



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Leonardo Grandini da Silveira Adami

**ANÁLISE CINETOESTÁTICA DO MOTOR STIRLING TIPO ALFA USANDO AS
TEORIAS DE GRAFOS E HELICOIDES**

Florianópolis
2025

Leonardo Grandini da Silveira Adami

**ANÁLISE CINETOESTÁTICA DO MOTOR STIRLING TIPO ALFA USANDO AS
TEORIAS DE GRAFOS E HELICOIDES**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.

Co-orientador: Marina Baldissera de Souza, Dra. Eng.

Florianópolis

2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Grandini da Silveira Adami, Leonardo
ANÁLISE CINETOESTÁTICA DO MOTOR STIRLING TIPO ALFA
USANDO AS TEORIAS DE GRAFOS E HELICOIDES / Leonardo
Grandini da Silveira Adami ; orientador, Daniel Martins,
coorientadora, Marina Baldissera de Souza, 2025.
104 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Motor Stirling. 3. Análise
Cinetoeestática. 4. Método de Davies. 5. Perdas Mecânicas.
I. Martins, Daniel. II. Baldissera de Souza, Marina. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Leonardo Grandini da Silveira Adami

**ANÁLISE CINETOESTÁTICA DO MOTOR STIRLING TIPO ALFA USANDO AS
TEORIAS DE GRAFOS E HELICOIDES**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Rodrigo de Souza Vieira, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Amir Antônio Martins de Oliveira Jr, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.



Documento assinado digitalmente
Henrique Simas
Data: 14/11/2025 10:48:52-0300
CPF: ***.194.639-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng.
Coordenador do Programa



Documento assinado digitalmente
Daniel Martins
Data: 14/11/2025 10:59:21-0300
CPF: ***.746.219-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.
Orientador

Florianópolis, 15 de agosto de 2025.

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Sra. Iolanda e Sr.
Dirceu.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Iolanda e Dirceu, pelo amor e apoio incondicional ao longo dos anos. Pelo incentivo constante durante toda a jornada e suporte nos desafios enfrentados, tanto academicamente quanto na vida pessoal. Pelos conselhos sábios e valiosos que me guiam.

Aos meus orientadores Professor Daniel Martins e Dra. Eng. Marina Baldissera de Souza, agradeço pelo conhecimento compartilhado, direcionamento preciso e valiosa troca de ideias, além da confiança depositada em meu trabalho. Agradeço também aos demais professores do Laboratório de Robótica e aos professores do programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica, pelo conhecimento compartilhado e a acolhida das aulas e projetos.

À equipe do Laboratório de Robótica Aplicada: Carlos, Fernando, Valdatti, Luan, Gustavo, Guilherme, Esdras, André, Thaís e João. Agradeço a todos pela amizade sincera e pelos momentos compartilhados dentro e fora da universidade. À turma do café, que proporcionava cartazes descontraídos e conversas que tornavam os dias mais leves. Em especial ao amigo Carlos Pinzón, pelo apoio fundamental nos momentos desafiadores da reta final do mestrado.

Aos amigos de longa data de Caxias do Sul e aos amigos que aqui fiz.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFSC pelo acolhimento, oportunidade e apoio indispensável. Este trabalho teve o suporte financeiro de ANEEL e Celesc (R&D projetos 5697-0423/2023, 5697-0923/2023 e 5697-1123/2023), FINEP (R&D projeto 0378/2023), Embraer (project GDT0045-2024), CAPES, e CNPq (grant 305344/2024-2, 312980/2025-6 e 406936/2022-6), Brasil.

“Nossa maior fraqueza está em desistir. O caminho mais certo de vencer é tentar mais uma vez.”
Thomas Edison

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma análise cinetoestática de um motor Stirling tipo Alfa, com foco na avaliação das perdas mecânicas que afetam sua eficiência. O estudo é motivado pela necessidade da melhor compreensão dos fatores limitantes do desempenho dos motores Stirling, bem como preencher lacuna nesta área, frequentemente citada na literatura, mas raramente investigada de forma aprofundada. A metodologia empregada baseia-se no método de Davies, que integra a teoria de grafos com a teoria de helicoides como ferramenta matemática principal para modelagem e análise do mecanismo. O estudo foca na modelagem e quantificação de duas principais fontes de perdas mecânicas: atrito e vazamento. Para as perdas por atrito, utilizou-se o modelo de Coulomb adaptado, onde a força de atrito é função do coeficiente de atrito e da força normal. As perdas por vazamento foram modeladas considerando o escape do fluido de trabalho através das folgas entre componentes móveis, particularmente entre pistão-cilindro. Os resultados demonstraram perdas significativas de potência com o aumento do coeficiente de atrito. As perdas devido às folgas demonstram extrema sensibilidade, apresentando reduções abruptas com pequenas variações. Os dois modelos estudados apresentaram variabilidade ao longo do ciclo operacional: o atrito é mais pronunciado em estágios de baixa velocidade dos pistões, enquanto o vazamento é mais expressivo em estágios de maiores pressões internas. Sendo que a soma dessas perdas demonstra que, apesar do potencial teórico de alta eficiência dos motores Stirling, seu desempenho é influenciado pelos fatores de atrito e vazamento. O trabalho contribui para o entendimento das perdas mecânicas em motores Stirling tipo Alfa, fornecendo uma base para futuras otimizações e desenvolvimentos tecnológicos. Além da aplicação do método de Davies mostrar-se uma abordagem eficaz para compreensão dos fenômenos mecânicos associados a estes motores.

Palavras-chave: Motor Stirling; Análise Cinetoestática; Método de Davies; Perdas Mecânicas; Atrito; Vazamento; Análise de mecanismos.

ABSTRACT

This work presents a kinetostatic analysis of an Alpha-type Stirling engine, focusing on the evaluation of mechanical losses that affect its efficiency. The study is motivated by the need for a better understanding of the limiting factors in Stirling engine performance, as well as to fill a gap in this area, frequently cited in the literature but rarely investigated in depth. The methodology employed is based on Davies' method, which integrates graph theory with screw theory as the main mathematical tool for mechanism modeling and analysis. The study focuses on modeling and quantifying two main sources of mechanical losses: friction and leakage. For friction losses, an adapted Coulomb model was used, where friction force is a function of the friction coefficient and normal force. Leakage losses were modeled considering the escape of working fluid through clearances between moving components, particularly between piston and cylinder. The results demonstrated significant power losses with increasing friction coefficient. Losses due to clearances show high sensitivity, presenting abrupt reductions with small variations. The two studied models exhibited variability throughout the operational cycle: friction is more pronounced in low piston velocity stages, while leakage is more significant in stages of higher internal pressures. The sum of these losses demonstrates that, despite the theoretical potential for high efficiency in Stirling engines, their performance is influenced by friction and leakage factors. This work contributes to the understanding of mechanical losses in Alpha-type Stirling engines, providing a foundation for future optimizations and technological developments. Additionally, the application of Davies' method proves to be an effective approach for understanding the mechanical phenomena associated with these engines.

Keywords: Stirling Engine; Kinetostatic Analysis; Davies Method; Mechanical Losses; Friction; Leakage; Mechanism Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Linha do Tempo do desenvolvimento do motor Stirling. Adaptado de: (BACHELIER, 2009)	25
Figura 2 – Diagrama de Blocos do Desenho do Motor Stirling. Adaptado de: (MARTINI, 1983).	25
Figura 3 – Etapas da transferência de fluido e movimentação do mecanismo do motor Stirling tipo Alfa. Adaptado de: (NARAYAN; GUPTA, 2015)	27
Figura 4 – Ciclo de Carnot versus Ciclo de Stirling. Adatado de: (ZHU <i>et al.</i> , 2021). . .	27
Figura 5 – Motor Stirling de pistão livre. Adatado de: (KRAMENS <i>et al.</i> , 2021).	29
Figura 6 – Esquema Básico de um Motor de Pistão Líquido. Adatado de: (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020).	30
Figura 7 – Esquema Básico de um Motor Stirling Termoacústico. Adatado de: (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020).	30
Figura 8 – Configurações dos motores Stirling: (a) Alfa, (b) Beta e (c) Gama	33
Figura 9 – Mecanismo de Watt	33
Figura 10 – Mecanismo Rômbico	34
Figura 11 – Mecanismo Ross Yoke	34
Figura 12 – Mecanismo Scotch Yoke	35
Figura 13 – Mecanismo Swash Plate	36
Figura 14 – Esquemático da Força de Atrito	43
Figura 15 – Etapas de Implementação da Rotina de Atrito no Método de Davies	44
Figura 16 – Representação Esquemática do Motor Stirling Tipo α : (a) Corte Lateral, e (b) Corte Frontal.	47
Figura 17 – Representação Funcional do Motor Stirling Tipo α	48
Figura 18 – Representação Estrutural do Motor Stirling.	50
Figura 19 – Representação por Grafos do Motor Stirling.	50
Figura 20 – Representação Esquemática do Motor Stirling Tipo Alfa.	51
Figura 21 – (a) Variação dos volumes total, de compressão e de expansão em relação ao ângulo da manivela em um ciclo do motor a 500 rpm, e (b) Diagramas PV para volumes de compressão e expansão em um ciclo de motor a 500 rpm. Adaptado de: (ALMAJRI; MAHMOUD; AL-DADAH, 2017)	53
Figura 22 – Ajuste Polinomial dos dados de Pressão das Câmaras	54
Figura 23 – Grafo de Movimentos do Mecanismo do Motor Steerling	57
Figura 24 – Árvore Geradora do Mecanismo do Motor Stirling.	57
Figura 25 – Gráfico Velocidades dos Pistões	61
Figura 26 – Forças no Motor Stirling Alfa sem Perdas	62
Figura 27 – Grafo de ações do Mecanismo do Motor Stirling	63
Figura 28 – Momento a Junta a no Motor Stirling Alfa sem Perdas	71

Figura 29 – Momento a Junta A com Variação do Coeficiente de Atrito	73
Figura 30 – Diferenças nos Momentos na Junta A para Diferentes Coeficientes de Atrito	73
Figura 31 – Momentos na Junta A com Diferentes Folga dos Pistões	75
Figura 32 – Diferenças dos Momentos na Junta A para Diferentes Folgas	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação entre as configurações dos motores Stirling Alfa, Beta e Gama. Adaptado de: (ARSLAN; KOCAKULAK, 2023; YAO; WAHAB, 2020) . . .	32
Tabela 2 – Interpretação física dos componentes de helicoides. Adaptado de: (SOUZA, 2023)	37
Tabela 3 – Parâmetros principais do motor Stirling tipo Alfa utilizado para análise baseado em Almajri, Mahmoud e Al-Dadah (2017).	48
Tabela 4 – Parâmetros dimensionais calculados para o motor Stirling tipo Alfa utilizado na análise.	48
Tabela 5 – Identificação dos elos do mecanismo.	49
Tabela 6 – Forças e toques de reação atuantes nos pares cinemáticos	62
Tabela 7 – Forças de Entrada	62
Tabela 8 – Forças e toques atuantes nos pares cinemáticos	66
Tabela 9 – Modelo Sem Perdas	72
Tabela 10 – Comparação de Modelos com Diferentes Perdas por Atrito	74
Tabela 11 – Comparação de Modelos com Diferentes Perdas por Vazamento	76
Tabela 12 – Comparação de modelos com diferentes perdas por atrito e folga	76
Tabela 13 – Comparação de Modelos com Diferentes Perdas	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	Projeto Assistido por Computador
D.D.	Doutorado honorário em divindade
LAR	Laboratório de Robótica Aplicada Raul Guenter
rpm	Revoluções por minuto
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

LISTA DE SÍMBOLOS

PV	Diagrama Pressão-Volume
TS	Diagrama Temperatura-Entropia
n	Número de elos
g	Número de juntas
G_C	Grafo de Acoplamentos
G_M	Grafo de Movimentos
f_i	Número de graus de liberdade do par cinemático i
$\$$	Helicoide
h	Passo associado ao helicoide
$\$m$	Heligiro
$\$a$	Heliforça
r	Vetor de velocidade angular no eixo x
ω_x	Velocidade angular no eixo x
R	Vetor de Torque no eixo x
T_x	Torque no eixo x
s	Vetor de velocidade angular no eixo y
ω_y	Velocidade angular no eixo y
S	Vetor de Torque no eixo y
T_y	Torque no eixo y
t	Vetor de velocidade angular no eixo z
ω_z	Velocidade angular no eixo z
T	Vetor de Torque no eixo z
T_z	Torque no eixo z
u	Vetor de velocidade linear no eixo x
τ_x	Velocidade linear no eixo x
U	Vetor de força no eixo x
F_x	Força no eixo x
v	Vetor de velocidade linear no eixo y
τ_y	Velocidade linear no eixo y
V	Vetor de força no eixo y
F_y	Força no eixo y
w	Vetor de velocidade linear no eixo z
τ_z	Velocidade linear no eixo z
W	Vetor de força no eixo z
F_z	Força no eixo z
ψ	Magnitude
$\hat{\$}$	Helicoide Normalizado

$\vec{S}$	Vetor de direção dos helicoides dos pares cinemáticos
$\vec{S}_0$	Vetor de posição dos helicoides dos pares cinemáticos
O	Sistema Inercial
$[\hat{M}_D]_{\lambda \times F}$	Matriz de movimentos unitários
$[\hat{M}_N]_{\lambda \nu \times F}$	Matriz de movimentos unitários em rede
F	Graus de liberdade de cada um dos pares cinemáticos
$[B_M]$	Matriz de circuitos
$[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$	Matriz de ações unitárias
$[\hat{\Psi}]_{C \times 1}$	Magnitudes das heliforças
$[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$	Matriz de ações unitárias em rede
Q_A	Matriz de cortes
G_A	Grafo de Ações
p	Pressão nas câmaras de combustão
p_m	Pressão do bloco do motor
ζ	Viscosidade do gás utilizado no sistema
h_c	Folga entre os pistões e as paredes dos cilindros
D	Diâmetro das câmaras de combustão
L	Comprimento do cilindro
Δp_{leak}	Variação de perda de pressão
v	Volume instantâneo das câmaras de combustão
n_s	Rotação do motor
$\Delta \theta$	Variação do ângulo da manivela do mecanismo
$\dot{v}_{\text{leak}}$	Vazão de perda
F_a	Força de atrito N
μ	Coefficiente de atrito adimensional
F_n	Força normal do elemento em contato
V_D	Magnitude da força vertical transmitida pelo acoplamento
μ_D	Coefficiente adimensional de atrito
u_D	Magnitude da velocidade translacional do acoplamento
L_1	Comprimento do elo 1
L_2	Comprimento do elo 2
L_3	Comprimento do elo 3
P_c	Pressão na câmara de compressão
P_e	Pressão na câmara de expansão
θ	Ângulo da manivela
F_p	Força atuante no pistão
A_p	Área transversal do pistão
$\text{sign}(\)$	Sinal do valor da variável ou função
p_e	Pressão efetiva sobre os pistões

T_{ciclo}	Período de uma rotação da manivela
N	Rotação por minuto do motor
W_{ciclo}	Trabalho realizado no ciclo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	19
1.2	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DA PESQUISA	19
1.3	ESCOPO DO TRABALHO	20
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
2.1	DESCRIÇÃO DO MOTOR STIRLING	22
2.2	HISTÓRIA DO MOTOR STIRLING	23
2.3	ESTUDO DO MOVIMENTO	25
2.4	CICLO DO MOTOR STIRLING	26
2.5	CONFIGURAÇÕES DOS MOTORES STIRLING	28
2.5.1	Modelos Dinâmicos	29
2.5.2	Modelos Cinemáticos	31
2.5.2.1	Classificação quanto ao arranjo do motor	31
2.5.2.2	Classificação quanto ao mecanismos dos motores	32
2.6	MÉTODO DE DAVIES	35
2.6.1	Adaptação das Leis de Kirchhoff	36
2.6.2	Teoria de Helicoides	37
2.6.3	Análise Cinemática	38
2.6.4	Análise Estática	38
2.7	MODELOS MATEMÁTICOS DE PERDAS	39
2.7.1	Modelo de Vazamento	40
2.7.2	Modelo de Atrito	42
3	ESTUDO DE CASO: MOTOR STIRLING TIPO ALFA	46
3.1	IDENTIFICAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DO MECANISMO	46
3.2	ANÁLISE DAS POSIÇÕES DAS JUNTAS PRISMÁTICAS E DE ROTAÇÃO	50
3.3	OBTENÇÃO DOS DADOS DE REFERÊNCIA	52
3.4	ANÁLISE CINEMÁTICA DOS MECANISMOS	55
3.5	ANÁLISE ESTÁTICA DOS MECANISMOS	61
3.6	ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO ATRITO	65
3.7	ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO VAZAMENTO	69
4	ANÁLISE DE RESULTADOS	71
4.1	RESULTADOS DA ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO SEM PERDAS	71
4.2	RESULTADOS DA ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO ATRITO	72
4.3	RESULTADOS DA ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO VAZAMENTO	74

4.4	ANÁLISE DE RESULTADOS CONJUNTOS	76
5	CONCLUSÃO	78
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	78
	Bibliografia	80
	APÊNDICE A – SCRIPT MATLAB: ANÁLISE CINEMÁTICA	86
A.1	SCRIPT MATLAB: CÁLCULO DAS FORÇAS DE ENTRADA	90
A.2	SCRIPT MATLAB: ANÁLISE ESTÁTICA SEM PERDAS OU COM VA- ZAMENTO	92
A.3	SCRIPT MATLAB: ROTINA PARA CALCULAR AS FORÇAS DE ATRITO	98
	APÊNDICE B – MATRIZES	104

1 INTRODUÇÃO

A economia e o estilo de vida da sociedade estão passando por mudanças significativas relativos aos modos de consumo de energia (TOGHYANI *et al.*, 2014; LIAO; LIN, 2015; ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020). Questões relacionadas à redução de impactos ambientais têm sido amplamente debatidas internacionalmente, como nas Conferências das Nações Unidas sobre Mudança do Clima (RODRIGUES; GOMES; MENDONÇA, 2023). Entre os desafios está a necessidade de transformar a produção e o consumo de energia, uma vez que o setor energético é uma das maiores fontes de poluição e emissões de gases de efeito estufa (RAHMATI *et al.*, 2020; YANG; ALI; LIANG, 2025).

Nesse contexto, os motores, tanto de combustão interna quanto externa, desempenham um papel crucial, pois são amplamente utilizados nas mais diversas áreas da sociedade (LIAO; LIN, 2015). Apesar de sua importância, esses sistemas enfrentam críticas. Motores de combustão interna, por exemplo, apresentam eficiências típicas entre 20% e 40% e estão associados à alta emissão de poluentes resultantes da queima de combustíveis fósseis (CHENG; YU, 2011; AKSOY *et al.*, 2016; SHEEHAN, 2022). Por outro lado, motores de combustão externa, como o motor Stirling, destacam-se por seu potencial de maior eficiência e menor impacto ambiental (TOGHYANI *et al.*, 2014; ABUELYAMEN *et al.*, 2017). No entanto, embora tenham sido inventados antes dos motores de combustão interna, os motores Stirling ainda não alcançaram ampla aceitação no mercado, sendo frequentemente vistos como uma tecnologia promissora para o futuro (MAIER *et al.*, 2007).

O motor Stirling apresenta-se como uma alternativa tecnicamente viável, uma vez que é uma tecnologia já consolidada e possui conhecimento teórico amplamente difundido. Além disso, a vasta gama de combustíveis que podem ser utilizados torna-o atrativo para diversas aplicações, especialmente em sistemas de geração distribuída e em locais onde a disponibilidade de combustíveis convencionais é limitada (THOMBARE; VERMA, 2008).

Diante disto, a presente dissertação busca contribuir para o avanço do conhecimento sobre o motor Stirling, com o objetivo de reduzir lacunas de entendimento e esclarecer incertezas sobre os possíveis problemas e limitações de seu mecanismo, que frequentemente são citadas em diversos artigos, mas não são esclarecidas. Para isso, será realizada uma análise do sistema utilizando o método de Davies, amplamente empregado em estudos do Laboratório de Robótica Aplicada Raul Guenter (LAR) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), conforme os trabalhos de Martins (2002), Cazangi *et al.* (2008) e Souza (2023). Ademais, será acrescida a investigação de perdas inerentes ao ciclo do motor, como atritos internos e vazamentos de gases. Assim, busca-se calcular as eficiências relativas ao motor Stirling, fornecendo subsídios para futuras melhorias nos projetos desses motores.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O motor Stirling, especialmente na configuração Alfa, destaca-se por seu potencial de alta eficiência e pela capacidade de utilizar fontes de calor renováveis (TOGHYANI *et al.*, 2014; AKSOY *et al.*, 2016; BORETTI, 2021a; YANG; ALI; LIANG, 2025). A maioria dos estudos está voltada para o caráter termodinâmico - essencial para o projeto do motor -, deixando, assim, uma lacuna significativa no entendimento das perdas mecânicas associadas ao seu mecanismo. Essas perdas são comumente citadas como fatores limitantes da eficiência global, porém raramente são objeto de investigações aprofundadas (CHENG; YU, 2011). Tal constatação evidencia a necessidade de maior atenção sobre o tema. Tal abordagem tem o intuito de oferecer uma nova perspectiva de análise e avaliar os impactos no desempenho do motor Stirling. Essas perdas mecânicas incluem atritos nos componentes móveis, vazamentos decorrentes de folgas e ineficiências nos sistemas de transmissão de movimento (TOGHYANI *et al.*, 2014),

Nesse contexto, o presente trabalho vem a utilizar o método de Davies, uma ferramenta amplamente aplicada ao estudo mecanismos dos mais variados tipos, bem como é possível incluir perdas desde que tenham modelos matemáticos. Com isso, e em conjunto com dados experimentais provenientes de simulações ou testes já realizados por outros pesquisadores, permite explorar soluções para problemas que ainda permanecem não resolvidos (MARTINS, 2002; LAUS, 2011; LAUS; SIMAS; MARTINS, 2012; SIMONI; CARBONI; MARTINS, 2009).

A literatura existente carece de estudos que explorem essas perdas de forma sistemática e quantitativa, especialmente utilizando dados experimentais, seja por meio de simulações computacionais ou testes realizados por outros pesquisadores. Essa lacuna se torna ainda mais relevante diante da crescente demanda por sistemas energéticos mais eficientes. Compreender as perdas mecânicas no motor Stirling, no caso do tipo Alfa, pode não apenas contribuir para uma análise mais completa do desempenho do motor, mas também oferecer subsídios para o desenvolvimento de soluções de engenharia que melhorem sua eficiência mecânica e, conseqüentemente, seu desempenho geral. Portanto, este trabalho busca preencher essa lacuna ao investigar e quantificar as perdas mecânicas no mecanismo do motor Stirling Alfa. Ao corroborar com dados experimentais já existentes e desenvolver novas simulações, espera-se ampliar o conhecimento sobre o tema e fornecer informações que possam ser aplicadas tanto na academia quanto na indústria, contribuindo para o avanço no projeto e na utilização de motores Stirling mais eficientes.

1.2 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DA PESQUISA

O objetivo deste trabalho é analisar e quantificar a potência e eficiência mecânica de motores tipo Stirling, especialmente as perdas associadas ao seu mecanismo. Para alcançar tal objetivo, alguns objetivos específicos foram definidos:

- Descrever características, funções e classificação do motor Stirling;

- Determinar as cadeias cinemáticas dos mecanismos envolvidos em motores Stirling tipo Alfa;
- Coletar dados experimentais de motores Stirling por meio de trabalhos já desenvolvidos;
- Aplicar o método de Davies para resolução da estática e cinemática do mecanismo do motor;
- Analisar os fatores que influenciam a perda de eficiência mecânica;
- Calcular eficiência do método utilizado para o estudo de caso.

1.3 ESCOPO DO TRABALHO

O escopo do presente trabalho é a análise e quantificação das perdas mecânicas de um motor Stirling tipo Alfa, com ênfase nas perdas por atrito e vazamento associadas ao seu mecanismo. O estudo visa buscar resultados relativos a estes fatores limitantes de eficiência, que são uma lacuna nos estudos deste tipo de motor. Para isso, o trabalho:

- Descreve as características e funções do motor Stirling;
- Determina as cadeias cinemáticas dos mecanismos envolvidos;
- Analisa os fatores influenciadores das perdas por atrito e vazamento decorrentes de folgas;
- Coleta dados de referência de trabalhos já desenvolvidos na literatura para as análises;
- Utiliza o Método de Davies como ferramenta matemática principal para a análise cinetoestática do mecanismo do motor;
- Inclui a investigação de perdas no ciclo do motor, como atritos internos e vazamentos de gases, buscando estimar a contribuição relativa ao motor Stirling;
- Busca quantificar essas perdas individualmente e o impacto que elas têm na potência final do motor;
- Limita a análise à parte mecânica, desconsiderando aspectos termodinâmicos de funcionamento do motor.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A presente dissertação está estruturada em cinco capítulos que abordam de forma sequencial e lógica o desenvolvimento da pesquisa sobre motores Stirling.

O Capítulo 1 apresenta a contextualização do problema, os objetivos e contribuições da pesquisa, a justificativa para sua realização, bem como o escopo e estrutura do trabalho.

O Capítulo 2 desenvolve uma revisão bibliográfica abrangente que contempla a compreensão do motor Stirling, o estudo do movimento e ciclo do motor, as diversas configurações dinâmicas e cinemáticas. Além disso, inclui o detalhamento do Método de Davies que é o modelo matemático pelo qual os modelos de perdas por vazamento e atrito serão calculados.

O Capítulo 3 concentra-se na aplicação prática dos estudos, descrevendo o mecanismo, seu comportamento cinemático e estático para obtenção dos dados relativos a diferentes cenários de perdas.

O Capítulo 4 apresenta a análise de resultados obtidos para os modelos sem perdas, com atrito e com vazamento, além de uma análise conjunta comparativa dos resultados.

Por fim, o Capítulo 5 sintetiza os principais achados e contribuições do trabalho, apresentando também sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, serão apresentados conceitos relativos ao projeto no qual a dissertação está inserida, bem como um breve embasamento teórico sobre o tema principal de análise do mecanismo do motor Stirling tipo Alfa.

2.1 DESCRIÇÃO DO MOTOR STIRLING

O motor Stirling é um motor térmico de combustão externa conhecido por sua versatilidade e eficiência energética. Desenvolvido no início do século XIX pelo engenheiro Robert Stirling, esse motor destaca-se por operar com uma ampla variedade de fontes de calor, desde combustíveis fósseis, biocombustíveis, energia solar até calor geotérmico, sendo capaz de converter energia térmica em trabalho mecânico a partir de uma diferença de temperatura entre suas câmaras (MAIER *et al.*, 2007; TOGHYANI *et al.*, 2014; AKSOY *et al.*, 2016). Sendo um motor de combustão contínua, contribui para uma queima completa da sua fonte de calor e, assim, tem emissão de poluentes reduzida, o que o deixa em evidência na área de pesquisa novamente, especialmente neste momento de transição energética global (WANG *et al.*, 2016).

Outros fatores que tornam este motor relevante são ausência de explosões e de válvulas de admissão e escape, deixando-o mais silencioso, e, por consequência, com baixa vibração, favorecendo a durabilidade e reduzindo as necessidades de manutenção. Além do mais, como vem a ser um motor simplificado do âmbito construtivo, ou seja, pequeno número de peças e partes móveis, resulta em maior confiabilidade operacional (ARSLAN; KOCAKULAK, 2023).

Por outro lado, o motor Stirling também apresenta desafios técnicos, especialmente relacionados à resposta dinâmica, ao controle de potência e às perdas mecânicas. Devido à inércia térmica, a resposta a variações rápidas de carga é limitada, dificultando sua aplicação em sistemas que exigem alternância contínua de acelerações e desacelerações, como em veículos automotivos. Além disso, o motor tende a ter maior massa e dimensões em comparação com motores de combustão interna de potência equivalente, o que impacta sua relação potência-peso. Também são significativas as perdas mecânicas causadas pelo atrito entre os componentes móveis e vazamentos de fluido de trabalho que podem ocorrer nas vedações. Esses fatores contribuem para a redução da eficiência geral do sistema (VAHID; OSKOU EI, 2020; BORETTI, 2021b).

Apesar dessas limitações, os motores Stirling são amplamente estudados, especialmente devido ao seu ciclo de operação, teoricamente próximo ao ciclo de Carnot (SILVA *et al.*, 2011). Além disso, o motor Stirling oferece alta eficiência quando bem projetado e dimensionado, tornando-o um sistema promissor para exploração de fontes térmicas sustentáveis e recuperação de calor desperdiçado.

Nos tópicos seguintes, serão abordados em detalhes a história, o princípio de funcionamento, os ciclos termodinâmicos de operação, as principais configurações mecânicas e algumas aplicações do motor Stirling, destacando seu potencial e desafios a serem superados no seu desenvolvimento.

2.2 HISTÓRIA DO MOTOR STIRLING

Em meados dos anos 1800, a Revolução Industrial tomava parte da sociedade, realizando transformações nunca antes vistas. Este período foi marcado, principalmente, pela mudança de uma economia baseada na agricultura e na produção artesanal para uma economia com predominância da indústria e manufatura mecânica. Para que isto viesse a se tornar realidade, um dos principais pontos-chave foi a capacidade de gerar potência para substituição da força produzida pelos seres humanos e animais. Deste modo, esta época tornou-se muito propícia para invenções, especialmente neste âmbito, e algumas delas ainda estão presentes em nosso cotidiano (MAIER *et al.*, 2007).

Como as principais tendências de pesquisa da época tinham como meio de obtenção de potência ciclos para aquecimento de um determinado fluido com o intuito da produção de energia mecânica na sua saída, surgiram os conceitos de motores a vapor, que vieram a marcar a história juntamente com a Revolução Industrial, culminando na invenção de Robert Stirling (MAIER *et al.*, 2007).

Para que isso fosse possível, é necessário retornar alguns anos até 1699, quando o engenheiro Thomas Savery realizou os primeiros estudos de motores a vapor para criação de um motor a ser utilizado dentro de fábricas. Já em 1712, criaram-se equipamentos destinados à mineração a fim de realizar transporte de cargas elevadas, com o desenvolvimento de Thomas Newcomen. Continuando a evolução destes motores, Joseph Cugnot, em 1769, desenvolveu um triciclo a vapor, considerado o primeiro carro a vapor construído. Na década seguinte, em 1777, o motor a vapor de maior importância foi criado pelas mãos de James Watt. Em um cenário totalmente favorável para a área, os estudos deram continuidade, e em 1807 Sir George Cayley desenvolveu outro motor. Este, por sinal, veio a servir de base para o desenvolvimento de Robert Stirling (MAIER *et al.*, 2007).

Robert Stirling foi um clérigo escocês, nascido em 1790 e com falecimento aos 88 anos, em 1878. Aos 15 anos, ingressou na universidade, estudando matemática e lógica, sendo ordenado clérigo da Igreja da Escócia em 1816, iniciando sua carreira somente em 1824 após sua licença, vindo a se aposentar aos 86 anos. Seus estudos em engenharia tem origem familiar, já que seu avô era conhecido como ser um dos primeiros engenheiros hidráulicos e inventor de uma máquina de debulhar milho. Com uma base sólida na educação formal e na engenharia, com notável compreensão em transferência de calor e termodinâmica, Robert, juntamente com seu irmão James, detinham grande interesse em diminuir o consumo e melhorar a eficiência de máquinas. Isso fez construir instrumentos científicos e ópticos, além de motores. Robert, em 1840, recebeu Doutorado honorário em divindade (D.D.) da Universidade de St. Andrews, provavelmente devido às suas "boas obras" como clérigo. (LOVERIDGE, 1978; READER, 1994)

Em meio aos diversos motores construídos até o momento, as elevadas pressões de trabalho e os possíveis riscos envolvidos chamaram a atenção de Stirling. Devido a este fato, procurou desenvolver um motor para reduzir tais características (MAIER *et al.*, 2007). Até que, em 1816, após alguns anos de desenvolvimento juntamente com o seu irmão James, Robert

obteve a patente de número 4081, a qual incluía um motor juntamente com a idealização de um mecanismo de economia de calor, o que viria a ser o regenerador, resultando em uma maior eficiência do motor (BACHELIER, 2009). Deste modo, obteve-se a criação do reconhecido motor Stirling.

Subsequentemente, os irmãos buscaram ingressar no mercado com o seu invento e, da mesma forma, aprimoraram seu desenvolvimento. Porém, não somente eles ficaram entusiastas, mas também diversos engenheiros se debruçaram sobre o conceito criado, promovendo sua evolução, como o desenvolvimento de diferentes configurações do motor e outras aplicações, como o primeiro motor Stirling com aquecimento por fonte solar, produzido por John Ericsson, em 1872. Até o final do século XIX, a pesquisa junto ao conceito de Stirling se manteve em alta, até por volta de 1910, quando o motor de combustão interna começou a ganhar destaque, alcançando maior sucesso devido, principalmente, à sua superior eficiência e potência específica (MAIER *et al.*, 2007).

Deste modo, o motor Stirling perdeu relevância, mas, como na ciência alguns temas possuem ciclos, aqui não é diferente. Por isso, no período de 1940 a 1970, houve um segundo ciclo de desenvolvimento, agora capitaneado pela Philips Company (MAIER *et al.*, 2007), além da NASA (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020) e da empresa United Stirling AB, posteriormente renomeada, em 1988, como Kockums AB (TOGHYANI *et al.*, 2014).

Durante este período, o maior atrativo para a pesquisa do motor Stirling era sua eficiência, que ainda estava baixa, muito aquém da teórica eficiência de Carnot, que era o objetivo do motor. Assim, procedeu-se à investigação buscando este ideal, juntamente com outras aplicações, que iam desde a geração de potência até a motorização de meios de transporte. Nesta fase, criou-se o novo conceito do motor Stirling com pistão livre, que é utilizado até os dias de hoje (BATAINEH, 2018; YANG; ALI; LIANG, 2025). As aplicações automotivas foram realizadas no modelo Ford Gran Torino, em 1978 (MAIER *et al.*, 2007), e no modelo Spirit da empresa AMC (*American Motors Corporation*), em 1979. No final deste período, a Ford Motor Company que inicialmente investiu com grande entusiasmo na ideia veio a interromper o seu desenvolvimento, novamente devido ao motor de combustão interna. Esta interrupção ocorreu principalmente pelas dificuldades com a operação em variações de potência e, mais uma vez, pela baixa potência específica. Isto fez com que começasse um novo período de não produção de motores Stirling para fins comerciais. Outro fato interessante é que, após a saída da Philips, um antigo engenheiro da companhia, R. J. Meijer, criou sua própria empresa focada nos motores desse conceito. Desse modo, encerrou-se mais um ciclo de desenvolvimento dos motores Stirling (SHEEHAN, 2022).

O hiato para a nova era de pesquisa durou, de certa forma, poucos anos. Até que, no final da década de 1980, novas perspectivas sobre limitações das fontes de energia e a crescente preocupação com questões ambientais trouxeram o tema novamente à tona, o que se estende até o presente momento (MAIER *et al.*, 2007; TOGHYANI *et al.*, 2014). Este período vem mostrando que os estudos estão concentradas em universidades e organizações voltadas à pesquisa, buscando melhorias dos sistemas e aplicações de geração de energia e calor de média e pequena escala,

bem como a conversão de energia solar térmica em eletricidade ou potência mecânica.

Ao longo da história do motor Stirling é possível notar o seu potencial, porém o mesmo motor ainda não chegou ao seu ápice. Devido a isto, esta máquina atrai olhares há séculos (Figura 1) com as mais diversas vertentes e ainda desperta curiosidade para buscar extrair todo o potencial que há nela (BACHELIER, 2009; FINKELSTEIN; ORGAN, 2001).

Após uma breve retrospectiva da trajetória histórica dos motores Stirling, é preciso compreender a ciência por trás desta tecnologia. Para isso, inicia-se no próximo capítulo o detalhamento da operação deste motor de combustão externa.

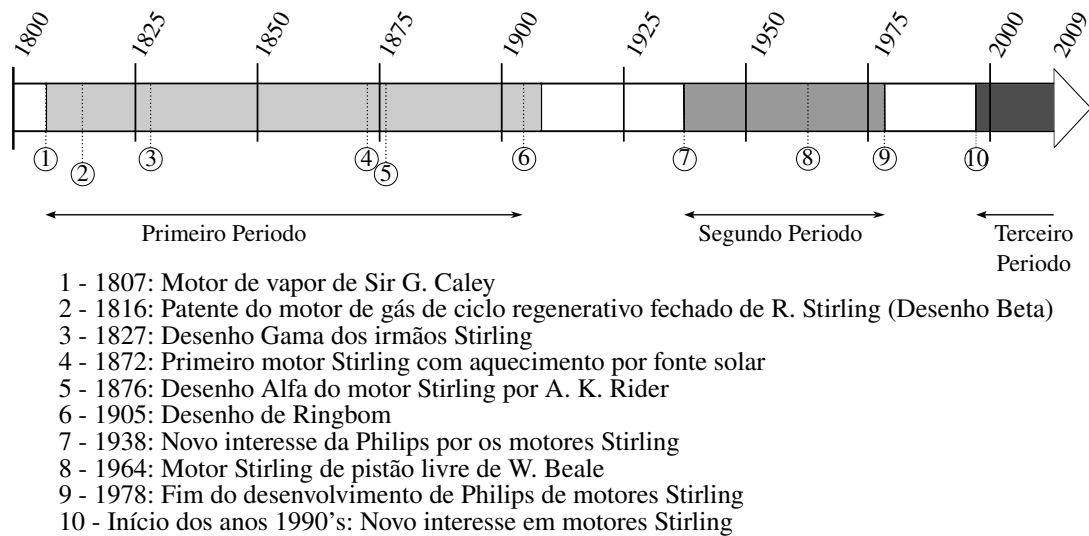


Figura 1 – Linha do Tempo do desenvolvimento do motor Stirling. Adaptado de: (BACHELIER, 2009)

2.3 ESTUDO DO MOVIMENTO

O motor Stirling trabalha baseado no princípio cíclico de aquecimento e resfriamento do fluido de trabalho, que, em geral, é ar, hélio, hidrogênio ou nitrogênio. De forma resumida, a Figura 2 demonstra, através de um diagrama de blocos, as necessidades e os processos envolvidos.

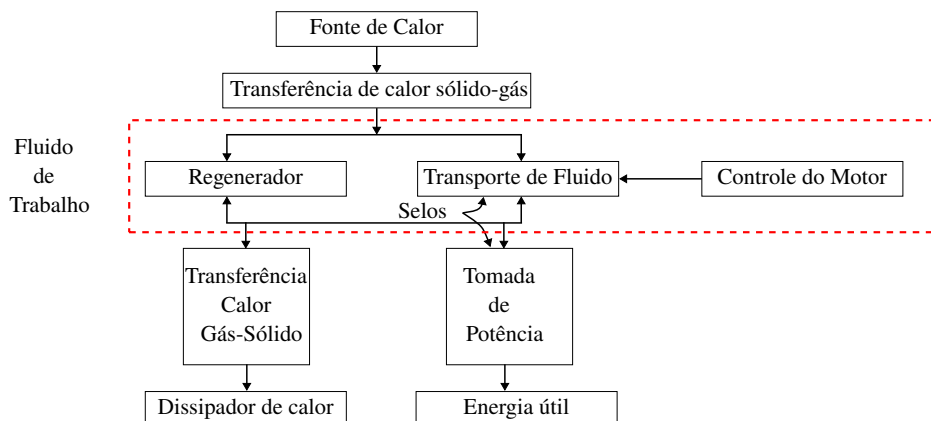


Figura 2 – Diagrama de Blocos do Desenho do Motor Stirling. Adaptado de: (MARTINI, 1983).

A partir dessas informações gerais, consegue-se descrever passo a passo o processo. Por ser um motor de combustão externa, o sistema deve possuir duas câmaras separadas fisicamente para a realização dos processos. Dessa forma, primeiramente, o fluido que está na câmara de expansão, comumente descrita como câmara quente, recebe calor de uma fonte externa que irá aquecer o fluido e expandi-lo (Figura 3(a) e processo 3-4 da Figura 4) , enquanto o pistão da câmara fria, esta no ponto morto superior.

Com o aquecimento do fluido, o pistão da câmara de expansão move-se para o ponto morto inferior, fazendo com que o pistão da câmara de compressão se desloque para o meio da câmara. Isto faz com que o fluido aquecido comece a ser transferido de um cilindro para o outro. A transferência do fluido de uma câmara para a outra ocorre passando pelo regenerador, que funciona, de certa forma, como um acumulador de calor, retendo parte do calor internamente (Figura 3(b) e processo 4-1 da Figura 4).

Após o fluido de trabalho chegar à câmara de compressão, ou câmara fria, ocorrerá o resfriamento. Em geral, o resfriamento pode ocorrer por fluxo de água ou ar na parte externa deste cilindro. Nesse estágio, o calor será rejeitado para o ambiente externo, fazendo com que o fluido sofra uma compressão. O pistão desta câmara, chamado de movimentador (*displacer*), tenderá a movimentar-se de maneira a diminuir o volume da câmara, enquanto o pistão da outra câmara permanecerá na posição central (Figura 3(c) e processo 1-2 da Figura 4).

Após o resfriamento, o fluido frio será encaminhado para o regenerador, o qual reterá a sua temperatura, enquanto o calor previamente armazenado no regenerador será transferido para o fluido que retornará à câmara quente (Figura 3(d) e processo 2-3 da Figura 4). Deste modo, tem-se o funcionamento mecânico do motor Stirling (DEETLEFS, 2014; NARAYAN; GUPTA, 2015).

2.4 CICLO DO MOTOR STIRLING

Para melhor compreensão do funcionamento de um motor Stirling é necessário entender o seu ciclo termodinâmico, que vem a ser um ciclo fechado e regenerativo, onde há a conversão de energia térmica em trabalho mecânico por meio da expansão e compressão cíclica de um fluido no estado gasoso, geralmente sendo ar, hélio ou hidrogênio. O princípio fundamental baseia-se na diferença entre o trabalho realizado para comprimir o fluido em temperatura baixa e o trabalho resultante da expansão a temperatura elevada, assim produzindo trabalho líquido positivo. Além disso, o sistema opera com uma quantidade fixa de fluido, que alternadamente opera nas regiões de temperaturas distintas, sendo a fonte quente (aquecedor) e a fonte fria (resfriador). Isto caracteriza o motor com a capacidade de utilização de diversas fontes de energia térmica, tanto para o aquecimento e resfriamento (PEROZZIELLO; GROSU; VAGLIECO, 2021).

Analisando o ciclo de operação do motor, representado por linhas cheias na Figura 4, é possível identificar os processos que são realizados com certa similaridade ao ciclo de Carnot, representado por linhas tracejadas na Figura 4, visto a característica regenerativa. Os processos realizados no ciclo são separados, conforme os diagramas de *PV* (pressão-volume) e

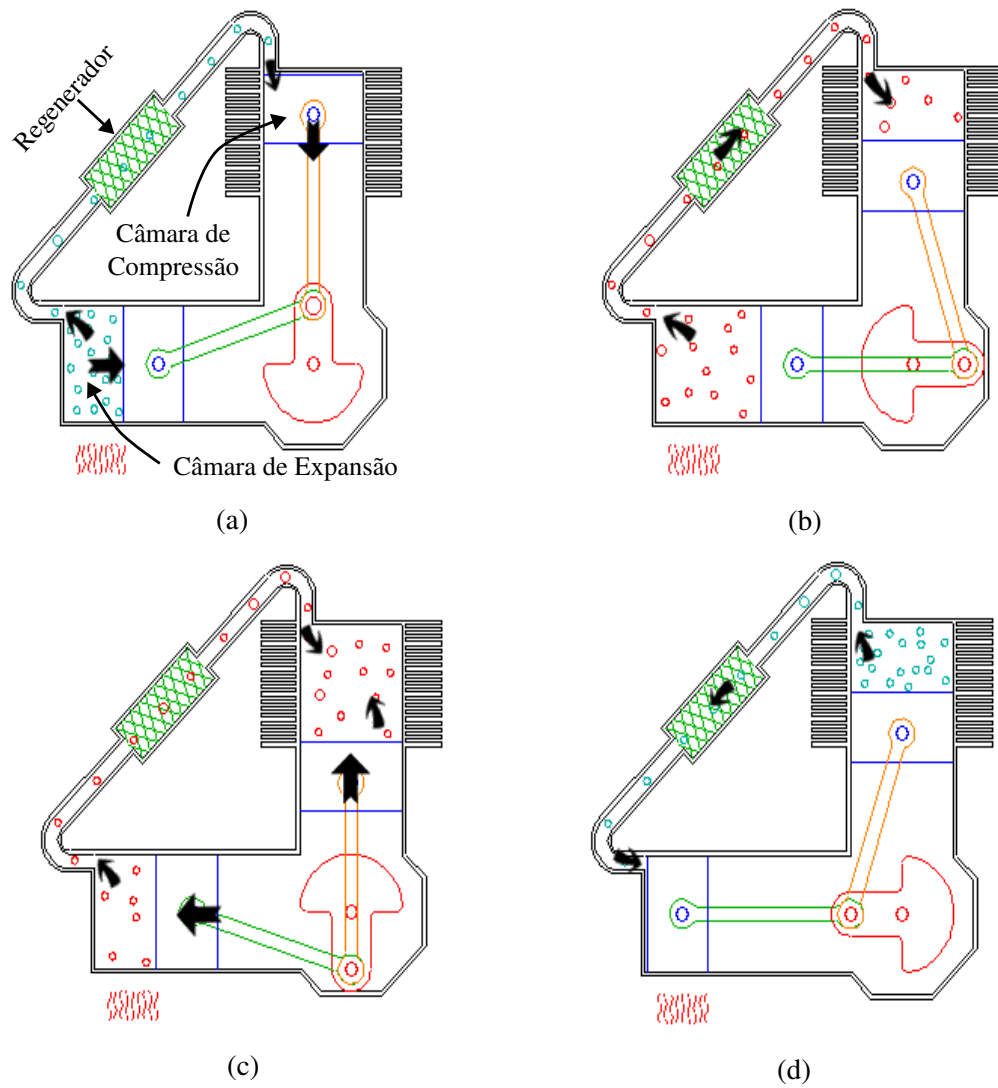


Figura 3 – Etapas da transferência de fluido e movimentação do mecanismo do motor Stirling tipo Alfa. Adaptado de: (NARAYAN; GUPTA, 2015)

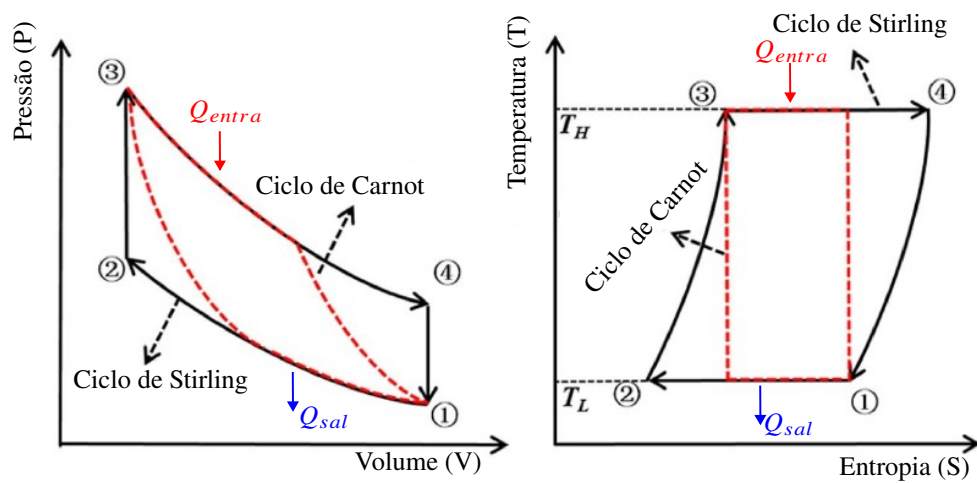


Figura 4 – Ciclo de Carnot versus Ciclo de Stirling. Adatado de: (ZHU *et al.*, 2021).

TS (temperatura-entropia), Figura 4, e descritos da seguinte forma:

Processo 1-2: Compressão Isotérmica - O fluido é comprimido à temperatura constante mínima, rejeitando calor para a fonte fria. (Figura 3 (c))

Processo 2-3: Regeneração Isovolumétrica - O fluido retorna ao cilindro quente, recebendo de volta a energia térmica armazenada no regenerador. (Figura 3 (d))

Processo 3-4: Expansão Isotérmica - O fluido recebe calor da fonte quente à temperatura constante máxima, realizando trabalho através da expansão no cilindro quente. (Figura 3 (a))

Processo 4-1: Regeneração Isovolumétrica - O fluido é transferido do cilindro quente para o frio através do regenerador, que armazena parte da energia térmica. (Figura 3 (b))

O ciclo distingue-se pela versatilidade de fontes térmicas e potencial de alta eficiência teórica equivalentes ao ciclo de Carnot, representando, assim, a máxima eficiência máxima possível do sistema. No entanto, na prática os motores reais não atingem tal desempenho devido a perdas mecânicas e termodinâmicas, gerando eficiências em torno dos 30% (AHMED *et al.*, 2020).

O ciclo termodinâmico do motor Stirling estabelece os fundamentos teóricos para o funcionamento destes motores. Embora o princípio de operação seja comum a todos os tipos motores Stirling, a implementação prática deste ciclo pode ser realizada através de diferentes arranjos construtivos e configurações mecânicas. Cada uma buscando otimizar o desempenho em um aspecto em específico. Para a compreensão das variações do motor Stirling, a próxima seção tratará e explicará estes detalhes.

2.5 CONFIGURAÇÕES DOS MOTORES STIRLING

As configurações dos motores Stirling apresentam uma diversidade de arranjos construtivos, cada um desenvolvido com características específicas e objetivos de desempenho próprios. Embora distintas em sua concepção mecânica, todas as configurações compartilham o mesmo princípio de funcionamento, como visto na Seção 2.4. As variações construtivas buscam otimizar o comportamento dinâmico e mecânico do sistema, com o objetivo de alcançar melhor desempenho, como o aumento da eficiência térmica, redução de volume morto, redução dos custos de fabricação e manutenção (ARSLAN; KOCAKULAK, 2023), além da minimização das perdas mecânicas.

A classificação dos motores Stirling baseia-se na compreensão de como é o comportamento de trabalho do sistema. Vale notar que, na literatura, não existe uma forma única ou padrão de classificação dos motores Stirling, sendo que cada autor possui um modo distinto, embora todos expressem a mesma ideia ao final.

A primeira ordem de classificação é dada conforme a movimentação dos componentes do motor. Basicamente, é dividida em motores dinâmicos e cinemáticos (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020). A classe cinemática consiste nos motores que possuem conexões mecânicas entre o virabrequim, o pistão de potência e o pistão de movimentação, sendo que esses elementos transmitem forças para o volante de inércia, que representa a saída de potência do motor

(ARSLAN; KOCAKULAK, 2023). Já a divisão dos motores dinâmicos refere-se aos motores que não possuem mecanismos de acionamento em sua estrutura (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020); em geral, a movimentação dos pistões ocorre devido às diferenças de pressão e, eventualmente, com o auxílio de algum componente mecânico, como molas.

2.5.1 Modelos Dinâmicos

Os modelos dinâmicos, como dito anteriormente, não apresentam mecanismos para a realização da movimentação do sistema. Dentre estes modelos, há três configurações principais: pistão livre, pistões líquidos (*Fluidyne engine*) (JUNIOR, 2015) e termoacústico.

Os motores de pistão livre são os que possuem maior relevância devido ao menor número de componentes e à maior eficiência em comparação com os demais tipos (YAO; WAHAB, 2020). Além disso, apresentam aplicações voltadas para a indústria aeroespacial (ALMAJRI; MAHMOUD; AL-DADAH, 2017). Este tipo de motor possui pistões de potência e de deslocamento, que não são conectados mecanicamente, operando de maneira independente, além de molas associadas a cada um dos pistões e áreas frias e quentes para a realização das transferências de calor (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020). Uma representação esquemática deste tipo de motor é mostrada em Figura 5.

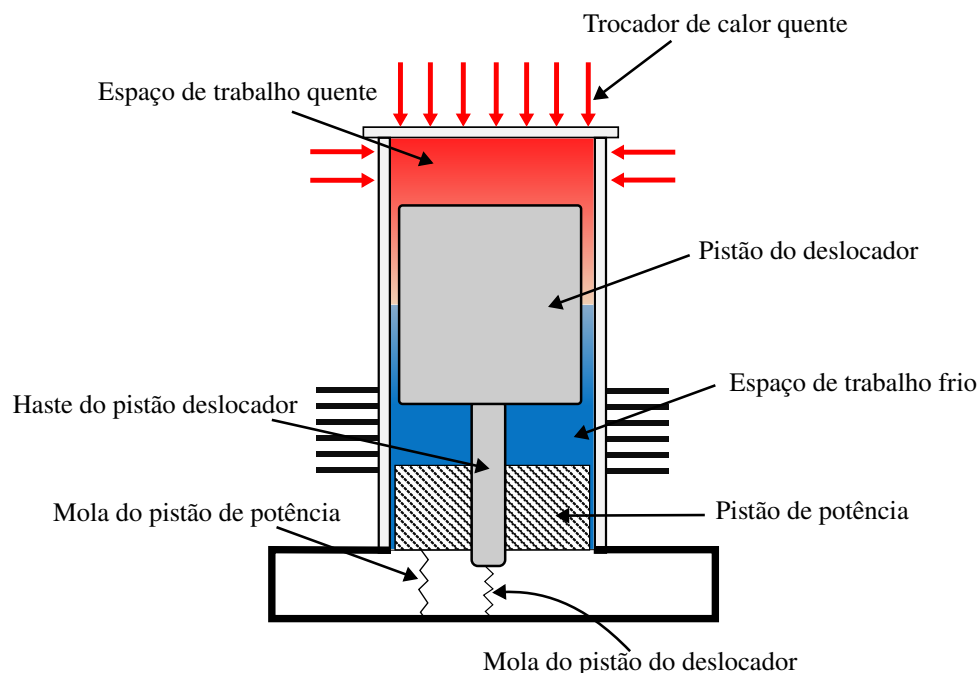


Figura 5 – Motor Stirling de pistão livre. Adatado de: (KRAMENS *et al.*, 2021).

A operação destes tipos de motor ocorre devido às diferenças relativas de pressão e ao movimento, que é determinado pelas suas características construtivas. A potência de saída é obtida por meio de um alternador linear (PEROZZIELLO; GROSU; VAGLIECO, 2021).

Ademais, existem os motores de pistões líquidos, que são uma variação dos modelos de pistão livre, onde as colunas de água atuam como os pistões sólidos (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020). Esses motores são usualmente empregados para o bombeamento de água. Eles

operam em regime próximo ao isotérmico (SLAVIN; BAKOS; FINNIKOV, 2009), em baixas temperaturas e frequências, apresentando simplicidade e robustez na sua construção. No entanto, seu principal ponto fraco é a baixa eficiência, geralmente abaixo de 5% (HACHEM *et al.*, 2018). Um desenho esquemático deste tipo de motores é mostrado em Figura 6.

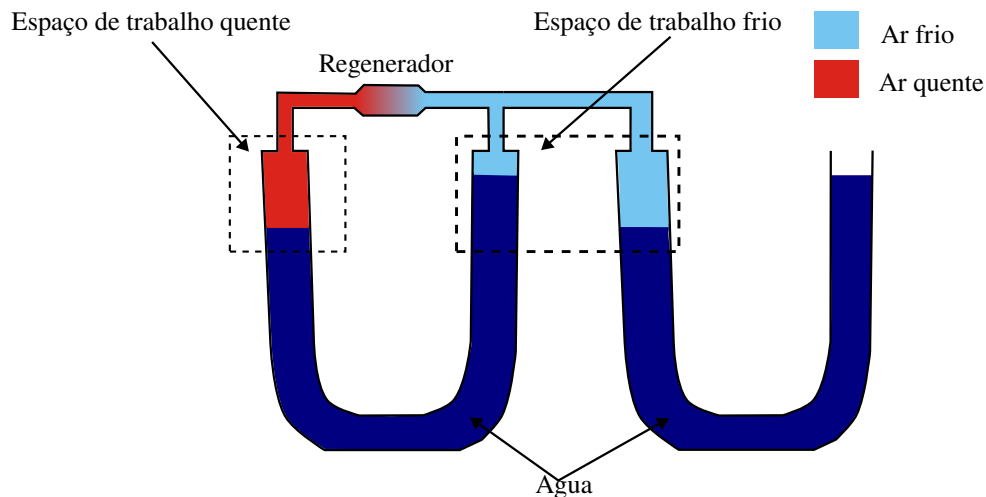


Figura 6 – Esquema Básico de um Motor de Pistão Líquido. Adaptado de: (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020).

Além disso, têm-se os motores Stirling termoacústicos, que são baseados nos motores de pistão livre, porém com uma estrutura completamente nova e mais avançada. Esses motores utilizam as ondas sonoras como elemento responsável pela função de pistão deslocador (*displacer*), mesmo que fisicamente tal pistão não exista, para gerar potência mecânica.

Outro ponto favorável desta classe é a eliminação dos problemas de atrito, uma vez que não há pistões sólidos em sua construção. A Figura 7 mostra um modelo do motor Stirling termoacústico e suas principais partes.

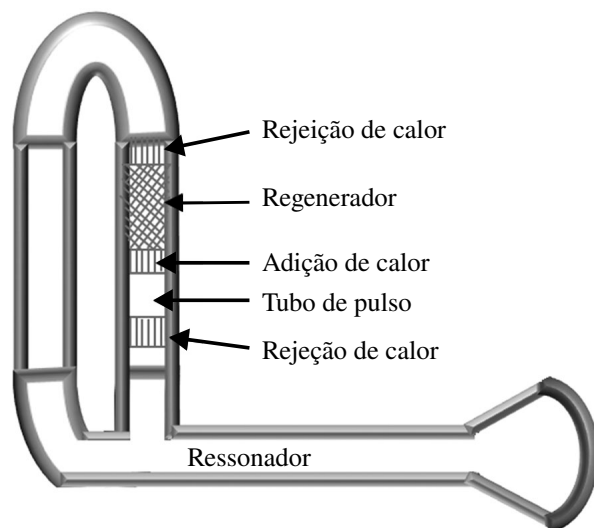


Figura 7 – Esquema Básico de um Motor Stirling Termoacústico. Adaptado de: (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020).

Vale destacar ainda que este é o modelo de motor Stirling inventado mais recentemente, no ano 2000, por Backhaus e Swift (ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH, 2020; ZARE; TAVAKOLPOUR-SALEH *et al.*, 2023).

2.5.2 Modelos Cinemáticos

Os modelos cinemáticos podem ser considerados os pioneiros dos motores Stirling, uma vez que foi a partir do modelo cinemático do tipo beta que Robert Stirling propagou ao mundo esta classe de motor, como é possível verificar em sua patente, número 4081 de 1816 (ARSLAN; KOCAKULAK, 2023; FINKELSTEIN; ORGAN, 2001). Esses modelos trabalham com partes móveis (pistões, elos e virabrequim) que são conectadas por mecanismos, o que limita os movimentos, mas permite que as forças sejam transmitidas ao volante de inércia, gerando, assim, o trabalho de saída do motor.

Os modelos desta classe são estudados e desenvolvidos até os dias atuais devido à sua similaridade com os motores de combustão interna. Dessa forma, engenheiros e projetistas utilizam-se dessa familiaridade para integração de conhecimentos aplicados aos motores Stirling.

Além disso, os estudos continuam em desenvolvimento para esses modelos devido a alguns fatores mecânicos, tais como:

- Melhora da transmissão de potência entre as partes móveis;
- Aumento da potência do motor;
- Redução do atrito devido às forças laterais ocasionadas pela cinemática do movimento;
- Redução e melhor compreensão dos vazamentos de fluido entre os cilindros e o bloco do motor.

2.5.2.1 Classificação quanto ao arranjo do motor

A busca pelo aprimoramento dos motores Stirling fez com que diferentes arranjos de cilindros fossem idealizados. Assim, os modelos cinemáticos são classificados em três classes principais: *Alfa* (α), *Beta* (β) e *Gama* (γ).

A configuração do tipo *Alfa* possui dois pistões em cilindros separados, sendo um para a câmara de expansão (quente) e outro para a câmara de compressão (fria). As bielas dos dois cilindros são conectadas ao mesmo virabrequim. As câmaras, em geral, são posicionadas em uma angulação de 90 graus e interligadas pelo regenerador. Conceitualmente, esta configuração é considerada a mais simples do ponto de vista construtivo dentre os motores Stirling (EGAS; CLUCAS, 2018; THOMBARE; VERMA, 2008; ALMAJRI; MAHMOUD; AL-DADAH, 2017).

O arranjo do tipo *Beta* tem como principal característica a utilização de um único cilindro, no qual estão acomodados o pistão de potência, responsável pela expansão, e o pistão de deslocamento, responsável pela compressão. Ambos os pistões podem ou não entrar em contato,

porém são conectados ao eixo de comando por diferentes mecanismos, a fim de manter o ângulo de fase requerido pelo projeto (THOMBARE; VERMA, 2008).

Por fim, há a configuração *Gama*, cuja disposição é semelhante à configuração *Beta*, porém os pistões estão posicionados em cilindros separados. A câmara de compressão é dividida em dois cilindros interconectados por tubos, além de também possuir o regenerador (THOMBARE; VERMA, 2008).

Dentre as configurações existentes, há vantagens e desvantagens específicas para cada uma delas. De forma resumida e para melhor comparação, a Tabela 1 apresenta os principais pontos relevantes de cada configuração e a Figura 8 apresenta o desenho esquemático de cada uma delas.

Tabela 1 – Comparação entre as configurações dos motores Stirling Alfa, Beta e Gama. Adaptado de: (ARSLAN; KOCAKULAK, 2023; YAO; WAHAB, 2020)

Configuração	Vantagens	Desvantagens
Alfa	- Alta potência. - Alto diferencial de temperatura. - Alta eficiência. - Estrutura de mecanismos simplificada. - Estrutura compacta e alta potência específica.	- Ambos os cilindros devem possuir vedação. - Em motores de grande volume, há um problema relativo à sua massa. - Alto custo de fabricação.
Beta	- Configuração com a estrutura mais compacta. - Sistema com baixa massa. - Baixo volume morto. - Vedação não é crucial.	- Complexidade da estrutura mecânica. - Complexidade no projeto e na produção do motor. - Alto custo de fabricação.
Gama	- Melhor configuração de cilindro para vedação. - Estrutura do mecanismo simplificada. Não demanda grande esforço para projeto e produção. - Baixo diferencial de temperatura. - Baixo custo de fabricação.	- Baixa potência de saída. - Alto volume morto, o que reduz eficiência e potência de saída. - Baixa taxa de compressão.

2.5.2.2 Classificação quanto ao mecanismos dos motores

Como os motores Stirling possuem uma ampla variedade de mecanismos que podem ser utilizados em alguns dos arranjos de cilindros citados anteriormente, também se faz a classificação relativa ao modelo de mecanismo empregado. Cada tipo de mecanismo se adequa melhor a determinado arranjo de motor, sendo este um fator considerado no momento do projeto para a obtenção de maior potência de saída (EROL; YAMAN; DOĞAN, 2017). Com isso, serão listados alguns dos mecanismos mais utilizados.

O mecanismo manivela-balancim (*crank-rocker*) foi utilizado por Robert Stirling em seu invento original, conforme consta em sua patente. Este mecanismo utiliza o pistão de potência,

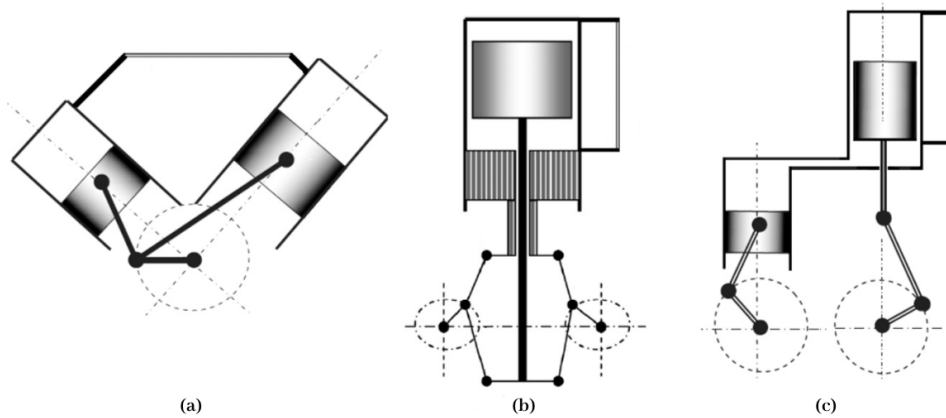


Figura 8 – Configurações dos motores Stirling: (a) Alfa, (b) Beta e (c) Gama

o virabrequim e um braço oscilante para a regulação do movimento. Normalmente, é aplicado em motores de pequeno porte e cilindro único, devido à recomendação de operação em baixas pressões próximas à atmosférica. Uma vez que ocorra o aumento da pressão de operação, a potência de saída tende a decair. O principal ponto fraco deste mecanismo é o alto atrito, que reduz a eficiência e a potência gerada (EROL; YAMAN; DOĞAN, 2017). O motor que usa o mecanismo de Watt, Figura 9, é um exemplo desse tipo de motor.

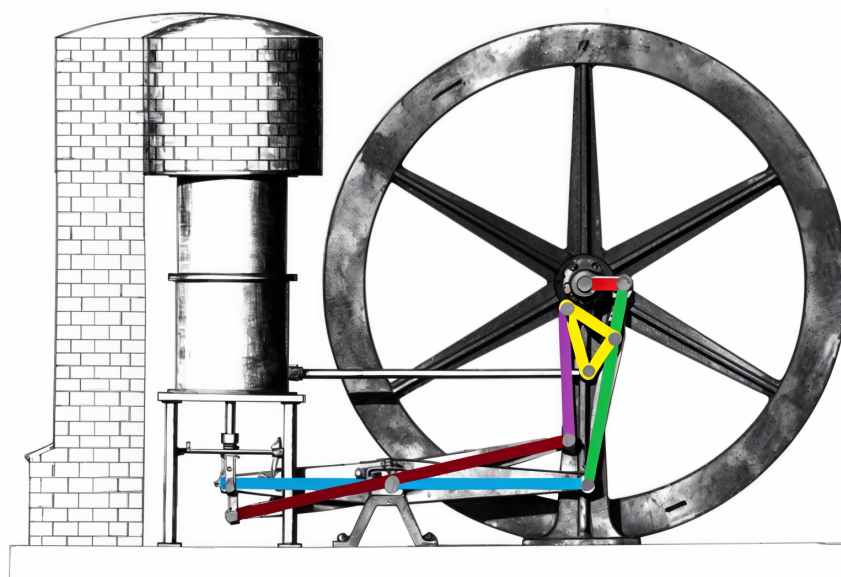


Figura 9 – Mecanismo de Watt

O mecanismo biela-manivela (*slider-crank*) é amplamente utilizado desde a invenção dos motores de combustão interna, devido à sua confiabilidade, segurança e facilidade de manufatura. Seu principal ponto fraco é a dificuldade de alcançar o balanceamento de forma eficiente. Por esse motivo, é indicado para motores simples de dois cilindros (EROL; YAMAN; DOĞAN, 2017; THOMBARE; VERMA, 2008).

O mecanismo rômico (*rhombic mechanism*) foi desenvolvido em 1953 pela Phillips Company e é um dos modelos mais conhecidos e amplamente utilizados em motores Stirling de um único cilindro (Figura 10). Este mecanismo costuma ser empregado em projetos que visam

a redução do tamanho dos motores, sendo uma grande evolução para motores de alta potência, principalmente pela separação entre o cilindro e o mecanismo. Dessa forma, o bloco do motor não é submetido a grandes pressões internas. A principal vantagem deste mecanismo é o seu balanceamento, inclusive para arranjos de cilindro único, uma vez que as bielas são conectadas a duas engrenagens sincronizadas que giram em sentidos opostos, juntamente com um virabrequim giratório balanceado. Devido a esta configuração, as forças laterais entre o pistão e o cilindro são minimizadas, resultando em uma redução nas perdas mecânicas. No entanto, suas desvantagens decorrem da complexidade construtiva e do grande número de peças móveis (EROL; YAMAN; DOĞAN, 2017; THOMBARE; VERMA, 2008).

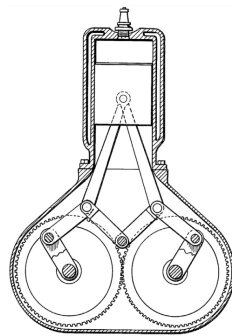


Figura 10 – Mecanismo Rômbico

O mecanismo *Ross yoke* foi criado e patenteado em 1979 por Andy Ross (Figura 11). Seu principal propósito é a redução de tamanho e massa sem comprometer a eficiência mecânica, sendo especialmente aplicado em motores Stirling de simples atuação com cilindros em paralelo. Basicamente, este mecanismo conecta dois pistões ao virabrequim através de um sistema triangular. Esta configuração resulta em baixas forças laterais atuantes nos pistões, o que proporciona baixo atrito e, conseqüentemente, maior vida útil. Outros fatores relevantes incluem a baixa incidência de problemas de lubrificação, vibração e ruído.

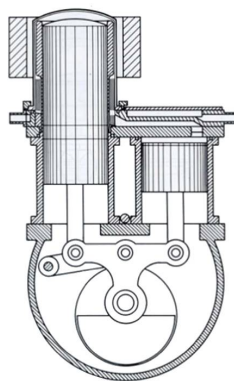


Figura 11 – Mecanismo Ross Yoke

O mecanismo *Scotch yoke* tem como principal vantagem o balanceamento do sistema por meio de movimentos harmônicos simples (Figura 12). Apresenta benefícios em comparação ao mecanismo Rômbico devido à sua construção simplificada e à menor necessidade de rolamentos.

O movimento linear dos pistões é transformado em movimento rotativo por meio de grandes oblongos (*long holes*) localizados no final da biela e nos cames do virabrequim. No entanto, devido a esta configuração, elevadas cargas são aplicadas ao mecanismo, o que resulta em atritos significativos. A vantagem, por outro lado, é a redução das forças laterais sobre os pistões (KITAZAKI; YUZAKI; AKAZAWA, 2017; EROL; YAMAN; DOĞAN, 2017).

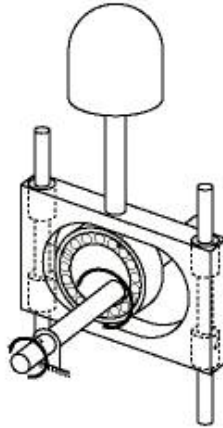


Figura 12 – Mecanismo Scotch Yoke

O mecanismo *swash plate* é montado diretamente no eixo de transmissão de potência do motor. Sua geometria é cônica, diferindo dos demais mecanismos planos (Figura 13). É comumente aplicado em compressores e se destaca por ser adequado a motores com espaço reduzido, permitindo a utilização de um maior número de pistões devido ao seu balanceamento. Por este motivo, recomenda-se o uso de, no mínimo, três pistões. Além disso, este mecanismo proporciona baixo ruído, reduzidos problemas de vibração e alta confiabilidade. Em contrapartida, suas desvantagens estão relacionadas a problemas de vedação e à complexidade de manufatura (EROL; YAMAN; DOĞAN, 2017; THOMBARE; VERMA, 2008).

Após obter o conhecimento das diferentes configurações e arranjos do motor Stirling, torna-se necessário compreender um método que possibilite a realização de uma análise aprofundada, mais especificamente, voltada às análises estática e cinemática do mecanismo do motor Stirling tipo Alfa durante um ciclo de operação. Nesse contexto, o método de Davies apresenta-se como uma ferramenta que oferece uma abordagem sistemática, permitindo uma análise direcionada à compreensão do comportamento mecânico dos motores Stirling. A fim de aprofundar o entendimento sobre esse método, a próxima seção detalhará seu conceito e sua sistemática.

2.6 MÉTODO DE DAVIES

O Método de Davies constitui uma metodologia sistemática baseada na abordagem de redes mecânicas (*mechanical network approach*) para análise cinemática e estática de mecanismos. Esta metodologia integra a teoria de grafos com a teoria de helicoides, proporcionando

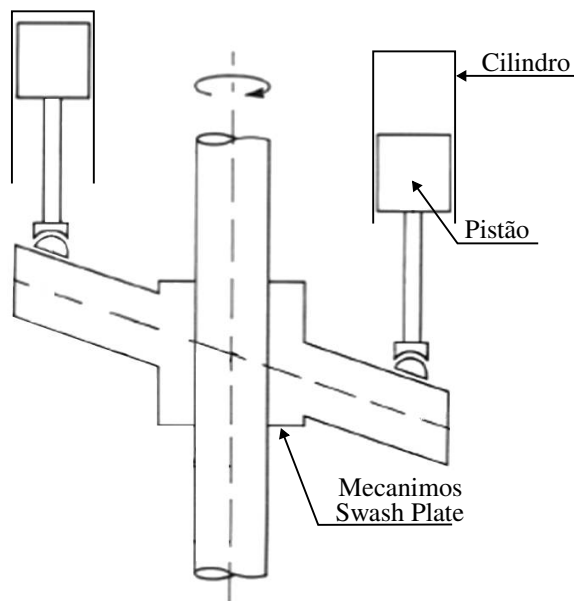


Figura 13 – Mecanismo Swash Plate

uma aproximação estruturada que permite a análise desacoplada da cinemática e da estática de sistemas mecânicos.

Davies (1981) desenvolveu um equivalente das leis de tensão e corrente de Kirchhoff para uma rede de elos e acoplamentos, baseado nas teorias de grafos e helicoides. O LAR (Laboratório de Robótica Aplicada Raul Guenter) da UFSC desenvolveu e aprimorou o método de Davies baseado no trabalho original de Davies (1981), nomeando o método em sua homenagem.

A principal contribuição deste método reside em sua capacidade de determinar restrições redundantes e analisar a mobilidade de mecanismos complexos mediante a adaptação das leis de Kirchhoff a sistemas multicorpos. O método exclui efeitos dinâmicos como forças gravitacionais, acelerações e inércia, concentrando-se exclusivamente na cinemática instantânea e na análise estática (CAZANGI *et al.*, 2008).

Trabalhos significativos que introduziram o método de Davies e suas aplicações são detalhados em Cazangi *et al.* (2008), Carboni *et al.* (2015), Souza (2023), Cuta *et al.* (2024) e outros estudos desenvolvidos no Laboratório de Robótica da UFSC. A aplicação deste método ao estudo de motores Stirling representa uma abordagem inovadora para compreender as perdas mecânicas associadas ao mecanismo destes motores.

2.6.1 Adaptação das Leis de Kirchhoff

Na adaptação proposta por Davies (1981), um sistema multicorpos é representado por um grafo onde os nós representam os elos e as arestas representam os acoplamentos. As variáveis de aresta modelam os movimentos permitidos pelos acoplamentos e as ações transmitidas através destes acoplamentos. Esta representação estabelece uma analogia com circuitos elétricos: as variáveis que modelam as ações são análogas às correntes elétricas, enquanto as variáveis que modelam os movimentos são análogas às tensões elétricas. Esta analogia permite aplicar as leis

de Kirchhoff ao domínio mecânico.

A rede de acoplamento (coupling network) com n elos e g juntas é representada mediante um grafo de acoplamento G_C , onde cada elo corresponde a um nó e cada acoplamento direto entre elos corresponde a uma aresta. Do grafo G_C obtém-se o grafo de movimento G_M , onde uma aresta de G_C que representa um acoplamento direto i com liberdade f_i é substituída em G_M por f_i arestas paralelas.

2.6.2 Teoria de Helicoides

Um helicóide $\$$ é um elemento geométrico que representa grandezas mecânicas. O helicóide é definido por uma linha reta e um passo associado h , que possui unidade de comprimento.

Um helicóide de movimento $\$_m$ é denominado heligiro e é composto por dois vetores: um vetor de velocidade angular $\{r, s, t\}^T$ e um vetor de velocidade linear $\{u, v, w\}^T$ de um ponto do elo instantaneamente coincidente com a origem do sistema de referência. O heligiro é representado como: $\$_m = \{r, s, t; u, v, w\}^T$.

Um helicóide de ação $\$_a$ é denominado heliforça e consiste em dois vetores: um vetor de força $\{U, V, W\}^T$ e um vetor de momento $\{R, S, T\}^T$ na origem. A heliforça é representada como: $\$_a = \{R, S, T; U, V, W\}^T$.

A Tabela 2 apresenta a notação de Davies para os elementos dos heligiros e as heliforças:

Tabela 2 – Interpretação física dos componentes de helicoides. Adaptado de: (SOUZA, 2023)

Heligiros			Heliforças		
Símbolo	Descrição		Símbolo	Descrição	
r	ω_x	(rad/s)	R	T_x	(N.m)
s	ω_y	(rad/s)	S	T_y	(N.m)
t	ω_z	(rad/s)	T	T_z	(N.m)
u	τ_x	(m/s)	U	F_x	(N)
v	τ_y	(m/s)	V	F_y	(N)
w	τ_z	(m/s)	W	F_z	(N)

Um helicóide pode ser expresso pelo produto entre uma magnitude ψ e um helicóide normalizado $\hat{\$}$:

$$\$ = \hat{\$}\psi = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S}_0 \times \vec{S} + h\vec{S} \end{pmatrix} \psi \quad (1)$$

onde $\vec{S}$ representa o vetor de direção dos helicoides dos pares cinemáticos, $\vec{S}_0$ é o vetor de posição dos helicoides dos pares cinemáticos, tomado da origem O até um ponto que passa pelo eixo do helicóide. Casos especiais incluem velocidade angular pura e força pura ($h = 0$), e velocidade linear pura e torque puro ($h = \infty$).

2.6.3 Análise Cinemática

A análise cinemática utiliza a matriz de movimento unitário $[\hat{M}_D]_{\lambda \times F}$, obtida dispendo lado a lado os heligiros normalizados de todos os acoplamentos. As relações entre os movimentos permitidos pelos acoplamentos pertencentes ao mesmo circuito são estabelecidas usando uma analogia com a Lei de Tensão de Kirchhoff: a soma algébrica dos heligiros ao redor de qualquer circuito é zero. Esta condição pode ser expressa pelo sistema linear homogêneo da Equação (2).

$$[\hat{M}_N]_{\lambda \times F} [\vec{\psi}]_{F \times 1} = [\vec{0}]_{\lambda \times 1} \quad (2)$$

onde $[\hat{M}_N]_{\lambda \times F}$ é a matriz de movimentos unitários em rede e ψ é o vetor que contém as magnitudes de movimento generalizadas (velocidade angular ou de translação), dadas pela Equação (3), onde F vem a ser os graus de liberdade de cada um dos pares cinemáticos.

$$[\vec{\psi}]_{F \times 1} = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}_{F \times 1} \quad (3)$$

A matriz $[\hat{M}_N]_{\lambda \times F}$ é obtida por meio da multiplicação de $[\hat{M}_D]_{\lambda \times F}$ por uma matriz diagonal composta por uma linha da matriz de circuito, portanto, pode ser escrita como:

$$[\hat{M}_N]_{\lambda \times F} = \begin{bmatrix} [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} [B_1]_{F \times F} \\ [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} [B_2]_{F \times F} \\ \vdots \\ [\hat{M}_D]_{\lambda \times F} [B_F]_{F \times F} \end{bmatrix}_{\lambda \times F} \quad (4)$$

onde $[B_i]_{F \times F}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, F$ são matrizes diagonais com elementos diagonais correspondentes à linha i da matriz de circuito $[B_M]$, gerada a partir do grafo de movimento G_M .

2.6.4 Análise Estática

A análise estática segue um procedimento análogo, baseando-se na matriz de ações unitárias $[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$, construída dispendo lado a lado as heliforças normalizadas. As relações entre as ações transmitidas pelos acoplamentos que atravessam o mesmo conjunto de corte são estabelecidas usando uma analogia com a Lei de Corrente de Kirchhoff: a soma algébrica das heliforças entrando e saindo de um conjunto de corte deve ser zero. Esta condição pode ser expressa pelo sistema linear homogêneo mostrado na Equação (5)

$$[\hat{A}_N]_{\lambda \cdot k \times F} [\vec{\Psi}]_{C \times 1} = [\vec{0}]_{\lambda \cdot k \times 1} \quad (5)$$

onde $\begin{bmatrix} \vec{\Psi} \end{bmatrix}_{C \times 1}$ contém as magnitudes das heliforças e $[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$ é a matriz de ações unitárias em rede. $[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C}$ é obtida por multiplicação de $[\hat{A}_D]_{\lambda \times C}$ pela matriz diagonal composta pelas linhas da matriz de cortes:

$$[\hat{A}_N]_{\lambda k \times C} = \begin{bmatrix} [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} [Q_A]_{1k \times C} \\ [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} [Q_A]_{2k \times C} \\ \vdots \\ [\hat{A}_D]_{\lambda \times C} [Q_A]_{Ck \times C} \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde $[Q_A]_i$ com $i = 1, 2, 3, \dots, C$ são matrizes diagonais com elementos diagonais correspondentes à linha i da matriz de cortes Q_A , gerada a partir do grafo de ações G_A .

As ações de circuito fornecem informação sobre as ações de acoplamento. Uma ação de circuito não pode expandir potência em nenhum dos movimentos que os acoplamentos do circuito permitem quando não estão restringidos pelo fechamento do circuito.

Desta maneira, tem-se sucintamente apresentada a aplicação do Método de Davies, que fornece uma base sólida para a compreensão do comportamento cinemático e estático de mecanismos. Contudo, para uma avaliação precisa do desempenho de motores Stirling, é necessário incorporar os modelos matemáticos que descrevem as perdas no sistema. Assim, a seção a seguir apresentará os modelos de perdas por vazamento e atrito que serão analisados no presente trabalho.

2.7 MODELOS MATEMÁTICOS DE PERDAS

A aplicação do Método de Davies ao estudo de motores Stirling fornece uma base sólida para compreensão do comportamento do mecanismo, mas para uma avaliação aprofundada é fundamental compreender e incorporar ao modelo os principais aspectos que geram perdas ao sistema, a fim de que, futuramente, possam ser minimizados. Diversos aspectos podem ser levados em conta. Hachem *et al.* (2018) cita cerca de vinte parâmetros que podem ser otimizados em diferentes partes da conceituação do projeto do motor. Dentre eles, o atrito e o vazamento do fluido de trabalho, sendo as perdas ocasionadas pelo vazamento do fluido de trabalho como um fator significativo na redução da potência útil. Já Stolyarov e Stolyarov (2017) em seu balanço de energia de um motor Stirling, apontam que as perdas por atrito relacionadas ao mecanismo e a outros componentes mecânicos do motor podem representar até 3,93% de perda da potência do motor.

Desta maneira, e com o intuito de aprimorar o estudo do motor Stirling junto ao método de Davies, será exposto neste capítulo os modelos matemáticos advindos dessas perdas, podendo ser agregados aos equacionamentos governantes do mecanismo no motor.

Embora os motores Stirling apresentem potencial teórico de alta eficiência equivalente ao ciclo de Carnot, quando analisados mais minuciosamente ou mesmo em motores reais, nota-se uma significativa queda de desempenho. Isto é afetado pelos mais diversos tipos de perdas,

que reduzem a eficiência global do sistema. Esta diferença existente entre a eficiência teórica ideal e o desempenho real dos motores Stirling constitui o principal desafio no desenvolvimento desta tecnologia, fazendo com que a compreensão dos mecanismos de perdas seja essencial para buscar otimizações de projetos.

As perdas em motores Stirling são resultado de uma combinação de fenômenos físicos que ocorrem de forma simultânea durante a operação de um motor. Elas podem ser categorizadas em: perdas térmicas, de queda de pressão, mecânicas, de vazamento e dinâmicas, sendo que cada uma contribui de forma distinta para a redução da eficiência global do sistema (FINKELSTEIN; ORGAN, 2001; ARSLAN; KOCAKULAK, 2023).

Iniciando-se pelas perdas térmicas, que constituem uma das principais fontes de ineficiência dos motores e resultam de imperfeições nos processos de transferência de calor. Estas ocorrem, principalmente, pela transferência e recuperação incompleta de energia do fluido de trabalho, que geram diferenças de temperatura indesejadas no motor. Além disso, perdas por condução e radiação de calor e perdas no regenerador são outras fontes indesejadas de perdas.

Outra perda que possui contribuição significativa nas perdas dos motores Stirling, especialmente do tipo Alfa, é relativa à queda de pressão que ocorre devido à resistência do fluido de trabalho ao passar pelos trocadores de calor, bem como no regenerador. Este último é identificado como o principal responsável por este tipo de perda, devido grande área de troca de calor. Essa característica indesejada reduz o trabalho líquido do ciclo, uma vez que é necessária certa energia adicional para transpor a resistência imposta pelos componentes do sistema.

As perdas dinâmicas e efeitos de compressibilidade do fluido também fazem parte de uma parcela contribuinte para a perda de eficiência. Elas incluem efeitos transientes durante as mudanças do regime operacional, resposta não ideal do sistema de controle e questões relativas à compressibilidade do fluido em regiões de alta variação de pressão, como os volumes mortos superiores dos cilindros de compressão e expansão. Além dessas perdas, há ainda perda por atrito das partes móveis e vazamento do fluido por folgas inevitáveis existentes entre componentes móveis, sendo que serão tratadas mais detalhadamente nas seções subsequentes.

É importante reconhecer os diversos tipos de perdas existentes em um motor Stirling, mas é fundamental observar que nenhuma delas atua de forma independente e que possuem interações complexas que podem atenuar ou amplificar efeitos individuais. Para isto, seriam necessárias análises integradas que requerem modelos sofisticados para o acoplamento de todos estes fenômenos. Além do mais, o propósito desta dissertação será dar ênfase à análise de perdas mecânicas por atrito e das perdas por vazamento, visto que estas estão diretamente relacionadas ao comportamento do mecanismo do motor Stirling e constituem o foco principal de estudo.

2.7.1 Modelo de Vazamento

Em grande parte dos estudos sobre motores Stirling a vazão dos fluidos são consideradas ideais, porém em motores reais vazamentos são inevitáveis (KROPIWNICKI, 2019). Diferentemente de um modelo ideal, onde assume-se uma vedação perfeita entre os componentes móveis,

os problemas de perdas por vazamento são atribuídos a três causas principais, que são: a rugosidade da superfície da parede do cilindro, que não é completamente lisa; a contínua oscilação do pistão que causa atrito; e a folga existente entre os pistões e as paredes dos cilindros (AHMED *et al.*, 2020). Isto tudo reduz a pressão efetiva sob os pistões, acarretando menores indicadores de potência de saída.

As perdas por vazamento resultam do escape do fluido de trabalho através das folgas inevitáveis existentes entre componentes móveis, particularmente nas interfaces pistão-cilindro e nas vedações dinâmicas. Estas perdas não apenas reduzem a quantidade de fluido de trabalho disponível para o ciclo termodinâmico, mas também afetam a manutenção das diferenças de pressão necessárias para o funcionamento adequado do motor.

Os vazamentos, em geral, ocorrem devido a diferença de pressão entre as câmaras de trabalhos e outras áreas do motor, como regenerador e bloco, em especial na configuração alpha de um motor Stirling (BORETTI, 2021a). Pesquisas realizadas indicam que o vazamento do gás tem um efeito significativo no desempenho do motor, sendo influenciado diretamente por uma série de fatores como pressões instantâneas das câmaras (p), pressão no bloco do motor (p_m), viscosidade (ζ), folgas radiais entre pistão e cilindro (h_c), diâmetro (D) e comprimento do cilindro (L) (PRIETO; STEFANOVSKIY, 2003) (GRINNELL, 1956). Isto pode ser expresso como na Equação (7).

$$\dot{v}_{\text{leak}} = f(p, p_m, \zeta, h_c, D, L) \quad (7)$$

Dado o impacto do vazamento do fluido de trabalho na eficiência do motor Stirling, torna-se essencial modelar matematicamente essa perda para compreender sua influência na potência gerada. Considerando os estudos citados, assume-se um modelo baseado no desempenho do gás ideal local, avaliando a variação instantânea da pressão ao longo de pequenos intervalos da manivela do mecanismo de quatro barras que aciona os pistões. Esse modelo permite estimar a queda de pressão devido a folga entre pistão e cilindro. A formulação adotada segue a abordagem descrita por Pietro (2003), sendo expressa pela Equação (8), que será discutida a seguir.

$$\Delta p_{\text{leak}} = \frac{p}{v} \dot{v}_{\text{leak}} \frac{\Delta \theta}{2\pi n_s} \quad (8)$$

A variação de perda de pressão (Δp_{leak}) é determinada pela equação considerando a pressão (p) e o volume instantâneo (v) da câmara em análise, juntamente com a rotação do motor (n_s) e a variação do ângulo ($\Delta \theta$) da manivela do mecanismo. Além disso, a vazão de perda ($\dot{v}_{\text{leak}}$), Equação (9), é influenciada pela folga existente entre o pistão e o cilindro.

$$\dot{v}_{\text{leak}} = \frac{(p^2 - p_m^2)\pi D h_c^3}{24p\zeta L} \quad (9)$$

A vazão de perda está relacionada às pressões instantâneas (p) e à pressão do bloco do motor (p_m), ao diâmetro (D) e comprimento do cilindro (L), ao espaçamento (folga) entre os pistões e as paredes dos cilindros (h_c) e à viscosidade do gás (ζ) utilizado no sistema.

Assim, a modelagem do vazamento do fluido de trabalho se mostra uma importante ferramenta para uma avaliação do desempenho do motor Stirling. A consideração permite quantificar a perda de potência associada, bem como auxiliar no aprimoramento dos parâmetros do projeto do motor e possíveis falhas que venham ser acarretadas

O controle das perdas por vazamento é particularmente desafiador em motores Stirling devido às elevadas pressões operacionais e às grandes diferenças de pressão que podem existir entre diferentes regiões do motor durante o ciclo. A seleção adequada de materiais de vedação e o projeto otimizado das folgas são aspectos críticos para a minimização destas perdas.

2.7.2 Modelo de Atrito

Quando se trata de corpos em movimento, normalmente, o atrito está envolvido. Não sendo diferente, os mecanismos de motores possuem atuação do atrito e deve ser contabilizado para ter o comportamento mais próximo possível da dinâmica do movimento em situação real. Deste modo, esta seção visa esclarecer e descrever o modo de atuação e cálculo do atrito no presente trabalho.

As perdas mecânicas estão diretamente relacionadas ao movimento das partes móveis do motor e incluem perdas por atrito nos rolamentos, vedações e superfícies de contato, bem como perdas associadas ao peso e inércia dos componentes móveis. Estas perdas são particularmente relevantes em motores Stirling devido à presença de múltiplos mecanismos biela-manivela e sistemas de vedação complexos necessários para manter a estanqueidade do sistema.

Em sua definição, a força de atrito (Figura 14) é compreendida como sendo uma resistência ao movimento relativo entre duas partes em contato, em geral, é advinda da interação ou contato entre duas superfícies. Esta resistência sempre opõe-se ao movimento, gerando uma força a ser vencida pelo sistema a fim de que entre em movimento (BATSCHAUER *et al.*, 2018) (HUTCHINGS; SHIPWAY, 2017).

O estudo do atrito começou com Leonardo da Vinci e posteriormente por Amontons (1699), que vieram a estabelecer as leis empíricas fundamentais do atrito (STACHOWIAK; BATCHELOR, 2025), que são:

1. A força de atrito é proporcional à força normal.
2. A força de atrito é independente da área aparente de contato.
3. A força de atrito é independente da velocidade de deslizamento.

A partir deste princípio, Coulumb veio a propor o modelo clássico da força de atrito (F_a) por meio da Equação (10).

$$F_a = \mu_D \cdot F_n \quad (10)$$

onde μ é um coeficiente de atrito adimensional e F_n é a força normal do elemento em contato.

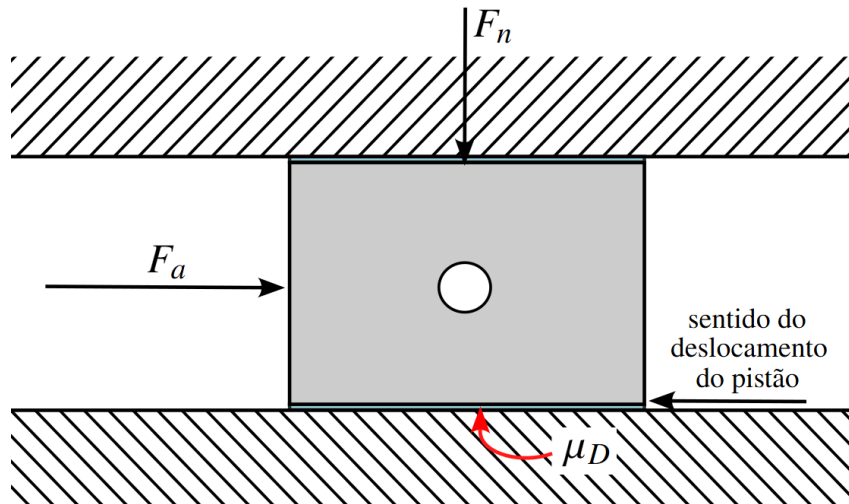


Figura 14 – Esquemático da Força de Atrito

Esta formulação proposta por Coulumb vem fazer parte de um dos conceitos de atrito, no caso, o atrito seco. Conceitualmente, advém da interação entre duas superfícies, que possuem suas características de rugosidade e deformações, mas devido a sua complexidade, normalmente, são tratadas de modo simplificado, vide a proposição de Coulomb, que é aceita até os dias presentes. Como Stachowiak e Batchelor (2025) destacam, nenhum modelo de atrito seco possui validade universal, já que este fenômeno é complexo e possui dependência de diversos fatores.

Além do atrito seco, há ainda o atrito viscoso que possui o mesmo princípio de interação entre duas superfícies, porém separadas por uma camada, mesmo que mínima, de lubrificante, o que vem a eliminar o contato direto entre elas. Isto gera uma força oposta ao movimento relativo das superfícies, sendo resultante da viscosidade do fluido, que é a medida do atrito interno entre as camadas adjacentes do lubrificante (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000).

Independente da forma de atrito a ser trabalhado, ele implica na dissipação de energia, impactando diretamente da eficiência mecânica de um sistema, bem como a fricção inevitável entre os componentes, causando desgastes das partes (BATSCHAUER *et al.*, 2018; NASCIMENTO, 2017).

Contudo, é possível realizar análise mecânica do atrito por meios matemáticos. Na forma tradicional pode-se elaborar o diagrama de corpo livre de um mecanismo biela-manivela e seus componentes (Figura 14) e aplicar o equilíbrio de forças, bem como o equacionamento analítico do sistema, como apresentado por Batschauer *et al.* (2018).

Além deste método, Laus (2011) e Laus, Simas e Martins (2012) forneceu uma abordagem utilizando o Método de Davies na parte estática para diversos modelos de atrito, inclusive atrito viscoso por meio de formulações lineares, quadráticas e cúbicas. Para o presente trabalho, é válido apresentar o modelo de Coulomb (Equação (11)) que prioriza a simplificação da análise e sua aplicabilidade junto ao método matricial proposto pelo Método de Davies.

$$U_{D_D} = -\mu_D \text{sign}(V_D) V_D \text{sign}(u_D) \quad (11)$$

onde V_D é a magnitude da força vertical transmitida pelo acoplamento (força normal), μ_D é o

coeficiente adimensional de atrito, u_D é a magnitude da velocidade translacional do acoplamento (velocidade do deslizador em relação ao referencial fixo). O sinal negativo indica que a força de atrito e a velocidade translacional estão orientados em sentidos opostos. A aplicação de (LAUS, 2011) é dada a partir de uma sequência de etapas:

1. Análise cinemática do mecanismos para obtenção da direção do elo que é impactado pelo atrito. A direção é dada pelo sinal (positivo ou negativo) do valor da velocidade do par cinemático.
2. Análise estática do sistema pelo método de Davies, não aplicando forças e coeficientes de atrito para obtenção da força normal atuante no par cinemático.
3. Análise estática do sistema, agora implementando o(s) atrito(s) pertinentes ao sistema. Deste modo é necessário fazer novamente a análise estática do Método de Davies desde o seu princípio, acrescentando no grafo de ações a força de atrito, reformulando as etapas subsequente até chegar a matriz de ações unitárias em rede, onde deverá ser incluído a(s) equação(ões) constituintes (Equação (11)) de atrito.

Ao término desta sequência de etapas são obtidos os valores de atrito relativos ao modelo.

A Figura 15 traz as etapas descritas acima de um modo sintetizado para aplicação do atrito pelo método de Davies.

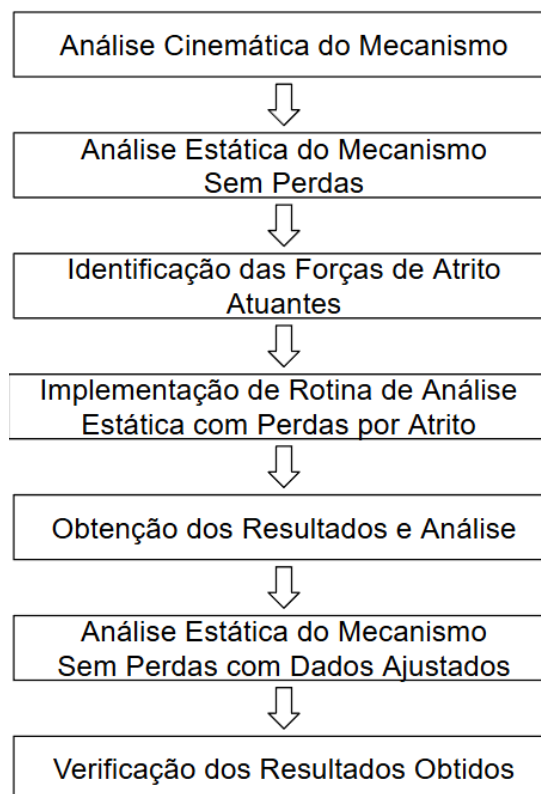


Figura 15 – Etapas de Implementação da Rotina de Atrito no Método de Davies

O presente trabalho fará uso do método proposto por Laus (2011) junto aos pares prismáticos (pistões e cilindros) das câmaras do motor Stirling tipo Alfa, não sendo aplicado às demais juntas de rotação do mecanismo.

Para tanto, o método proposto por Laus (2011) apresenta como principal benefício a redução das operações matemáticas necessárias para a análise de um ciclo do mecanismo estudado, trazendo, assim, maior conveniência para o estudo de sistemas mais complexos.

Neste ponto encerra-se a revisão bibliográfica onde foram apresentados os fundamentos teóricos necessários para a análise de motores Stirling, incluindo a compreensão do funcionamento e configurações destes motores, o Método de Davies para análise cinemática e estática, bem como os modelos matemáticos de perdas por vazamento e atrito. Com isso, o capítulo a seguir apresentará a aplicação destes conceitos em um estudo de caso, implementando o método na análise de um motor Stirling tipo Alfa.

3 ESTUDO DE CASO: MOTOR STIRLING TIPO ALFA

Realizada a revisão bibliográfica no capítulo anterior, que abrangeu desde os fundamentos dos motores Stirling até a base teórica dos modelos matemáticos que serão utilizados para a análise prática do mecanismo proposto, o presente capítulo dedica-se à aplicação prática destes conceitos. Para tanto, a transição entre teoria e prática requer uma abordagem sistemática que permita a validação dos métodos propostos e a obtenção de resultados quantitativos sobre o comportamento do motor Stirling.

Com este intuito, o presente capítulo abordará de forma progressiva a identificação e caracterização dimensional do mecanismo, estabelecendo os parâmetros necessários para aplicação do método de Davies, o método de obtenção dos dados a serem utilizados como dados de entrada, bem como a análise individual de cada parte do sistema para que, ao final, obtenha-se uma análise completa do sistema integrado. Desta forma, a presente abordagem permitirá a compreensão gradual do comportamento do mecanismo, auxiliando na identificação de parâmetros críticos e na validação dos modelos teóricos apresentados.

O desenvolvimento do capítulo visa quantificar a influência das perdas por atrito e vazamento sob diferentes configurações operacionais, contribuindo assim para a compreensão da eficiência e desempenho do motor Stirling tipo Alfa. Esta estratégia visa validar a aplicabilidade do método de Davies na análise de mecanismos complexos de conversão energética.

3.1 IDENTIFICAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DO MECANISMO

Nesta etapa será aplicado o método de Davies para os cálculos de um sistema completo do motor Stirling. Para que se tenha uma compreensão única do sistema do mecanismo, torna-se fundamental o estabelecimento claro de sua arquitetura. Deste modo, o presente capítulo irá apresentar os componentes e quais são as suas funções.

Vale ressaltar que o escopo deste trabalho é voltado exclusivamente para análise mecânica, por isso aspectos termodinâmicos de funcionamento de um motor são desconsiderados, fazendo, assim, que a identificação dos elementos do motor seja simplificada.

Para realizar a identificação do motor Stirling será utilizada a sequência de representações que são propostas em Martins e Murai (2019). A identificação dos elementos do motor vem a ser simplificada, bem como a complexidade do sistema, que é enxuto. A Figura 16 apresenta de forma esquemática os principais componentes do motor, que são:

- 1 - Bloco do motor: estrutura principal onde estão localizados os cilindros de expansão e compressão, tubos de passagem de gás, sistema de resfriamento e o regenerador.
- 2 - Volante de inércia: elemento que armazena energia cinética.
- 3 - Pistão de trabalho: referente a câmara de expansão (câmara quente), que realiza maior parte do trabalho do sistema.
- 4 - Pistão de deslocamento: localizado na câmara de compressão (câmara fria).
- 5 - Biela do pistão de trabalho: conecta o volante de inércia ao pistão de trabalho.

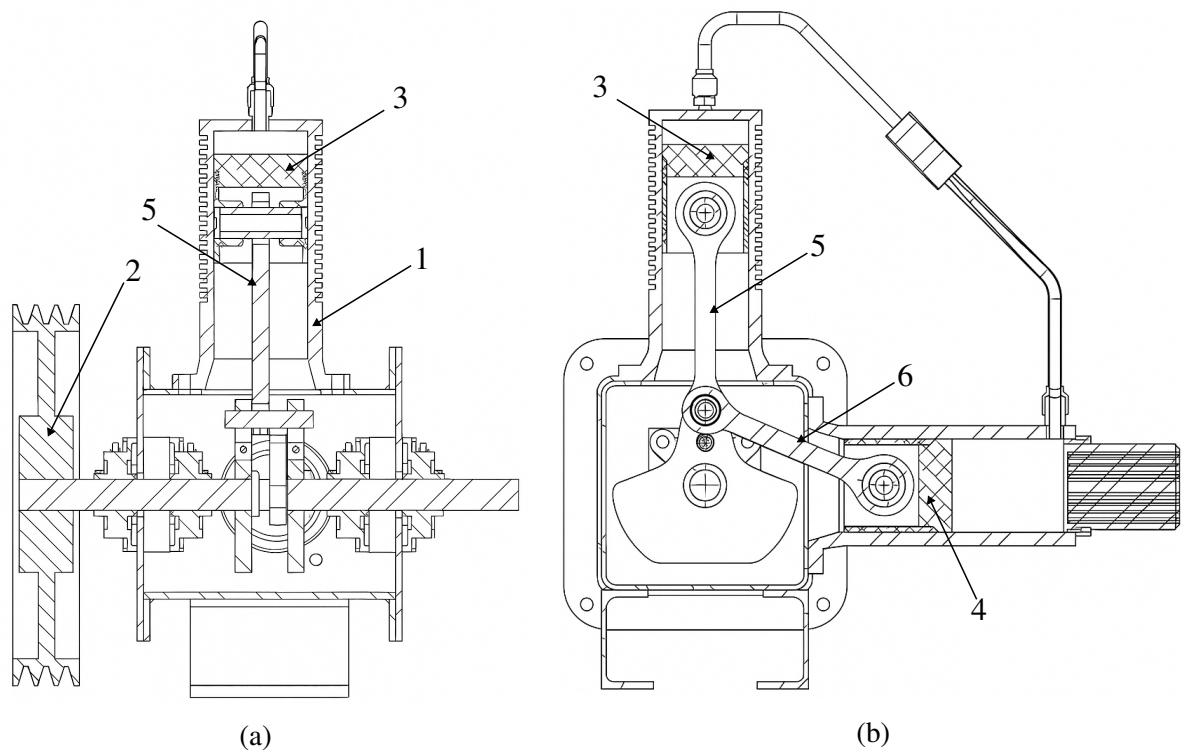


Figura 16 – Representação Esquemática do Motor Stirling Tipo α : (a) Corte Lateral, e (b) Corte Frontal.

6 - Biela do pistão de deslocamento: conecta o volante de inércia ao pistão de deslocamento.

Estas peças são necessárias para o desenvolvimento dos cálculos de um motor Stirling tipo Alfa utilizando o método de Davies. Em uma análise ao sistema do motor é possível identificá-lo com o um mecanismo e para que ele funcione de maneira correta é necessário que possua dimensões específicas. Novamente, como o escopo do trabalho visa a análise do mecanismo e não a síntese dimensional ou do tipo, nem os cálculos dimensionais dos componentes do motor, todas as partes do sistema utilizam medidas e volumes propostos por Almajri, Mahmoud e Al-Dadah (2017). Dessa forma, a Tabela 3 mostra as dimensões pertinentes aos cálculos a serem desenvolvidos. Entre os parâmetros descritos na tabela é importante definir dois que não são citados regularmente no presente trabalho, que são: o ângulo de fase que é a diferença angular entre as posições dos pistões e cilindros do motor, e o volume morto que é o volume do espaço que permanece dentro da câmara quando o pistão está no ponto morto superior.

Os volumes mortos vem a ser importantes para a definição do comprimento dos elos, já que para sua determinação estipulou-se um comprimento do elo referente ao volante de inércia, em 70 mm, e por análise via software de Projeto Assistido por Computador (CAD), forma determinados os comprimentos das bielas (Tabela 4).

Uma vez identificados os componentes que serão utilizados no estudo, foca-se nas representações que vem a ser relevantes nas etapas utilizadas pelo método de Davies, além de garantir uma sequência lógica e progressiva da implementação. Assim, realiza-se a represen-

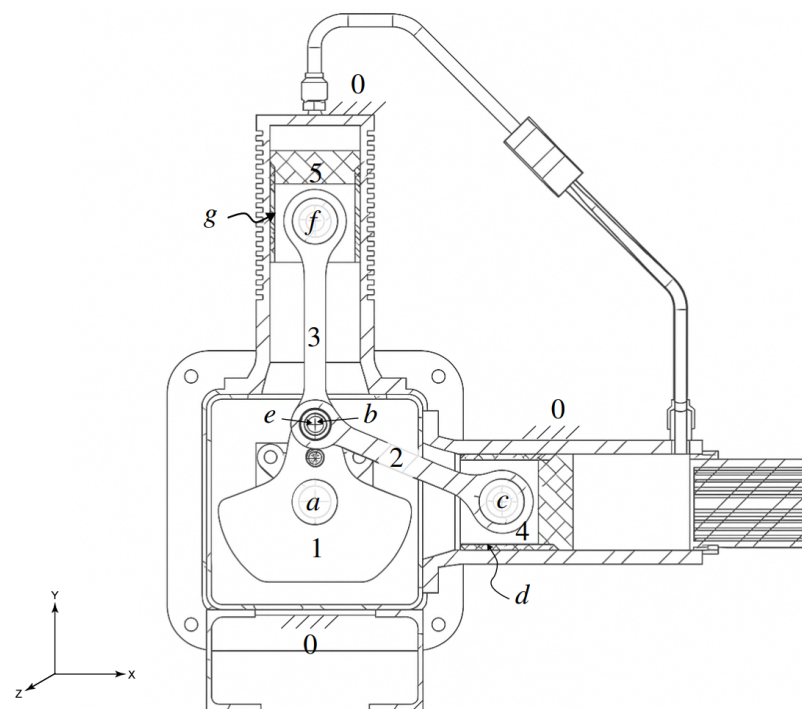
Tabela 3 – Parâmetros principais do motor Stirling tipo Alfa utilizado para análise baseado em Almajri, Mahmoud e Al-Dadah (2017).

Parâmetro	Valor
Tipo de motor	Alfa α (V)
Ângulo de fase do gás de trabalho	90°
Volume morto do aquecedor	53 cm ³
Volume morto do resfriador	43 cm ³
Velocidade máxima do motor	850 rpm
Fluido de trabalho	Ar
Diâmetro pistão de expansão	Ø46mm
Diâmetro pistão	Ø32mm
Comprimento do Cilindro	Ø100mm

Tabela 4 – Parâmetros dimensionais calculados para o motor Stirling tipo Alfa utilizado na análise.

Parâmetro	Valor
Raio do virabrequim (entre pontos de fixação) (L_1)	30 mm
Biela do pistão de trabalho (L_2)	70 mm
Biela do pistão de deslocamento (L_3)	70 mm

tação funcional mostrada na Figura 17, onde os elementos citados anteriormente passam a ser identificados de acordo com a sua função no sistema. Os elos são compreendidos por meio de números, conforme a Tabela 5.

Figura 17 – Representação Funcional do Motor Stirling Tipo α .

Na segunda etapa, identificam-se os pares cinemáticos, que vem a ser a ligação entre os elos, por meio de letras e caracterizados pelo tipo de movimento que executam. No caso do motor

Tabela 5 – Identificação dos elos do mecanismo.

Número do elo	Descrição
0	Bloco do motor
1	Virabrequim / Manivela
2	Biela do pistão de compressão
3	Biela do pistão de expansão
4	Pistão da câmara de compressão
5	Pistão da câmara de expansão

Stirling, são encontrados os seguintes tipos de pares cinemáticos, bem como a sua identificação.

Pares de Revolução: caracterizados por um grau de liberdade rotacional em torno do eixo z .

- Par cinemático a: conexão entre o elo 0 (bloco do motor) e o elo 1 (manivela)
- Par cinemático b: conexão entre o elo 1 (manivela) e o elo 2 (biela do pistão de compressão)
- Par cinemático c: conexão entre o elo 2 (biela do pistão de compressão) e o elo 3 (pistão da câmara de compressão)
- Par cinemático e: conexão entre o elo 1 (manivela) e o elo 4 (pistão da câmara de expansão)
- Par cinemático f: conexão entre o elo 4 (biela do pistão de expansão) e o elo 5 (pistão da câmara de expansão)

Pares Prismáticos: caracterizados por um grau de liberdade translacional ao longo de um eixo onde está disposto.

- Par cinemático d: conexão entre o elo 0 (bloco do motor) e o elo 3 (pistão da câmara de compressão), permitindo movimento ao longo do eixo x .
- Par cinemático g: conexão entre o elo 0 (bloco do motor) e o elo 5 (pistão da câmara de expansão), permitindo movimento ao longo do eixo y .

Na sequência das representações, passa-se para representação estrutural (Figura 18), onde elementos passam a ser identificados por figuras geométricas ou arestas. Assim, os elos (2, 3, 4 e 5) passam a ser linhas (arestas) que se conectam a outros dois elos. Já os demais elos (0 e 1) vem a ser representado por triângulos, pois conectam a outros três elos. É importante observar, que o elo 1, que aparentemente vem a ser um elo binário, na verdade, é um elo ternário, pois um dos seus pontos de conexão unem outros dois elos distintos, as bielas. Já os pares cinemáticos são representados por vértices, independente do seu tipo específico (rotativo ou prismático), visto que o foco é na conexão entre os elementos.

Uma quarta e última representação vem a ser a representação por grafos, que é a mais importante para aplicação do método de Davies, já que ela ditará as diversas matrizes a serem elaboradas no método para análise cinemática e estática do mecanismo do motor Stirling. Nesta

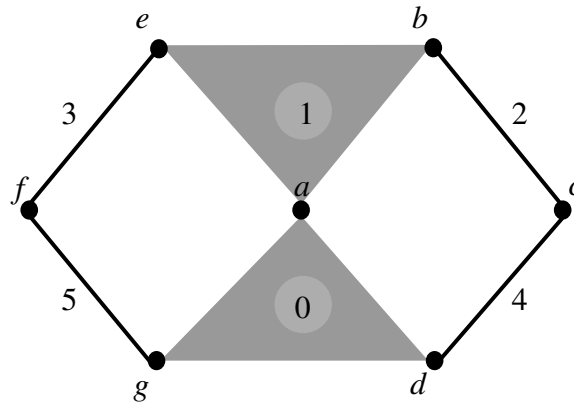


Figura 18 – Representação Estrutural do Motor Stirling.

representação ocorre uma certa inversão, onde os elos, que antes eram representados por linhas e triângulos, e agora passam a ser representados por vértices, independente do seu formato. Os pares cinemáticos vem a ser arestas que conectam os vértices. Com isso, obtem-se a representação por grafos do mecanismo (Figura 19).

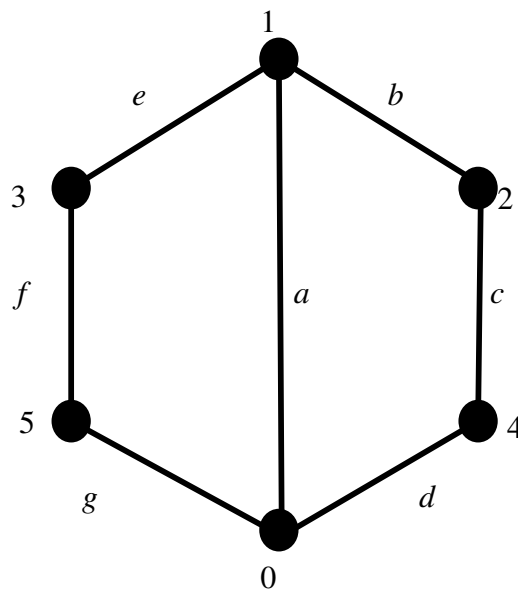


Figura 19 – Representação por Grafos do Motor Stirling.

Esta sequência lógica traz a evolução das representações, bem como a busca de uma melhor compreensão do sistema em análise, além de trazer um menor risco que possíveis erros sejam cometidos. A partir da representação por grafos, a base para método de Davies está estabelecida e basta iniciar a sua aplicação.

3.2 ANÁLISE DAS POSIÇÕES DAS JUNTAS PRISMÁTICAS E DE ROTAÇÃO

O motor Stirling tipo Alfa (Figura 20) é composto por dois mecanismos biela-manivela, que possuem a interligação deles no elo 1, que vem a ser uma manivela “compartilhada” para os sistemas individuais. Além disso, possui três pares cinemáticos rotativos e outros dois prismáticos.

Um dos passos fundamentais para compreender a análise do mecanismo do motor é identificar quais as equações que determinam as posições de cada uma das juntas, o que neste caso de estudo vem a ser mais importante, devido ao fato de trabalhar com pressões internas e volumes das câmaras de compressão e expansão.

Primeiramente, utilizando a Tabela 4, identifica-se as dimensões dos elos 1 (Equação (12)), 2 (Equação (13)) e 3 (Equação (14)).

$$L_1 = \overline{ab} = \overline{ae} = 30mm \quad (12)$$

$$L_2 = \overline{bc} = 70mm \quad (13)$$

$$L_3 = \overline{ef} = 70mm \quad (14)$$

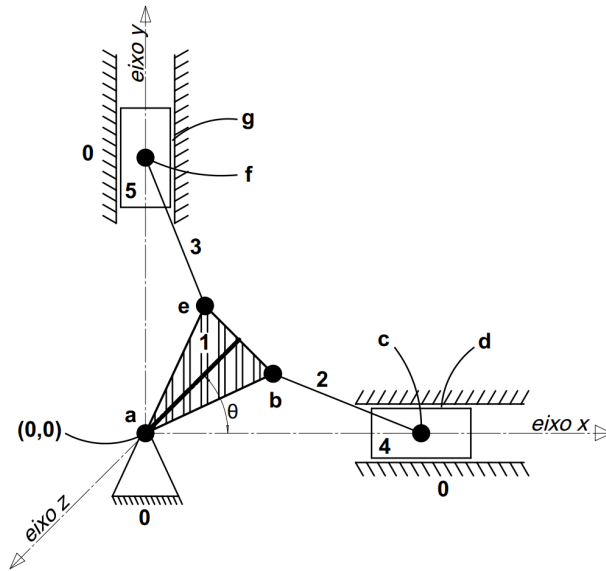


Figura 20 – Representação Esquemática do Motor Stirling Tipo Alfa.

Em seguida, o ponto a ser identificado é o par cinemático que possui posição fixa, o que vem a ser a junta *a*, o virabrequim do motor que acoplado ao bloco do motor, ou seja, este ponto possui a coordenada 0 (Equação (15)).

$$a_x = 0 \quad a_y = 0 \quad (15)$$

Os pares cinemáticos rotativos “b” e “e”, por mais que são considerado separados nas representações funcionais e por grafos, eles compreendem a mesma posição e possuem uma ligação por meio do elo 1 e executam um movimento circular, realizando a transmissão de movimento linear dos pistões advindos das bielas (elo 2 e elo 3) para manivela. Deste modo, para dedução do seu posicionamento é necessário ter o comprimento do elo 1 (L_1) e o ângulo formado pelo elo em relação ao eixo *x*. Assim, obtendo a Equação (16).

$$b_x = L_1 \cdot \cos(\theta) \quad b_y = L_1 \cdot \sin(\theta) \quad (16)$$

Na sequência é necessário verificar a posição das outras duas juntas de rotação do mecanismo que estão conectadas aos pistões do motores. As equações das posições dessas juntas obedecem ao mesmo princípio, porém são distintas, já que operam em diferentes eixos. Para dedução deste equacionamento é necessário o comprimentos das bielas, que no presente caso estudado vem a ser o mesmo. Posteriormente, é preciso utilizar os princípios geométricos por meio da lei dos cossenos a fim de obter as posições das juntas. Assim, obtém-se a Equação (17) para a junta c e a Equação (18) para junta f .

$$c_x = d_x = (L_1 \cdot \cos(\theta)) \cdot \sqrt{L_2^2 - L_1^2 + (L_1^2 \cdot \sin^2 \theta)} \quad c_y = d_y = 0 \quad (17)$$

$$f_y = g_y = (L_1 \cdot \sin(\theta)) \cdot \sqrt{L_3^2 - L_1^2 + (L_1^2 \cdot \cos^2 \theta)} \quad f_x = g_x = 0 \quad (18)$$

Os pares prismáticos d e g , que vem a ser os pistões do motores tem as suas posições descritas a partir das Equações 17 e 18, tem somente acrescido a distância referente a diferença entre a junta de rotação e a face do pistão. Porém, neste estudo de caso esta distância é considerada igual a zero, portanto a posição dos pistões são consideradas as mesmas das juntas de rotação c e f .

Vale ressaltar, para o mecanismo relativo a câmara de compressão (horizontal) utiliza-se as Equações 16 e 17, ou seja, são compreendidas pelas juntas a , b , c e d . Já para o mecanismo da câmara de expansão (vertical), as Equações 16 e 18 que corresponde aos pares cinemáticos a , e , f e g .

A partir das equações desta seção torna-se possível a realização da análise cinemática e estática dos mecanismos envolvidos no motor Stirling tipo Alfa por meio do método de Davies. Antes que seja iniciada a aplicação do método, é necessário possuir dados de entrada para o sistema. Assim, a seção a seguir apresentará a fonte destes dados.

3.3 OBTENÇÃO DOS DADOS DE REFERÊNCIA

Para realizar a análise do mecanismo por meio do método de Davies é necessário que se tenha dados de entrada. Para tanto, como o trabalho não contempla coleta de dados em motores reais ou outro tipo de experimentação, tornou-se necessária a obtenção de dados por meio da literatura. Assim, durante a etapa de revisão bibliográfica identificou-se o artigo científico de Almajri, Mahmoud e Al-Dadah (2017) como sendo a fonte de dados mais adequada a ser utilizada. O mesmo realiza um estudo de otimização de um motor Stirling tipo Alfa por meio de análises computacionais de fluido dinâmica (CFD). Em suas análises, são apresentados os dados a serem utilizados contemplando o cruzamento de dados de ângulo da manivela (elo 1 do mecanismo em análise) e os volumes instantâneos das câmaras (Figura 21a) e, também, dados de volume e pressão das câmaras (Figura 21b). Além do mais, os dados dimensionais do motor

que integram o artigo são de suma importância para que os resultados tendam a estar o mais próximo ao real. Caso contrário, a não utilização do dimensional correto do motor, acarretará em erros relevantes.

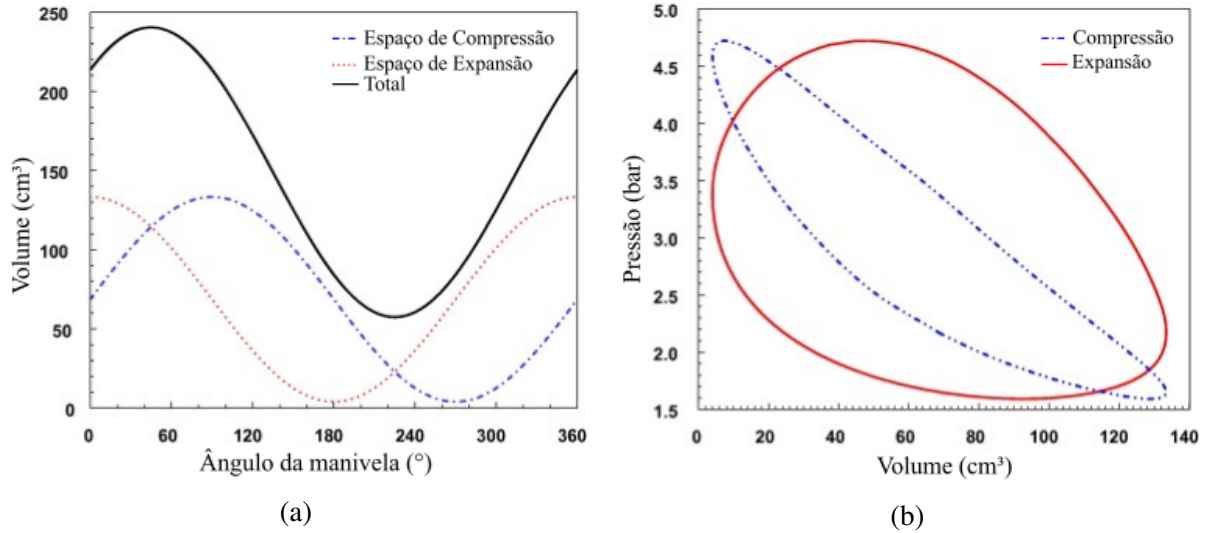


Figura 21 – (a) Variação dos volumes total, de compressão e de expansão em relação ao ângulo da manivela em um ciclo do motor a 500 rpm, e (b) Diagramas PV para volumes de compressão e expansão em um ciclo de motor a 500 rpm. Adaptado de: (ALMAJRI; MAHMOUD; AL-DADAH, 2017)

Como os valores apresentados no artigo são expostos somente nas forma de gráficos foi necessário utilizar métodos para extração e tratamento dos dados para que pudessem vir a ser utilizados. Deste modo, realizou-se uma sequência de etapas para obtê-los. A primeira etapa realizada foi o procedimento de digitalização e extração dos pontos. Para isso, fez-se o uso do software WebPlotDigitizer (ANKIT ROHATGI, 2025), que é um programa de visão computacional assistida que realizada a extração numérica de dados a partir de imagens (Figura 21).

Com a fonte de dados de pressão definida, as equações de cada um dos pares cinemáticos estabelecidas e a identificação dos elementos do mecanismo do motor Stirling realizada, é possível prosseguir para a aplicação propriamente dita do método. Assim, as seções a seguir detalharão como será conduzida esta implementação.

Após a captura dos dados é necessário realizar um tratamento dos valores, visto que os valores não obedecem a um padrão de intervalos. A realização desta etapa se dá por meio de uma rotina desenvolvida no software Matlab, utilizando a função **polyfit** (MATHWORKS, 2025a) para obtenção das equações que regem o padrão dos dados. As equações resultantes 19 e 20 são de sexto grau, representando as pressões de compressão e de expansão, respectivamente. Foram escolhidas equações de sexto grau pela análise visual mostrar-se a mais condizente com os pontos encontrados. Na sequência gerou-se a Figura 22, onde os pontos em verde são referentes as pressões de compressão (P_c) e os em vermelhos as pressões de expansão (P_e).

Para a câmara de compressão se obteve a função de sexta ordem mostrada na Equação (19)

$$\begin{aligned}
 P_c(\theta) = & 4,7 \times 10^{-14}\theta^6 - 5,7 \times 10^{-11}\theta^5 + 2,47 \times 10^{-8}\theta^4 \\
 & - 4,84 \times 10^{-6}\theta^3 + 5,78 \times 10^{-4}\theta^2 - 5,58 \times 10^{-2}\theta + 4,57
 \end{aligned}
 \quad (19)$$

Enquanto que para a câmara de expansão se tem a função mostrada na Equação (20).

$$\begin{aligned}
 P_e(\theta) = & 1,04 \times 10^{-13}\theta^6 - 1,26 \times 10^{-10}\theta^5 + 5,78 \times 10^{-8}\theta^4 \\
 & - 1,13 \times 10^{-5}\theta^3 + 7,11 \times 10^{-4}\theta^2 + 1,64 \times 10^{-2}\theta + 2,62
 \end{aligned}
 \quad (20)$$

onde P_c e P_e representam as pressões nas câmaras de compressão e expansão, respectivamente em bar, θ é o ângulo da manivela em graus, e os demais são os coeficientes dos polinômios, determinados pelo ajuste de curvas.

Observa-se que o ajuste polinomial, por meio desta última etapa, proporcionou uma representação contínua e consistente das pressões, eliminando as possíveis inconsistências dos pontos previamente obtidos. Assim, tornando possível estabelecer uma correlação entre o ângulo da manivela e as pressões nas câmaras de compressão e expansão para qualquer posição desejada do ciclo. Uma vez obtidas e as equações verificadas, torna-se possível que sejam incorporados às rotinas de cálculo desenvolvidas para implementação do método de Davies e, posterior, obtenção das forças resultantes no mecanismo.

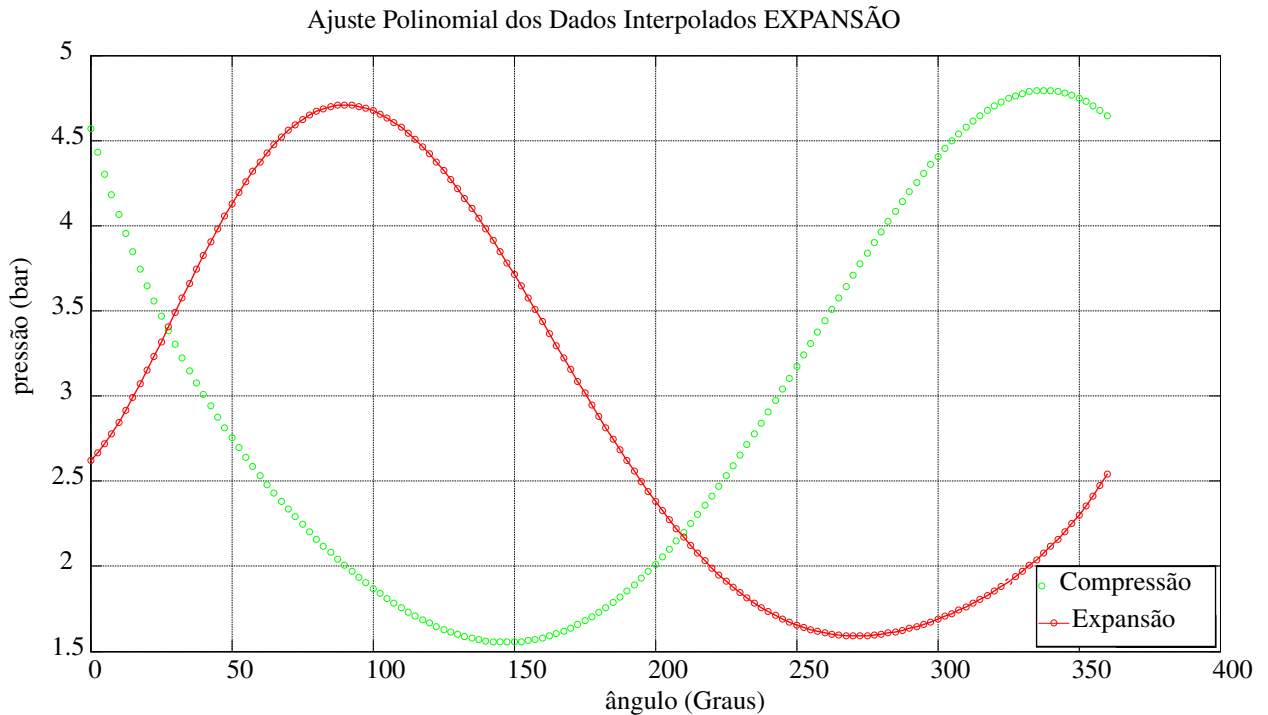


Figura 22 – Ajuste Polinomial dos dados de Pressão das Câmaras

Com a determinação das pressões atuantes em cada uma das câmaras, torna-se possível calcular as forças exercidas nos pistões. Essas forças são determinadas com base nos parâmetros do motor apresentados na Tabela 3, utilizando-se a Equação (21), que corresponde à formulação clássica da pressão. Uma vez conhecidos os diâmetros dos pistões de cada câmara, podem-se determinar as forças atuantes.

$$p = \frac{F_p}{A_p} \quad (21)$$

onde p é a pressão da câmara sem perdas, F_p é a força atuante no pistão, e A_p é a área transversal do pistão.

É importante ressaltar que o presente trabalho não aborda o dimensionamento do motor Stirling, sendo os diâmetros dos pistões extraídos diretamente de Almajri, Mahmoud e Al-Dadah (2017) e apresentados na Tabela 3. Caso houvesse necessidade de um dimensionamento específico da configuração do motor, bem como dos cálculos dos pistões, seria necessária, por exemplo, a utilização do teorema de Schmidt (HIRATA, 1997), além de teorias de termodinâmica e transferência de calor para a obtenção desses resultados.

3.4 ANÁLISE CINEMÁTICA DOS MECANISMOS

Quando se analisa o mecanismo de um motor qualquer, faz-se necessário o estudo cinemático com a finalidade de observar o seu comportamento. Mesmo que este não venha ser o principal ponto de observação deste trabalho, é importante verificar se o comportamento está condizente.

O método de Davies permite realizar separadamente a análise cinemática que, geralmente, vem a ser a primeira etapa a ser executada. Não sendo diferente, o presente estudo utilizou-se desta ferramenta para realizar o cruzamento de dados e verificação dos mecanismos.

Em relação ao estudo realizado, utilizou-se os parâmetros, como a rotação constante do eixo do motor, estabelecida em 500 Revoluções por minuto (rpm). Esta condição refere-se a condição de regime permanente, o que vem a ser uma característica dos motores Stirling, visto que não são comumente utilizados em aplicações que necessitem de ciclos de parada e retomada frequentes. Deste modo, a análise do regime transiente não foi incluída no presente trabalho. Aqui a rotação foi imposta de forma a ser constante e fixa em um determinado valor, o que não corresponde a realidade de um motor, que possui uma taxa de variação em torno de determinada rotação devido a própria dinâmica de funcionamento.

Para realização da análise cinemática do mecanismo do motor Stirling pelo método de Davies, segue-se uma sequência de etapas que visam facilitar e evitar erros, conforme Cazangi *et al.* (2008).

Com as equações das posições iniciais (Equação (15), Equação (18) e Equação (16)) relacionadas na Seção 3.2 toma-se o primeiro passo que é a declaração dos vetores de posições (Equação (22)) iniciais de cada um dos pares cinemáticos.

$$\begin{aligned} \vec{S}_{0_a} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \vec{S}_{0_b} = \vec{S}_{0_e} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \vec{S}_{0_c} = \vec{S}_{0_d} = \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ 0 \end{Bmatrix} ; \\ \vec{S}_{0_f} = \vec{S}_{0_g} &= \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Como a identificação dos tipos de pares cinemáticos do mecanismo foram identificados na Seção 3.1, neste momento é necessário declarar os vetores de direção unitária ($\vec{S}$). No caso, juntas de revolução possuem o seu eixo de ação ao longo do eixo z , deste modo as juntas a, b, c, e, f possuem o vetor da seguinte forma:

$$\vec{S}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Já as juntas prismáticas d e g , que se deslocam ao longo dos eixos x e y , respectivamente, obtêm o vetor de direção unitário deste modo:

$$\vec{S}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \vec{S}_y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Com a representação por grafos já estipulada (Figura 19) define-se o grafo de movimento (G_M), mostrado na Figura 23, onde os pares cinemáticos, anteriormente representados pelas letras, agora são representados por helicoides, como definido na Equação (1). Basicamente, o grafo mantém-se o mesmo devido ao grau de liberdade de cada junta, que vem a ser igual a 1.

Em seguida cria-se a árvore geradora, mas antes disso é necessário analisar a quantidade de circuitos para que seja possível realizar a análise. Isto se dá por meio da equação Equação (25), onde g vem a ser a quantidade de juntas existem no mecanismo e n o número de elos.

$$\nu - 1 = g - n \quad (25)$$

Substituindo os valores, obtém-se:

$$\nu = 7 - 6 + 1 = 2 \quad (26)$$

A partir do número de circuitos que corroboram ao grafo já esquematizado, define-se a árvore geradora, mostrada na Figura 24, escolhendo duas juntas para serem as cordas. Lembrando que a quantidade de cordas em uma árvore geradora sempre deve ser igual ao número de circuitos. Posteriormente, identifica-se os circuitos fundamentais, que são uma sequência de elos ligados diretamente e que possuem somente uma corda. Para cada circuitos é atribuído um sentido

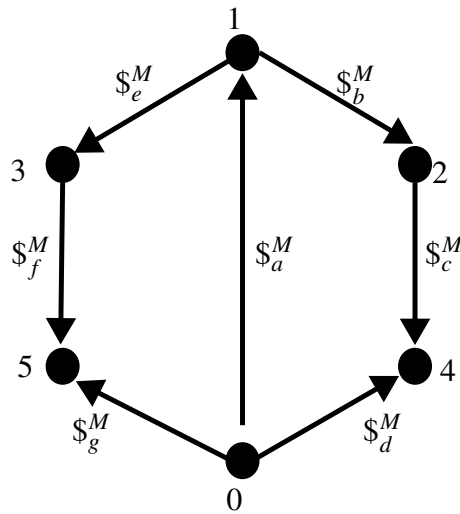


Figura 23 – Grafo de Movimentos do Mecanismo do Motor Stirling

(representado por linhas tracejadas vermelhas) que vem a ser o mesmo sentido da corda. Na etapa seguinte, atribui-se um valor a cada elemento (junta, j) do circuito (v_i) com base em seu alinhamento com a direção da corda de referência.

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se junta } j \text{ pertence ao circuito } v_i \text{ e tiver a mesma direção da corda,} \\ -1 & \text{se junta } j \text{ pertence ao circuito } v_i \text{ e tiver direção oposta à da corda,} \\ 0 & \text{se não pertencer ao circuito.} \end{cases}$$

Essas informações são usadas para formar a matriz de circuitos fundamentais $[Q_A]_{(k \times c)}$ desse mecanismo que pode ser criado, conforme mostrado em Equação (27).

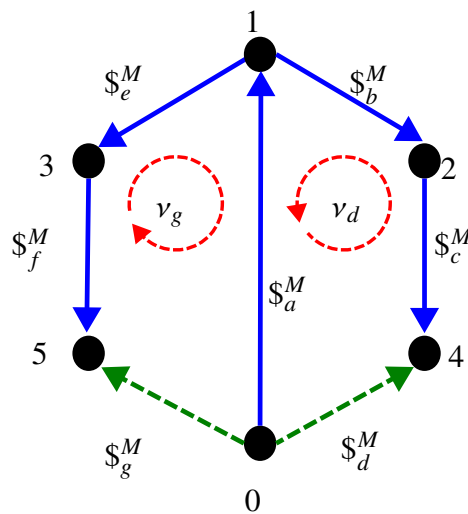


Figura 24 – Árvore Geradora do Mecanismo do Motor Stirling.

Assim, obtém-se a matriz por meio da Equação (27).

$$[B_M]_{v \times F} = [B_M]_{2 \times 7} = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g \\ \text{circuito } g & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ \text{circuito } d & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad (27)$$

Baseado nas equações de características geométricas dos pares cinemáticos volta-se a construções dos heligros de cada um. A disposição dos heligros devem obedecer a escrita radial (Equação (1)).

Recordando que o passo das juntas de rotação são igual a 0, visto que possuem velocidade translacional nula (Equação (28)), já o passo das juntas prismáticas tendem ao infinito (∞), pois não possuem velocidade angular, assim uma divisão por 0 tenderá ao infinito (Equação (29)).

$$h = \frac{\tau}{\omega} = \frac{0}{\omega} = 0 \quad (28)$$

$$h = \frac{\tau}{\omega} = \frac{\tau}{0} = \infty \quad (29)$$

Deste modo temos os heligros dos pares prismáticos conforme Equação (30). Vale ressaltar, que os heligros $\$^M_d$ e $\$^M_g$, possuem as variáveis u_d e v_g que representam a velocidade translacional ao longo *eixo* x e *eixo* y , respectivamente.

$$\begin{aligned} \$^M_a &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_a \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \$^M_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_b \\ \dots \\ b_y \omega_b \\ -b_x \omega_b \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \$^M_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_c \\ \dots \\ c_y \omega_c \\ -c_x \omega_c \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \$^M_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ u_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \$^M_e &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \\ \dots \\ b_y \omega_e \\ -b_x \omega_e \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \$^M_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_f \\ \dots \\ f_y \omega_f \\ -f_x \omega_f \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \$^M_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ v_g \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

Unindo todos os heligros em uma matriz seguindo a mesma sequência dos pares cinemáticos da matriz de circuitos (Equação (25)), obtém-se a matriz de movimento (M_D). A fim de facilitar os cálculos, em especial quando se trata de um mecanismo planar ($\lambda = 3$), retira-se

as linhas de elementos iguais a zero, no caso vem a ser as linhas 1, 2 e 6 da matriz. Deste modo, a matriz de movimento (Equação (31)) é reduzida, favorecendo as operações matemáticas nos softwares. Vale ressaltar que, quando se trabalha com mecanismo em um ambiente planar, as linhas 1, 2 e 6 de todas as matrizes dos helicóides serão iguais a zero. Deste modo, ocorre a simplificação delas como descrito.

$$[M_D] = \begin{bmatrix} \omega_a & \omega_b & \omega_c & 0 & \omega_e & \omega_f & 0 \\ 0 & \omega_b b_y & \omega_c c_y & u_d & \omega_e b_y & \omega_f f_y & 0 \\ 0 & -\omega_b b_x & -\omega_c c_x & 0 & -\omega_e b_x & -\omega_f f_x & v_g \end{bmatrix} \quad (31)$$

Posteriormente, constrói-se a matriz de movimento unitário (M_D), Equação (32) e o vetor de magnitudes dos movimentos (Equação (33)).

$$[\widehat{M}_D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b_y & c_y & 1 & b_y & f_y & 0 \\ 0 & -b_x & -c_x & 0 & -b_x & -f_x & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\{\phi\} = \{ \omega_a \quad \omega_b \quad \omega_c \quad u_d \quad \omega_e \quad \omega_f \quad v_g \}^T \quad (33)$$

Com a construção dessas matrizes, todas as variáveis para realização dos cálculos estão definidas. Deste modo é possível determinar a relação entre os heligiros normalizados (Equação (32)) com cada um dos circuitos estabelecidos pela árvores gerados e transcritos em forma matricial em cada uma das linhas da matriz de circuitos (Equação (27)). Esta relação constitui-se na matriz de movimento unitária em rede ($\widehat{M}_N$), Equação (34).

$$[\widehat{M}_N] = \begin{bmatrix} [\widehat{M}_D] \cdot \text{diag} (B_{M1}) \\ [\widehat{M}_D] \cdot \text{diag} (B_{M2}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Isto significa que a matriz de movimento unitária (Equação (32)) será multiplicada pela diagonal de cada circuito, ou linha, da matriz de circuitos (Equação (25)) obtendo como resultado final a matriz de movimento unitária em rede final (Equação (35)), que virá a ser utilizada na solução do problema.

$$\left[\widehat{M}_N \right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b_y & c_y & 1 & b_y & f_y & 0 \\ 0 & -b_x & -c_x & 0 & -b_x & -f_x & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b_y & c_y & 1 & b_y & f_y & 0 \\ 0 & -b_x & -c_x & 0 & -b_x & -f_x & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Para finalizar a análise cinemática do mecanismo basta aplicar a operação matricial (Equação (2)) adaptada da lei de Kirchoff, onde trará os resultados no vetor a esquerda da igualdade.

$$[\widehat{M}_N]_{\lambda \times F} [\vec{\phi}]_{F \times 1} = [\vec{0}]_{\lambda \times 1}$$

Com base nas etapas e equações explanadas nesta seção tornou-se viável a criação de uma rotina matemática por meio do software MATLAB (Apêndice A), e executando-a obteve-se resultados como a Figura 25, que demonstra as velocidades lineares de cada um dos pistões do motor Stirling.

Analisando os resultados, é relevante observar os pontos onde as velocidades dos pistões são nulas. Para o pistão de compressão (elo 3, junta d/pistão d) este fato ocorre nos ângulos da manivela 0° e 360° , que corresponde ao ponto morto superior, e 180° , relacionado ao ponto morto inferior. Já o pistão da expansão (elo 5, junta g/pistão g), as velocidades nulas ocorrem a uma diferença de 90° do elo 3, fato que mostra que a cinemática aplicada aos mecanismos estão condizentes, visto que a arquitetura das câmaras do motor possuem uma defasagem de mesmo valor. Assim, o ponto morto superior do pistão de expansão está localizado junto a ao ângulo de 90° da manivela (elo 1), já ponto morto inferior está localizado no valor de 270° da manivela.

Esta análise mostra ainda o comportamento senoidal das velocidades dos pistões, outra característica do motor. Ainda é possível realizar uma análise relativa ao curso dos pistões, que é equivalente a máxima amplitude de cada mecanismo, ou seja, a diferença entre os picos e vales, que serão coincidentemente localizados nos pontos de velocidade nula. Ademais, as posições

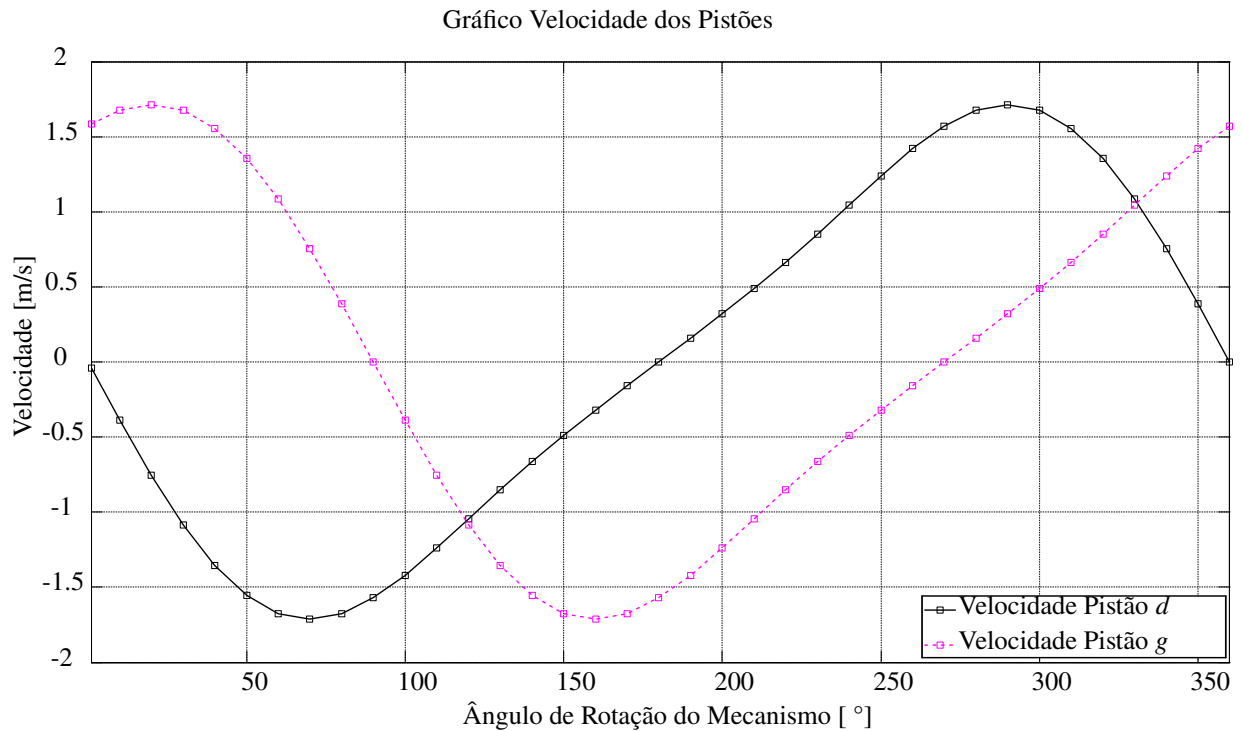


Figura 25 – Gráfico Velocidades dos Pistões

dos pistões possuem relação intrínseca com as pressões expostas na Seção 3.3, onde as pressões máximas de cada câmara estão localizadas junto aos pontos mortos superiores, e as mínimas nos pontos mortos inferiores, devido aos volumes instantâneos da câmaras.

Com esta análise realizada (Apêndice A), conclui-se que o mecanismo está operando com o movimento esperado. Deste modo, habilita-se a continuação dos estudos para a fase estática com a certeza do correto comportamento cinemático do sistema.

3.5 ANÁLISE ESTÁTICA DOS MECANISMOS

A análise estática utilizando o método de Davies visa a determinação das forças e torques reações nos acoplamentos do mecanismo. A principal ponto a ser analisado no caso em estudo é o momento gerado junto ao par cinemático a , que vem a ser a saída do motor. Com os resultado é possível obter a potência de saída do motor e identificar a influência das forças que promovem a perdas.

Para iniciar a análise estática de qualquer mecanismo, o primeiro passo vem a identificar as forças e torques de reação que cada uma das juntas possui. No caso do motor Stirling, os pares cinemáticos possuem as reações conforme Figura 26 e para facilitar a identificação lista-se elas em uma tabela (Tabela 6).

Ademais é necessário identificar quais as forças que dão entrada ao sistema (Tabela 7). Em um motor, isso ocorre por meio dos pistões e estas forças são nomeadas como variáveis primárias para o método em utilização.

O passo seguinte visa a implementação das forças de reação das juntas listada na Tabela 6

Tabela 6 – Forças e toques de reação atuantes nos pares cinemáticos

Pares Cinemáticos	Forças Atuantes		Torques Atuantes
<i>a</i>	Ra_x	Ra_y	Ta
<i>b</i>	Rb_x	Rb_y	--
<i>c</i>	Rc_x	Rc_y	--
<i>d</i>	--	Rd_y	Md
<i>e</i>	Re_x	Re_y	--
<i>f</i>	Rf_x	Rf_y	--
<i>g</i>	Rg_x	--	Mg

Tabela 7 – Forças de Entrada

Força	Eixo Atuante	
Pd	Pd_x	--
Pg	--	Pg_y

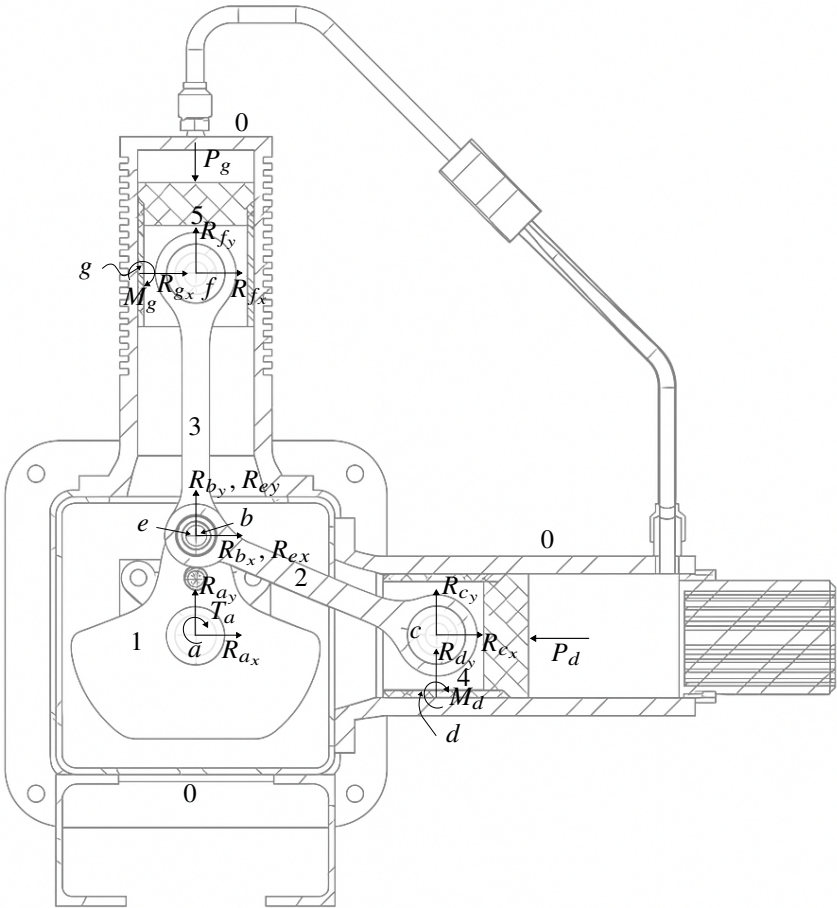


Figura 26 – Forças no Motor Stirling Alfa sem Perdas

na árvore geradora (Figura 24). Isso ocorre por meio de acréscimo de linhas em paralelo em cada um dos pares cinemáticos. Tomando como exemplo a junta *a*, que anteriormente tinha somente uma seta representando a ligação entre os elos 0 e 1, neste momento passa a ter três, cada uma delas representando as reações, no caso força de reação no eixo *x* e no eixo *y*, mais o torque no eixo *z*. Após isto realiza-se a etapa da criação dos cortes, que nada mais é que o método para

determinar a análise do sistema. Os cortes devem ser realizando a intersecção de cada um dos pares cinemáticos, identificados como ramos (setas pretas), e ao menos uma das cordas (setas pontilhadas em azul). Cada corte pode passar por somente um ramo, não mais que isso. Com isso, obtém-se o grafo de ações com os cortes, Figura 27.

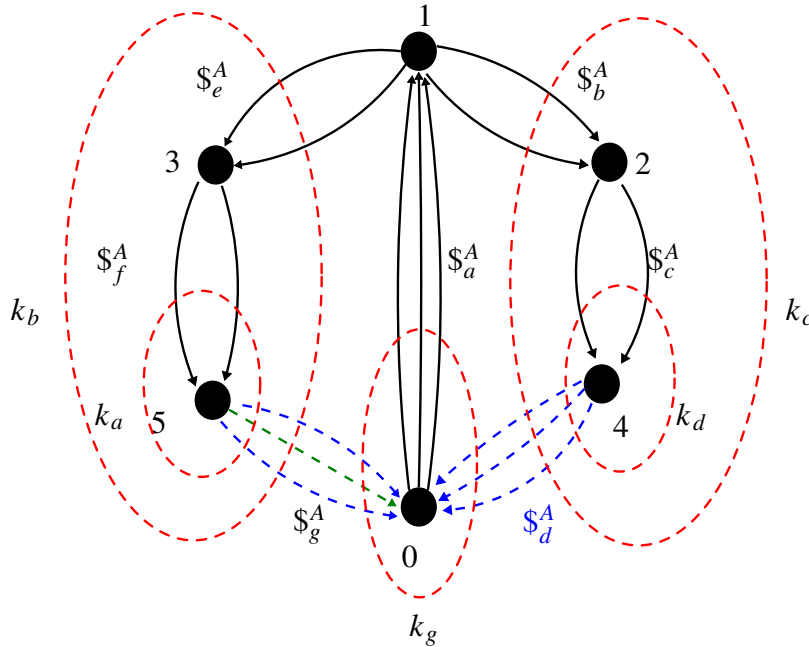


Figura 27 – Grafo de ações do Mecanismo do Motor Stirling

A partir dos cortes feitos, é necessário passar a informação que consta no grafos de ações para uma matriz, a fim de viabilizar as operações matemáticas. Isso é realizado criando uma matriz que é composta por linhas que correspondem a cada um dos cortes realizados anteriormente, e as colunas referem-se a cada uma das forças e torques de reação listados na Tabela 6 mais as forças de entrada listada na Tabela 7. Com isso, obter-se-á a matriz de cortes (Q_a) com cinco linhas e dezessete colunas (Equação (36)). A composição dos valores da matriz baseia-se nas seguintes condições.

$$Q_{k,C} = \begin{cases} 1 & \text{se pertencer ao corte } k_i \text{ e tiver na direção de saída do corte,} \\ -1 & \text{se pertencer ao corte } k_i \text{ e tiver na direção de entrada do corte,} \\ 0 & \text{se não pertencer ao corte.} \end{cases}$$

$$[Q_A]_{k \times C} = [Q_A]_{5 \times 17} =$$

		T_a	R_{a_x}	R_{a_y}	R_{b_x}	R_{b_y}	R_{c_x}	R_{c_y}	M_d	R_{d_y}	R_{e_x}	R_{e_y}	R_{f_x}	R_{f_y}	M_g	R_{g_x}	P_{d_x}	P_{g_y}
corte-k	a	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
corte-k	b	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0
corte-k	c	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0
corte-k	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	-1
corte-k	f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	-1

(36)

Após realizar a montagem da matriz de cortes, é necessário desenvolver os cálculos e montagem das heliforças, que é condizente para cada uma das forças e reações das juntas. Diferentemente da análise cinemática, a escrita deve obedecer a forma axial (Equação (37)) e novamente atenta-se aos passos (h) dos helicoides conforme equações 28 e 29.

$$\$_ = \hat{\$_} = \begin{pmatrix} \vec{S}_0 \times \vec{S} + h\vec{S} \\ \dots\dots\dots \\ \vec{S} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Com os produtos vetoriais calculados e as posições iniciais (Equação (22)) torna-se possível a montagem das heliforças. Como realizado na etapa da análise cinemática, aqui neste ponto também há a redução das heliforças, retirando as linhas nulas, em especial quando se trata de um mecanismo planar ($\lambda = 3$). Assim, tem-se os helicoides reduzidos conforme Equação (38).

$$\begin{aligned} \$_{R_{ax}}^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \$_{T_{az}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ T_a \end{pmatrix}; \quad \$_{R_{bx}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -b_y \cdot R_{bx} \end{pmatrix}; \quad \$_{R_{by}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_x \cdot R_{by} \end{pmatrix} \\ \$_{R_{cx}}^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -b_y \cdot R_{cx} \end{pmatrix}; \quad \$_{R_{cy}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ c_x \cdot R_{cy} \end{pmatrix}; \quad \$_{R_{dy}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ c_x \cdot R_{dy} \end{pmatrix}; \quad \$_{T_{dz}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ M_d \end{pmatrix} \\ \$_{R_{ex}}^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -b_y \cdot R_{ex} \end{pmatrix}; \quad \$_{R_{ey}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_x \cdot R_{ey} \end{pmatrix}; \quad \$_{R_{fy}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f_y \cdot R_{fx} \end{pmatrix} \\ \$_{R_{fy}}^A &= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f_x \cdot R_{fy} \end{pmatrix}; \quad \$_{R_g}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ -f_x \sin \theta R_g - f_y \cos \theta R_g \end{pmatrix}; \quad \$_{T_{dz}}^A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ M_g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Com as heliforças montadas necessita-se dispô-las de forma matricial. Para isso realiza-se a montagem da matriz de ações $[A_D]$, esta por sua vez deve obedecer a ordem de disposição dos helicoides reduzidos conforme a matriz de cortes (Equação (36)). Ao final obtém-se a matriz de ações, Equação (39).

$$[A_D]_{3 \times 17} = \begin{bmatrix} T_a & 0 & 0 & -b_y R_{b_x} & b_x R_{b_y} & -c_y R_{c_x} & c_x R_{c_y} & M_d & c_x R_{d_y} & -b_y R_{e_x} & b_x R_{e_y} & -f_y R_{f_x} & f_x R_{f_y} & M_g & -1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{a_x} & 0 & R_{b_x} & 0 & R_{c_x} & 0 & 0 & 0 & R_{e_x} & 0 & R_{f_x} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{a_y} & 0 & R_{b_y} & 0 & 1 & 0 & R_{d_y} & 0 & R_{e_y} & 0 & R_{f_y} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Na sequência extraí-se da matriz de ações a matriz de ações unitárias $\hat{A}_D$, Equação (40), onde retira-se as forças de reações e as dispõem em um vetor ψ_D , Equação (41), que posteriormente estarão envolvidos na operação matemática para a solução do problema.

$$[\hat{A}_D]_{3 \times 17} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_y & b_x & -c_y & c_x & 1 & c_x & -b_y & b_x & -f_y & f_x & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$[\psi_D]^T = [T_a \ R_{a_x} \ R_{a_y} \ R_{b_x} \ R_{b_y} \ R_{c_x} \ R_{c_y} \ M_d \ R_{d_y} \ R_{e_x} \ R_{e_y} \ R_{f_x} \ R_{f_y} \ M_g \ R_{g_x} \ P_c \ P_g]^T \quad (41)$$

Neste ponto é preciso realizar a última operação antes que se realize o equacionamento final. Agora procede-se a reagrupação das informações geométricas e topológicas para montagem da matriz de ações unitárias em rede ($\hat{A}_N$) de forma genérica conforme Equação (42) e com os respectivas variáveis encontra-se em Apêndice B, Equação (57).

$$[\hat{A}_N] = \begin{bmatrix} [\hat{A}_D] \cdot \text{diag}(Q_{A1}) \\ [\hat{A}_D] \cdot \text{diag}(Q_{A2}) \\ [\hat{A}_D] \cdot \text{diag}(Q_{A3}) \\ [\hat{A}_D] \cdot \text{diag}(Q_{A4}) \\ [\hat{A}_D] \cdot \text{diag}(Q_{A5}) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Seguindo para obtenção dos resultados, a partir da adaptação da lei de Kirchoff para fase estática, aplica-se a lei de cortes resultando no sistema de equações da parte estático do mecanismo do motor Stirling (Equação (5)).

Assim, concluem-se as etapas do cálculo da análise estática do mecanismo sem perdas. Na sequência, serão apresentados os modelos de perdas e como serão trabalhados.

3.6 ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO ATRITO

A implementação de um modelo de atrito no método de Davies para análise de um mecanismo necessita de uma rotina estruturada devido a interdependência de resultados advindos da análise cinemática, estática, bem como, características dos pares cinemáticos.

O modelo de atrito baseia-se no conceito de que as forças de atrito são reativas, ou seja, possuem relação intrínseca com as condições de carregamento e movimento do sistema. Isso faz com que a análise de atrito seja realizada de modo sequencial, utilizando resultados previamente obtidos nas rotinas de análise cinemática e estática sem perdas.

Para o desenvolvimento deste modelo é necessário seguir as etapas como relatado na Figura 24. Baseado neste procedimento a primeira etapa do processo consiste na realização da análise cinemática completa do mecanismo utilizando o Método de Davies, etapa realizada na Seção 3.5. Esta análise fornece as velocidades dos pares cinemáticos do mecanismo, permitindo a determinação dos sentidos de movimento em cada um. A informação sobre o sentido do movimento é de suma importância para a aplicação correta do modelo de atrito, visto que a força de atrito atua sempre em sentido oposto ao movimento.

A segunda etapa envolve a execução de uma análise estática completa do sistema sem considerar as perdas por atrito, realizada na Seção 3.4. Esta análise permite a determinação das magnitudes das forças normais atuantes em cada acoplamento onde o atrito será implementado. As forças normais são componentes fundamentais para o modelo de atrito de Coulomb, uma vez que estão na formulação da equação estabelecendo uma relação direta com a força de atrito. Observando que a determinação das forças normais deve ser realizada para um ciclo completo de operação do mecanismo, considerando as diferentes posições angulares do mecanismo. Isto é de extrema importância já que forças normais variam ao longo do ciclo de operação impactando diretamente a força de atrito resultante.

A terceira etapa constitui a implementação propriamente dita do modelo de atrito no sistema de equações do Método de Davies. Nesta fase, cada junta onde será aplicado o modelo de atrito recebe um componente adicional de força correspondente à força de atrito (Tabela 8). No mecanismo do motor Stirling em análise, os pares cinemáticos do tipo prismático d e g são os que irão apresentar este acréscimo.

Tabela 8 – Forças e toques atuantes nos pares cinemáticos

Pares Cinemáticos	Forças Atuantes			Torques Atuantes
a	Ra_x	Ra_y	--	Ta
b	Rb_x	Rb_y	--	--
c	Rc_x	Rc_y	--	--
d	--	Rd_y	Fd_{at}	Md
e	Re_x	Re_y	--	--
f	Rf_x	Rf_y	--	--
g	Rg_x	--	Fg_{at}	Mg

Este acréscimo requer a expansão da matriz de cortes ($[Q_A]_{5 \times 17}$), Equação (36), onde os pares cinemáticos irão receber mais uma coluna referente a esta força de atrito. Deste modo, o que antes a matriz de cortes sem perdas (Equação (36)) possuía 17 colunas, agora passa a ter 19 colunas.

$$[Q_A]_{k \times C} = [Q_A]_{5 \times 19} =$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} T_a & R_{a_x} & R_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{c_x} & R_{c_y} & M_d & R_{d_y} & F_{d_{fa}} & R_{e_x} & R_{e_y} & R_{f_x} & R_{f_y} & M_g & R_{g_x} & F_{g_{fa}} & P_{d_x} & P_{g_y} \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_a \\ k_b \\ k_c \\ k_e \\ k_f \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(43)

O mesmo ocorre na matriz de ações unitárias, onde duas colunas são acrescentadas na mesma posição declarada na equação Equação (44).

$$[\hat{A}_D]_{\text{atrito}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_y & b_x & -c_y & c_x & 1 & c_x & -c_y & -b_y & b_x & -f_y & f_x & 1 & -f_y & f_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(44)

Na sequência das etapas a matriz de ações unitárias em rede deve ser formada, essa operação consiste na multiplicação da matriz de ações unitárias (Equação (44)) pela diagonal de cada um dos cortes (ou linhas) da matriz de cortes (Equação (43)).

$$[\hat{A}_N]_{\text{atrito}} = \begin{bmatrix} [\hat{A}_D]_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A1})_{\text{atrito}} \\ [\hat{A}_D]_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A2})_{\text{atrito}} \\ [\hat{A}_D]_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A3})_{\text{atrito}} \\ [\hat{A}_D]_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A4})_{\text{atrito}} \\ [\hat{A}_D]_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A5})_{\text{atrito}} \end{bmatrix}$$

(45)

Porém com o acréscimo de duas colunas referentes aos atritos na matriz de cortes, a matriz de ações unitárias em rede ficará com dimensões de 17 linhas e 19 colunas, o que inviabiliza as operações matemáticas, visto que esta matriz deve ser quadrada, ou seja, possuir uma dimensão de 19×19 . Para que isso seja possível, torna-se necessário o acréscimo de duas linhas que serão referentes as equações constitutivas de atrito. Nesta ponto, o primeiro que deve-se fazer é realizar o equacionamento do atrito de cada um dos pares cinemáticos. Utilizando o modelo de Coulomb juntamente com o desenvolvimento realizado por Laus (2011), obtém-se as equações para cada uma das juntas d (Equação (46)) e g (Equação (47)).

$$F_{dat} = -\mu \cdot \text{sign}(R_{d_y}) \cdot \text{sign}(u_D)$$

(46)

$$F_{gat} = -\mu \cdot \text{sign}(R_{g_x}) \cdot \text{sign}(u_G)$$

(47)

onde $sign(\)$ é o sinal do valor da variável.

Com as equações descritas, precisa-se incorporá-las a matriz de ações unitárias em rede. Para este fim, cria-se duas matrizes individuais nulas de dimensões 1×19 , onde serão acrescentadas as Equações 46 e 47 nas posições onde poderão ser multiplicadas pelo valor da força normal de cada uma das juntas. Além disso, terá o acréscimo do valor unitário na posição de multiplicação da componente de força de atrito resultante. Deste modo, tem-se as matrizes das equações constitutivas do par cinemático d (Equação (48)) e g (Equação (49)).

$$[F_{dat}] = \begin{bmatrix} T_a & R_{a_x} & R_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{c_x} & R_{c_y} & M_d & R_{d_y} & F_{dfa} & R_{e_x} & R_{e_y} & R_{f_x} & R_{f_y} & M_g & R_{g_x} & F_{gfa} & P_{d_x} & P_{g_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{dat} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$[F_{dat}] = \begin{bmatrix} T_a & R_{a_x} & R_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{c_x} & R_{c_y} & M_d & R_{d_y} & F_{dfa} & R_{e_x} & R_{e_y} & R_{f_x} & R_{f_y} & M_g & R_{g_x} & F_{gfa} & P_{d_x} & P_{g_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gat} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Com essas definições realizadas basta acrescentar-las a matriz de cortes de ações unitárias (Equação (50)), de forma completa a matriz resultante é apresentada no Apêndice B. Além disso, com a separação das variáveis em um vetor (Equação (51)), obtém-se todos os elementos para solução (Equação (52)) e determinação das forças de atrito.

$$[\hat{A}_N]_{\text{atrito}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \end{bmatrix}_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A1})_{\text{atrito}} \\ \begin{bmatrix} \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \end{bmatrix}_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A2})_{\text{atrito}} \\ \begin{bmatrix} \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \end{bmatrix}_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A3})_{\text{atrito}} \\ \begin{bmatrix} \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \end{bmatrix}_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A4})_{\text{atrito}} \\ \begin{bmatrix} \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \\ \hat{A}_D \end{bmatrix}_{\text{atrito}} \cdot \text{diag}(Q_{A5})_{\text{atrito}} \\ \dots \\ [F_{dat}] \\ [F_{gat}] \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[\psi_D]^T = \begin{bmatrix} T_a & R_{a_x} & R_{a_y} & R_{b_x} & R_{b_y} & R_{c_x} & R_{c_y} & M_d & R_{d_y} & R_{dfa} & R_{e_x} & R_{e_y} & R_{f_x} & R_{f_y} & M_g & R_{g_x} & R_{gfa} & P_c & P_g \end{bmatrix}^T \quad (51)$$

$$[\hat{A}_N]_{\text{atrito}} [\vec{\psi}]_{\text{atrito}} = [\vec{0}] \quad (52)$$

A quarta e última etapa do processo consiste na resolução do sistema modificado considerando a redução da força de entrada devido às perdas por atrito. Esta aplicação basea-se

na rotina apresentada na Seção 3.5, porém com um refinamento da análise, onde as forças de atrito calculadas são subtraídas das forças de entrada do sistema, resultando em forças líquidas menores disponíveis para a realização do trabalho.

O processo iterativo descrito permite a convergência progressiva para uma solução que considera adequadamente os efeitos do atrito. A precisão da solução final depende da qualidade dos modelos de atrito adotados e da precisão dos coeficientes de atrito utilizados na análise.

Após a análise estática do mecanismo com perdas por atrito, será apresentado, na seção a seguir, o método de cálculo para perda por vazamento.

3.7 ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO VAZAMENTO

O modelo de vazamento utilizando o método de Davies inicia-se pelo cálculo da perda de pressão nas câmaras devido às folgas existentes entre pistão e cilindro. O equacionamento proposto por Prieto e Stefanovskiy (2003) e Grinnell (1956) constitui-se a base para esta análise. Vazamentos nos motores Stirling são considerados inevitáveis devido à rugosidade das superfícies, oscilação contínua dos pistões e folgas construtivas (KROPIWNICKI, 2019).

Os primeiros passo para análise do vazamento constitui no cálculo da variação de perda de pressão (Equação (8)) utiliza as seguintes variáveis de entrada.

$$\Delta p_{\text{leak}} = \frac{p}{v} \dot{v}_{\text{leak}} \frac{\Delta \theta}{2\pi n_s}$$

onde p é a pressão instantânea da câmara obtida a partir dos dados experimentais de Almajri, Mahmoud e Al-Dadah (2017) (Seção 3.3), v se refere ao volume instantâneo calculado mediante as equações de posição dos pares cinemáticos, $\Delta \theta$ indica o incremento angular ($\Delta \theta$) definido em 1 grau para análise discreta do ciclo, n_s é a rotação do motor fixada em 500 rpm (aproximadamente 57 rotações por segundo), e $\dot{v}_{\text{leak}}$ se refere ao vazão de perda determinada pela Equação (9).

Para o cálculo da vazão de perda (Equação (9)), parâmetros adicionais são necessários:

$$\dot{v}_{\text{leak}} = \frac{(p^2 - p_m^2) \pi D h^3}{24 p \zeta L}$$

onde p_m é pressão do bloco considerada igual à pressão atmosférica, 101 kPa, D se refere ao diâmetro do cilindro variável conforme cada câmara de pressão mostrado na Tabela 3, h indica a folga entre o pistão e o cilindro baseada nos dados de Grinnell (1956) onde a razão entre a folga e comprimento do cilindro deve variar entre 1/4000 e 1/667, ζ é viscosidade do ar, a propriedade do fluido de trabalho utilizado foi de 0,00001845 Pa · s, e L é o comprimento do cilindro dimensão específica de cada câmara (Tabela 3).

A partir do cálculo de perda de pressão para cada ponto de análise, procede-se à correção dos valores de pressão obtidos na Seção 3.3. Esta consiste na subtração da perda de pressão calculada (Equação (8)) da pressão instantânea da câmara, resultando na pressão efetiva p_e que atua sobre os pistões (Equação (53)).

$$p_e = p - \Delta p_{\text{leak}} \quad (53)$$

Deste modo, obtém-se a pressão corrigida que então será convertida em força atuante no pistão através da relação fundamental (Equação (54)).

$$F_p = p_e \cdot A_p \quad (54)$$

onde F_p representa a força em Newton, p a pressão efetiva em Pascal, e A_p a área do pistão em m^2 .

As forças corrigidas sob os pistões constituem os dados de entrada para a aplicação do método de Davies. A rotina computacional permanece idêntica àquela descrita na Seção 3.5 para o caso sem perdas, porém agora utiliza as forças reduzidas devido ao vazamento.

Deste modo, o presente capítulo apresentou a aplicação do Método de Davies em um motor Stirling tipo Alfa, abrangendo desde a identificação e representação do mecanismo até a implementação dos modelos de perdas por atrito e vazamento. Foram estabelecidas as equações cinemáticas dos pares prismáticos e de rotação, definidos os dados de referência e conduzidas as análises cinemática e estática do sistema, tanto na condição ideal quanto considerando as perdas mecânicas. Com a metodologia implementada e os cálculos realizados, o capítulo seguinte apresentará a análise dos resultados obtidos, avaliando o impacto das perdas no desempenho do motor.

4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Esta seção apresenta a análise dos resultados obtidos através da modelagem do motor Stirling pelo método de Davies sob três configurações distintas: modelo sem perdas (ideal), modelo considerando perdas por atrito e o modelo incorporando perdas por vazamento. A análise destes modelos permite identificar o impacto de cada mecanismo de perda junto ao motor, a fim de compreender as limitações existentes.

4.1 RESULTADOS DA ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO SEM PERDAS

A análise do modelo sem perdas baseia-se na metodologia apresentada na Seção 3.5 e visa compreender o comportamento de um motor Stirling ideal. Este modelo serve como referência para obter parâmetros de funcionamento e quantificar as perdas envolvidas nos modelos subsequentes que serão avaliados.

Com a implementação do método conforme a rotina computacional do Apêndice A.2, obteve-se o resultado apresentado na Figura 28. O comportamento do ciclo mostrou-se condizente com o esperado para um motor Stirling teórico, apresentando as características típicas de variação de torque ao longo do ciclo.

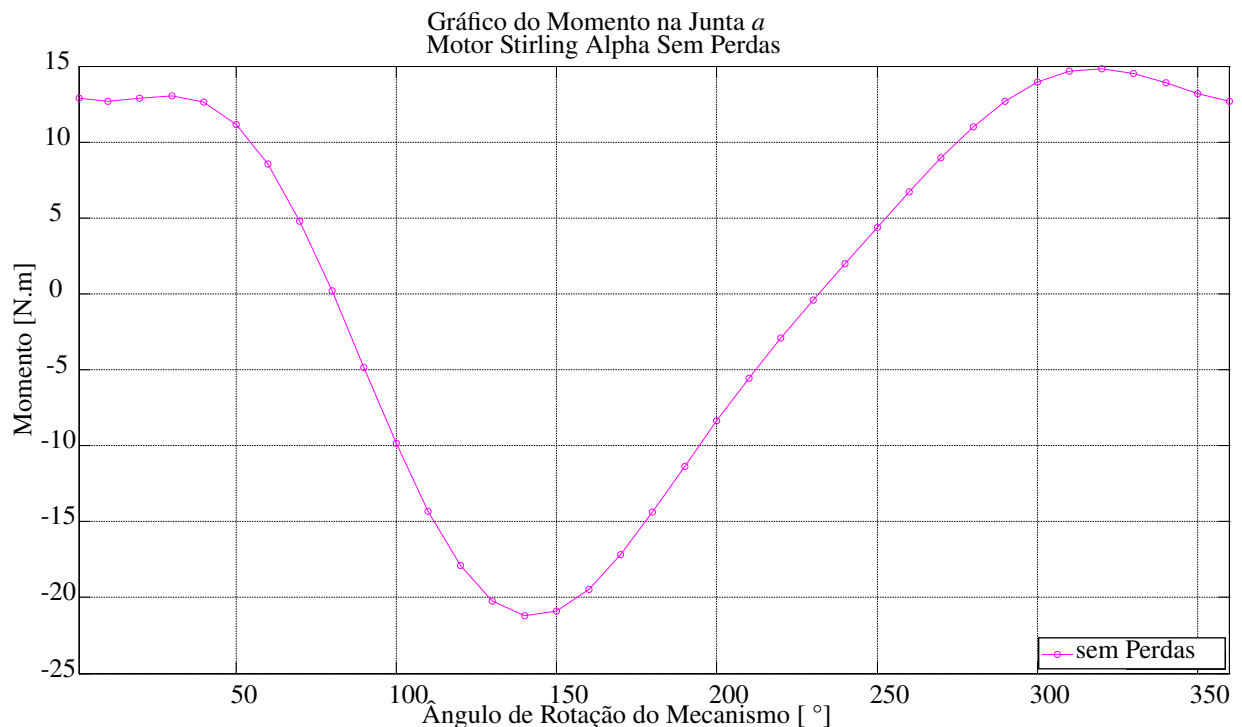


Figura 28 – Momento a Junta α no Motor Stirling Alfa sem Perdas

Baseado nas potências instantâneas geradas pelo motor a cada intervalo analisado, é possível calcular o trabalho executado por meio da integração numérica dos dados obtidos pelos ângulos, utilizando a operação **trapz** (MATHWORKS, 2025b) do software MATLAB, deste modo obtém-se o trabalho líquido realizado no ciclo na grandeza 5,11 J.

Já a potência média do ciclo é calculada utilizando a Equação (55), apresentada a seguir. Para a rotação de 500 rpm, a potência gerada foi de 42,6 W. Esta equação determina a potência gerada no ciclo e constitui um parâmetro para estabelecer comparações com os casos que incorporam perdas por atrito e vazamento.

$$P_{\text{média}} = \frac{W_{\text{ciclo}}}{T_{\text{ciclo}}} \quad (55)$$

onde o período T_{ciclo} é obtido por meio da Equação (56), que realiza a divisão do intervalo de tempo de 60 segundos pela rotação por minuto (N) do motor e o trabalho (W_{ciclo}) advém do procedimento de integração da rotina.

$$T = \frac{60}{N} \quad (56)$$

Os valores de trabalho e potência média do modelo sem perdas são apresentados na Tabela 9 para padronizar e facilitar a comparações. Este resultado representa o desempenho teórico máximo do motor Stirling sob as condições operacionais estabelecidas, fornecendo a base para quantificar o impacto das perdas nos modelos mais realistas que serão analisados nas próximas seções.

Tabela 9 – Modelo Sem Perdas

Modelo	Trabalho Líquido por Ciclo	Potência Média
Sem Perdas	5,11 J	42,60 W

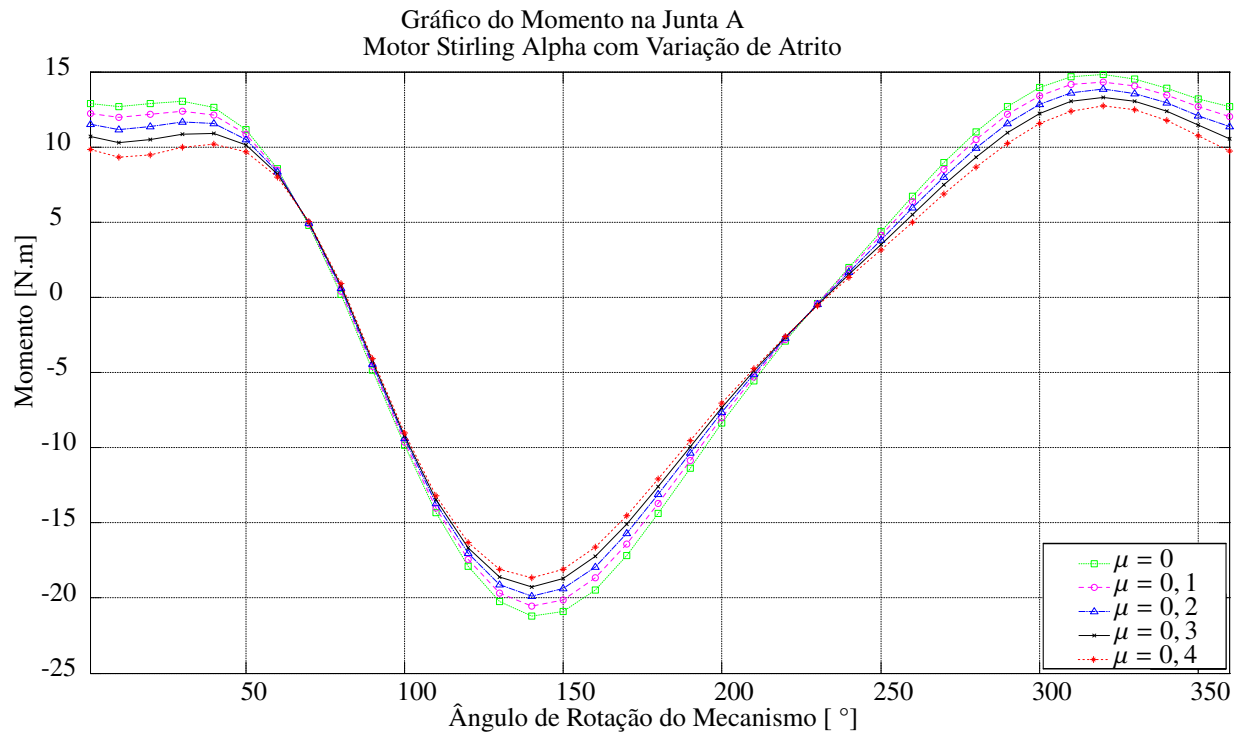
4.2 RESULTADOS DA ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO ATRITO

Utilizando a fundamentação teórica (Seção 3.6) descrita para a análise do mecanismo incorporando as perdas por atrito, procedeu-se a implementação computacional por meio de uma rotina desenvolvida junto ao software MATLAB. O código aplicado encontra-se detalhado no Apêndice A.3.

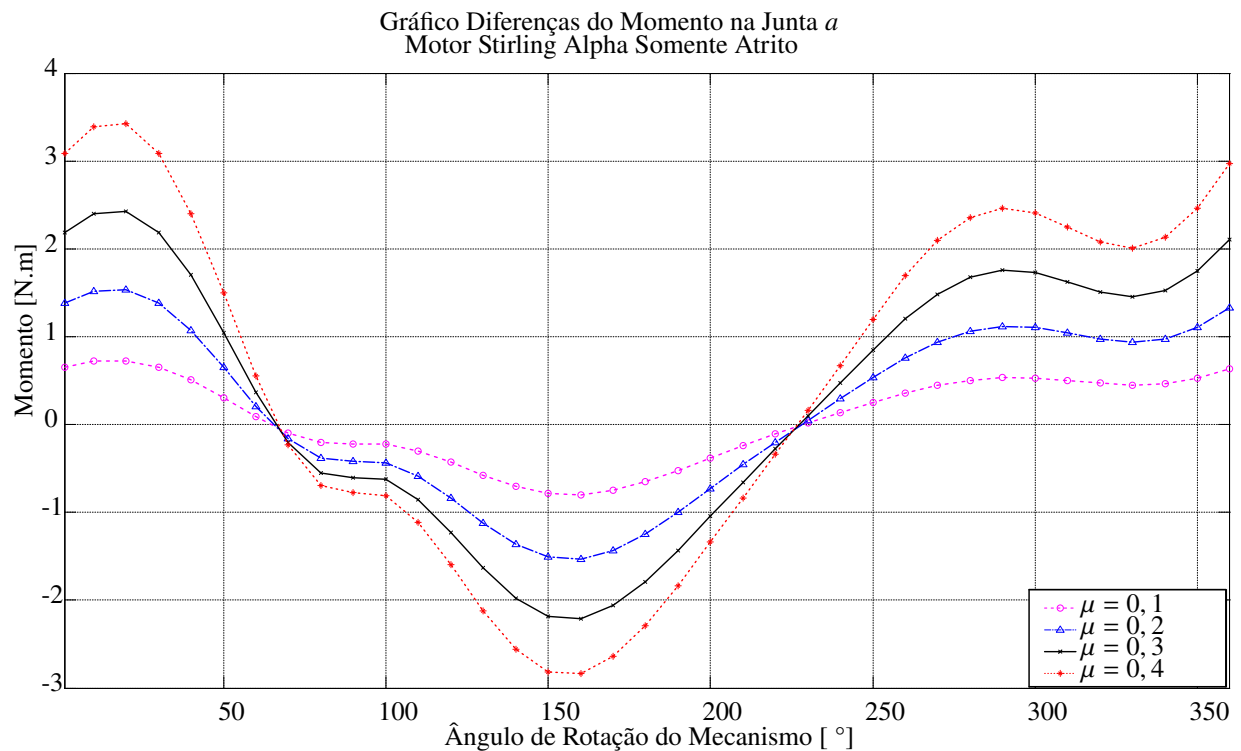
A análise realizada considerou coeficiente de atrito (μ) estático variando em 0,1 e 0,4, baseados nos dados experimentais tribológicos para apresentados por Oprüşan *et al.* (2022) para atrito de metal com metal. Esta faixa visa representar as condições de perda encontradas no motor Stirling devido dos pistões e sistemas de vedação do mesmo, o que constituem uma parcela das perdas totais do sistema. Além disso, foram atribuídos estes valores do coeficiente, a fim de promover melhor compreensão dos seus impactos a perda de potência.

A investigação foi conduzida utilizando quatro valores do coeficiente de atrito: 0,1, 0,2, 0,3 e 0,4 para realizar uma avaliação do impacto das perdas mecânicas. Os resultados obtidos são apresentados no Figura 29.

Dada proximidade dos valores obtidos nos cenários avaliados, optou-se por realizar uma análise diferencial, tomando como referência o comportamento ideal do mecanismo, ou seja, sem



perdas. Os resultados comparativos são expostos da Figura 30, que proporciona uma visualização mais clara do impacto das perdas ao longo do ciclo de operação do motor.



Com isso, os resultados demonstram que as perdas por atrito exercem um impacto significativo no desempenho do motor Stirling. Para o menor coeficiente de atrito utilizado ($\mu =$

0,1), observa-se uma redução de 0,7 N.m (de picos) no torque de saída, correspondendo a uma perda de potência aproximada de 2,6 W, o que percentualmente equivale a redução de 6% na potência nominal. Já o impacto com o aumento do coeficiente de atrito para o valor de $\mu = 0,4$ aumenta a perda, chegando a 56% da potência nominal, conforme detalhado na Tabela 10, onde pode-se observar os demais resultados dos valores analisados.

Tabela 10 – Comparação de Modelos com Diferentes Perdas por Atrito

Modelo	Trabalho Líquido	Potência Média	Perda (%)
Sem Perdas de Atrito	5,11 J	42,60 W	-
Somente com Atrito ($\mu = 0,1$)	4,80 J	40,00 W	6 %
Somente com Atrito ($\mu = 0,2$)	4,23 J	35,27 W	17 %
Somente com Atrito ($\mu = 0,3$)	3,40 J	28,34 W	33 %
Somente com Atrito ($\mu = 0,4$)	2,26 J	19,06 W	56 %

É importante ressaltar que o impacto das perdas por atrito não é uniforme ao longo do ciclo de operação do motor. As perdas são mais sensíveis nos estágios de velocidades mais reduzidas dos pistões devido as baixas velocidades. Uma vez que maiores velocidades implicam em menores perdas por atrito. Outro fator de influência nas perdas por atrito são os carregamentos nos pares cinemáticos analisados, visto que geram forças normais que estão intrinsecamente ligados ao atrito.

4.3 RESULTADOS DA ANÁLISE ESTÁTICA DO MECANISMO APLICANDO VAZAMENTO

A avaliação das perdas foi realizada por meio das equações de perda de pressão associadas aos vazamentos internos entre os pistões e os cilindros no motor Stirling, explanadas na Seção 3.7. O modelo considerou as perdas de pressão como decréscimo da força de entrada no pistão, permitindo o cálculo do impacto no torque no par cinemático A. A implementação da rotina de cálculo foi desenvolvida no software MATLAB, conforme apresentado no Apêndice A.2.

Para a análise das perdas por vazamento, foram utilizadas razões de folga pelo comprimento do cilindro baseadas nos critérios estabelecidos por Grinnell (1956). Assim, a investigação considerou quatro valores de folga diametral compreendidos entre 0,10 mm e 0,26 mm. Obtendo, assim, os resultados para diferentes folgas, que são apresentados na Figura 31.

Devido à proximidade visual das curvas resultantes, procedeu-se a uma análise diferencial tomando como referência o sistema sem perdas, conforme ilustrado na Figura 32, proporcionando maior clareza na avaliação do impacto das perdas.

A análise revelou que, mesmo sendo pequenas as folgas, as perdas resultantes mostram-se baixas inicialmente, com perdas de cerca 0,2 N.m de pico no ciclo para folga de 0,10792 mm, mas tendem a se elevar rapidamente mesmo diante de variações decimais, como observado para folga de 0,25167 mm, que apresenta um pico de perda no ciclo de 2,9 N.m.

Realizando a análise em termos de potência e percentual de perda (Tabela 11), verifica-se que com a folga diametral de 0,1 mm há uma perda de potência de 1,8%, equivalente a 0,74 W.

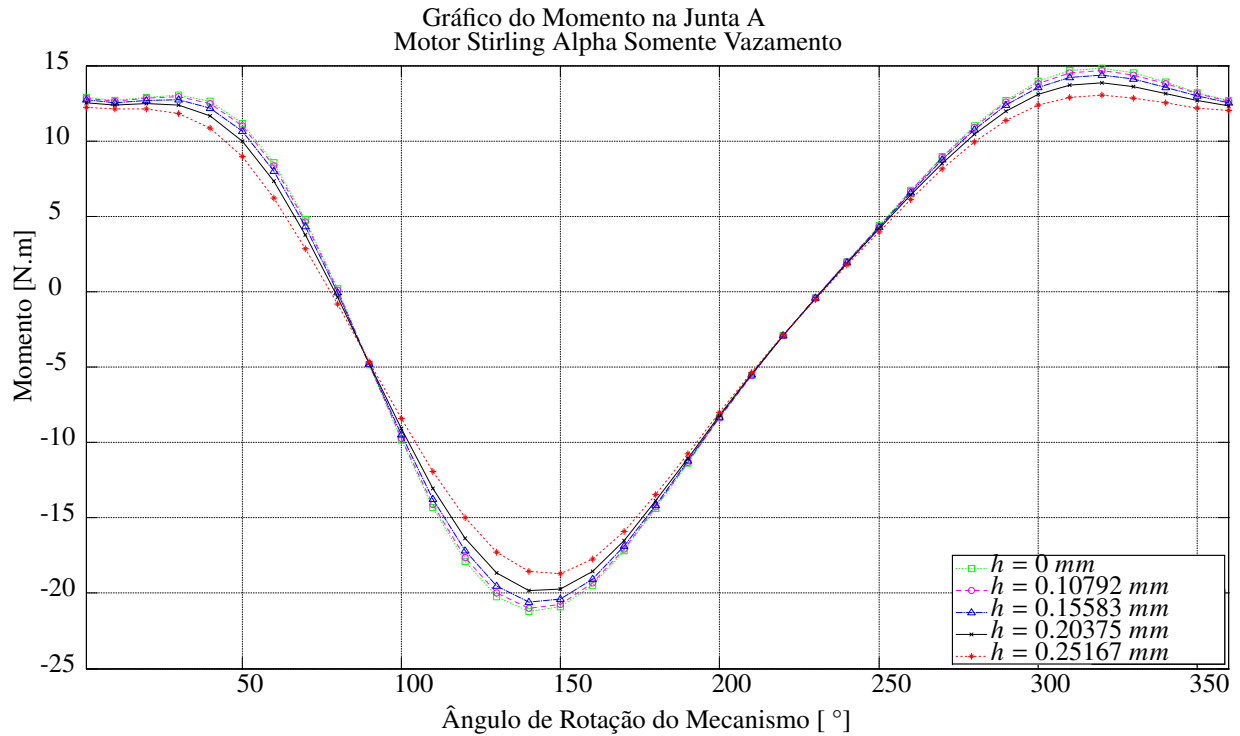


Figura 31 – Momentos na Junta A com Diferentes Folga dos Pistões

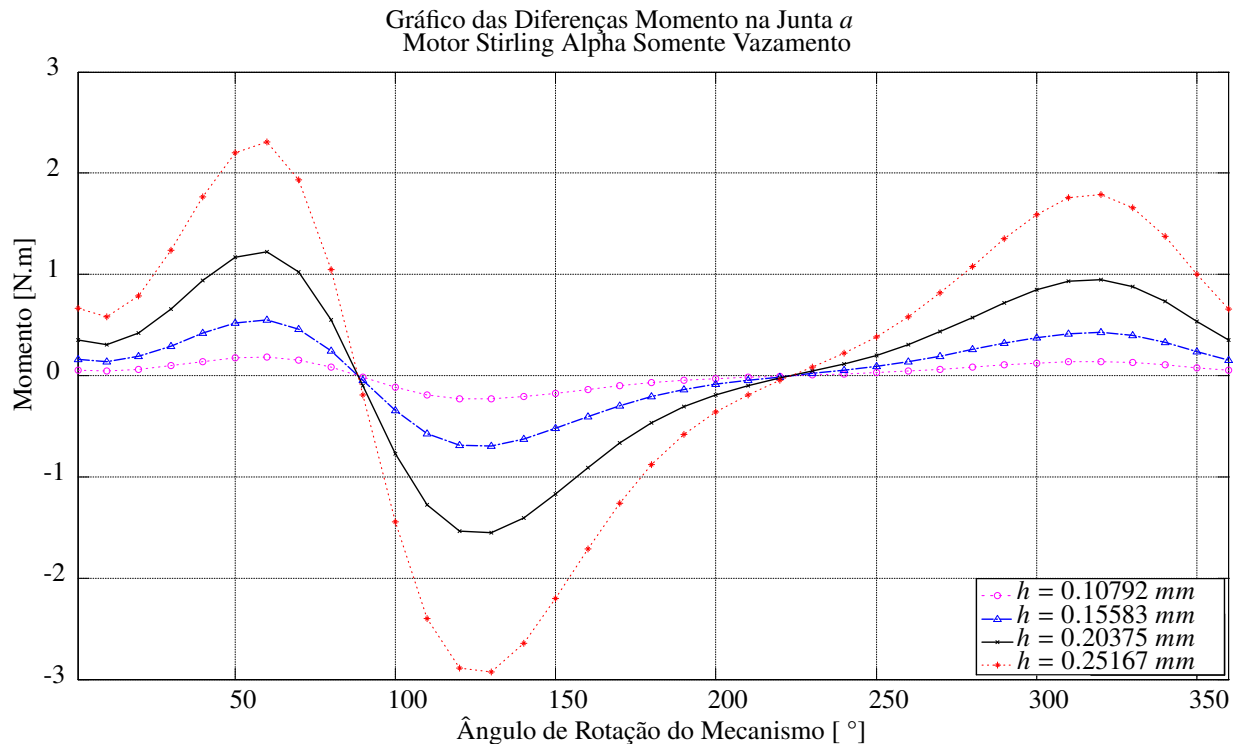


Figura 32 – Diferenças dos Momentos na Junta A para Diferentes Folgas

O impacto das perdas por vazamento intensifica-se com o aumento da folga. Para folgas de 0,2 mm e 0,25 mm, as perdas alcançaram 11,5% e 21,9% respectivamente, valores que começam a comprometer significativamente a entrega de potência do motor. Com o objetivo de explorar os limites das perdas, realizou-se uma extrapolação para uma folga diametral de 0,4 mm, que se encontra fora do intervalo estabelecido por Grinell (1956). Os resultados indicaram uma

redução de 87,9% na potência nominal, demonstrando que o motor perde, praticamente, sua funcionalidade principal e tende a não operar adequadamente.

Tabela 11 – Comparação de Modelos com Diferentes Perdas por Vazamento

Modelo	Trabalho Líquido	Potência Média	Perda (%)
Sem Perdas de Vazamento	5,11 J	42,60 W	-
Com folga ($h = 0, 10792mm$)	5,02 J	41,86 W	1,8 %
Com folga ($h = 0, 15583mm$)	4,85 J	40,38 W	5,0 %
Com folga ($h = 0, 20375mm$)	4,52 J	37,65 W	11,5 %
Com folga ($h = 0, 25167mm$)	3,99 J	33,27 W	21,9 %
Com folga ($h = 0, 4mm$)	0,62 J	5,13 W	87,9 %

Esta análise evidencia que a faixa admissível de folgas em motores Stirling é restrita e exige tolerâncias rigorosas para construção do motor, tanto no projeto quanto na manufatura. Esta sensibilidade demonstra uma desvantagem para a utilização deste tipo de motor.

4.4 ANÁLISE DE RESULTADOS CONJUNTOS

A análise comparativa dos resultados dos três modelos desenvolvidos - sem perdas, com perdas por atrito e com perdas por vazamento - fornece uma visão do impacto de cada um dos mecanismos de perda junto ao desempenho do motor Stirling.

Para uma melhor compreensão e avaliação dos dados obtidos é apresentada a Tabela 12, que contém a síntese do que foi trabalho nas seções anteriores.

Tabela 12 – Comparação de modelos com diferentes perdas por atrito e folga

Modelo	Trabalho Líquido	Potência Média	Perda (%)
Sem Perdas	5,11 J	42,60 W	–
...			
Somente com Atrito ($\mu = 0,1$)	4,80 J	40,00 W	6 %
Somente com Atrito ($\mu = 0,2$)	4,23 J	35,27 W	17 %
Somente com Atrito ($\mu = 0,3$)	3,40 J	28,34 W	33 %
Somente com Atrito ($\mu = 0,4$)	2,26 J	19,06 W	56 %
...			
Com folga ($h = 0,10792\text{ mm}$)	5,02 J	41,86 W	1,8 %
Com folga ($h = 0,15583\text{ mm}$)	4,85 J	40,38 W	5,0 %
Com folga ($h = 0,20375\text{ mm}$)	4,52 J	37,65 W	11,5 %
Com folga ($h = 0,25167\text{ mm}$)	3,99 J	33,27 W	21,9 %
Com folga ($h = 0,4\text{ mm}$)	0,62 J	5,13 W	87,9 %

Quando expostos conjuntamente os valores, nota-se a interferência direta dos mecanismos de perdas e dependendo do nível de influência tende a ser severo e comprometedor para a funcionalidade do motor.

Com o intuito de ressaltar as características e as nuances de cada modelo de perda é necessário pontuar individualmente cada modelo. Para isso, tem-se as seguintes observações:

- No modelo de perda de atrito é notório o aumento progressivo no desempenho do motor. O fator atrito é mais pronunciado durante os estágios de baixa velocidade linear dos pistões, seja no arranque do motor ou retomadas dos pontos mortos inferiores e superiores, onde as forças normais são mais incidentes, acarretando a notável perda.

- No modelo de perda por vazamento evidencia-se a grande sensibilidade às tolerâncias de folga. Variações de pequena escala resultam em perdas acentuadas de potência, mostrando que ajustes e cuidados em todas as fases de um projeto de motor são essenciais. Outro ponto a se destacar é que as perdas por vazamento são relacionadas diretamente pelas diferenças de pressão, o que quer dizer, que nos estágios de maiores pressões internas de cada uma das câmaras, resultam em números mais expressivos de perdas, piorando esses números devido a maiores folgas.

A característica que os modelos se assemelham é a questão da não uniformidade da aplicação das perdas. O atrito possui a característica atrelada a velocidade dos pistões enquanto o vazamento com as pressões. Isto indica as particularidades, bem como oportunidades de estudos mais aprofundados nestes quesitos.

Em uma análise em conjunta dos modelos, que representados por um dos casos na Tabela 13 é possível notar que as perdas são de caráter somatório, que aparentemente não possuem uma relação direta, mas ao analisar isto se mostra o oposto.

Tabela 13 – Comparação de Modelos com Diferentes Perdas

Modelo	Trabalho Líquido	Potência Média	Perda (%)
Sem Perdas	5,11 J	42,60 W	-
Somente com Atrito ($\mu = 0,1$)	4,80 J	40,00 W	6 %
Somente com Vazamento ($h = 0,00010792$ m)	5,02 J	41,86 W	1,8 %
Com Atrito e Vazamento	4,71 J	39,26 W	7,8 %

O nível de comprometimento entre atrito, em especial dos pistões, e vazamento é intrinsecamente ligado. Visto que para um menor vazamento, exige uma melhor vedação, o que acarreta em maior atrito. Por isso, o balanço entre essas variáveis é de extrema importância. O uso de sistemas de vedação que proporcionam menor atrito possui a melhor característica para os dois casos, já que o vazamento permitido, se é que se pode expressar assim, possui uma faixa muito limitante e a quebra dos limites inviabiliza um motor.

Deste modo, é possível inferir que ambos os modelos de perdas possuem grande significância quando se analisam as perdas de um motor Stirling. Estas características que por vezes não são levadas em consideração de forma relevante devem ser tratadas de forma mais rigorosa a fim de produzir motores Stirling com maior desempenho e vir a trazê-los como mais relevância ao mercado e às aplicações desejadas.

5 CONCLUSÃO

A presente dissertação propôs um novo modelo de análise do motor Stirling tipo Alfa por meio da análise cinetoestática com foco nas perdas mecânicas associadas ao mecanismo que envolve a dinâmica do motor. O trabalho buscou preencher a lacuna de estudo nessas áreas, que frequentemente são mencionadas como fatores limitantes da eficiência, mas raramente são investigadas de forma mais aprofundada. Para que isso ocorresse, a metodologia centralizou-se na aplicação do Método de Davies como ferramenta matemática para análise do mecanismos.

Ao longo do trabalho, foram explanadas as características e funções do motor Stirling, determinadas as cadeias cinemáticas envolvidas e coletados dados referenciais para análise. A aplicação do método de Davies permitiu a resolução da cinemática e estática do mecanismo do motor, que permitiu a implementação de modelos matemáticos relativos as perdas por atrito e vazamento. A análise cinemática demonstrou o comportamento das velocidades lineares dos pistões, mostrando ser ter um comportamento senoidal e defasado, confirmando as características do motor. Já a análise estática possibilitou a quantificação do torque de saída do motor e a identificação da influência das forças que promovem as perdas.

As análises estabeleceram um desempenho de referência teórico por meio do modelo ideal, enquanto os modelos de perda evidenciaram os desafios enfrentados na implementação real desta tecnologia. As perdas por atrito demonstraram impacto progressivo no desempenho, especialmente nos estágios de baixas velocidades. Por sua vez, as perdas por vazamento indicaram a extrema sensibilidade em relação às tolerâncias dimensionais, em que variações milimétricas resultam em impacto acentuado na perda de potência. Isto mostrou que a necessidade de escolhas de materiais adequados é de grande importância para um projeto de motor, bem como tolerâncias rigorosas. A análise conjunta evidencia que os mecanismos de perdas apresentam naturezas conflitantes, onde a minimização dos vazamentos intensifica o atrito, e vice-versa, estabelecendo um dilema que deve ser solucionado por meio de uma otimização visando o equilíbrio entre estes fatores e, que por fim, resultará em melhores produtos, além de promover maior relevância ao motor Stirling.

Contudo, o método de Davies provou-se eficaz para analisar o comportamento cinetoestático do mecanismo do motor Stirling tipo Alfa, quantificando os impactos das perdas mecânicas que frequentemente são, de certa forma, subestimadas. Os resultados destacam que apesar de um potencial teórico de alta eficiência deste tipo de motor, seu resultado final é fortemente influenciado pelos fatores de atrito e vazamento, que devem ser tratados com maior rigor. Por fim, a compreensão aprofundada deste sistema é fundamental para o desenvolvimento de soluções que visem aprimorar a eficiência mecânica e o desempenho geral dos motores Stirling.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Baseado nos resultados e nas lacunas identificadas durante este estudo, sugerem-se as seguintes direções para trabalhos futuros:

- Incorporação de outras perdas em um modelo matemático a fim de ampliar a análise, incluem-se nestes casos modelos termodinâmicos, bem como suas perdas e mecanismos de desgaste de peças.
- Validação dos resultados por meio experimental, coletando dados de atrito e vazamento em motores Stirling reais sob diversas condições operacionais, a fim de validar e refinar os modelos matemáticos propostos.
- Análise da relação de atrito e vazamento com diferentes faixas de rotação para compreender o efeito sobre as perdas.
- Análise da relação de atrito e vazamento, buscando otimizar estes parâmetros com o intuito de conseguir menores atritos e menores vazamentos.
- Modelagem de desgaste e fadiga para investigar o impacto do atrito e das pressões sobre o desgaste dos componentes ao longo da vida útil do motor.
- Análise de materiais para aprimoramento dos coeficientes de atrito e das propriedades de vedação, bem como revestimentos superficiais que possam mitigar as perdas mecânicas.
- Desenvolvimento de um modelo de otimização de multiparâmetros para aprimoramento do desempenho.

BIBLIOGRAFIA

- ABUELYAMEN, A *et al.* Parametric study on beta-type Stirling engine. **Energy Conversion and Management**, Elsevier, v. 145, p. 53–63, 2017.
- AHMED, Fawad *et al.* A comprehensive review on modeling and performance optimization of Stirling engine. **International Journal of Energy Research**, Wiley Online Library, v. 44, n. 8, p. 6098–6127, 2020.
- AKSOY, Fatih *et al.* A thermodynamic approach to compare the performance of rhombic-drive and crank-drive mechanisms for a beta-type Stirling engine. **Applied Thermal Engineering**, Elsevier, v. 93, p. 359–367, 2016.
- ALMAJRI, Ahmad K; MAHMOUD, Saad; AL-DADAH, Raya. Modelling and parametric study of an efficient Alpha type Stirling engine performance based on 3D CFD analysis. **Energy conversion and management**, Elsevier, v. 145, p. 93–106, 2017.
- ANKIT ROHATGI. **WebPlotDigitizer**. [S.l.: s.n.], 2025. <https://automeris.io/>. Acesso em: 07 abr. 2025.
- ARSLAN, T Alp; KOCAKULAK, Tolga. A comprehensive review on stirling engines. **Engineering Perspective**, v. 3, n. 3, p. 42–56, 2023.
- BACHELIER, C. Stirling engines A technology overview. **Royal Institute of Technology Stockholm, Sweden (Issue July)**, 2009.
- BATAINEH, Khaled. Mathematical formulation of alpha-type Stirling engine with Ross Yoke mechanism. **Energy**, Elsevier, v. 164, p. 1178–1199, 2018.
- BATSCHAUER, Alan *et al.* **Desenvolvimento de uma bancada de ensaio para medir a força de atrito no par pistão-cilindro em compressores alternativos**. 2018. Diss. (Mestrado).
- BORETTI, Alberto. α -Stirling hydrogen engines for concentrated solar power. **International journal of hydrogen energy**, Elsevier, v. 46, n. 29, p. 16241–16247, 2021.
- BORETTI, Alberto. α -Stirling hydrogen engines for concentrated solar power. **International journal of hydrogen energy**, Elsevier, v. 46, n. 29, p. 16241–16247, 2021.
- CARBONI, Andrea Piga *et al.* Análise de mecanismos com restrições redundantes através da aplicação da teoria de matroides, 2015.
- CAZANGI, Humberto Reder *et al.* **Aplicação do método de Davies para análise cinemática e estática de mecanismos com múltiplos graus de liberdade**. 2008. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

CHENG, Chin-Hsiang; YU, Ying-Ju. Dynamic simulation of a beta-type Stirling engine with cam-drive mechanism via the combination of the thermodynamic and dynamic models.

Renewable energy, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 714–725, 2011.

CUTA, Carlos Pinzón *et al.* On the Singularity Analysis of Origami Using Graph and Screw Theories. *In: 2024 6th International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots (ReMAR)*. [S.l.: s.n.], 2024. P. 151–158. DOI: 10.1109/ReMAR61031.2024.10618100.

DAVIES, TH. Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains. **Mechanism and machine theory**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 171–183, 1981.

DEETLEFS, Ivan Niell. **Design, simulation, manufacture and testing of a free-piston Stirling engine**. 2014. Tese (Doutorado) – Stellenbosch: Stellenbosch University.

EGAS, Jose; CLUCAS, Don M. Stirling engine configuration selection. **Energies**, MDPI, v. 11, n. 3, p. 584, 2018.

EROL, Derviş; YAMAN, Hayri; DOĞAN, Battal. A review development of rhombic drive mechanism used in the Stirling engines. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, Elsevier, v. 78, p. 1044–1067, 2017.

FINKELSTEIN, Theodor; ORGAN, Allan J. **Air engines: the history, science, and reality of the perfect engine**. [S.l.]: ASME Press, 2001.

FOX, Robert W; PRITCHARD, Philip J; MCDONALD, Alan T. **Introdução À Mecânica Dos Fluidos**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

GRINNELL, SK. Flow of a compressible fluid in a thin passage. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, American Society of Mechanical Engineers, v. 78, n. 4, p. 765–770, 1956.

HACHEM, Houda *et al.* Technological challenges and optimization efforts of the Stirling machine: A review. **Energy conversion and management**, Elsevier, v. 171, p. 1365–1387, 2018.

HIRATA, Koichi. Schmidt theory for Stirling engines. **National Maritime Research Institute (NMRI)**, 1997.

HUTCHINGS, Ian; SHIPWAY, Philip. **Tribology: friction and wear of engineering materials**. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2017.

JUNIOR, Luiz Carlos Marques. ESTUDO SOBRE MOTORES STIRLING DE BAIXA TEMPERATURA COM ENERGIA SOLAR PARA BOMBEAMENTO DE ÁGUA. **Revista Eletrônica eF@ tec**, v. 5, n. 1, p. 11–11, 2015.

KITAZAKI, Masato; YUZAKI, Keiichiro; AKAZAWA, Teruyuki. Development Of Zero Emission Generating System. **Stirling Engine. YANMAR**. https://www.yanmar.com/in/technology/technical_review/2017/0127_5.html, 2017.

KRAMENS, Janis *et al.* Research of a biomass boiler with stirling engine microgeneration unit. **Environmental and Climate Technologies**, Sciendo, v. 25, p. 587–599, 1 jan. 2021. ISSN 22558837. DOI: 10.2478/rtuect-2021-0043.

KROPIWNICKI, Jacek. Analysis of start energy of Stirling engine type alpha. **Archives of Thermodynamics**, The Committee of Thermodynamics e Combustion of the Polish Academy of . . . , p. 243–259, 2019.

LAUS, LP; SIMAS, H; MARTINS, D. Efficiency of gear trains determined using graph and screw theories. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 52, p. 296–325, 2012.

LAUS, Luís Paulo. **DETERMINAÇÃO DA EFICIÊNCIA DE MÁQUINAS COM BASE EM TEORIA DE HELICOIDES E GRAFOS: APLICAÇÃO EM TRENS DE ENGRENAGENS E ROBÔS PARALELOS**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

LIAO, Tianjun; LIN, Jian. Optimum performance characteristics of a solar-driven Stirling heat engine system. **Energy Conversion and Management**, Elsevier, v. 97, p. 20–25, 2015.

LOVERIDGE, DW. Robert Stirling—Preacher and Inventor. **Transactions of the Newcomen Society**, Taylor & Francis, v. 50, n. 1, p. 1–10, 1978.

MAIER, Christoph *et al.* **STIRLING ENGINE**. [S.l.]: University of Gavle, 2007.

MARTINI, William R. **Stirling engine design manual**. [S.l.], 1983.

MARTINS, Daniel. **Análise Cinemática Hierárquica de Robôs Manipuladores**. 2002. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

MARTINS, Daniel; MURAI, Estevan Hideki. **Mecanismos: síntese e análise com aplicações em robótica**. 1. ed. [S.l.]: Editora UFSC, 2019. v. 1.

MATHWORKS. **polyfit - Polynomial curve fitting**. [S.l.: s.n.], 2025. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>. Acesso em: 07 abr. 2025.

MATHWORKS. **trapz - Trapezoidal numerical integration**. [S.l.: s.n.], 2025. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/trapz.html>. Acesso em: 07 abr. 2025.

NARAYAN, Sunny; GUPTA, Vikas. Overview of working of Stirling engines. **Journal of Engineering Studies and Research**, v. 21, n. 4, p. 45–53, 2015.

NASCIMENTO, Henderson Cari. **Modelo para previsão do trabalho de atrito num motor de combustão interna rotativo**. 2017. Diss. (Mestrado) – Instituto Politecnico do Porto (Portugal).

OPRIŞAN, CM *et al.* Static and dynamic friction coefficient in low loads and sliding speed conditions. *In: IOP PUBLISHING, 1. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. [S.l.: s.n.], 2022. P. 012012.

PEROZZIELLO, Carmela; GROSU, Lavinia; VAGLIECO, Bianca Maria. Free-piston stirling engine technologies and models: A review. **Energies**, MDPI, v. 14, n. 21, p. 7009, 2021.

PRIETO, JI; STEFANOVSKIY, AB. Dimensional analysis of leakage and mechanical power losses of kinematic Stirling engines. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 217, n. 8, p. 917–934, 2003.

RAHMATI, A *et al.* Dimensional synthesis of the Stirling engine based on optimizing the output work by evolutionary algorithms. **Energy Reports**, Elsevier, v. 6, p. 1468–1486, 2020.

READER, GT. Stirling regenerators. **Heat transfer engineering**, Taylor & Francis, v. 15, n. 2, p. 19–25, 1994.

RODRIGUES, Carlos Coutinho; GOMES, Sofia; MENDONÇA, Clara Dahlkvist. COP 28m: waiting on the world to change. **IDN Brief**, Instituto da Defesa Nacional, 2023.

SHEEHAN, Michael. **Fabrication and design of a Stirling Engine powered by hydrogen**. 2022. Tese (Doutorado) – University of Southern Queensland.

SILVA, ELB *et al.* Sistema de Geração de Energia com Motor Stirling. *In: VI Congresso de Inovação Tecnológica em Energia Elétrica-CITENEL*. [S.l.: s.n.], 2011.

SIMONI, R; CARBONI, AP; MARTINS, D. Enumeration of kinematic chains and mechanisms. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 223, n. 4, p. 1017–1024, 2009.

SLAVIN, VS; BAKOS, GC; FINNIKOV, KA. Conversion of thermal energy into electricity via a water pump operating in Stirling engine cycle. **Applied energy**, Elsevier, v. 86, n. 7-8, p. 1162–1169, 2009.

SOUZA, Marina Baldissera De. **POWERTRAIN OPTIMIZATION OF HYBRID AND ELECTRIC VEHICLES**. 2023. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina.

STACHOWIAK, Gwidon; BATCHELOR, Andrew W. **Engineering tribology**. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2025.

STOLYAROV, SP; STOLAYROV, AS. Stirling generators: challenges and opportunities. **Russian Electrical Engineering**, Springer, v. 88, p. 778–782, 2017.

THOMBARE, DG; VERMA, SK. Technological development in the Stirling cycle engines. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, Elsevier, v. 12, n. 1, p. 1–38, 2008.

TOGHYANI, Somayeh *et al.* Multi-objective optimization of GPU3 Stirling engine using third order analysis. **Energy Conversion and Management**, Elsevier, v. 87, p. 521–529, 2014.

VAHID, Davood Jalali; OSKOU EI, Hojjat Danandeh. Design and anylysis of gamma type Stirling engine. **Mechanics & Industry**, EDP Sciences, v. 21, n. 5, p. 511, 2020.

WANG, Kai *et al.* Stirling cycle engines for recovering low and moderate temperature heat: A review. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, Elsevier, v. 62, p. 89–108, 2016.

YANG, Hang-Suin; ALI, Muhammad Aon; LIANG, Yi-Chen. A study of the thermoacoustic effect in the thermal-lag, pulse-tube, and alpha-type Stirling engines based on a computational fluid dynamic model. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, Elsevier, v. 162, p. 108632, 2025.

YAO, Lee Shee; WAHAB, Hanani Abdul. Design a Solar Powered Stirling Engine Prototype to Produce Electricity. **JSE Journal of Science and Engineering**, v. 1, n. 1, p. 30–37, 2020.

ZARE, Shahryar; TAVAKOLPOUR-SALEH, AliReza. Free piston Stirling engines: A review. **International Journal of Energy Research**, Wiley Online Library, v. 44, n. 7, p. 5039–5070, 2020.

ZARE, Shahryar; TAVAKOLPOUR-SALEH, AR *et al.* Thermoacoustic Stirling engines: A review. **International Journal of Green Energy**, Taylor & Francis, v. 20, n. 1, p. 89–111, 2023.

ZHU, Shunmin *et al.* A review of Stirling-engine-based combined heat and power technology. **Applied Energy**, Elsevier, v. 294, p. 116965, 2021.

Apêndices


```

44 %%% Abaixo sao montados os Vetores de Posicao (So) de cada junta
45 %%% a partir das equacoes atribuidas acima
46 s0a=[0; 0; 0];
47 s0b=[elo1*cos(betar); elo1*sin(betar); 0];
48 s0c=[cx; 0; 0];
49     dx=cx;
50 s0d=[dx; 0; 0];
51 s0e=[elo1*cos(betar); elo1*sin(betar); 0];
52 s0f=[fx;fy; 0];
53     gx=fx;
54     gy=fy;
55 s0g=[gx;gy; 0];
56 %%% Fim da montagem dos Vetores de Posicao (So) das juntas
57
58 % Direcoes unitarias
59 %%% Vetor de direcao unitaria no Eixo X, geralmente utilizados em juntas
    prismaticas
60 u = [1; 0; 0];
61 %%% Vetor de direcao unitaria no Eixo y, geralmente utilizados em juntas
    prismaticas
62 v = [0; 1; 0];
63 %%% Vetor de direcao unitaria no Eixo Z, geralmente utilizados em juntas
    rotativas
64 w = [0; 0; 1];
65 %%% Vetor de direcao unitaria planar e com angulo em relacao aos eixos X e
    Y. Pode ser usado para junta prismatica inclinada.
66 u_comp_d = [cos(fas_angr); sin(fas_angr); 0];
67
68 %%% Abaixo sao montados os Vetores de Posicao (So) de cada junta
69 %%% a partir das equacoes atribuidas acima
70 s0a=[0; 0; 0];
71 s0b=[elo1*cos(betar); elo1*sin(betar); 0];
72 s0c=[cx; 0; 0];
73     dx=cx;
74 s0d=[dx; 0; 0];
75 s0e=[elo1*cos(betar); elo1*sin(betar); 0];
76 s0f=[fx;fy; 0];
77     gx=fx;
78     gy=fy;
79 s0g=[gx;gy; 0];
80 %%% Fim da montagem dos Vetores de Posicao (So) das juntas
81
82 % Direcoes unitarias
83 %%% Vetor de direcao unitaria no Eixo X, geralmente utilizados em juntas
    prismaticas
84 u = [1; 0; 0];

```

```

85 %%%% Vetor de direcao unitaria no Eixo y, geralmente utilizados em juntas
    prismaticas
86 v = [0; 1; 0];
87 %%%% Vetor de direcao unitaria no Eixo Z, geralmente utilizados em juntas
    rotativas
88 w = [0; 0; 1];
89 %%%% Vetor de direcao unitaria planar e com angulo em relacao aos eixos X e
    Y. Pode ser usado para junta prismatica inclinada.
90 u_comp_d = [cos(fas_angr); sin(fas_angr); 0];
91
92 %% Motion analysis
93
94 %%%% Determinacao da Matriz de Circuitos (Fundamental circuit matrix)
95 %%%%%%%%% cada coluna representa a junta escrita acima delas
96 %      a  b  c  d  e  f  g
97 B = [-1  0  0  0 -1 -1  1;
98      -1 -1 -1  1  0  0  0];
99
100 %%%% Identificacao da quantidade de circuitos independentes, ou seja, a
101 %%%% quantidade de linhas da matriz B
102 %%%%%%%%% Sera utilizado no laço de repeticao de montagem da matriz de
103 %%%%%%%%% movimento unitario em rede (MN)
104 nu = size(B,1); % number of independent circuito
105
106 %%%% Montagem dos heligiros onde a primeira parcela e o vetor de
107 %%%% direcao unitaria e a segunda parcela e produto vetorial entre o
108 %%%% vetor de posicao e o vetor de dr. unitaria. Lembrando que o passo
109 %%%% das juntas rotativas sao zero (0) e o passo das juntas prismaticas
110 %%%% sao infinito.
111 %%%% Lembrando que a forma de escrita das Heliforcas e radial
112 % Heligiros
113 s_Wa = [w; cross(s0a,w)]; %Junta de revolucao por isso que e w%
114 s_Wb = [w; cross(s0b,w)]; %Junta de revolucao por isso que e w%
115 s_Wc = [w; cross(s0c,w)]; %Junta de revolucao por isso que e w%
116 s_Wd = [0; 0; 0; u]; %Junta de prismatica por isso que e w%
117 s_We = [w; cross(s0e,w)]; %Junta de revolucao por isso que e w%
118 s_Wf = [w; cross(s0f,w)]; %Junta de revolucao por isso que e w%
119 s_Wg = [0; 0; 0; v]; %Junta de prismatica na vertical por isso que e v%
120
121
122 % Unit motion matrix
123 %%%%%%%%% Montagem da Matriz de Movimento Unitario (MD) com 6 elementos
124 %%%%%%%%% referentes a cada uma das juntas, sendo representadas pelos seus
    heligiros
125 MD = [s_Wa s_Wb s_Wc s_Wd s_We s_Wf s_Wg];
126 %%%%%%%%% Aqui sao separados somente os elementos nao nulos de cada vetor
127 %%%%%%%%% ou seja, as linhas 3, 4 e 5

```

```

128 MD = MD([3,4,5],:);
129
130 % Gross degree of freedom
131 %%%% Calcula a soma dos graus de liberdade de cada junta, ou seja,
132 %%%% calcula-se quantas colunas tem a matriz MD
133 F = size(MD, 2);
134
135 % Network Unit Motion Matrix
136 %%%% Montagem da Matriz de Movimento Unitaria em Rede
137 %%%% O laco de repeticao e rodado igualmente ao numero de numero de
138 %%%% circuitos
139 MN = zeros(lambda*nu,F);
140 for i=1:nu
141     %%% aqui e feita a matriz totalmente nula a nao ser a diagonal
142     %%% principal que e a linha I da matriz de circuitos, ou seja,
143     %%% representa os valores de um circuito
144     D=diag(B(i,:));
145     %%% agora e feita a multiplicacao da matriz de movimento unitaria
146     %%% (MD) com a diagonal da linha da matriz de circuitos (B)
147     MN(i*lambda-(lambda-1):i*lambda,:)=MD*D;
148 end
149
150 % Grau de Liberdade Liquido
151 %%% Tem-se soma dos graus de liberdade de cada junta, calcula-se o
152 %%% posto da matriz MN, ou seja, quantas linhas independentes tem a
153 %%% matriz. Desse modo, realiza-se a subtracao para verificar quantas
154 %%% sao o grau de liberdade liquido, ou quantas forcas sao necessarias
155 %%% para por em movimento o sistema
156 FN = F - rank(MN);
157 % a d g b c e f
158 % 1 2 3 4 5 6 7
159
160 %%%O que o posto de uma matriz representa?
161 %%% - Linearmente independente:
162 %%%     O posto indica o numero maximo de colunas (ou linhas) da matriz que
163 %%%     nao podem ser escritas como combinacoes lineares umas das outras.
164 %%% - Dimensao do espaco gerado:
165 %%%     O posto de uma matriz e igual a dimensao do espaco vetorial gerado
166 %%%     pelas colunas (ou linhas) da matriz.
167
168 %%% Se atribui o valor 2 para a variavel aux a fim de ter um parametro
169 %%% para atualizacao do vetor psi no proximo laco de repeticao abaixo
170 aux = 2;
171
172 psi = [tA aux aux aux aux aux]';
173 vp = tA; %%% variavel primaria, ou seja, valor de entrada do
174 %%% problema (valor conhecido)

```

```

172 MNp = MN(:,1);   %% MNp recebe a primeira coluna da matriz MN
173 MNs = MN;        %% MNs recebe uma copia da matriz MN
174 MNs(:,1) = [];   %% e excluida a primeira coluna da matriz MNs, e as demais
    permanecem na matriz MNs
175 vs=-MNs^(-1)*MNp*vp; % Secondary variables
176
177 %%% Explicando a equacao de vs
178 %%% MNs^(-1): Calcula a inversa da matriz MNs (desde que seja quadrada e
    invertivel).
179 %%% MNp*vp: Multiplica o vetor das variaveis primarias (MNp) pelo valor
    de entrada vp (que e tA)
180 %%% MNs^(-1)*(MNp*vp): resolve um sistema linear do tipo Ax = b, onde A
    = MNs e b = MNp.
181 %%% 0 sinal negativo indica que o resultado final sera invertido.
182
183 %% Aqui sao atribuidos a cada variavel os valores dos torques e forcas
184 %% dependendo do tipo de junta, na analise cinematica
185 % s_Wa s_Wd s_Wg s_Wb s_Wc s_We s_Wf
186 Wa = psi(1);
187 Wb = psi(2);
188 Wc = psi(3);
189 Wd = psi(4);
190 We = psi(5);
191 Wf = psi(6);
192 Wg = psi(7);

```

A.1 SCRIPT MATLAB: CÁLCULO DAS FORÇAS DE ENTRADA

Os cálculos abaixo fazem a busca da pressão nas câmaras e cálculo das forças de entrada nos pistões, também é calculado as perdas devido a vazamento.

```

1
2 %%%%%%%%%%%%%%% CALCULO CILINDRO DE COMPRESSAO %%%%%%%%%%%%%%%
3
4 % Calculo do volume instantaneo da camara de COMPRESSAO(m3)
5 %%% esse volume vem a ser a soma do volume morto mais o volume devido
6 %%% a movimentacao do sistema, neste caso e o biela-manivela
7 %%% a variavel pms e a posicao onde o pistao esta em sua distancia
8 %%% maxima
9 pist_comp=s0c(1,1);   %% posicao do ponto morto superior do pistao de
    compressao (m)
10 vds_comp=0.000043;   %% volume do espaco morto do cilindro de
    compressao(m3)
11 v_inst_c=vds_comp+((pms_c-s0c(1,1))*ap_c); %% volume instataneo da camara
    de compressao (m3)
12 % Fim Calculo do volume instantaneo
13

```

```

14 % Pressoes medias nas camaras em Pascal
15 % Transformando a unidade de pressao dos cilindros de BAR para Pascal
16 pm_c=pm_comp*10^5;   %%% pressao media na camara de compressao, em Pascal (
    Pa)
17 % Pressoes nas camaras em Pascal
18     % Transformando a unidade de pressao dos cilindros de BAR para Pascal (
        Pa)
19 pc_Pa=compres*10^5;   %%% pressao na camara de compressao, em Pascal
20
21 % Calculo das forcas BRUTAS sobre os pistoes (SEM PERDAS)
22     % A partir da forca exercida no pistao, realiza-se o calculo para
23     % obtencao da pressao na camara (em Newtons)
24     %%% Os diametros sao divididos por 1000, pois estao em milimetros
25     pcc_s_vaz=(pc_Pa)*(pi*((d_comp/1000)/2)^2); %%% forca no pistao de
        compressao, em Newtons
26 % Fim Calculo das forcas BRUTAS
27
28 % Calculo da perda de fluxo por vazamento na camara de COMPRESSAO(vazao
    volumetrica - m3/s)
29 v_leak_comp=((pc_Pa^2-pm^2)*pi*(d_comp/1000)*h^3)/(24*pc_Pa*visc_ar_25*
    comp_pist); %%% trocado o pm_c (pressao media do sistema)por pm (pressao
    atmosferica)
30
31 % Calculo da perda de pressao no cilindro de COMPRESSAO devido a vazamento
    (Pa)
32 pres_vaz_c=(pc_Pa/v_inst_c)*v_leak_comp*(delta_teta/(2*pi*rps));
33
34 % Calculo da forca perdida devido ao vazamento no cilindro de COMPRESSAO (
    em Newtons)
35 f_vaz_c=pres_vaz_c*ap_c;
36
37 % Calculo da forca que age no pistao COMPRESSAO - e contabilizada a perda
    por vazamento - (em Newtons)
38 f_pis_c=pcc_s_vaz-f_vaz_c;
39
40 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CALCULO CILINDRO DE EXPANSAO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41 % Calculo do volume instantaneo da camara de COMPRESSAO(m3)
42 %%% esse volume vem a ser a soma do volume morto mais o volume devido
43 %%% a movimentacao do sistema, neste caso e o biela-manivela
44 %%% a vairavel pms e a posicao onde o pistao esta em sua distancia
45 %%% maxima
46 pist_exp=s0f(2,1);      %%% posicao do ponto morto superior do pistao de
    expansao (m)
47 vds_exp=0.000053;      %%% volume do espaco morto do cilindro de compressao(
    m3)
48 v_inst_e=vds_exp+((pms_e-s0f(2,1))*ap_e); %%% volume instataneo da camara
    de expansao (m3)

```

```

49 % Fim Calculo do volume instantaneo
50
51 % Pressoes medias nas camaras em Pascal
52     % Transformando a unidade de pressao dos cilindros de BAR para Pascal
53 pm_e=pm_exp*10^5;    %%% pressao media na camara de expansao, em Pascal
54
55 % Pressoes nas camaras em Pascal
56     % Transformando a unidade de pressao dos cilindros de BAR para Pascal
57 pe_Pa=expans*10^5;    %%% pressao na camara de expansao, em Pascal
58 % Calculo das forcas BRUTAS sobre os pistoes (SEM PERDAS)
59     % A partir da forza exercida no pistao, realiza-se o calculo para
60     % obtencao da pressao na camara (em Newtons)
61         %%% Os diametros sao divididos por 1000, pois estao em milimetros
62         pee_s_vaz=(pe_Pa)*(pi*((d_exp/1000)/2)^2);    %%% forza no pistao de
            expansao, em Newtons
63 % Fim Calculo das forcas BRUTAS
64
65 % Calculo da perda de fluxo por vazamento na camara de EXPANSAO(vazao
    volumetrica - m3/s)
66 v_leak_exp=((pe_Pa^2-pm^2)*pi*(d_exp/1000)*h^3)/(24*pe_Pa*visc_ar_25*
    comp_pist);%%% trocado o pm_e (pressao media do sistema)por pm (pressao
    atmosferica)
67
68 % Calculo da perda de pressao no cilindro de EXPANSAO devido a vazamento (
    Pa)
69 pres_vaz_e=(pe_Pa/v_inst_e)*v_leak_exp*(delta_teta/(2*pi*rps));
70
71 % Calculo da forza perdida devido ao vazamento no cilindro de EXPANSAO (em
    Newtons)
72 f_vaz_e=pres_vaz_e*ap_e;
73
74 % Calculo da forza que age no pistao EXPANSAO - e contabilizada a perda por
    vazamento - (em Newtons)
75 f_pis_e=pee_s_vaz-f_vaz_e;
76 f_pistao_exp=[f_pistao_exp,pm];

```

A.2 SCRIPT MATLAB: ANÁLISE ESTÁTICA SEM PERDAS OU COM VAZAMENTO

A rotina abaixo realiza o procedimento de análise estática para o mecanismo sem perdas ou com perdas por vazamento, o que modifica entre eles são os dados de entrada, ou seja, as variáveis primárias devem ser alteradas conforme o que se busca calcular.

1	
2	%%%
3	%%% Calculo sem perdas ou com vazamento %%
4	%%%
5	

```

6
7 %Defines the degrees of constraints: [a, b, c, d]
8 DC_s = [3 2 2 2 2 2 2 1 1];
9 % junta a - possui Torque a ser avaliado (Ta) e forcas de reacao em Rx e Ry
10 % junta b - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
11 % junta c - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
12 % junta d - possui forza de reacao Ry e torque (Md)
13 % junta e - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
14 % junta f - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
15 % junta g - possui forza de reacao normal ao eixo Rn e torque (Md)
16 % forza sobre o pistao da camara de compressao (Pc)
17 % forza sobre o pistao da camara de expansao (Pe)
18
19
20 % Fundamental cutset matrix
21 % [a b c d e f g Pc Pe]
22 %          a          b          c          d          e          f          g      Pc      Pe
23 %
24 %      ----|----   --|---   --|---   --|---   --|---   --|---   ---|_   _|_   _|_
25 %QA =[-1 -1 -1    0  0    0  0    1  1    0  0    0  0    1  1    1    1    %%
26 %      <-- corte a
27 %      0  0  0    1  1    0  0   -1 -1    0  0    0  0    0  0   -1    0    %%
28 %      <-- corte b
29 %      0  0  0    0  0    1  1   -1 -1    0  0    0  0    0  0   -1    0    %%
30 %      <-- corte c
31 %      0  0  0    0  0    0  0    0  0    1  1    0  0   -1 -1    0   -1    %%
32 %      <-- corte e
33 %      0  0  0    0  0    0  0    0  0    0  0    1  1   -1 -1    0   -1 ]; %%
34 %      <-- corte f
35
36 %      a  b  c  d  e  f  g  Pc  Pe
37 Q_s=[-1  0  0  1  0  0  1  1  1    %% <-- corte a
38 0  1  0 -1  0  0  0 -1  0    %% <-- corte b
39 0  0  1 -1  0  0  0 -1  0    %% <-- corte c
40 0  0  0  0  1  0 -1  0 -1    %% <-- corte e
41 0  0  0  0  0  1 -1  0 -1]; %% <-- corte f
42
43 n_corte_s=size(Q_s,1); %% Identifica o numero de linhas da matriz Q, ou
44 seja,
45 %% a quantidade de cortes realizados no grafo de acoes
46
47 j_s=size(Q_s,2); %% Identifica o numero de colunas da matriz Q, ou
48 seja,
49 %% a quantidade de juntas e variaveis de entradas
50 %% do sistema
51
52 Cb_s = sum(DC_s); %% Realiza a soma das componentes do vetor DC, que

```

```

46 %%% e a soma de todas as forcas e torques envolvidos na equacao
47
48 %%%
49 %%% O procedimento abaixo e feito para multiplicar as colunas da matriz
50 %%% de corte Q, caso ela venha a ser montada so com uma coluna em cada
51 %%% junta/forca. Nesse caso, a multiplicacao das colunas sao em funcao
52 %%% das quantidades de reacoes determinadas no vetor DC.
53 %%%
54 %%% Como exemplo, a matriz Q seja declarada com 5 variaveis no seguinte
55 %%% modo:
56 %%%      Q=[-1 0 0 -1 -1
57 %%%          0 1 0 1 1
58 %%%          0 0 1 1 1]
59 %%% E a matriz da quantidade de reacoes referente a cada coluna da matriz
60 %%% Q seja:
61 %%%      DC=[3 2 2 3 1]
62 %%% Desse modo, a matriz que tera as seguintes multiplicacoes das colunas
63 %%%      - Coluna 1 da matriz Q sera multiplicada para 3 colunas
64 %%%      - Coluna 2 da matriz Q sera multiplicada para 2 colunas
65 %%%      - Coluna 3 da matriz Q sera multiplicada para 2 colunas
66 %%%      - Coluna 4 da matriz Q sera multiplicada para 3 colunas
67 %%%      - Coluna 5 da matriz Q sera multiplicada para 1 colunas
68 %%% Ficando do seguinte modo a matriz final de cortes (QA)
69 %%%      Q = [-1 -1 -1 0 0 0 0 -1 -1 -1
70 %%%           0 0 0 1 1 0 0 1 1 1
71 %%%           0 0 0 0 0 1 1 1 1 1]
72 %%%
73
74 %%% Abaixo e montada a Matriz de Cortes (QA) somente com zeros, pois a
75 %%% grande parte dela e de zeros. O tamanho da matriz e: o numero de
76 %%% linhas e igual ao numero de cortes e o numeros de colunas e a
77 %%% quantidade de variaveis, ou seja, a soma das reacoes (forcas e torques
    )
78 %%% de cada junta mais as variaveis de entrada.
79 QA_s=zeros(n_corte_s,Cb_s);
80 aux=0;
81 %%% Multiplicacao das colunas pelo quantidade de reacoes de cada junta
    ou forcas de entrada- ver acima ^^^^^^^^^^^^^^^^^
82 for k=1:j_s
83 if k~=1
84 aux=aux+DC_s(k-1);
85 end
86 for l=1:DC_s(k)
87 QA_s(:,aux+l)=Q_s(:,k);
88 end
89 end
90

```

```

91 %%% Montagem das Heliforcas onde a primeira parcela e o produto
92 %%% vetorial entre o vetor de posicao e o vetor de dr. unitaria e a
93 %%% segunda parcela e o vetor de direcao unitaria. Lembrando que o passo
94 %%% das juntas rotativas sao zero (0) e o passo das juntas prismaticas
95 %%% sao infinito.
96 %%% Lembrando que a forma de escrita das Heliforcas e axiasl
97 % Heliforcas
98 s_Mza_s = [w;0;0;0]; %Helicoide do Torque de reacao da junta A
99 s_Fxa_s = [cross(s0a,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta A
100 s_Fya_s = [cross(s0a,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta A
101 s_Fxb_s = [cross(s0b,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta B
102 s_Fyb_s = [cross(s0b,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta B
103 s_Fxc_s = [cross(s0c,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta C
104 s_Fyc_s = [cross(s0c,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta C
105 s_Mxd_s = [w;0;0;0]; %Helicoide do Toruqe de reacao da junta D
106 s_Fyd_s = [cross(s0d,v);v]; %Helicoide da reacao em y da junta D
107 s_Fxe_s = [cross(s0e,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta E
108 s_Fye_s = [cross(s0e,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta E
109 s_Fxf_s = [cross(s0f,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta F
110 s_Fyf_s = [cross(s0f,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta F
111 s_Mzg_s = [w;0;0;0];
112 s_Frg_s = [cross(s0g,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta G
113
114 s_Pc_s = [cross(s0d,u);u]; %Helicoide da forca de entrada do cilindro de
    compressao
115 s_Pe_s = [cross(s0g,v);v]; %Helicoide da forca de entrada do cilindro de
    expansao
116 %
117
118 %%% Abaixo e montada a Matriz de Acoes (AD) que seria a uniao de todos
119 %%% as Heliforcas montadas acima e deve ser na mesma ordem estipuladas
120 %%% desde a Matriz Fundamentas de Cortes (QA)
121 Ad_s = [s_Mza_s, s_Fxa_s, s_Fya_s, s_Fxb_s, s_Fyb_s, s_Fxc_s, ...
122 s_Fyc_s, s_Mxd_s, s_Fyd_s, s_Fxe_s, s_Fye_s, s_Fxf_s, ...
123 s_Fyf_s, s_Mzg_s, s_Frg_s, s_Pc_s, s_Pe_s];
124 %%% Abaixo e separado somente as linhas nao nulas da Matriz de Acoes
125 %%% (AD), que sao as linhas 3, 4 e 5. Lembrando que as outras linhas
126 %%% sao nulas devido ao estudo que esta sendo realizado e no espaco de
127 %%% trabalho planar (lambda = 3)
128 Ad_s = Ad_s([3,4,5],:);
129
130 % Gross degree of constraint
131 C_s = size(Ad_s, 2);
132 %%% Contabiliza a quantidade de colunas da matriz Ad
133
134 % Network unit action matrix
135 AN_s = zeros(lambda*n_corte_s,C_s);

```

```

136 for i=1:n_corte_s
137 D_s=diag(QA_s(i,:));
138 AN_s(i*lambda-(lambda-1):i*lambda,:)=Ad_s*D_s;
139 end
140 AN_s;
141 CN_s = C_s - rank(AN_s);%%% Grau de restricoes liquidos quer dizer quantas
    devem
142 %%% ser as variaveis primarias, que sao as variaveis que
143 %%% se sabe as informacoes. Variaveis de entrada no
144 %%% caso as variaveis primarias sao s_Pc e s_Pe
145 %%% rank (AN): calcula o posto da matriz, ou seja, a
146 %%% quantidade de linhas linearmente independentes,
147 %%% ou seja, todas as que possuem incognitas a serem
148 %%% encontradas.
149 % [a, d, h, g, b, c, e, f] pcc_s_vaz    pee_s_vaz
150 aux = 2;
151 PSI_s = [aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux
    pcc_s_vaz pee_s_vaz]';
152
153 %%% As variaveis "pcc_s_vaz" e "pee_s_vaz" correspondem a forza que as
154 %%% pressoes exercem diretamente nos pistoes de compressao e vazamento,
155 %%% respectivamente.
156
157 % Primary variables
158 vp_s = [pcc_s_vaz pee_s_vaz]'; %%% Essa e a variavel primaria (variavel de
    entrada), a que se
159 %%% conhece os dados de entrada. Podem existir mais de uma
160 %%% variavel, tudo dependera do CN.
161
162 ANp_s = AN_s(:,[16:17]); %%% Aqui e identificada e separada a posicao da
    variavel
163 %%% primaria (vp) na matriz AN. A posicao da variavel
164 %%% primaria pode ser qualquer uma dentro da matriz e
165 %%% deve condizer com a posicao do vetor PSI.
166 %%% A variavel ANp vai receber somente as colunas 16
167 %%% e 17.
168
169 ANs_s = AN_s; %%% A variavel ANs recebe a matriz AN com todas as
    informacoes
170 %%% inclusive as forcas de entrada pcc e pee, que sao as variaveis
    primarias
171
172 ANs_s(:,[16 17])=[]; %%% Aqui sao retiradas da matriz ANs as forcas
173 %%% de entrada (variaveis primarias),
174 %%% desse modo a matriz fica somente com as
175 %%% variaveis para realizacao do calculo
176

```

```

177 vs_s=-ANs_s^(-1)*ANp_s*vp_s; %%% Secondary variables
178 %%%% Explicando a equacao de vs
179 %%%% ANs^(-1): Calcula a inversa da matriz ANs (desde que seja quadrada e
    invertivel).
180 %%%% ANp*vp: Multiplica o vetor das variaveis primarias (ANp) pelo valor
    de entrada vp (que sao os valores de p_comp_s_vaz p_exp_s_vaz)
181 %%%% ANs^(-1)*(ANp*vp): resolve um sistema linear do tipo Ax = b, onde A
    = MNs e b = MNp.
182 %%%% O sinal negativo indica que o resultado final sera invertido.
183
184 %Updating the vectors containing the magnitudes
185 %% o FOR abaixo gera o vetor PSI
186 n=0;
187 for i=1:C_s
188 if PSI_s(i) == aux
189 n=n+1;
190 PSI_s(i)=vs_s(n);
191 end
192 end
193
194 [s_Mza_s, s_Fxa_s, s_Fya_s, s_Fxb_s, s_Fyb_s, s_Fxc_s, s_Fyc_s, ...
195 s_Mxd_s, s_Fyd_s, s_Fxe_s, s_Fye_s, s_Fxf_s, s_Fyf_s, s_Mzg_s, ...
196 s_Frg_s, s_Pc_s, s_Pe_s];
197
198 %%%%%%%%%%% Resultados sem NENHUMA PERDA %%%%%%%%%%%
199 Mza_s = PSI_s(1);
200 Fxa_s = PSI_s(2);
201 Fya_s = PSI_s(3);
202 Fxb_s = PSI_s(4);
203 Fyb_s = PSI_s(5);
204 Fxc_s = PSI_s(6);
205 Fyc_s = PSI_s(7);
206 Mxd_s = PSI_s(8);
207 Fyd_s = PSI_s(9);
208 Fxe_s = PSI_s(10);
209 Fye_s = PSI_s(11);
210 Fxf_s = PSI_s(12);
211 Fyf_s = PSI_s(13);
212 Mzg_s = PSI_s(14);
213 Frg_s = PSI_s(15);
214 Pc_s = PSI_s(16);
215 Pe_s = PSI_s(17);

```

A.3 SCRIPT MATLAB: ROTINA PARA CALCULAR AS FORÇAS DE ATRITO

A rotina abaixo realiza o procedimento de cálculo das forças de atrito sobre os pistões e as câmaras do mecanismo do motor.

```

1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculo forza de atrito que ha no sistema %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4
5 %Defines the degrees of constraints: [a, b, c, d, e, f, g]
6 DC_at= [3 2 2 3 2 2 3 1 1];
7 % junta a - possui Torque a ser avaliado (Ta) e forcas de reacao em Rx e Ry
8 % junta b - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
9 % junta c - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
10 % junta d - possui torque (Md), forca de reacao Ry e a forca de atrito Fa
    no eixo X
11 % junta e - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
12 % junta f - possui as forcas de reacoes Rx e Ry
13 % junta g - possui torque (Mg), forca de reacao normal ao eixo Rn e a forca
    de atrito Fa no eixo Y
14 % forca sobre o pistao da camara de compressao (Pc) no eixo X
15 % forca sobre o pistao da camara de expansao (Pe) no eixo Y
16
17
18 % Fundamental cutset matrix
19 % [a b c d e f g Pc Pe]
20 %      a      b      c      d      e      f      g      Pc      Pe
21 %      ----/----  --/--  --/--  ----/----  --/--  --/--  ----/----  -/-  -/-
22 %QA =[-1 -1 -1  0  0  0  0  1  1  1  0  0  0  0  1  1  1  1  1
    %% <-- corte a
23 %      0  0  0  1  1  0  0 -1 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0 -1  0
    %% <-- corte b
24 %      0  0  0  0  0  1  1 -1 -1 -1  0  0  0  0  0  0  0 -1  0
    %% <-- corte c
25 %      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  0  0 -1 -1 -1  0 -1
    %% <-- corte e
26 %      0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1 -1 -1 -1  0 -1 ];
    %% <-- corte f
27
28 %      a  b  c  d  e  f  g  Pc  Pe
29 Q_at=[-1  0  0  1  0  0  1  1  1  %% <-- corte a
30        0  1  0 -1  0  0  0 -1  0  %% <-- corte b
31        0  0  1 -1  0  0  0 -1  0  %% <-- corte c
32        0  0  0  0  1  0 -1  0 -1  %% <-- corte e
33        0  0  0  0  0  1 -1  0 -1]; %% <-- corte f
34
35 n_corte_at=size(Q_at,1); %% Identifica o numero de linhas da matriz Q, ou
    seja,

```

```

36 %%% a quantidade de cortes realizados no grafo de acoes
37
38 j_at=size(Q_at,2); %%% Identifica o numero de colunas da matriz Q, ou seja,
39 %%% a quantidade de juntas e variaveis de entradas
40 %%% do sistema
41
42 Cb_at= sum(DC_at); %%% Realiza a soma das componentes do vetor DC, que
43 %%% e a soma de todas as forcas e torques envolvidos na equacao
44 %%%
45 %%% O procedimento abaixo e feito para multiplicar as colunas da matriz
46 %%% de corte Q, caso ela venha a ser montada so com uma coluna em cada
47 %%% junta/forca. Nesse caso, a multiplicacao das colunas sao em funcao
48 %%% das quantidades de reacoes determinadas no vetor DC.
49 %%%
50 %%% Como exemplo, a matriz Q seja declarada com 5 variaveis no seguinte
51 %%% modo:
52 %%% Q=[-1 0 0 -1 -1
53 %%%      0 1 0 1 1
54 %%%      0 0 1 1 1]
55 %%% E a matriz da quantidade de reacoes referente a cada coluna da matriz
56 %%% Q seja:
57 %%% DC=[3 2 2 3 1]
58 %%% Desse modo, a matriz que tera as seguintes multiplicacoes das colunas
59 %%% - Coluna 1 da matriz Q sera multiplicada para 3 colunas
60 %%% - Coluna 2 da matriz Q sera multiplicada para 2 colunas
61 %%% - Coluna 3 da matriz Q sera multiplicada para 2 colunas
62 %%% - Coluna 4 da matriz Q sera multiplicada para 3 colunas
63 %%% - Coluna 5 da matriz Q sera multiplicada para 1 colunas
64 %%% Ficando do seguinte modo a matriz final de cortes (QA)
65 %%% Q = [-1 -1 -1 0 0 0 0 -1 -1 -1
66 %%%       0 0 0 1 1 0 0 1 1 1
67 %%%       0 0 0 0 0 1 1 1 1 1]
68 %%%
69
70 %%% Abaixo e montada a Matriz de Cortes (QA) somente com zeros, pois a
71 %%% grande parte dela e de zeros. O tamanho da matriz e: o numero de
72 %%% linhas e igual ao numero de cortes e o numeros de colunas e a
73 %%% quantidade de variaveis, ou seja, a soma das reacoes (forcas e torques
74 %%% de cada junta mais as variaveis de entrada.
75 QA_at=zeros(n_corte_at,Cb_at);
76 aux=0;
77 %%% Multiplicacao das colunas pelo quantidade de reacoes de cada junta
78 %%% ou forcas de entrada- ver acima
79 for k=1:j_at
80 if k~=1
81 aux=aux+DC_at(k-1);

```

```

81 end
82 for l=1:DC_at(k)
83 QA_at(:,aux+1)=Q_at(:,k);
84 end
85 end
86
87 %%% Montagem das Heliforcas onde a primeira parcela e o produto
88 %%% vetorial entre o vetor de posicao e o vetor de dr. unitaria e a
89 %%% segunda parcela e o vetor de direcao unitaria. Lembrando que o passo
90 %%% das juntas rotativas sao zero (0) e o passo das juntas prismaticas
91 %%% sao infinito.
92 %%% Lembrando que a forma de escrita das Heliforcas e axiasl
93 % Heliforcas
94 s_Mza_at = [w;0;0;0]; %Helicoide do Torque de reacao da junta A
95 s_Fxa_at = [cross(s0a,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta A
96 s_Fya_at = [cross(s0a,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta A
97 s_Fxb_at = [cross(s0b,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta B
98 s_Fyb_at = [cross(s0b,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta B
99 s_Fxc_at = [cross(s0c,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta C
100 s_Fyc_at = [cross(s0c,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta C
101 s_Mxd_at = [w;0;0;0]; %Helicoide do Torque de reacao da junta D
102 s_Fyd_at = [cross(s0d,v);v]; %Helicoide da reacao em y da junta D
103 s_Fad_at = [cross(s0d,u);u]; %Helicoide da FORCA DE ATRITO no eixo x da
    junta D
104 s_Fxe_at = [cross(s0e,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta E
105 s_Fye_at = [cross(s0e,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta E
106 s_Fxf_at = [cross(s0f,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta F
107 s_Fyf_at = [cross(s0f,v);v]; %Helicoide da reacao em Y da junta F
108 s_Mzg_at = [w;0;0;0];
109 s_Frg_at = [cross(s0g,u);u]; %Helicoide da reacao em X da junta G
110 s_Fag_at = [cross(s0g,v);v]; %Helicoide da FORCA DE ATRITO no eixo y da
    junta G
111 s_Pc_at = [cross(s0d,u);u]; %Helicoide da forca de entrada do cilindro de
    compressao
112 s_Pe_at = [cross(s0g, v);v]; %Helicoide da forca de entrada do cilindro
    de expansao
113 %
114
115 %%% Abaixo e montada a Matriz de Acoes (AD) que seria a uniao de todos
116 %%% as Heliforcas montadas acima e deve ser na mesma ordem estipuladas
117 %%% desde a Matriz Fundamentas de Cortes (QA)
118 Ad_at =[s_Mza_at, s_Fxa_at, s_Fya_at, s_Fxb_at, s_Fyb_at, s_Fxc_at, ...
119 s_Fyc_at, s_Mxd_at, s_Fyd_at, s_Fad_at, s_Fxe_at, s_Fye_at, ...
120 s_Fxf_at, s_Fyf_at, s_Mzg_at, s_Frg_at, s_Fag_at, s_Pc_at, s_Pe_at];
121 %%% Abaixo e separado somente as linhas nao nulas da Matriz de Acoes
122 %%% (AD), que sao as linhas 3, 4 e 5. Lembrando que as outras linhas
123 %%% sao nulas devido ao estudo que esta sendo realizado e no espaco de

```

```

124 %% trabalho planar (lambda = 3)
125 Ad_at = Ad_at([3,4,5],:);
126
127 % Gross degree of constraint
128 C_at = size(Ad_at, 2);
129 %% Contabiliza a quantidade de colunas da matriz Ad
130
131 % Network unit action matrix
132 AN_at = zeros(lambda*n_corte_at,C_at);
133 i=1;
134 for i=1:n_corte_at
135 D_at=diag(QA_at(i,:));
136 AN_at(i*lambda-(lambda-1):i*lambda,:)=Ad_at*D_at;
137 end
138 AN_at;
139 fric_D=-miD*sign(Fyd)*sign(Wd);
140 fric_G=-miG*sign(Frg)*sign(Wg);
141
142 %          a          b          c          d          e          f          g
143 %          Pc   Pe
144 % Mza Fxa Fya Fxb Fyb Fxc Fyc Mxd Fyd Fad Fxe Fye Fxf Fyf Mzg Frg
145 %          Fag Pc Pe];
146 %          ____/____  __/___  __/___  ____/____  ____/___  ____/___  ____/____
147 %          _/_  _/_
148 % ATD = [0 0 0          0 0          0 0          0  fric_D 1          0 0          0 0          0 0          0
149 %          0          0];
150 % ATG = [0 0 0          0 0          0 0          0          0          0          0 0          0 0          0 fric_G 1
151 %          0          0];
152 ATD = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 fric_D 1 0 0 0 0 0 0          0          0 0 0 0];
153 ATG = [0 0 0 0 0 0 0 0 0          0          0 0 0 0 0 0 0 fric_G 1 0 0];
154 AN_at = [AN_at; ATD; ATG];
155
156 CN_at = C_at - rank(AN_at);%% Grau de restricoes liquidos quer dizer
157 quantas devem
158
159 %% ser as variaveis primarias, que sao as variaveis que
160 %% se sabe as informacoes. Variaveis de entrada no
161 %% caso as variaveis primarias sao s_Pc e s_Pe
162 %% rank (AN): calcula o posto da matriz, ou seja, a
163 %% quantidade de linhas linearmente independentes,
164 %% ou seja, todas as que possuem incognitas a serem
165 %% encontradas.
166 % [a, d, h, g, b, c, e, f]
167 aux = 2;
168 PSI_at = [aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux aux ...
169 aux aux aux pcc_s_vaz pee_s_vaz]';
170 % Primary variables
171 vp_at = [pcc_s_vaz pee_s_vaz]'; %% Essa e a variavel primaria (variavel de

```

```

    entrada), a que se
165 %%% conhece os dados de entrada. Podem existir mais de uma
166 %%% variavel, tudo dependera do CN.
167
168 ANp_at = AN_at(:,[18:19]); %%% Aqui e identificada e separada a posicao da
    variavel
169 %%% primaria (vp) na matriz AN. A posicao da variavel
170 %%% primaria pode ser qualquer uma dentro da matriz e
171 %%% deve condizer com a posicao do vetor PSI.
172 %%% A variavel ANp vai receber somente as colunas 16
173 %%% e 17.
174
175 ANs_at = AN_at; %%% A variavel ANs recebe a matriz AN com todas as
    informacoes
176 %%% inclusive as forcas de entrada pcc e pee, que sao as variaveis
    primarias
177
178 ANs_at(:,[18 19])=[]; %%% Aqui sao retiradas da matriz ANs as forcas
179 %%% de entrada (variaveis primarias),
180 %%% desse modo a matriz fica somente com as
181 %%% variaveis para realizacao do calculo
182
183 vs_at=-ANs_at^(-1)*ANp_at*vp_at; %%% Secondary variables
184 %%% Explicando a equacao de vs
185 %%% ANs^(-1): Calcula a inversa da matriz ANs (desde que seja quadrada e
    invertivel).
186 %%% ANp*vp: Multiplica o vetor das variaveis primarias (ANp) pelo valor
    de entrada vp (que sao os valores de p_comp_s_vaz p_exp_s_vaz)
187 %%% ANs^(-1)*(ANp*vp): resolve um sistema linear do tipo Ax = b, onde A
    = MNs e b = MNp.
188 %%% O sinal negativo indica que o resultado final sera invertido.
189
190 %Updating the vectors containing the magnitudes
191 %%% o FOR abaixo gera o vetor PSI
192 n=0;
193 for i=1:C
194     if PSI_at(i) == aux
195         n=n+1;
196         PSI_at(i)=vs_at(n);
197     end
198 end
199
200 [s_Mza_at, s_Fxa_at, s_Fya_at, s_Fxb_at, s_Fyb_at, s_Fxc_at, ...
201 s_Fyc_at, s_Mxd_at, s_Fyd_at, s_Fad_at, s_Fxe_at, s_Fye_at, ...
202 s_Fxf_at, s_Fyf_at, s_Mzg_at, s_Frg_at, s_Fag_at, s_Pc_at, s_Pe_at];
203
204 %%%%%%%%%%%%% Resultado das Forcas da Perda por Atrito - Etapa intermediaria

```

```
205 %%%%%%%%% Nao estao contabilizadas no total
206 Mza_at = PSI_at(1);
207 Fxa_at = PSI_at(2);
208 Fya_at = PSI_at(3);
209 Fxb_at = PSI_at(4);
210 Fyb_at = PSI_at(5);
211 Fxc_at = PSI_at(6);
212 Fyc_at = PSI_at(7);
213 Mxd_at = PSI_at(8);
214 Fyd_at = PSI_at(9);
215 Fad_at = PSI_at(10);
216 Fxe_at = PSI_at(11);
217 Fye_at = PSI_at(12);
218 Fxf_at = PSI_at(13);
219 Fyf_at = PSI_at(14);
220 Mzg_at = PSI_at(15);
221 Frg_at = PSI_at(16);
222 Fag_at = PSI_at(17);
223 Pc_at  = PSI_at(18);
224 Pe_at  = PSI_at(19);
```

APÊNDICE B – MATRIZES

Matriz de ações unitárias em rede (A_N) sem perda ou com vazamento:

$$[A_N]_{15 \times 17} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -by & bx & 0 & 0 & -1 & -cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -cy & cx & -1 & -cx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -by & bx & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -fy & fx & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Matriz de ações unitárias em rede ($A_{N-atrio}$) com vazamento, sendo as últimas duas linhas, que são separadas por pontos, representam as equações constituintes da junta D (linha 18) e da junta G (linha 19):

$$[A_{N-atrio}]_{15 \times 19} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & cx & -cy & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -fy & fx & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -by & bx & 0 & 0 & -1 & -cx & cy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -cy & cx & -1 & -cx & cy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -by & bx & 0 & 0 & -1 & fy & -fx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -fy & fx & -1 & fy & -fx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gfa} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{gat} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$