Para a análise numérica do problema, que lida com valores finitos, a regularização da função delta é indispensável. O parâmetro ‘ a ’ na Expressão 1.4.4 corresponde a $2a_0$ para uma onda de choque exata ($\varepsilon = 0$), portanto, determina a amplitude da onda no cone de luz. O caso com regularização, no entanto, é consideravelmente mais interessante devido a sua maior semelhança com os processos de espalhamento, nos quais a energia transferida para a onda é sempre limitada. É importante notar que a forma da função $\delta_\varepsilon(x)$ pode apresentar variações significativas. Estudos realizados em [Hahne et al. \[2020a\]](#) com funções de perfis triangular e gaussiano mostraram que os resultados são independentes dessa escolha. As simulações numéricas mostram que as condições iniciais mostradas na Expressão 1.4.4 levam à formação de uma onda de choque, que subsequentemente colapsa, resultando na emissão de oscillons. A escolha de valores menores para o parâmetro ε permite retardar esse colapso. A Figura 1.4.3 mostra como a formação de onda de choque varia com o valor do parâmetro ε .

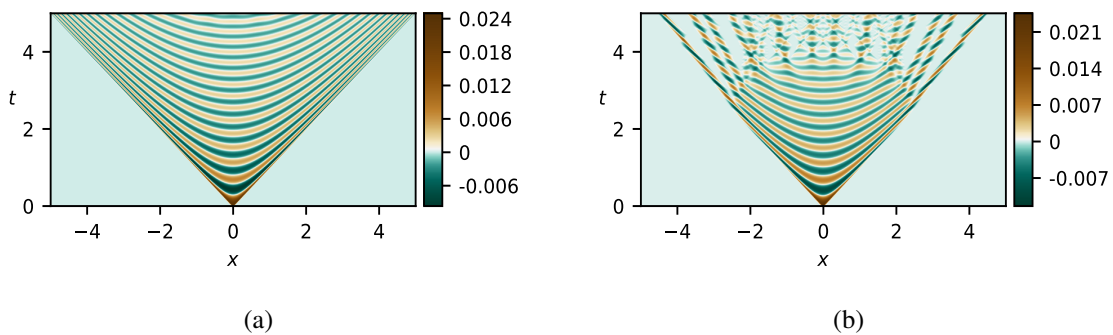


Figura 1.4.3: Formação de onda de choque a partir de condições iniciais: (a) com $\varepsilon = 10^{-6}$, (b) com $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

A razão para o colapso da onda reside no fato de que o perfil inicial $\partial_t \phi|_{t=0}$ possui

uma quantidade finita de energia. Diferentemente de ondas com descontinuidade na superfície do cone de luz, a amplitude dessa onda diminui progressivamente durante sua evolução. O colapso se inicia nas proximidades do cone de luz e se estende até a região central $x = 0$.

No contexto da geração de ondas de choque em processos dinâmicos, como o espalhamento de oscillons, a forma do campo escalar em $x = 0$ no instante da separação dos oscillons é crucial. Em configurações antissimétricas, a nulidade do campo em $x = 0$ impede a formação da onda, como evidenciado pelas simulações. Já em configurações simétricas, a similaridade com os dados iniciais mostrados na Expressão 1.4.4 permite a emergência da onda. Entretanto, a limitação da energia disponível leva ao colapso da onda em uma cascata de oscillons. O colapso de uma onda de choque, seguido pela produção de uma grande quantidade de oscillons, constitui um mecanismo fundamental para a diminuição da energia de certas configurações do campo signum-Gordon. Estabelecendo uma analogia com os processos de espalhamento de partículas elementares, é possível considerar que a onda desempenha um papel análogo ao plasma de quarks e gluons, enquanto seu decaimento e a produção de oscillons evocam o processo de hadronização. Isso porque esse campo se pode ser referido como um submodelo do modelo de Skyrme de sexta ordem, derivado como um campo efetivo do modelo de sigma não linear da QCD de baixas energias Klimas et al. [2018]. A Figura 1.4.4 apresenta uma comparação entre as ondas produzidas “naturalmente” no espalhamento de oscillons e as ondas geradas “artificialmente” a partir das condições iniciais da Expressão 1.4.4.

A geração de ondas não se restringe ao espalhamento de oscillons. Esse fenômeno também ocorre no espalhamento de kinks compactos. No próximo capítulo desta tese, será abordada a generalização das ondas de choque para dimensões espaciais superiores.

1.5 Espalhamento de compactons

O conceito de espalhamento desempenha um papel fundamental na física de altas energias, possibilitando a descoberta da maioria das partículas elementares e a revelação das interações fundamentais da natureza (Joachain [1975], Messiah [1961], Newton [1982], Peskin and Schroeder [1995b], Sitenko [1991], Taylor [1972], Weinberg [1995]). Na física atômica, o espalhamento de núcleos é crucial para a coleta de dados essenciais à pesquisa (Friedman and Kendall [1991], Hofstadter [1956], Rutherford [1911], Satchler [1980]), assim como na física molecular e cristalografia (Barron [2004], Child [1996], Fabelinskii [1968], Weiner and Ho [2003]).

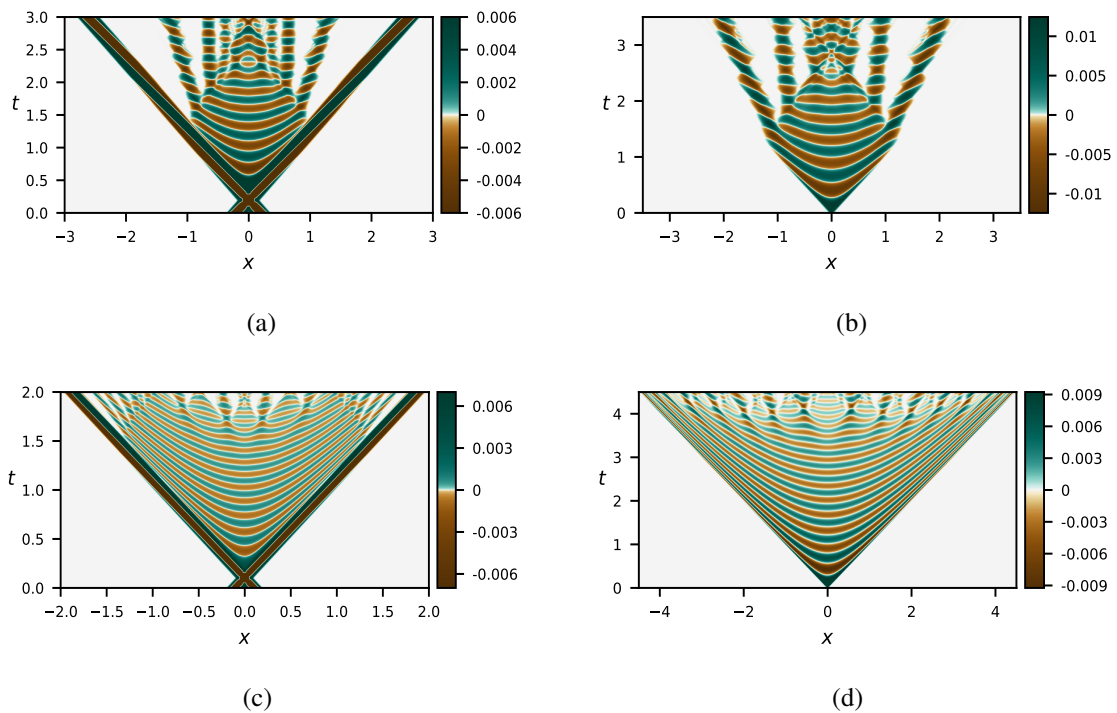


Figura 1.4.4: Comparativo de ondas de choque: (a) e (c) originadas no espalhamento de oscilons, (b) e (d) efeito da evolução temporal de condições iniciais com perfil triangular.

Na teoria clássica de campos, o espalhamento também é de grande importância (Goldberger and Watson [1964], Landau and Lifshitz [1977]). A análise de colisões de ondas solitárias revelou que essas configurações formam estruturas especiais, dando origem à teoria de solitons e à integrabilidade de modelos (Ablowitz and Segur [1981], Faddeev and Takhtajan [1987], Zakharov and Shabat [1972]). Em modelos não integráveis, a dinâmica de espalhamento é geralmente mais complexa, exigindo maior esforço para explicar os fenômenos observados. A riqueza de fenômenos associados ao espalhamento de kinks, vórtices e outros objetos topológicos, aliada ao avanço do poder computacional, impulsionou esta área de pesquisa, tornando-a extremamente ativa nos dias atuais, (Belendryasova et al. [2021], Dorey et al. [2011], Evslin [2022], Lizunova and van Wezel [2020]).

Nesta seção, revisaremos alguns resultados importantes sobre o espalhamento em modelos com potenciais não analíticos, com foco específico na interação kink-oscillon e nas colisões kink-kink e kink-antikink. Todas essas estruturas são compactas; portanto, é sempre possível escolher um estado inicial no qual a interação entre os objetos que colidem seja exatamente zero. O problema do espalhamento de oscilons já foi abordado no contexto dos próprios oscilons e ondas de choque, portanto, não o trataremos novamente aqui.

1.5.1 Interação entre kinks e oscillons

Modelos com potencial não analítico exibem uma simetria de escala aproximada na vizinhança dos mínimos de seus potenciais. Isso sugere que, no limite de pequenas amplitudes, os oscillons nesses modelos devem se aproximar dos oscillons exatos do modelo signum-Gordon. Essa hipótese foi demonstrada em [Klimas et al. \[2018\]](#), em que se estudou um modelo com potencial não analítico nos mínimos, formado por um número infinito de parábolas, semelhante ao potencial mostrado na Figura 1.1.3. Curiosamente, um potencial desse tipo emerge do modelo de Skyrme, conforme demonstrado em [Adam et al. \[2017\]](#), ampliando o campo de aplicações para modelos com potenciais não analíticos. Os mínimos desse potencial podem ser tratados como mínimos de um potencial de signum-Gordon perturbado. Vários testes numéricos demonstraram que excitações de campo desse tipo evoluem de forma qualitativamente semelhante ao comportamento apresentado pelos oscillons exatos, embora emitam um pouco de energia na forma de pequenos oscillons.

Uma estrutura de mínimos degenerados possibilita a existência de kinks compactos interpolando esses mínimos. Nesse contexto, surge naturalmente a questão sobre a dinâmica desses kinks e de oscillons do modelo. Essa investigação é abordada em [Hahne and Klimas \[2022\]](#). Os autores consideram uma configuração inicial para o campo escalar $\eta(t, x)$, composta por um kink estático $\eta_K(x)$ e um oscillon em movimento, deslocando-se na direção do kink:

$$\begin{aligned}\eta(0, x) &= \eta_K(x) + \chi_{\text{osc}}(0, x), \\ \partial_t \eta(0, x) &= \partial_t \chi_{\text{osc}}(0, x).\end{aligned}$$

Em $t = 0$, os suportes compactos de kink e oscillon entram em contato. O oscillon é definido por quatro parâmetros: o tamanho do seu suporte l , a velocidade do centro de massa V , a velocidade da borda v_0 , que descreve um movimento em *zigzag*, e a fase de oscilação α no momento do encontro.

Segundo a publicação, o parâmetro v_0 apresenta baixa influência no resultado da colisão entre compactons. Para exemplificar, a Figura 1.5.1 demonstra os resultados apresentados pelos autores, em que a velocidade V do oscillon é o parâmetro variável. É importante entender um oscillon incidente como uma configuração do campo escalar que, no modelo signum-Gordon, tinha uma solução exata. No entanto, por causa dos termos quadráticos, a solução aqui é apenas uma aproximação. Por causa disso, um oscillon com $v_0 = 0$ não mantém necessaria-

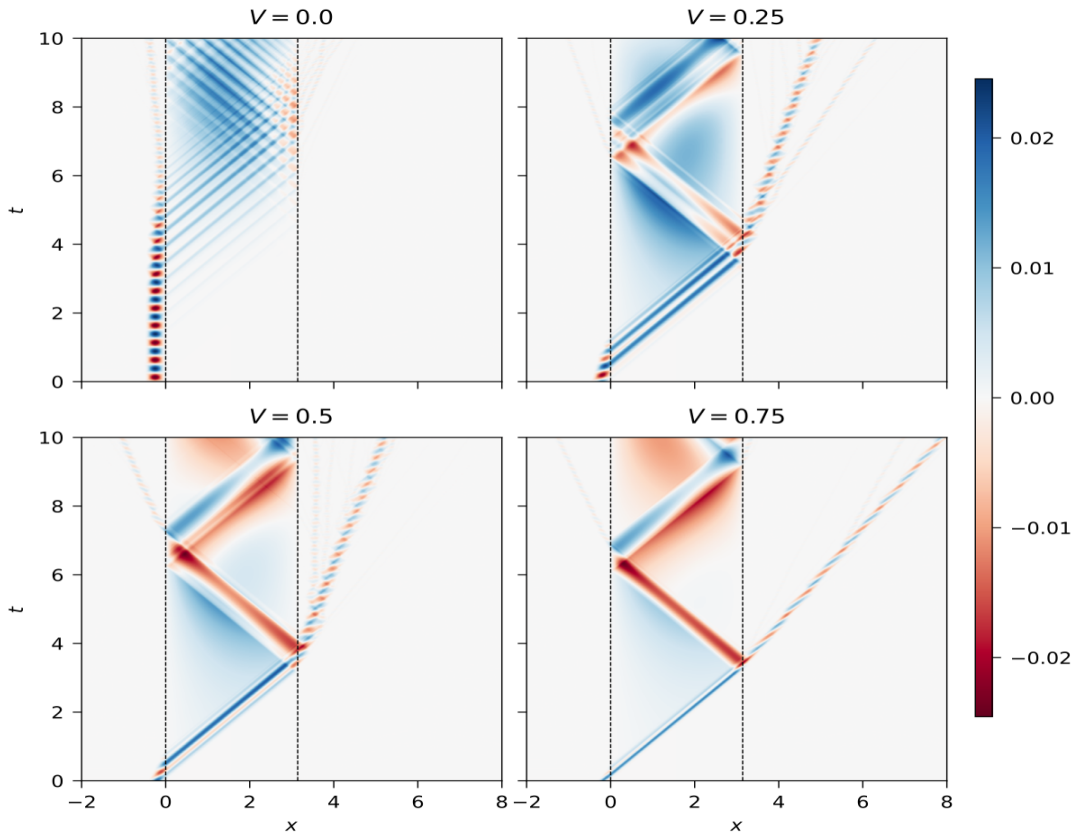


Figura 1.5.1: Colisão oscillon-kink. Fonte: [Hahne and Klimas \[2022\]](#).

mente a posição fixa do seu suporte. Em consequência, como mostrado na primeira figura, um oscillon parado ($V = 0$) começa a interagir com um kink, perdendo sua energia e eventualmente desaparecendo. Nos casos em que a velocidade V é maior que zero, o oscillon adentra a região ocupada pelo kink de forma significativamente mais rápida. É notório que, ao penetrar no corpo do kink, o sinal propaga-se à velocidade da luz até alcançar a extremidade oposta, onde uma fração do sinal é refletida de volta através do kink e outra fração emerge como um oscillon em movimento uniforme⁵.

A razão pela qual o oscillon se comporta de forma tão diferente no kink em relação ao vácuo é que as equações que governam a propagação do sinal no kink são diferentes da equação de signum-Gordon. Para valores do campo no intervalo $-2 < \eta < 2$, a equação do campo se simplifica para:

$$\partial_t^2 \eta - \partial_x^2 \eta + \text{sign}(\eta) - \eta = 0.$$

Expressando a equação do campo em termos da perturbação $\chi(t, x) = \eta(t, x) - \eta_K(t, x)$, obte-

⁵Dado que o kink não sofre deslocamento durante este processo, ele foi subtraído do campo η para aprimorar a visualização (apenas as bordas do kink foram destacadas)

mos

$$\partial_t^2 \eta_K - \partial_x^2 \eta_K + \text{sign}(\eta_K + \chi) - \eta_K + \partial_t^2 \chi - \partial_x^2 \chi - \chi = 0.$$

Para perturbações suficientemente pequenas, de modo que $\text{sign}(\eta_K + \chi) = \text{sign} \eta_K$, a equação se simplifica para uma equação de Klein-Gordon com massa $m^2 = -1$:

$$\partial_t^2 \chi - \partial_x^2 \chi - \chi = 0.$$

As soluções desta equação são ondas planas da forma $e^{i(kx + \omega_k t)}$, em que a relação de dispersão é dada por $-\omega_k^2 + k^2 - 1 = 0$. Os modos da solução completa contém conjunto crescente e decrescente. Usualmente, conjunto crescente é eliminado porque crescimento indeterminado não é físico. Nesta situação específica, a aplicabilidade da equação de Klein-Gordon é restrita pela condição $\text{sign}(\eta_K + \chi) = \text{sign} \eta_K$. Esta restrição significa que não existe a necessidade de suprimir modos crescentes, cuja remoção resultaria em não causalidade, conforme referenciado em [Aharonov et al. \[1969\]](#). Em consequência, a causalidade é mantida e não há evidência de propagação de sinais taquiônicos no interior do kink.

A presença de kinks compactos e a propagação de impulsos através deles têm sido objeto de estudo na literatura. Modelos de campo com potenciais padrão, mas com termos cinéticos não usuais (denominados K-campos), foram introduzidos por [Adam et al. \[2007\]](#). Esses autores propuseram a utilização de defeitos topológicos (kinks em cinco dimensões) como uma forma de branas cósmicas, nas quais outros campos de matéria poderiam existir ([Adam et al. \[2008b\]](#)). De fato, o cenário de ‘thick brane’ representa uma alternativa à compactificação de dimensões extras ([Randall and Sundrum \[1999\]](#)). Em trabalhos subsequentes, como o de [Adam et al. \[2008a\]](#), foram apresentados kinks compactos no contexto da gravitação. No entanto, este cenário ainda não foi explorado no caso de modelos com potenciais não analíticos, o que abre uma possível linha de pesquisa futura.

1.5.2 A dinâmica das colisões de kinks

A compreensão do espalhamento kink-antikink envolve examinar como esses defeitos topológicos interagem, e esse comportamento pode variar significativamente dependendo do potencial da teoria de campos. Por exemplo, o modelo ϕ^4 exhibe colisões inelásticas. Isso significa que, quando um kink e um antikink colidem, eles não simplesmente ricocheteiam perfeitamente. Em vez disso, podem sofrer interações complexas, incluindo a formação de estados

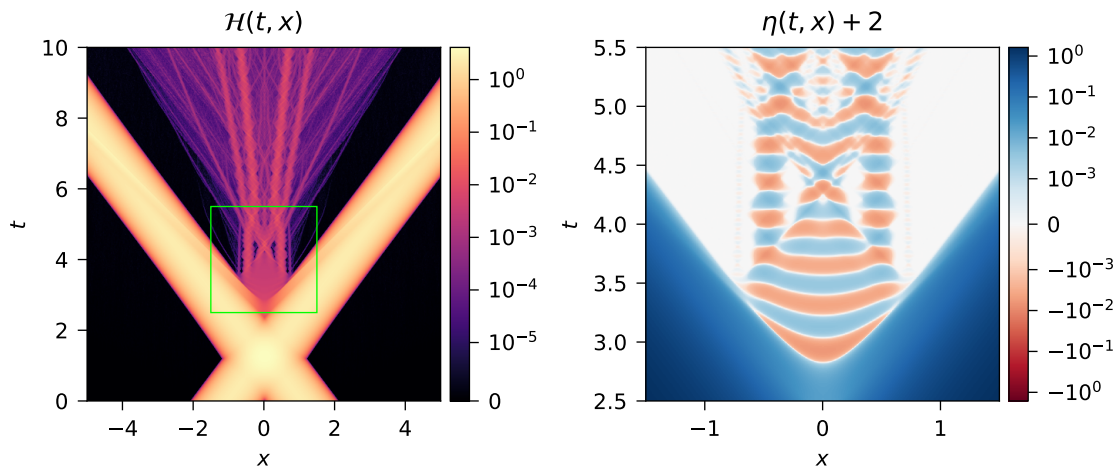


Figura 1.5.2: Espalhamento kink-antikink para $v = 0.75$. Esquerda: densidade hamiltoniana. Direita: ampliação da diferença entre o valor do campo e o vácuo -2 , ou seja, $\eta(t, x) + 2$, para a região dentro do retângulo verde no painel direito. Fonte: [Hahne and Klimas \[2024a\]](#).

ligados e a emissão de radiação ([Adam et al. \[2022, 2023a\]](#), [Sugiyama \[1979\]](#)). Uma característica chave é a presença de ‘janelas de ressonância’. Estas são faixas de velocidade específicas onde o kink e o antikink podem se aniquilar, oscilar múltiplas vezes e, em seguida, escapar ou formar um estado ligado. O resultado da colisão é altamente dependente da velocidade inicial dos kinks. Por outro lado, modelos com potenciais em forma de V exibem um comportamento de espalhamento distinto ([Hahne and Klimas \[2024a,b\]](#), [Hahne and Thibes \[2025\]](#)). Em contraste com o modelo ϕ^4 , esses potenciais tendem a produzir espalhamento kink-antikink com uma separação mais clara entre cenários de captura e escape. Frequentemente, existe uma velocidade crítica que divide nitidamente esses resultados, com menos do comportamento complexo de múltiplos rebotes observado no modelo ϕ^4 . Uma característica notável é a forte emissão de radiação, frequentemente na forma de oscillons compactos. A Figura 1.5.2, apresentada em [Hahne and Klimas \[2024a\]](#), demonstra claramente a produção de oscillons durante o processo de espalhamento kink-antikink. Adicionalmente, observa-se que os oscillons emergem da onda de choque resultante do colapso, de maneira análoga ao que ocorre no espalhamento de oscillons. Esses modelos demonstraram comportamento fractal em torno da velocidade crítica. A principal diferença reside na complexidade dos resultados do espalhamento. O modelo ϕ^4 exibe um comportamento mais rico e matizado com janelas de ressonância, enquanto os potenciais em forma de V tendem a produzir resultados mais limpos e distintos.

1.6 Q-balls

Todas as soluções revisadas anteriormente referem-se a soluções em uma dimensão espacial. Uma abordagem para a ampliação do número de dimensões espaciais foi proposta em [Arodz and Lis \[2008\]](#). Os autores consideram um campo escalar complexo ψ e estudam soluções não topológicas denominadas Q-balls ([Coleman \[1985\]](#)). Define-se o modelo complexo de signum-Gordon por meio da densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \lambda |\psi| \quad (1.6.1)$$

em que ψ representa um campo complexo em $(d+1)$ dimensões e $\lambda > 0$. A Lagrangiana (1.6.1) é invariante sob as transformações globais $U(1)$

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha) \psi(x).$$

As cargas conservadas associadas a esta simetria são dadas por:

$$Q = \frac{1}{2i} \int d^d x (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi). \quad (1.6.2)$$

A densidade de energia, expressa por:

$$T_{00} = \partial_0 \psi^* \partial_0 \psi + \partial_i \psi^* \partial_i \psi + \lambda |\psi| \quad (1.6.3)$$

apresenta um mínimo absoluto em $\psi = 0$. O potencial $\lambda |\psi|$ pode ser visto como uma regularização $V_\kappa = \lambda \sqrt{\kappa + |\psi|^2}$ resultando em $\frac{dV_\kappa}{d\psi^*} = \frac{\lambda}{2} \frac{\psi}{\sqrt{\kappa + |\psi|^2}}$.

As Q-balls simétricas são soluções descritas pelo Ansatz:

$$\psi(x^0, \vec{x}) = \exp(i\omega x^0) F(r)$$

em que r representa a variável radial para $d > 1$ e $r = x^1$ para $d = 1$. Definindo novas variáveis $y = \omega r$ e $f(y) = \frac{2\omega^2}{\lambda} F(r)$, obtém-se:

$$f'' + \frac{d-1}{y} f' + f = \text{sign}(f),$$

em que $\text{sign}(0) \equiv 0$. As soluções devem satisfazer a condição $f'(0) = 0$ para $d > 1$. Analisando

a energia $E = \int d^d x T_{00}$ da carga de Noether (Expressão 1.6.2), os autores observam que elas obedecem a relação de escala

$$E = c_2 \lambda^{\frac{2}{d+3}} \left(\frac{Q}{c_1} \right)^{\frac{d+2}{d+3}}.$$

Dado que o expoente $\frac{d+2}{d+3}$ é inferior a 1, a energia de um Q-ball esfericamente simétrico com carga $Q = Q_1 + Q_2$ é menor do que a energia de um sistema composto por Q-balls separados, com cargas $Q_1 > 0$ e $Q_2 > 0$. Este fato implica que a divisão de um Q-ball em Q-balls menores não é energeticamente favorável. Conseqüentemente, o valor do expoente determina a estabilidade das soluções.

Os autores apresentam soluções exatas para a função $f(y)$ nas dimensões $d = 1$ e $d = 3$. Em ambos os casos, a função de perfil dos Q-balls é compacta:

$$f_{d=1}(y) = \begin{cases} 1 - \sin y & \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.6.4)$$

$$f_{d=3}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y_0 \sin y}{y \sin y_0} & 0 \leq y_0 \\ 0 & y > y_0 \end{cases} \quad (1.6.5)$$

em que $y_0 \approx 4.4934$ é a solução da equação $\tan y_0 = y_0$.

Os campos escalares são frequentemente utilizados para modelar matéria. Quando a matéria possui carga elétrica, a descrição teórica deve considerar este aspecto. Em particular, isto implica que Q-balls compactas também podem apresentar carga elétrica. A repulsão associada a esta carga deve influenciar o raio das Q-balls. Conforme relatado em [Arodz and Lis \[2009\]](#), os autores expandem o modelo de Arodz para incluir o campo eletromagnético, e o modelo resultante é o seguinte:

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu \psi^* D^\mu \psi - \lambda |\psi|^2,$$

em que a derivada covariante é dada por $D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético. As equações de campo incluem as equações de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \text{onde} \quad j^\nu = iq(\psi^* \partial^\nu \psi - \psi \partial^\nu \psi^*) - 2A^\nu \psi^* \psi,$$

e a equação para o campo escalar:

$$D_\mu D^\mu \psi = -\frac{\lambda}{2} \frac{\psi}{|\psi|}.$$

As soluções de Q-balls são obtidas assumindo que:

$$\psi = \exp(i\omega t)F(r), \quad \vec{A} = 0, \quad A_0 = A_0(r).$$

Consequentemente, as funções $F(r)$ e A_0 devem satisfazer o seguinte sistema de equações acopladas:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_0 &= 2q(\omega + qA_0)F^2 \\ \nabla^2 F + (\omega + qA_0)^2 F &= \text{sign} F. \end{aligned}$$

Os autores identificaram dois tipos distintos de soluções. O primeiro tipo consiste em Q-balls compactas, que ocupam uma região esfericamente simétrica definida por $0 \leq r \leq R$. A energia dessas Q-balls, para valores não muito elevados, comporta-se como $E \sim |Q|^{5/6}$, em que Q representa a carga de Noether. O segundo tipo de soluções, denominadas Q-shells, ocupam uma camada esférica delimitada por um raio interno R_1 e um raio externo R_2 . A energia dessas Q-shells obedece à relação $E \sim |Q|^{7/6}$ para Q-shells de grande porte. A existência de Q-shells no modelo de signum-Gordon é atribuída à repulsão eletrostática de cargas elétricas.

Os Q-shells também foram descobertos em modelos sem campo eletromagnético. Eles surgem devido a uma estrutura complexa do modelo, que envolve múltiplos campos complexos. O modelo em questão é o modelo CP^N com potencial não analítico (Klimas and Livramento [2017]):

$$\mathcal{L} = -\frac{M^2}{2} \text{Tr}(X^{-1} \partial_\mu X)^2 - \mu^2 V(X), \quad (1.6.6)$$

em que

$$V(X) = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbb{I} - X)]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.6.7)$$

A variável X , denominada variável principal, representa uma forma conveniente de parametrização do modelo. Introduzindo os campos escalares complexos u_i , em que $i = 1, 2, \dots, N$,

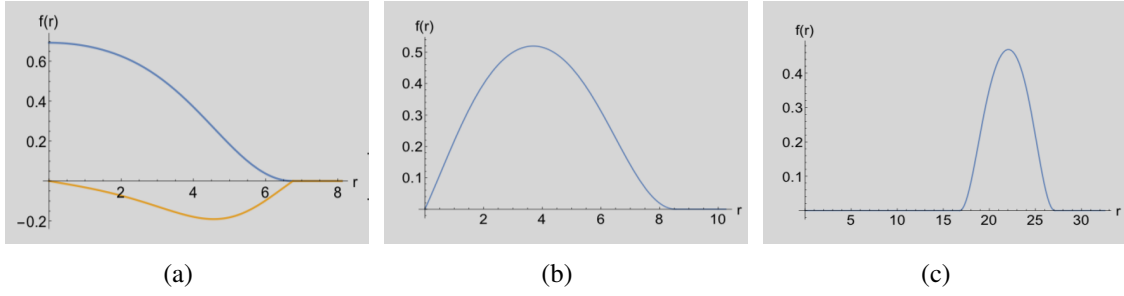


Figura 1.6.1: (a) Q-ball com $l = 0$, (b) Q-ball com $l = 1$. (c) Q-shell com $l = 10$. Fonte: [Klimas and Livramento \[2017\]](#).

definimos:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{N \times N} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\vartheta^2} \begin{pmatrix} -u \otimes u^\dagger & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix},$$

com $\vartheta^2 \equiv 1 + u^\dagger u$. A equação de movimento resultante é:

$$\partial_\mu \partial^\mu u_i - 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial_\mu u_i}{1 + u^\dagger \cdot u} + \frac{\mu^2}{8M^2} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger \cdot u}} \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u} = 0. \quad (1.6.8)$$

Esta equação reduz-se a múltiplas cópias do modelo signum-Gordon complexo no limite de pequenas amplitudes de campo. Quando N é ímpar, a equação pode ser reduzida a uma equação radial considerando o seguinte Ansatz

$$u_m(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i\omega t}, \quad (1.6.9)$$

em que $m = -l, \dots, l$ assume $2l + 1$ valores. O fator $\exp(i\omega t)$ é um fator característico para Q-balls, e Y_{lm} representam os harmônicos esféricos. A equação radial assume a forma

$$f'' + \frac{2}{r} f' + \omega^2 \frac{1-f^2}{1+f^2} f - \frac{l(l+1)}{r^2} f - \frac{2ff'^2}{1+f^2} = \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \text{sign}(f) \sqrt{1+f^2}. \quad (1.6.10)$$

De acordo com os autores, a presença de Q-balls foi observada nos casos $l = 0$ e $l = 1$. Especificamente, para $l = 0$ função $f(0)$ é diferente de zero, enquanto para $l = 1$ a função $f(0)$ é proporcional a r na região central. A função perfil para Q-balls foi representada nas figuras 1.6.1(a) e (b). Para obter estas soluções, realiza-se uma expansão em torno do centro e da borda $r = R$. Na sequência, o perfil é calculado utilizando o método de “shooting”. A solução correta

é aquela para a qual a função e sua derivada espacial são nulas em $r = R$. O parâmetro ω possui um limite inferior, o que implica a existência de um valor mínimo para a ‘rotação’ das Q-balls. Modelos com $l > 1$ permitem a existência de Q-shells. Estas soluções caracterizam-se por assumir o valor de vácuo, $f = 0$, tanto no interior da cavidade esférica, definida por $r < R_1$, quanto no exterior, para $r > R_2$. Tanto Q-balls quanto Q-shells são estáveis, obedecendo à relação $E \sim |Q|^{5/6}$.

Uma das aplicações mais promissoras para Q-balls e Q-shells são as estrelas de bósons, em que o campo escalar é adicionalmente acoplado à gravitação. As referências (Klimas et al. [2019], Sawado and Yanai [2020, 2021]) documentam a descoberta de soluções compactas que consideram os efeitos da gravitação e da carga elétrica. Adicionalmente, as Q-shells podem abrigar um buraco negro em seu interior. As soluções deste tipo são denominadas “harbor”. Ao estender o modelo incluindo mais uma componente CP^N , é possível, utilizando a compacticidade das soluções, construir configurações onde um Q-shell abriga, em seu interior, um Q-ball ou outro Q-shell. Estes tipos de modelos foram denominados modelos CP^N multicomponentes, conforme referenciado em Klimas et al. [2021]. Especificamente, ao considerar a inclusão do campo eletromagnético, torna-se viável a construção de configurações neutras que apresentam cargas iguais e opostas em seus constituintes, conforme documentado em Klimas et al. [2023].

Em resumo, Q-balls oferecem uma forma não trivial de obter soluções esféricamente simétricas no modelo signum-Gordon e em modelos CP^N com potencial não analítico. As soluções deste tipo apresentam potencial para a modelagem de estrelas de bósons.

2 Ondas de Choque Exatas

Neste capítulo, apresentaremos nossa contribuição original para a generalização de soluções do modelo signum-Gordon em dimensões espaciais superiores. Em particular, estamos interessados em estender ondas de choque para os casos de $n = 2$ e $n = 3$ dimensões. Este trabalho foi publicado recentemente em [Klimas and Streibel \[2025\]](#).

2.1 Ansatz para onda de choque em $(n + 1)$ dimensões

Em espaços com $(n + 1)$ dimensões, a equação (SG) assume a forma:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\phi(t, \vec{x}) + \text{sign}\phi(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.1.1)$$

A configuração de vácuo, caracterizada por $\phi = 0$, representa uma configuração de campo fisicamente realizável, especialmente em modelos mecânicos. Com o objetivo de incluir este caso no conjunto de soluções da Equação 2.1.1, estabelecemos a convenção de que $\text{sign}(0) = 0$, seguindo a mesma abordagem utilizada em modelos unidimensionais. Esta definição será utilizada consistentemente ao longo deste estudo.

Utilizando coordenadas esféricas, a Equação 2.1.1 pode ser reescrita como:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \nabla_{S^{n-1}}^2 \right) \phi(t, \vec{x}) + \text{sign}(\phi(t, \vec{x})) = 0, \quad (2.1.2)$$

onde r representa a coordenada radial $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e o operador $\nabla_{S^{n-1}}^2$ determinado pelas variáveis angulares. Buscamos soluções com simetria esférica (independentes dos ângulos).⁶ Consequentemente, $\nabla_{S^{n-1}}^2 \phi(t, r) = 0$, o que leva à seguinte simplificação da equação do campo:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{n-1}{r} \partial_r \right) \phi(t, r) + \text{sign}(\phi(t, r)) = 0. \quad (2.1.3)$$

Introduzindo as coordenadas do cone de luz, definidas por $\xi := \frac{1}{2}(r + t)$ e $\eta := \frac{1}{2}(r - t)$, a

⁶Por exemplo, em $n = 3$ dimensões, é possível explorar soluções da forma $\phi(t, \vec{x}) = \sum_{l,m} f_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Esta

abordagem introduz um termo adicional $\frac{l(l+1)}{r^2} f_l(r)$ na equação de movimento. Contudo, a natureza de mudança de sinal dos harmônicos esféricos em relação aos ângulos complicaria o tratamento do termo signum, $\text{sign}(\phi)$, na equação de movimento. Esta interdependência entre as coordenadas angulares e radiais impediria a separação efetiva das variáveis, impossibilitando a obtenção de uma equação dependente apenas do tempo e da coordenada radial. Um argumento similar pode ser utilizado para o caso $n = 2$, onde $\phi(t, \vec{x}) = \sum_k f_k(t, r) \cos(k\varphi)$.

equação satisfeita pelo campo escalar $\phi(\xi, \eta)$ é:

$$-\partial_\xi \partial_\eta \phi - \frac{n-1}{2} \frac{\partial_\xi \phi + \partial_\eta \phi}{\xi + \eta} + \text{sign}(\phi) = 0. \quad (2.1.4)$$

A equação em questão possui soluções que obedecem a uma equação diferencial ordinária. Estas soluções são funções de uma única variável, $z := \xi\eta$, que representa o produto das coordenadas do cone de luz, e podem ser expressas na forma:

$$\phi(\xi, \eta) = W(z) \quad \text{onde} \quad z = \frac{1}{4}(r^2 - t^2). \quad (2.1.5)$$

Considerando esta classe de soluções, a equação em derivadas parciais (2.1.4) é reduzida a:

$$-zW'' - \frac{n+1}{2}W' + \text{sign}(W) = 0. \quad (2.1.6)$$

No decorrer deste artigo, adotaremos a notação de derivada prima para denotar a primeira derivada e as derivadas de ordem superior, especificamente $W' \equiv \frac{dW}{dz}$. Esta convenção será aplicada de forma consistente em todo o texto.

Assumimos que a solução é não nula dentro do cone de luz ($z < 0$) e nula fora ($z > 0$). Dado que $\text{sign}(0)$ é definido como 0, a solução constante $W(z) = 0$ satisfaz a equação para a região $z > 0$.

Neste estudo, investigamos funções que apresentam descontinuidades no cone de luz ($r = t$) motivados pelo nosso interesse em ondas de choque. Uma referência a investigações anteriores dessas soluções de ondas de choque em uma dimensão espacial pode ser encontrada em [Arodz et al. \[2006\]](#). Seguindo essa abordagem, examinamos expressões da forma:

$$\phi(z) = \theta(-z)W(z), \quad (2.1.7)$$

onde $\theta(-z)$ representa a função degrau de Heaviside. Definimos o lado esquerdo da equação SG (2.1.4) na variável z como:

$$F(\phi) := -\left(z\phi'(z)\right)' - \frac{n-1}{2}\phi'(z) + \text{sign}(\phi(z)). \quad (2.1.8)$$

Ao substituir (2.1.7) em (2.1.8), obtemos um termo de delta de Dirac:

$$(F(\phi), \varphi(z)) = (C_n \delta(z), \varphi(z)), \quad C_n \equiv \frac{n-1}{2} W(0). \quad (2.1.9)$$

Seguindo Vladimirov [1971], a ação de uma função generalizada $f(z)$ sobre uma função teste $\varphi(z)$ é representada por $(f, \varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \varphi(z)$. Em particular, a distribuição delta de Dirac age sobre uma função teste de acordo com $(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) \varphi(z) = \varphi(0)$. Esse resultado também pode ser obtido utilizando identidades como:

$$\theta'(-z) = -\delta(z), \quad z\delta(z) = 0, \quad z\delta'(z) = -\delta(z), \quad \text{sign}(\theta(-z)W(z)) = \theta(-z)\text{sign}(W(z)).$$

De forma consistente com Arodz et al. [2006], a expressão (2.1.7) representa uma solução da equação homogênea $F(\phi) = 0$ quando $n = 1$ (ou seja, $C_1 = 0$). Esta solução é obtida resolvendo a equação diferencial ordinária (2.1.6) com a coordenada radial $r \geq 0$ substituída por um número real x .

No entanto, para $n \neq 1$, o termo $F(\phi)$ não se anula ($C_n \neq 0$). Conseqüentemente, a expressão (2.1.7) é proporcional à *solução fundamental* $D(z)$ da equação distribucional:

$$(F(D(z)), \varphi(z)) = (\delta(z), \varphi(z)). \quad (2.1.10)$$

Nesse caso, $\phi(z) = D(z)$ satisfaz a equação para $W(0) := \frac{2}{n-1}$.

De maneira semelhante às soluções observadas em uma dimensão espacial ($n = 1$) para a equação SG Arodz et al. [2005] (ou suas formas perturbadas Klimas [2007]), espaços de dimensões superiores ($n \geq 2$) podem exibir soluções de onda de choque com um valor fixo de descontinuidade na superfície do cone de luz. É possível que soluções semelhantes existam em dimensões superiores, caso uma força adicional seja aplicada à superfície do cone de luz. Matematicamente, essas soluções seriam descritas por uma equação SG não homogênea, Equação 2.1.9, contendo um termo delta proporcional ao valor da descontinuidade $W(0)$.

A liberação de $W(0)$ possibilita a identificação de uma família uniparamétrica de soluções que estendem as ondas de choque de $(1+1)$ dimensões. A investigação dessas soluções em dimensões superiores ($n \geq 2$) é apresentada a seguir. Embora soluções numéricas sejam viáveis, o foco é a análise de soluções analíticas. Apresentamos um resumo dessas novas soluções, com detalhes adicionais nas Seções (2.3) e (2.4).

A construção de ondas de choque envolve a combinação de soluções analíticas definidas em pequenos segmentos, denominados "patches". A função $W(z)$ para $z < 0$ é obtida a partir da união dessas soluções, que são chamadas de *soluções parciais*.

Para derivar fórmulas exatas para as soluções parciais, assumimos que $W(z)$ é uma expressão não constante, ou seja, só pode ser igual a zero em pontos específicos e isolados ao longo do eixo z . Excluindo esses pontos isolados onde $W(z)$ se anula, temos que $W(z)$ é estritamente positivo ou negativo. Nesse contexto, é conveniente reescrever $\text{sign}(W) = \pm 1$ como $\text{sign}(W_k) = (-1)^k$, onde $k = 0, 1, \dots$ rotula as soluções parciais consecutivas W_k . Com essa notação, a Equação 2.1.6 transforma-se no seguinte sistema de equações diferenciais homogêneas lineares:

$$-zW_k'' - \frac{n+1}{2}W_k' + (-1)^k = 0. \quad (2.1.11)$$

Esta equação admite duas classes de soluções:

$$W_k(z) = \alpha_k + \beta_k \ln(-z) + (-1)^k z \quad \text{para } n = 1 \quad (2.1.12)$$

e

$$W_k(z) = \alpha_k + \beta_k (-z)^{-\frac{n-1}{2}} + \frac{2(-1)^k}{n+1} z, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (2.1.13)$$

O primeiro tipo de solução, (2.1.12), foi extensivamente estudado em trabalhos anteriores Arodz et al. [2006], Hahne et al. [2020a]. Esta tese concentra-se no segundo tipo, Equação 2.1.13.

As soluções são parametrizadas pela constante livre $\alpha_0 \equiv W_0(0)$. Ao fixar $\beta_0 = 0$, obtemos uma solução parcial W_0 definida no intervalo $-a_0 < z < 0$, com $a_0 > 0$. A relação entre α_0 e a_0 varia com a dimensão: $\alpha_0 = a_0$ para $n = 1$, e $\alpha_0 = \frac{n+1}{2}a_0$ para $n \geq 2$.

A continuidade entre as soluções $W_1(z)$ e $W_0(z)$ em $z = -a_0$ é garantida pelas condições $W_1(-a_0) = 0$ e $W_1'(-a_0) = W_0'(-a_0)$. Essas condições possibilitam o cálculo de α_1, β_1 , e do próximo zero, $z = -a_1$, onde $W_1(-a_1) = 0$. A iteração desse processo gera a solução completa, obtida através da formulação e resolução de relações de recorrência. As Seções (2.3) e (2.4) apresentam uma forma específica de soluções parciais, ilustradas nas Figuras 2.3.1 e 2.4.1.

2.2 Energia da onda de choque

2.2.1 Distribuição de energia da onda de choque

Com a propagação da onda de choque, ocorre uma expansão temporal da região que contém o campo escalar excitado. Um aspecto notável é o comportamento da energia da onda⁷ que está confinada inteiramente *dentro do cone de luz* ($r < t$). A energia é representada pela seguinte integral:

$$E(t) = \int_{K(0,t)} d^n x \left[\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 + |\phi| \right]. \quad (2.2.1)$$

O suporte da solução, $K(0,t)$ corresponde a uma n -esfera centrada em $\vec{r} = 0$ com raio r . A integral exclui a descontinuidade da onda, que se encontra no cone de luz ($r = t$).

A energia da onda foi calculada dividindo-a em três zonas distintas, delimitadas pelo cone de luz:

1. $r < t$: Região interna do campo, com energia de comportamento regular. Detalhes na Seção (2.2.2);
2. $r = t$: Superfície do cone de luz, onde a energia é indefinida devido à descontinuidade do campo e ao termo delta principal (2.1.10). Abordado na Seção (2.2.3);
3. $r > t$: Região do vácuo trivial fora do cone.

Apesar da discrepância entre soluções exatas idealizadas, com energia de gradiente infinita no cone de luz, e simulações numéricas, soluções exatas com energia não limitada, como ondas de choque e soluções auto-similares, são importantes em aplicações físicas. Processos como o espalhamento de oscillons compactos [Hahne et al. \[2020b\]](#) apresentam configurações de campo semelhantes a essas soluções, frequentemente em intervalos de tempo finitos. Em [Hahne et al. \[2020a\]](#), a comparação do campo de radiação de um espalhamento com ondas de choque obtidas para dados iniciais específicos revela uma notável semelhança entre as configurações.

2.2.2 Energia dentro do cone de luz

Dado que ϕ depende apenas de t e r , a expressão (2.2.1) simplifica para:

$$E(t) = \int_{\mathcal{S}_n} d\Omega \int_0^t dr r^{n-1} \sum_{k=0}^{k_{\max}(t)} H_k(t, r), \quad (2.2.2)$$

⁷Energia das oscilações pós-frente de onda

onde $W_k(z)$ são as soluções parciais, definidas por (2.1.12) e (2.1.13). A densidade de energia das soluções parciais é dada por:

$$H_k(t, r) = \frac{r^2 + t^2}{8} W_k'^2(z) + (-1)^k W_k(z), \quad z = \frac{1}{4}(r^2 - t^2).$$

Na equação (2.2.2), $k_{\max}(t)$ indica o maior índice de uma solução parcial $W_k(z)$ que se encontra dentro do cone de luz no instante t . O número de soluções parciais que compõem a onda de choque em t é finito e crescente com o tempo. A integral $\int_{\mathcal{S}_n} d\Omega$ representa o elemento de área de uma esfera unitária em n dimensões espaciais.

As funções $W_k(z)$ e $W_k'(z)$ são não nulas apenas no intervalo aberto $-a_k < z < -a_{k-1}$, anulando-se fora dele. Consequentemente, $W(-a_k) = 0$. Os zeros a_k são representados algebricamente de forma diferente dependendo da dimensão espacial. Para simplificar a notação, definimos $i \equiv k_{\max}(t)$. O i -ésimo zero ocorre em $r = 0$ no tempo $t_i = 2\sqrt{a_i}$. No intervalo $t_{i-1} < t < t_i$, a onda é composta por $i + 1$ soluções parciais, indexadas por $k = 0, 1, \dots, i$.

Para evidenciar a contribuição de cada solução parcial, decompos a energia (2.2.2) na seguinte soma:

$$E(t) = \sum_{k=0}^i E_k(t). \quad (2.2.3)$$

As energias $E_k(t)$, para $k = 0, 1, \dots, i - 1$, representam as energias das i primeiras soluções parciais, localizadas em camadas com raios $c_k(t) \leq r \leq c_{k-1}(t)$. A energia $E_i(t)$ representa a energia da solução parcial central, que se encontra dentro da bola $0 \leq r \leq c_{i-1}(t)$. Os zeros radiais variáveis do campo escalar, definidos por $\phi(t, r)|_{r=c_k(t)} = 0$, têm a seguinte forma:

$$c_k(t) := \sqrt{t^2 - 4a_k}. \quad (2.2.4)$$

Devido às notáveis propriedades de cancelamento na Equação 2.2.3, a expressão da energia se reduz a uma fórmula elegante, detalhada nas seções subsequentes. O resultado final é surpreendentemente compacto:

$$E(t) = \int_{\mathcal{S}_n} d\Omega \int dr r^{n-1} [\phi]_{z=0},$$

onde $\int d\Omega$ representa a integral sobre a esfera unitária em n dimensões e $[\phi]_{z=0}$ denota a descontinuidade do campo no cone de luz ($r = t$). A energia da onda dentro do cone de luz é dada pelo produto do volume n -dimensional ($\text{vol}_n(t)$) de uma bola de raio t pela descontinuidade do campo. As Seções (2.3) e (2.4) demonstram essa redução explicitamente para $n = 2$ e $n = 3$,

respectivamente.

É importante observar que a energia das ondas de choque em uma dimensão espacial pode ser formulada de forma similar. Neste caso, a expressão se simplifica para $E(t) = 2t [\phi]_{z=0} = a_0 \text{vol}_1(t)$, onde $\text{vol}_1(t) = 2t$ e a_0 é uma constante que representa a descontinuidade do campo. Essa formulação destaca que a energia de uma onda unidimensional confinada no cone de luz cresce proporcionalmente ao tempo ($E(t) \propto \text{vol}_1(t)$). Essa proporcionalidade entre a energia da onda e o volume do cone de luz também parece ser válida para dimensões superiores ($n = 2, 3$), de forma que

$$E(t) = \text{vol}_n(t) [\phi]_{z=0}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3. \quad (2.2.5)$$

2.2.3 Energia na superfície do cone de luz

O cálculo da energia dentro do cone de luz ($r < t$) foi abordado nas seções anteriores. Nesta seção, trataremos dos desafios da estimativa precisa da energia na superfície do cone de luz ($r = t$). Essa discussão é essencial para modelos regularizados que empregam potenciais em forma de V ou suas implementações numéricas.

Ondas de choque apresentam uma descontinuidade abrupta no campo escalar (ϕ) na superfície do cone de luz. Essa descontinuidade dificulta o cálculo da densidade de energia por métodos padrão, que requerem funções contínuas e bem comportadas para o campo e suas derivadas.

O cálculo da densidade de energia para configurações de campo escalar envolve o quadrado do gradiente do campo. Em ondas de choque, o gradiente se comporta como uma função delta de Dirac (δ) na superfície do cone de luz. A dificuldade surge porque o quadrado de uma distribuição (como a delta de Dirac) não é uma operação matematicamente bem definida, impossibilitando o cálculo direto da densidade de energia no cone de luz. Um tratamento puramente formal resulta em energia infinita.

Apesar da dificuldade em calcular a energia exata na superfície do cone de luz, a técnica de "regularização" pode ser utilizada para simplificar os cálculos. A regularização suaviza o termo delta, permitindo definir uma densidade de energia regular.

A regularização, embora útil, introduz algumas considerações adicionais:

1. *Não convergência:* O processo de regularização introduz um parâmetro (ϵ) na expressão final da energia. Este parâmetro aparece no denominador, o que significa que o cálculo

da energia não converge (não atinge um valor definido) quando ε tende a zero.

2. *Descontinuidade suavizada*: A regularização suaviza a descontinuidade abrupta no campo (ϕ) no cone de luz, transformando-a em uma inclinação. Isso afeta o termo do gradiente, que contribui para a densidade total de energia.
3. *Superfície localizada*: Devido à regularização, a superfície infinitesimal do cone de luz se torna uma região estreita com espessura 2ε , centrada em $r = t$. Isso aumenta a dimensionalidade da superfície, tornando-a n -dimensional em vez de $(n - 1)$ dimensional (onde n representa o número de dimensões espaciais).
4. *Reservatório finito e expansão limitada*: A regularização cria um reservatório de energia finito, embora extremamente denso, na superfície do cone de luz. Este reservatório atua como uma fonte, fornecendo energia para a onda que se propaga dentro do cone à medida que se expande. Na ausência de forças externas (equação homogênea), a onda pode continuar a se expandir enquanto o reservatório tiver energia suficiente. Isso sugere que uma onda de choque formada a partir de uma descontinuidade inicial não pode manter suas características indefinidamente. No entanto, sistemas com uma força delta (ou uma função delta regularizada) no cone de luz podem exibir expansão regular.
5. *Crescimento do tamanho da frente de onda*: Existe uma diferença fundamental entre as frentes de onda em uma e em dimensões espaciais superiores. Em uma dimensão, a frente de onda consiste em dois pontos. Em duas dimensões, forma-se um círculo, e em três dimensões, uma esfera. O tamanho dessa característica geométrica (círculo ou esfera) aumenta com o tempo à medida que a onda se expande. Isso significa que a densidade de energia de uma descontinuidade inicial de energia finita se torna menos concentrada à medida que a frente de onda se expande (mesmo sem considerar a energia total transferida para dentro do cone de luz). Notavelmente, esse efeito de dispersão da densidade de energia não ocorre em uma dimensão, o que explica por que oscilações regulares são observadas apenas em sistemas de dimensões superiores com uma força delta presente. Estudos anteriores [Hahne:2019odw] investigaram os estágios iniciais da evolução de ondas em uma dimensão espacial ($n = 1$), focando em cenários sem uma força delta externa na superfície do cone de luz.

2.3 Ondas de choque em $(2 + 1)$ dimensões

Nesta seção, apresentamos uma análise detalhada de uma nova solução exata para ondas de choque. Além disso, examinaremos o conteúdo energético dessas ondas, com ênfase na contribuição da região dentro do cone de luz.

2.3.1 Soluções parciais e relações de recorrência

As soluções parciais para ondas de choque em duas dimensões espaciais são dadas pela fórmula:

$$W_k(z) = \alpha_k + \frac{\beta_k}{\sqrt{-z}} + \frac{2}{3}(-1)^k z, \quad \text{com } z < 0. \quad (2.3.1)$$

Para evitar singularidades no campo no cone de luz ($z = 0$), o parâmetro β_0 deve ser igual a zero. O primeiro zero da solução (em $z = -a_0$) é determinado pela condição $W_0(-a_0) = 0$, resultando em $\alpha_0 = \frac{2}{3}a_0$. Portanto:

$$W_0(z) = \frac{2}{3}(z + a_0). \quad (2.3.2)$$

A descontinuidade do campo no cone de luz ($z = 0$), é determinada pelo primeiro zero da solução $W_0(z)$, e é denotada por:

$$[\phi]_{z=0} := \lim_{z \rightarrow 0^-} \phi(z) - \lim_{z \rightarrow 0^+} \phi(z) = \lim_{z \rightarrow 0^-} W_0(z) = \frac{2}{3}a_0. \quad (2.3.3)$$

A descontinuidade do campo no cone de luz pode ser considerada um parâmetro independente, determinando o valor de a_0 . Através de relações de recorrência, todos os outros parâmetros e zeros da solução podem ser calculados. O zero inicial ($z = -a_0$) coincide com um zero de $W_1(z)$, permitindo expressar α_1 em função de a_0 . De forma análoga, a condição $W_k(-a_{k-1}) = 0$ simplifica a eliminação dos parâmetros α_k subsequentes. Assim, obtemos:

$$W_k(z) = (-1)^k \left[\frac{2}{3}(z + a_{k-1}) + b_k \left(\frac{1}{\sqrt{-z}} - \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3.4)$$

onde $b_k \equiv (-1)^k \beta_k$.

A continuidade da derivada primeira, $W'(z)$, da solução $W(z)$ nos pontos correspon-

dentos, $W'_k(-a_{k-1}) = W'_{k-1}(-a_{k-1})$, resulta em relações de recorrência para os coeficientes b_k :

$$b_k = -b_{k-1} - \frac{8}{3}a_{k-1}^{3/2}, \quad (2.3.5)$$

com $b_0 = 0$ como condição inicial. Os coeficientes b_k são determinados pela soma dos parâmetros anteriores (a_n), com $n < k$:

$$b_k = \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{n+k} a_n^{3/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3.6)$$

O k -ésimo zero da solução, $z = -a_k$, é obtido da equação $W_k(-a_k) = 0$, que pode ser reescrita como uma equação de segunda ordem para $\sqrt{a_k}$:

$$(\sqrt{a_k})^2 + \sqrt{a_{k-1}}\sqrt{a_k} + \frac{3}{2} \frac{b_k}{\sqrt{a_{k-1}}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3.7)$$

A solução da equação (2.3.7) para $\sqrt{a_k}$ seguida da elevação ao quadrado, resulta em:

$$a_k = s_k a_{k-1} = \left(\prod_{i=0}^k s_i \right) a_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3.8)$$

onde:

$$s_0 \equiv 1, \quad (2.3.9)$$

$$s_k \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \xi_k - \sqrt{1 - 2\xi_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3.10)$$

e:

$$\xi_k \equiv 8 \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{n+k} \left(\frac{a_n}{a_{k-1}} \right)^{3/2} = 8 \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{n+k} \left(\frac{\prod_{i=0}^n s_i}{\prod_{j=0}^{k-1} s_j} \right)^{3/2}. \quad (2.3.11)$$

Observa-se que cada zero a_k é proporcional ao zero inicial a_0 .

As soluções parciais $W_k(z)$ podem ser expressas especificamente como:

$$W_0(z) = \frac{2}{3}(z + a_0), \quad (2.3.12)$$

$$W_k(z) = \frac{2}{3} (-1)^k \frac{\sqrt{a_k} + \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}} \left(\sqrt{a_k} - \sqrt{-z} \right) \left(\sqrt{-z} - \sqrt{a_{k-1}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3.13)$$

onde:

$$d_k \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \xi_k + \sqrt{1 - 2\xi_k} \right) a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3.14)$$

e $a_{k-1} < -z < a_k$. As relações de recorrência das equações (2.3.8)–(2.3.11) determinam os zeros da função $W(z)$. Esta solução permite a determinação analítica dos zeros em dimensões superiores, ao contrário do caso unidimensional, que geralmente exige métodos numéricos. A Figura 2.3.1 ilustra $W(z)$ e a onda de choque em um espaço bidimensional.

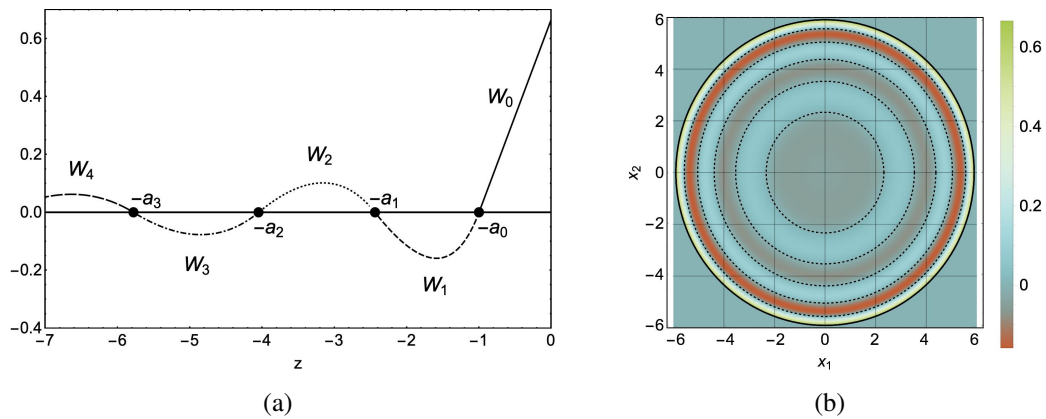


Figura 2.3.1: (a) Soluções parciais $W_k(z)$ e (b) a onda de choque em $t = 6.0$ em duas dimensões espaciais.

2.3.2 Energia da onda de choque em (2+1) dimensões

Em duas dimensões espaciais, as expressões para $W_k(z)$ são fornecidas pelas equações (2.3.2) e (2.3.1). As derivadas $W'_k(z)$ são dadas por

$$W'_0(z) = \frac{2}{3}, \quad (2.3.15)$$

$$W'_k(z) = (-1)^k \left(\frac{2}{3} + \frac{b_k}{2(-z)^{3/2}} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3.16)$$

A energia da solução, conforme (2.2.2), é dada por:

$$E(t) = 2\pi \left[\int_0^{c_{i-1}} dr r H_i(t, r) + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{c_k}^{c_{k-1}} dr r H_k(t, r) + \int_{c_0}^t dr r H_0(t, r) \right], \quad (2.3.17)$$

para $t > 2\sqrt{a_{i-1}}$. Quando $t < 2\sqrt{a_0}$, a soma em (2.3.17) se reduz a um único termo:

$$E(t) = 2\pi \int_0^t dr r H_0(t, r) = \pi t^2 \frac{2a_0}{3} = \text{vol}_2(t) [\phi]_{z=0}, \quad (2.3.18)$$

válida antes do surgimento de $c_0(t)$.

Para demonstrar que a equação (2.3.17) se reduz a $\text{vol}_2(t) [\phi]_{z=0}$ reescrevemos os integrais em (2.3.17):

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{c_{i-1}} dr r H_i(t, r) &\equiv X_i(t), \\ 2\pi \int_{c_k}^{c_{k-1}} dr r H_k(t, r) &\equiv \underbrace{2\pi \int_{c_k}^0 dr r H_k(t, r)}_{Y_k(t)} + \underbrace{2\pi \int_0^{c_{k-1}} dr r H_k(t, r)}_{X_k(t)}, \\ 2\pi \int_{c_0}^t dr r H_0(t, r) &\equiv \underbrace{2\pi \int_{c_0}^0 dr r H_0(t, r)}_{Y_0(t)} + \underbrace{2\pi \int_0^t dr r H_0(t, r)}_{X_0(t)}. \end{aligned}$$

A soma dos termos resulta em:

$$E(t) = X_i(t) + \sum_{k=0}^{i-1} (X_k(t) + Y_k(t)) = X_0(t) + \sum_{k=1}^i (X_k(t) + Y_{k-1}(t)). \quad (2.3.19)$$

Ao substituir a solução analítica nas fórmulas, obtemos:

$$X_0(t) = \frac{2}{3} \pi a_0 t^2, \quad (2.3.20)$$

$$X_k(t) = \frac{\pi}{72} \frac{c_{k-1}^2}{a_{k-1}^2} \left[3b_k + 4a_{k-1}^{3/2} \right]^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3.21)$$

$$Y_k(t) = -\frac{\pi}{72} \frac{c_k^2}{a_k^2} \left[48a_{k-1}a_k^2 - 32a_k^3 + 96b_k a_k^{3/2} - 72a_k^2 \frac{b_k}{\sqrt{a_{k-1}}} + 9b_k^2 \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.22)$$

A equação (2.3.22) pode ser reescrita utilizando as relações das equações (2.3.5) e a identidade $\frac{b_k}{\sqrt{a_{k-1}}} = -\frac{2}{3} [a_k + \sqrt{a_{k-1}} \sqrt{a_k}]$ (obtida de (2.3.7)). Após manipulação algébrica, obtemos:

$$Y_k(t) = -\frac{\pi}{72} \frac{c_k^2}{a_k^2} \left[3b_{k+1} + 4a_k^{3/2} \right]^2, \quad (2.3.23)$$

$$+ \frac{3\pi}{2} c_k^2 \left[a_{k+1} + a_{k-1} - 4a_k + \sqrt{a_k} \left(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_{k-1}} \right) \right]. \quad (2.3.24)$$

O primeiro termo, (2.3.23), é equivalente a $-X_{k+1}$, enquanto o segundo termo, (2.3.24), é proporcional a $W_k(-a_k)$. Como $z = -a_k$ é um zero de $W_k(z)$, o segundo termo se anula. Ao

substituir $z = -a_k$ em (2.3.4), obtemos:

$$-a_k + a_{k-1} + \frac{3}{2} \frac{b_k}{\sqrt{a_k}} - \frac{3}{2} \frac{b_k}{\sqrt{a_{k-1}}} = 0.$$

Através da substituição de b_{k+1} por b_k conforme a relação em (2.3.5) e da eliminação dos termos $\frac{b_{k+1}}{\sqrt{a_k}}$ e $\frac{b_k}{\sqrt{a_{k-1}}}$, usando a equação (2.3.7), chegamos à identidade:

$$a_{k+1} + a_{k-1} - 4a_k + \sqrt{a_k} \left(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_{k-1}} \right) = 0.$$

A identidade estabelece que:

$$X_{k+1}(t) + Y_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.25)$$

A equação (2.3.19) expressa a energia $E(t)$ da onda de choque em (2+1) dimensões como:

$$E(t) = \frac{2}{3} \pi a_0 t^2 = \text{vol}_2(t) [\phi]_{z=0}, \quad (2.3.26)$$

onde $\text{vol}_2(t) = \pi t^2$ e a descontinuidade $[\phi]_{z=0}$ é dada pela equação (2.3.3).

2.4 Ondas de choque em (3 + 1) dimensões

2.4.1 Soluções parciais e relações de recorrência

Em três dimensões ($n = 3$), as soluções parciais para ondas de choque são dadas por:

$$W_k(z) = \frac{1}{2} (-1)^k z + \alpha_k + \frac{\beta_k}{z}, \quad (2.4.1)$$

com $\beta_0 = 0$. A condição $W_k(-a_{k-1}) = 0$ elimina α_k , resultando em

$$W_0(z) = \frac{1}{2}(z + a_0), \quad (2.4.2)$$

$$W_k(z) = (-1)^k \left[\frac{1}{2}(z + a_{k-1}) + b_k \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{a_{k-1}} \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4.3)$$

onde $\beta_k = (-1)^k b_k$. As soluções parciais $W_{k-1}(z)$ e $W_k(z)$ são compatíveis em $z = -a_{k-1}$, ou seja, $W'_k(-a_{k-1}) = W'_{k-1}(-a_{k-1})$. A condição de compatibilidade resulta na relação de

recorrência:

$$b_k = -b_{k-1} + a_{k-1}^2,$$

com $b_0 = 0$, cuja solução é

$$b_k = -\sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{n+k} a_n^2. \quad (2.4.4)$$

Impondo $W_k(-a_k) = 0$, obtemos a relação de recorrência $a_k = \frac{2b_k}{a_{k-1}}$. Combinando com (2.4.4), encontramos:

$$a_k = \frac{2}{a_{k-1}} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{n+k-1} a_n^2. \quad (2.4.5)$$

A solução simples para (2.4.5) é:

$$a_k = (k+1)a_0. \quad (2.4.6)$$

Essa solução é verificada por substituição em (2.4.5) e usando

$$\sum_{m=1}^k (-1)^{m+k} m^2 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

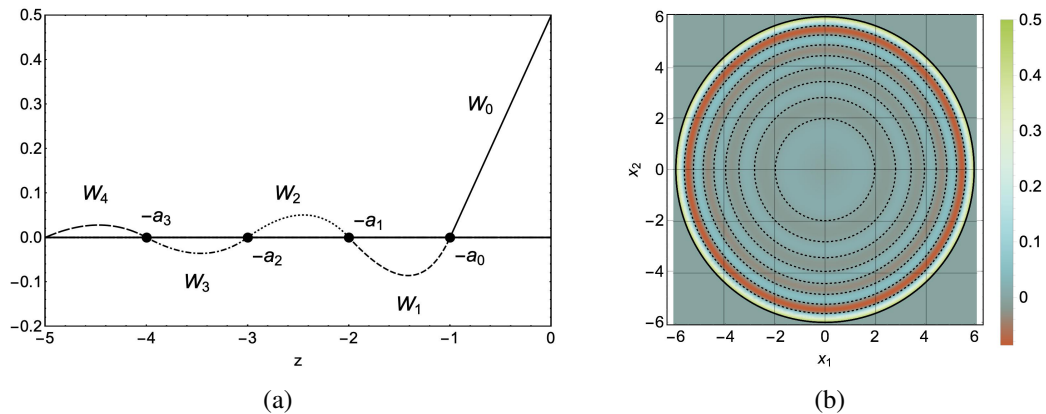


Figura 2.4.1: (a) Soluções parciais $W_k(z)$ e (b) a seção da onda de choque em $x^3 = 0$ em $t = 6.0$ em três dimensões espaciais.

A determinação precisa das posições dos zeros é crucial, pois possibilita a derivação de expressões explícitas para as soluções parciais:

$$W_k(z) = \frac{(-1)^k}{2z} (z + ka_0) (z + (k+1)a_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.7)$$

A Figura 2.4.1(a) ilustra uma seleção representativa das soluções parciais $W_k(z)$.

2.4.2 Energia da onda de choque em (3+1) dimensões

A energia de uma onda de choque em (3+1) dimensões é dada pela fórmula (2.3.19), onde:

$$X_0(t) \equiv 4\pi \int_0^t dr r^2 H_0(t, r), \quad (2.4.8)$$

$$X_k(t) \equiv 4\pi \int_0^{c_{k-1}} dr r^2 H_k(t, r), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4.9)$$

$$Y_k(t) \equiv 4\pi \int_{c_k}^0 dr r^2 H_k(t, r), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.10)$$

Ao substituir a expressão de $W_k(z)$ em (2.4.7) e a forma específica de $W'_k(z)$,

$$W'_k(z) = \frac{(-1)^k}{2z^2} \left(z^2 - k(k+1)a_0^2 \right), \quad (2.4.11)$$

nas equações (2.4.8), (2.4.9) e (2.4.10), obtemos:

$$X_0(t) = 4\pi \left(\frac{a_0}{6} t^3 \right), \quad (2.4.12)$$

$$X_k(t) = 4\pi \left(\frac{a_0}{24k} c_{k-1}^3(t) \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4.13)$$

$$Y_k(t) = 4\pi \left(-\frac{a_0}{24(k+1)} c_k^3(t) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.14)$$

As relações (2.4.13) e (2.4.14) mostram que $X_k(t) = -Y_{k-1}(t)$, simplificando a fórmula de energia (2.3.19) em (3+1) dimensões para $E(t) = X_0(t)$, válida para todo t . Isso significa que a energia da onda dentro do cone de luz cresce cubicamente com o tempo. A descontinuidade do campo no cone de luz em três dimensões é:

$$[\phi]_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0^-} W_0(z) = \frac{a_0}{2}. \quad (2.4.15)$$

Ao considerar o volume da esfera ocupada pela onda, $\text{vol}_3(t) = \frac{4\pi}{3} t^3$, estabelecemos a relação entre a energia da onda, o volume e a intensidade da descontinuidade:

$$E(t) = \text{vol}_3(t) [\phi]_{z=0}. \quad (2.4.16)$$

Este resultado, juntamente com a equação (2.3.26), conclui a demonstração da fórmula (2.2.5).

2.5 Aproximação numérica da solução com força delta de Dirac

Na Seção (2), demonstramos que existe uma solução para a equação diferencial ordinária envolvendo uma força delta de Dirac. Essa solução descreve a propagação de uma configuração de campo que exibe uma descontinuidade persistente no cone de luz. A equação possui a forma $F(\phi(z)) = C_n \delta(z)$, onde $F(\phi)$ é definida pela equação (2.1.8) e $C_n \equiv \frac{n-1}{2} W(0)$. A forma geral da solução está apresentada na equação (2.1.7), que utiliza a função degrau de Heaviside.

Nesta seção, aplicaremos métodos numéricos para obter uma aproximação numérica da solução $\phi(z)$ em resposta à força delta $\delta(z)$.

Para contextualizar a solução numérica do nosso problema, revisitaremos o oscilador harmônico, um exemplo fundamental com semelhanças importantes. As soluções fundamentais do oscilador harmônico satisfazem a equação

$$D''(t) + \omega^2 D(t) = \delta(t)$$

e se classificam em duas categorias: retardada ($D_R(t)$) e avançada ($D_A(t)$).

Para a obtenção de soluções numéricas, é preciso substituir a função delta de Dirac por uma aproximação computacionalmente viável. Uma aproximação comum é a versão regularizada:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}}. \quad (2.5.1)$$

Essa aproximação converge para a função delta de Dirac quando ε tende a zero.

Vamos analisar uma solução retardada com condições iniciais específicas em t_0 e resolver a equação para $t \geq t_0$. As condições iniciais $D(t_0) = 0$ e $D'(t_0) = 0$ levariam a uma solução nula sem a força delta. A força delta gera uma solução não trivial, mostrada na Figura 2.5.1(a). A Figura 2.5.1(b) mostra o mesmo para a solução avançada $D_A(t)$. Nossos resultados numéricos podem ser comparados com as soluções exatas $D_R(t) = \theta(t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ e $D_A(t) = -\theta(-t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$, onde $\theta(t)$ é a função degrau de Heaviside. Os resultados mostram que o sistema recebe um impulso de energia em torno de $t = 0$, causando oscilações; fora desse intervalo, a força é negligenciável e as oscilações seguem a equação de condições iniciais não nulas.

Diferentemente do oscilador harmônico, as ondas de choque apresentam uma diferença crucial. A variável z não representa o tempo. Assim, a força delta não é impulsiva,

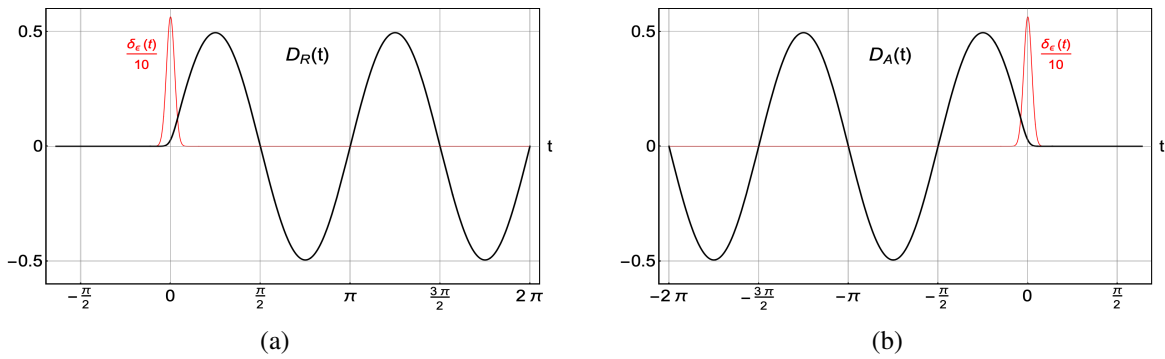


Figura 2.5.1: Soluções numéricas fundamentais do oscilador harmônico. (a) Solução retardada $D_R(t)$ e (b) solução avançada $D_A(t)$ para $\omega = 2.0$, $\varepsilon = 0.005$. Para melhor visibilidade, em ambos os painéis, a força delta regularizada $\delta_\varepsilon(t)$ foi dividida por um fator 10.

atuando em um instante único, mas é contínua na superfície do cone de luz, indicando um fluxo de energia sustentado no sistema.

A solução exata propõe o uso de condições iniciais $\phi(z_0) = 0$ e $\phi'(z_0) = 0$ em algum $z_0 > 0$, resolvendo a equação para $z \leq z_0$. No entanto, a solução numérica enfrenta dificuldades devido a uma singularidade em $z = 0$, causando um crescimento ilimitado de $\phi(z)$ e sua derivada.

As equações (2.1.12) e (2.1.13) mostram que a solução analítica em várias dimensões contém termos singulares (como $\ln(-z)$, $(-z)^{-1/2}$ e $(-z)^{-1}$). Essas singularidades são removidas de $W_0(z)$ ao fixar $\beta_0 = 0$, tornando as soluções parciais próximas de $z = 0$ lineares (segunda derivada nula). Portanto, restringir a análise numérica a uma pequena região perto de $z = 0$, evita o termo problemático da segunda derivada. No entanto, cautela é necessária.

Para tratar esse problema, dividimos a equação (2.1.8) em duas partes:

$$F(\phi) = F_1(\phi) + F_2(\phi),$$

onde $F_2(\phi) \equiv -z\phi''$ envolve o termo problemático de segunda derivada, enquanto $F_1(\phi) \equiv -\frac{n+1}{2}\phi' + \text{sign}(\phi)$ não o envolve. Como $F_2(\phi)$ agindo sobre a solução $\theta(-z)W(z)$ resulta em um termo delta de Dirac

$$F_2(\theta(-z)W(z)) = -W(0)\delta(z) - \theta(-z)zW''(z),$$

o coeficiente que multiplica o termo delta no lado direito da equação (2.1.9) também precisa ser

ajustado quando F_2 é omitido. Ao avaliar $F_1(\phi)$ na solução $\theta(-z)W(z)$ obtemos:

$$F_1(\theta(-z)W(z)) = \frac{n+1}{2}W(0)\delta(z) + \theta(-z)\left[-\frac{n+1}{2}W'(z) + \text{sign}(W)\right].$$

A análise de $F(\phi)$ mostra que a substituição de $F(\phi)$ por $F_1(\phi)$ no lado esquerdo da equação (2.1.9) exige uma mudança correspondente no lado direito, onde o termo delta aparece. Esse ajuste consiste em substituir o coeficiente $\frac{n-1}{2}$ por $\frac{n+1}{2}$, de forma que obtemos uma nova equação nas proximidades de $z = 0$:

$$-\frac{n+1}{2}\phi' + \text{sign}(\phi) = \frac{n+1}{2}W(0)\delta(z). \quad (2.5.2)$$

Esta abordagem mostra que, mesmo para $n = 1$, obtemos uma equação não homogênea perto de $z = 0$, permitindo uma solução não trivial com as condições iniciais $\phi(z_0) = 0$ e $\phi'(z_0) = 0$. Este resultado valida nossa estratégia.

Avançamos agora para a solução numérica da equação (anteriormente chamada de equação reduzida) para $n = 2$. Consideraremos $W(0)$ como um parâmetro livre e utilizaremos uma versão regularizada (equação (2.5.1)) para aproximar a delta de Dirac exata.

A nossa estratégia de solução está organizada nos seguintes passos:

1. Adotamos um ponto inicial $z_0 = 0.3$, situado fora do cone de luz, e impomos as condições iniciais $\phi(z_0) = 0$ e $\phi'(z_0) = 0$. Na ausência do termo de força delta, a solução resultante seria trivial.
2. Utilizamos a força delta regularizada com parâmetro $\varepsilon = 10^{-6}$ e definimos o parâmetro livre $W(0)$ em $2/3$.
3. Realizamos a solução numérica da equação reduzida

$$-\frac{3}{2}\phi' + \text{sign}(\phi) = \delta_\varepsilon(z) \quad (2.5.3)$$

no intervalo simétrico $-z_0$ a z_0 (ou seja, $-0.3 \leq z \leq 0.3$), integrando a equação (2.5.3) na direção decrescente de z , partindo de $z = 0.3$ até $z = -0.3$.

4. Para a solução em $z < -z_0$, usamos $\phi(-z_0)$ e $\phi'(-z_0)$ da solução de (2.5.3) como

condições iniciais e resolvemos a equação completa

$$-z\phi'' - \frac{3}{2}\phi' + \text{sign}(\phi) = \delta_\varepsilon(z) \quad (2.5.4)$$

para $z < -z_0$.

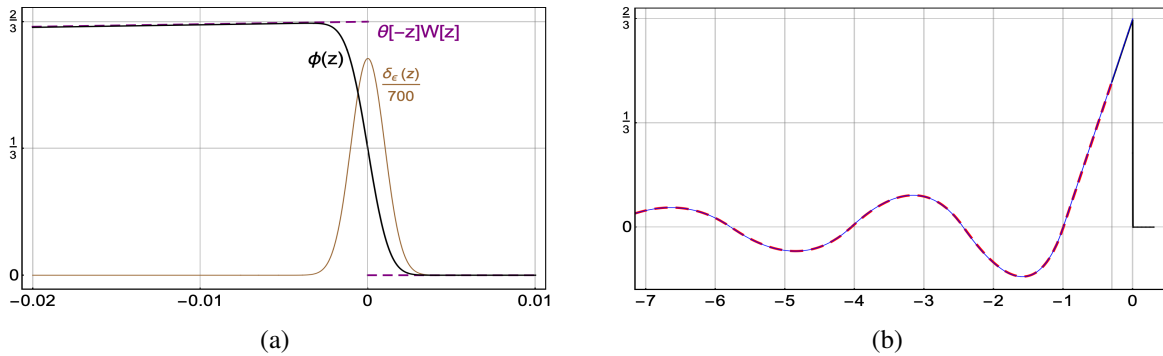


Figura 2.5.2: Solução numérica para $\phi(z)$ na Equação 2.1.9 para o caso $n = 2$, $W(0) = \frac{2}{3}$ e a função delta aproximada pela versão regularizada $\delta(z) \approx \delta_\varepsilon(z)$ ($\varepsilon = 10^{-6}$). (a) Vista ampliada da solução próxima a $z = 0$. (b) Solução completa obtida primeiro resolvendo a Equação 2.5.2 (linha preta) e, em seguida, a Equação 2.1.9 (linha tracejada vermelha). O ponto de junção entre as duas soluções é $z_m = -0.3$. A solução analítica é representada pela linha azul fina.

A Figura 2.5.2(a) exibe uma pequena parte da solução no intervalo $-z_0 \leq z \leq z_0$, junto com a força delta regularizada (dividida por um fator arbitrário para visualização) para indicar sua relevância. Também plotamos um trecho da solução exata $\theta(-z)W_0(z)$ para comparação. Perto de $z = 0$, onde a força delta é significativa, a solução numérica é não linear e se aproxima rapidamente da solução parcial analítica $W_0(z) = \frac{2}{3}(z+1)$ (linha tracejada). A Figura 2.5.2(b) mostra a curva numérica para $z < -z_0$, obtida da equação (2.5.4). A linha tracejada vermelha na Figura 2.5.2(a) representa essa segunda parte da solução.

Observa-se que a solução numérica apresenta uma excelente aproximação do comportamento real mostrado na Figura 2.3.1(a). Adicionalmente, a análise numérica evidencia que o ajuste do parâmetro livre $W(0)$ permite alcançar o valor máximo desejado (a descontinuidade da solução exata) no cone de luz.

2.6 Investigação numérica de ondas de choque em (2+1) dimensões

Esta seção descreve os aspectos técnicos da simulação numérica. Para as integrações, emprega-se o método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), com super-amostragem

temporal de quarta ordem. O estado do campo é representado por valores numéricos (em dupla precisão) distribuídos em uma malha retangular.

A simulação foca em uma região quadrada de lado L , escolhida como um subconjunto do plano de simultaneidade centrado na onda de choque em seu referencial. Esse quadrado é subdividido em uma grade de N^2 células, resultando em $(N + 1)^2$ pontos de malha. Cada célula carrega dados de simulação correspondentes a uma área h^2 do campo, onde $h = L/N$. Toda a distribuição do campo é avançada por um passo de Runge-Kutta (RK4) para calcular variações incrementais no estado do campo, do tempo t até $t + \Delta t$. Na simulação, utiliza-se um passo de tempo fixo ($\Delta t = h/10$).

A operação matemática envolvendo derivadas espaciais de segunda ordem (operador de Laplace) é convertida em uma representação matricial apropriada para os cálculos em computador. Isso é feito por meio de um processo de convolução na malha espacial, utilizando um *kernel* predefinido:

$$[\Delta^2]_{\text{kernel}} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6.1)$$

É importante reconhecer que a malha quadrada com espaçamento uniforme pode não ser ideal para soluções com simetria radial, como ondas de choque. Isso pode levar a uma discrepância entre as condições de contorno isotrópicas (no sentido teórico e contínuo) e o comportamento efetivamente anisotrópico (e potencialmente descontínuo) capturado pela simulação numérica, em especial para valores baixos de N . Em teoria, à medida que o tamanho da grade cresce indefinidamente ($N \rightarrow \infty$), a representação numérica torna-se mais próxima da isotropia ideal. Contudo, em simulações práticas, isso pode não ser alcançável. Esse descompasso pode introduzir erros que afetam a simetria radial da solução. O desvio observado em relação à simetria radial serve como um indicador do erro numérico acumulado e é usado para avaliar a validade da simulação.

As simulações foram implementadas em linguagem C++ com auxílio da biblioteca MFEM (Anderson et al. [2021], *mfem*). Parte da visualização numérica foi produzida com a biblioteca VTK (Schroeder et al. [2006]), e parte via programação em *OpenGL* (Woo et al. [1999]), principalmente através da biblioteca *Glumpy* (Rougier [Accessed September 25, 2024a] Rougier [Accessed September 25, 2024b]). Alguns trabalhos numéricos e parte da computação

simbólica foram realizados na linguagem Julia (Bezanson et al. [2012]), com auxílio do pacote “Symbolics.jl” (Gowda et al. [2021]).

2.6.1 Solução de onda de choque com condição de contorno de Dirichlet

Como demonstrado nas Seções (2.2), (2.3.2) e (2.4.2), as soluções exatas para estas ondas não conservam energia. Em termos simples, a energia dentro do cone de luz (onde a solução difere de zero) aumenta ao longo do tempo (ver Equação 2.2.5). Esse influxo contínuo de energia no interior do cone de luz é necessário para a existência da solução exata.

Nesta seção, exploramos a possibilidade de reproduzir o efeito da força delta implementando explicitamente condições de contorno. Sabendo que a solução exata para uma onda de choque coincide com um valor constante no cone de luz, podemos tentar reproduzir esse comportamento resolvendo a equação SG homogênea e impondo explicitamente uma condição de contorno de Dirichlet no cone de luz. A região de interesse para a resolução da equação é uma bola n -dimensional de raio $r = t$. A condição de Dirichlet serve para transferir energia ao interior da bola, onde se localiza a onda de choque.

Para ilustrar melhor esse conceito, considere o caso $n = 2$ (duas dimensões) de uma membrana em um campo gravitacional. Inicialmente, a membrana é erguida a uma altura $W(0)$ acima de um piso rígido e estende-se infinitamente. Uma força externa mantém essa posição inicial. Nessa configuração, a membrana possui energia gravitacional infinita, mas não possui energia de gradiente ou cinética.

Agora, imagine liberar a força que sustenta a membrana dentro de uma região circular que se inicia em $r = 0$ e se expande com raio crescendo $r = t$. Durante esse processo, a energia contida dentro do círculo passa a ser igual à densidade de energia $V(\phi) = |\phi| = W(0)$ (o valor do campo no cone de luz) multiplicada pela área do círculo. Isso reflete exatamente a energia de uma onda de choque em (2+1) dimensões.

No interior da região circular em expansão, o campo é livre para evoluir, sendo governado pela equação SG homogênea. Embora esta analogia seja particularmente intuitiva para $n = 2$, o mesmo raciocínio pode ser estendido para dimensões espaciais mais altas. Essa abordagem é especialmente vantajosa em soluções numéricas pois evita a implementação de um termo de força delta regularizado (e, portanto, aproximado).

Um exemplo ilustrativo de simulação numérica para o caso $n = 2$ que emprega esse conceito é apresentado na Figura 2.6.1. Essa solução está em completa concordância com nossa

solução exata.

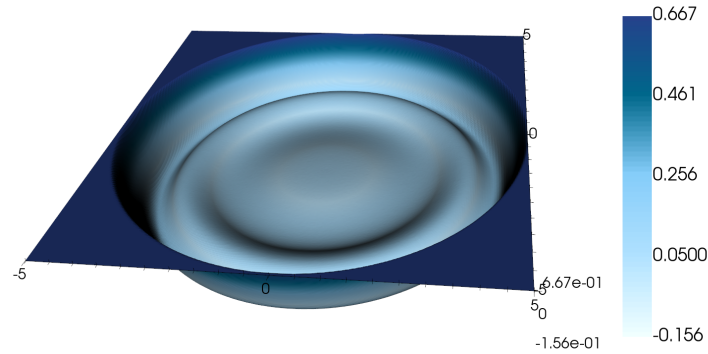


Figura 2.6.1: Evolução numérica em um cenário em que o valor do campo é inicialmente constante em $W(0) = \frac{2}{3}$ (representado pelo patamar) em todo o espaço (exceto na região do cone de luz). Dentro do cone de luz do evento $(t, r) = (0, 0)$, o campo é liberado para evoluir. A barra de cores e a altura representam o valor do campo. A discretização de malha utilizada difere da simetria ideal analítica, mas o impacto mínimo observado na simulação sugere acúmulo desprezível de erro numérico.

Em termos técnicos, o valor específico do campo fora do cone de luz é irrelevante para a dinâmica da solução, que depende apenas do valor do campo no cone de luz. Consequentemente, é permitido considerar um cenário em que o campo seja identicamente nulo fora do cone de luz, mantendo seu valor $W(0)$ no cone de luz. A aplicação de condição de contorno de Dirichlet na equação homogênea dentro do cone de luz produz efeito idêntico ao da presença de uma força delta.

Resolvemos, portanto, a Equação 2.1.1 na região $r < t$, impondo condição de contorno constante na superfície do cone de luz $r = t$. Esse tipo específico de condição de contorno define a classe de soluções que estamos investigando, representada pelo ansatz na Equação 2.1.7. A simulação é confinada à região $r < t$. O comportamento na superfície do cone de luz ($r = t$) e fora dessa fronteira ($r > t$) não é calculado explicitamente na simulação, mas é mantido em valores fixos e pré-definidos. As condições de contorno são implementadas da forma:

$$\phi(t, \vec{x}) = \begin{cases} W(0) & \text{para } r = t \\ 0 & \text{para } r > t \\ \text{simulação} & \text{para } r < t \end{cases} \quad (2.6.2)$$

Observe que o campo adquire o valor $W(0)$ precisamente no cone de luz. Isso mostra que o reservatório de energia necessário pode ser criado ao se estabelecer inicialmente o campo

inteiro em $W(0)$ e então liberá-lo no interior do cone de luz.

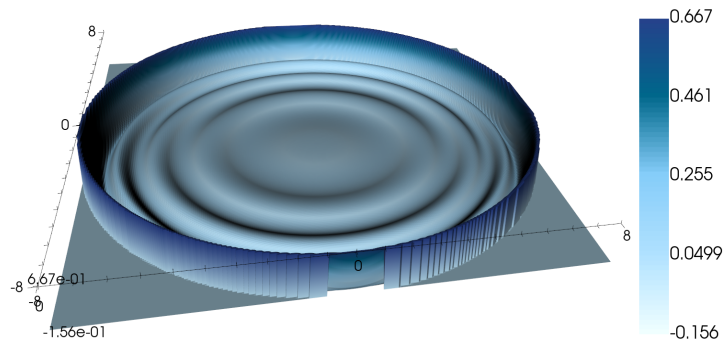


Figura 2.6.2: Simulação de referência para uma onda de choque com descontinuidade $W(0) = 2/3$, no tempo $t = 7.5$. A barra de cores e a altura representam o valor do campo.

Os resultados de uma simulação numérica para o campo SG são apresentados na Figura 2.6.2. Uma análise detalhada da onda de choque no tempo $t = 7.25$ é mostrada nas Figuras 2.6.3(a) e 2.6.3(b). O painel 2.6.3(a) exibe um corte do perfil da onda ao longo do eixo x (com $y = 0$), extraído da simulação mostrada na Figura 2.6.2. O painel 2.6.3(b) apresenta a derivada temporal correspondente.

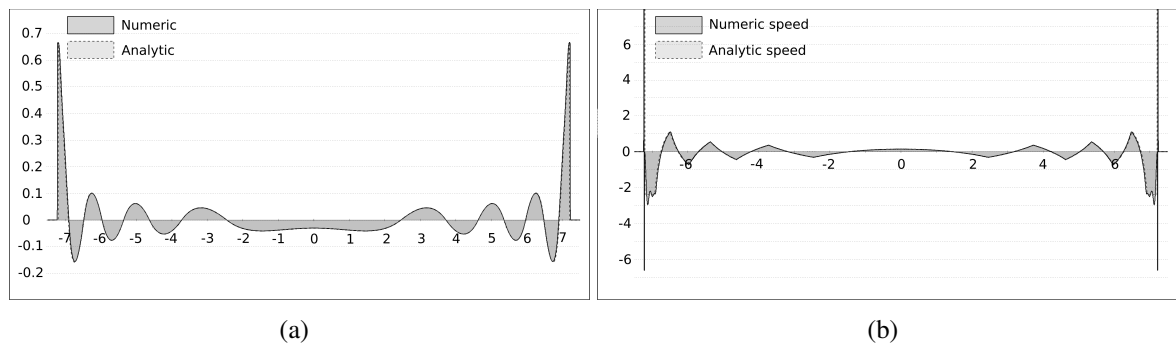


Figura 2.6.3: (a) Comparação entre um corte do perfil da onda de choque obtido por nossa simulação (em $y = 0$, $t = 7.25$) e a solução analítica para a onda de choque. (b) A derivada temporal do perfil de onda, tanto da solução numérica (em $y = 0$, $t = 7.25$) quanto da solução analítica.

A Figura 2.6.4(a) mostra um diagrama espaço-tempo com a evolução da solução de onda de choque. O gradiente de cor indica o valor do campo escalar no plano tx , isto é, tempo versus eixo x . A Figura 2.6.4(b) exibe a evolução temporal da razão entre a energia obtida na simulação numérica e a energia teórica (solução analítica) na região da onda de choque.

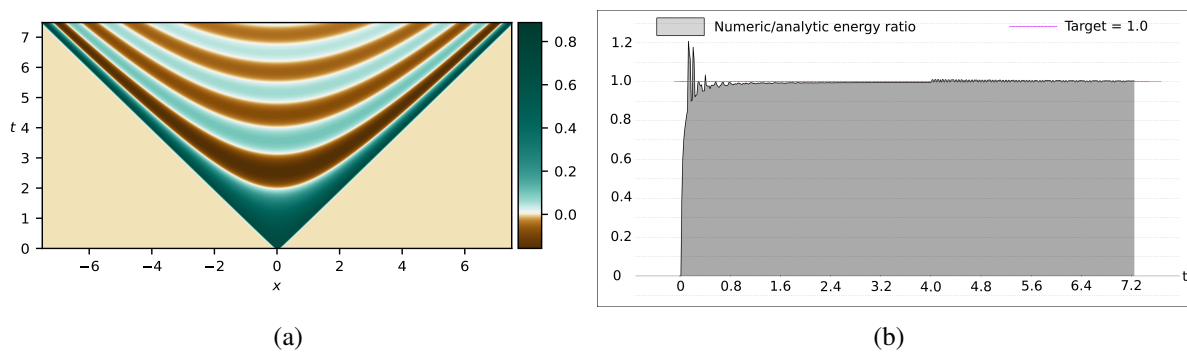


Figura 2.6.4: Comportamento da solução de onda de choque em duas dimensões espaciais ($n = 2$). (a) Seção espaço-tempo (tx) onde a cor representa o valor da solução. (b) Evolução temporal da razão entre a energia obtida na simulação numérica e a energia teórica (solução analítica) no interior da região de choque. Os picos iniciais nessa razão provavelmente estão associados a erros numéricos provenientes da inclusão ou exclusão de certos pontos de grade (células quadradas discretas) no processo de integração de energia na simulação.

2.6.2 Desintegração de onda de choque

Esta subsecção investiga o comportamento de uma onda de choque após sua fonte de energia ser desligada. Consideramos uma onda de choque gerada pela evolução de um campo escalar ϕ dentro de um intervalo de tempo específico ($0 < t < t_0$), sujeito à restrição da Expressão 2.6.2. Em $t = t_0$, essa restrição é removida, de modo análogo a interromper o termo de força delta em uma equação não homogênea. Ao desabilitar essa condição, interrompe-se o processo de transferência de energia para a onda de choque, impedindo-a de se propagar de acordo com as previsões analíticas.

A Figura 2.6.5 mostra uma visão ampliada do histórico do campo no plano tx . Essa figura dá foco na região central inferior da Figura 2.6.6(a). Ela ilustra que, dentro da interseção entre o cone de luz futuro (originado no evento $(0,0)$) e o cone de luz passado (originado em $(2t_0, 0)$), a onda de choque permanece inalterada.

A Figura 2.6.6 mostra esse fenômeno em diferentes seções do espaço de Minkowski em (2+1) dimensões. A Figura 2.6.6(a) ilustra o histórico do campo em $y = 0$, mostrando como esse plano evolui no tempo. A Figura 2.6.6(b) apresenta uma visão com ângulo de $\pi/8$ em relação à Figura 2.6.6(a), correspondendo ao plano $y = x/2$. A Figura 2.6.6(c) fornece um zoom na região central do plano em $t = 10$, representando um “instantâneo” da configuração do campo na metade da simulação. Por fim, a Figura 2.6.6(d) exhibe a configuração final do campo no término da simulação ($t = 20$).

De maneira análoga ao que se observa em uma dimensão espacial ($n = 1$) [Hahne et al.](#)

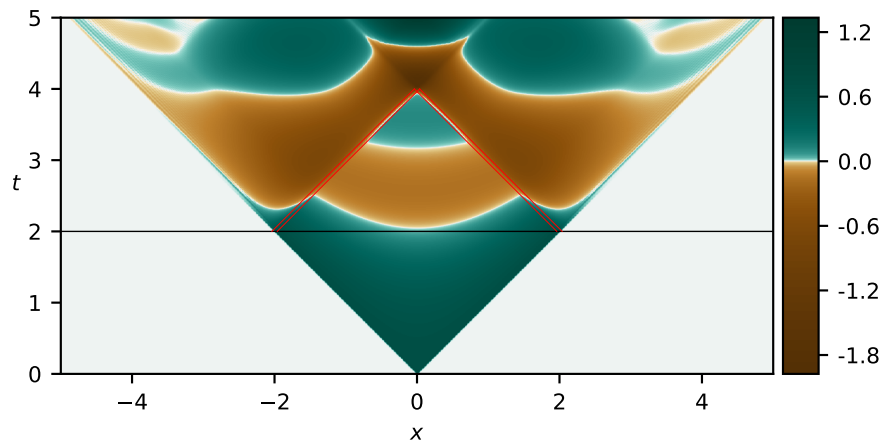
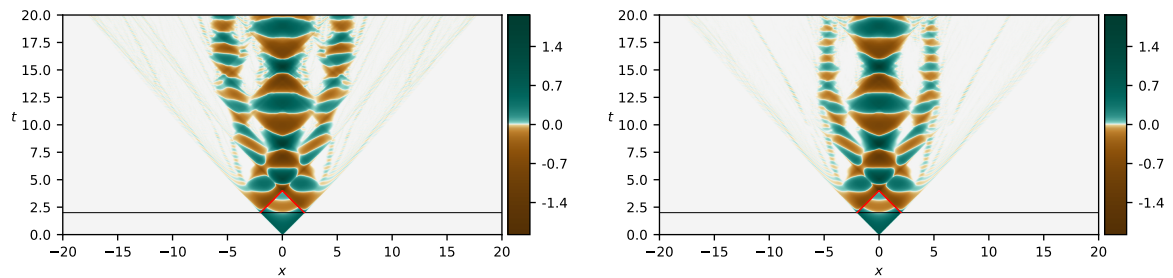


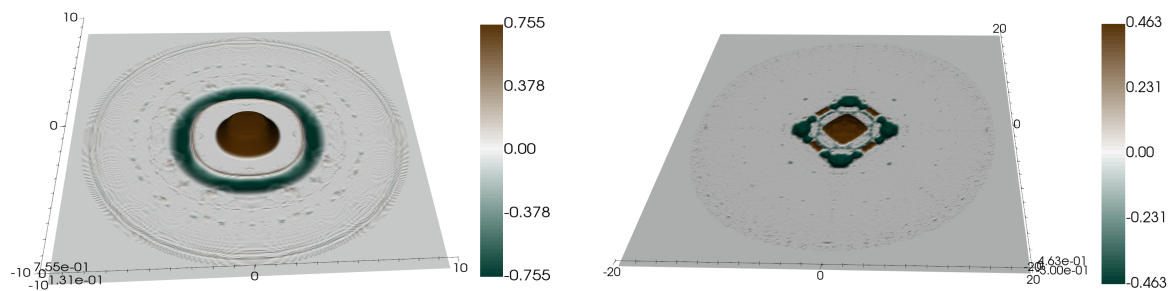
Figura 2.6.5: Estágios iniciais do enfraquecimento da onda de choque após sua fonte de energia ser desligada. A linha horizontal em preto indica o momento ($t = 2.00$) em que a condição (2.6.2), análoga a um termo de força delta, é removida. As linhas diagonais em vermelho representam o limite entre a região influenciada pela força delta (antes de $t = 2.00$) e a região onde ela não está mais ativa (após $t = 2.00$). Tais linhas aparecem em pares próximos e paralelos, separados por 2ε , onde ε é um parâmetro relacionado ao método específico usado para representar a função delta.

[2020a], nossas simulações em $n = 2$ exibem a formação de estruturas localizadas e compactas no campo. Essas estruturas incluem uma região central em forma de “pico” (similar à forma analítica de um oscillon) e uma formação anular ao redor. Embora as Figuras 2.6.6(a) e 2.6.6(b) sugiram certa persistência temporal dessas estruturas, as Figuras 2.6.6(c) e 2.6.6(d) fornecem uma visão mais clara de seus formatos. Estas últimas indicam que a estrutura oscilante central se mantém estável ao longo do tempo, enquanto o anel compacto se quebra em diversas estruturas menores e oscilantes.

O rompimento observado da simetria rotacional no campo provavelmente se deve a erros numéricos que introduzem oscilações de alta frequência. Entretanto, acreditamos que isso não invalida as conclusões principais: a instabilidade da estrutura anular e a estabilidade da estrutura central oscilante (osillon). De fato, esses erros podem atuar como uma perturbação forte, evidenciando ainda mais propriedades relevantes dessas estruturas. As estruturas de maior escala em 2.6.6(c) no tempo $t = 10$ — o pico central semelhante a um oscillon e o anel ao seu redor — preservam sua simetria rotacional apesar dos ruídos adicionados. Isso sugere que tais estruturas desempenham um papel significativo no decaimento e na “termalização” da onda de choque nesta simulação bidimensional (2 + 1).



(a) Seção tx do diagrama de Minkowski em $(2+1)$ dimensões (b) Seção com rotação de 22.5° ($\pi/8$) em relação à de dimensões



(c) Instantâneo intermediário do centro do campo em $t = 10$, com lado $L = 10$ (d) Configuração final de todo o campo em $t = 20$, cobrindo toda a região de simulação com lado $L = 20$

Figura 2.6.6: Os painéis (a) e (b) retratam os estágios iniciais do enfraquecimento da onda de choque após sua fonte de energia ser desligada. A linha preta horizontal indica o momento ($t = 2.00$) em que a condição (2.6.2), análoga a um termo de força delta, é removida. As linhas diagonais em vermelho representam o limite entre a região influenciada pela força delta (antes de $t = 2.00$) e a região onde ela não está mais ativa (após $t = 2.00$). Essas linhas aparecem em pares próximos e paralelos, separados por 2ε , onde ε é um parâmetro relacionado ao método específico de representação da função delta. Os painéis (c) e (d) mostram instantâneos do campo em tempos posteriores: $t = 10$ (c) e $t = 20$ (d). Note a perda gradual de simetria (isotropia) na distribuição do campo ao longo do tempo, visível sobretudo em (d).

3 Massa Espectral

Nesta tese, nosso objetivo primordial é explorar soluções em dimensões superiores. Contudo, ao empregarmos métodos de Fourier, descobrimos novos insights sobre a relação de dispersão no modelo signum-Gordon. Nesta seção, detalharemos esses achados, preparando o terreno para a discussão das soluções em dimensões mais altas na seção subsequente.

Não linearidades afetam profundamente as propriedades de modelos físicos, incluindo aspectos topológicos (Manton and Sutcliffe [2004], Shnir [2018]), integrabilidade (Alvarez et al. [1998, 2009], Dunajski [2010]) e a compacidade de soluções de campo (Arodz [2002], Dusuel et al. [1998], Rosenau and Hyman [1993a]). A dinâmica fundamental de configurações de campo — tais como modos internos e transferência de energia entre esses modos — permanece sendo tema de investigações intensas em teoria de campos (Adam et al. [2023a,b], Alonso Izquierdo et al. [2024], Alonso-Izquierdo et al. [2024], Blaschke et al. [2024], Marjaneh et al. [2024], Oles et al. [2023], Simas and da Hora [2024]). Em particular, o conceito de massa desempenha um papel crucial nesses estudos. Mesmo na teoria clássica de campos, o significado de massa pode variar dependendo do contexto. Por exemplo, a massa atribuída a configurações de campo como kinks, Q-balls e oscillons normalmente representa sua *energia*. Pode-se também introduzir o parâmetro de massa por meio do potencial de auto-interação do campo, $V(\phi)$. Especificamente, a *massa perturbativa* é definida como a segunda derivada do potencial avaliada em seu mínimo, ϕ_{\min} :

$$m_0^2 := \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi_{\min}}. \quad (3.0.1)$$

Por exemplo, essa massa desempenha um papel essencial ao determinar a relação de dispersão entre o número de onda k e a frequência ω no modelo de Klein-Gordon (KG). Consequentemente, uma massa perturbativa não nula implica uma diferença entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo, ambas funções do número de onda k . Em certos contextos da teoria de campos, a massa perturbativa sozinha não basta para compreender completamente o comportamento do sistema. Por exemplo, para explicar a existência de oscillons em teorias com $m^2 = 0$, foi introduzido em Dorey et al. [2024] o conceito de *massa efetiva*. Essa massa é definida pela integral

$$m_{\text{eff}}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} d\phi w_{\sigma}(\phi) \frac{d^2V}{d\phi^2}, \quad (3.0.2)$$

em que a função de peso $w_\sigma(\phi)$ isola o comportamento de $\frac{d^2V}{d\phi^2}$ próximo do mínimo do potencial. Essa massa incorpora os efeitos das oscilações do campo em torno do estado de vácuo. A função de peso pode ser escolhida com certa liberdade, sem impactar significativamente o comportamento qualitativo da massa perturbativa. Uma escolha possível para a função de peso é a função degrau de Heaviside:

$$w_\sigma(\phi) = \frac{1}{2\sigma} \theta\left(1 - \frac{|\phi - \phi_{\min}|}{\sigma}\right).$$

O problema da massa deve ser tratado com cautela em modelos com potenciais não analíticos, nos quais a definição clássica de massa perturbativa se torna inviável devido ao comportamento inconsistente das derivadas laterais no mínimo do potencial [Arodz et al. \[2005\]](#). Nesses casos, a massa perturbativa só pode ser representada por uma função generalizada, como a distribuição delta de Dirac.

Neste capítulo, analisaremos o problema da massa de forma geral nesse tipo de modelo, com foco particular no modelo signum-Gordon, por ser o exemplo mais simples dessa classe de modelos. Ao analisar os modos de Fourier do campo SG e examinar sua relação de dispersão, introduziremos o conceito de *massa espectral*. O capítulo organiza-se da seguinte forma. Na Seção 3.1, apresentamos brevemente algumas propriedades relevantes do modelo SG para este capítulo. Em seguida, na Seção 3.2, discutimos os setores sem massa e massivos do modelo em função da amplitude de onda incidente. A massa característica é obtida por comparação com o modelo de Klein-Gordon (KG) não linear.

3.1 Particularidades relevantes no modelo signum-Gordon

O modelo signum-Gordon (SG) é uma teoria de campo linear por partes, cujo potencial é $V(\phi) = \lambda_0 |\phi|$, em que o campo escalar ϕ pode ser real ou complexo. O caráter não linear do modelo decorre do comportamento não analítico do potencial em seu mínimo, $\phi_0 = 0$. O termo de derivada é considerado uma função quadrática padrão do 4-gradiente do campo, resultando na densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - |\phi|, \quad (3.1.1)$$

em que a constante de acoplamento λ_0 foi absorvida em uma redefinição das coordenadas adimensionais x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Aqui, $\phi \in \mathbb{R}$. A equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \text{sign} \phi = 0, \quad (3.1.2)$$

contém a função signum.

O primeiro ponto importante é que $\phi_0 = 0$ é solução de vácuo do modelo e minimiza o tensor energia-momento. Essa solução não satisfaz automaticamente as equações de Euler-Lagrange derivadas para os setores $\frac{dV}{d\phi} = \pm 1$. Para simplificar a análise e incluir esse estado físico no conjunto de soluções, definimos que a função signum em $\phi = 0$ seja igual a zero.

A segunda propriedade característica é a ausência de um setor linear para excitações de campo de pequena amplitude. Ao contrário de muitos modelos de campo, nos quais o potencial pode ser aproximado por uma função quadrática próxima ao mínimo, o potencial SG mantém essencialmente a mesma forma, independentemente da amplitude do campo. O modelo SG rompe o paradigma do oscilador harmônico, pois sua não linearidade não pode ser removida por uma simples mudança de escala.

Além disso, conforme mencionado na introdução (1.3.1), a equação SG é invariante sob a transformação de escala $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$, $\phi \rightarrow \lambda^{-2} \phi$. Em outras palavras, se $\phi(t, \vec{x})$ é solução de (3.1.2), então

$$\phi_\lambda(t, \vec{x}) = \lambda^{-2} \phi(\lambda t, \lambda \vec{x}) \quad (3.1.3)$$

também é solução. Essa transformação de escala é uma propriedade universal do modelo. Enquanto ela é exata para o SG, é aproximada em modelos com potenciais não analíticos que se comportem como $|\phi|$ próximos do mínimo. Por exemplo, pequenas perturbações de amplitude em torno dos vácuos $\phi_{\text{vac}} = \pm 1$ num modelo com potencial de poço duplo $V(\phi) = \frac{1}{2}|\phi^2 - 1|$ são efetivamente governadas pela equação de SG.

O modelo SG é uma ferramenta essencial para investigar o comportamento *hipermassivo* – conforme desenvolvido nesse capítulo – de excitações de campo. Esse comportamento foi observado em simulações numéricas recentes de espalhamento de kinks e oscillons compactos (Hahne and Klimas [2022, 2024a], Hahne et al. [2020b]). Ele está ligado ao efeito de força limiar, característico de potenciais em forma de V. Um exemplo claro desse efeito é encontrado em pêndulos invertidos, acoplados por barreiras rígidas e sujeitos à um campo gravitacional (Arodz [2002]). Se tais pêndulos estão inicialmente em repouso num ângulo ϕ_0 em relação

à vertical, erguer o sistema de modo infinitesimal requer uma força finita. Em consequência, a propagação de impulsos é suprimida em comparação a modelos padrão, como KG, em que deslocamentos infinitesimais requerem apenas forças infinitesimais. Assim, o modelo SG emite menos radiação do que o KG. Mais ainda, a radiação emitida é discreta, constituída por oscillons compactos, cuja forma exata no SG é conhecida [Hahne and Klimas \[2024b\]](#). Seguindo [Dorey et al. \[2024\]](#), encontramos que o quadrado da massa perturbativa para o modelo signum-Gordon é $m_0 = 2\delta(\phi)$, o que resulta numa massa efetiva de

$$m_{\text{eff}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(\phi) w_{\sigma}(\phi) = \frac{1}{\sigma}. \quad (3.1.4)$$

Para interpretar fisicamente essa massa, primeiro é preciso identificar soluções que forneçam significado ao parâmetro σ . Isso é realizado ao se considerar a propagação de um trem de onda e analisar sua relação de dispersão.

3.2 Análise de Fourier

Nesta seção mostramos, através do uso de métodos de Fourier, como a dinâmica de certas classes de soluções e quase-soluções do campo de signum-Gordon possuem comportamento espectral com características semelhantes ao campo de Klein-Gordon. Em particular, que para esse conjunto de soluções a relação de dispersão de campo linear,

$$\omega^2 = k^2 + m^2,$$

serve como aproximação quantitativa bastante precisa.

A base dessa análise consiste em examinar a propagação de ondas monocromáticas planas em $(1+1)$ dimensões. Representamos elas pela expressão

$$\varphi(t, x) = A_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t), \quad (3.2.1)$$

em que ω_0 é a frequência angular, k_0 o número de onda e A_0 a amplitude da onda. É importante notar que a Expressão 3.2.1 não é uma solução para a equação SG. No que segue, o campo SG é denotado por $\phi(t, x)$.

3.2.1 Regime massivo vs sem massa

A amplitude inicial A_0 na Expressão 3.2.1 é um parâmetro central. Junto com k_0 , ela determina o comportamento da solução. Uma diferença fundamental surge do fato de que o termo $\text{sign}(\phi)$ é limitado aos valores ± 1 , enquanto os termos das segundas derivadas $\partial_t^2 \phi$ e $\partial_x^2 \phi$ são proporcionais a A_0 . Quando a amplitude da solução é pequena em comparação com o termo signum, a não-linearidade SG afeta significativamente a solução. Por outro lado, quando a amplitude é muito grande, o termo signum atua como uma pequena perturbação.

Para comparar as magnitudes dos termos, substituímos a Expressão 3.2.1 na equação

$$-\partial_t^2 \phi = -\partial_x^2 \phi + V'(\phi), \quad (3.2.2)$$

o que resulta na expressão

$$\omega_0^2 \phi = k_0^2 \phi + V'(\phi).$$

Essa expressão seria equivalente a uma relação de dispersão se ϕ pudesse ser fatorado. Esse é o caso da equação KG, onde $V'(\phi)$ é proporcional a ϕ . Contudo, para a equação SG, $V'(\phi)$ é não linear, de modo que tal relação só pode ser obtida de forma aproximada quando o termo signum for muito menor que $-\partial_x^2 \phi$, isto é,

$$|V'(\phi)| \ll |k_0^2 \phi|. \quad (3.2.3)$$

Sob essa condição, a relação de dispersão aproximada é similar à da equação de onda livre, $\omega_0^2 = k_0^2$. A Condição 3.2.3 é relaxada em regiões do espaço onde o campo ϕ seja negligenciável. Nessas regiões, o termo potencial $V'(\phi)$ pode predominar sobre $k_0^2 \phi$. Contudo, na maioria das outras regiões, a Equação 3.2.2 efetivamente se reduz à equação de onda sem massa. Nessa situação, a condição

$$A_0 k_0^2 \gg 1 \quad (3.2.4)$$

representa de forma mais adequada o fenômeno do que a Equação 3.2.2, pois captura diretamente o comportamento físico relevante.

Note que a Condição 3.2.4 é invariante sob a transformação de escala global da Expressão 3.1.3, que também é uma simetria da equação signum-Gordon. Sob essa transformação, A_0 se escala como $\lambda^{-2} A_0$ e k_0 como λk_0 , deixando $A_0 k_0^2$ inalterado.

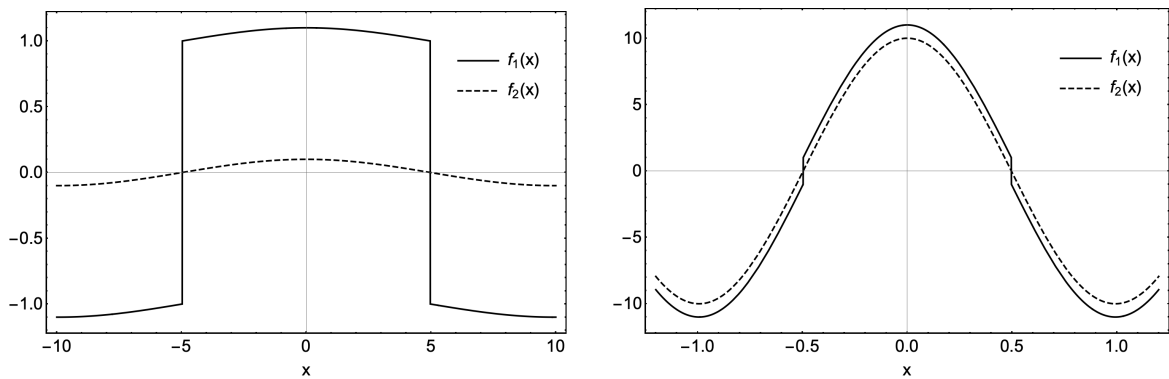


Figura 3.2.1: A expressão $f(x) := -\partial_x^2 \phi + V'(\phi)$ avaliada em $t = 0$ para a configuração de campo da Expressão 3.2.1. Linhas sólidas representam o caso SG, $f_1(x) = A_0 k_0^2 \cos(k_0 x) + \text{sign}(\cos(k_0 x))$, enquanto linhas tracejadas correspondem ao caso da onda livre, $f_2(x) = A_0 k_0^2 \cos(k_0 x)$. (a) Caso de número de onda pequeno: $A_0 k_0^2 = 10^{-1}$, (b) Caso de número de onda grande: $A_0 k_0^2 = 10$. Aqui, $A_0 = 1$ para ambos os casos. A crescente concordância entre as duas curvas para valores maiores de $A_0 k_0^2$ indica propagação livre com relação de dispersão $\omega_0 \simeq \pm k_0$. Note que, mesmo para $A_0 k_0^2 = 10$, considerado relativamente pequeno, o comportamento linear predomina.

A Figura 3.2.1 compara o lado direito da Equação 3.2.2 para o caso SG (não satisfazendo (3.2.4)) e para a equação de onda livre ($V = 0$) quando a Condição 3.2.4 é válida. Ambos os termos são avaliados em $t = 0$ para a configuração de campo dada na Expressão 3.2.1.

3.2.2 Evolução dos modos de Fourier

A distinção entre os regimes sem massa e os (ultra)massivos é particularmente evidente na evolução dos modos de Fourier. Para ilustrar isso, evoluímos numericamente a equação SG com uma configuração de campo inicial dada pela Expressão 3.2.1 em $t = 0$. Os parâmetros livres foram definidos como $\omega_0 = k_0 = 10\pi$ e o sistema foi propagado até o tempo $t = 30$. Foram aplicadas condições de contorno periódicas a um domínio espacial de comprimento $L = 1$, discretizado em $N = 1000$ pontos na *grid*. O sistema foi evoluído utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com um passo de tempo de $\delta t = 10^{-4}$.

A Figura 3.2.2 apresenta os valores do campo e as amplitudes dos modos de Fourier da configuração do campo no tempo final $t = 30$. As amplitudes dos modos, $A(k)$, são plotadas em função do número de onda k . Para $A_0 k_0^2 \gg 1$, apenas um único modo de Fourier é ativado, e a evolução do campo aproxima-se da propagação de uma onda plana monocromática governada pela equação de onda. Por outro lado, quando $A_0 k_0^2 = 1$, múltiplos modos de Fourier são excitados, levando a um perfil de campo significativamente irregular, conforme ilustrado na Figura 3.2.2(c).

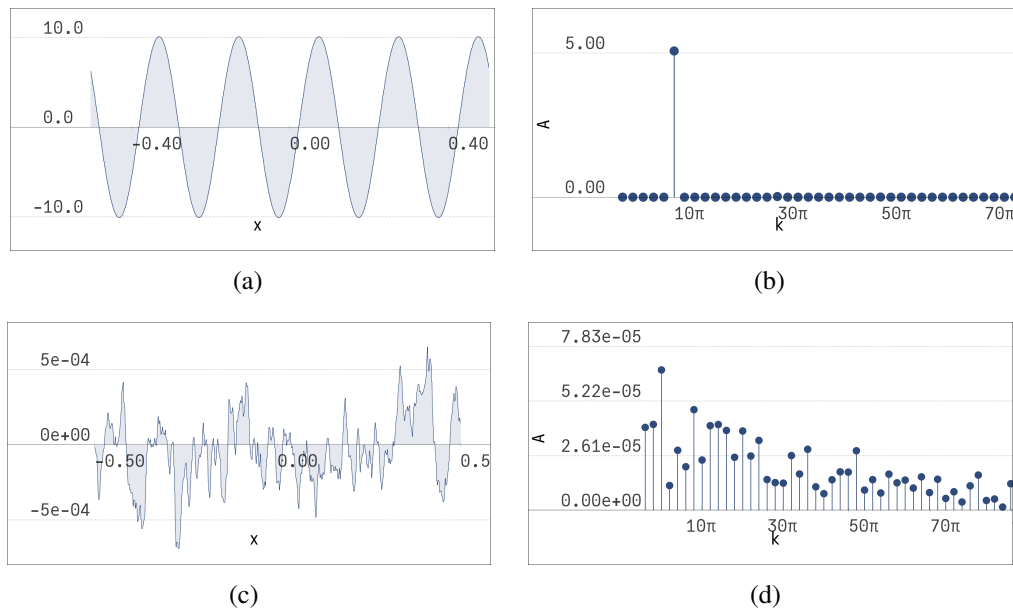


Figura 3.2.2: Amplitudes do campo e dos modos de Fourier no tempo final $t = 30$ para a evolução do campo SG com a condição inicial da Expressão 3.2.1. Os painéis (a) e (b) mostram, respectivamente, os valores do campo SG e as amplitudes dos modos de Fourier para a condição inicial da Expressão 3.2.1 com $A_0 k_0^2 = 10^4$. Os painéis (c) e (d) mostram os resultados correspondentes para $A_0 k_0^2 = 1$.

Também examinamos o caso de valores intermediários do parâmetro $A_0 k_0^2$. Os resultados são apresentados na Figura 3.2.3. Para $A_0 k_0^2 = 50$, a amplitude do modo inicial k_0 permanece dominante, embora o surgimento dos harmônicos ímpares $k = \{3k_0, 5k_0, 7k_0, \dots\}$ torne-se perceptível. Para um valor menor do parâmetro, $A_0 k_0^2 = 25$, um espectro mais amplo de modos de Fourier é ativado, abrangendo não apenas múltiplos de k_0 , mas também modos com números de onda $k < k_0$.

3.2.3 Equação de Klein-Gordon não-linear

Para estudar a geração de modos não lineares, consideramos uma equação de Klein-Gordon (KG) com um termo não linear quártico adicional no potencial do campo:

$$V_3(\phi) = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4,$$

em que o índice 3 denota a maior potência do termo não linear na equação do campo

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi + m_0^2\phi + \lambda\phi^3 = 0.$$

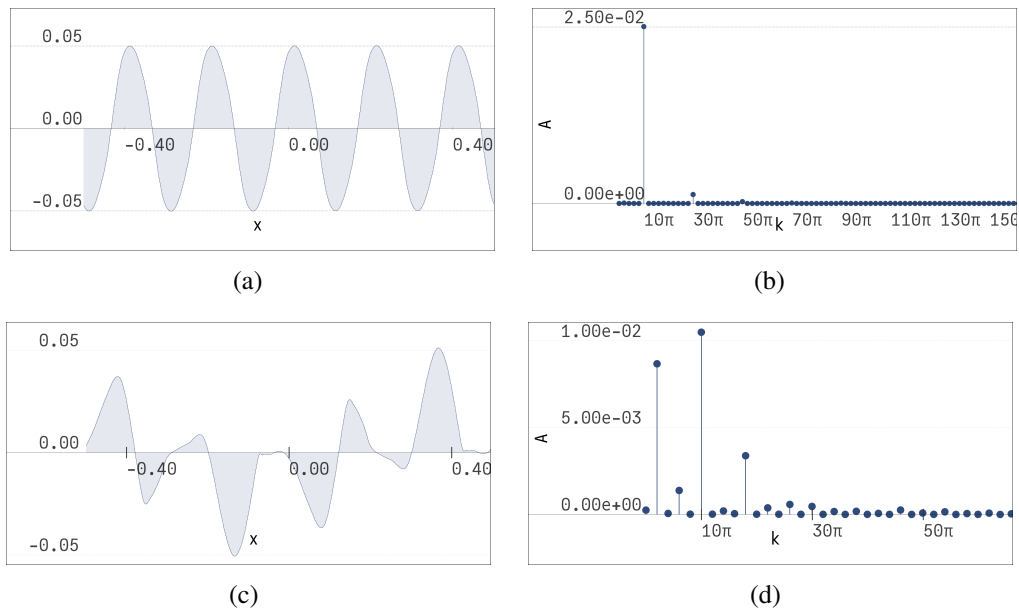


Figura 3.2.3: Valores do campo e amplitudes dos modos de Fourier no tempo final $t = 30$ para a evolução do campo SG com a condição inicial da Expressão 3.2.1. Os painéis (a) e (b) mostram, respectivamente, os valores do campo SG e as amplitudes dos modos de Fourier para a condição inicial (3.2.1) com $A_0 k_0^2 = 50$. Os painéis (c) e (d) apresentam os resultados correspondentes para $A_0 k_0^2 = 25$. Em particular, observe que, mesmo com a mistura de Fourier, o modo inicial $k = 10\pi$ permanece dominante em (d).

Este modelo, comumente referido como teoria do campo ϕ^4 , possui soluções topológicas do tipo kink. Em nossa abordagem, o termo quártico é considerado como uma perturbação não linear do modelo linear de KG ($\lambda = 0$). Conseqüentemente, nos referiremos a este modelo como o modelo de Klein-Gordon quártico (QKG).

No caso da equação linear de KG ($\lambda = 0$), os modos de Fourier evoluem independentemente, regidos pela relação de dispersão $\omega_k^2 = k^2 + m_0^2$, em que ω_k é a frequência e k é o número de onda de cada modo. O parâmetro m_0^2 corresponde à massa perturbativa da Definição 3.0.1.

A introdução do termo não linear $\lambda \phi^3$ induz interações entre diferentes modos de Fourier. Para examinar explicitamente esse efeito, expressamos o campo $\phi(t, x)$ em termos de sua transformada de Fourier $\hat{\phi}(t, k)$:

$$\phi(t, x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(t, k)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\phi}(t, k) e^{ikx}. \quad (3.2.5)$$

Expressões envolvendo potências de $\phi(t, x)$ podem ser representadas utilizando transformadas inversas de Fourier de convoluções. Por exemplo, o produto de duas funções $\phi(t, x)$ e $\psi(t, x)$ é

dado por:

$$\begin{aligned}\phi(t, x)\psi(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(t, k')] \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(t, k'')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}[(\hat{\phi} * \hat{\psi})(t, k)],\end{aligned}$$

em que a convolução de duas funções $\hat{\phi}(t, k)$ e $\hat{\psi}(t, k)$ é definida como:

$$(\hat{\phi} * \hat{\psi})(t, k) := \int_{-\infty}^{\infty} dk' \hat{\phi}(t, k') \hat{\psi}(t, k - k').$$

Esse conceito pode ser estendido para produtos de três ou mais funções. No caso da terceira potência, temos:

$$\phi^3(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{F}^{-1}[(\hat{\phi} * (\hat{\phi} * \hat{\phi}))](t, k) \quad (3.2.6)$$

em que

$$(\hat{\phi} * (\hat{\phi} * \hat{\phi}))(t, k) = \int_{\mathbb{R}^2} dk' dk'' \hat{\phi}(t, k') \hat{\phi}(t, k'') \hat{\phi}(t, k - k' - k'').$$

O termo não linear na equação de QKG é responsável pela geração de um harmônico de frequência mais alta. Por exemplo, considerando uma configuração de campo inicial de frequência única dada por:

$$\hat{\phi}(0, k) = \pi \left(\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0) \right), \quad (3.2.7)$$

obtemos a seguinte expressão para $\phi^3(0, x)$ a partir de (3.2.6):

$$\phi^3(0, x) = \frac{1}{4} \left(3 \cos(k_0 x) + \cos(3k_0 x) \right) = \cos^3(k_0 x).$$

Essa expressão contém um número de onda adicional $3k_0$, indicando a geração de um harmônico superior. Em contraste, para o termo linear (Expressão 3.2.5), está presente apenas o modo fundamental $\phi(0, x) = \cos(k_0 x)$.

O mecanismo para a geração de harmônicos superiores, conforme descrito acima, pode ser generalizado para o caso de potências mais altas do campo escalar na equação do campo, levando a um espectro de frequências mais complexo na configuração dele. Ao genera-

lizar o modelo QKG para incluir um potencial da forma:

$$V_N(\phi) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \frac{\lambda_n}{n+1} \phi^{n+1}, \quad (3.2.8)$$

introduzimos termos de ordem superior $\lambda_n \phi^n$ (onde $n = 1, 3, 5, \dots, N$) nas equações do campo, resultando no que chamamos modelo de Klein-Gordon não linear (NKG). Como consequência, a condição inicial da Expressão 3.2.1 produziria potências superiores de funções cossenoidais, introduzindo assim harmônicos adicionais, conforme expresso na seguinte fórmula:

$$\cos^n(k_0 x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1,3,\dots}^n C_{\frac{n+j}{2}}^n \cos(jk_0 x), & n = \{1, 3, 5, \dots\} \\ \frac{1}{2^n} \left(1 + 2 \sum_{j=2,4,\dots}^n C_{\frac{n+j}{2}}^n \cos(jk_0 x) \right), & n = \{2, 4, 6, \dots\} \end{cases}, \quad (3.2.9)$$

em que C_j^n representa o coeficiente binomial $C_k^n \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Notavelmente, termos não lineares ϕ^n com n ímpar dão origem a $n - 2$ harmônicos adicionais. Incluímos o caso de n par na Expressão 3.2.9 para completude, mas nosso foco será nos valores ímpares de n .

Quando consideramos a evolução temporal do sistema de duas equações de primeira ordem, equivalentes à equação de campo de segunda ordem, a configuração inicial do campo já contém modos harmônicos superiores, que podem influenciar a dinâmica subsequente do sistema. Para demonstrar isso, reescrevemos a equação de campo (Equação 3.2.2) na seguinte forma

$$\begin{cases} \Pi(t, x) = \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} - V'(\phi(t, x)). \end{cases} \quad (3.2.10)$$

Esse sistema pode ser integrado para obter:

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \phi(0, x) + \int_0^t \Pi(t', x) dt', \\ \Pi(t, x) &= \Pi(0, x) + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \phi(t', x)}{\partial x^2} - V'(\phi(t', x)) \right) dt'. \end{aligned}$$

Assumindo que os integrandos se comportem bem em um intervalo infinitesimal de tempo ε ,

aproximamos as integrais utilizando os valores iniciais dos integrandos:

$$\phi(\varepsilon, x) = \phi(0, x) + \varepsilon \Pi(0, x), \quad (3.2.11)$$

$$\Pi(\varepsilon, x) = \Pi(0, x) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi(0, x)}{\partial x^2} - V'(\phi(0, x)) \right). \quad (3.2.12)$$

A Expressão 3.2.12 envolve a derivada do potencial em $t = 0$, o que introduz harmônicos superiores de k_0 . Conseqüentemente, os termos não lineares presentes na equação do campo são responsáveis pelo fenômeno de mistura de modos de Fourier, ao qual nos referiremos como *mistura não linear de modos de Fourier*.

3.2.4 O caso particular de signum-Gordon

O modelo SG possui um potencial não-analítico, o que torna inadequada uma expansão em série de Taylor em torno de seu mínimo. Para identificar uma conexão entre os modelos SG e NKG, consideramos o efeito da derivada do potencial avaliada em uma onda como da Expressão 3.2.1.

O avanço linear e infinitesimal corresponde a uma evolução numérica das configurações do campo $\phi(\tau_i, x) \mapsto \phi(\tau_{i+1}, x)$, onde $\tau_i := i \delta \tau$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), utilizando um pequeno passo de tempo $\delta \tau$ (método de Euler). Esse processo pode ser iterado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \phi(\tau_{i+1}, x) = \phi(\tau_i, x) + \delta \tau \Pi(\tau_i, x), \\ \Pi(\tau_{i+1}, x) = \Pi(\tau_i, x) + \delta \tau \left[\frac{\partial^2 \phi(\tau_i, x)}{\partial x^2} - V'(\phi(\tau_i, x)) \right]. \end{cases}$$

Substituir a configuração inicial da Expressão 3.2.1 no esquema numérico recupera a Condição 3.2.3 tanto para as equações SG quanto para as NKG. Conseqüentemente, o termo do potencial atua como uma perturbação na evolução temporal da equação de onda.

A distinção fundamental entre esses dois modelos reside em seus respectivos potenciais. Ao empregar o potencial não linear V_{NKG} dentro do quadro de integração perturbativa, podemos comparar diretamente seus efeitos sobre uma onda sinusoidal com os do potencial SG. Tanto $V'_{NKG}(\phi(0, x))$ quanto $V'_{SG}(\phi(0, x))$ podem ser expressos como séries de Fourier envolvendo harmônicos ímpares positivos de k , permitindo assim analisar a geração de harmônicos superiores em ambos os modelos.

Para o modelo NKG, a perturbação de primeira ordem (proporcional a δt) gerada pelo

potencial é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\delta t V'_N(\varphi(0,x)) &= \delta t \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \lambda_n A_0^n \cos^n(k_0 x) \\ &= \delta t \sum_{j=1,3,5,\dots}^N A_j \cos(jk_0 x),\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

em que os coeficientes A_j são obtidos de acordo com a Expressão 3.2.9 e são expressos da seguinte forma:

$$A_j = 2 \sum_{n=j,j+2,\dots}^N \lambda_n \left(\frac{A_0}{2}\right)^n C_{\frac{j+n}{2}}^n. \quad (3.2.14)$$

Essa fórmula reflete o efeito cumulativo dos coeficientes λ_n sobre cada coeficiente de amplitude, demonstrando como os termos não lineares no potencial contribuem para a dinâmica global do sistema. A convergência de A_j quando $N \rightarrow \infty$ é determinada pela razão:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_n (A_0/2)^n C_{\frac{j+n}{2}}^n}{\lambda_{n-2} (A_0/2)^{n-2} C_{\frac{j+n-2}{2}}^{n-2}} \right| = A_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-2}} \right|.$$

A convergência requer que $r < 1$, levando ao critério de convergência de amplitude:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n} \right| > A_0^2. \quad (3.2.15)$$

Em contraste, o termo de perturbação SG possui uma forma simples. Ao avaliar o potencial SG sobre a onda senoidal, obtém-se uma onda quadrada. Essa onda quadrada pode ser representada como uma série de Fourier, ou seja, uma soma de funções sinusoidais com diferentes frequências. A representação em série de Fourier da perturbação SG é dada por:

$$\begin{aligned}\delta t V'_{SG}(\varphi(0,x)) &= \delta t \operatorname{sign}(\cos(kx)) \\ &= \delta t \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{j} \cos(j(kx)).\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

Ambas a Expressão 3.2.13 e a Expressão 3.2.16 são séries de Fourier envolvendo funções cosseno $\cos(j(kx))$. A truncagem do índice j em um determinado valor fornece um esquema de regularização para as expressões não-analíticas na Equação 3.2.16 que surgem no modelo SG. Essa truncagem garante que ambas as expressões $\delta t V'_N(\varphi(0,x))$ e $\delta t V'_{SG}(\varphi(0,x))$ sejam representadas por um número igual de funções cosseno correspondentes, permitindo as-

sim sua comparação direta. Isso conduz ao seguinte sistema de equações para os coeficientes λ_n :

$$\sum_{n=j, j+2, \dots}^N \lambda_n \left(\frac{A_0}{2}\right)^n \binom{n}{\frac{j+n}{2}} = \frac{2}{j\pi} (-1)^{\frac{j-1}{2}}, \quad (3.2.17)$$

em que $j \leq N$ indexa as equações. O sistema de equações na Equação 3.2.17 pode ser expresso como um sistema linear de equações

$$\sum_{\gamma=0,1,2,\dots}^{\beta-\alpha} \mathcal{A}_{\alpha\gamma} \lambda_{2\alpha+2\gamma+1} = \mathcal{B}_\alpha, \quad \alpha \leq \beta,$$

em que $\beta = \frac{N-1}{2} = \{0, 1, \dots\}$ e $\alpha = \frac{j-1}{2} = \{0, 1, \dots, \beta\}$. Os coeficientes do sistema são dados por

$$\mathcal{A}_{\alpha\gamma} \equiv \left(\frac{A_0}{2}\right)^{2\alpha+2\gamma+1} \binom{2\alpha+2\gamma+2}{2\alpha+\gamma+1}, \quad \mathcal{B}_\alpha \equiv \frac{2(-1)^\alpha}{(2\alpha+1)\pi},$$

em que $\mathcal{A}_{\alpha\gamma}$ forma uma matriz triangular.

As soluções λ_n dependem do número N . Por exemplo, λ_N é dada por

$$\lambda_N \equiv \lambda_{2\beta+1} = \frac{\mathcal{B}_\beta}{\mathcal{A}_{\beta 0}} = (-1)^{\frac{N-1}{2}} \frac{2}{N\pi} \left(\frac{2}{A_0}\right)^N.$$

Para levar em conta essa dependência, introduzimos um índice adicional na solução: $\lambda_N^{(N)}$. De fato, podemos fornecer uma solução para qualquer n ímpar, com $n \leq N$, da forma:

$$\lambda_n^{(N)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{n\pi} \binom{\frac{N+n}{2}}{\frac{N-n}{2}} \left(\frac{2}{A_0}\right)^n. \quad (3.2.18)$$

Ao examinar a Expressão 3.2.18, podemos verificar que ela satisfaz a condição de convergência (Condição 3.2.15), que é dada por:

$$\frac{n^2(n-1)}{(n-2)(N+n)(N-n+2)} > 1.$$

Essa condição é satisfeita para n suficientemente grande. Em particular, quando $n = N$ (correspondente à razão dos dois últimos coeficientes, $\lambda_{N-2}^{(N)}/\lambda_N^{(N)}$), a condição se mantém para qualquer $N > 2$. Isso garante a convergência da série à medida que o parâmetro de truncamento N tende ao infinito.

O coeficiente mais baixo $\lambda_1^{(N)}$ exibe uma dependência linear em N e pode ser identi-

ficado com a massa perturbativa do modelo NKG:

$$m_0^2 \equiv \lambda_1^{(N)} = \frac{2}{A_0\pi}(N+1). \quad (3.2.19)$$

Essa fórmula revela que dois trens de onda idênticos, com a mesma amplitude A_0 , exibem uma diferença em sua massa perturbativa devido ao parâmetro N , que está associado à presença de $(N+1)/2$ constantes de acoplamento, $\lambda_n^{(N)}$. A massa perturbativa é diretamente proporcional ao valor $\frac{4}{A_0\pi}$ (a menor massa perturbativa correspondente a $N=1$) e ao número de constantes de acoplamento.

Podemos associar essa massa perturbativa com a massa efetiva (Definição 3.1.4) ao identificar o parâmetro de amplitude da onda A_0 com o tamanho das perturbações σ , o que resulta em

$$m_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{A_0} = \frac{\pi}{2(N+1)}m_0^2. \quad (3.2.20)$$

Para as demais constantes de acoplamento, podemos obter expressões assintóticas no limite $N \rightarrow \infty$. Consideramos a expressão

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \ln |\lambda_n^{(N)}|.$$

Utilizando na Equação 3.2.18 a aproximação de Stirling,

$$\ln k! = \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln k - k + \frac{1}{2} \ln(2\pi),$$

obtemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \ln |\lambda_n^{(N)}| = \ln \lambda(v), \quad (3.2.21)$$

em que $v \equiv n/N$ e

$$\lambda(v) \equiv \frac{1+v}{1-v} \left(\frac{1-v^2}{A_0^2 v^2} \right)^v. \quad (3.2.22)$$

O termo $\lambda_n^{(N)}$ pode ser aproximado em termos de $\lambda(v)$ como:

$$\lambda_n^{(N)} \simeq (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\lambda \left(\frac{n}{N} \right) \right]^{N/2}. \quad (3.2.23)$$

As figura Figura 3.2.4(a) e Figura 3.2.4(b) comparam $\lambda(v)$ da Equação 3.2.22 com $\frac{2}{N} |\lambda_n^{(N)}|$ da Equação 3.2.18 para $N = \{501, 5001\}$. A série truncada fornece aproximações

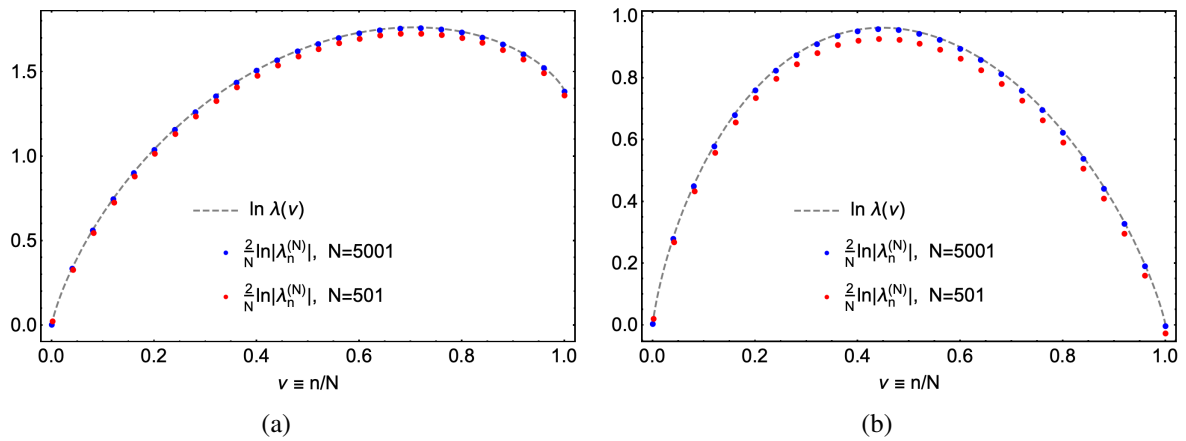


Figura 3.2.4: Função $\lambda(v)$ (linha tracejada) comparada com $\frac{2}{N} \ln |\lambda_n^{(N)}|$ (pontos) para (a) $A_0 = 1$ e (b) $A_0 = 2$.

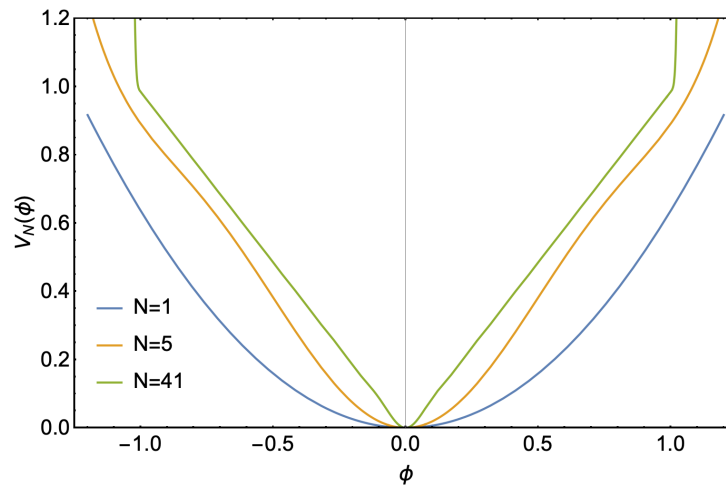


Figura 3.2.5: Potencial NKG (3.2.8) para $N = 1, 5, 41$ com $A_0 = 1$.

arbitrariamente boas para o valor absoluto de $|\phi|$. A Figura 3.2.5 ilustra o potencial NKG (Expressão 3.2.8) para $N = \{1, 5, 41\}$.

No Apêndice B fazemos algumas observações e análise dessa expansão do potencial.

3.2.5 Relação de dispersão dos harmônicos

Até agora, desenvolvemos o raciocínio por trás da propagação SG sem massa e quase sem massa dos modos de Fourier. Dado que foi demonstrado que o potencial gera efetivamente comprimentos de onda harmônicos a partir de um comprimento de onda de entrada k_0 , sob a condição $A_0 k_0^2 \gg 1$, surge naturalmente a questão: quais são as frequências correspondentes a esses modos?

Note que a configuração inicial da Expressão 3.2.1 utilizada nos argumentos anterio-

res não especifica explicitamente a relação entre os parâmetros k_0 e ω_0 . Essa relação depende da forma específica do modelo físico subjacente ou, equivalentemente, da forma da equação do campo. Para a propagação em um modelo linear de Klein-Gordon com massa m , regido por um potencial quadrático, e dado um número de onda k_0 , a condição inicial on-shell requer que a frequência angular associada seja

$$\omega_0 = \sqrt{k_0^2 + m^2}.$$

O sinal de k_0 determina apenas a direção de propagação da onda, sem influenciar sua frequência. Uma vez que a massa perturbativa m_0 foi calculada para o par (A_0, k_0) , conforme o resultado mostrado na Expressão 3.2.19, espera-se que a frequência angular dominante no domínio do tempo seja

$$\omega_0 = \sqrt{k_0^2 + \frac{4}{\pi A_0}}.$$

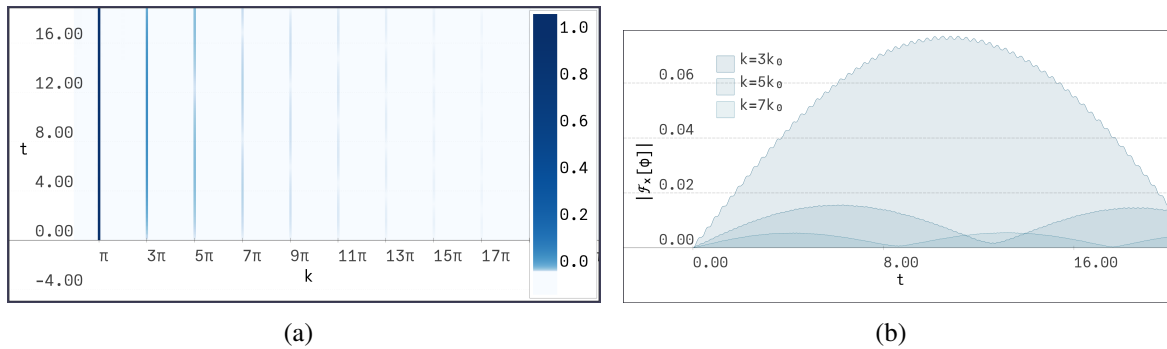


Figura 3.2.6: Painel (a): Evolução temporal da magnitude da transformada de Fourier da parte espacial do campo SG, $|\mathcal{F}_x[\phi]|(t, k)$. Painel (b): Perfis $|\mathcal{F}_x[\phi]|(k_n, t)$ da Figura (a), em que $k_n = \{3k_0, 5k_0, 7k_0\}$ e $k_0 = \pi$. As condições iniciais são de uma onda plana em $t = 0$, com número de onda $k = \pi$ e amplitude $A = 1$. O campo é simulado com condições de contorno periódicas.

De fato, uma configuração inicial com essa relação de dispersão leva a uma propagação muito estável, e os harmônicos gerados k_n parecem seguir uma relação de dispersão aproximadamente linear em relação à frequência angular correspondente, isto é, $\omega_n \simeq k_n$. Os modos de ordem superior $k_n = n\pi$, com $n = 1, 3, 5, \dots$, são gerados pelos efeitos perturbativos do termo apresentado na Expressão 3.2.16. A Figura 3.2.6 ilustra a evolução temporal desses modos. Ao realizar uma transformada de Fourier discreta no domínio do tempo sobre os dados apresentados na Figura 3.2.6(a) e identificar as amplitudes dominantes para cada par (k_n, ω_n) com $n = 1, 3, 5, \dots$, obtemos a Figura 3.2.7, que mostra o modo dominante juntamente com cinco harmônicos gerados.

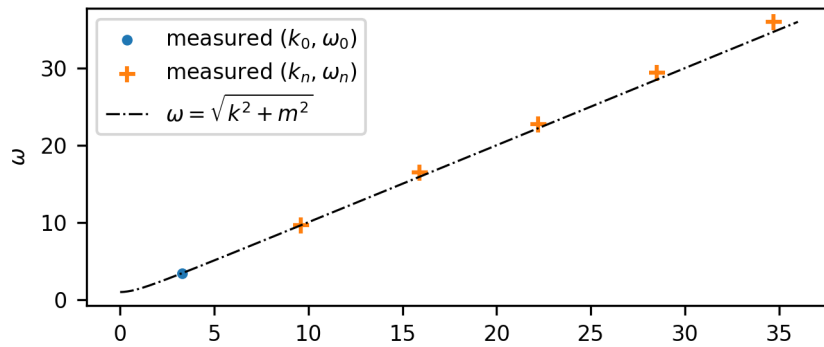


Figura 3.2.7: Relação de dispersão do modo dominante ($n = 1$, círculo azul) e de cinco harmônicos gerados ($n = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, cruces claras) obtidos a partir de uma transformada de Fourier tanto no tempo quanto no espaço. A linha traço-pontilhada indica uma relação de dispersão de Klein-Gordon com $m = 1$. Estes dados são complementares àqueles da Figura 3.2.6, sendo derivados do mesmo conjunto de dados.

3.2.6 Métodos de Inferência de Massa

Esta seção apresenta um método para extrair informações a partir do potencial de um campo, em particular o termo de massa e correções de ordem superior, diretamente da dinâmica numérica deste campo. Diferentemente de abordagens perturbativas anteriores, aqui analisamos a equação completa do campo. Isso é alcançado gerando e analisando sinais monocromáticos no campo, construindo um mapa de amplitude $A(k, \omega)$ no espaço energia-momento para identificar ramificações de dispersão e inferir informações sobre o potencial efetivo dependente do campo. Esse procedimento é análogo a um problema de propagação inversa. Focamos em duas abordagens-chave para o processo de medição de massa: uma baseada em uma configuração de campo monocromática inicial com condições de contorno periódicas, e outra por meio da produção de um sinal (um *drive*) no campo. Em ambos os casos, as transformadas de Fourier apropriadas (em tempo ou em espaço, respectivamente) são usadas para construir o mapa de amplitudes $A(\omega, k)$.

O mapa de amplitude é central nesse processo, pois viabiliza a identificação das ramificações de dispersão e a construção de um potencial efetivo que depende do campo. A seguir descrevemos as duas abordagens e seus resultados:

1. Configuração inicial do campo (método $k_0 \rightarrow \omega$)

Definimos uma condição inicial de campo “quase on-shell” empregando uma onda monocromática, conforme definido na Equação 3.2.1, e usamos condições de contorno periódicas. Essa escolha de fronteira serve para simular um espaço infinito e evitar efeitos

de borda. A condição inicial corresponde a controlar o número de onda de entrada k e medir a frequência resultante $\{\omega\}$. Nesse método, o campo é inicializado com um determinado número de onda k e deixado propagar por um período definido. A evolução da frequência angular ω e a distribuição do sinal gerado nas diversas frequências são rastreadas computando-se os modos de Fourier no tempo.

Esse procedimento, quando executado em uma única simulação, fornece a transformada de Fourier temporal do campo em uma localização x escolhida, no nosso caso $x = 0$. Para construir o mapa $A(k, \omega)$, realizamos muitas simulações para diversos valores igualmente espaçados de k , reunindo todos esses dados no mapa final. Para garantir suavidade nas fronteiras, dadas condições periódicas, definimos os números de onda de entrada como $k = L/(2\pi n)$, em que L é o comprimento espacial do domínio de simulação e n é um número inteiro. Essa metodologia, aplicada tanto para a equação de Klein-Gordon quanto para signum-Gordon, nos permite confirmar numericamente as relações de dispersão esperadas e extrair informações sobre o potencial efetivo, incluindo o termo de massa.

Os espectros de amplitude apresentados na Figura 3.2.8 e na Figura 3.2.9 foram gerados com esse método. Para cada número de onda k (eixo horizontal), realiza-se uma simulação, evolui-se no tempo e obtém-se uma transformada de Fourier espacial no instante final para obter as distribuições em comprimento de onda (eixo vertical). A Figura 3.2.8 mostra o cálculo de referência, isto é, o mapa resultante e a massa inferida em função de k , para o procedimento aplicado ao campo de Klein-Gordon. Já a Figura 3.2.9(a) apresenta um mapa análogo para o campo signum-Gordon; a Figura 3.2.9(b) superpõe seus modos principais com a relação de dispersão de KG para $m = 1$: a boa concordância, especialmente para $k > \pi/2$, corrobora a hipótese de comportamento massivo das ondas monocromáticas em SG.

2. Sinal gerado em $x = 0$ (método $\omega_0 \rightarrow k$)

Este método consiste em injetar um sinal monocromático em uma das fronteiras do campo, por exemplo, $\phi(t, 0)$, e deixá-lo propagar no espaço até um tempo final t_f . Dada uma frequência de entrada $f_0 = \omega_0/2\pi$, espera-se que o campo selecione adequadamente uma distribuição de amplitudes em função de comprimentos de onda, $A(\omega_0, k)$. Por exemplo, na equação de Klein-Gordon, tem-se $A_{KG} = A_0 \delta(\omega_0^2 - m^2)$, em que $\delta(x)$ é a distribuição de Dirac.

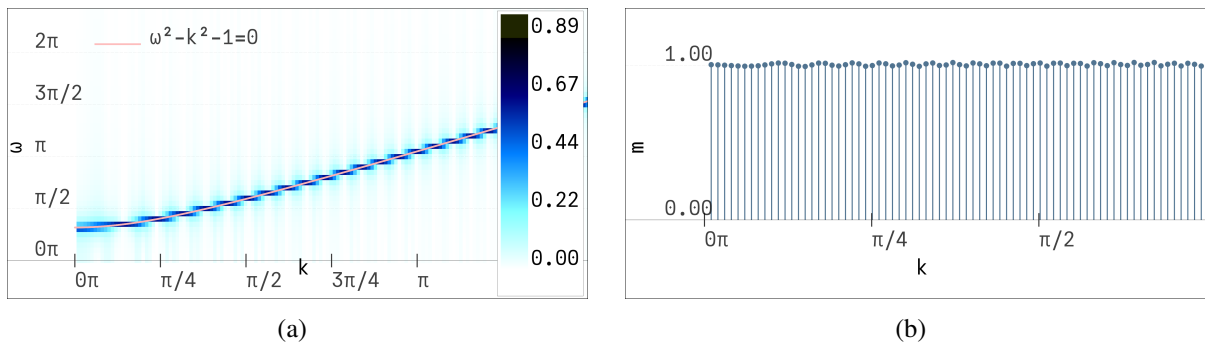


Figura 3.2.8: A relação de dispersão “on-shell” de KG no espaço energia-momento é apresentada em (a), calculada via o método de produção de sinal, com a curva de dispersão real $m = 1$ superposta. Os dados foram obtidos apenas para a rama positiva de k , com $m = 1$. A Figura (b) mostra a massa inferida do campo a partir desses dados. Para o campo linear de KG, a massa permanece constante (aquí, $m = 1$).

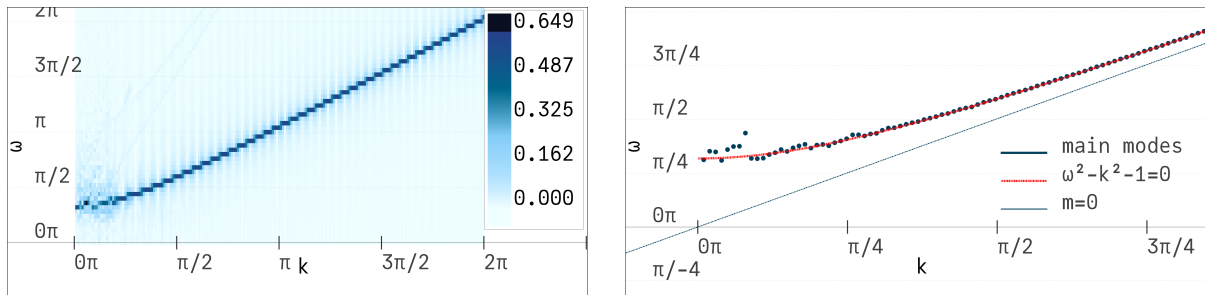


Figura 3.2.9: Relação de dispersão de signum-Gordon para uma simulação com dado inicial $A = \frac{4}{\pi}$ implica, consistentemente, em $m = 1$ para diversos k . A Fig. (a) mostra o conjunto de frequências (espaço recíproco) do campo simulado no intervalo de tempo $t \in [0, 40]$ (que, nas condições de simulação, corresponde a um tempo curto). Na Fig. (b), os picos (modos principais) foram extraídos do mapa de (a) e exibidos como pontos claros, enquanto a relação de dispersão de Klein-Gordon $\omega = +\sqrt{k^2 + m^2}$ para $m = 1$ foi sobreposta. Também é mostrada a mesma relação de dispersão para $m = 0$, como comparação. Note a boa concordância, especialmente para $k > \pi/4$.

O procedimento é efetivado aplicando-se uma transformada de Fourier espacial \mathcal{F}_x ao campo no instante final, obtendo-se assim as distribuições correspondentes. Analogamente ao método anterior, repetimos esse processo para várias frequências de entrada, construindo o mapa $A(k, \omega_0)$. A Figura 3.2.10(a) mostra esse mapa; a Figura 3.2.10(b) exhibe os picos de magnitude extraídos, $\max[A(\omega_0, k)]$, junto a duas retas de referência: a relação de dispersão $k(\omega)$ de Klein-Gordon para $m = 1$ (ramo positivo) e a relação de dispersão com $m = 0$.

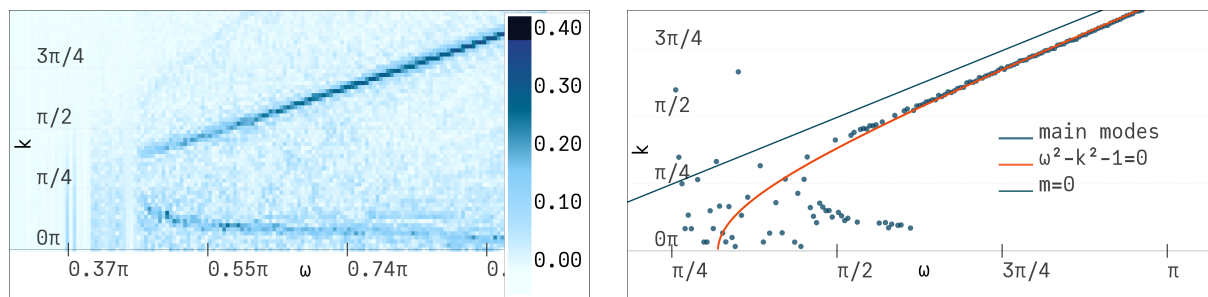


Figura 3.2.10: Espectro de amplitude inferido do campo SG sob sinais de amplitude $A_0 = 4/\pi$ (o que fornece massa efetiva $m_{eff} = 1$). Na Fig. (a) temos o mapa bruto, enquanto na Fig. (b) seus picos (círculos) são mostrados, junto às relações de dispersão de KG para $m = 1$ e $m = 0$.

4 Aplicação de Métodos de Fourier a Oscillons

Nesta seção vamos apresentar resultados inéditos de aplicação de métodos de Fourier à construção de oscillons. Começamos com o caso de $1 + 1$ dimensões, onde é possível derivar uma solução de onda plana, Seção 4.1, além de reproduzir o oscillon exato utilizando esses métodos, Seção 4.2. Na sequência vamos apresentar uma análise em $d + 1$ dimensões com simetria (hiper) esférica, baseada no mesmo método mas em espaço de Fourier-Bessel, Seção 4.3.

Esses novos métodos são baseados nos métodos utilizados em [Arodz and Klimas \[2005\]](#), [Arodz et al. \[2005, 2006\]](#), em que a equação dinâmica do campo SG é decomposta em duas equações lineares não homogêneas, cada uma do tipo

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(t, x) = \pm 1. \quad (4.0.1)$$

Essa abordagem exige cuidado ao unir as soluções das duas equações, nos pontos onde o campo troca de sinal. No entanto, conforme mencionado no Capítulo 1, esse método tem utilidade notável no desenvolvimento de várias soluções, incluindo [Arodz and Klimas \[2005\]](#), [Arodz and Swierczynski \[2011\]](#), [Arodz et al. \[2005, 2006, 2007, 2008\]](#). Reiteramos que trata-se de um tema rico, com estudos detalhados, incluindo a estabilidade e o espalhamento de oscillons [Hahne et al. \[2020b\]](#), [Klimas et al. \[2018\]](#), bem como soluções de onda de choque que levam à produção de grande quantidade de radiação de campo [Hahne et al. \[2020a\]](#).

Nossa abordagem é uma extensão desse método, ajudando a lidar com as dificuldades não lineares inerentes ao processo de, conforme mencionado acima, “costurar” (unir) muitas soluções da Equação 4.0.1. Ela consiste em promover o termo não homogêneo ± 1 para uma função sinal no espaço-tempo, $\sigma(t, x) \equiv “\pm 1(t, x)”$ ⁸. O ponto-chave é que tais funções costumam ter transformadas de Fourier muito simples, de modo que encontrar uma solução adequada reduz-se a ajustar amplitudes de Fourier do problema linear, e tomar certos cuidados em selecionar, das soluções da equação não homogênea, aquelas com estrutura causal compatível com soluções da equação de movimento do campo original (de cuja derivada do potencial se constrói o termo não homogêneo). Isso é tecnicamente equivalente a reconstruir a informação de campo ausente pela influência do termo d’Alembertiano. A equação efetiva a ser resolvida, então, torna-se

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(t, x) = -\sigma(t, x), \quad (4.0.2)$$

⁸Observe que, aqui, σ não possui qualquer relação com aquele definido em Equação 3.1.4

em que a função σ é escrita como produto de uma série de Fourier no tempo — já que procuramos soluções periódicas, sendo usualmente a onda quadrada de amplitude 1 —, com uma transformada de Fourier adequada no espaço.

Vale notar que a solução final da equação não homogênea não necessariamente é uma configuração válida de signum-Gordon; as soluções permitidas pela onda não homogênea são um superconjunto das permitidas por SG. Em especial, além dessa equação efetiva, também são necessárias:

1. soluções devem ser estritamente compactas — nulas fora da região onde o termo não homogêneo atua; isto é análogo a dizer que a solução não deve irradiar fora do suporte (se existir) dos termos não homogêneos, *i.e.*, deve ser vácuo fora dele;
2. seu sinal deve coincidir com o do termo não homogêneo;
3. para que uma solução compacta seja fisicamente aceitável, ela deve ser diferenciável duas vezes (ou seja, de classe C^2) em torno do vácuo;
4. a integração de campos forçados exige consideração de potenciais retardados/avançados, que modificam o componente de onda livre de acordo com a causalidade (*i.e.*, cones de luz adequados). Já um termo de potencial, por outro lado, afeta a função de Green da equação, mas não atua como uma força externa. Logo, não tem — e não pode ter — relação causal com a dinâmica do campo.

Todos esses fatores devem ser levados em conta na seleção do conjunto particular de soluções da onda livre não homogênea que se ajusta corretamente à equação de campo original (signum-Gordon).

4.1 Onda quadrada

Um exemplo é a onda quadrada de amplitude 1 e período 2π , escrita como

$$\text{SqWave}(\xi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^{n-1}}{n} \cos(n\xi), \quad (4.1.1)$$

em que \mathbf{i} é a unidade imaginária. A presença dessa unidade foi utilizada para simplificar a notação, sem tornar a função complexa, já que seu expoente $n - 1$ é par. Note que $V'_{SG}(A \cos(t))$ corresponde exatamente a essa onda quadrada, para qualquer valor positivo de A . Essa liberdade

de amplitude, sozinha, já indica haver uma infinidade não enumerável de estados de campo que produzem a mesma força não homogênea em determinado instante. De fato, há infinitas outras construções cujo perfil de sinal gera a mesma onda quadrada exata. Por exemplo, o sinal da própria onda quadrada, de qualquer amplitude não nula, etc.

Podemos questionar se, acrescentada a dependência espacial, existe uma forma que seja solução da equação signum-Gordon. A resposta é sim. Para encontrar essa solução, primeiro permitimos que a configuração de campo se propague no espaço, $\xi \rightarrow kx - \omega t$. Isso conduz à equação não homogênea

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(t, x) + \text{SqWave}(kx - \omega t) = 0. \quad (4.1.2)$$

Em seguida, construímos um *ansatz* para a solução. Como o termo de d'Alembert envolve derivadas de segunda ordem, é razoável assumir que

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cos(n(kx - \omega t)).$$

Observe que, embora esta possa ser interpretada como uma extensão das ondas monocromáticas da Expressão 3.2.1, nós aqui estamos utilizando essa soma como a forma geral das soluções da Equação 4.1.2.

Substituindo $\Phi(t, x)$ na equação de signum-Gordon e comparando termos, obtém-se

$$A_n = \frac{i^{n-1}}{n^3} A_0, \quad n = 1, 3, \dots,$$

em que

$$A_0 \equiv \frac{4}{\pi(\omega^2 - k^2)}. \quad (4.1.3)$$

É possível verificar que essa é uma solução da equação de signum-Gordon. Observe que isso não fixa $\omega^2 - k^2$, restando certa liberdade de “calibre de massa” (por analogia à relação de dispersão de Klein-Gordon), conectando as quantidades de entrada k e ω . Definindo $m_0^2 \equiv \omega^2 - k^2$, essa “massa” da onda livre é inversamente proporcional à raiz quadrada da amplitude base da solução A_0 :

$$m_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi A_0}}.$$

Como estamos apenas fazendo analogia ao caso de Klein-Gordon e a quantidade fundamen-

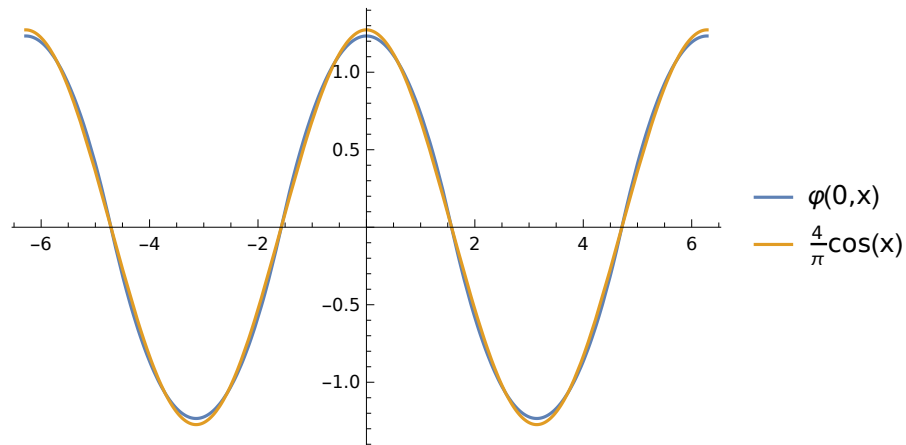
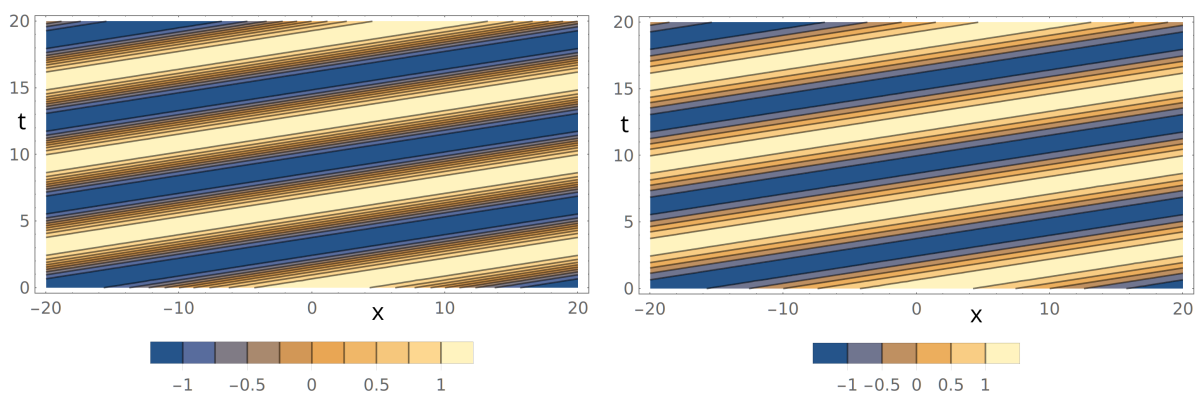


Figura 4.1.1: A solução $\Phi(t, x)$ com $k = 1$ e $m_0 = 1$ no tempo $t = 0$, comparada à onda senoidal indicada. As amplitudes A_n decrescem rapidamente pois são proporcionais a n^{-3} , com n ímpar.

tal em nossa análise é A_0 (Expressão 4.1.3), valores complexos de m_0 são permitidos. Esses resultam em valores negativos de A_0 .

Na Figura 4.1.1 comparamos uma dessas soluções a uma onda puramente cossenoidal, equivalente a uma onda livre no campo de Klein-Gordon. Na Figura 4.1.2 comparamos soluções completas de onda plana em SG (Figura 4.1.2(a)) usando $m_0 = 1$ e $k = \pi/20$ com a solução equivalente em Klein-Gordon com os mesmos parâmetros (amplitude equivalente a $A = \frac{4}{\pi}$, Figura 4.1.2(b)).



(a) signum-Gordon com $m_0 = 1$ e $k = \pi/20$.

(b) Klein-Gordon com $m = 1$ e $k = \pi/20$.

Figura 4.1.2: Comparação entre a “onda plana” signum-Gordon em (a) e a solução Klein-Gordon em (b), ambas com “massa” $m_0 = m = 1$ e $k = \frac{\pi}{20}$. A gradação cores representa valor do campo. A escolha de k pequeno se dá para evidenciar o efeito da massa na propagação, que faz com que as ondas apareçam mais “deitadas” no diagrama de espaço-tempo.

4.2 Função retângulo e o oscillon simples em (1 + 1) dimensões

Consideramos agora outro exemplo, dado pela função retângulo $\Pi(x)$, definida por

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Como esta é uma função par, sua transformada de Fourier pode ser escrita em termos de funções cosseno⁹:

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) \cos(kx) dx \quad (4.2.2)$$

$$\hat{\Pi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right), \quad (4.2.3)$$

em que $\text{sinc}(x)$ é a função definida da seguinte forma:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0, \\ \frac{\sin(x)}{x}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um possível termo não homogêneo, construído a partir dessa primitiva e da onda quadrada da Expressão 4.1.1, é

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) &= \text{SqWave}(\omega t) \Pi(x) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^{n-1}}{n} \cos(n\omega t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left[\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

em que $\mathcal{F}^{-1}[f]$ é a transformada inversa de Fourier da função f . Multiplicar $\Pi(x)$ pela onda quadrada (no tempo) transforma-a em um retângulo que alterna seu sinal com período $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Como a parte temporal de $\sigma(t, x)$ é uma série, enquanto sua parte espacial é uma transformada (contínua), um *ansatz* apropriado seria

$$\Phi(t, x) = \chi(x) \tau(t),$$

⁹Nesta seção, por motivos de simplicidade, utilizamos a definição simétrica da transformada de Fourier.

com

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(k) e^{ikx} dk \quad (4.2.5)$$

e

$$\tau(t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cos(n\omega t). \quad (4.2.6)$$

A distribuição $\hat{\chi}(k)$ e as amplitudes A_n ainda precisam ser determinadas. O operador de d'Alembert sobre $\varphi(t, x)$ pode ser calculado como

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2)\Phi(t, x) &= \ddot{\tau} \chi - \chi'' \tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} dk (k^2 - n^2 \omega^2) \hat{\chi}(k) e^{ikx}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Note que as integrais dependem do número inteiro ímpar n , que indexa cada termo da soma. Substituindo essa forma explícita do termo d'Alembertiano (Equação 4.2.7) e o termo não homogêneo $\sigma(t, x)$ (Equação 4.2.4) na Equação 4.0.2, obtemos a relação para A_n e $\chi(k)$:

$$A_n \hat{\chi}(k) = \frac{4}{\pi} \frac{i^{n-1}}{n(k^2 - n^2 \omega^2)} \hat{\Pi}(k), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.8)$$

Embora não seja claro como separar a dependência de A_n em n e de $\hat{\chi}(k)$ em k , a solução pode ser escrita em termos dessa combinação, pois

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos(n\omega t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} A_n \hat{\chi}(k) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos(n\omega t) \mathcal{F}^{-1}[A_n \hat{\chi}](x). \quad (4.2.9)$$

Calculando a integral $\mathcal{F}^{-1}[A_n \hat{\chi}]$, obtemos

$$\mathcal{F}^{-1}[A_n \hat{\chi}](x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4i^{n-1}}{\pi n^3 \omega^2} \left[\theta\left(\frac{1}{2} + x; \frac{n\omega}{2}\right) + \theta\left(\frac{1}{2} - x; \frac{n\omega}{2}\right) \right], \quad (4.2.10)$$

em que definimos

$$\theta(\xi; \alpha) \equiv \text{sign}(\xi) \sin^2(\alpha \xi).$$

Note que, tal como no caso estudado na Seção 4.1, também aqui há um parâmetro livre. Enquanto no caso anterior tal parâmetro relacionava-se a $k^2 - \omega^2$, aqui o parâmetro é exclusivamente dado por ω . Porém, veremos adiante que esse parâmetro só pode assumir valores múltiplos inteiros de 2π . Por construção, a solução $\varphi(t, x)$ deve ser nula fora do intervalo $x \in [-1/2, 1/2]$. Demonstraremos que isso só acontece se $\omega = 2\pi N$, com $N = 1, 2, 3, \dots$

Examinemos a soma $\theta(a + x; \alpha) + \theta(a - x; \alpha)$, que determina como cada modo de Φ se distribui no espaço (ver Equação 4.2.10 e Equação 4.2.9). Para que tal soma seja zero fora do intervalo $(-a, a)$, é necessário que

$$\sin^2[\alpha(a + x)] - \sin^2[\alpha(a - x)] = 0 \quad (4.2.11)$$

para todo x . Usando a identidade trigonométrica $\sin^2(x_1 + x_2) - \sin^2(x_1 - x_2) = \sin(2x_1) \sin(2x_2)$, concluímos que a condição expressa na Equação 4.2.11 é válida para todos os x se e somente se $\sin(2\alpha a) = 0$. Assim, $\alpha a = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Para o caso das integrais da Expressão 4.2.10, temos $a = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{n\omega}{2}$, o que implica

$$n\omega = 2m\pi.$$

Note que o número inteiro n é ímpar, já que ele é o índice do somatório na Expressão 4.2.9. A validade da condição expressa na Equação 4.2.11 é satisfeita com $\omega = 2\pi N$ (com $N = 1, 2, 3, \dots$). Assim, a solução final Φ depende apenas de N , escrevendo-a convenientemente como $\Phi_N(t, x)$. Adiante interpretamos o significado do inteiro N .

4.2.1 Interpretação da solução $\varphi(t, x)$

Primeiramente, notemos que o período fornecido por $\omega = 2\pi N$ é $T_N = 1/N$. Para $N = 1$, esse valor é exatamente a mesma medida do suporte de $\Pi(x)$: um segmento unitário. Logo, a solução oscilante com $N = 1$ tem $\text{sup}(\varphi_1) = [-1/2, 1/2]$. De fato, coincide identicamente com a solução de oscillon simples encontrada na literatura (Arodz et al. [2008]). Para valores diferentes de N , a solução equivale a “acomodar” N oscillons lado a lado, já que cada oscillon individual $\mathcal{O}(t, x)$ tem suporte compacto de comprimento $1/N$ e período equivalente.

4.2.2 Análise do espaço recíproco

Nesta seção, fazemos uma análise mais detalhada da decomposição em Fourier apresentada na (Expressão 4.2.8). Como o oscillon simples é exato e periódico (com período $T = 1$), sua transformada de Fourier no tempo é discreta. Dada essa frequência fundamental $\omega_1 = 2\pi/T$, podemos deduzir, por analogia a Klein-Gordon, uma massa efetiva para o oscillon em termos de uma relação de dispersão. Embora a decomposição $A_n \hat{\chi}(k)$ não deixe explícita essa dispersão, mostraremos que, de fato, ela possui consistência.

Primeiramente, note que a distribuição $A_n \hat{\chi}(k)$ possui singularidades removíveis em

$k = \pm\omega_n$, já que o numerador $\hat{\Pi}(k) \sim \sin(\frac{k}{2})$ também se anula nesses pontos. Se examinarmos o perfil de cada distribuição em espaço de Fourier, ver Fig. (4.2.1), vemos que cada modo (exceto $n = 1$) apresenta um segundo extremo relevante próximo a $|k| \simeq 2\pi n$. Contando desde o primeiro extremo, o seguinte mais significativo seria, empiricamente, o $(2n - 1)$ -ésimo. À medida em que analisamos valores de n maiores, tanto mais distantes da origem esses máximos se manifestam, e o formato global dessas distribuições parece aproximar-se de distribuições singulares, concentradas em $k = \{\pm 2\pi n, 0\}$, e quase nulas no resto. Abaixo, mostramos que as localizações (k, ω) desses extremos coincidem quase perfeitamente com a curva que define a relação de dispersão de Klein-Gordon, $\omega_{KG}^2 = k^2 + m^2$, para $m = 2\pi$ (considerando o oscillon de período $T = 1$).

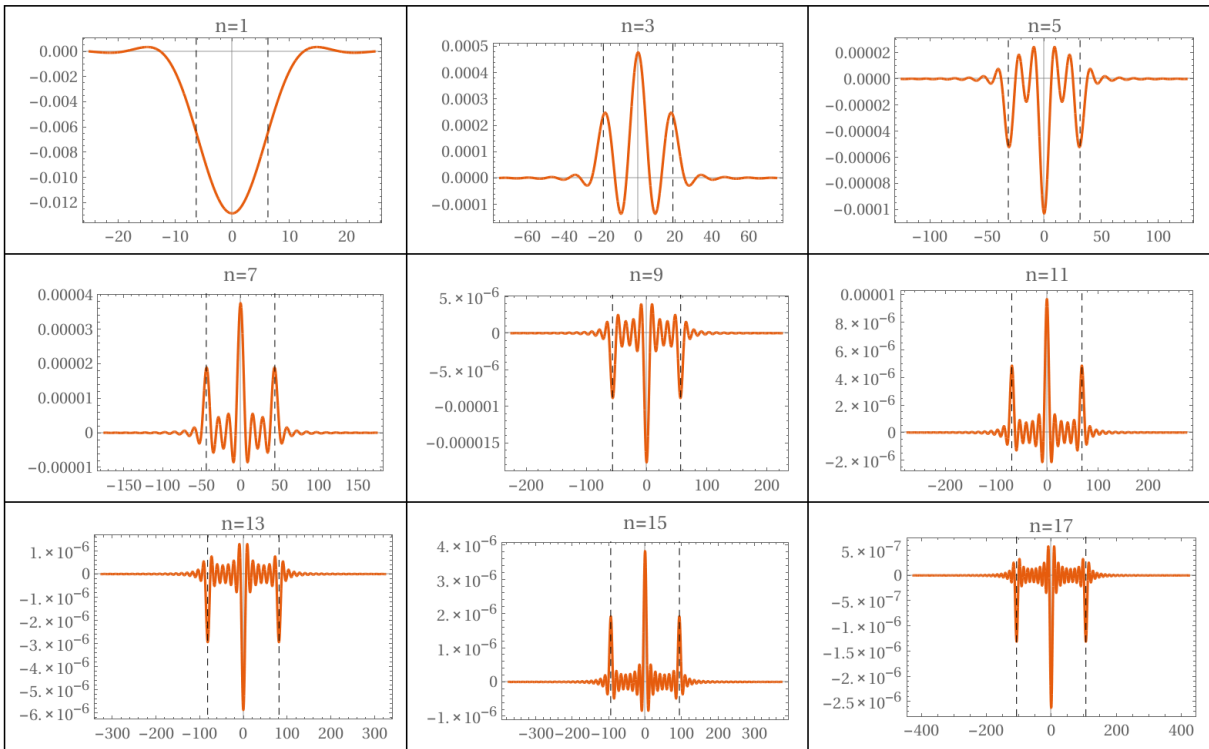


Figura 4.2.1: Distribuições em espaço recíproco para alguns modos relevantes de $A_n \hat{\chi}(k)$ (no eixo vertical; o eixo horizontal enumera valores de k). Note como o segundo maior extremo de cada distribuição ocorre próximo de $|k_n^{\text{ex}}| \simeq 2\pi n$ (exceto em $n = 1$), marcado pela linha vertical tracejada.

Embora os possíveis valores de ω sejam discretos (e dados por $\omega_n = 2\pi n$), os valores k_n^{ex} , para os quais ocorrem os segundos extremos mais relevantes, não se mostram de forma tão

| n | ω_n | k_n (aprox.) | m |
|----------|------------|------------------------|--------|
| 1 | 2π | 0 | 2π |
| 3 | 6π | 17.87×10^{-4} | 6.0055 |
| 5 | 10π | 30.84×10^{-4} | 6.0019 |
| 7 | 14π | 43.57×10^{-5} | 6.0009 |
| 9 | 18π | 56.23×10^{-4} | 6.0004 |
| 11 | 22π | 68.85×10^{-4} | 6.0003 |

Tabela 4.2.1: Valores de ω_n e k_n para os primeiros modos, com as massas m estimadas pela relação de dispersão de KG.

explícita. Para calculá-los, primeiramente consideramos as raízes da derivada

$$\left. \frac{\partial A_n \hat{\chi}(k)}{\partial k} \right|_{k=k_n^{\text{ex}}} = 0. \quad (4.2.12)$$

Como $A_n \hat{\chi}(k)$ oscila, sua derivada, Equação 4.2.12, possui infinitas raízes. A que corresponde aos máximos de interesse são aquelas mais próximas de $k_n^{\text{ex}} \approx 2\pi n$. Sua expressão geral é

$$\frac{\partial A_n \hat{\chi}(k)}{\partial k} = \frac{\alpha_n}{k^2} \frac{2(3k^2 - \omega_n^2) \sin\left(\frac{k}{2}\right) - k(k^2 - \omega_n^2) \cos\left(\frac{k}{2}\right)}{(k^2 - \omega_n^2)^2}, \quad (4.2.13)$$

em que $\alpha_n \equiv 2\sqrt{2} \mathbf{i}^{n+1} (\pi^{3/2} n)^{-1}$. Há dois termos com polos em $|k| = \omega_n$ e, ao somar ambos, as divergências, embora não se anulem, resultam em valores pequenos em $|k| = \omega_n$. O zero do conjunto (em $k_n^{\text{(ex)}}$) é localizado em valores abaixo de $|k| = \omega_n$.

Igualar a Expressão 4.2.13 a zero implica em resolver a seguinte equação para k :

$$\tan\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} \frac{k^2 - \omega_n^2}{3k^2 - \omega_n^2}.$$

No entanto, a presença de raízes espúrias em $k = \pm\omega_n$ gera cancelamento de termos que não deveriam se cancelar. Dessa forma, computamos numericamente as posições $k_n^{\text{(ex)}}$ para os primeiros cinco modos ω_n . Na Tabela 4.2.1, mostramos seus valores e deduzimos a “massa efetiva” via a relação de dispersão de Klein-Gordon. Na Figura 4.2.2 mostramos os pares (k_n, ω_n) ali obtidos contra a curva de KG com $m = 6$, que é ligeiramente diferente do valor “intuitivo” 2π .

O *matching* entre massa efetiva (dispersão de KG) e oscillon (em SG) não é exato, mas consideravelmente próximo. Análises adicionais são necessárias para elucidar essa discrepância – incluindo, possivelmente, correções não lineares à relação de dispersão.

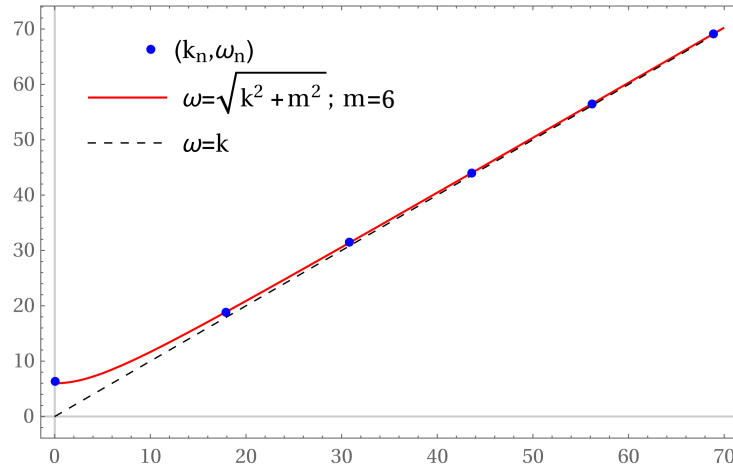


Figura 4.2.2: Os pontos em azul indicam (k_n, ω_n) da Tabela (4.2.1). Observa-se excelente concordância com a curva de dispersão de Klein-Gordon de massa $m = 6$, levemente abaixo do valor intuitivo 2π .

Em Klein-Gordon, a amplitude de energia-momentum se distribui na linha $\omega^2 = k^2 + m^2$. Assim, no espaço (k, ω) , teríamos

$$\rho(k, \omega) = A(k) \delta(\omega^2 - k^2 - m^2).$$

Já para SG, as amplitudes não se restringem a tal curva. Se existirem oscillons de diversos tamanhos (portanto, diferentes frequências fundamentais), todo o plano (k, ω) se torna acessível, embora de modo não uniforme: analisar $\hat{\phi}(k, \omega)$ para muitos oscillons de escalas diferentes poderia resultar em um acúmulo próximo da curva de KG, que então funcionaria como um “atrator” no espaço recíproco para do campo SG.

4.3 Oscillons esfericamente simétricos em $(d + 1)$ dimensões

Baseando-nos na existência de soluções exatas para oscillons em $1 + 1$ dimensões com suporte fixo e existência de superfície de simultaneidade em valor zero do campo (para oscillons em seu próprio referencial), nesta seção procuramos soluções do tipo oscillon com suporte fixo e o mesmo tipo de superfície de simultaneidade em mais dimensões.

Começamos escrevendo a equação signum-Gordon em $(d + 1)$ dimensões como

$$\partial_t^2 \phi - \Delta_d \phi = -\text{sign}(\phi), \quad (4.3.1)$$

em que Δ_d é o operador Laplaciano em d -dimensões Cartesianas. Para configurações esférica-

mente simétricas, $\phi = \phi(t, r)$, esse Laplaciano pode ser escrito como

$$\Delta_d^{(r)} = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r} \partial_r. \quad (4.3.2)$$

Em analogia ao método de Fourier que utilizamos na Seção 4.2, aqui também utilizamos um *ansatz* de força efetiva. Dessa maneira, construímos um termo de força $\sigma(t, r)$ para uma equação de onda livre não homogênea semelhante ao que fizemos na Equação 4.2.4, exceto que a variável $x \in \mathbb{R}$ é substituída pela variável $r \geq 0$. Note que devido a esta troca de variáveis, o que seria a função retângulo $\Pi(x)$ da Definição 4.2.1 passa a ser definida apenas no domínio positivo de seu argumento. Por conveniência, seguimos usando o mesmo símbolo para esta função, mas com a diferença do argumento: $\Pi(r)$. Essa função deixa de descrever um “retângulo” de “altura” unitária em $d = 1$ e passa a definir um “cilindro” de “altura” unitária em $d = 2$, uma esfera de densidade unitária em $d = 3$ e assim por diante. De forma geral, Π agora define esferas de n -dimensões com densidade unitária.

O termo de força fica

$$\sigma(t, r) = \text{SqWave}(\omega t) \Pi(r), \quad (4.3.3)$$

em que $\text{SqWave}(\omega t)$ é o mesmo da Definição 4.1.1, e o parâmetro ω é a frequência (angular) fundamental dessa onda. Note que esse é o único parâmetro livre da solução geral que estamos construindo. Finalmente, a equação efetiva que queremos resolver é

$$\partial_t^2 \phi - \Delta_d \phi = -\sigma(t, r). \quad (4.3.4)$$

Em analogia à Seção 4.2, resolvemos a Equação 4.3.4 via uma separação inicial de variáveis. Tal como naquela seção, não é necessário que as variáveis de fato sejam separáveis já que esse procedimento é apenas uma ferramenta para facilitar a construção e solução do *ansatz*. Nesse sentido, escrevemos o campo como

$$\phi(t, r) = \tau(t) \rho(r), \quad (4.3.5)$$

em que $\tau(t)$ é o mesmo da Definição 4.2.6. Note que aquela definição é parametrizada por uma frequência fundamental ω , sendo ela a *mesma* que parametriza o termo não homogêneo da Expressão 4.3.3. Novamente esperamos que, assim como na Seção 4.2, para alguma frequên-

cia fundamental $\omega = \omega_0$ específica, o campo possui configuração de vácuo fora do suporte esperado ($r > 1/2$).

Por ser mais simples, começamos pela parte temporal da Equação 4.3.5. O procedimento que adotamos é idêntico àquele da Seção 4.2: por se tratar de um perfil periódico e conhecido – de onda quadrada –, utilizamos uma decomposição em modos discretos de Fourier.

Quanto à parte espacial $\rho(r)$ da Expressão 4.3.5, temos sobre ela a ação do Laplaciano definido na Expressão 4.3.2. Observe que esse Laplaciano não é diagonalizado pela decomposição usual em espaço de Fourier, de modo que a transformada de Fourier tradicional não converte a equação diferencial

$$\Delta_d^{(r)} \phi(t, r) + \dots = 0$$

em uma equação algébrica. Para obter tal representação, recorreremos a uma transformação que o diagonalize, análoga à transformada de Fourier em coordenadas cartesianas. Isso equivale a projetar $\phi(t, r)$ em uma base ortogonal de autossoluções da equação de Helmholtz radial

$$\Delta_d^{(r)} f(r) = -k^2 f(r).$$

As soluções são expressas em termos da função de Bessel de ordem $\nu = \frac{d}{2} - 1$, e a transformação integral correspondente – conhecida como transformada de Hankel (ou Fourier–Bessel) de ordem ν – mapeia $f(r)$ em seu espectro radial $\tilde{f}(k)$:

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{H}_\nu[f(r)] = \frac{1}{k^\nu} \int_0^\infty f(r) r^{\nu+1} J_\nu(kr) dr. \quad (4.3.6)$$

A transformada inversa recupera $f(r)$:

$$f(r) = \mathcal{H}_\nu^{-1}[\tilde{f}(k)] = \frac{1}{r^\nu} \int_0^\infty \tilde{f}(k) k^{\nu+1} J_\nu(kr) dk.$$

De posse disso e aplicando a transformação definida na Expressão 4.3.6 sobre o termo do Laplaciano, obtemos a seguinte equação:

$$\mathcal{H}_\nu[\Delta_d^{(r)} \rho(r)] = -k^2 \tilde{\rho}(k),$$

em que $\nu = \frac{d}{2} - 1$ e $\tilde{\rho} \equiv \mathcal{K}_\nu[\rho]$. Substituindo na Eq. (4.3.4),

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \mathcal{K}_\nu^{-1} [(k^2 - \omega_n^2) \tilde{\rho}_\nu] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mathbf{i}^{n-1}}{n} \cos(\omega_n t) \mathcal{K}_\nu^{-1} [\tilde{\Pi}(k)], \quad (4.3.7)$$

em que $\tilde{\Pi}(k) \equiv \mathcal{K}_\nu[\Pi(r)]$ e $\omega_n \equiv n\omega$. Explicitamente,

$$\tilde{\Pi}(k) = \frac{1}{k^\nu} \int_0^{1/2} r^{\nu+1} J_\nu(kr) dr \quad (4.3.8)$$

$$= \frac{1}{(2k)^{\nu+1}} J_{\nu+1}\left(\frac{k}{2}\right). \quad (4.3.9)$$

Reorganizando a Equação 4.3.7, e considerando a linearidade da transformada de Hankel,

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos(\omega_n t) A_n \rho_\nu = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \cos(\omega_n t) \mathcal{K}_\nu^{-1} \left[\frac{4\mathbf{i}^{n-1}}{\pi n} \frac{\tilde{\Pi}(k)}{k^2 - \omega_n^2} \right].$$

Assim, a expressão para $A_n \tilde{\rho}(k)$ é algebricamente idêntica àquela da Equação 4.2.8, com a diferença que ela existe em espaço Fourier-Bessel:

$$A_n \tilde{\rho}(k) = \frac{4\mathbf{i}^{n-1}}{\pi n} \frac{\tilde{\Pi}(k)}{k^2 - \omega_n^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_n \rho(r) &= \frac{4\mathbf{i}^{n-1}}{\pi n} \mathcal{K}_\nu^{-1} \left[\frac{\tilde{\Pi}(k)}{k^2 - \omega_n^2} \right] \\ &= \frac{4\mathbf{i}^{n-1}}{\pi n} \frac{1}{r^\nu} \int_0^\infty \frac{\tilde{\Pi}(k)}{k^2 - \omega_n^2} k^{\nu+1} J_\nu(kr) dk \\ &= \frac{2\mathbf{i}^{n-1}}{\pi n} \frac{1}{(2r)^\nu} \int_0^\infty \frac{1}{k^2 - \omega_n^2} J_{\nu+1}\left(\frac{k}{2}\right) J_\nu(kr) dk. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Não é claro se, dessa integral, à partir de algum valor do parâmetro único $\omega = \omega_0$ poderiam resultar uma ou mais soluções para $d > 1$ que satisfaz(em) os critérios enumerados na introdução do Capítulo 4. No entanto, havendo tal solução, para que ela constitua um oscillon d -dimensional exato ela deve, além daqueles critérios, exibir:

1. Raio de suporte fixo;
2. Campo nulo em todo o espaço simultaneamente em dois instantes distintos a cada período $T = 2\pi/\omega_0$.

Embora seja possível que existam soluções com suporte variável ou zeros não-simultâneos, essas estão fora do escopo deste trabalho. Na Seção 4.3.1 examinamos o caso particular $d = 3$.

4.3.1 Caso particular $d = 3$

Em três dimensões cartesianas, $d = 3$, temos $\nu = 1/2$. Portanto, as funções de Bessel de ordens $\nu \in \{3/2, 1/2\}$ determinam o resultado da integral da Expressão 4.3.10:

$$J_{1/2}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin(kr), \quad (4.3.11)$$

$$J_{3/2}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi} k^{3/2}} \left(2 \sin \frac{k}{2} - k \cos \frac{k}{2}\right). \quad (4.3.12)$$

Portanto, a integral que define a família $A_n \rho_{\omega_0}(r)$ é

$$A_n \rho_{\omega}(r) = \frac{4 \mathbf{i}^{n-1}}{\pi n} \frac{1}{\pi r} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{2 \sin\left(\frac{k}{2}\right) \sin(kr) - k \cos\left(\frac{k}{2}\right) \sin(kr)}{k^2 - n^2 \omega^2} dk, \quad (4.3.13)$$

na qual adicionamos o subscrito ω para lembrar que o parâmetro que determina o período fundamental ainda não foi fixado. Esse parâmetro único deveria, em princípio, produzir um oscillon em $d = 3$ compacto com raio $R = 1/2$, se de fato existir tal configuração. A solução da integral é (para detalhes, veja Apêndice A):

$$A_n \rho_{\omega}(r) = \frac{2 \mathbf{i}^{n+1}}{\pi r \omega^2} \frac{1}{n^3} \begin{cases} -\left(\frac{2}{n\omega} \cos \frac{n\omega}{2} + \sin \frac{n\omega}{2}\right) \sin(n\omega r) + 2r, & r < 1/2, \\ -\left(\frac{2}{n\omega} \sin \frac{n\omega}{2} - \cos \frac{n\omega}{2}\right) \cos(n\omega r), & r > 1/2, \end{cases} \quad (4.3.14)$$

com $n = 1, 3, \dots$

Com isso, podemos construir a solução da equação não homogênea impulsional por uma “bola de sinal”, cujo sinal varia com frequência fundamental $f_0 = \frac{\omega}{2\pi}$ definida pelo parâmetro livre ω . Escrevemos essa solução geral da seguinte maneira:

$$\Phi_{\omega}(t, r) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} A_n \rho_{\omega}(r) \cos(n\omega t), \quad (4.3.15)$$

e a denominamos *pré-solução* da equação homogênea signum-Gordon¹⁰, com sinal invertido.

A fim de se tornar uma *solução*, a função precisa cumprir todos os critérios delineados na

¹⁰Pode-se verificar que ela é solução da equação não homogênea para todo r . Em particular, reproduz a função $\Pi(r)$ vezes a onda quadrada no tempo.

introdução do Capítulo 4. Isso porque valores arbitrários de ω , em geral, produzem radiação na região $r > 0$. Se essa região for diferente do vácuo, fica implicado que sua função sinal é não nula e, portanto, em contradição com o *ansatz* inicial em signum-Gordon.

Na sequência vamos mostrar que não existem valores de $\omega = \omega_0$ que anulam essa radiação. No entanto, existem aproximações que a minimizam até amplitudes que são ordens de grandeza menores que a amplitude do oscillon central, gerando o que denominamos soluções *quase* exatas.

Buscamos valores de ω_0 tais que

$$\begin{cases} \Phi_{\omega_0}|_{r \geq R} = 0, \\ \partial_r \Phi_{\omega_0}|_{r=R} = 0, \end{cases} \quad (4.3.16)$$

válidos para todo t . Note que essas condições automaticamente garantem que $\partial_t \Phi_{\omega_0}|_{r=1/2} = 0$. A segunda condição (derivada radial) serve para que o interior do oscillon se aproxime do vácuo em seu contorno de forma “suave”, garantindo consistência física das equações de movimento. Pela Expressão 4.3.14, a primeira condição leva ao conjunto de equações

$$\tan\left(\frac{n\omega_0}{2}\right) = \frac{n\omega_0}{2}, \quad (4.3.17)$$

para todo $n = 1, 3, \dots$, cuja única solução é $\omega_0 = 0$. Essa condição, portanto, elimina a possibilidade de existência de tal oscillon. Isso não impede que se procure *quase* soluções, que minimizem – ao invés de zerar – a produção de radiação em $r > 1/2$.

Para isso, flexibilizamos as condições na Expressão 4.3.16, passando a exigir as novas condições:

$$\begin{cases} \Phi_{\omega_0}(t, r)|_{r=R} \simeq 0 \\ \partial_r \Phi_{\omega_0}(t, r)|_{r=R} \simeq 0 \\ \partial_t \Phi_{\omega_0}(t, r)|_{r=R} \simeq 0 \end{cases}, \quad (4.3.18)$$

e procuramos valores de ω_0 que as satisfaçam. Pela Expressão 4.3.14, a condição de campo nulo *sobre* a borda, $r = 1/2$, é satisfeita por

$$\left(\frac{2}{n\omega} \cos \frac{n\omega}{2} - \sin \frac{n\omega}{2}\right) \sin \frac{n\omega}{2} = 1, \quad \left(\frac{2}{n\omega} \sin \frac{n\omega}{2} - \cos \frac{n\omega}{2}\right) \cos \frac{n\omega}{2} = 0,$$

resolvidas por $\omega = m\pi$, $m = 1, 3, \dots$. Veremos que esses valores são bons indicativos dos valores de ω que minimizam a radiação. A Figura 4.3.1 mostra as soluções parciais para $m = 1, 3, 5$.

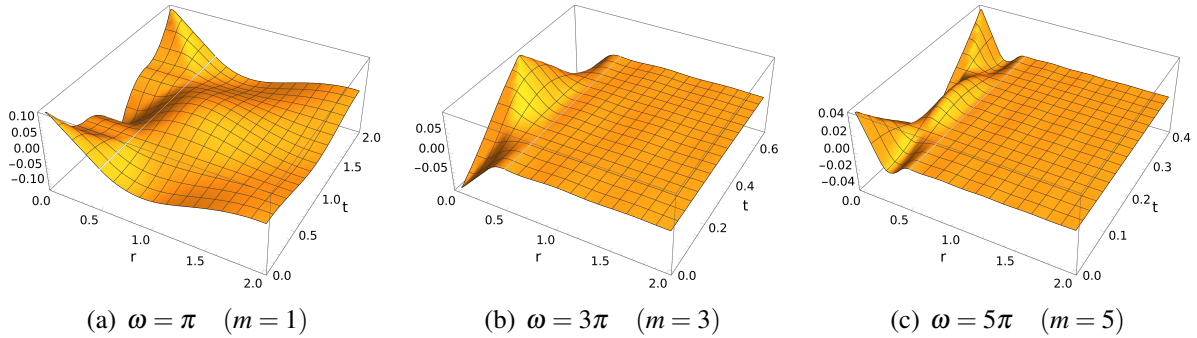


Figura 4.3.1: Comparação entre soluções da equação de onda não homogênea, $\Phi_\omega(t, r)$ tipo “oscillon radiante”, que satisfazem $\Phi_\omega(1/2, t) = 0$. Observe que, em $r < 1/2$ a solução é afetada pelo termo não homogêneo $\sigma(t, r)$ (Expressão 4.3.3), enquanto fora dessa região, $r > 1/2$, ela efetivamente obedece a equação de onda livre. Para ser solução da equação de SG, o campo deve ser nulo em $r > 1/2$, e ter seu sinal em $r < 1/2$ igual ao negativo do sinal de $\sigma(t, r)$.

Fazendo uma avaliação *qualitativa* do campo mostrado nessas figuras, pode-se observar os seguintes comportamentos para os diferentes valores de m :

$m = 1$: o sinal do campo em $r < 1/2$ é o mesmo do termo não homogêneo – quando deveria ser oposto –, e há considerável radiação em $r > 1/2$. Além disso, a inclinação na direção radial em $r = 1/2$ claramente não é zero.

$m = 3$: o sinal do campo em $r < 1/2$ é oposto ao do termo não homogêneo, e há pouca radiação visível em $r > 1/2$.

$m = 5$: o sinal do campo se alterna em $r < 1/2$ – quando deveria ser constante. Há pouca radiação em $r > 1/2$.

$m > 5$: qualitativamente equivalente a $m = 5$.

Portanto, de todos os valores possíveis, o valor $\omega = 3\pi$ é o único que aponta para uma solução viável. No entanto, conforme enfatizado, esta avaliação é apenas qualitativa, e para encontrar um resultado ótimo queremos minimizar a radiação externa ao oscillon.

Podemos iniciar nossa busca no espaço ω de soluções iniciando, precisamente, em $\omega = 3\pi$. Note que, possivelmente, existem inúmeros valores de ω que minimizam a radiação.

No entanto, conforme a análise qualitativa acima, apenas aqueles em torno de 3π , *i.e.* em um mínimo *local*, podem representar solução válida ou aproximada da equação de signum-Gordon.

Construímos, portanto, uma função que mensure a radiação emitida através de uma superfície fechada que envolva completamente a região central, onde queremos por *ansatz* o oscillon presente, e a minimizamos. Considerando que essa superfície engloba completamente o oscillon (uma esfera de raio $\tilde{R} = 1/2$), a densidade Lagrangiana do campo fora dessa região é

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 \right].$$

O seu fluxo de energia S_i (potência por unidade de área) é dado pelas componentes espaciais do tensor energia-momento:

$$S_i(\mathbf{r}, t) = T^{0i}(\mathbf{r}, t),$$

em que $i \in 1, 2, 3$ e \mathbf{r} são coordenadas no espaço cartesiano de três dimensões, e o tensor energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{free}},$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Em particular, pela simetria esférica da solução, apenas a componente radial $r = |\mathbf{r}|$ desse tensor é não nula, sendo ela:

$$T^{0r} = -\dot{\phi} \partial_r \phi.$$

O fluxo total de energia F_Σ pela superfície pode ser computado pela integral

$$F_\Sigma = \oint_\Sigma T^{0r} dA.$$

Como a fonte de energia concentra-se toda na região central $r < 1/2$, esse fluxo é independente da superfície escolhida – desde que, claro, essa superfície não intersecte a região central. Por simplicidade, escolhemos a casca da esfera de raio $R_S > 1/2$, levando a $\Sigma = S^2(R_S)$. O elemento de área se torna $dA = R_S^2 d\Omega$, e a quantidade total de energia fluindo através da esfera é

$$F_{S^2(R_S)} = -4\pi R_S^2 \dot{\phi} \partial_r \phi.$$

Note que a solução $\Phi_\omega(t, r > 1/2)$ é estacionária, *i.e.*, o fluxo médio no tempo em qualquer superfície é nulo. Por conta disto, separamos essa solução em suas componentes de

ondas incidentes e ondas emanadas e minimizamos apenas uma delas. A outra, pela natureza estacionária do problema, será igualmente minimizada por consequência.

Assim, escrevemos a parte em $r > 1/2$ da Expressão 4.3.15 como a superposição dessas duas componentes radiativas:

$$\begin{aligned}\Phi_\omega(t, r) \Big|_{r>1/2} &= \frac{1}{r} [\varphi_\omega(r-t) + \varphi_\omega(r+t)] \\ \varphi_\omega(z) &= \sum_{n=1,3,\dots} B_n(\omega) \cos(n\omega z) \\ B_n(\omega) &\equiv -\frac{i^{n+1}}{\pi} \frac{1}{n^3 \omega^2} \left(\frac{2}{n\omega} \sin \frac{n\omega}{2} - \cos \frac{n\omega}{2} \right).\end{aligned}\tag{4.3.19}$$

E, finalmente, definimos a componente emanada

$$\phi^{(\text{out})}(t, r) \equiv \frac{1}{r} \varphi_\omega(r-t)$$

para utilizarmos na integral de fluxo. Assim,

$$\begin{aligned}F_{S^2} &= -4\pi R_S^2 \partial_t \phi^{(\text{out})} \partial_r \phi^{(\text{out})} \Big|_{r=R_S} \\ \partial_t \phi_\omega^{(\text{out})} \Big|_{r=R_S} &= \frac{\omega}{R_S} \sum_{n=1,3,\dots} n B_n \sin(n\omega(R_S - t)) \\ \partial_r \phi_\omega^{(\text{out})} \Big|_{r=R_S} &= -\frac{\omega}{R_S} \sum_{n=1,3,\dots} n B_n \sin(n\omega(R_S - t)) + \frac{1}{R_S^2} (\dots).\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

Observe que o termo derivado na coordenada r apresenta um fator R_S^{-2} , que contém produtos de senos e cossenos. Como em seguida calcularemos a média desse fluxo no tempo, esses termos se anulam por ortogonalidade. O mesmo acontece com todos os termos do tipo $\sin(n\omega z) \sin(m\omega z)$, $n \neq m$ e, pelo mesmo argumento, os termos que não são anulados na média temporal são apenas aqueles do tipo $\sin(n\omega z)^2$. Assim, o fluxo médio no tempo é calculado conforme:

$$\begin{aligned}\bar{F}(\omega) \equiv \langle F_{S^2} \rangle_t &= 4\pi R_S^2 \frac{\omega^2}{R_S^2} \sum_{m,n=1,3,\dots} m n B_n B_m \underbrace{\left\langle \sin [m\omega(R_S - t)] \sin [n\omega(R_S - t)] \right\rangle_t}_{=\frac{1}{2} \delta_{mn}} \\ &= \frac{2}{\pi \omega^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^4} \left(\frac{2}{n\omega} \sin \frac{n\omega}{2} - \cos \frac{n\omega}{2} \right)^2.\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

Comparando esse resultado com aquele da Expressão 4.3.14, verificamos que há equivalência com minimizar a amplitude da solução em $r > 1/2$. Na Figura 4.3.2 mostra-

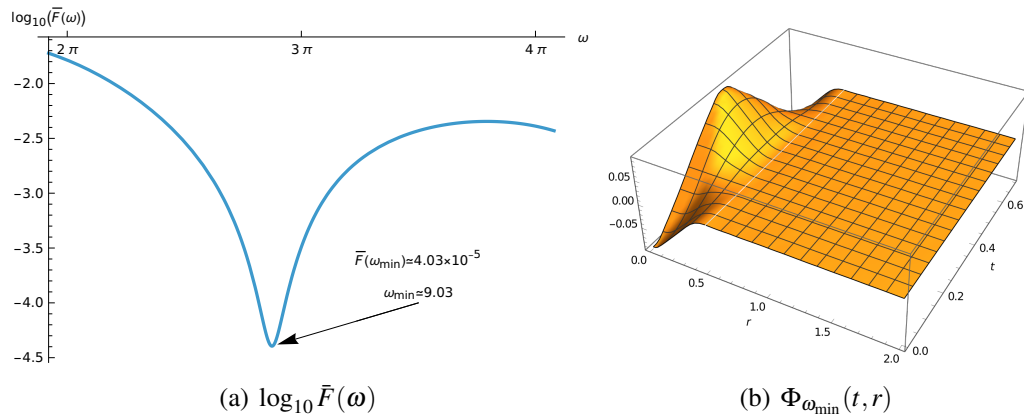


Figura 4.3.2: O oscillon em $d = 3$ como fluxo de radiação mínimo fora de sua região central, $r < 1/2$. Na Figura (a), a função fluxo de energia excedente, cujo mínimo local próximo a 3π converge para $\bar{F}(\omega_{\min}) \simeq 2.8 \times 10^{-5}$ e acontece em $\omega_{\min} \simeq 9.032$. A Figura (b) mostra a Expressão 4.3.15 com $\omega \rightarrow \omega_{\min}$, representando o oscillon *quase* exato em $d = 3$.

mos o comportamento de $\bar{F}(\omega)$ nos entornos de $\omega = 3\pi$. Nessa região, o valor que minimiza $\bar{F}(\omega)$ é $\omega_{\min} \simeq 9.03$, e, nesse ponto, o fluxo médio converge para o valor não nulo $\bar{F}(\omega_{\min}) \simeq 4.03 \times 10^{-5}$. Note que a amplitude máxima em $r > 1/2$ é aproximadamente $A_{\max}^{\simeq} \simeq 2 \times 10^{-4}$, o que, comparado com a amplitude da região central $A^{\simeq} \simeq 5 \times 10^{-2}$ representa aproximadamente 0.4% daquela. Dada essa proporção, consideramos a solução total como uma solução *aproximada*, e a denominamos oscillon *quase* exato.

5 Conclusão

O conteúdo desta tese dividiu-se em quatro partes distintas:

1. Uma revisão bibliográfica detalhada sobre modelos com potencial não-analítico em física de altas energias;
2. A apresentação de novos resultados para ondas de choque com simetria radial e esférica em $(2+1)$ e $(3+1)$ dimensões;
3. Um estudo sistemático acerca do surgimento de massa em soluções quase-livres do modelo;
4. A aplicação de métodos analíticos de Fourier e Fourier-Bessel para a solução da equação de signum-Gordon em $(d + 1)$ dimensões.

5.1 Ondas de choque

Investigou-se o comportamento de uma classe específica de soluções para a equação de campo escalar de signum-Gordon que apresentam descontinuidade na superfície do cone de luz. Estudos anteriores haviam demonstrado a existência dessas soluções somente para uma dimensão espacial ($n = 1$).

Nosso trabalho evidenciou que, ao empregar o mesmo *ansatz* em dimensões espaciais superiores, obtém-se uma equação ordinária com soluções exatas, a qual foi resolvida para os casos $n = 2$ e $n = 3$. Um resultado surpreendente foi que a determinação dos zeros da solução não demanda métodos numéricos para a resolução de equações algébricas. No caso particular de ondas de choque com simetria esférica em $n = 3$, o processo de encontrar esses zeros revelou-se particularmente simples.

Destacou-se, ainda, que ondas de choque representadas por $\phi(z) = \theta(-z)W(z)$ constituem soluções não homogêneas da equação SG, incorporando um termo adicional com a função delta de Dirac localizada no cone de luz. Essas soluções fundamentais das equações diferenciais enquadraram-se nessa categoria.

Adicionalmente, explorou-se o comportamento das ondas de choque após o desligamento da fonte de energia. Ao desativar essa fonte (análogo à remoção do termo de força delta), interrompeu-se a transferência de energia para a onda, impedindo sua propagação conforme pre-

visto pelas análises. Identificou-se uma região que permaneceu inalterada dentro dos cones de luz (vide Figura 2.6.5).

Nas simulações em duas dimensões ($n = 2$), observou-se a formação de estruturas interessantes no campo após a remoção da fonte de energia. Entre essas, destacaram-se uma configuração central em forma de “pico”, análoga a um *oscillon* analítico, e uma formação anular ao seu redor (conforme as observações iniciais da Figura 2.6.6(a) e da Figura 2.6.6(b)). Enquanto a estrutura oscilante central se manteve estável ao longo do tempo, o anel compacto fragmentou-se em múltiplas estruturas menores e oscilantes. Essa fragmentação possivelmente decorreu, em parte, de erros numéricos que introduziram oscilações de alta frequência no campo; contudo, tais erros também atuaram como uma forte perturbação, revelando propriedades relevantes das estruturas. As principais estruturas de grande escala, observadas no instante intermediário da simulação ($t = 10$), preservaram sua simetria rotacional mesmo sob a influência de ruídos, sugerindo seu papel no decaimento e na “termalização” da onda de choque (vide Figura 2.6.6(c) e Figura 2.6.6(d)).

Em suma, este estudo forneceu *insights* valiosos sobre o comportamento das ondas de choque diante de variações na fonte de energia, sobre a emergência de estruturas inéditas durante o decaimento e sobre o potencial do *ansatz* escolhido para abordar a equação SG em dimensões espaciais superiores. Embora erros numéricos pudessem introduzir artefatos, esses mesmos erros ofereceram informações relevantes ao promover perturbações. Investigações futuras poderão buscar maneiras de mitigar tais erros, visando resultados de maior precisão.

Por fim, destacaram-se alguns pontos principais:

1. *Aplicação a equações SG forçadas:* Para $n > 1$, as soluções com $W(0) = 2$ mostraram-se úteis para a resolução de equações SG forçadas do tipo $F(\phi(z)) = f(z)$, em que $F(\phi)$ representa o lado esquerdo da equação SG em variável z , conforme a Expressão 2.1.8. Dado que a solução fundamental $D(z) = \theta(-z)W(z)$ satisfazia $F(D(z)) = \delta(z)$, a solução $\phi(z)$ para uma força arbitrária $f(z)$ pôde ser expressa por meio de uma integral envolvendo $D(z)$ e $f(z)$.
2. *Realizações experimentais:* Embora fora do escopo deste trabalho, enfatizou-se a possibilidade de explorar realizações experimentais de ondas de choque em duas ou mais dimensões espaciais. A dinâmica do campo SG em $n = 2$, sob influência gravitacional, relacionou-se à movimentação de uma membrana elástica bidimensional sobre um plano rígido. A “transformação de desenrolamento” (*unfolding transformation*) Arodz et al.

[2005] considerou a reflexão no plano, de modo que o campo SG atuou como um campo auxiliar, mapeando sua dinâmica para a da membrana via uma transformação inversa de dobramento. Ao elevar a membrana acima do plano em $r = t$, reproduziu-se o efeito de uma força delta no cone de luz. Forças mais gerais $f(z)$ também puderam ser consideradas para modelar a elevação da membrana e a injeção de energia no sistema.

3. *Desintegração da onda de choque e formação de Estruturas:* A existência de uma solução de onda de choque exigiu um fluxo contínuo de energia para a região ocupada pela onda. Com o cessar dessa transferência, a onda iniciou seu processo de desintegração. Em estudos anteriores, observou-se que, em $n = 1$, tal processo originava várias estruturas do tipo oscillon. Neste trabalho, foram levantadas duas questões fundamentais:

- *Questão 1:* Teria sido possível a ocorrência de processos dinâmicos capazes de gerar estruturas semelhantes a ondas de choque em $2 + 1$ ou $3 + 1$ dimensões? Tal fenômeno seria análogo ao processo de espalhamento de oscillons descrito em [Hahne et al. \[2020b\]](#), no qual se observou a formação de reservatórios de energia de densidade muito alta *sobre* o cone de luz da solução, preservando a conservação de energia.
- *Questão 2:* Como se deu a desintegração das ondas de choque em dimensões superiores? Esse processo produziu oscillons semiestáveis em dimensões mais elevadas? Diferentemente do caso unidimensional, não se apresentou uma fórmula específica para tais oscillons. Os resultados numéricos sugeriram que, em $2 + 1$ dimensões, as estruturas do tipo oscillon tendiam a assemelhar-se a “gotas” e não a anéis, e que as ondas de choque degradaram-se simultaneamente nas direções radial e azimutal. Acreditou-se que investigações numéricas mais aprofundadas poderiam fornecer informações adicionais sobre esse tema.

5.2 Massa espectral

Identificou-se uma correspondência próxima entre a relação de dispersão de Klein-Gordon e modos específicos de ondas planas em signum-Gordon. Embora tal correspondência fosse esperada em teorias com mínimos analíticos — uma vez que seus potenciais possuem mínimos com curvatura finita — sua manifestação surpreendeu nos modelos com mínimos não-analíticos, em particular na aproximação de signum-Gordon. Isso porque essa aproximação é

desprovida de escala, além de altamente não linear e produz radiação em pacotes compactos, com amplitude e frequência intimamente relacionados.

5.3 Métodos de Fourier

Foram desenvolvidos métodos de Fourier baseados em trabalhos pioneiros Arodz [2004], Arodz and Klimas [2005], Arodz et al. [2005, 2006] nos quais o termo potencial da teoria de campo foi transformado — a partir de uma expectativa sobre o comportamento do campo — em um termo não-homogêneo de uma equação de onda livre. Essa transformação reduz o problema a classes conhecidas e amplamente estudadas de EDP's, com extenso suporte na literatura física e matemática. Na forma original, o método utilizava termos não-homogêneos do tipo $f(t) = \pm 1$, separando o problema em uma série infinita de equações cujas soluções deviam ser cautelosamente emendadas a fim de produzir uma solução válida da equação de campo original (no caso, signum-Gordon). Nossa extensão promoveu esse termo a $f(x, t) = “\pm 1(x, t)”$, permitindo trabalhar com ele em espaços algébricos como espaços de Fourier e Hankel, e os cuidados necessários reduzidos apenas a garantir consistência entre o termo não homogêneo e o potencial que representa, além de aspectos da radiação (que deve ser nula) e de consistência causal do termo não homogêneo.

Em $(1 + 1)$ dimensões, reproduziu-se o oscillon básico, demonstrando-se que sua estrutura em espaço de Fourier é simples. Adicionalmente, construiu-se uma nova solução exata de onda plana, cuja íntima relação com soluções do mesmo tipo em Klein-Gordon foi estabelecida, corroborando os resultados obtidos nos estudos de massa espectral (Capítulo 3).

Em $(d + 1)$ dimensões, com $d > 1$, formulou-se uma classe particular de problemas com simetria esférica (hiperesférica) em espaço de funções de Hankel (também conhecido como Bessel-Fourier), destinada à descrição de oscillons com suporte circular, esférico etc., e de raio fixo, nos quais o valor do campo transita por zero ao longo de seu período (de forma análoga ao oscillon exato em $d = 1$), tendo uma frequência fundamental $\frac{\omega_0}{2\pi}$ como seu único parâmetro determinante, quando a solução existe.

Embora não se tenha demonstrado a existência exata de soluções dentro dessa classe particular de (potenciais) oscillons para $d > 1$, constatou-se que, no caso particular $d = 3$, existem soluções *quase* exatas. Esse resultado deve-se ao fato de que, mesmo havendo diversos valores de ω_0 que satisfaziam o requisito de que o campo se anule na superfície do suporte, não é possível, simultaneamente, satisfazer a condição de que a primeira derivada radial da solução

também se anule — condição indispensável para evitar radiação externa ao suporte. Entretanto, ao relaxar tais exigências, adotou-se um procedimento que minimiza a radiação externa, demonstrando que a quantidade de energia radiada poderia ser consideravelmente pequena em relação à energia total do oscillon. Naturalmente, esta proporção é dependente da solução aproximada *dentro* da região $r < 1/2$, e esta região, por sua vez, depende de ω_0 . O resíduo à partir do qual se arbitra a escolha de ω_0 , portanto, depende não apenas da quantidade de radiação fora da região do oscillon, mas também da amplitude oscillon.

Esse achado mostra-se útil para estudos futuros. Por exemplo, o mesmo procedimento pode ser aplicado para $d = 2$ ou, alternativamente, permitir que o suporte do *ansatz* possa oscilar periodicamente com frequência fundamental $\frac{\omega_0}{2\pi}$ (a mesma do oscillon desejado). Essa abordagem possibilita a introdução de novos parâmetros em modos de Fourier, que potencialmente atenderiam às exigências de que o campo e sua derivada radial se anulem simultaneamente nas bordas do suporte, de forma a evitar a radiação externa permitindo que a solução da equação não homogênea possa ser promovida a uma solução exata da equação de signum-Gordon em $(3 + 1)$ dimensões.

Outro exemplo é a possibilidade de construção de condições iniciais quase exatas com *boosts* para o estudo do espalhamento de oscillons em $d = 3$.

Em síntese, os métodos de Fourier desenvolvidos demonstraram-se promissores para o estudo de oscillons em mais dimensões.

Referências

- M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, 1991.
- M. J. Ablowitz and H. Segur. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM, 1981.
- C. Adam, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. k-defects as compactons. *J. Phys. A*, 40:13625–13643, 2007. doi: 10.1088/1751-8113/40/45/009. [Erratum: J.Phys.A 42, 089801 (2009)].
- C. Adam, N. Grandi, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. Compact self-gravitating solutions of quartic (K) fields in brane cosmology. *J. Phys. A*, 41:375401, 2008a. doi: 10.1088/1751-8113/41/37/375401.
- C. Adam, N. Grandi, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. K fields, compactons, and thick branes. *J. Phys. A*, 41:212004, 2008b. doi: 10.1088/1751-8113/41/21/212004. [Erratum: J.Phys.A 42, 159801 (2009)].
- C. Adam, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski. BPS submodels of the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, 769:362–367, 2017. doi: 10.1016/j.physletb.2017.04.003.
- C. Adam, N. S. Manton, K. Oles, T. Romanczukiewicz, and A. Wereszczynski. Relativistic moduli space for kink collisions. *Phys. Rev. D*, 105(6):065012, 2022. doi: 10.1103/PhysRevD.105.065012.
- C. Adam, D. Ciurla, K. Oles, T. Romanczukiewicz, and A. Wereszczynski. Relativistic moduli space and critical velocity in kink collisions. *Phys. Rev. E*, 108(2):024221, 2023a. doi: 10.1103/PhysRevE.108.024221.
- C. Adam, C. Halcrow, K. Oles, T. Romanczukiewicz, and A. Wereszczynski. Moduli Space for Kink Collisions with Moving Center of Mass. *SIGMA*, 19:054, 2023b. doi: 10.3842/SIGMA.2023.054.
- Y. Aharonov, A. Komar, and L. Susskind. Superluminal behavior, causality, and instability. *Physical Review*, 182(5):1400–1403, 1969. doi: 10.1103/PhysRev.182.1400. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.182.1400>. Publisher: American Physical Society.

- A. Albrecht and P. J. Steinhardt. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, 48:1220–1223, 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.48.1220.
- A. Alonso Izquierdo, N. S. Manton, J. Mateos Guilarte, and A. Wereszczynski. Collective coordinate models for 2-vortex shape mode dynamics. *Phys. Rev. D*, 110(8):085006, 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.110.085006.
- A. Alonso-Izquierdo, D. Miguélez-Caballero, and L. M. Nieto. Scattering between orthogonally wobbling kinks. 7 2024.
- A. Altland and B. D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2010. ISBN 978-0521769754.
- O. Alvarez, L. A. Ferreira, and J. Sanchez Guillen. A New approach to integrable theories in any dimension. *Nucl. Phys. B*, 529:689–736, 1998. doi: 10.1016/S0550-3213(98)00400-3.
- O. Alvarez, L. A. Ferreira, and J. Sanchez-Guillen. Integrable theories and loop spaces: Fundamentals, applications and new developments. *International Journal of Modern Physics A*, 24:1825–1888, 2009. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14060640>.
- M. A. Amin, R. Easther, and H. Finkel. Preheating and oscillon formation. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 10:012, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/10/012.
- M. A. Amin, R. Easther, H. Finkel, R. Flauger, and M. P. Hertzberg. Oscillons after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 108:241302, 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.241302.
- R. Anderson, J. Andrej, A. Barker, J. Bramwell, J.-S. Camier, J. Cervený, V. Dobrev, Y. Dudouit, A. Fisher, T. Kolev, W. Pazner, M. Stowell, V. Tomov, I. Akkerman, J. Dahm, D. Medina, and S. Zampini. MFEM: A modular finite element methods library. *Computers & Mathematics with Applications*, 81:42–74, 2021. doi: 10.1016/j.camwa.2020.06.009.
- H. Arodz. Topological compactons. *Acta Phys. Polon. B*, 33:1241–1252, 2002.
- H. Arodz. Symmetry breaking transition and appearance of compactons in a mechanical system. *Acta Phys. Polon. B*, 35:625–638, 2004.

- H. Arodz and P. Klimas. Chain of Impacting Pendulums as Non-Analytically Perturbed Sine-Gordon System. *Acta Phys. Polon. B*, 36:787–799, 2005.
- H. Arodz and J. Lis. Compact Q-balls in the complex signum-Gordon model. *Phys. Rev. D*, 77:107702, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.107702.
- H. Arodz and J. Lis. Compact Q-balls and Q-shells in a scalar electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 79:045002, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.045002.
- H. Arodz and Z. Swierczynski. Swaying oscillons in the signum-Gordon model. *Phys. Rev. D*, 84:067701, 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.067701.
- H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski. Field-theoretic models with V-shaped potentials. *Acta Phys. Polon. B*, 36:3861–3876, 2005.
- H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski. Scaling, self-similar solutions and shock waves for V-shaped field potentials. *Phys. Rev. E*, 73:046609, 2006. doi: 10.1103/PhysRevE.73.046609.
- H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski. Signum-Gordon wave equation and its self-similar solutions. *Acta Phys. Polon. B*, 38:3099–3118, 2007.
- H. Arodz, P. Klimas, and T. Tyranowski. Compact oscillons in the signum-Gordon model. *Phys. Rev. D*, 77:047701, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.047701.
- L. D. Barron. *Molecular Light Scattering and Optical Activity*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2004.
- B. A. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands. Inflation dynamics and reheating. *Reviews of Modern Physics*, 78:537–589, 2006. doi: 10.1103/RevModPhys.78.537.
- D. Baumann. Tasi lectures on inflation. *arXiv preprint arXiv:0907.5424*, 2009.
- E. Belendryasova, V. A. Gani, and K. G. Zloshchastiev. Kink solutions in logarithmic scalar field theory: Excitation spectra, scattering, and decay of bions. *arXiv preprint arXiv:2111.09096*, 2021.
- J. Bezanson, S. Karpinski, V. B. Shah, and A. Edelman. Julia: A fast dynamic language for technical computing. *arXiv preprint arXiv:1209.5145*, 2012.

- F. Blaschke, T. Romańczukiewicz, K. Sławińska, and A. Wereszczyński. Amplitude modulations and resonant decay of excited oscillons. *Phys. Rev. E*, 110(1):014203, 2024. doi: 10.1103/PhysRevE.110.014203.
- I. L. Bogolyubsky and V. G. Makhankov. Lifetime of pulsating soliton solutions in some classical models. *JETP Lett.*, 24(12):12–14, 1976.
- M. S. Child. *Molecular Collision Theory*. Dover Publications, New York, 1996.
- S. Coleman. Q-balls. *Nucl. Phys. B*, 262:263–283, 1985. doi: 10.1016/0550-3213(85)90286-X.
- E. J. Copeland, M. Gleiser, and H.-R. Müller. Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse. *Phys. Rev. D*, 52:1920–1933, 1995. doi: 10.1103/PhysRevD.52.1920.
- G. Derrick. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *Journal of Mathematical Physics*, 5(9):1252, 1964.
- P. A. M. Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 114:243–265, 1927. doi: 10.1098/rspa.1927.0039.
- P. Dorey, K. Mersh, T. Romanczukiewicz, and Y. Shnir. Clash of kinks: Phase shifts in colliding nonintegrable solitons. *Physical Review Letters*, 107:091602, 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.091602.
- P. Dorey, T. Romanczukiewicz, Y. Shnir, and A. Wereszczyński. Oscillons in gapless theories. *Phys. Rev. D*, 109(8):085017, 2024. doi: 10.1103/PhysRevD.109.085017.
- M. Dunajski. *Solitons, instantons, and twistors*. 2010.
- S. Dusuel, P. Michaux, and M. Remoissenet. From kinks to compactonlike kinks. *Phys. Rev. E*, 57:2320–2326, Feb 1998. doi: 10.1103/PhysRevE.57.2320. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.57.2320>.
- J. Evslin. Moving kinks and their wave packets. *arXiv preprint arXiv:2202.04905*, 2022.
- I. L. Fabelinskii. *Molecular Scattering of Light*. Springer, Boston, MA, 1968.
- L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, 1987. Scattering and inverse scattering transform in integrable systems.

- E. Farhi and et al. Oscillons and their role in reheating. *Phys. Rev. D*, 72:101701(R), 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.72.101701.
- E. Farhi and et al. Oscillon dynamics in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, 77:085019, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.085019.
- R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Physical Review*, 76:769–789, 1949. doi: 10.1103/PhysRev.76.769.
- G. Fodor, P. Forgacs, P. Grandclément, and I. RÁCZ. Oscillons and quasi-breathers in the ϕ^4 klein-gordon model. *Phys. Rev. D*, 74:124003, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.124003.
- J. I. Friedman and H. W. Kendall. Deep inelastic scattering: Acknowledgement of past contributions and summary of present understanding. *Reviews of Modern Physics*, 63:615–629, 1991.
- M. Gleiser. Pseudostable bubbles. *Phys. Rev. D*, 49(6):2978–2981, 1994. doi: 10.1103/PhysRevD.49.2978.
- M. Gleiser. Pseudostable configurations in scalar field theories. *Int. J. Mod. Phys. D*, 16:219–234, 2007. doi: 10.1142/S0218271807001650.
- M. Gleiser and D. Sicilia. Analytical approach to oscillons in scalar field theories. *Phys. Rev. Lett.*, 101:011602, 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.011602.
- M. Gleiser and D. Sicilia. Oscillon dynamics in scalar field theories: A new look at longevity. *Phys. Rev. D*, 80:125037, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.125037.
- M. Gleiser, N. Graham, and N. Stamatopoulos. Gravitational waves from oscillons: A new cosmological signature. *Phys. Rev. D*, 82:043517, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.043517.
- M. L. Goldberger and K. M. Watson. *Collision Theory*. John Wiley & Sons, 1964.
- S. Gowda, Y. Ma, A. Cheli, M. Gwozdz, V. B. Shah, A. Edelman, and C. Rackauckas. High-performance symbolic-numeric via multiple dispatch. *arXiv preprint arXiv:2105.03949*, 2021.
- N. Graham and N. Stamatopoulos. A simple picture of oscillon dynamics. *Phys. Lett. B*, 639:541–545, 2006. doi: 10.1016/j.physletb.2006.06.074.

- A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23:347–356, 1981. doi: 10.1103/PhysRevD.23.347.
- F. M. Hahne and P. Klimas. Compact kink and its interaction with compact oscillons. *JHEP*, 09:100, 2022. doi: 10.1007/JHEP09(2022)100.
- F. M. Hahne and P. Klimas. Scattering of compact kinks. *JHEP*, 01:067, 2024a. doi: 10.1007/JHEP01(2024)067.
- F. M. Hahne and P. Klimas. Kink-antikink collisions in hyper-massive models. *JHEP*, 10:162, 2024b. doi: 10.1007/JHEP10(2024)162.
- F. M. Hahne and R. Thibes. Compact kinks in a modified Christ-Lee model. 2 2025.
- F. M. Hahne, P. Klimas, and J. S. Streibel. Decay of shocklike waves into compact oscillons. *Phys. Rev. D*, 101(7):076013, 2020a. doi: 10.1103/PhysRevD.101.076013.
- F. M. Hahne, P. Klimas, J. S. Streibel, and W. J. Zakrzewski. Scattering of compact oscillons. *JHEP*, 01:006, 2020b. doi: 10.1007/JHEP01(2020)006.
- M. P. Hertzberg. Quantum radiation of oscillons. *Phys. Rev. D*, 82:045022, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.045022.
- M. Hindmarsh and P. Salmi. Oscillons and domain wall collisions. *Phys. Rev. D*, 77:105025, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.77.105025.
- R. Hirota. Exact solution of the sine-gordon equation for multiple collisions of solitons. *Journal of the Physical Society of Japan*, 33(5):1459–1463, 1972.
- R. Hofstadter. Electron scattering and nuclear structure. *Reviews of Modern Physics*, 28:214–254, 1956.
- E. P. Honda and M. W. Choptuik. Fine structure of oscillons in the spherically symmetric ϕ^4 klein-gordon model. *Phys. Rev. D*, 65(8):084037, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.084037.
- J. Jäykkä and J. Hietarinta. Torus knots as hopfions. *Physics Letters A*, 377(38):2468–2471, 2013. doi: 10.1016/j.physleta.2013.07.040.
- C. J. Joachain. *Quantum Collision Theory*. North-Holland, 1975.

- S. Kasuya, M. Kawasaki, and F. Takahashi. Formation of i-balls in the affleck-dine mechanism. *Phys. Lett. B*, 559:99–106, 2003. doi: 10.1016/j.physletb.2003.09.038.
- P. Klimas. On shock waves in models with V-shaped potentials. *Acta Phys. Polon. B*, 38:21–38, 2007.
- P. Klimas and L. R. Livramento. Compact Q-balls and Q-shells in CPN type models. *Phys. Rev.*, D96(1):016001, 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.96.016001.
- P. Klimas and J. a. S. Streibel. Signum-gordon shock waves with spherical symmetry in (2+1) and (3+1) dimensions. *Phys. Scripta*, 100(2):025238, 2025. doi: 10.1088/1402-4896/ada4f7.
- P. Klimas, J. S. Streibel, A. Wereszczynski, and W. J. Zakrzewski. Oscillons in a perturbed signum-Gordon model. *JHEP*, 04:102, 2018. doi: 10.1007/JHEP04(2018)102.
- P. Klimas, N. Sawado, and S. Yanai. Gravitating compact Q-ball and Q-shell solutions in the $\mathbb{C}P^N$ nonlinear sigma model. *Phys. Rev. D*, 99(4):045015, 2019. doi: 10.1103/PhysRevD.99.045015.
- P. Klimas, L. C. Kubaski, N. Sawado, and S. Yanai. Compact Q-balls and Q-shells in a multi-component $\mathbb{C}P^N$ model. *JHEP*, 09:084, 2021. doi: 10.1007/JHEP09(2021)084.
- P. Klimas, L. C. Kubaski, N. Sawado, and S. Yanai. Q-capacitor formulation of the CPN nonlinear sigma model. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2667(1):012026, 2023. doi: 10.1088/1742-6596/2667/1/012026.
- E. W. Kolb and I. Tkachev. Nonlinear axion dynamics and formation of cosmological pseudo-solitons. *Phys. Rev. D*, 49:5040–5051, 1994. doi: 10.1103/PhysRevD.49.5040.
- E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990.
- D. J. Korteweg and G. De Vries. Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240):422–443, 1895.
- P. Kusch and H. M. Foley. The magnetic moment of the electron. *Physical Review*, 74:250–263, 1948. doi: 10.1103/PhysRev.74.250.

- L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press, 3rd edition, 1977. Chapters dedicated to potential scattering and partial-wave analysis.
- T. D. Lee and Y. Pang. Nontopological solitons. *Phys. Rept.*, 221:251–350, 1992. doi: 10.1016/0370-1573(92)90025-A.
- A. D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108:389–393, 1982. doi: 10.1016/0370-2693(82)91219-9.
- A. D. Linde. Particle physics and inflationary cosmology. *Physics Today*, 43(9):61–68, 1990. doi: 10.1063/1.881258.
- M. Lizunova and J. van Wezel. An introduction to kinks in ϕ^4 -theory. *SciPost Physics Lecture Notes*, 23, 2020. doi: 10.21468/SciPostPhysLectNotes.23.
- V. G. Makhnov, Y. P. Rybakov, and V. I. Sanyuk. *The Skyrme Model: Fundamentals, Methods, Applications*. Springer, Berlin Heidelberg, 1993. ISBN 978-3642846722.
- N. S. Manton and P. Sutcliffe. *Topological solitons*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-04096-9, 978-0-521-83836-8, 978-0-511-20783-9. doi: 10.1017/CBO9780511617034.
- E. C. Marino. *Quantum Field Theory Approach to Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2017. ISBN 978-1107162730.
- A. M. Marjaneh, F. C. Simas, and D. Bazeia. Scattering of kinks in scalar-field models with higher-order self-interactions. *Annals Phys.*, 470:169777, 2024. doi: 10.1016/j.aop.2024.169777.
- J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin. Encyclopædia inflationaris. *Physics of the Dark Universe*, 5-6:75–235, 2014. doi: 10.1016/j.dark.2014.01.003.
- A. Messiah. *Quantum Mechanics*. North-Holland, 1961. See Vol. 1 for general scattering theory.
- mfem. MFEM: Modular finite element methods [Software]. mfem.org.

- K. Mukaida, M. Takimoto, and M. Yamada. Analytic approach to oscillons in an expanding universe. *J. High Energy Phys.*, 2017:1–24, 2017. doi: 10.1007/JHEP07(2017)010.
- V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.
- R. G. Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles*. Springer-Verlag, 1982.
- K. Oles, J. Queiruga, T. Romanczukiewicz, and A. Wereszczynski. Sphaleron without shape mode and its oscillon. *Phys. Lett. B*, 847:138300, 2023. doi: 10.1016/j.physletb.2023.138300.
- M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Boulder, CO, 1995a.
- M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995b. Chapters 4-7 on scattering and cross sections.
- R. Rajaraman. *Solitons and Instantons*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- L. Randall and R. Sundrum. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4690–4693, 1999. doi: 10.1103/PhysRevLett.83.4690.
- P. Rosenau and J. M. Hyman. Compactons: Solitons with finite wavelength. *Phys. Rev. Lett.*, 70:564–567, Feb 1993a. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.564. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.564>.
- P. Rosenau and J. M. Hyman. Compactons: Solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, 70(5):564–567, Feb. 1993b. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.564.
- N. P. Rougier. Glumpy: Fast opengl scientific visualization. <https://glumpy.github.io>, Accessed September 25, 2024a.
- N. P. Rougier. *Modern OpenGL with Python*. Self-published, Accessed September 25, 2024b. URL <https://www.labri.fr/perso/nrougier/python-opengl/>.
- E. Rutherford. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *Philosophical Magazine*, 21:669–688, 1911.
- L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1996.

- P. Salmi and M. Hindmarsh. Long-lived oscillons from domain walls. *Phys. Rev. D*, 85:085033, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.085033.
- G. R. Satchler. *Direct Nuclear Reactions*. Oxford University Press, Oxford, 1980.
- N. Sawado and S. Yanai. Compact, charged boson stars and shells in the $\mathbb{C}P^N$ gravitating nonlinear sigma model. *Phys. Rev. D*, 102(4):045007, 2020. doi: 10.1103/PhysRevD.102.045007.
- N. Sawado and S. Yanai. Phase analyses for compact, charged boson stars and shells harboring black holes in the $\mathbb{C}P^N$ nonlinear sigma model. *Phys. Rev. D*, 103(12):125018, 2021. doi: 10.1103/PhysRevD.103.125018.
- W. Schroeder, K. Martin, and B. Lorensen. *The Visualization Toolkit (4th ed.)*. Kitware, 2006. ISBN 978-1-930934-19-1.
- J. Schwinger. Quantum electrodynamics. i. a covariant formulation. *Physical Review*, 74:1439–1461, 1948. doi: 10.1103/PhysRev.74.1439.
- A. C. Scott. The sine-gordon model. *Proceedings of the IEEE*, 61:1443–1484, 1973.
- H. Segur and M. D. Kruskal. Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory. *Phys. Rev. Lett.*, 58(8):747–750, 1987.
- Y. M. Shnir. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. Cambridge University Press, 7 2018. ISBN 978-1-108-63625-4.
- F. C. Simas and E. da Hora. Generation of kink-antikink pairs through the excitation of an oscillon in the ϕ^4 model. 4 2024.
- A. G. Sitenko. *Scattering Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- A. A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, 91:99–102, 1980. doi: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.
- V. E. Stepanov. Magnetic hopfions: A review. *Condensed Matter*, 4(4):25, 2023. doi: 10.3390/condmat4040025.
- T. Sugiyama. KINK - ANTIKINK COLLISIONS IN THE TWO-DIMENSIONAL ϕ^4 MODEL. *Prog. Theor. Phys.*, 61:1550–1563, 1979. doi: 10.1143/PTP.61.1550.

- Z. Świerczyński. On the oscillons in the signum-Gordon model. *J. Nonlin. Math. Phys.*, 24(1): 20–28, 2017. doi: 10.1080/14029251.2016.1274112.
- J.-S. B. Tai and I. I. Smalyukh. Hopfions emerge in ferroelectrics. *Nature Communications*, 11: 2869, 2020. doi: 10.1038/s41467-020-16258-w.
- J. R. Taylor. *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Wiley, 1972.
- S.-I. Tomonaga. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Progress of Theoretical Physics*, 1:27–42, 1946. doi: 10.1143/PTP.1.27.
- D. Tong. Lectures on solid state physics. <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/solidstate.html>, 2011.
- P. B. Umbanhowar, F. Melo, and H. L. Swinney. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382:793–796, 1996. doi: 10.1038/382793a0.
- V. S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, INC, New York, 1971.
- S. Weinberg. The search for unity: Notes for a history of quantum field theory. *Daedalus*, 106: 17–35, 1977.
- S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2008.
- J. Weiner and P.-T. Ho. *Light-Matter Interaction: Physics and Engineering at the Nanoscale*. Wiley-Interscience, 2003.
- F. Wilczek. Quantum field theory. *Reviews of Modern Physics*, 71:S85–S95, 1999. doi: 10.1103/RevModPhys.71.S85.
- M. Woo, J. Neider, T. Davis, and D. Shreiner. *OpenGL programming guide: the official guide to learning OpenGL, version 1.2*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1999.
- C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96:191–195, 1954. doi: 10.1103/PhysRev.96.191.

- I. Zahed and G. E. Brown. The skyrme model. *Physics Reports*, 142(1-2):1–102, 1986. doi: 10.1016/0370-1573(86)90142-0.
- I. Zahed and G. E. Brown. Lecture notes on the skyrme model. *arXiv preprint arXiv:1604.04850*, 2016. URL <https://arxiv.org/abs/1604.04850>.
- V. E. Zakharov and A. B. Shabat. *Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media*, volume 34. 1972. Introduction of the Zakharov-Shabat scattering problem.
- A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2nd edition, 2010.

A Integral dos modos de oscilação do oscillon $d = 3$

Nesta seção oferecemos alguns detalhes sobre a solução da Integral (4.3.13). Ela pode ser simplificada via

$$\frac{1}{k^2(k^2 - \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{k^2 - \omega^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Escrevemos, então:

$$\begin{aligned} A_n \rho(r) &= \frac{4i^{n-1}}{\pi^{2n}} \frac{1}{r} \left[\underbrace{\int_0^\infty dk \frac{2 \sin \frac{k}{2} \sin kr}{k^2 - \omega_n^2}}_{I_3} - \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k \cos \frac{k}{2} \sin kr}{k^2 - \omega_n^2}}_{I_4} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{2 \sin \frac{k}{2} \sin kr}{k^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k \cos \frac{k}{2} \sin kr}{k^2}}_{I_2} \right] \\ &= I_3 - I_4 + I_2 - I_1. \end{aligned} \tag{A.0.1}$$

I_1 :

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty dk \frac{2 \sin \frac{k}{2} \sin kr}{k^2} \\ I_1' &\equiv \frac{dI_1}{dr} = \int_0^\infty dk \frac{2 \sin \frac{k}{2} \cos kr}{k} \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned} \tag{A.0.2}$$

$$I_1' = \int_0^\infty dk \frac{\sin[(\frac{1}{2} + r)k]}{k} + \int_0^\infty dk \frac{\sin[(\frac{1}{2} - r)k]}{k} \tag{A.0.3}$$

Encontrar o valor de I_1' equivale a resolver

$$\int_0^\infty dk \frac{\sin \alpha k}{k} = \frac{1}{2} \mathfrak{P.V.} \left[\int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{i\alpha k}}{k} \right],$$

e efetivar as devidas substituições de α . A integral do lado direito tem um resultado conhecido:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{i\alpha k}}{k} = i\pi \text{sign} \alpha.$$

Juntando cuidadosamente em I'_1 ,

$$I'_1 = \begin{cases} \pi, & r < \frac{1}{2} \\ 0, & r > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (\text{A.0.4})$$

e, portanto

$$I_1 = \begin{cases} \pi r + C_1, & r < \frac{1}{2} \\ C_2, & r > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

As constantes podem ser determinadas considerando que

$$\begin{cases} I_1(r=0) = \int_0^\infty \frac{2 \sin \frac{k}{2} \sin 0}{k^2} = 0 & \implies C_1 = 0 \\ I_1\left(r = \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} & \implies C_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (\text{A.0.5})$$

e, finalmente

$$I_1(r) = \begin{cases} \pi r, & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & r > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

I_2 :

A integral I_2 é semelhante à I_1 , exceto que a identidade trigonométrica utilizada é

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)],$$

levando a

$$I_2(r) = \begin{cases} 0, & r < \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{4}, & r = \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & r > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (\text{A.0.6})$$

I_3 :

Para a integral I_3 , usamos a identidade trigonométrica

$$\sin x \cos x \equiv \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

e, pelos mesmos argumentos usados para a solução de I_1 e I_2 , recaímos em termos do tipo

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha k}{k^2 - \omega_n^2} = \frac{1}{2} \Re \left[\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{i\alpha k}}{k^2 - \omega_n^2} \right].$$

Novamente, essa intergral tem um resultado conhecido:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{e^{i\alpha k}}{k^2 - \omega_n^2} = -\frac{\pi}{\omega} \sin(\omega|\alpha|).$$

Juntando,

$$I_3(r) = \frac{\pi}{\omega} \begin{cases} \cos \frac{\omega_n}{2} \sin(\omega_n r), & r \leq \frac{1}{2} \\ \sin \frac{\omega_n}{2} \cos(\omega_n r), & r > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

I_4 :

De maneira análoga a I_3 ,

$$I_4 = \frac{\pi}{2} \begin{cases} -\sin \frac{\omega_n}{2} \sin(\omega_n r), & r \leq \frac{1}{2} \\ +\cos \frac{\omega_n}{2} \cos(\omega_n r), & r > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$A_n \rho(r)$:

$$I = I_3 - I_4 + I_2 - I_1 = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \left(\frac{2}{\omega_n} \cos \frac{\omega_n}{2} + \sin \frac{\omega_n}{2} \right) \sin(\omega_n r) - \pi r, & r \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2}{\omega_n} \sin \frac{\omega_n}{2} - \cos \frac{\omega_n}{2} \right) \cos(\omega_n r), & r > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Finalmente,

$$A_n \rho(r) = \frac{2i^{n-1}}{\pi n \omega_n^2} \frac{1}{r} \begin{cases} \left(\frac{2}{\omega_n} \cos \frac{\omega_n}{2} + \sin \frac{\omega_n}{2} \right) \sin(\omega_n r) - 2r, & n < \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2}{\omega_n} \sin \frac{\omega_n}{2} - \cos \frac{\omega_n}{2} \right) \cos(\omega_n r), & n \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

B Observações sobre $|\phi|$ como uma série regular

Aqui, demonstramos os problemas inerentes à tentar expandir a função $V(\phi) = |\phi|$ em um polinômio bem-comportado de grau infinito no sentido usual. Supondo a existência

de tal série, mostramos que isso conduz a uma contradição. Ressalta-se que isso não significa que versões regularizadas de $|\phi|$ não possam ser expandidas; na Seção B.1, revisamos algumas dessas funções. Significa, porém, que tais expansões precisam possuir certas propriedades para captar a essência da função módulo. Por exemplo, devem necessariamente constituir aproximações arbitrárias no sentido analítico, em lugar de representarem computações tecnicamente exatas de grau infinito.

Primeiro, escrevamos $|\phi|$ como $\text{sign}(\phi)\phi$. Segue-se que $V'(\phi) = \phi^{-1}V(\phi)$. Portanto, se $|\phi|$ pudesse de fato ser expresso como uma soma infinita de potências pares de ϕ (uma vez que $|\phi|$ é uma função par),

$$|\phi| = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k}{k+1} \phi^{k+1}, \quad (\text{B.0.1})$$

então a mesma expansão poderia ser escrita como

$$|\phi| = \int_0^\phi d\phi' V'(\phi') = \int_0^\phi d\phi' \phi'^{-1} V(\phi') = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(k+1)^2} \phi^{k+1}.$$

Note o aparecimento do quadrado de $(k+1)$. Iterando essa integração, obtemos

$$|\phi| = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(k+1)^n} \phi^{k+1}, \quad (\text{B.0.2})$$

o que deveria valer para qualquer $n = 1, 2, 3, \dots$

Esse procedimento também pode ser revertido, partindo de $|\phi| = \phi V'(\phi)$, levando à mesma expressão porém com $n \rightarrow -n$. Assim, a equação (B.0.2) pode assumir também valores negativos de n .

Isso é, naturalmente, contraditório, pois igualar duas dessas somas com valores distintos de n e mesmos coeficientes λ_k só apresentaria solução se $\lambda_k = 0$ para todo k . Notavelmente, isso não se verifica na expansão truncada dependente de N com coeficientes $\lambda_n^{(N)}$ na Expr. (3.2.18), apresentada na forma

$$|\phi| \simeq V_N(\phi) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^N \frac{\lambda_k^{(N)}}{k+1} \phi^{k+1},$$

a qual constitui uma aproximação analítica arbitrária.

Tal série deve necessariamente ser truncada, a menos que seja tratada em um contexto de distribuições (se isso for sequer possível). Essa necessidade decorre de que, como a expres-

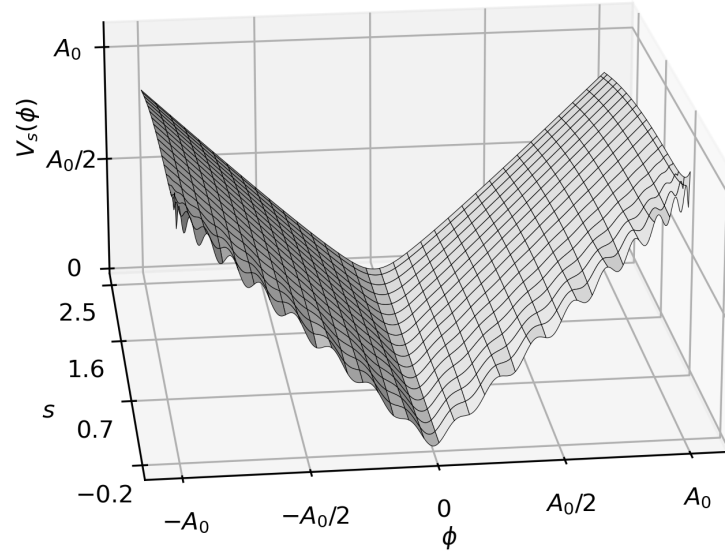


Figura B.0.1: O potencial $V_s(\phi)$ avaliado em $N = 35$ para diferentes valores do parâmetro s no intervalo $[-0.2, 2.5]$.

são (3.2.23) mostra, o limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_k^{(N)}$ ou diverge para infinito ou tende a zero, para qualquer $k = 1, 3, 5, \dots$. Incorporando ainda a dependência extra do inteiro arbitrário n da Série (B.0.2), pode-se recorrer a

$$\lambda_{k,s}^{(N)} \equiv \frac{\lambda_k^{(N)}}{(k+1)^s},$$

para $s \in \mathbb{Z}$. De fato, resultados numéricos indicam que valores reais para s são compatíveis com a convergência correta da série, ainda que não haja prova formal. Denotamos esse potencial dependente do parâmetro s como $V_s(\phi)$. A Figura B.0.1 exibe uma sequência de aproximações usando $N = 35$ e diversos valores de s . As aparentes oscilações para valores pequenos de desse parâmetro, são devido ao uso de N relativamente pequeno.

Assim, a série truncada é, em termos técnicos, quase-invariante sob mudanças nos valores de s e A_0 (recorde-se a dependência implícita de $\lambda_n^{(N)}$ em A_0 na expressão (3.2.18)).

B.1 Comparação com outras regularizações de $|\phi|$

Nesta subseção, discutimos a utilidade da expansão mencionada. Mostramos que, para certos procedimentos de regularização listados abaixo, a expansão ou não produz séries convergentes em intervalos fora do parâmetro de regularização ε (onde a parte linear da função prevalece) ou não elimina as patologias causadas pela função valor absoluto. Consequentemente, essas expansões são pouco práticas para estudar as principais características do valor absoluto como potencial na teoria de campos.

Existem várias formas de regularizar o potencial $|\phi|$. Embora a lista a seguir não seja exaustiva, mencionamos algumas técnicas e analisamos seu raio de convergência para dar uma noção geral das dificuldades:

1. **Potência:** $V_\varepsilon(\phi) = (\varepsilon^p + |\phi|^p)^{1/p}$, com o caso comum de regularização quadrática $p = 2 \rightarrow V_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + \phi^2}$. A expansão em torno de $\phi = 0$ produz uma série que pode ser escrita na forma

$$V_\varepsilon = \varepsilon + \phi \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)^{kp-1},$$

e embora a_k decresça rapidamente para $p \geq 2$, isso não basta para controlar valores de $\phi/\varepsilon > 1$. Esse raio vale para $p = 2$ e maiores. Para $p \leq 1$, o raio de convergência de fato cresce, mas nesses casos (e também em alguns casos com p ímpar) deve-se usar $|\phi|$ em vez de ϕ , o que anula o objetivo caso se pretenda eliminar as patologias ligadas a $|\phi|$.

2. **Exponencial:** $V_\varepsilon(\phi) = \frac{1}{\varepsilon} \log(e^{\varepsilon|\phi|} + 1)$. Embora a série

$$V_\varepsilon(\phi) = \frac{\log(2)}{\varepsilon} + \frac{|\phi|}{2} + \frac{\varepsilon\phi^2}{8} - \frac{\varepsilon^3\phi^4}{192} + O(\phi^6)$$

convirte para qualquer valor de ϕ , ela inclui explicitamente o termo $|\phi|$, tornando-a ineficaz se o objetivo é contornar as patologias associadas a $|\phi|$.

3. **Hiperbólica:** $V_\varepsilon(\phi) = \frac{|\phi|}{1 + \varepsilon|\phi|}$. A expansão desta função pode ser escrita como

$$V_\varepsilon = \phi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\varepsilon\phi)^k,$$

e possui raio de convergência $\phi < \frac{1}{\varepsilon}$.

No geral, não é tarefa simples encontrar uma expansão adequada para $|\phi|$ que elimine suas dificuldades e preserve sua característica principal — ser linear por partes. Apresentamos um método sistemático capaz de lidar com o comportamento de $|\phi|$ em $\phi \simeq 0$ e de capturar seu relevante regime linear assintótico.