



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENG. DE CONTROLE, AUTOMAÇÃO E COMPUTAÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Victoria Carolina Selhorst Trindade

**Direcionamento de *Soft Robot* Baseado em uma Agulha Flexível: Modelagem e
Controle em Ambiente Simulado Bidirecional**

Blumenau
2025

Victoria Carolina Selhorst Trindade

**Direcionamento de *Soft Robot* Baseado em uma Agulha Flexível: Modelagem e
Controle em Ambiente Simulado Bidirecional**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação do Centro Tecnológico, de Ciências Exatas e Educação da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do título de Engenheira de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Orientador, Dr. Guilherme Brasil Pintarelli

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Trindade, Victoria Carolina Selhorst
Direcionamento de Soft Robots Baseados em Agulhas
Flexíveis : Modelagem e Controle em Ambiente Simulado
Bidirecional / Victoria Carolina Selhorst Trindade ;
orientador, Guilherme Brasil Pintarelli, 2025.
74 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau,
Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Blumenau,
2025.

Inclui referências.

1. Engenharia de Controle e Automação. 2. Modelagem
Cinemática. 3. Visão Computacional. 4. Sistemas de
Controle . I. Pintarelli, Guilherme Brasil. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em
Engenharia de Controle e Automação. III. Título.

Victoria Carolina Selhorst Trindade

Direcionamento de *Soft Robot* Baseado em uma Agulha Flexível: Modelagem e Controle em Ambiente Simulado Bidirecional

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Engenheira de Controle e Automação” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação.

Blumenau, dia de mês de 2025.

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente
DANIEL ALEJANDRO PONCE SALDIAS
Data: 16/12/2025 08:43:34-0300
CPF: ***.397.049-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Daniel Alejandro Ponce Saldías, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina



Documento assinado digitalmente
Guilherme Brasil Pintarelli
Data: 16/12/2025 08:52:37-0300
CPF: ***.523.129-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Guilherme Brasil Pintarelli, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina



Documento assinado digitalmente
Lucas Bertinetti Lopes
Data: 16/12/2025 14:03:30-0300
CPF: ***.823.680-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Lucas Bertinetti Lopes, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico este trabalho à memória do meu avô, Carlos, que
partiu cedo demais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu namorado, Vitor Kojima Tateishi, por estar ao meu lado em cada etapa desta jornada. Por compartilhar comigo não só os desafios, mas também todas as boas experiências que a faculdade proporcionou. Seu apoio e incentivo, desde o primeiro dia, foram essenciais para que eu nunca pensasse em desistir.

À minha família, toda a minha gratidão. Vocês são a minha base, e sem o apoio, o carinho e a confiança de vocês, eu certamente não estaria aqui hoje. Agradeço por cada sacrifício, por entenderem as noites de estudo e os fins de semana dedicados ao TCC, e por sempre me lembrarem que eu era capaz. Cada passo que dei foi impulsionado pelo amor e pela força que recebi de vocês.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Dr. Guilherme Brasil Pintarelli. Obrigada por toda a paciência, por me guiar nos momentos em que me sentia perdida e por acreditar no potencial deste trabalho. Sua confiança foi fundamental para chegarmos até aqui.

Por fim, agradeço aos meus amigos, que fizeram os anos de graduação muito mais leves e divertidos. Por cada ajuda nos estudos, pelos cafés e por todo o companheirismo nos momentos de aperto. Mesmo para aqueles que a vida acabou distanciando um pouco, vocês foram parte essencial da minha trajetória e guardo com carinho as memórias que construímos juntos.

RESUMO

As cirurgias minimamente invasivas são frequentemente limitadas pela rigidez e pela cinemática restritiva dos instrumentos convencionais, que dificultam a navegação em anatomias complexas e aumentam o risco de danos a tecidos. Visando superar esse desafio, este trabalho desenvolve e avalia um modelo para o direcionamento de agulhas flexíveis — tratadas aqui como *soft robots* — integrando a caracterização experimental da curvatura, a modelagem cinemática e a análise de estratégias de controle em ambiente simulado. A metodologia integra um sistema de visão computacional para a extração de parâmetros, um modelo cinemático não-holonômico para a planta simulada e uma estratégia de controle de rastreamento para análise comparativa. A etapa de caracterização experimental, utilizando um *phantom* de tecido mole, permitiu extrair via visão computacional o parâmetro de curvatura máxima (k_{max}) da agulha. Este dado foi essencial para calibrar o modelo cinemático, garantindo a fidelidade das simulações. A análise de incerteza em malha aberta, via simulação de Monte Carlo, demonstrou a propagação de erros e quantificou o risco de colisão em trajetórias teoricamente seguras, evidenciando a insuficiência de estratégias puramente preditivas. Em contrapartida, a validação do controlador de rastreamento em malha fechada demonstrou sua capacidade de rejeitar perturbações e garantir a convergência para a trajetória de referência. Conclui-se que a arquitetura proposta, ao integrar caracterização experimental e controle simulado, não apenas valida o modelo cinemático, mas estabelece matematicamente a necessidade de realimentação ativa para a segurança em futuras aplicações clínicas, fornecendo uma base metodológica sólida para pesquisas em robótica médica.

Palavras-chave: agulhas flexíveis; cirurgia minimamente invasiva; controle de sistemas não-holonômicos; visão computacional.

ABSTRACT

Minimally invasive surgery is often limited by the rigidity and restrictive kinematics of conventional instruments, which hinder navigation in complex anatomies and increase the risk of tissue damage. To overcome this challenge, this work develops and evaluates a model for flexible needle steering — treated here as soft robots — by integrating the experimental characterization of curvature, kinematic modeling, and the analysis of control strategies in a simulated environment. The methodology integrates a computer vision system for parameter extraction, a non-holonomic kinematic model for the simulated plant, and a tracking control strategy for comparative analysis. The experimental characterization stage, using a soft-tissue phantom, enabled the extraction of the needle's maximum curvature parameter (k_{max}) via computer vision. This data was essential for calibrating the kinematic model, ensuring the fidelity of the simulations. The open-loop uncertainty analysis, performed via Monte Carlo simulation, demonstrated error propagation and quantified the collision risk on theoretically safe trajectories, highlighting the insufficiency of purely predictive strategies. Conversely, the validation of the closed-loop tracking controller demonstrated its ability to reject disturbances and ensure convergence to the reference trajectory. It is concluded that the proposed architecture, by integrating experimental characterization and simulated control, not only validates the kinematic model but also mathematically establishes the necessity of active feedback for safety in future clinical applications, providing a solid methodological foundation for future research in medical robotics.

Keywords: flexible needles; minimally invasive surgery; control of nonholonomic systems; computer vision.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação das forças de interação no tecido para (a) uma agulha de ponta simétrica e (b) uma agulha de ponta assimétrica.	19
Figura 2 – Representação cinemática do modelo do uniciclo.	26
Figura 3 – Planejamento de caminho utilizando um campo de potencial repulsivo elíptico.	33
Figura 4 – Componentes de uma malha de controle básica com realimentação. . .	34
Figura 5 – (a) Imagem original. (b) Imagem convertida para tons de cinza. . . .	37
Figura 6 – Exemplo de histograma utilizado na limiarização global.	39
Figura 7 – Máscara binária inversa com $T = 50$	40
Figura 8 – Diagrama de blocos da arquitetura do sistema proposto.	41
Figura 9 – (a) Imagem convertida para <i>grayscale</i> e aplicado <i>thinning</i> . (b) Imagem após tratamento para calcular raio de curvatura, evidenciando o resultado de 508.19 mm.	43
Figura 10 – Configuração experimental utilizada para os ensaios de visão computacional, exibindo o protótipo da agulha inserido no <i>phantom</i> de gelatina balística.	46
Figura 11 – Agulha espinhal comercial (25G x 90 mm) utilizada nos ensaios experimentais.	47
Figura 12 – (a) Imagem bruta capturada pela câmera. (b) Imagem convertida para tons de cinza. (c) Imagem após a aplicação do filtro Gaussiano 5×5 . .	47
Figura 13 – (a) Máscara binária obtida diretamente com o método global, apresentando ruído. (b) Máscara final após a aplicação das operações morfológicas de abertura e fechamento, pronta para a análise.	48
Figura 14 – Resultado final do processamento de imagem com a adição de dois obstáculos.	50
Figura 15 – Efeito da variação do parâmetro de curvatura máxima (k_{max}) na trajetória da agulha, mantendo-se a velocidade linear constante em 3 mm/s. .	54
Figura 16 – Trajetória resultante da aplicação de uma entrada de controle em degrau no instante $t = 2s$, considerando a curvatura experimental $k_{max} = 0.002 \text{ mm}^{-1}$	55
Figura 17 – Perfil temporal das entradas de controle em malha aberta. (Superior) Velocidade linear de inserção constante. (Inferior) Velocidade angular resultante da aplicação de um degrau na direção do bisel.	56
Figura 18 – Perfil dos comandos de controle para a manobra em “S”. (a) Velocidade linear constante em 3 mm/s. (b) Sequência de alternância da velocidade angular ω , variando entre $+0.3 \text{ rad/s}$ e -0.3 rad/s	58

Figura 19 – Trajetória resultante da manobra em “S”. Observa-se a inversão da concavidade correspondente à comutação do sinal de controle.	59
Figura 20 – Modulação do raio de curvatura via <i>Duty Cycling</i> . Observa-se o aumento do raio efetivo conforme a redução da razão cíclica (100%, 50% e 25%).	60
Figura 21 – Simulação de Monte Carlo ($N = 100$) aplicada à trajetória de desvio. O alargamento da área verde demonstra a divergência progressiva da posição da agulha em relação à trajetória ideal (linha tracejada) devido a perturbações no controle.	61
Figura 22 – Simulação de risco de colisão em malha aberta. A trajetória planejada (tracejada) desvia do obstáculo, mas a dispersão das execuções reais resulta em uma taxa de colisão de 4%.	63
Figura 23 – Análise da resposta ao degrau para diferentes sintonias de ganhos. (a) Resposta oscilatória devido ao excesso de ganho lateral (k_2). (b) Resposta lenta devido ao ganho lateral insuficiente. (c) Resposta ideal (criticamente amortecida) obtida priorizando o alinhamento angular (k_3).	65
Figura 24 – (a) Resposta de malha aberta para ruído de 10%. (b) Resposta de malha fechada com a implementação do controlador.	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APF	Artificial Potential Field (Campo de Potencial Artificial)
FEM	Finite Element Method (Método de Elementos Finitos)
MIS	Minimally Invasive Surgery (Cirurgia Minimamente Invasiva)
RGB	Red, Green, Blue (Vermelho, Verde, Azul)
RRT	Rapidly-exploring Random Tree (Árvore Aleatória de Exploração Rápida)
SFN	Steerable Flexible Needle (Aguilha Flexível Direcionável)

LISTA DE SÍMBOLOS

q	Vetor de estado (pose) do robô
x	Coordenada da ponta da agulha no eixo X do referencial global
y	Coordenada da ponta da agulha no eixo Y do referencial global
ϕ	Ângulo de orientação da agulha em relação ao eixo X global
v	Velocidade linear da ponta da agulha (velocidade de inserção)
ω	Velocidade angular da base da agulha (velocidade de rotação)
$U(q)$	Função de potencial artificial total
$U_{att}(q)$	Função de potencial atrativo
$U_{rep}(q)$	Função de potencial repulsivo
F_{total}	Força artificial resultante
F_{att}	Força atrativa
F_{rep}	Força repulsiva
q_{goal}	Vetor de posição do alvo
α	Ganho escalar da força atrativa
e	Vetor de erro de rastreamento no referencial do robô
e_x	Componente do erro longitudinal
e_y	Componente do erro lateral
e_ϕ	Componente do erro de orientação
v_d	Velocidade linear de referência
ω_d	Velocidade angular de referência
$f(x, y)$	Função de intensidade de uma imagem em tons de cinza
$g(x, y)$	Imagem binária resultante da limiarização
k_1	Ganho do controlador para o erro longitudinal
k_2	Ganho do controlador para o erro lateral
k_3	Ganho do controlador para o erro de orientação
a	Semi-eixo maior da elipse de repulsão
b	Semi-eixo menor da elipse de repulsão

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	16
1.1.1	Objetivo Geral	16
1.1.2	Objetivos Específicos	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	FUNDAMENTOS DO DIRECIONAMENTO DE AGULHAS FLEXÍ- VEIS	18
2.1.1	Propriedades Físicas das Agulhas	18
2.1.2	Técnicas de Direcionamento de Agulhas	19
2.1.2.1	<i>Direcionamento Baseado na Ponta</i>	<i>19</i>
2.1.2.2	<i>Manipulação Lateral da Base</i>	<i>20</i>
2.1.2.3	<i>Manipulação de Tecido</i>	<i>20</i>
2.1.3	Modelagem de Agulhas Direcionáveis	21
2.1.3.1	<i>Modelos Cinemáticos</i>	<i>21</i>
2.1.3.2	<i>Modelos de Elementos Finitos (FEM)</i>	<i>22</i>
2.1.3.3	<i>Modelos Baseados em Mecânica</i>	<i>23</i>
2.1.4	Estratégias de Planejamento de Caminhos	23
2.1.5	Aplicações de Sistemas de Controle em Needle Steering	24
2.2	MODELAGEM CINEMÁTICA	25
2.2.1	Sistemas Não Holonômicos	25
2.2.2	Modelo do Uniciclo Não-Holonômico	26
2.2.3	Restrições Cinemáticas	28
2.3	PLANEJAMENTO DE CAMINHOS	29
2.3.1	Visão Geral de Planejamento de Caminhos	29
2.3.2	Métodos de Campos Potenciais	30
2.3.2.1	<i>Potencial Atrativo</i>	<i>31</i>
2.3.2.2	<i>Potencial Repulsivo</i>	<i>31</i>
2.4	SISTEMAS DE CONTROLE PARA RASTREAMENTO DE TRAJE- TÓRIA	32
2.4.1	Controle com Realimentação	33
2.4.2	Modelagem do Erro de Rastreamento	34
2.4.3	Saturação de Atuadores e Técnicas de <i>Anti-Windup</i>	35
2.5	SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL	36
2.5.1	Aquisição e Representação de Imagens Digitais	36
2.5.2	Pré-processamento: Filtragem Espacial para Suavização	37
2.5.3	Segmentação de Imagem por Limiarização	38
2.5.4	Análise de Objetos e Extração de Características Morfológicas	39

3	METODOLOGIA	41
3.1	VISÃO GERAL DA ARQUITETURA DO SISTEMA	41
3.2	CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DA AGULHA	42
3.3	AMBIENTE DE SIMULAÇÃO CINEMÁTICA	43
3.3.1	Implementação e Estrutura da Simulação	44
3.3.1.1	<i>Modelo da Planta e Fluxo de Execução</i>	<i>44</i>
3.4	SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL	45
3.4.1	Preparação do <i>Phantom</i>	45
3.4.2	Configuração Experimental e Instrumentação	45
3.4.3	Aquisição e Pré-processamento	46
3.4.4	Segmentação e Limpeza Morfológica	47
3.4.5	Análise, Classificação e Extração de Coordenadas	49
3.4.5.1	<i>Identificação da Agulha e sua Ponta</i>	<i>49</i>
3.4.5.2	<i>Identificação dos Obstáculos e seus Centros</i>	<i>49</i>
3.5	ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA ANÁLISE COMPARATIVA	50
3.5.1	Formulação da Lei de Controle	51
3.5.2	Implementação da Saturação e Limites Cinemáticos	51
3.5.3	Definição dos Parâmetros de Sintonia	52
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	53
4.1	VALIDAÇÃO DO MODELO CINEMÁTICO	53
4.1.1	Sensibilidade ao Parâmetro de Curvatura	53
4.1.2	Resposta a Entradas em Degrau	54
4.2	ANÁLISE DE TRAJETÓRIAS COMPLEXAS EM MALHA ABERTA	56
4.2.1	Manobra de Desvio	57
4.2.2	Modulação de Curvatura	58
4.3	ANÁLISE DE INCERTEZA E RISCO	61
4.3.1	Análise de Incerteza via Método de Monte Carlo	61
4.3.2	Análise de Risco por Inclusão de Obstáculo	62
4.4	ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE CONTROLE EM MALHA FE-	
	CHADA	62
4.4.1	Sintonia de Ganhos e Resposta Transitória	63
4.4.2	Comparativo de Desempenho sob Incerteza	64
5	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69
6	APÊNDICE A	72
6.1	PLANEJADOR DE CAMINHOS POR CAMPOS POTENCIAIS . . .	72
6.1.1	Força Atrativa	72
6.1.2	Força Repulsiva Elíptica	72
6.1.2.1	<i>Força Resultante e Geração da Referência</i>	<i>73</i>

7	APÊNDICE B	75
7.1	CÓDIGO DE SIMULAÇÃO CINEMÁTICA + CONTROLE	75
8	APÊNDICE C	79
8.1	CÓDIGO DO SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL	79

1 INTRODUÇÃO

A cirurgia minimamente invasiva (MIS), do inglês *Minimally Invasive Surgery*, representa uma evolução paradigmática na prática cirúrgica, tendo se consolidado como o procedimento padrão em uma vasta gama de aplicações médicas, desde laparoscopias até neurocirurgias (QADRIE *et al.*, 2025). Esta abordagem técnica emprega incisões de tamanho reduzido para a inserção de instrumentos especializados e sistemas de visualização avançados, permitindo a manipulação de tecidos internos com o mínimo de perturbação no corpo do paciente. Como resultado, a MIS oferece vantagens clínicas substanciais, incluindo a redução do trauma cirúrgico, períodos de recuperação acelerados, menor risco de infecção e melhores resultados estéticos (QADRIE *et al.*, 2025). Contudo, a expansão bem-sucedida desta técnica para cenários cirúrgicos cada vez mais complexos é confrontada por desafios relacionados às limitações da tecnologia de instrumentação convencional.

O desafio fundamental da MIS convencional manifesta-se na própria natureza física dos seus instrumentos, que são caracteristicamente longos e rígidos. Ao serem inseridos através de uma pequena incisão, estes instrumentos criam um ponto de pivô fixo na parede corporal, resultando no “efeito de fulcro” (*fulcrum effect*) (IQBAL *et al.*, 2025). Este pivô resulta em um desacoplamento cinemático entre o atuador (a mão do cirurgião) e o efetuator final (a ponta do instrumento), eliminando o controle manual intuitivo. Como consequência direta, durante o procedimento, a capacidade de manobra da ferramenta, essencial para navegar por anatomias complexas e contornar estruturas delicadas, é severamente comprometida e os movimentos do operador podem ser invertidos ou amplificados de forma indesejada, prejudicando a execução de tarefas que exigem precisão (IQBAL *et al.*, 2025). Em última análise, tais dificuldades de manipulação não apenas elevam a complexidade do procedimento, mas também aumentam o risco de danos a tecidos, vasos e órgãos adjacentes ao alvo cirúrgico (IQBAL *et al.*, 2025) (QADRIE *et al.*, 2025). Portanto, a superação desses desafios requer uma mudança de paradigma no *design* dos instrumentos, afastando-se da rigidez convencional em direção a sistemas flexíveis e direcionáveis.

A solução que diversos pesquisadores encontraram para superar as limitações das ferramentas rígidas tem sido o desenvolvimento de robôs flexíveis, também conhecidos como robôs contínuos (*continuum robots*), que são capazes de se curvar e navegar por trajetórias não lineares dentro do corpo humano (IQBAL *et al.*, 2025). Embora este campo abranja sistemas complexos com múltiplos graus de liberdade, uma implementação de grande relevância clínica, e que constitui o foco deste trabalho, é a técnica de direcionamento de agulhas flexíveis (*needle steering*). Esta técnica se baseia no princípio físico de que ao inserir uma agulha flexível com uma ponta assimétrica, ou biselada, em um meio homogêneo, as forças de reação do tecido geram uma deflexão lateral controlável, permitindo que a agulha siga uma trajetória curva (WEBSTER III *et al.*, 2006). A inovação conceitual reside em transformar a deflexão, antes vista como um erro, em uma entrada de controle. Para

tornar o problema de controle tratável, o movimento da ponta da agulha é frequentemente mapeado para o modelo cinemático simplificado de um unicyclo não-holonômico, onde a velocidade de inserção e a rotação axial na base correspondem, respectivamente, à velocidade linear e angular do modelo. Contudo, a automação eficaz deste sistema ainda exige uma arquitetura de controle robusta, capaz de integrar percepção e planejamento em tempo real.

A automação eficaz do needle steering fundamenta-se no paradigma robótico de Sentir-Planejar-Agir (*Sense-Plan-Act*). No entanto, para que o controle em malha fechada seja bem-sucedido, é imperativo que o modelo cinemático represente com fidelidade as restrições físicas da agulha e que o sistema de percepção forneça parâmetros precisos do ambiente.

Neste contexto, este trabalho concentra-se na caracterização experimental e na modelagem cinemática do sistema, empregando visão computacional para extrair parâmetros críticos da agulha e validando seu comportamento por meio de simulações. Essa abordagem permite analisar de forma isolada a dinâmica da planta frente a incertezas, além de quantificar os riscos associados à operação em malha aberta. Por fim, estratégias de controle de rastreamento são projetadas e avaliadas em ambiente simulado, permitindo comparar seu desempenho e estabelecer os requisitos necessários para futuras implementações em um sistema autônomo completo.

1.1 OBJETIVOS

Nas seções seguintes, são descritos o objetivo geral e os objetivos específicos deste Trabalho de Conclusão de Curso.

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e validar uma plataforma de simulação e controle para o direcionamento de agulhas flexíveis (do tipo soft robots), englobando a modelagem cinemática e o sistema de visão computacional para extração de parâmetros físicos. A validação do sistema proposto visa analisar, em ambiente de simulação, a controlabilidade e a robustez da navegação em cenários 2D, quantificando as limitações da operação em malha aberta e a eficácia de estratégias de correção.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral proposto, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um algoritmo de visão computacional capaz de processar imagens do ambiente operatório, segmentando e extraindo as coordenadas da ponta da agulha e dos obstáculos para alimentar o modelo matemático.

- Realizar a caracterização experimental do sistema físico utilizando um *phantom* de tecido mole, a fim de quantificar o parâmetro de curvatura máxima (k_{max}) e calibrar as restrições do modelo de simulação.
- Implementar computacionalmente o modelo cinemático do uniciclo não-holonômico, incorporando explicitamente a relação entre a velocidade de inserção, a rotação da base e a curvatura resultante da agulha.
- Validar o comportamento do sistema via simulação, analisando a sensibilidade da trajetória frente a variações paramétricas e demonstrando a viabilidade das manobras de direcionamento em cenários com obstáculos virtuais.
- Avaliar a robustez do sistema frente a incertezas e ruídos de atuação, comparando o desempenho da navegação em malha aberta com uma estratégia de controle em malha fechada para fundamentar os requisitos de segurança clínica.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O desenvolvimento de um sistema autônomo para o direcionamento de agulhas flexíveis (*needle steering*) é uma tarefa multidisciplinar que exige a integração de conhecimentos de diversas áreas da engenharia de controle e da robótica. Para tal, este capítulo estabelece a fundamentação teórica em que se baseia o presente trabalho, fornecendo ao leitor as ferramentas conceituais necessárias para a compreensão da metodologia e dos algoritmos desenvolvidos.

A seção inicia-se com a análise dos princípios físicos que possibilitam o direcionamento da agulha e das principais técnicas que exploram esse fenômeno. Após estabelecer a base física, serão apresentados os fundamentos de visão computacional empregados para a percepção do ambiente em tempo real. Subsequentemente, é detalhada a modelagem cinemática que descreve matematicamente o movimento não holonômico do dispositivo. Com o modelo definido, o texto explora as estratégias de planejamento de caminhos, com ênfase no método de campos potenciais. Por fim, são abordados os fundamentos do controle por realimentação, incluindo a cinemática do erro de rastreamento e as implicações práticas da saturação de atuadores.

2.1 FUNDAMENTOS DO DIRECIONAMENTO DE AGULHAS FLEXÍVEIS

A capacidade de direcionar agulhas de forma controlada tem sido objeto de extensa pesquisa nas últimas décadas, impulsionada pelo potencial de aprimorar procedimentos médicos minimamente invasivos (AUDETTE *et al.*, 2020, p. 679). Esses avanços são cruciais para intervenções que exigem precisão em regiões anatômicas complexas, como biópsias, braquiterapia e neurocirurgia (WEBSTER III *et al.*, 2006, p. 509). Diversas técnicas, modelos e abordagens de controle foram desenvolvidas para lidar com os desafios característicos da navegação de agulhas flexíveis em ambientes complexos, como o tecido biológico. Consequentemente, esta seção apresenta uma visão geral das inovações técnicas e dos modelos, bem como das principais aplicações clínicas de *needle steering*, com ênfase nas estratégias que fundamentam as decisões metodológicas deste trabalho.

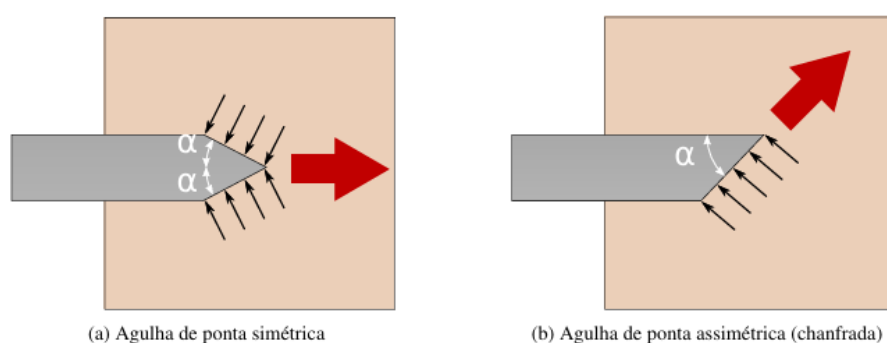
2.1.1 Propriedades Físicas das Agulhas

A capacidade de direcionar uma agulha flexível não é uma propriedade intrínseca do seu corpo, mas um fenômeno emergente da geometria de sua ponta e da sua interação com o tecido. Uma agulha com ponta perfeitamente simétrica, ao ser inserida em um meio homogêneo, sente forças de resistência que se equilibram em torno de seu eixo (GERALDES, 2015, p. 2). Tendo como resultado uma força líquida que se opõe diretamente à inserção, levando a uma trajetória retilínea, como ilustrado na Figura 1(a).

O direcionamento torna-se possível através da introdução de uma ponta assimétrica,

comumente chamada chanfrada ou biselada, pois durante a sua inserção, as forças exercidas pelo tecido deixam de ser balanceadas (GERALDES, 2015, p. 2). A interação assimétrica gera uma força perpendicular ao eixo de inserção, que juntamente com a flexibilidade do material, induz o encurvamento da haste da agulha (MISRA *et al.*, 2010, p. 1640). É esta força de deflexão que permite o direcionamento, sendo sua direção controlada pela rotação axial da base da agulha (WEBSTER III *et al.*, 2006, p. 509). A Figura 1(b) ilustra este princípio fundamental.

Figura 1 – Comparação das forças de interação no tecido para (a) uma agulha de ponta simétrica e (b) uma agulha de ponta assimétrica.



Fonte: Geraldes (2015, p. 2)

2.1.2 Técnicas de Direcionamento de Agulhas

A escolha da técnica de direcionamento é um fator determinante na arquitetura de controle e no design mecânico de um sistema de needle steering. As estratégias exploram a interação da agulha com o tecido ou empregam estruturas ativas, conforme delineado por Audette *et al.* (2020, p. 3). A compreensão das vantagens e limitações de cada uma é, portanto, essencial para justificar a abordagem metodológica adotada neste trabalho. Dentre as principais abordagens, destacam-se o direcionamento baseado na ponta, a manipulação lateral na base da agulha e a manipulação de tecido.

2.1.2.1 Direcionamento Baseado na Ponta

Com base no princípio físico da ponta assimétrica, diferentes técnicas foram desenvolvidas para controlar o percurso da agulha. A principal abordagem da literatura é o direcionamento baseado na ponta.

Historicamente, a deflexão da agulha era vista como um efeito indesejado, frequentemente mitigado pelo uso de agulhas rígidas, porém, a inovação conceitual do *needle steering* reside em transformar esta deflexão de um problema em uma ferramenta de controle. Conforme estabelecido por Webster *et al.* (2006, p. 509), ao empregar uma com-

binação controlada de inserção e rotação axial, a flexão pode ser utilizada em benefício do direcionamento, permitindo que a agulha alcance alvos que seriam inacessíveis por caminhos retilíneos.

A implementação desta técnica requer o controle de duas entradas principais: a velocidade de inserção v e a velocidade de rotação axial ω . Para que isso seja fisicamente viável, a escolha do material da agulha é crucial. Materiais com flexibilidade e menor rigidez, como o Nitinol, são frequentemente utilizados, pois permitem um encurvamento significativo sem deformação plástica (COWAN *et al.*, 2010, p. 6).

Além disso, a curvatura da agulha pode ser modulada através da aplicação de *duty cycling* para melhorar o ajuste do caminho da agulha (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 4). Essa aplicação é evidenciada no trabalho de Minhas *et al.* (2007), onde foram apresentadas as trajetórias obtidas experimentalmente através da manipulação da taxa de *duty cycling*, como no caso da taxa de 0%, que significa a ausência de rotação, apresentando uma trajetória completamente curva.

Em Webster III *et al.* (2005) foi desenvolvido um robô que utiliza esta técnica, baseado em dois atuadores: um rotacional na base da agulha e outro translacional para realizar a inserção. Para que esse sistema siga um caminho definido, foram empregadas técnicas de modelagem e controle que serão abordadas nas seguintes seções.

2.1.2.2 Manipulação Lateral da Base

Outra técnica de direcionamento de agulhas é a manipulação lateral da base, na qual a base da agulha é movimentada perpendicularmente ao eixo de inserção. Esse movimento induz o corpo da agulha a se deslocar no tecido de forma análoga a uma viga que repousa sobre um fulcro (AUDETTE *et al.*, 2020, p. 5). Embora essa abordagem tenha sido explorada para evitar o empenamento da agulha em inserções profundas, a eficácia dessa manipulação diminui significativamente com o aumento da profundidade de inserção (COWAN *et al.*, 2010, p. 7). Consequentemente, para manter o direcionamento desejado, seria necessária a aplicação de forças cada vez maiores na base, o que, por sua vez, eleva o risco de causar danos ao tecido biológico caso a força exceda seu limite de resistência (COWAN *et al.*, 2010, p. 7). Em função dessas limitações em profundidade e do potencial de dano tecidual, essa abordagem é frequentemente considerada em cenários onde desvios menores ou profundidades rasas são aceitáveis (GLOZMAN; SHOHAM, 2007, p. 459).

2.1.2.3 Manipulação de Tecido

Para o direcionamento em regiões com objetivos e estruturas anatômicas superficiais, a técnica de manipulação do tecido é uma alternativa viável (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 685). Nesse método, o tecido circundante à agulha é estrategicamente deformado para auxiliar o direcionamento da agulha. Isso pode ser feito tanto para trazer os alvos para o caminho da agulha, quanto para afastar obstáculos de sua

trajetória (COWAN *et al.*, 2010, p. 9). Essa abordagem é frequentemente utilizada em combinação com outras técnicas de direcionamento de agulhas, aprimorando a capacidade de navegação em cenários específicos (COWAN *et al.*, 2010, p. 9).

Como exemplo de aplicação, a manipulação de tecido tem sido investigada para o direcionamento de agulhas em manipulações de tumores em tempo real, onde a força externa é aplicada para mover o tumor para a trajetória da agulha (MALLAPRAGADA *et al.*, 2009, p. 316). Embora essa técnica ofereça vantagens em certas situações, ela pode requerer modelos complexos de deformação de tecido e, em alguns casos, a aplicação de forças que podem exceder os limites de resistência tecidual.

2.1.3 Modelagem de Agulhas Direcionáveis

A concepção de planejadores de caminhos e da maioria dos tipos de controladores para agulhas flexíveis requer modelos de interação agulha-tecido que prevejam os movimentos da agulha ou da ponta da agulha a partir de entradas na base da agulha (COWAN *et al.*, 2010, p. 8). Esses modelos são essenciais para simular o comportamento da agulha, prever sua trajetória e desenvolver estratégias de direcionamento em ambientes complexos. As diversas abordagens de modelagem podem ser categorizadas, de acordo com suas premissas e níveis de detalhe, em modelos cinemáticos, modelos de elementos finitos (FEM) e modelos baseados em mecânica (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 686). Cada tipo oferece vantagens e desvantagens distintas, influenciando a complexidade e a precisão das simulações e do controle.

2.1.3.1 Modelos Cinemáticos

Os modelos cinemáticos para agulhas flexíveis focam em descrever como a agulha se move, estabelecendo uma relação direta entre as entradas de movimento aplicadas em sua base e a trajetória resultante da ponta, sem aprofundar nas forças e torques complexos da interação agulha-tecido (COWAN *et al.*, 2010, p. 9). O principal objetivo desses modelos é a simplificação, tornando os problemas de planejamento e controle acessíveis computacionalmente.

No contexto da *needle steering*, o modelo do uniciclo não holonômico (detalhado na Seção 2.2.2 deste trabalho) é amplamente empregado devido à sua capacidade de simplificar a cinemática da agulha flexível. Essa aplicação se baseia em uma analogia direta: a velocidade de inserção da agulha é considerada análoga à velocidade linear do uniciclo, enquanto a rotação axial da agulha na base é mapeada para a velocidade angular do modelo. Essa correspondência origina-se do efeito de deflexão lateral causado pela ponta biselada, que gera trajetórias curvas previsíveis durante a inserção (WEBSTER III *et al.*, 2006, p. 510). Dessa forma, a manipulação dessas duas entradas de controle (inserção e rotação) permite o direcionamento da agulha para seguir caminhos predefinidos.

Além do uniciclo, outras variações incluem o modelo de bicicleta, que oferece uma descrição refinada da curvatura da agulha em trajetórias complexas (WEBSTER III *et al.*, 2006, p. 513). Modelos de curvatura constante também são comumente utilizados para agulhas flexíveis, prevendo caminhos que podem ser segmentados em arcos de círculo ou hélices, baseando-se na premissa de que a agulha mantém uma curvatura previsível sob certas condições de inserção (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 692).

As principais vantagens dos modelos cinemáticos residem em sua simplicidade e eficiência computacional. Dentre eles, o modelo do uniciclo não-holonômico é o mais difundido por capturar a essência do movimento da agulha de ponta biselada, servindo como base para o desenvolvimento de planejadores de trajetória complexos, como os baseados em RRTs que permitem a navegação online em ambientes 3D (BERNARDES *et al.*, 2014, p. 218-219). Paralelamente, em outra abordagem, foi utilizada uma Jacobiana de manipulação da agulha para viabilizar planejadores de trajetória baseados em campos de potencial, técnica que, por sua relevância neste trabalho, será detalhada na Seção 2.3.2 (DIMAIO; SALCUDEAN, 2005, p. 967-968).

Contudo, é fundamental reconhecer que esses modelos são aproximações. Eles geralmente não modelam diretamente a deformação do tecido circundante ou as interações mecânicas complexas da haste com o meio, operando sob a premissa de que a agulha é suficientemente flexível e o tecido, rígido (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 689). Consequentemente, a determinação de parâmetros e a validação desses modelos dependem de extensa validação experimental, a qual revela que a curvatura pode apresentar variações significativas na prática, mesmo em condições controladas (OLIVEIRA, 2015, p. 33-47). Portanto, a precisão e a generalização desses modelos em diferentes condições de tecido e materiais de agulha requerem validação experimental.

2.1.3.2 Modelos de Elementos Finitos (FEM)

Os Modelos de Elementos Finitos (FEM) representam uma abordagem de alta fidelidade para simular a complexa interação física entre a agulha e o tecido. Diferentemente dos modelos cinemáticos, os modelos FEM discretizam tanto o domínio da agulha quanto o do tecido em uma malha de elementos, permitindo a solução numérica das equações que governam a mecânica dos corpos deformáveis, sendo capazes de representar com precisão fenômenos como a deformação do tecido e as forças de atrito e corte (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 689).

Em trabalhos seminais da área, modelos FEM foram utilizados, por exemplo, para viabilizar o planejamento de trajetórias em tecidos moles que compensam a deformação para atingir alvos e desviar de obstáculos. A principal desvantagem dessa abordagem, no entanto, é seu alto custo computacional inerente. Em 2005, demonstrava-se que a simulação de um cenário relevante para biópsias podia levar vários minutos, mesmo em hardware dedicado da época, o que geralmente impede o uso do método para controle em

malha fechada em tempo real, tornando-o adequado para planejamento pré-operatório ou análise offline (ALTEROVITZ; GOLDBERG; OKAMURA, 2005, p. 1640, 1645).

2.1.3.3 Modelos Baseados em Mecânica

Os modelos baseados em mecânica descrevem o comportamento de agulhas flexíveis e sua interação com o tecido por meio da aplicação direta dos princípios da mecânica dos sólidos (BABAIASL; YANG; SWENSEN, 2022, p. 690). Em vez de uma discretização numérica completa como no FEM, essa abordagem frequentemente emprega formulações analíticas ou semi-analíticas, como a teoria de vigas (*beam theory*). Nesse contexto, a agulha é idealizada como uma viga elástica, e sua deflexão é calculada com base em propriedades como a rigidez à flexão, as forças de interação com o tecido e as cargas aplicadas, sendo um método utilizado para prever a deflexão de agulhas considerando múltiplos pontos de curvatura (ROESTHUIS, 2011, p. 27-29).

A principal vantagem dos modelos baseados em mecânica reside em sua capacidade de proporcionar um entendimento dos fenômenos físicos que governam o comportamento da agulha, permitindo uma análise direta das relações de causa e efeito. Adicionalmente, estes modelos são, em geral, computacionalmente eficientes comparados com os modelos FEM completos. Contudo, sua precisão pode ser limitada pelas simplificações inerentes às teorias de vigas e pela necessidade de calibração experimental dos parâmetros de interação agulha-tecido (COWAN *et al.*, 2010, p. 12).

Em suma, a escolha da abordagem de modelagem para o direcionamento de agulhas representa um compromisso fundamental entre a fidelidade física e a viabilidade computacional. Enquanto os modelos FEM oferecem a maior precisão em detrimento do custo, os modelos cinemáticos, apesar de suas simplificações, fornecem uma base tratável para o projeto de planejadores de trajetória e controladores em tempo real, justificando sua ampla adoção na literatura e sua escolha como fundamento para a metodologia deste trabalho.

2.1.4 Estratégias de Planejamento de Caminhos

A aplicação prática do planejamento de caminhos ao direcionamento de agulhas flexíveis (SFNs) visa traduzir algoritmos teóricos em soluções para desafios clínicos, otimizando critérios como a minimização do trauma tecidual e a precisão no alcance do alvo (ZHANG *et al.*, 2025, p. 1). A literatura apresenta uma gama de estratégias que podem ser categorizadas para melhor compreensão.

Abordagens como as baseadas em cálculo matemático e em cinemática inversa tratam o problema de forma analítica. A primeira busca otimizar uma função de custo, enquanto a segunda explora a relação entre o espaço de juntas e o de tarefas da agulha, tratando-a como um braço robótico virtual para gerar caminhos viáveis (DUINDAM *et al.*, 2010, p. 535). Já os métodos baseados em amostragem, como os RRTs, são altamente

valorizados por sua eficiência em explorar espaços de configuração complexos, tendo sido adaptados para gerar trajetórias que respeitam as restrições não holonômicas da agulha em tempo real (BERNARDES *et al.*, 2014).

Uma terceira categoria, a de métodos baseados em inteligência, agrupa técnicas heurísticas e de aprendizado. Dentro desta, destaca-se a abordagem de Campos de Potencial Artificial (APF), pioneira no trabalho de DiMaio e Salcudean (2005). Por sua simplicidade, eficiência computacional e relevância direta para a metodologia deste presente trabalho, esta abordagem será o foco detalhado na seção 2.3.

2.1.5 Aplicações de Sistemas de Controle em Needle Steering

Uma vez que um caminho é planejado, a função essencial do sistema de controle é garantir que a agulha siga essa trajetória de referência de forma precisa, mesmo na presença de perturbações. A implementação de um controle em malha fechada, portanto, é indispensável para o sucesso de procedimentos de *needle steering* (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004, p. 82).

O pilar dessas abordagens reside no rastreamento de trajetória baseado no erro, onde as entradas de controle são continuamente ajustadas para minimizar o desvio entre a pose atual e a desejada. Conforme o modelo teórico estabelecido por Lynch e Park (2017, p. 542-543), o erro é frequentemente expresso no sistema de coordenadas do próprio robô (Seção 2.4.2), e leis de controle específicas são então projetadas para garantir que a dinâmica deste erro convirja a zero.

A aplicação prática dessas leis, no entanto, deve lidar com as limitações físicas dos atuadores. Lee *et al.* (2001, p.306) apresenta um controlador que incorpora intrinsecamente a saturação para limitar os comandos de velocidade, prevenindo assim o fenômeno de *integral windup* e garantindo a estabilidade global do sistema.

Toda essa estrutura de controle, contudo, depende intrinsecamente da qualidade da realimentação sensorial. Em aplicações de *needle steering*, a guiagem por imagem é de extrema importância. Trabalhos como o Glozman e Shoham (2007) demonstram sistemas onde a posição da ponta da agulha é extraída de imagens, normalmente ultrassom, para servir como a medição do processo. Essa informação em tempo real permite que o sistema calcule o erro e se adapte a perturbações não modeladas, como deformações de tecido, fechando o ciclo de “sentir, interpretar e agir” em um ambiente clínico.

Portanto, a literatura demonstra que um sistema de controle eficaz para *needle steering* emerge da sinergia entre uma modelagem de erro robusta, o tratamento explícito das limitações dos atuadores e a integração com sistemas de percepção em tempo real.

2.2 MODELAGEM CINEMÁTICA

A cinemática, no contexto da robótica, é a disciplina que descreve o movimento de um robô sem considerar as forças e torques que o originam. Essa descrição fundamental, que constitui a base para o planejamento e controle de trajetórias, envolve a representação da configuração do robô e o mapeamento entre as velocidades de suas juntas e a velocidade do efetuador final (LYNCH; PARK, 2017, p. 171). Para o estudo de sistemas robóticos, as restrições impostas ao movimento são classificadas em holonômicas ou não holonômicas, impactando diretamente a forma como o robô pode ser controlado e planejado.

2.2.1 Sistemas Não Holonômicos

Um sistema robótico é considerado holonômico quando as suas restrições podem ser expressas como equações algébricas que dependem apenas das coordenadas de configuração, e não das velocidades ou do tempo de forma explícita. Tais restrições são também conhecidas como integráveis, visto que as restrições de velocidade definidas podem ser integradas para resultar em restrições de configuração equivalentes. Por exemplo, um mecanismo de quatro barras é um sistema holonômico, pois as restrições geométricas impostas pela sua configuração de malha fechada, que incluem as juntas rotacionais e o elo fixo ao solo, limitam diretamente o espaço de configuração alcançável do mecanismo (LYNCH; PARK, 2017, p. 29-31).

Por outro lado, um sistema é não holonômico quando suas restrições dependem das velocidades do sistema, e essas equações de velocidade não podem ser integradas a uma forma puramente posicional. Isso implica que, embora o robô possa eventualmente alcançar qualquer posição no seu espaço de configuração livre, ele não pode fazê-lo instantaneamente em todas as direções, ou seja, o caminho percorrido se torna dependente da sequência de movimentos. Um exemplo clássico de um sistema não holonômico é um robô móvel com rodas que não deslizam lateralmente, como um carro ou um unicycle (LYNCH; PARK, 2017, p. 32, 514).

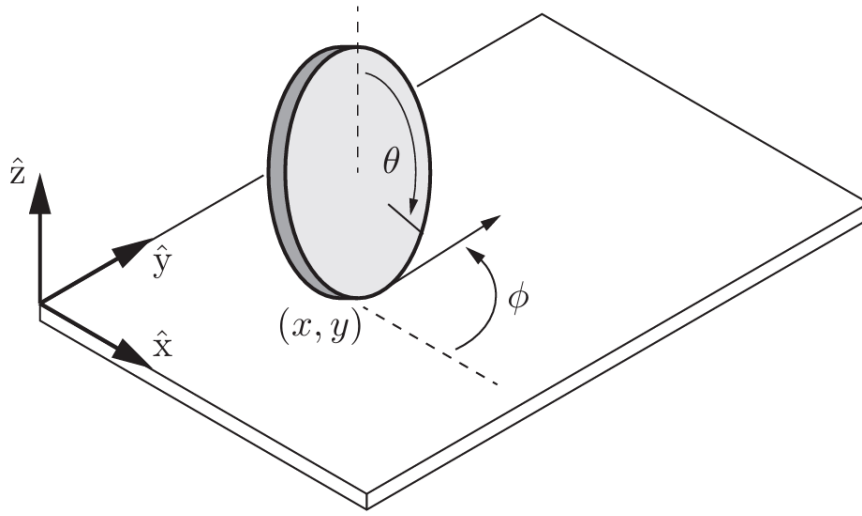
A relevância dos sistemas não holonômicos é particularmente destacada em aplicações de *needle steering*. Ao ser inserida em tecidos moles, a ponta biselada de uma agulha flexível gera uma força de deflexão que impõe uma restrição de movimento fundamental: a agulha pode avançar (inserção) e ter sua orientação alterada (rotação axial), mas não pode transladar lateralmente de forma instantânea. Essa característica define uma restrição cinemática não holonômica, análoga à de um veículo com rodas que não derrapam. Assim, o controle coordenado da velocidade de inserção e rotação permite o direcionamento da agulha ao longo de trajetórias curvas, transformando a deflexão, que seria um problema, em uma ferramenta para o controle preciso do dispositivo (WEBSTER III *et al.*, 2006, p. 4-6).

2.2.2 Modelo do Uniciclo Não-Holonômico

O modelo cinemático do uniciclo é uma representação fundamental para robôs móveis não-holonômicos. Sua relevância para o presente trabalho reside na analogia entre sua cinemática e o comportamento de uma agulha flexível com ponta biselada, como será detalhado. Conforme Lynch e Park (2017, p. 521-523), a cinemática do robô móvel simples, um uniciclo, pode ser modelado como uma roda de raio r rolando em um plano sem deslizar lateralmente.

A configuração completa do uniciclo, representada na Figura 2, pode ser descrita pelo vetor de estado de quatro dimensões $q = [\phi, x, y, \theta]^T$, em que (x, y) são as coordenadas do ponto de contato da roda com o plano de um referencial global $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, ϕ é a orientação da roda em relação ao eixo $\hat{x}$ do referencial global e θ é o ângulo de rolamento da própria roda (LYNCH; PARK, 2017, p. 521-522).

Figura 2 – Representação cinemática do modelo do uniciclo.



Fonte: Lynch e Park (2017, p. 522)

O movimento do uniciclo é governado por duas entradas de controle, $u = [u_1, u_2]^T$, onde u_1 é a velocidade de avanço da roda e u_2 é a velocidade de giro da direção da orientação (LYNCH; PARK, 2017, p. 522). A relação entre os controles e a variação do estado é dado por:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r \cos \phi & 0 \\ r \sin \phi & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Para maioria das aplicações de robô móveis, incluindo a analogia com o direcionamento de agulhas, o ângulo θ pode ser desconsiderado. Desta forma, o modelo pode ser simplificado removendo a quarta linha da equação (1) (LYNCH; PARK, 2017, p. 522-523). Com isso, a configuração do robô passa a ser descrita pelo vetor de estado $q = [\phi, x, y]^T$, e a sua cinemática:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r \cos \phi & 0 \\ r \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Para uma análise intuitiva, é comum redefinir as entradas de controle como a velocidade linear v e a velocidade angular ω , obtendo a transformação de controles do modelo do uniciclo como

$$u_1 = \frac{v}{r} \quad (3)$$

$$u_2 = \omega \quad (4)$$

E substituindo estas definições na equação (2), obtemos a forma canônica da cinemática do uniciclo (LYNCH; PARK, 2017, p. 526):

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

Com isso, temos as seguintes equações de cinemática para o modelo do uniciclo não-holonômico.

$$\dot{x} = v \cos \phi \quad (6)$$

$$\dot{y} = v \sin \phi \quad (7)$$

$$\dot{\phi} = \omega \quad (8)$$

Ao aplicar este modelo ao contexto de *needle steering* com agulhas de ponta biselada, o modelo do uniciclo surge como uma abstração eficaz do movimento emergente da agulha. Uma agulha reta com uma ponta assimétrica (bisel), quando inserida em um meio homogêneo, sofre uma força de deflexão lateral devido à interação assimétrica entre o tecido e a ponta. Este fenômeno impõe uma restrição não holonômica: a agulha pode se mover para frente (inserção) e sua trajetória pode curvar, mas ela não pode se mover lateralmente de forma instantânea.

As variáveis do modelo cinemático são, então, mapeadas para este comportamento emergente:

- A velocidade linear v do uniciclo corresponde diretamente à velocidade de inserção da agulha.
- A velocidade angular ω do uniciclo representa a taxa de curvatura da trajetória da ponta da agulha. Esta curvatura é controlada pela orientação rotacional da base da agulha. Ao manter o bisel em um ângulo estático durante a inserção, uma trajetória curva é produzida.

Notavelmente, um movimento puramente retilíneo (equivalente a $\omega \approx 0$) é alcançado através da rotação contínua da base da agulha. Esta rotação contínua anula, na média, as forças de deflexão laterais, resultando em uma trajetória reta. Este modelo simplificado, portanto, fornece uma base teórica robusta para o desenvolvimento de estratégias de controle e planejamento.

2.2.3 Restrições Cinemáticas

O conjunto de equações acima descreve um uniciclo idealizado, capaz de alterar sua trajetória com qualquer raio de curvatura. Contudo, para que este modelo represente com fidelidade um sistema físico como o de uma agulha flexível, ele deve ser refinado para incorporar as limitações inerentes ao sistema real.

A aplicação do modelo do uniciclo para o direcionamento de agulhas, uma abordagem fundamental estabelecida por trabalhos seminais como o de Webster III et al. (2006), demonstra que a assimetria da ponta biselada induz a agulha a seguir uma trajetória que se aproxima de um arco de círculo de curvatura constante quando inserida sem rotação axial. Esta observação leva à necessidade de se considerar a restrição física do raio de curvatura alcançável.

Essa limitação, que impede da agulha de alterar sua direção instantaneamente, é formalizada como uma restrição que acopla a velocidade angular ω à velocidade linear v :

$$\omega = k_{max}v \quad (9)$$

Onde k_{max} é um parâmetro positivo conhecido como curvatura máxima. Esta equação estabelece que a taxa de rotação (ω) é diretamente limitada pela velocidade de avanço (v). Intuitivamente, para executar uma curva ($\omega \neq 0$), a agulha precisa estar se movendo para frente ($v \neq 0$), e para uma dada velocidade v , existe uma velocidade angular máxima que define o raio de curva mais fechado que o sistema pode realizar.

Embora o modelo cinemático imponha uma curvatura máxima fixa (k_{max}) para uma dada agulha, a navegação em ambientes complexos frequentemente exige a execução de trajetórias com raios de curvatura variáveis. Para superar essa limitação binária (curvatura

máxima ou nula), a literatura consolidada, como em Minhas et al. (2007) e Bernardes et al. (2014), propõe a técnica de modulação por ciclo de trabalho (*Duty Cycling*).

O princípio baseia-se na comutação rápida e periódica da orientação da base da agulha. Ao alternar entre períodos de inserção com rotação (gerando deflexão) e inserção sem rotação (trajetória retilínea) dentro de um período de ciclo fixo, o sistema comporta-se, na média, como se possuísse uma curvatura efetiva (k_{eff}) proporcional à razão cíclica aplicada. Essa abordagem permite “virtualizar” a restrição cinemática, conferindo ao sistema uma manobrabilidade contínua essencial para o desvio de obstáculos.

A inclusão desta restrição, portanto, transforma o modelo cinemático ideal em um modelo realista e fisicamente factível. Este refinamento é fundamental para a simulação fidedigna do comportamento do sistema, como será detalhado no Capítulo 4.

2.3 PLANEJAMENTO DE CAMINHOS

O planejamento de caminhos é um problema central em robótica, que envolve a determinação de uma sequência de movimentos para que um robô transite de uma configuração inicial até uma configuração final desejada, evitando colisões com obstáculos e respeitando as restrições inerentes ao seu sistema (LAVALLE, 2006, p. 1-2).

No contexto de *needle steering*, este desafio adquire uma complexidade adicional, dada a flexibilidade da agulha, a natureza deformável dos tecidos biológicos, e a presença de estruturas anatômicas sensíveis ou obstáculos que devem ser contornados (DIMAIO; SALCUDEAN, 2005, p. 965).

A importância do planejamento de caminhos para agulhas flexíveis direcionáveis é destacada como um dos principais focos de pesquisa na área, sendo fundamental para a precisão e segurança dos procedimentos (ZHANG *et al.*, 2025, p. 5). Esta seção abordará as estratégias de planejamento de caminhos, com ênfase no método dos Campos de Potencial, que fundamenta a metodologia deste trabalho.

2.3.1 Visão Geral de Planejamento de Caminhos

A literatura em robótica apresenta uma vasta gama de estratégias para a resolução do problema do planejamento, que podem ser agrupadas em diferentes categorias (LAVALLE, 2006, p. 195). Abordagens combinatórias, como os métodos baseados em grades (*grids*), discretizam o espaço e utilizam algoritmos de busca, como o A*, para encontrar um caminho ótimo em relação à resolução da grade. Outra classe importante são os métodos baseados em amostragem, como as *Rapidly-exploring Random Trees* (RRTs), que exploram espaços de alta dimensionalidade de forma eficiente e oferecem completude probabilística (LAVALLE, 2006, p. 185-186).

Uma terceira abordagem, particularmente relevante para o controle reativo e para a metodologia deste trabalho, é o método dos Campos Potenciais. Esta estratégia modela

o movimento do robô como o de uma partícula sob a influência de um campo de forças artificial. Este campo é composto pela superposição de uma força atrativa, que puxa o robô em direção à configuração final, e forças repulsivas, que o afastam dos obstáculos (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004, p. 267). A principal vantagem do método é sua simplicidade e eficiência computacional, o que o torna adequado para navegação reativa em tempo real. Esta abordagem foi utilizada de forma seminal em trabalhos de direcionamento de agulhas para viabilizar o planejamento em ambientes com obstáculos (DIMAIO; SALCUDEAN, 2005, p. 966). Contudo, uma desvantagem desse método é a possibilidade de existir mínimos locais, quando o campo de forças é nulo, que impede o robô de alcançar o objetivo (SICILIANO *et al.*, 2010, p. 550).

Dada sua importância para este presente trabalho, a formulação matemática e as propriedades dos campos de potencial serão detalhadas na seção seguinte.

2.3.2 Métodos de Campos Potenciais

A abordagem dos Campos de Potencial trata o robô como uma partícula que se move em um campo de forças artificial. Este campo é construído de forma a guiar o robô da sua configuração inicial até uma configuração final desejada, contornando obstáculos conhecidos (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004, p. 267).

O princípio fundamental do método é o da superposição de potenciais. O potencial total $U(q)$ em qualquer ponto q do espaço é a soma de um potencial atrativo $U_{att}(q)$, que atinge seu mínimo no alvo, e um potencial repulsivo $U_{rep}(q)$, que apresenta máximos nas regiões dos obstáculos:

$$U(q) = U_{att}(q) + U_{rep}(q) \quad (10)$$

A força artificial resultante F_{total} que age sobre o robô é definida como o negativo do gradiente do campo potencial total. Fisicamente, isso significa que o robô sempre se moverá na direção de maior declive do campo, como uma esfera rolando morro abaixo (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004, p.267).

$$F(q) = -\nabla U(q) \quad (11)$$

Combinando as equações, vemos que a força total é a soma vetorial das forças atrativa e repulsiva, onde F_{att} aponta na direção do alvo e F_{rep} aponta para longe dos obstáculos:

$$F(q) = F_{att}(q) + F_{rep}(q) \quad (12)$$

Onde, por definição, $F_{att}(q) = -\nabla U_{att}(q)$ e $F_{rep}(q) = -\nabla U_{rep}(q)$.

Da mesma forma, as forças também podem ser separadas em atrativa e repulsiva

$$F(q) = F_{att}(q) + F_{rep}(q) = -\nabla U_{att}(q) - \nabla U_{rep}(q) \quad (13)$$

Uma limitação desse método é o surgimento de mínimos locais, que é quando o robô fica em uma posição que, dependendo do formato e tamanho do obstáculo, faz com que o robô fique preso onde não consiga sentir a influência do campo potencial atrativo.

Para compreender como essas forças são geradas e como seus comportamentos podem ser moldados, é necessário detalhar a formulação matemática de cada componente do campo de potencial. O potencial atrativo geralmente possui uma forma parabólica simples para garantir a convergência ao alvo, enquanto o potencial repulsivo pode assumir diferentes formas para criar barreiras de segurança eficazes em torno dos obstáculos.

As subseções a seguir detalham as formulações matemáticas comuns para os potenciais atrativo e repulsivo.

2.3.2.1 Potencial Atrativo

A componente atrativa do campo potencial tem como objetivo guiar o robô em direção à sua configuração final. Para tal, o potencial atrativo U_{att} é comumente modelado como uma função parabólica que aumenta quadraticamente com a distância Euclidiana entre a posição atual do robô, q , e a configuração do objetivo, q_{goal} . Essa formulação é expressa por:

$$U_{att}(q) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \|q - q_{goal}\|^2 \quad (14)$$

onde α é um fator de ganho positivo que modula a intensidade do campo. A força de atração F_{att} , obtida a partir do negativo do gradiente deste potencial, resulta em uma lei de controle linear, conforme a formulação clássica para robôs móveis (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004, p. 267-269):

$$F_{att}(q) = -\nabla U_{att}(q) = -\alpha(q - q_{goal}) \quad (15)$$

A natureza linear desta força é desejável, pois sua magnitude é diretamente proporcional à distância do alvo. Fisicamente, isso implica que a força de atração em direção ao alvo é intensa quando o robô está longe e diminui suavemente à medida que se aproxima, garantindo uma convergência suave ao ponto de força nula, que ocorre exatamente no alvo.

2.3.2.2 Potencial Repulsivo

A componente repulsiva do campo potencial tem como objetivo criar uma barreira de força em torno dos obstáculos, garantindo que o robô os evite durante a navegação. Idealmente, essa força deve ser intensa nas proximidades do obstáculo, mas nula a

uma distância segura, para não influenciar desnecessariamente a trajetória (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004, p. 269).

Uma formulação clássica para este potencial, U_{rep} , é uma função que cresce inversamente com a distância $\rho(q)$ ao obstáculo, e se anula para além de uma distância de influência ρ_0 :

$$U_{rep}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_{rep} \left(\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 & \text{se } \rho(q) \leq \rho_0 \\ 0 & \text{se } \rho(q) \geq \rho_0 \end{cases} \quad (16)$$

onde k_{rep} é um fator de ganho positivo. A força repulsiva resultante, $F_{rep}(q)$, é obtida pelo negativo do gradiente deste potencial:

$$F_{rep}(q) = -\nabla U_{rep}(q) = \begin{cases} k_{rep} \left(\frac{1}{\rho(q)} - \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{1}{\rho^2(q)} \frac{q - q_{obs}}{\rho(q)} & \text{se } \rho(q) \leq \rho_0 \\ 0 & \text{se } \rho(q) \geq \rho_0 \end{cases} \quad (17)$$

O termo $\frac{(q - q_{obs})}{\rho(q)}$ é um vetor unitário que garante que a força atue sempre na direção radial, afastando o robô do obstáculo. A magnitude da força é, portanto, inversamente proporcional ao cubo da distância, gerando uma repulsão forte em curtas distâncias.

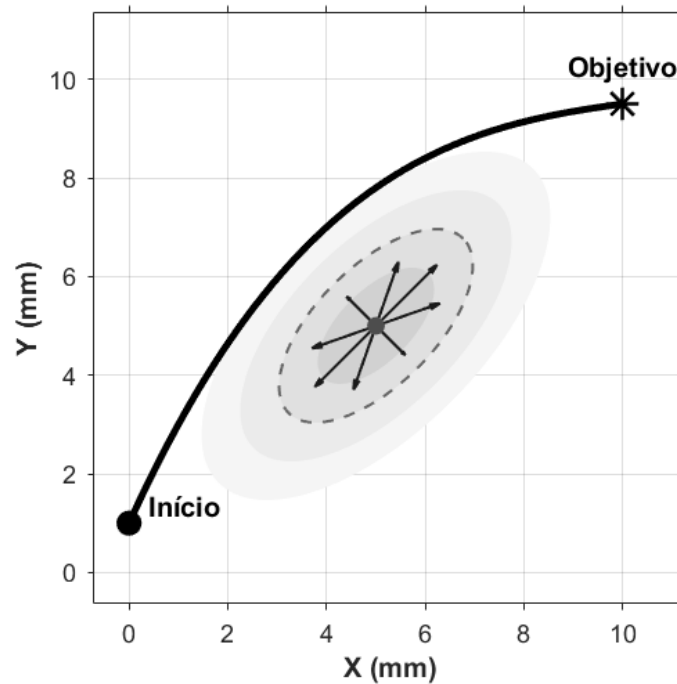
Embora a formulação padrão seja funcional, um campo de repulsão isotrópico (circular) é, na prática, inadequado para a tarefa específica de direcionamento de agulhas. Conforme argumentado por DiMaio e Salcudean (2005, p. 968), o movimento da agulha torna-se progressivamente restrito à medida que a profundidade de inserção aumenta, pois a haste da agulha fica cada vez mais constrangida pelo tecido circundante. Isso implica que qualquer manobra de desvio significativa deve ser iniciada o mais cedo possível, quando a agulha ainda possui maior capacidade de manobra.

Por conta disso, para este trabalho, foi escolhido a aplicação de um campo de potencial repulsivo elíptico. Essa compensação se torna possível por conta do eixo maior da elipse, que dependendo de sua orientação, o planejador pode efetivamente estender a zona de influência do obstáculo em direções específicas. Isso faz com que a força repulsiva comece a atuar com maior antecedência, permitindo que o sistema de controle inicie manobras de desvio suaves antes que a capacidade de manobra da agulha seja severamente limitada pela profundidade, como ilustrada na Figura 3.

2.4 SISTEMAS DE CONTROLE PARA RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA

Uma vez que o planejador de caminhos determina uma trajetória de referência, uma sequência desejada de posições e orientações no tempo, a função do sistema de controle é gerar os sinais de comando para os atuadores que guiarão o robô ao longo dessa trajetória. Este problema é conhecido como controle de rastreamento de trajetória (*trajectory tracking*). Para um sistema com restrições cinemáticas, como um robô móvel

Figura 3 – Planejamento de caminho utilizando um campo de potencial repulsivo elíptico.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

do tipo uniciclo, apresentado na Seção 2.2.2, o desafio consiste em manipular as entradas de controle, as velocidades linear v e angular ω , de modo que o erro entre a pose real do sistema e a pose de referência seja continuamente minimizado (OGATA, 2010, p. 7).

2.4.1 Controle com Realimentação

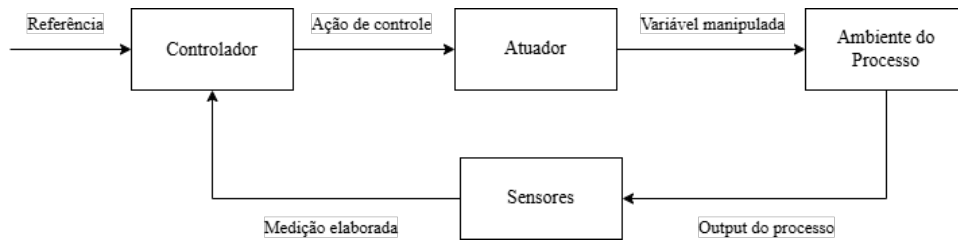
O princípio para o rastreamento de trajetória em ambientes com incertezas é o controle em malha fechada, também conhecido como controle com realimentação (*feedback control*). De forma conceitual, a arquitetura de um sistema de controle com realimentação pode ser compreendida como um laço de informação que implementa o ciclo de “sentir, interpretar e agir” (ALBERTOS; MAREELS, 2010, p. 22). Este laço básico de controle é composto por elementos essenciais, conforme descrito por Albertos e Mareels (2010, p. 23):

- **Sensores:** Dispositivos que medem as variáveis de interesse do processo, como, por exemplo, posição e velocidade, e as convertem em sinais que podem ser processados.
- **Controlador:** O “cérebro” do subsistema de controle. Ele recebe a informação dos sensores e a compara com um sinal de referência. Com base nessa diferença, ou erro, ele calcula e determina a ação corretiva necessária.

- **Atuadores:** Dispositivos que recebem os comandos do controlador e os transformam em ações que atuam diretamente sobre o processo, alterando seu comportamento.

Conforme demonstrado na Figura 4, o sensor mede uma variável do processo. Essa medida é então comparada com um valor de referência, e a diferença entre os dois, denominada erro, é utilizada pelo controlador para gerar uma ação corretiva. Esta ação é implementada pelo atuador, que por sua vez modifica uma entrada do processo para influenciar a variável medida, fechando assim o laço de informação (OGATA, 2010, p. 6).

Figura 4 – Componentes de uma malha de controle básica com realimentação.



Fonte: Adaptado de Albertos e Mareels (2010, p. 23).

O propósito desta malha fechada é garantir a robustez do sistema. A realimentação torna a resposta do sistema relativamente insensível a distúrbios externos e a variações internas nos parâmetros do sistema (OGATA, 2010, p. 7). No contexto da robótica móvel, isso significa que o controlador pode corrigir desvios causados por perturbações externas, incertezas do modelo ou erros de sensoriamento e atuação. A arquitetura de controle com realimentação, portanto, utiliza a pose atual do robô, $q(t)$, para calcular o erro em relação à pose desejada, $q_d(t)$, e determinar as velocidades $v(t)$ e $\omega(t)$ que devem ser aplicadas para anular esse erro (LYNCH; PARK, 2017, p. 542-544).

2.4.2 Modelagem do Erro de Rastreamento

Uma vez estabelecida a necessidade do controle com realimentação, o passo seguinte é definir matematicamente o erro que o sistema de controle buscará anular ou minimizar. A pose de um robô móvel no plano é descrita por um vetor de estados $q(t) = [x(t), y(t), \phi(t)]^T$, enquanto a trajetória desejada é definida por uma pose de referência que varia no tempo, $q_d(t) = [x_d(t), y_d(t), \phi_d(t)]^T$.

Para um sistema não holonômico, uma lei de controle que considere apenas o erro de posição (x, y) , é insuficiente, pois o robô poderia atingir a posição correta, porém com uma orientação final incorreta (LYNCH; PARK, 2017, p. 543). Por essa razão, a abordagem padrão consiste em expressar o erro de rastreamento no sistema de coordenadas do corpo do próprio robô, o que permite controlar simultaneamente os erros de posição e orientação

(LYNCH; PARK, 2017, p. 544). O vetor de erro $e(t) = [e_x(t), e_y(t), e_\phi(t)]^T$ no referencial do robô é, portanto, obtido através da seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \phi_d - \phi \end{bmatrix} \quad (18)$$

Nesta formulação, e_x representa o erro na direção longitudinal (à frente) do robô, e_y é o erro na direção lateral e e_ϕ é o erro de orientação.

O objetivo do controlador é anular a dinâmica deste erro no tempo. Para projetar tal controlador, é necessário derivar a cinemática do erro, $\dot{e}(t)$. Assumindo que o robô de referência se move com velocidades linear v_d e angular ω_d , e que as velocidades de controle do robô real são v e ω , a cinemática do erro é dada pelo seguinte sistema de equações diferenciais (LYNCH; PARK, 2017, p. 544):

$$\dot{e}_x = \omega e_y - v + v_d \cos(e_\phi) \quad (19)$$

$$\dot{e}_y = -\omega e_x + v_d \sin(e_\phi) \quad (20)$$

$$\dot{e}_\phi = \omega_d - \omega \quad (21)$$

Este modelo dinâmico do erro, fundamentado na cinemática apresentada por Lynch e Park (2017), constitui o ponto de partida universal para o projeto de diversas leis de controle de rastreamento. A tarefa do controlador é, portanto, gerar os sinais v e ω de tal forma que a dinâmica de e seja estável e convirja a zero. A metodologia deste trabalho detalhará a lei de controle específica, proposta por Lee et al. (2001), que foi selecionada e implementada para atingir este objetivo.

2.4.3 Saturação de Atuadores e Técnicas de *Anti-Windup*

As leis de controle derivadas de modelos cinemáticos ideais frequentemente desconsideram as limitações físicas dos atuadores. Na prática, contudo, todos os atuadores possuem um intervalo de operação limitado, como uma velocidade máxima em um motor ou o curso finito de uma válvula (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995, p. 80). Este fenômeno é modelado como uma não-linearidade do tipo saturação.

Quando o sinal de controle comandado excede a capacidade do atuador, o laço de realimentação é efetivamente quebrado, pois a saída do atuador permanece em seu limite máximo, independentemente das variações no erro do processo. Se o controlador possui ação integral, um problema grave conhecido como *integral windup* (ou acúmulo do integrador) pode ocorrer. Mesmo com o atuador saturado, a ação integral do controlador continua a acumular o erro persistente, fazendo com que o termo integral atinja valores excessivamente elevados (*winds up*). A consequência é que, mesmo quando o erro do sistema muda de sinal, é necessário um longo período com erro de sinal oposto para que

o integrador seja descarregado e retorne a uma faixa de operação normal, resultando em grandes sobressinais (*overshoots*) e transitórios severos (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995, p. 81).

Para mitigar este efeito prejudicial, esquemas de *anti-windup* foram desenvolvidos. Uma abordagem comum é a técnica de *back-calculation*, que introduz um laço de realimentação adicional ao redor do integrador. Este laço utiliza a diferença entre a saída comandada e a saída saturada real do atuador para evitar o acúmulo excessivo do termo integral (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995, p. 83). A existência destes fenômenos, portanto, justifica a adoção de uma lei de controle que lide intrinsecamente com a saturação. Nesse contexto, abordagens como a proposta por Lee *et al.* (2001) tornam-se particularmente relevantes para garantir a estabilidade e o desempenho em aplicações práticas de *needle steering*.

2.5 SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL

Um sistema de visão computacional visa emular a capacidade da visão humana para extrair, processar e compreender informações a partir de imagens digitais. No contexto da robótica autônoma, a visão computacional atua como um sensor para a realimentação de controle em malha fechada, permitindo que o robô perceba seu ambiente e se adapte a ele dinamicamente. O processo para extrair informações significativas de uma imagem bruta envolve uma sequência de etapas, que incluem a aquisição e representação da imagem, o pré-processamento para melhoria de sua qualidade, a segmentação para isolar objetos de interesse e, por fim, a extração de características para análise e tomada de decisão (GONZALEZ; WOODS, 2018). As subseções a seguir detalham os fundamentos teóricos de cada uma dessas etapas, com foco nas técnicas pertinentes a este trabalho.

2.5.1 Aquisição e Representação de Imagens Digitais

Uma imagem digital é uma representação bidimensional de uma cena tridimensional, descrita por uma função de intensidade luminosa $f(x, y)$, onde (x, y) são as coordenadas espaciais e o valor de f em qualquer ponto é proporcional ao brilho (intensidade) da cena naquele ponto (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 61-63). Para que possa ser processada por um computador, essa função contínua deve ser discretizada tanto em suas coordenadas espaciais quanto em sua amplitude (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 64). Este processo é dividido em duas etapas: amostragem e quantização.

A amostragem consiste em discretizar as coordenadas espaciais (x, y) , resultando em uma matriz de pontos (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 65). A quantização, por sua vez, consiste em discretizar a amplitude de intensidade, atribuindo um valor inteiro a cada ponto amostrado (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 65). O resultado final é uma matriz digital, onde cada elemento, denominado pixel (*picture element*), possui uma localização

e um valor específico (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 66).

No caso simples, a imagem é representada em tons de cinza (*grayscale*), onde cada pixel assume um valor dentro de um intervalo que representa a intensidade luminosa, tipicamente de 0 (preto) a 255 (branco). Imagens coloridas são comumente representadas por múltiplos canais, como no modelo RGB, onde a cor de cada pixel é uma combinação das intensidades desses três canais (SONKA; HLAVAC; BOYLE, 2015, p. 36). Para muitas aplicações de análise de forma, a conversão de uma imagem colorida para tons de cinza é uma etapa preliminar essencial, pois reduz a complexidade computacional (de três canais para um) sem perda da informação relevante para a segmentação de objetos (SONKA; HLAVAC; BOYLE, 2015, p. 116-117) (veja Figura 5).

Figura 5 – (a) Imagem original. (b) Imagem convertida para tons de cinza.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

2.5.2 Pré-processamento: Filtragem Espacial para Suavização

Imagens capturadas em ambientes reais estão invariavelmente sujeitas a ruído, que se manifesta como variações aleatórias na intensidade dos pixels. Esse ruído pode ser originado pelo sensor da câmera, por condições de iluminação ou por interferência eletrônica. O pré-processamento visa atenuar esse ruído para facilitar as etapas subsequentes, como a segmentação.

Uma das técnicas eficazes para a redução de ruído é a filtragem espacial, que consiste em operar sobre uma vizinhança de pixels. A filtragem por suavização (ou passa-baixas) é usada para reduzir detalhes finos e borrar arestas, tendo como efeito colateral a atenuação do ruído, essa operação é realizada através da convolução da imagem com um *kernel* (ou máscara de filtro) (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 153-154).

Um dos filtros de suavização importantes é o filtro Gaussiano. Diferentemente de um filtro de média simples, que atribui pesos iguais a todos os pixels na vizinhança, o filtro Gaussiano utiliza um *kernel* cujos pesos seguem uma distribuição Gaussiana (SONKA;

HLAVAC; BOYLE, 2015, p. 127). Isso significa que o pixel central tem a maior influência, e a influência dos *pixels* vizinhos diminui com a distância do centro. Essa propriedade é desejável por produzir uma suavização natural e preservar melhor as arestas, sendo amplamente utilizado para a redução de ruído Gaussiano (SONKA; HLAVAC; BOYLE, 2015, p. 141).

2.5.3 Segmentação de Imagem por Limiarização

A segmentação é o processo de particionar uma imagem digital em múltiplas regiões ou conjuntos de pixels, com o objetivo de isolar objetos de interesse do restante da cena (fundo). A limiarização (*thresholding*) é uma das abordagens simples e computacionalmente eficientes para a segmentação de imagens, especialmente em cenários onde os objetos de interesse possuem uma intensidade de pixel distinta do fundo.

Dada uma imagem em tons de cinza $f(x, y)$, a forma básica de limiarização, a limiarização global, envolve a seleção de um único valor de limiar T (GONZALEZ; WOODS, 2018, p.743). A imagem limiarizada $g(x, y)$ é então definida como:

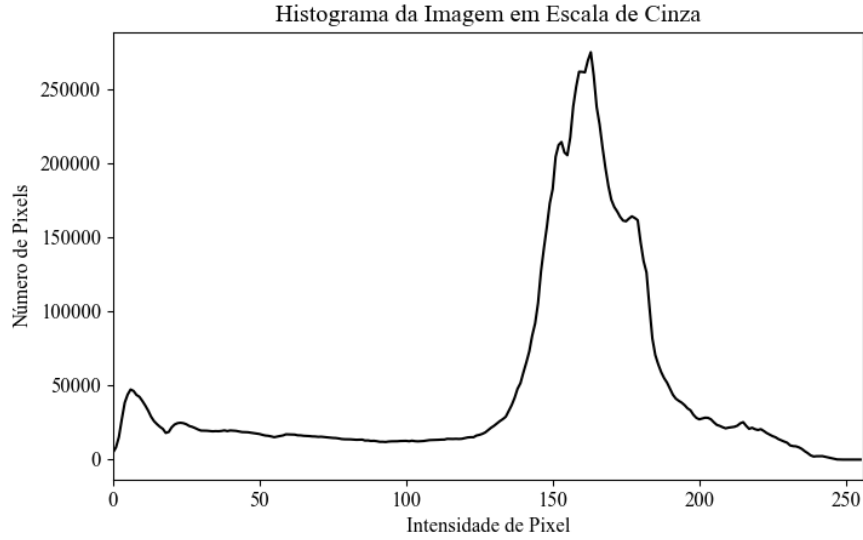
$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x, y) > T \\ 0 & \text{se } f(x, y) \leq T \end{cases} \quad (22)$$

O resultado é uma imagem binária, onde pixels com valor 1 pertencem aos objetos e pixels com valor 0 pertencem ao fundo (ou vice-versa, na limiarização inversa). A principal dificuldade desta técnica reside na escolha de um valor adequado para T , pois ele vai que vai definir o intervalo de cor do objeto e do fundo na imagem.

Uma abordagem para a escolha de T é a análise do histograma da imagem. O histograma é um gráfico que representa a distribuição das intensidades dos pixels, mostrando a frequência (número de pixels) para cada nível de cinza, de 0 (preto) a 255 (branco). Em um cenário ideal para segmentação, onde a imagem é composta por objetos com uma faixa de intensidade e um fundo com outra, o histograma apresentará uma distribuição bimodal, ou seja, com dois picos dominantes. Um pico corresponderá à faixa de intensidades dos pixels do fundo, enquanto o outro corresponderá aos pixels que compõem os objetos de interesse. A região de baixa frequência entre esses dois picos, conhecida como vale, representa a localização ideal para o limiar T e a escolha de um valor T neste vale permite separar eficazmente os dois grupos de pixels. Para ilustrar este processo, considere o histograma da imagem apresentada em tons de cinza anteriormente, apresentado na Figura 6.

Selecionando-se, por exemplo, um limiar empírico de $T = 50$ localizado no vale entre os dois picos principais, é possível aplicar a limiarização binária inversa. O resultado desta operação é uma máscara binária, como a exibida na Figura 7, onde os pixels com intensidade abaixo do limiar são destacados, isolando o objeto de interesse do fundo.

Figura 6 – Exemplo de histograma utilizado na limiarização global.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

2.5.4 Análise de Objetos e Extração de Características Morfológicas

Após a segmentação, a imagem binária resultante contém regiões de pixels conectadas que representam os objetos de interesse. A etapa final consiste em analisar essas regiões para extrair descritores quantitativos, ou características, que permitam a identificação e a medição desses objetos.

A análise de contornos é uma técnica fundamental para este fim. Um contorno é uma curva que une todos os pontos contínuos ao longo do perímetro de um objeto. Uma vez que o contorno de um objeto é extraído, várias de suas propriedades geométricas podem ser calculadas.

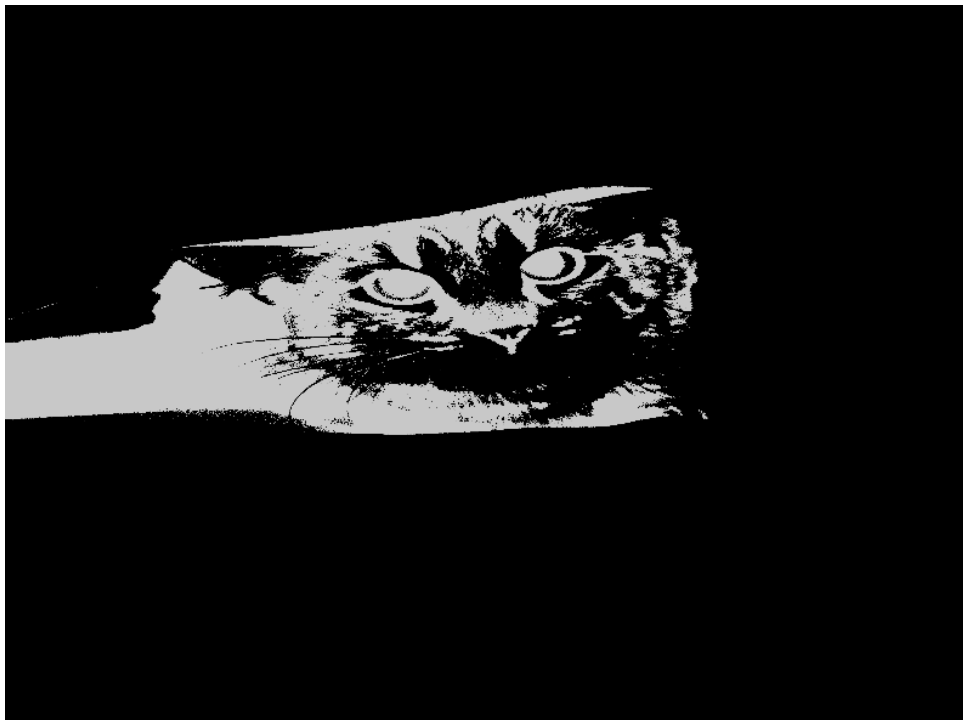
Uma abordagem poderosa para descrever a forma de uma região é o uso de momentos de imagem. Para uma imagem binária, o momento de ordem $(p + q)$ é definido por:

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y) \quad (23)$$

onde $f(x, y)$ é 1 para pixels do objeto e 0 para o fundo. A partir dos momentos, as seguintes características podem ser derivadas (GONZALEZ; WOODS, 2018, p. 858):

- **Área:** A área de um objeto é dada pelo momento de ordem zero, $A = m_{00}$.
- **Centróide:** O centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$ do objeto, ou centróide, é calculado usando os momentos de primeira ordem:

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}} \quad (24)$$

Figura 7 – Máscara binária inversa com $T = 50$.

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

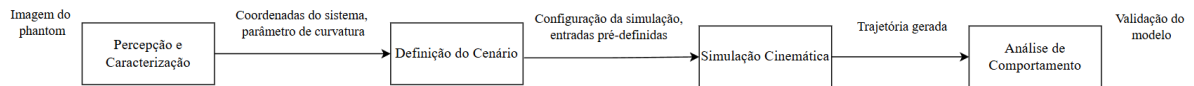
Esses descritores são invariantes à translação e fornecem informações vitais para o sistema de controle, como a área para classificar o tamanho de um obstáculo e seu centroide para definir sua localização exata. Outras características, como a razão de aspecto (a razão entre a largura e a altura do retângulo que envolve o objeto), podem ser utilizadas para classificar objetos com base em sua elongação, sendo particularmente útil para distinguir objetos finos e longos, como uma agulha.

3 METODOLOGIA

3.1 VISÃO GERAL DA ARQUITETURA DO SISTEMA

Neste trabalho, a metodologia adotada baseia-se no desenvolvimento de uma arquitetura modular de simulação e percepção, projetada para validar o modelo cinemático de agulhas flexíveis e caracterizar o comportamento do sistema em malha aberta e fechada. Diferente de uma abordagem de controle integrado em tempo real, a arquitetura proposta foca na análise da fidelidade do modelo matemático e na demonstração, por simulação, das limitações da navegação. A Figura 8 ilustra a estrutura conceitual dos módulos desenvolvidos.

Figura 8 – Diagrama de blocos da arquitetura do sistema proposto.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

O sistema é estruturado em módulos funcionais que permitem tanto a caracterização em malha aberta quanto a validação em malha fechada:

- **Módulo de Simulação Cinemática (A Planta):** Este módulo implementa o modelo do uniciclo não-holonômico para simular a trajetória da agulha a partir de sequências de comandos em malha aberta (velocidade de inserção v e velocidade angular ω). Uma característica central deste módulo é a incorporação explícita da restrição de curvatura máxima (k_{max}), garantindo que o comportamento simulado seja cinematicamente factível. A implementação permite isolar e analisar a influência de parâmetros críticos no comportamento da planta.
- **Módulo de Visão Computacional (Percepção e Caracterização):** Este módulo atua como o sistema de percepção e medição. Por meio do processamento de imagens de um *phantom* de tecido mole, o sistema extrai as coordenadas da ponta da agulha e dos centroides de obstáculos. Neste trabalho, sua função é dupla: fornecer os dados experimentais para a caracterização offline do parâmetro de curvatura máxima (k_{max}) e definir cenários de teste realistas (posições de obstáculos e alvos) para as simulações. Desta forma, este módulo atua como uma etapa preliminar, fornecendo as condições iniciais e os parâmetros físicos necessários para alimentar o módulo de simulação.
- **Módulo de Estratégia de Controle (Comparativo):** Integrado ao ambiente de simulação, este módulo implementa a lei de controle de rastreamento (Seção 3.5). Sua função na arquitetura não é a operação do robô físico, mas sim

permitir a **análise comparativa**. Ele é ativado em cenários específicos para demonstrar como a realimentação visual pode mitigar as incertezas e riscos de colisão identificados na operação em malha aberta.

- **Módulo de Análise de Comportamento:** Este módulo representa a etapa de validação do trabalho. A planta simulada é submetida a dois tipos de análise: determinística e estocástica. A análise determinística utiliza degraus e sinais padrão para validar a cinemática. A análise estocástica emprega o Método de Monte Carlo para quantificar a robustez do sistema. Nesta abordagem, realizam-se múltiplas execuções da mesma trajetória introduzindo ruídos pseudo-aleatórios (Gaussianos) nas entradas de controle, permitindo mapear a dispersão probabilística da posição final da agulha e estimar riscos de colisão em cenários de incerteza.

As subseções seguintes detalharão a implementação dos dois primeiros módulos. O Capítulo 4 apresentará os resultados gerados por cada um e a análise de rastreamento.

3.2 CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DA AGULHA

A implementação de um sistema baseado em percepção visual e a validação do modelo cinemático exigem que os parâmetros do sistema físico sejam devidamente caracterizados e que as medições do sensor (em pixels) sejam mapeadas para o sistema de coordenadas do mundo real (em milímetros).

O primeiro passo consistiu em uma calibração estática da câmera utilizada no projeto. Este processo foi realizado capturando uma imagem do ambiente experimental com um objeto de dimensão conhecida (uma régua) posicionado no plano de operação da agulha. A partir da razão entre a distância real medida e a distância correspondente em pixels, foi determinado o fator de conversão `MM_POR_PIXEL`, utilizado para mapear as coordenadas da ponta da agulha, dos obstáculos e do alvo.

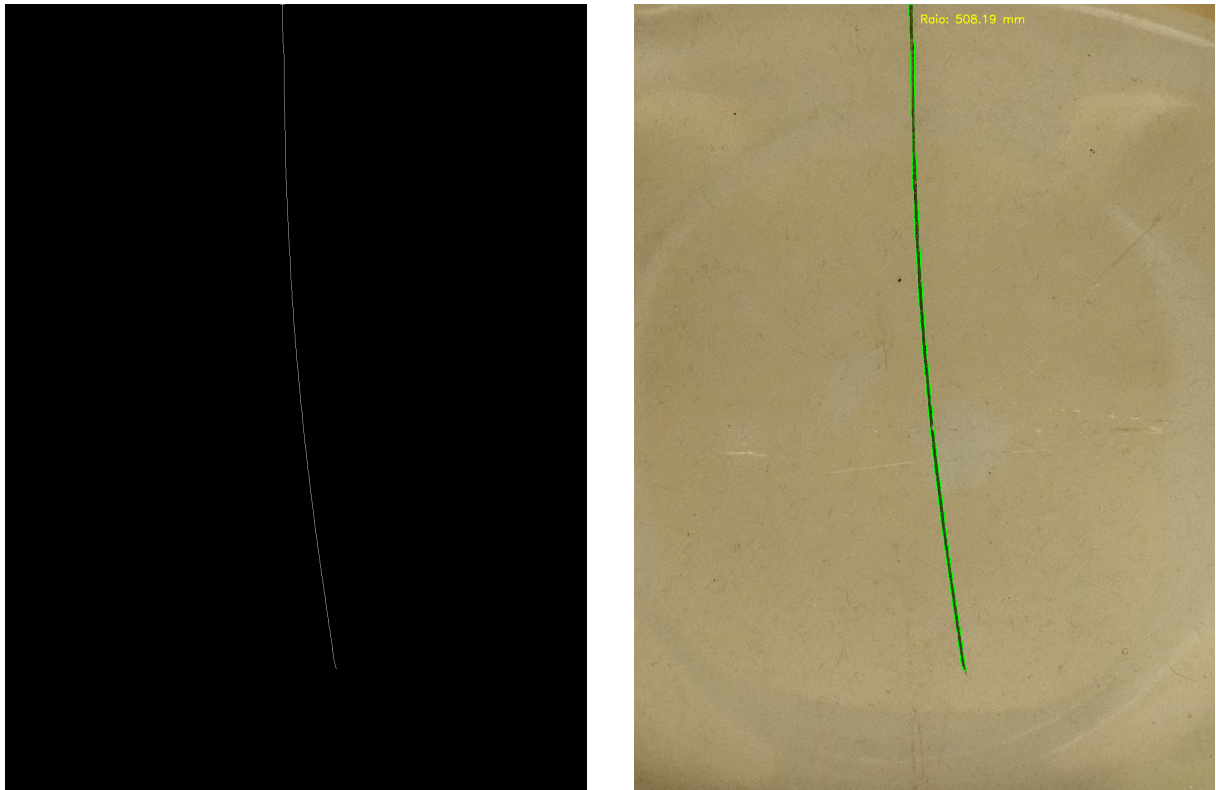
O segundo passo foi a determinação experimental da curvatura máxima (k_{max}) da agulha, um parâmetro que impõe uma restrição cinemática ao sistema. Para isso, uma imagem da agulha em sua configuração de máxima deflexão foi submetida a um *pipeline* de processamento:

- **Segmentação:** A agulha foi isolada do fundo por meio de limiarização, gerando uma máscara binária.
- **Afinamento (*Thinning*):** O algoritmo de afinamento foi aplicado à máscara para extrair o eixo central da agulha como um conjunto de pontos com um pixel de espessura.
- **Ajuste de Curva:** O método dos mínimos quadrados (`polyfit`) foi empregado para ajustar um polinômio de segunda ordem (parábola) a este conjunto de pontos.

O raio de curvatura (R) foi então calculado diretamente a partir dos coeficientes do polinômio ajustado. O valor de k_{max} , correspondente ao inverso do raio ($1/R$), é a restrição incorporada nas simulações e na lei de controle.

A Figura 9 ilustra o resultado deste processamento aplicado ao protótipo físico final. Para garantir a robustez da medição, o ensaio de inserção foi repetido múltiplas vezes, e o valor calculado para o raio de curvatura apresentou baixa variabilidade. Utilizando o fator de conversão calibrado ($MM_POR_PIXEL = 0.05$), o algoritmo determinou um raio de curvatura de $R \approx 508$ mm. Com base nesta medição, definiu-se o parâmetro nominal de $R = 500$ mm para o modelo cinemático, resultando em um $k_{max} = 0.002 \text{ mm}^{-1}$.

Figura 9 – (a) Imagem convertida para *grayscale* e aplicado *thinning*. (b) Imagem após tratamento para calcular raio de curvatura, evidenciando o resultado de 508.19 mm.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

3.3 AMBIENTE DE SIMULAÇÃO CINEMÁTICA

Para validar o modelo matemático proposto e analisar o comportamento da agulha sob diferentes condições de operação, foi desenvolvido um ambiente de simulação computacional. Esta etapa é fundamental para caracterizar a resposta do sistema em malha aberta, permitindo isolar as variáveis cinemáticas e estudar a influência de parâmetros físicos, como a curvatura máxima, sem as incertezas inerentes à instrumentação física.

3.3.1 Implementação e Estrutura da Simulação

O ambiente foi implementado na linguagem Python, utilizando as bibliotecas NumPy para computação vetorial e Matplotlib para visualização de trajetórias. A arquitetura do simulador foi projetada não para o controle em tempo real, mas como uma ferramenta de análise determinística, onde entradas conhecidas são aplicadas ao modelo para verificar a fidelidade da trajetória resultante. O código-fonte completo desta implementação está disponível para consulta no Apêndice B.

3.3.1.1 Modelo da Planta e Fluxo de Execução

O núcleo da simulação é a representação da agulha através do modelo cinemático do uniciclo não-holonômico, conforme fundamentado na Seção 2.2.2. A simulação progride em passos discretos de tempo dt (definido como 0.05s), resolvendo a evolução do vetor de estados $q = [x, y, \phi]^T$ através da integração numérica pelo método de Euler.

Diferente de uma malha de controle fechada, o fluxo de execução neste trabalho opera em malha aberta, processando sequências de comandos pré-definidos. O ciclo de simulação ocorre da seguinte maneira:

1. **Gerenciamento de Entradas:** A cada passo de tempo, o simulador processa uma sequência de comandos pré-programados. Estes comandos definem a velocidade de inserção de referência (v_{ref}) e o estado de controle do bisel, representado pela variável $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, onde cada valor corresponde a uma manobra de direcionamento (curva à esquerda, reto, curva à direita).
2. **Aplicação das Restrições Cinemáticas:** A partir do estado de controle σ , a velocidade angular ω a ser aplicada na planta é calculada. Para manobras de curva, o sistema é comandado a operar em sua curvatura máxima, garantindo que a trajetória gerada seja sempre fisicamente factível. A relação é dada por:

$$\omega = v_{ref} k_{max} \sigma \quad (25)$$

Onde k_{max} é o parâmetro de curvatura máxima (obtido via caracterização experimental). Esta equação traduz o comando de alto nível (σ) na velocidade angular de baixo nível (ω) que o modelo integra.

3. **Integração do Modelo:** Com as velocidades linear (v) e angular (ω) definidas, as equações diferenciais do uniciclo são integradas para calcular a nova pose do robô, q_{k+1} , atualizando sua posição cartesiana e orientação.
4. **Registro de Dados (*Data Logging*):** As variáveis de estado, juntamente com os comandos de entrada aplicados, são armazenadas em vetores históricos. Isso permite a geração posterior de gráficos para análise de sensibilidade e a comparação entre trajetórias de referência e as trajetórias simuladas.

Esta estrutura permite verificar se o modelo cinemático implementado é capaz de reproduzir as manobras de direcionamento esperadas e quantificar o desvio de trajetória causado por variações nos parâmetros do sistema.

3.4 SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL

O módulo de percepção do sistema foi desenvolvido em linguagem Python, utilizando a biblioteca de código aberto OpenCV (*Open Source Computer Vision Library*). O código-fonte detalhado deste módulo pode ser consultado no Apêndice C. Conforme a arquitetura modular proposta (Figura 8), este subsistema tem uma dupla finalidade neste trabalho, servir como ferramenta de medição para a caracterização experimental de parâmetros da planta, como a curvatura máxima, e definir cenários de teste realistas, extraindo as coordenadas da ponta da agulha e dos centros dos obstáculos presentes em um ambiente experimental. O algoritmo implementado segue uma sequência de etapas de processamento, detalhadas a seguir.

3.4.1 Preparação do *Phantom*

Para a validação do sistema de visão e a criação de cenários de teste realistas, foi confeccionado um *phantom*, termo técnico para um modelo físico projetado para simular as propriedades de tecidos biológicos para fins de calibração, treinamento ou validação de sistemas. Neste trabalho, o *phantom* foi desenvolvido para simular um tecido mole homogêneo, permitindo a caracterização do sistema de forma controlada. O procedimento para sua confecção, baseado em uma receita de gelatina balística, segue uma abordagem adaptada da literatura (ROCHA *et al.*, 2017).

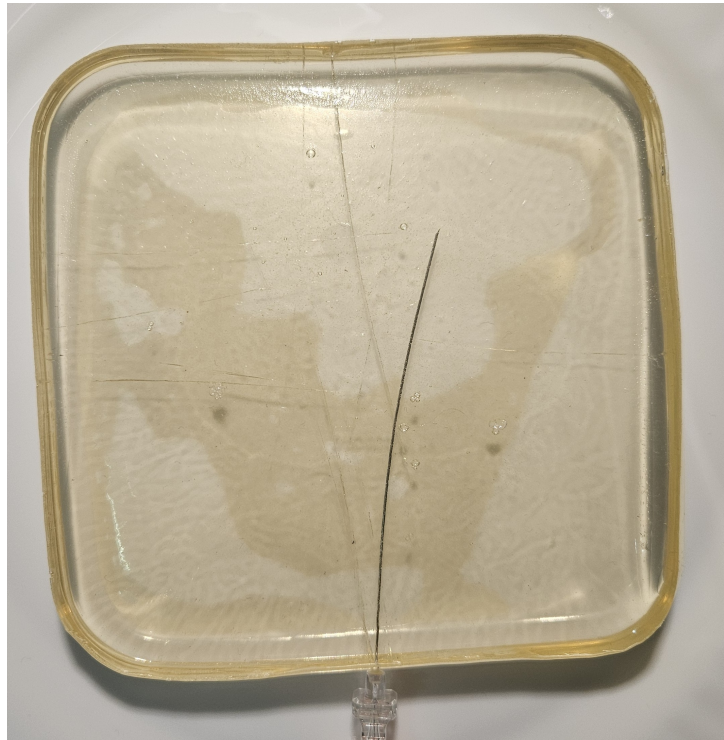
O processo de preparação consistiu em dissolver 48 gramas de gelatina em pó incolor em 250 ml de água. A mistura foi aquecida em fogo baixo até a completa dissolução e, em seguida, foram adicionados 100 ml de glicerina vegetal. A solução resultante foi vertida em um recipiente de fundo plano e transparente.

Finalmente, o recipiente foi refrigerado por um período de 12 horas para garantir a completa solidificação do gel. O resultado deste processo é um meio translúcido e homogêneo, que proporciona um fundo com contraste adequado para a visualização da agulha e de obstáculos pelo sistema de visão.

3.4.2 Configuração Experimental e Instrumentação

Com o *phantom* solidificado, a configuração para os ensaios experimentais foi montada, conforme ilustrado na Figura 10. O ambiente foi preparado sobre um fundo branco e uniforme para garantir alto contraste e facilitar o processo de segmentação de imagem, minimizando ruídos e variações de iluminação.

Figura 10 – Configuração experimental utilizada para os ensaios de visão computacional, exibindo o protótipo da agulha inserido no *phantom* de gelatina balística.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

A agulha utilizada neste trabalho, exibida na Figura 11, é uma agulha espinhal para raquianestesia (ponta lanceta) de calibre 25G e 90 mm de comprimento, fabricada em aço inoxidável. A escolha deste modelo é justificada por sua ponta com geometria assimétrica (bisel), que gera as forças de deflexão lateral, um conceito base do *needle steering*, possibilitando o seguimento de trajetórias curvas, comportamento que é caracterizado experimentalmente neste trabalho.

3.4.3 Aquisição e Pré-processamento

A primeira etapa do ciclo de percepção consiste na captura e preparação da imagem. A aquisição é realizada por uma câmera configurada para uma resolução de 800×600 pixels. Para as análises, foram capturadas imagens estáticas do ambiente experimental, garantindo a clareza necessária para o processamento subsequente.

Cada imagem, originalmente capturada no espaço de cor BGR, é imediatamente convertida para uma representação em tons de cinza. Esta conversão reduz a complexidade computacional e é suficiente para a análise morfológica dos objetos. Subsequentemente, aplica-se um filtro Gaussiano com um kernel de dimensões 5×5 . Conforme fundamentado na Seção 2.5.2, esta etapa é necessária para suavizar a imagem e atenuar ruídos de alta frequência provenientes do sensor, o que melhora significativamente a eficácia da etapa de

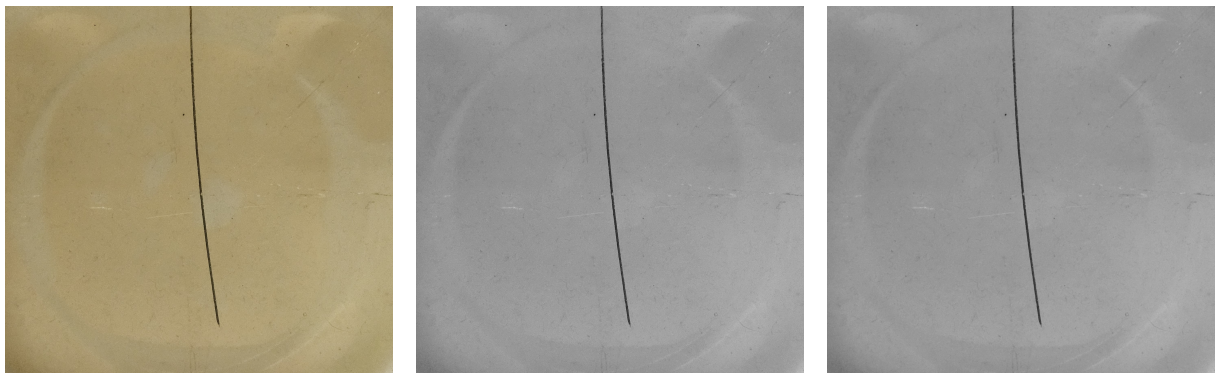
Figura 11 – Agulha espinhal comercial (25G x 90 mm) utilizada nos ensaios experimentais.



Fonte: Unisis (2025)

segmentação. A Figura 12 ilustra o resultado sequencial destas operações.

Figura 12 – (a) Imagem bruta capturada pela câmera. (b) Imagem convertida para tons de cinza. (c) Imagem após a aplicação do filtro Gaussiano 5×5 .



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

3.4.4 Segmentação e Limpeza Morfológica

A segmentação, que isola os objetos de interesse do fundo, é realizada por meio de uma limiarização global. Esta abordagem foi selecionada por sua robustez e eficiência computacional, sendo particularmente adequada para a aplicação em questão. Visto que o setup experimental opera sob condições de iluminação consistentes, um único limiar (T)

fixo é suficiente para garantir uma segmentação precisa e repetível em todos os quadros de vídeo.

Foi aplicado o modo de limiarização binária inversa, onde o valor do limiar foi determinado empiricamente como $T = 140$ a partir da análise do histograma da imagem em tons de cinza. Adicionalmente, o valor máximo de intensidade para os pixels de objeto foi definido como 200. Na operação de limiarização, todos os pixels com intensidade superior a 140 são definidos como 0 (preto), enquanto os pixels com intensidade igual ou inferior a 140 recebem o valor de 200. Este processo resulta em uma máscara binária de alto contraste, na qual a agulha e os obstáculos são representados em branco, pronta para as etapas subsequentes de análise morfológica.

A máscara binária resultante pode conter ruídos, como pequenos “buracos” nos objetos ou partículas artificiais no fundo. Para refinar a segmentação, foram aplicadas duas operações morfológicas em sequência, utilizando um elemento estruturante (*kernel*) de 5×5 para a abertura e 20×1 para o fechamento:

1. **Abertura Morfológica (MORPH_OPEN):** Remove pequenos ruídos brancos no fundo da imagem.
2. **Fechamento Morfológico (MORPH_CLOSE):** Preenche pequenos buracos pretos nos contornos dos objetos de interesse, garantindo sua coesão.

O resultado deste tratamento é uma máscara binária limpa, pronta para a extração de contornos, como demonstrado na Figura 13.

Figura 13 – (a) Máscara binária obtida diretamente com o método global, apresentando ruído. (b) Máscara final após a aplicação das operações morfológicas de abertura e fechamento, pronta para a análise.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

3.4.5 Análise, Classificação e Extração de Coordenadas

A partir da máscara binária final, o algoritmo `cv.findContours` é empregado para extrair uma lista de todos os contornos externos. Cada contorno é então submetido a um processo de classificação baseado em descritores morfológicos para ser categorizado como “agulha” ou “obstáculo”.

3.4.5.1 Identificação da Agulha e sua Ponta

Um contorno c é classificado como uma agulha candidata se atender a dois critérios geométricos simultaneamente:

- **Área:** A área do contorno deve ser maior que a área mínima empiricamente definido como `MIN_NEEDLE_AREA` (500 pixels²).
- **Razão de Aspecto:** O objeto deve ser alongado. A razão de aspecto, calculada a partir das dimensões do retângulo de área mínima que envolve o contorno (`cv.minAreaRect`), deve ser superior a `MIN_ASPECT_RATIO` (15.0).

Caso múltiplos contornos satisfaçam essas condições, o candidato com a maior área é selecionado como a agulha de interesse. Esta escolha é deliberada, pois o pré-processamento morfológico visa conectar todos os segmentos da agulha em um único contorno proeminente, que consequentemente será o de maior área.

Uma vez identificado o contorno da agulha, a coordenada de sua ponta é extraída por uma heurística: assume-se que a ponta é o ponto do contorno que possui o maior valor na coordenada y (no sistema de coordenadas da imagem que assume a origem (0.0,0.0) no canto superior esquerdo). Dado que o setup experimental foi projetado para uma inserção no sentido positivo do eixo y da imagem, esta abordagem é robusta e computacionalmente eficiente para determinar a extremidade avançada da agulha.

3.4.5.2 Identificação dos Obstáculos e seus Centros

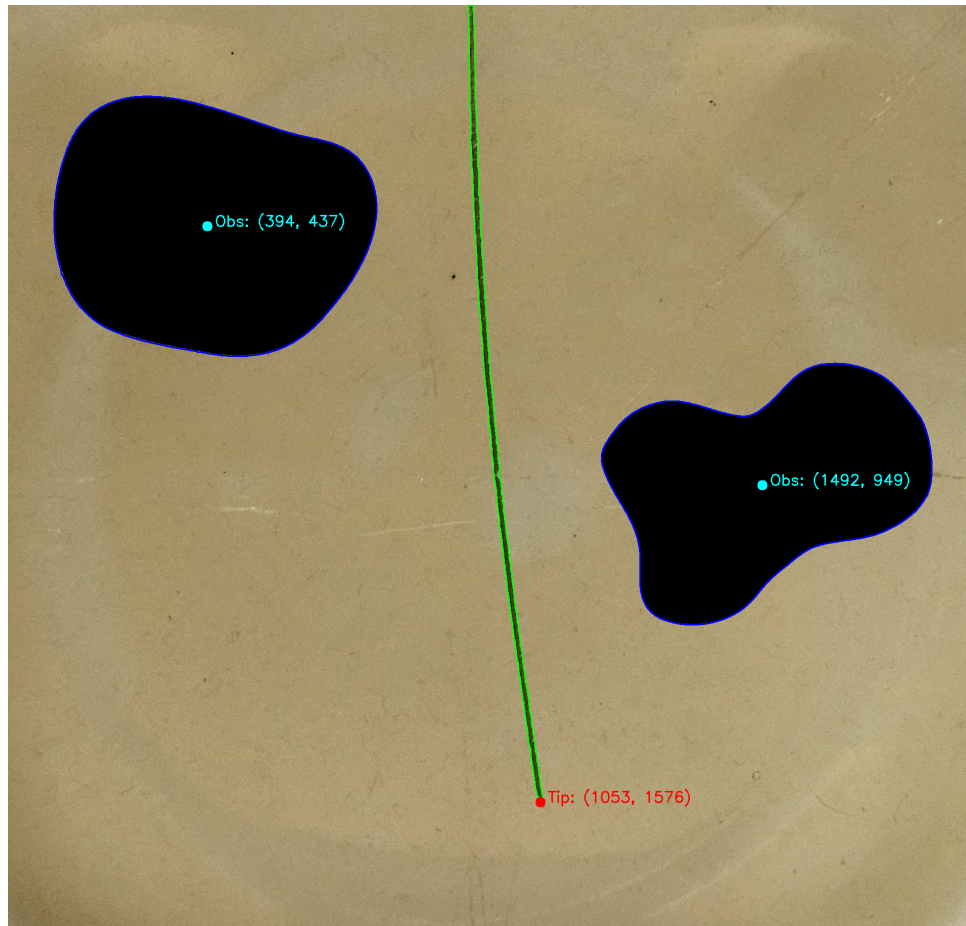
Um contorno que não foi classificado como agulha é então avaliado como um obstáculo potencial. A classificação de um obstáculo é baseada em seu tamanho:

- **Área Mínima:** A área A deve ser superior a `MIN_OBSTACLE_AREA` (16000 pixels²), garantindo que apenas objetos significativos sejam considerados.

Para cada obstáculo identificado, seu centróide $(\bar{x}, \bar{y})$ é calculado utilizando os momentos de imagem, conforme a Equação (24) da fundamentação teórica. Estas coordenadas são usadas para definir as posições iniciais e os alvos desejados para a agulha simulada e posicionar os obstáculos virtuais no ambiente de simulação de forma a replicar um desafio experimental realista. Essa abordagem garante que as análises de simulação sejam fundamentadas em um contexto fisicamente plausível.

A Figura 14 exibe o resultado final do processamento sobre um quadro que possui dois obstáculos adicionados computacionalmente, com todos os elementos detectados e suas respectivas coordenadas sendo exibidas para fins de depuração e validação.

Figura 14 – Resultado final do processamento de imagem com a adição de dois obstáculos.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

3.5 ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA ANÁLISE COMPARATIVA

Embora o foco principal da validação deste trabalho seja o comportamento da planta em malha aberta, foi implementado um módulo de controle em malha fechada para fins de análise comparativa. O objetivo deste módulo é permitir a simulação de cenários onde se confronta o desempenho ideal (com correção ativa de erros) versus o desempenho sujeito a incertezas (sem correção), fundamentando a discussão sobre a necessidade de realimentação visual.

Para esta finalidade, implementou-se a lei de controle de rastreamento com saturação proposta por Lee et al. (2001). Esta abordagem foi selecionada por lidar explicitamente

com as restrições não-holonômicas do modelo e permitir a incorporação de limites de saturação nos sinais de comando.

3.5.1 Formulação da Lei de Controle

A estratégia de controle combina uma ação de antecipação (*feedforward*) para reagir proativamente à trajetória de referência, com uma ação de realimentação (*feedback*) para corrigir os desvios de forma reativa (SIEGWART; NOURBAKHSH, 2004). Os comandos de velocidade idealizados v_{ideal} e ω_{ideal} são calculados a partir do vetor de erro $e = [e_x, e_y, e_\phi]^T$.

O comando para a velocidade linear v é composto pelo termo de antecipação $v_d \cos(e_\phi)$, que projeta a velocidade de referência na direção atual do robô, e pelo termo proporcional $k_1 e_x$, que atua para corrigir o erro longitudinal:

$$v_{\text{ideal}} = v_d \cos(e_\phi) + k_1 e_x \quad (26)$$

Simultaneamente, a lei de controle para a velocidade angular ω é projetada para anular os erros lateral e de orientação. O termo de antecipação é ω_d , enquanto os ganhos k_2 e k_3 , ponderados pela velocidade de referência v_d atuam sobre o erro lateral (e_y) e de orientação ($\sin(e_\phi)$), respectivamente:

$$\omega_{\text{ideal}} = \omega_d + k_2 v_d e_y + k_3 v_d \sin(e_\phi) \quad (27)$$

A ponderação dos termos de realimentação pela velocidade de referência v_d é uma característica desta lei, assegurando que as manobras de correção sejam suavizadas em baixas velocidades, evitando singularidades quando o robô está estático.

3.5.2 Implementação da Saturação e Limites Cinemáticos

Para garantir a fidelidade da simulação, os comandos idealizados são submetidos a um bloco de saturação que modela as restrições físicas da agulha.

Primeiramente, o comando de velocidade linear final v é obtido limitando-se o valor de v_{ideal} ao intervalo $[-v_{\text{max}}, v_{\text{max}}]$:

$$v = \text{clip}(v_{\text{ideal}}, -v_{\text{max}}, v_{\text{max}}) \quad (28)$$

Em seguida, aplica-se a restrição cinemática da agulha flexível, a curvatura máxima (k_{max}). Diferente de um robô móvel convencional que pode girar sobre o próprio eixo, a agulha só pode alterar sua orientação enquanto translada, e essa taxa de giro é limitada pelo raio de curvatura mínimo que a interação agulha-tecido permite. O valor de k_{max} utilizado é aquele obtido no módulo de caracterização (Seção 3.4). A restrição é dada por:

$$\omega_{\text{curv}} = \text{clip}(\omega_{\text{ideal}}, -|v| \cdot k_{\text{max}}, |v| \cdot k_{\text{max}}) \quad (29)$$

Por fim, aplica-se uma saturação absoluta na velocidade angular para respeitar limites teóricos de atuação:

$$\omega = \text{clip}(\omega_{\text{curv}}, -\omega_{\text{max}}, \omega_{\text{max}}) \quad (30)$$

Este processo em cascata assegura que o comando final ω enviado ao sistema seja sempre o mais restritivo entre a lei de controle e a capacidade de curvatura da agulha.

3.5.3 Definição dos Parâmetros de Sintonia

O desempenho dinâmico do controlador é determinado pelos ganhos k_1 , k_2 e k_3 . Neste trabalho, optou-se por uma metodologia de sintonia baseada na análise da resposta ao degrau, visando obter um comportamento robusto e seguro.

Os valores dos ganhos serão determinados empiricamente no Capítulo 4, onde o sistema simulado será submetido a um erro lateral inicial. O critério de projeto estabelecido é a obtenção de uma resposta criticamente amortecida, minimizando o *overshoot* (sobressinal). Esta característica é prioritária em robótica cirúrgica para evitar que a agulha oscile em torno da trajetória de referência, o que poderia acarretar danos adicionais ao tecido.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos no ambiente de simulação utilizando parâmetros obtidos experimentalmente pelo sistema de visão. O objetivo é validar o desempenho da arquitetura de controle proposta, analisando o comportamento do sistema em diferentes cenários e avaliando o impacto de parâmetros-chave na sua performance.

4.1 VALIDAÇÃO DO MODELO CINEMÁTICO

A primeira etapa da análise de resultados consiste em verificar se o modelo computacional implementado reproduz fielmente o comportamento físico esperado de um sistema não-holonômico. As simulações a seguir isolam variáveis críticas, como curvatura, velocidade e resposta ao degrau, para demonstrar que a planta virtual obedece às restrições cinemáticas estabelecidas na fundamentação teórica, garantindo a validade das análises subsequentes.

4.1.1 Sensibilidade ao Parâmetro de Curvatura

Para validar a fidelidade do modelo cinemático proposto e avaliar a influência das propriedades mecânicas na navegabilidade da agulha, foram realizadas simulações variando-se o parâmetro de curvatura máxima (k_{max}). Este parâmetro representa a capacidade física da agulha de defletir ao interagir com o tecido, sendo inversamente proporcional ao raio de curvatura da trajetória ($R = 1/k_{max}$).

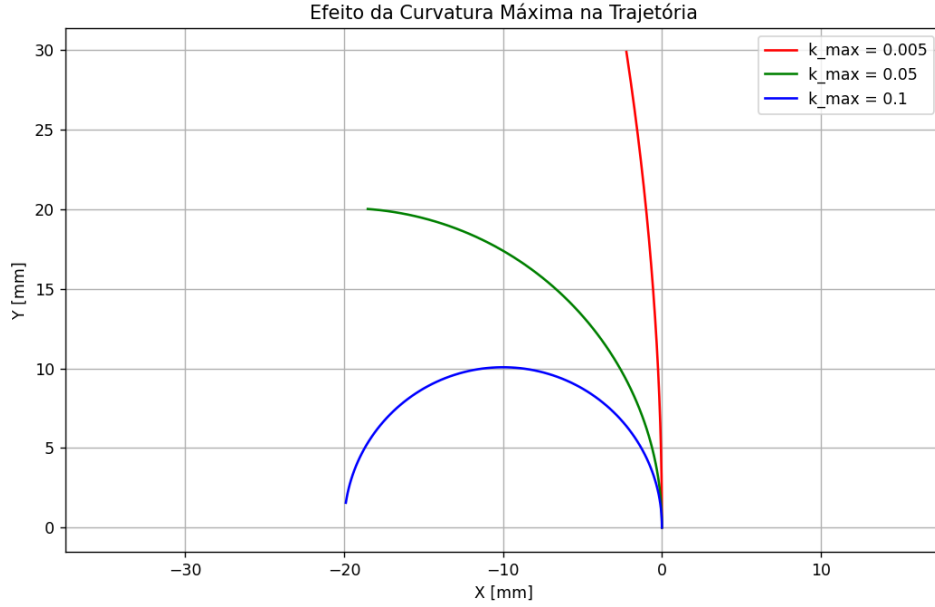
No cenário de teste, aplicou-se um comando de entrada constante para desvio máximo ($\sigma = 1$), mantendo-se a velocidade de inserção fixa em $v = 3$ mm/s durante um intervalo de tempo determinado. A Figura 15 apresenta as trajetórias resultantes para três valores distintos de k_{max} : 0.005 mm^{-1} , 0.05 mm^{-1} e 0.1 mm^{-1} .

A análise dos resultados confirma o comportamento esperado pelo modelo do uniciclo não-holonômico. Observa-se que:

- Para o menor valor de curvatura ($k_{max} = 0.005 \text{ mm}^{-1}$, linha vermelha), a agulha descreve uma trajetória com raio de aproximadamente 200 mm, comportando-se de maneira quase retilínea. Este cenário representa o comportamento de uma agulha com rigidez ou inserida em um tecido denso.
- Em contrapartida, ao aumentar o parâmetro para $k_{max} = 0.1 \text{ mm}^{-1}$ (linha azul), o raio de curvatura reduz-se drasticamente para 10 mm, permitindo manobras acentuadas.

Este resultado evidencia a sensibilidade do sistema a este parâmetro. Uma pequena variação no k_{max} , que na prática pode ocorrer devido a heterogeneidades no tecido biológico, resulta em uma divergência significativa na posição final da ponta da agulha. Tal constatação reforça a importância da etapa de caracterização experimental para a calibra-

Figura 15 – Efeito da variação do parâmetro de curvatura máxima (k_{max}) na trajetória da agulha, mantendo-se a velocidade linear constante em 3 mm/s.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

ção do modelo e fundamenta a discussão sobre a necessidade de estratégias de controle robustas para compensar essas incertezas físicas.

4.1.2 Resposta a Entradas em Degrau

A fim de validar a resposta temporal do modelo cinemático frente a mudanças abruptas de comando, foi realizada uma simulação utilizando os parâmetros físicos reais obtidos na etapa de caracterização experimental (Seção 3.2). Considerou-se uma agulha com raio de curvatura de aproximadamente $R \approx 500$ mm, o que corresponde a uma curvatura máxima de $k_{max} = 0.002$ mm⁻¹.

O cenário de teste consistiu na aplicação de uma entrada do tipo degrau na variável de controle de direção (σ). O sistema foi inicializado com comando de movimento retilíneo ($\sigma = 0$). No instante $t = 2$ s, aplicou-se um degrau unitário negativo para acionar o desvio máximo para a direita ($\sigma = -1$), mantendo a velocidade de inserção constante.

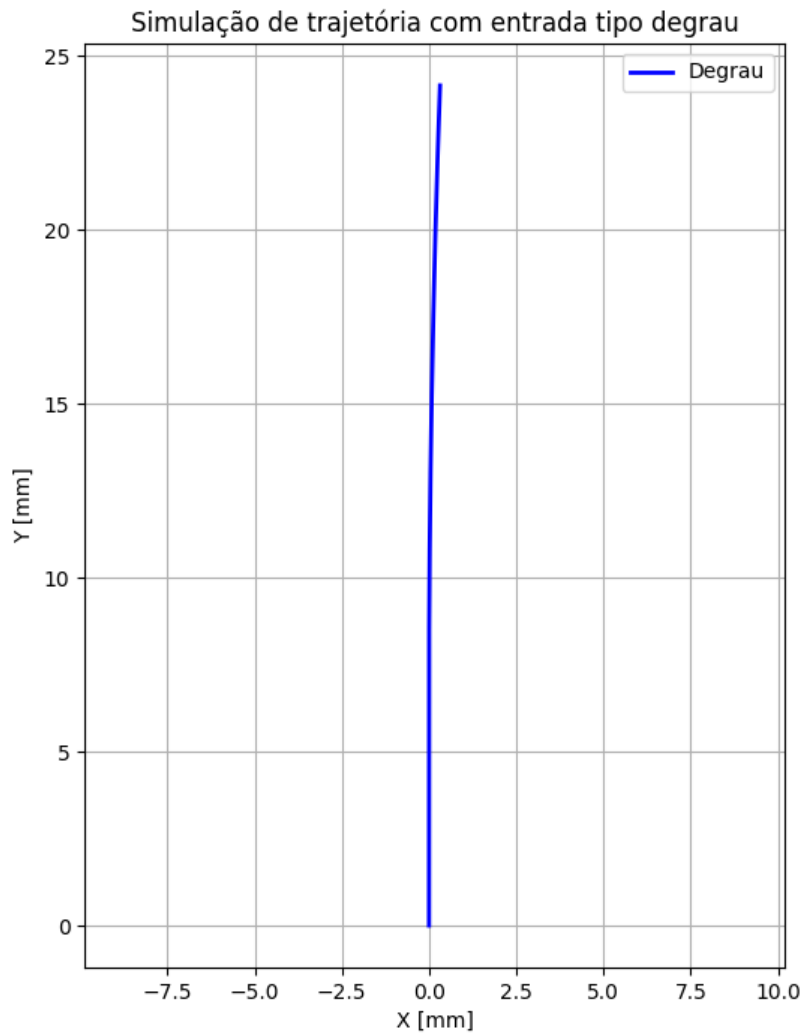
A Figura 16 apresenta a trajetória resultante. A análise do gráfico permite observar dois comportamentos distintos:

1. **Fase Retilínea ($t < 2$ s):** A agulha desloca-se estritamente sobre o eixo de inserção, confirmando que o modelo anula a velocidade angular quando $\sigma = 0$.
2. **Fase de Deflexão ($t \geq 2$ s):** Após a aplicação do degrau, observa-se o início da curvatura. Contudo, devido ao baixo valor de k_{max} do protótipo físico, a deflexão lateral é sutil, resultando em uma trajetória que se assemelha a uma

reta com leve inclinação.

Este resultado valida a capacidade do simulador de alternar modos de operação em tempo discreto, ao mesmo tempo que evidencia a limitação mecânica de manobrabilidade da agulha utilizada, que tende a comportar-se como um corpo rígido em pequenas profundidades de inserção.

Figura 16 – Trajetória resultante da aplicação de uma entrada de controle em degrau no instante $t = 2s$, considerando a curvatura experimental $k_{max} = 0.002 \text{ mm}^{-1}$.

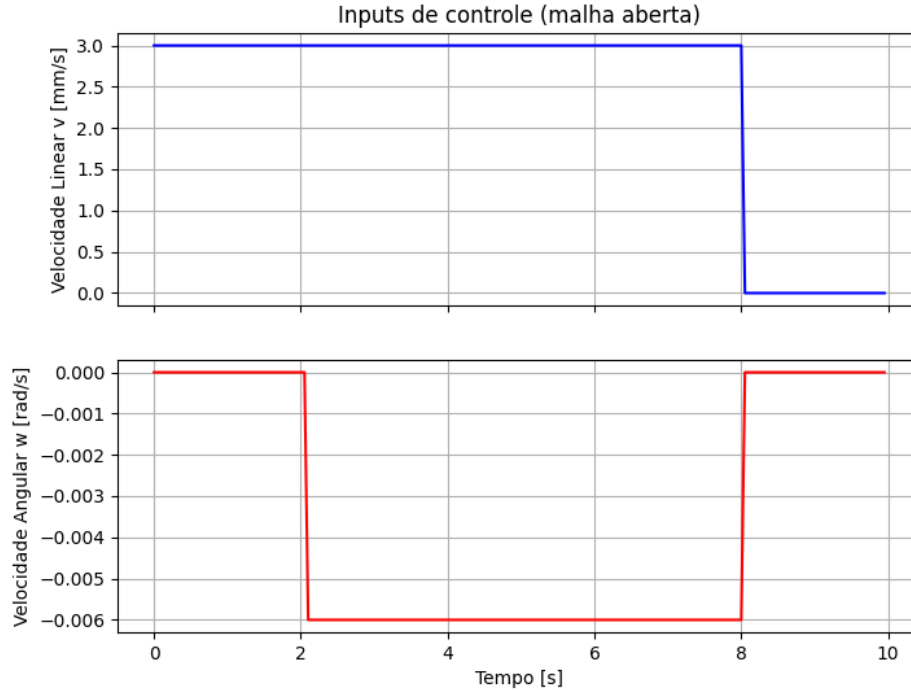


Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Para ilustrar a relação entre os comandos de controle e a resposta cinemática observada, a Figura 17 apresenta a evolução temporal das variáveis de entrada aplicadas ao modelo durante a simulação.

A análise dos gráficos confirma a consistência da implementação do modelo em malha aberta:

Figura 17 – Perfil temporal das entradas de controle em malha aberta. (Superior) Velocidade linear de inserção constante. (Inferior) Velocidade angular resultante da aplicação de um degrau na direção do bisel.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

1. **Velocidade Linear (v):** O gráfico superior demonstra que a velocidade de inserção foi mantida constante em 3 mm/s durante a fase ativa da simulação, caindo para zero apenas ao atingir o tempo final ($t = 8$ s), o que corresponde à parada do robô.
2. **Velocidade Angular (ω):** O gráfico inferior evidencia a aplicação do degrau de controle. Inicialmente nula (trajetória retilínea), a velocidade angular sofre uma transição abrupta para um valor constante negativo no instante de ativação ($t \approx 2$ s).

É importante notar que a magnitude de ω (aproximadamente -0.006 rad/s) não é arbitrária, mas derivada diretamente da restrição não-holonômica $\omega = v \cdot k_{max} \cdot \sigma$. Este comportamento valida que o simulador respeita os limites físicos da agulha, a taxa de giro é proporcional à velocidade de avanço e limitada pela curvatura máxima caracterizada.

4.2 ANÁLISE DE TRAJETÓRIAS COMPLEXAS EM MALHA ABERTA

Conforme observado na etapa de caracterização, o protótipo físico utilizando gelatina balística resultou em um raio de curvatura elevado. Embora consistente com a rigidez

da agulha utilizada, essa restrição física limita a visualização de manobras de navegação em espaços reduzidos.

No entanto, como o foco deste trabalho é a validação da arquitetura de modelagem e análise das estratégias de direcionamento, para permitir a visualização clara das manobras de mudança de direção e o efeito da modulação de controle, as simulações apresentadas nas seções a seguir consideram um parâmetro de curvatura nominal de $k_{max} = 0.1\text{mm}^{-1}$. Este cenário representa as capacidades de um sistema otimizado, como uma agulha de Nitinol com bisel agressivo ou tecido com rigidez significativa, permitindo avaliar o desempenho limite do modelo cinemático proposto.

4.2.1 Manobra de Desvio

A manobra em “S” foi selecionada como primeiro caso de estudo por representar uma capacidade fundamental em procedimentos de *needle steering*, a habilidade de contornar uma estrutura anatômica (obstáculo) e retomar o curso em direção ao alvo ou corrigir uma orientação final.

O teste avaliou a resposta do integrador numérico à comutação abrupta da variável de controle de direção (σ). O objetivo é validar se o modelo cinemático processa a inversão de concavidade da trajetória preservando a continuidade dos estados de posição e orientação.

A Figura 18 detalha o perfil temporal dos comandos aplicados em malha aberta:

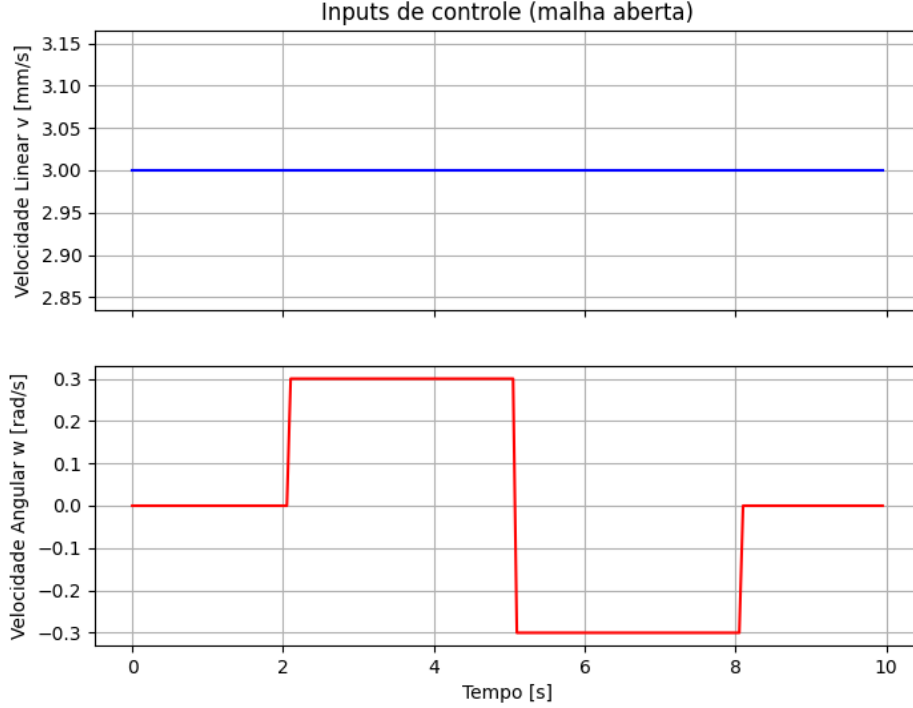
A análise dos *inputs* demonstra a lógica de chaveamento discreto adotada:

1. $0 < t < 2\text{s}$: O sistema avança em linha reta ($\omega = 0$).
2. $2\text{s} \leq t < 5\text{s}$: Aplica-se um degrau positivo, resultando em uma velocidade angular de 0.3 rad/s (calculada via $\omega = v \cdot k_{max}$).
3. $5\text{s} \leq t < 8\text{s}$: O comando é invertido instantaneamente para -0.3 rad/s , forçando a troca de direção do bisel.
4. $t \geq 8\text{s}$: O sistema retorna ao movimento retilíneo.

A resposta espacial do sistema a essa sequência de comandos é apresentada na Figura 19.

O resultado valida a capacidade de manobra do modelo. Observa-se a formação de dois arcos de circunferência tangentes com concavidades opostas. A análise matemática confirma que, no instante da comutação ($t = 5\text{s}$), ocorre uma descontinuidade na velocidade angular (ω), mas preserva-se a continuidade na posição (x, y) e na orientação (ϕ), respeitando as restrições não-holonômicas do sistema. Isso demonstra que a arquitetura é capaz de gerar trajetórias complexas de desvio através de sequências de comandos discretos.

Figura 18 – Perfil dos comandos de controle para a manobra em “S”. (a) Velocidade linear constante em 3 mm/s. (b) Sequência de alternância da velocidade angular ω , variando entre +0.3 rad/s e -0.3 rad/s.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

4.2.2 Modulação de Curvatura

A restrição cinemática não-holonômica implica que, em um dado instante, a agulha só pode assumir dois estados de rotação: nulo (trajetória retilínea) ou máximo (raio $R_{min} = 1/k_{max}$). No entanto, para fins de controle e desvio preciso de obstáculos, é frequentemente necessário descrever trajetórias com raios de curvatura intermediários.

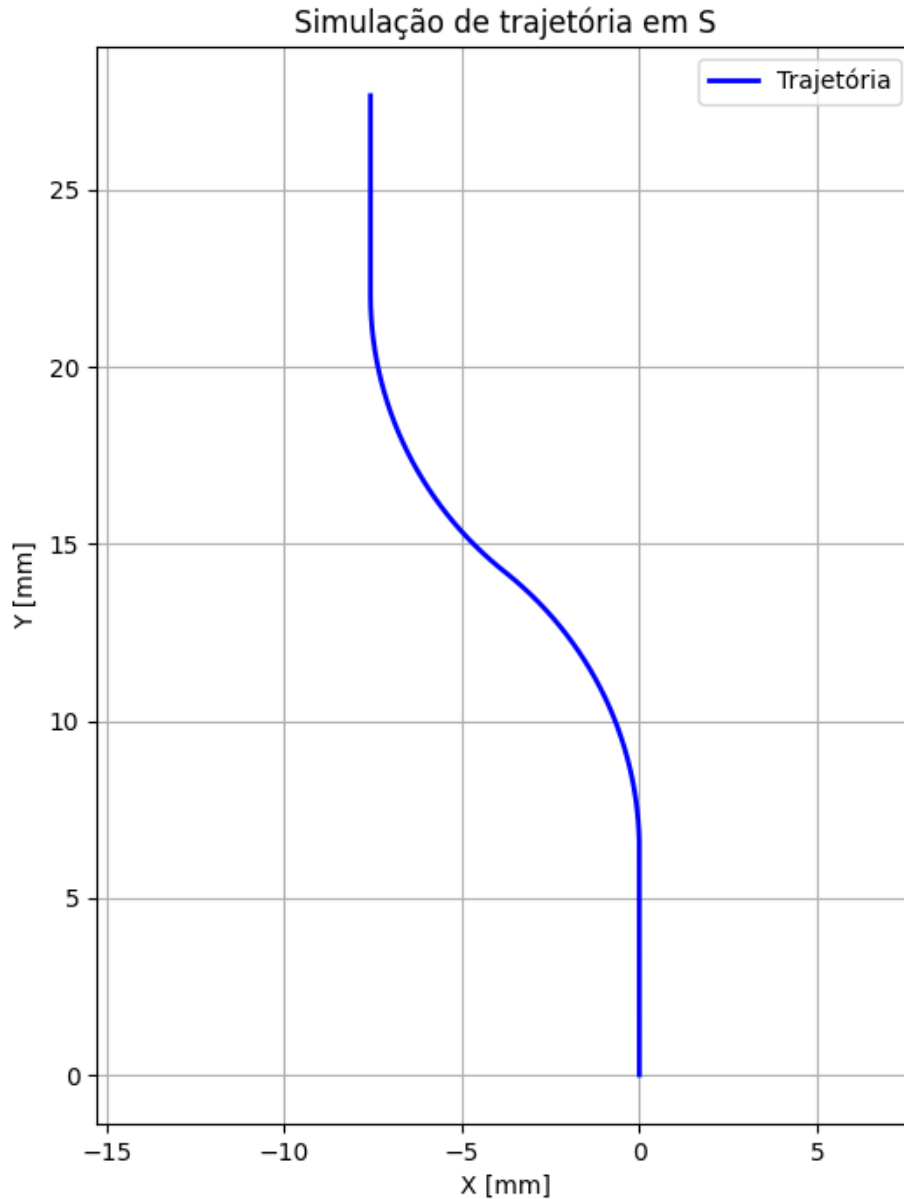
Para validar a capacidade do sistema de gerar essas curvaturas virtuais, implementou-se a técnica de *Duty Cycling*. O método consiste em alternar periodicamente a variável de controle de direção σ entre 0 e 1. A curvatura efetiva da trajetória (k_{eff}) torna-se proporcional à razão cíclica (DC) aplicada:

$$k_{eff} \approx k_{max} \cdot DC$$

Para a simulação deste cenário, manteve-se a velocidade de inserção constante em 3 mm/s. A fim de tornar o efeito da comutação macroscópico e visualmente perceptível para análise, adotou-se um período de ciclo propositalmente elevado ($T_{ciclo} = 2.0$ s). Isso significa que, no cenário de 50%, a agulha permanece 1 segundo inteiro em trajetória retilínea e 1 segundo em curvatura máxima a cada ciclo.

A Figura 20 apresenta os resultados comparativos para três razões cíclicas distintas:

Figura 19 – Trajetória resultante da manobra em “S”. Observa-se a inversão da concavidade correspondente à comutação do sinal de controle.

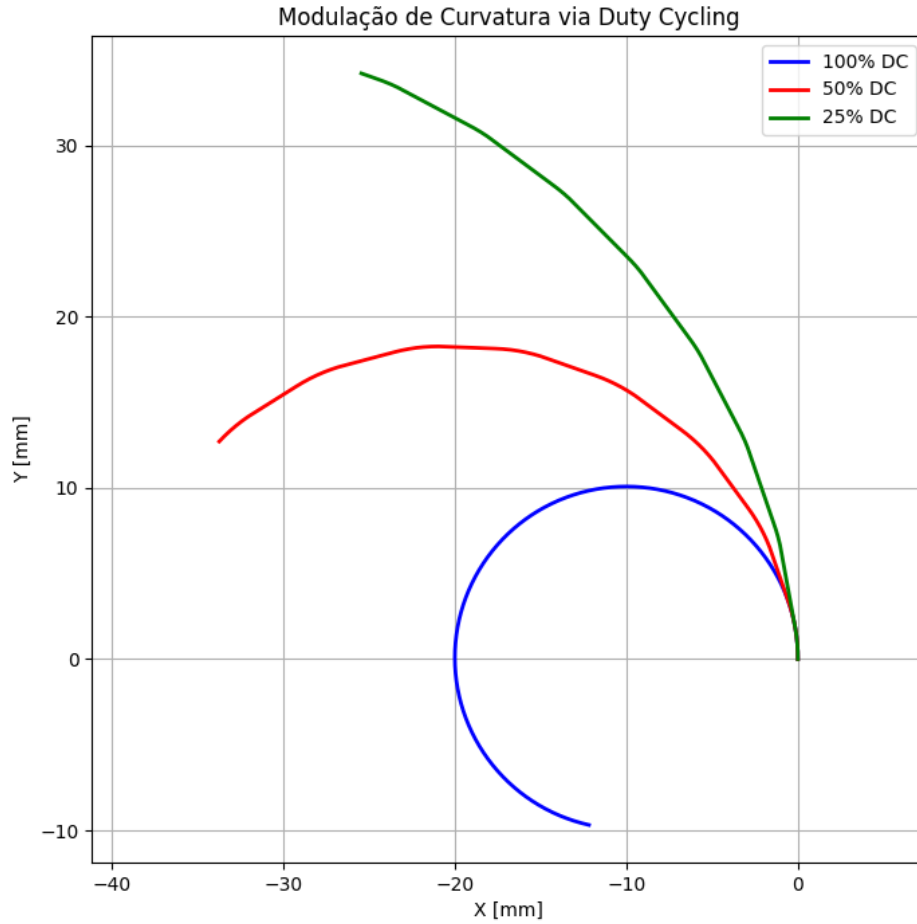


Fonte: Elaborado pela autora (2025).

- **Referência (100% DC):** Aplicação contínua, resultando no raio físico limite ($R \approx 10$ mm);
- **Modulação (50% e 25% DC):** Trajetórias resultantes da alternância de comandos.

A análise gráfica comprova que a técnica permite modular o raio da trajetória. Enquanto o cenário de 100% (linha azul) descreve o raio físico limite, os cenários modulados resultam em trajetórias com raios efetivos ampliados. A análise das curvas vermelha (50%) e verde (25%) revela a presença de ondulações características ao longo do percurso. Estas

Figura 20 – Modulação do raio de curvatura via *Duty Cycling*. Observa-se o aumento do raio efetivo conforme a redução da razão cíclica (100%, 50% e 25%).



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

oscilações confirmam a natureza discreta do controle: cada "onda" corresponde a um ciclo de 2 segundos onde a agulha alternou entre seus estados binários.

Embora em uma aplicação clínica real a frequência de chaveamento deva ser aumentada para suavizar o movimento, este resultado valida o modelo cinemático, demonstrando que a trajetória resultante é a integral temporal correta dos comandos discretos.

A eficácia desta modulação corrobora a abordagem metodológica estabelecida por Bernardes et al. (2014). Em seu trabalho sobre planejamento de movimento, os autores utilizam o princípio do *Duty Cycled Rotation* para permitir que a agulha execute manobras com raios variáveis, superando a restrição binária do sistema mecânico. Os resultados aqui apresentados validam o fundamento cinemático desta técnica, confirmando a viabilidade de utilizar entradas discretas para aproximar o comportamento de um sistema de controle contínuo.

4.3 ANÁLISE DE INCERTEZA E RISCO

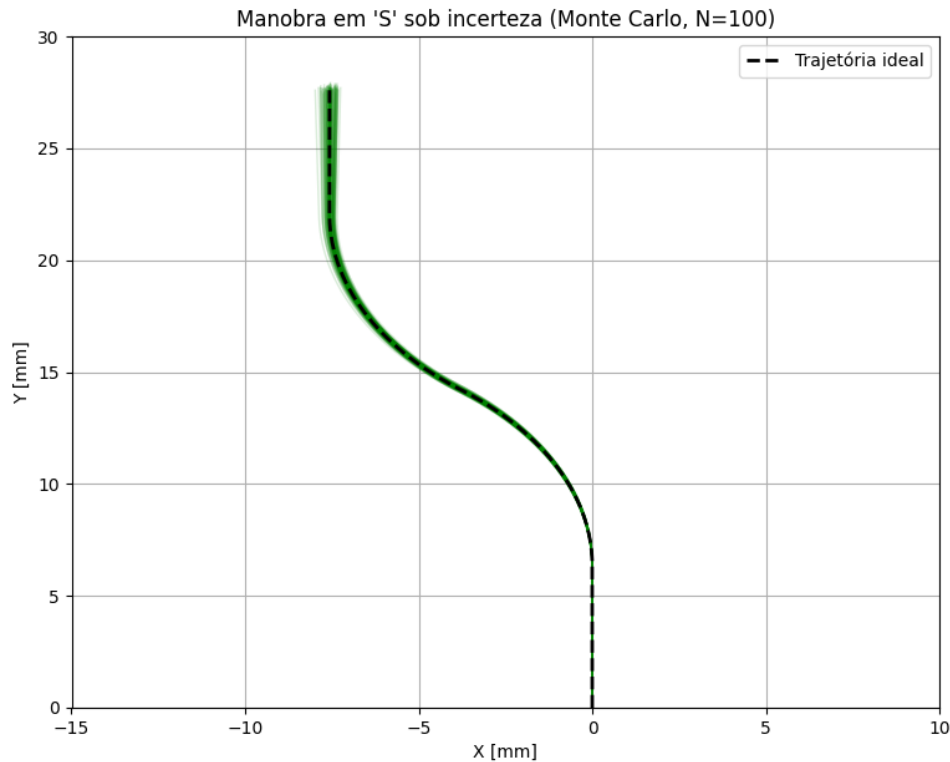
Uma vez validada a cinemática determinística do sistema, torna-se necessário avaliar seu comportamento sob condições estocásticas. Em um ambiente cirúrgico real, o sistema está sujeito a ruídos de atuação, erros de modelagem e perturbações externas. Esta seção quantifica o impacto dessas incertezas na segurança do procedimento, utilizando métodos estatísticos para demonstrar as limitações de confiabilidade da navegação em malha aberta.

4.3.1 Análise de Incerteza via Método de Monte Carlo

A fim de avaliar a confiabilidade da execução de manobras complexas em malha aberta e quantificar a propagação de erros, a trajetória em “S” foi submetida a uma análise de Monte Carlo. O experimento consistiu em $N = 100$ execuções da simulação, introduzindo-se um ruído branco gaussiano nas entradas de controle (v e ω) a cada passo de tempo, com desvio padrão de 5% em relação à amplitude do sinal nominal.

A Figura 21 apresenta a superposição das trajetórias resultantes (em verde) em contraste com a trajetória ideal (linha tracejada preta).

Figura 21 – Simulação de Monte Carlo ($N = 100$) aplicada à trajetória de desvio. O alargamento da área verde demonstra a divergência progressiva da posição da agulha em relação à trajetória ideal (linha tracejada) devido a perturbações no controle.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

A densidade da dispersão observada no gráfico revela visualmente o fenômeno de acúmulo de incerteza. Nota-se que a precisão é mantida durante a fase inicial da inserção. No entanto, após o ponto de inflexão da manobra (onde ocorre a inversão da curvatura), a variância da posição lateral aumenta progressivamente.

Este comportamento forma um “cone de incerteza” evidente na reta final da trajetória ($Y > 20$ mm). O alargamento da nuvem de pontos demonstra que erros angulares sutis, introduzidos durante as curvas, são amplificados pela distância percorrida subsequente. Estatisticamente, isso indica que a probabilidade de atingir um alvo pontual diminui drasticamente conforme a complexidade e a extensão da manobra aumentam, comprovando que a operação em malha aberta não oferece a robustez necessária para procedimentos cirúrgicos de precisão.

4.3.2 Análise de Risco por Inclusão de Obstáculo

Em aplicações cirúrgicas reais, a precisão do posicionamento não se restringe apenas a atingir o alvo final, mas também a garantir a integridade de estruturas anatômicas sensíveis adjacentes à trajetória, como vasos sanguíneos ou feixes nervosos.

Para simular este cenário crítico, foi posicionado um obstáculo virtual nas proximidades da trajetória planejada, estabelecendo uma margem de segurança estreita. O objetivo deste teste é quantificar a probabilidade de violação dessa margem devido à propagação de incertezas em malha aberta.

A Figura 22 apresenta o resultado da simulação de Monte Carlo ($N = 100$) sob influência de ruído gaussiano nas entradas de controle. As trajetórias em verde representam execuções seguras, enquanto as trajetórias em vermelho indicam ocorrência de colisão.

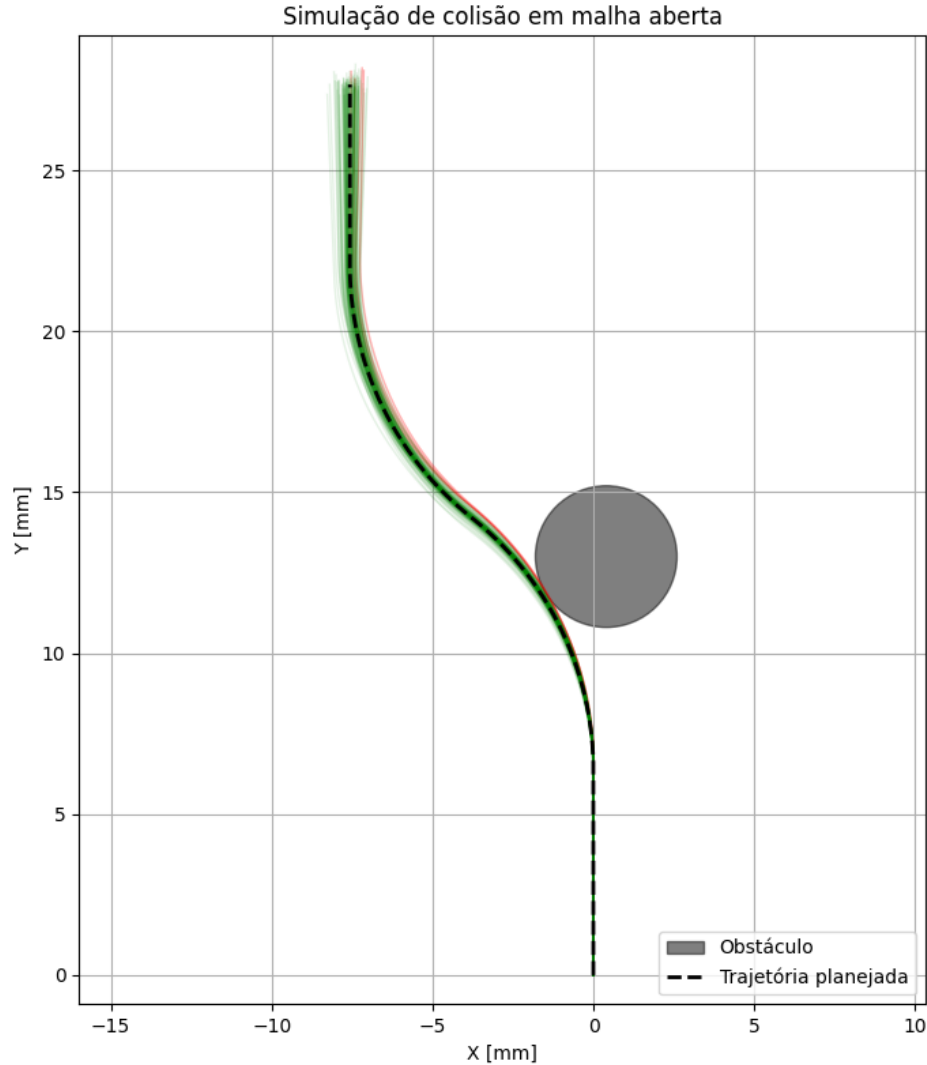
A análise dos dados revela que, embora o planejamento cinemático ideal contorne o obstáculo com segurança, a incerteza acumulada ao longo da manobra resultou em uma taxa de colisão de 4%.

Este resultado evidencia uma limitação crítica da navegação sem realimentação visual, o erro de posição tende a crescer com a profundidade de inserção. Em um contexto clínico, uma probabilidade de falha de 4% em uma manobra de desvio é considerada significativa. Portanto, estes dados corroboram a necessidade de implementação de estratégias de controle em malha fechada, capazes de detectar tendências de desvio nos estágios iniciais e corrigir a rota ativamente para garantir que a agulha permaneça dentro do corredor de segurança.

4.4 ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE CONTROLE EM MALHA FECHADA

A análise de risco apresentada anteriormente confirmou que a navegação baseada puramente em modelos preditivos (malha aberta) apresenta vulnerabilidades críticas quanto à propagação de erros. Para mitigar essas limitações, esta seção apresenta a vali-

Figura 22 – Simulação de risco de colisão em malha aberta. A trajetória planejada (tracejada) desvia do obstáculo, mas a dispersão das execuções reais resulta em uma taxa de colisão de 4%.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

dação em simulação da arquitetura de controle de rastreamento projetada. O objetivo é demonstrar comparativamente como a malha fechada é capaz de rejeitar perturbações e garantir a convergência para a trajetória segura, mesmo em cenários de incerteza.

4.4.1 Sintonia de Ganhos e Resposta Transitória

A determinação dos parâmetros ótimos do controlador é fundamental para garantir a estabilidade do sistema e minimizar o trauma tecidual. Para realizar esta sintonia, submeteu-se o sistema simulado a uma entrada em degrau na referência de posição lateral ($y_{ref} = 5\text{mm}$), simulando uma manobra de correção de trajetória rápida.

Foram avaliados três conjuntos de ganhos distintos para analisar o comportamento

transitório do sistema. A Figura 23 ilustra os resultados obtidos.

A análise dos perfis de resposta permite as seguintes conclusões:

- **Comportamento subamortecido (Figura (a)):** Ao utilizar um ganho lateral elevado ($k_2 = 15.0$) em relação ao ganho de orientação ($k_3 = 1.0$), o sistema prioriza agressivamente a eliminação do erro de posição. Isso resulta em um comportamento oscilatório (*overshoot*), onde a agulha cruza a referência repetidamente antes de estabilizar.
- **Comportamento superamortecido (Figura (b)):** A redução excessiva do ganho lateral ($k_2 = 0.1$) torna a resposta do sistema lenta. Embora estável, a agulha percorre uma longa distância longitudinal antes de convergir para a nova referência lateral, o que reduz a eficiência em cenários com obstáculos próximos.
- **Comportamento criticamente amortecido (Figura (c)):** A configuração escolhida ($k_2 = 0.5, k_3 = 3.0$) equilibra a atração lateral com uma forte correção de orientação (amortecimento). O resultado é uma convergência suave e rápida, sem sobressinais. Estes foram os parâmetros adotados para a arquitetura.

4.4.2 Comparativo de Desempenho sob Incerteza

Para validar a robustez da arquitetura proposta frente às limitações identificadas na Seção 4.3, realizou-se uma simulação comparativa utilizando a trajetória complexa em “S”. Introduziu-se um ruído de 10% nas atuações para simular um ambiente de incerteza.

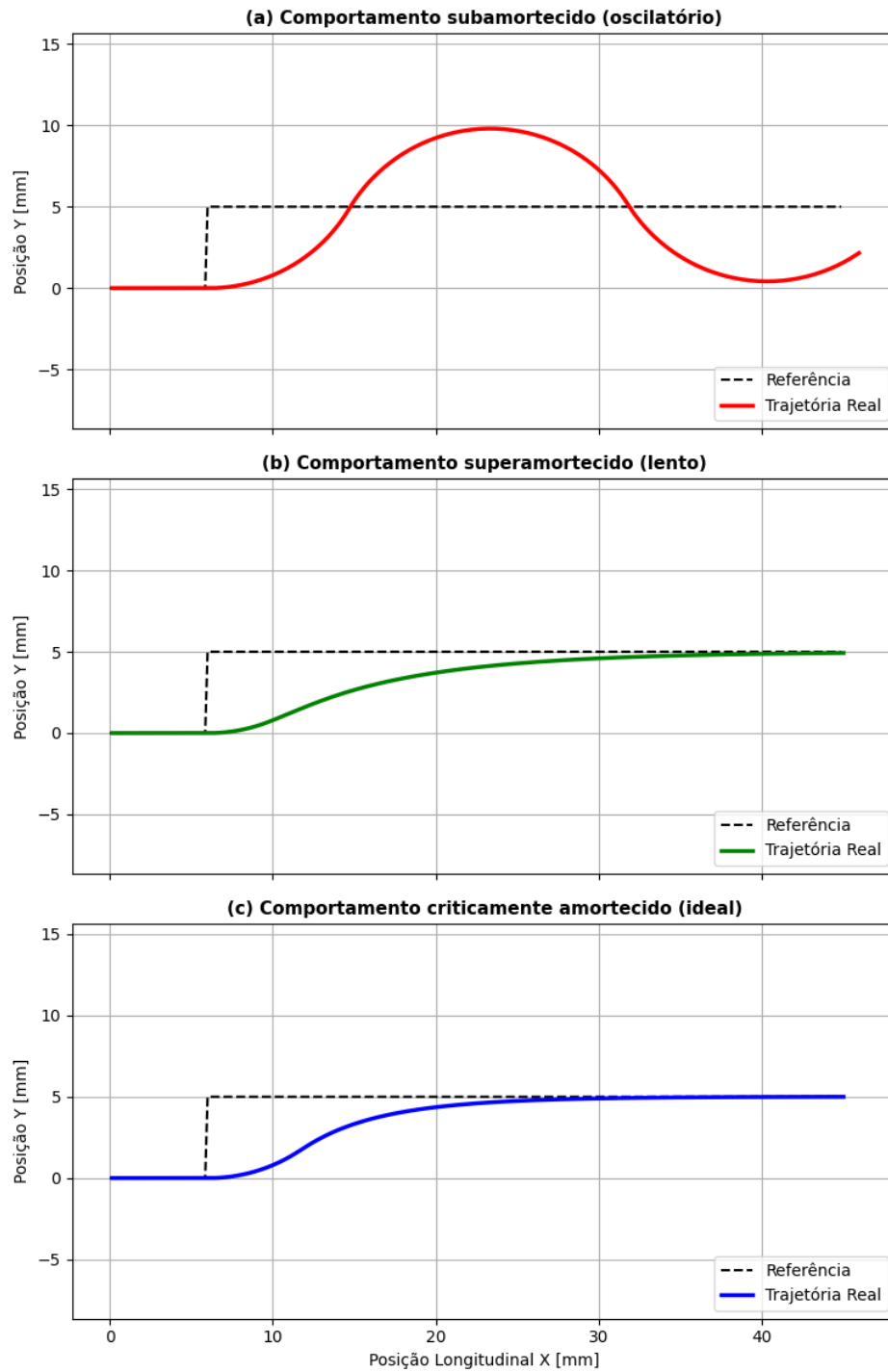
A Figura 24 confronta o desempenho da navegação em malha aberta versus malha fechada.

Os resultados demonstram a mudança de paradigma introduzida pelo controle ativo:

- **Malha Aberta:** Como previsto pela análise de Monte Carlo, o sistema acumula os erros induzidos pelo ruído. Sem capacidade de percepção do desvio, a agulha diverge progressivamente da rota, resultando em um erro de posição final significativo que inviabilizaria o procedimento.
- **Malha Fechada:** O controlador atua continuamente corrigindo os desvios instantâneos. Apesar das perturbações constantes tentarem tirar a agulha do curso, a ação de controle mantém a trajetória sobreposta à referência (linha tracejada preta), garantindo a precisão do posicionamento final dentro dos limites de segurança.

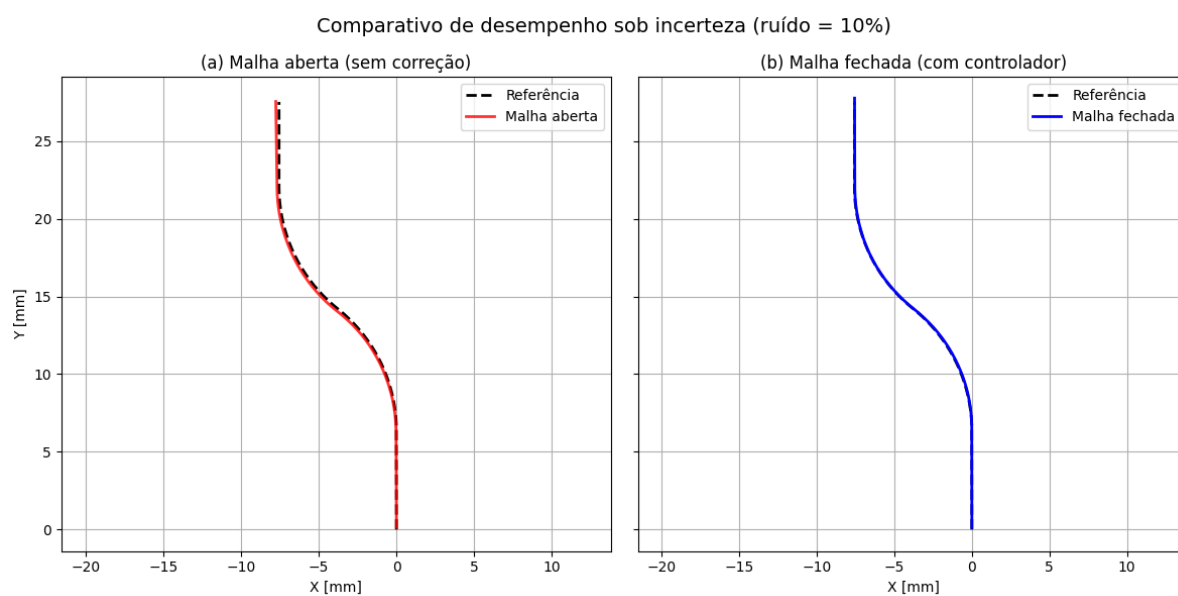
Este resultado conclui a validação da arquitetura, comprovando que a integração do modelo cinemático validado com uma estratégia de controle realimentada constitui uma solução necessária e eficaz para mitigar as incertezas inerentes ao direcionamento de agulhas em tecidos biológicos.

Figura 23 – Análise da resposta ao degrau para diferentes sintonias de ganhos. (a) Resposta oscilatória devido ao excesso de ganho lateral (k_2). (b) Resposta lenta devido ao ganho lateral insuficiente. (c) Resposta ideal (criticamente amortecida) obtida priorizando o alinhamento angular (k_3).



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Figura 24 – (a) Resposta de malha aberta para ruído de 10%. (b) Resposta de malha fechada com a implementação do controlador.



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e a validação de uma arquitetura computacional modular voltada para o direcionamento de agulhas flexíveis. O objetivo principal, de projetar um ambiente de simulação fundamentado em parâmetros experimentais para analisar a cinemática e a controlabilidade do sistema, foi plenamente alcançado. A metodologia adotada permitiu desacoplar as incertezas inerentes à implementação física, focando na análise determinística e estocástica do comportamento da agulha em cenários críticos.

A etapa inicial de caracterização experimental validou o subsistema de visão computacional como uma ferramenta eficaz para a extração de estados. A quantificação do parâmetro de curvatura máxima (k_{max}) a partir de imagens do *phantom* foi decisiva para a calibração do modelo cinemático, garantindo que as simulações refletissem as limitações reais de manobrabilidade do protótipo. No âmbito da modelagem, os ensaios em malha aberta demonstraram que o modelo do uniciclo não-holonômico é capaz de representar manobras complexas, como a trajetória em “S”, através do sequenciamento discreto de comandos. Adicionalmente, a validação da técnica de *duty cycling* demonstrou a viabilidade de modular virtualmente o raio de curvatura da agulha, superando as restrições binárias dos atuadores.

A contribuição significativa deste estudo reside na análise de segurança e robustez. As simulações de Monte Carlo evidenciaram a formação de um “cone de incerteza” na navegação em malha aberta, onde a propagação de erros resultou em uma taxa de colisão de 4% em trajetórias teoricamente seguras. A análise comparativa final validou esta observação, enquanto o sistema em malha aberta mostrou-se vulnerável, a estratégia de controle de rastreamento implementada foi capaz de rejeitar ruídos severos e garantir a convergência assintótica. Conclui-se, portanto, que a arquitetura proposta não apenas modela o problema com fidelidade, mas estabelece matematicamente a necessidade imperativa de controle ativo para futuras aplicações clínicas.

Apesar dos resultados promissores, é importante reconhecer as fronteiras do escopo adotado. O modelo e os testes limitaram-se a um plano bidimensional (2D), não contemplando as complexidades da rotação axial completa e desvios fora do plano. Além disso, a simulação assume um meio homogêneo, desconsiderando deformações teciduais complexas e forças de atrito dinâmico. Deve-se ressaltar também que a estratégia de controle foi validada como prova de conceito em ambiente simulado, não sendo aplicada em tempo real para fechar a malha de controle em hardware físico nesta etapa.

Visando a continuidade desta pesquisa, sugere-se como trabalhos futuros a implementação do algoritmo de controle no protótipo físico, integrando-o ao sistema de visão em tempo real. Recomenda-se também a expansão da modelagem para ambientes 3D e a incorporação de modelos de interação agulha-tecido robustos (como elementos finitos).

Por fim, sugere-se a integração do algoritmo de planejamento de caminhos por Campos Potenciais Artificiais no *loop* de controle. A formulação matemática e a lógica deste planejador, já desenvolvidas no escopo deste trabalho e detalhadas no Apêndice A, servem como base imediata para viabilizar a navegação autônoma em ambientes não estruturados.

REFERÊNCIAS

- ALBERTOS, Pedro; MAREELS, Iven. **Feedback and Control for Everyone**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. ISBN 9783642034459.
- ALTEROVITZ, Ron; GOLDBERG, Ken; OKAMURA, Allison. Planning for Steerable Bevel-tip Needle Insertion Through 2D Soft Tissue with Obstacles. *In: PROCEEDINGS of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Barcelona, Spain: [s.n.], abr. 2005. P. 1640–1645.
- ÅSTRÖM, K.J.; HÄGGLUND, T. **PID Controllers**. [S.l.]: International Society for Measurement e Control, 1995. (Setting the standard for automation). ISBN 9781556175169.
- AUDETTE, Kenneth *et al.* Robotically Steered Needles: A Survey of Neurosurgical Applications and Technical Innovations. **Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems**, Annual Reviews, v. 3, p. 1–24, 2020.
- BABAIASL, Mahdiah; YANG, Fan; SWENSEN, John Paul. Robotic needle steering: state-of-the-art and research challenges. **Intelligent Service Robotics**, v. 15, p. 679–711, 2022.
- BERNARDES, Mariana C.; ADORNO, Bruno V.; BORGES, Geovany A.; POIGNET, Philippe. 3D Robust Online Motion Planning for Steerable Needles in Dynamic Workspaces Using Duty-Cycled Rotation. *In: JOURNAL of Control, Automation and Electrical Systems*. [S.l.: s.n.], 2014. v. 25, p. 216–227.
- COWAN, Noah J. *et al.* Robotic Needle Steering: Design, Modeling, Planning, and Image Guidance. *In: ROSEN, Jacob; HANNAFORD, Blake; SATAVA, Richard M. (Ed.). Surgical Robotics: Systems, Applications, and Visions*. [S.l.]: Springer, 2010. P. 557–582.
- DIMAIO, Simon P.; SALCUDEAN, S. E. Needle Steering and Motion Planning in Soft Tissues. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 52, n. 6, p. 965–974, jun. 2005.
- DUINDAM, Vincent; XU, Jijie; ALTEROVITZ, Ron; SASTRY, Shankar; GOLDBERG, Ken. 3D Motion Planning Algorithms for Steerable Needles Using Inverse Kinematics. *In: ALGORITHMIC Foundation of Robotics VIII: Selected Contributions of*

the Eight International Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. P. 535–549. ISBN 978-3-642-00312-7.

GERALDES, André Augusto. **Dispositivo robótico para guiagem de agulhas flexíveis em procedimentos minimamente invasivos**. 2015. Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Brasília, DF.

GLOZMAN, Daniel; SHOHAM, Moshe. Image-Guided Robotic Flexible Needle Steering. **IEEE Transactions on Robotics**, IEEE, v. 23, n. 3, p. 459–467, 2007.

GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. **Digital Image Processing**. 4th. [S.l.]: Pearson, 2018. ISBN 978-0133356724.

IQBAL, Fahad; ESFANDIARI, Mojtaba; AMIRKHANI, Golchehr; HOSHYARMANESH, Hamidreza; LAMA, Sanju; TAVAKOLI, Mahdi; SUTHERLAND, Garnette R. Continuum and Soft Robots in Minimally Invasive Surgery: A Systematic Review. **IEEE Access**, v. 13, p. 24053–24079, 2025.

KHATIB, Oussama. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *In: PROCEEDINGS of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 1986. v. 3, p. 500–505.

LAVALLE, S.M. **Planning Algorithms**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. ISBN 9780521862059.

LYNCH, Kevin M; PARK, Frank C. **Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107059721.

MALLAPRAGADA, S *et al.* Robot-Assisted Real-Time Tumor Manipulation for Breast Biopsy. *In: IEEE. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. [S.l.: s.n.], 2009. P. 3239–3244.

MISRA, S.; REED, K. B.; SCHAFER, B. W.; RAMESH, K. T.; OKAMURA, A. M. Mechanics of flexible needles robotically steered through soft tissue. **The International Journal of Robotics Research**, v. 29, n. 13, p. 1640–1660, 2010.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 9788576058106.

OLIVEIRA, Paulo Érico Carvalho Santos de. **Mecanismo para Realização de Ensaio de Inserção de Agulhas Flexíveis para Fins de Caracterização de seu Comportamento em Diferentes Tipos de Tecido**. 2015. Projeto de Graduação – Universidade de Brasília, Brasília, DF.

QADRIE, Zulfkar; MAQBOOL, Mudasar; DAR, Mohd Altaf; QADIR, Afshana. Navigating challenges and maximizing potential: Handling complications and constraints in minimally invasive surgery. **Open Health**, v. 6, n. 1, p. 20250059, 2025.

ROCHA, Camylla Rodrigues de Oliveira; ROCHA, Ingrid Rodrigues de Oliveira; BENGTON, Karolynie Lessa; OLIVEIRA, Monna Hessen Banna de; FEITOSA JUNIOR, Denilson José Silva; REIS, José Maciel Caldas dos. Modelo artesanal de treinamento para acesso vascular ecoguiado em adaptação de gel balístico. **Pará Research Medical Journal**, v. 1, n. 1, p. 1–7, 2017.

ROESTHUIS, Roy. **Flexible Needle Steering using a Mechanics-Based Approach**. Nov. 2011. Tese de Mestrado – University of Twente, Enschede, The Netherlands.

SICILIANO, B.; SCIAVICCO, L.; VILLANI, L.; ORIOLO, G. **Robotics: Modelling, Planning and Control**. [S.l.]: Springer London, 2010. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9781846286414.

SIEGWART, R.; NOURBAKHS, I.R. **Introduction to Autonomous Mobile Robots**. [S.l.]: MIT Press, 2004. (Intelligent Robotics and Autonomous Agents series). ISBN 9780262015356.

SONKA, Milan; HLAVAC, Vaclav; BOYLE, Roger. **Image Processing, Analysis, and Machine Vision**. 4th. [S.l.]: Cengage Learning, 2015. ISBN 9781285054947.

WEBSTER III, Robert J; KIM, Jin Seob; COWAN, Noah J; CHIRIKJIAN, Gregory S; OKAMURA, Allison M. Nonholonomic Modeling of Needle Steering. **The International Journal of Robotics Research**, v. 25, n. 5-6, p. 509–525, 2006.

ZHANG, He; ZHAO, Yan-Jiang; JIN, Ye-Xin; DUAN, Hai-Long. Path planning algorithm of steerable flexible needle: A review. **Expert Systems with Applications**, v. 287, p. 128270, 2025. ISSN 0957-4174.

6 APÊNDICE A

6.1 PLANEJADOR DE CAMINHOS POR CAMPOS POTENCIAIS

O planejamento da trajetória do sistema foi implementado utilizando o método dos Campos Potenciais Artificiais, cuja base teórica foi estabelecida na Seção 2.3. O princípio central desta abordagem consiste em tratar a ponta da agulha como uma partícula que se move em um campo de forças virtual (KHATIB, 1986). Este campo é composto pela superposição de uma força atrativa (F_{att}) que guia a partícula em direção ao alvo, e de forças repulsivas (F_{rep}) que a afastam dos obstáculos (SIEGWART; NOURBAKHS, 2004).

6.1.1 Força Atrativa

A força atrativa é responsável por guiar o robô da sua posição atual q para a posição do alvo q_{goal} . Para garantir uma convergência suave, foi adotada uma função linear da distância, definida por:

$$F_{\text{att}}(q) = -\alpha(q - q_{\text{goal}}) \quad (31)$$

onde $q = [x, y]^T$ é o vetor de posição atual, q_{goal} é a posição do alvo e α é o ganho escalar positivo que modula a intensidade da atração.

6.1.2 Força Repulsiva Elíptica

A força repulsiva é responsável por criar uma barreira de segurança em torno dos obstáculos. Para um sistema com restrições não holonômicas como a agulha, que possui manobrabilidade lateral limitada, um campo de repulsão circular padrão mostra-se ineficiente, pois ativaria a força de forma abrupta e tardia. Portanto, inspirado no trabalho de DiMaio e Salcudean (2005), foi implementado um campo de potencial repulsivo com geometria elíptica.

A anisotropia deste campo é projetada especificamente para a cinemática do problema: o eixo maior a da elipse é orientado ao longo da direção de movimento da agulha, enquanto o eixo menor b é orientado perpendicularmente. Esta configuração cria uma zona de influência alongada à frente do robô, funcionando como uma zona de aviso antecipado. Como resultado, o sistema detecta a influência de um obstáculo em sua trajetória com grande antecedência, permitindo que a força repulsiva gere um desvio suave e gradual, em vez de uma correção abrupta. Isso é fundamental para sistemas não holonômicos, que necessitam de tempo e espaço para executar manobras de desvio.

O cálculo da força repulsiva elíptica baseia-se na transformação da posição da agulha para um sistema de coordenadas em que a elipse de influência do obstáculo se torna um círculo unitário. Este processo envolve dois passos:

Primeiramente, o vetor de posição da agulha em relação ao obstáculo, $[x - x_{obs}, y - y_{obs}]$, é calculado. Este vetor é então rotacionado de acordo com o ângulo de orientação da agulha ϕ para ser expresso no mesmo sistema de coordenadas do corpo do robô. Esta rotação alinha os eixos do sistema com a direção longitudinal e lateral da agulha. O vetor de posição no referencial rotacionado (x_{rot}, y_{rot}) é dado pela matriz de rotação padrão:

$$\begin{bmatrix} x_{rot} \\ y_{rot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{obs} \\ y - y_{obs} \end{bmatrix} \quad (32)$$

No referencial rotacionado, a elipse de influência está alinhada com os eixos, tendo um semi-eixo a na direção longitudinal e b na direção lateral. Para transformar esta elipse em um círculo de raio 1, as coordenadas rotacionadas são normalizadas (escaladas) pelos respectivos semi-eixos. A distância elíptica normalizada, d_{ellip} , que representa a distância do centro do círculo unitário ao ponto transformado, é então calculada:

$$d_{\text{ellip}} = \sqrt{\left(\frac{x_{rot}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_{rot}}{b}\right)^2} \quad (33)$$

Neste espaço normalizado, a fronteira da elipse é simplesmente a condição $d_{\text{ellip}} = 1$.

Com base nesta formulação, a força repulsiva F_{rep} para cada obstáculo é ativada quando a agulha entra na zona de influência $d_0 > 1$ e é calculada como:

$$F_{rep}(q) = \begin{cases} \beta \left(\frac{1}{d_{\text{ellip}}} - \frac{1}{d_0} \right) \frac{1}{d_{\text{ellip}}^2} \nabla d_{\text{ellip}} & \text{se } d_{\text{ellip}} \leq d_0 \\ 0 & \text{se } d_{\text{ellip}} > d_0 \end{cases} \quad (34)$$

onde β é um ganho repulsivo e o vetor gradiente ∇d_{ellip} garante que a força seja aplicada na direção correta para afastar a agulha do obstáculo.

6.1.2.1 Força Resultante e Geração da Referência

A força total artificial, F_{total} , que guia o robô a cada instante, é obtida pelo somatório vetorial da força atrativa com as forças repulsivas de todos os obstáculos presentes na cena:

$$F_{\text{total}}(q) = F_{\text{att}}(q) + \sum_{i=1}^{N_{\text{obs}}} F_{\text{rep},i}(q) \quad (35)$$

Este vetor de força é então utilizado para gerar a configuração de referência para o controlador de rastreamento. A orientação de referência ϕ_d é o ângulo do vetor F_{total} , calculado como

$$\phi_d = \arctan\left(\frac{F_{\text{total},y}}{F_{\text{total},x}}\right) \quad (36)$$

A velocidade linear de referência v_d é proporcional à magnitude da força, mas limitada por um valor máximo v_{max} para gerar um comando fisicamente realista: $v_d =$

$\min(||F_{\text{total}}||, v_{\text{max}})$. A velocidade angular de referência ω_d é definida como zero, delegando a tarefa de alinhar a orientação atual ϕ com a direção desejada ϕ_d para o controlador de rastreamento. A saída final deste módulo são os valores da trajetória de referência (q_d, v_d, ω_d) .

7 APÊNDICE B

7.1 CÓDIGO DE SIMULAÇÃO CINEMÁTICA + CONTROLE

O código-fonte completo para a implementação do modelo do unicycle e execução das simulações em malha aberta e fechada é apresentado a seguir.

Listing 7.1 – Script principal da simulação cinemática.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4
5 def wrap_to_pi(angle):
6     return (angle + np.pi) % (2 * np.pi) - np.pi
7
8 def kinematic_model(state, v, w, dt):
9     x, y, phi = state
10    x += v * np.cos(phi) * dt
11    y += v * np.sin(phi) * dt
12    phi = wrap_to_pi(phi + w * dt)
13    return x, y, phi
14
15 def body_error(state, ref_state):
16     x, y, phi = state
17     xr, yr, phir = ref_state
18
19     # Transformacao de coordenadas
20     ex = np.cos(phi)*(xr - x) + np.sin(phi)*(yr - y)
21     ey = -np.sin(phi)*(xr - x) + np.cos(phi)*(yr - y)
22     ephi = wrap_to_pi(phir - phi)
23     return ex, ey, ephi
24
25 def tracking_controller(state, ref_state, vd, wd, k1, k2, k3,
26    k_max):
27     # Calcula v e w para zerar o erro em relacao a referencia
28     ex, ey, ephi = body_error(state, ref_state)
29
30     # Lei de Controle
31     v_cmd = vd * np.cos(ephi) + k1 * ex
32     w_cmd = wd + k2 * vd * ey + k3 * vd * np.sin(ephi)
33
34     # Aplicacao das saturacoes

```

```

34     # Limite do motor
35     v_cmd = np.clip(v_cmd, 0, 5.0)
36
37     # Restricao cinematica
38     w_limit = abs(v_cmd) * k_max
39     w_cmd = np.clip(w_cmd, -w_limit, w_limit)
40
41     return v_cmd, w_cmd
42
43 def generate_reference_trajectory(k_max, inputs, total_time, dt
    =0.05):
44     #Gera a lista de estados (x, y, phi, v, w)
45     t = np.arange(0, total_time, dt)
46
47     # Estado inicial ideal
48     x, y, phi = 0, 0, math.radians(90)
49
50     ref_data = [] # Lista de dicionarios
51
52     idx = 0
53     for ct in t:
54         if idx < len(inputs):
55             limit, v_ref, w_fac = inputs[idx]
56             if ct > limit: idx += 1
57
58             if idx >= len(inputs): v_ref, w_ref = 0, 0
59             else: w_ref = v_ref * k_max * w_fac
60
61             # Salva o estado atual como referencia
62             ref_data.append({
63                 'x': x, 'y': y, 'phi': phi,
64                 'v': v_ref, 'w': w_ref
65             })
66
67             # Avanca o modelo ideal
68             x, y, phi = kinematic_model((x, y, phi), v_ref, w_ref, dt
69                 )
70
71             return ref_data
72
73 # Parametros

```

```
74 dt = 0.05
75 tempo_total = 10.0
76 k_max = 0.1
77 v_nom = 3.0
78
79 # Manobra em S
80 inputs_S = [
81     (2.0, v_nom, 0.0),
82     (5.0, v_nom, 1.0),
83     (8.0, v_nom, -1.0),
84     (10.0, v_nom, 0.0)
85 ]
86
87 # Gerar a referencia
88 referencia = generate_reference_trajectory(k_max, inputs_S,
89     tempo_total, dt)
89
90 # Configurar simulacao com ruido
91 noise_lvl = 0.10 # 10%
92
93 # Arrays para guardar historico
94 path_open = {'x': [], 'y': []} # Malha aberta
95 path_closed = {'x': [], 'y': []} # Malha fechada
96
97 # Estados iniciais
98 state_open = [0, 0, math.radians(90)]
99 state_closed = [0, 0, math.radians(90)]
100
101 for i in range(len(referencia)):
102     ref = referencia[i]
103     target_state = (ref['x'], ref['y'], ref['phi'])
104
105     # Sistema de malha aberta
106     # Aplica o comando nominal + ruido
107     v_in = ref['v'] + np.random.normal(0, noise_lvl * ref['v'])
108     w_in = ref['w'] + np.random.normal(0, noise_lvl * 0.1)
109     state_open = kinematic_model(state_open, v_in, w_in, dt)
110     path_open['x'].append(state_open[0])
111     path_open['y'].append(state_open[1])
112
113     # Sistema de malha fechada
114     # Calculo do comando de controle
```

```
115     v_ctrl, w_ctrl = tracking_controller(state_closed,
116                                         target_state, ref['v'], ref['w'], k1=1.0, k2=0.5, k3=3.0,
117                                         k_max=k_max)
118
119     # Aplicacao do mesmo ruido
120     v_real = v_ctrl + np.random.normal(0, noise_lvl * ref['v'])
121     w_real = w_ctrl + np.random.normal(0, noise_lvl * 0.1)
122
123     state_closed = kinematic_model(state_closed, v_real, w_real,
124                                     dt)
125     path_closed['x'].append(state_closed[0])
126     path_closed['y'].append(state_closed[1])
127
128     fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6), sharey=True
129                                     )
130
131     # Referencia
132     ref_x = [p['x'] for p in referencia]
133     ref_y = [p['y'] for p in referencia]
```

8 APÊNDICE C

8.1 CÓDIGO DO SISTEMA DE VISÃO COMPUTACIONAL

O código-fonte completo para o processamento de imagens e extração de características é apresentado a seguir.

Listing 8.1 – Script principal do sistema de visão.

```

1 import cv2 as cv
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Parametros
6 MIN_NEEDLE_AREA = 300
7 MIN_ASPECT_RATIO = 8.0
8
9 MIN_OBSTACLE_AREA = 15000
10 MAX_OBSTACLE_ASPECT_RATIO = 3.0
11
12 MM_PER_PIXEL = 0.05
13
14 plt.rcParams['font.family'] = 'serif'
15 plt.rcParams['font.serif'] = ['Times␣New␣Roman']
16 plt.rcParams['font.size'] = 12
17
18 # Carregar imagem
19 image_path = r"Images\met_obs.png"
20 frame = cv.imread(image_path)
21
22 if frame is None:
23     raise FileNotFoundError(f"Error:␣A␣imagem␣nao␣foi␣encontrada.
24         ")
25
26 # Conversao para escala de cinza e pre-processamento
27 gray = cv.cvtColor(frame, cv.COLOR_BGR2GRAY)
28 cv.imshow("Grayscale", cv.resize(gray, (800, 600)))
29
30 # Calcular e plotar o histograma da imagem em escala de cinza
31 #hist = cv.calcHist([gray], [0], None, [256], [0, 256])
32
33 #plt.figure()
34 #plt.title("Histograma da Imagem em Escala de Cinza")

```

```
34 #plt.xlabel("Intensidade de Pixel")
35 #plt.ylabel("N mero de Pixels")
36 #plt.plot(hist, color='black')
37 #plt.xlim([0, 256])
38
39 # Pre-processamento por filtro gaussiano e binarizacao
40 blurred = cv.GaussianBlur(gray, (5, 5), 0)
41 _, thresh = cv.threshold(blurred, 130, 200, cv.THRESH_BINARY_INV)
42 # cv.imshow("Filtro", cv.resize(blurred, (800, 600)))
43
44 # Aplicacao de operacoes morfologicas
45 opening_kernel = np.ones((5, 5), np.uint8)
46 thresh = cv.morphologyEx(thresh, cv.MORPH_OPEN, opening_kernel)
47 # cv.imshow("Abertura", cv.resize(thresh, (800, 600)))
48
49 closing_kernel = np.ones((20, 1), np.uint8)
50 thresh = cv.morphologyEx(thresh, cv.MORPH_CLOSE, closing_kernel)
51 # cv.imshow("Fechamento", cv.resize(thresh, (800, 600)))
52
53 # Deteccao de contornos
54 contours, _ = cv.findContours(thresh, cv.RETR_EXTERNAL, cv.
    CHAIN_APPROX_SIMPLE)
55
56 # Analise dos contornos detectados
57 needle_candidates = []
58 found_obstacles_centers = []
59
60 for c in contours:
61     area = cv.contourArea(c)
62
63     rect = cv.minAreaRect(c)
64     (w, h) = rect[1]
65     if w == 0 or h == 0:
66         continue
67     aspect_ratio = max(w, h) / min(w, h)
68
69     # Verificar se e uma agulha
70     if area > MIN_NEEDLE_AREA and aspect_ratio > MIN_ASPECT_RATIO
        :
71         needle_candidates.append(c)
72         continue
73
```

```

74     # Verificar se e um obstaculo
75     elif area > MIN_OBSTACLE_AREA and aspect_ratio <
       MAX_OBSTACLE_ASPECT_RATIO:
76         M = cv.moments(c)
77         if M["m00"] != 0:
78             cX = int(M["m10"] / M["m00"])
79             cY = int(M["m01"] / M["m00"])
80             found_obstacles_centers.append((cX, cY))
81             cv.drawContours(frame, [c], -1, (255, 0, 0), 2)
82         continue
83
84 if len(needle_candidates) > 0:
85     # Selecionar a agulha com maior area
86     best_needle_contour = max(needle_candidates, key=cv.
       contourArea)
87     cv.drawContours(frame, [best_needle_contour], -1, (0, 255, 0)
       , 2)
88     tip_point = max(best_needle_contour, key=lambda point: point
       [0][1])
89     tip_coordinates = tuple(tip_point[0])
90     cv.circle(frame, tip_coordinates, 10, (0, 0, 255), -1)
91
92     tip_coords_mm = (tip_coordinates[0] * MM_PER_PIXEL,
       tip_coordinates[1] * MM_PER_PIXEL)
93     # Exibir o texto com as coordenadas em mm
94     # text_to_display = f"Tip: ({tip_coords_mm[0]:.2f}, {
       tip_coords_mm[1]:.2f}) mm"
95
96     cv.putText(frame, text_to_display, (tip_coordinates[0] + 15,
       tip_coordinates[1] - 15), cv.FONT_HERSHEY_SIMPLEX, 1.5, (0,
       0, 255), 2)
97
98 for center_coord in found_obstacles_centers:
99     cv.circle(frame, center_coord, 10, (255, 255, 0), -1)
100
101     center_coord_mm = (center_coord[0] * MM_PER_PIXEL,
       center_coord[1] * MM_PER_PIXEL)
102     # Exibir o texto com as coordenadas em mm
103     # text_to_display_obs = f"Obs: ({center_coord_mm[0]:.1f}, {
       center_coord_mm[1]:.1f}) mm"
104
105     cv.putText(frame, text_to_display_obs, (center_coord[0] + 15,

```

```
center_coord[1]), cv.FONT_HERSHEY_SIMPLEX, 1.5, (255, 255,  
0), 2)
```