



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
LABORATÓRIO DE VIBRAÇÕES E ACÚSTICA

Gildean do Nascimento Almeida

**Metamaterial periódico e dispersivo com propriedades efetivas
negativas: controle e manipulação de ondas sonoras**

Florianópolis, Dezembro de 2025

Gildean do Nascimento Almeida

**Metamaterial periódico e dispersivo com propriedades efetivas
negativas: controle e manipulação de ondas sonoras**

Tese submetida em conformidade com o Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito necessário para se obter o Grau de Doutor em Engenharia Mecânica com ênfase em Acústica e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Erasmo Felipe Vergara.

Coorientador: Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Florianópolis, Dezembro de 2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Almeida, Gildean do Nascimento

Metamaterial periódico e dispersivo com propriedades efetivas negativas: controle e manipulação de ondas sonoras / Gildean do Nascimento Almeida; orientador, Erasmo F. Vergara, coorientador, Arcanjo Lenzi. - Florianópolis, SC, 2025.

223 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências.

1. Engenharia Mecânica. 2. Coeficiente de absorção sonora. 3. Relação de dispersão. 4. Matriz de transferência. 5. Perda de transmissão sonora. 6. Ondas de Bloch. 7. Aplicações de metamateriais. I. Vergara, Felipe. II. Lenzi, Arcanjo. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Gildean do Nascimento Almeida

Metamaterial periódico e dispersivo com propriedades efetivas negativas: controle e manipulação de ondas sonoras

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Rodolfo Venegas, Ph.D. - Universidade Austral do Chile

Prof. Andrey Ricardo da Silva, Ph.D. - Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Paulo Henrique Mareze. - Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos. - Universidade Estadual de Campinas

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica com ênfase em Acústica e Vibrações.



Documento assinado digitalmente
Henrique Simas
Data: 09/12/2025 13:56:57-0300
CPF: ***.194.639-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Dr. Henrique Simas.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação



Documento assinado digitalmente
Erasmo Felipe Vergara Miranda
Data: 09/12/2025 16:12:58-0300
CPF: ***.003.839-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Dr. Erasmo Felipe Vergara. - Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D. - Coorientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, Dezembro de 2025

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela odisseia chamada vida, por todo aprendizado que obtive durante o período de doutorado e acima de tudo pela evolução como ser humano limitado que sou.

Agradeço a minha mãe, Marialda, por me motivar a nunca desistir frente as dificuldades da vida. A minha irmã, Tainara, por toda parceria. E a minha noiva, Fernanda de Almeida, por todo companheirismo e apoio incondicional.

Sou grato ao meu orientador e querido amigo, professor Erasmo F. Vergara, por aceitar e me orientar no desenvolvimento deste trabalho. Muito obrigado pelas críticas construtivas e por estar disponível sempre. Ao meu estimado coorientador, professor Arcanjo Lenzi, por todo apoio concedido, livros emprestados e acima de tudo por sua humanidade excepcional.

Agradeço aos professores Álvaro S. Alves (UEFS - Fiscampus) e José Carlos O. de Jesus (UNEB) por terem me iniciado na pesquisa científica durante a graduação em física.

Agradeço a todos os companheiros de laboratório seja os já estão em outros rumos da vida ou os que ainda permanecem fazendo pesquisa. Em especial: Kleyton Zimmermann, Lucas Zanatta, Andrey Baranovskyj, Olavo Mecias, Leandro Barbosa, Jacson Gil Vargas, Ricardo Brum, Robson Zdebski Mikulski, dona Sônia, Rafael Goes (Coiote) e a todos os integrantes do grupo *Multidisciplinary Modeling and Optimization* (Mopt).

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (POS-MEC) pelo suporte financeiro concedido para a fabricação das amostras bem como as agências de fomento à pesquisa, a saber: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) mediante o Projeto NOVOMAT21 - ref. 0028/21.

Sou grato também a Petrobras, a Fundação de Ensino e Engenharia de Santa Catarina (FEESC) pelo projeto **Conexões Para Inovar** e aos parceiros MUV manufatura aditiva e Laboratório de Materiais (LabMat) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Por fim, sou grato pela oportunidade de estudar num centro de pesquisa pública de excelência que é o Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da UFSC.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

DEDICATÓRIA

A minha família, minha noiva Fernanda de Almeida e a todos que acreditam na ciência feita com seriedade, critério e responsabilidade.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

EPÍGRAFE

Vamos viver um dia de cada vez!

Fernanda de Almeida Moreira

Somente um principiante que não sabe nada sobre ciência diria que a ciência descarta a fé. Se você realmente estudar a ciência, ela certamente o levará para mais perto de Deus.

James Clerk Maxwell

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

RESUMO

A tecnologia dos metamateriais acústicos (MA) com escala de subcomprimento de onda é uma área de pesquisa que ganhou notoriedade nos últimos anos. Esse interesse é impulsionado pela vasta aplicabilidade que estes materiais propiciam bem como eficientes soluções frente aos materiais acústicos convencionais. Por MA pressupõe-se estruturas que repetem uma célula unitária e apresentam propriedades e comportamentos únicos especialmente para grandes comprimentos de onda. Nesta perspectiva, este trabalho apresenta uma metodologia de projeto de um MA periódico e dispersivo para o controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras em problemas de reflexão e transmissão sonora. O método da matriz de transferência combinado a acústica visco-térmica de Stinson são utilizados e se revelam suficientemente precisos para descrever analiticamente o comportamento do MA. Além disso, baseado no teorema de Bloch-Floquet a relação de dispersão é estabelecida, a qual se revelou importante para compreensão deste comportamento. Dentre os diversos resultados de controle das ondas no problema de transmissão destaca-se a atenuação de 70 dB em 750 Hz e 29 dB em 465 Hz, o qual se deve à propriedade de *bandgap* existentes na estrutura. Por outro lado, um controle de 89% em 686 Hz e de 84% em 422 Hz da energia sonora no problema de reflexão foram obtidos, adicionalmente um acúmulo de picos de absorção sonora antes do primeiro *bandgap* é demonstrado experimentalmente. A manipulação das ondas em um amplo espectro de frequência é demonstrada experimentalmente por meio da relação de dispersão e da velocidade de fase. Um método de recuperação das propriedades efetivas negativas do metamaterial foi utilizado. Consequentemente, um módulo de compressibilidade e uma densidade de massa com valores negativos em frequências específicas foram obtidos, proporcionando profunda compreensão dos mecanismos físicos subjacentes ao comportamento da estrutura. Uma amostra em tamanho real de uma configuração ventilada do MA foi avaliada em três problemas práticos: campo difuso, barreira acústica e clausura de uma fonte de ruídos. Consequentemente, os resultados obtidos demonstram a versatilidade da estrutura e uma atenuação sonora significativa com uma ampla economia de espaço físico, redução de peso e ventilação. Por fim, no plano técnico-científico este trabalho contribui substancialmente para avanços no campo de controle e manipulação de ondas sonoras que se propagam em meios periódicos e dispersivo.

Palavras-chave: Relação de dispersão, coeficiente de absorção sonora, perda de transmissão sonora, matriz de transferência, ondas de Bloch, aplicações de metamateriais.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

ABSTRACT

Sub-wavelength scale acoustic metamaterial (AM) technology is a research area that has gained prominence in recent years. This interest is driven by the vast applicability these materials offer, as well as their efficient solutions compared to conventional acoustic materials. By AM understood as structures that repeat a unit cell and exhibit unique properties and behaviors, especially for large wavelengths. From this perspective, this work presents a design methodology for a periodic and dispersive AM for the control, mitigation, and manipulation of sound waves in problems of sound reflection and transmission. The transfer matrix method combined with Stinson's viscothermal acoustics is used and proves to be sufficiently accurate to analytically describe the behavior of the AM. Furthermore, based on the Bloch-Floquet theorem, the dispersion relation is established, which proved to be important for understanding this behavior. Among the various results of wave control in the transmission problem, attenuation of 70 dB at 750 Hz and 29 dB at 465 Hz stands out, which is due to the bandgap property present in the structure. On the other hand, control of 89% at 686 Hz and 84% at 422 Hz of the sound energy in the reflection problem was achieved. Additionally, an accumulation of sound absorption peaks before the first bandgap is demonstrated experimentally. The manipulation of waves over a broad frequency spectrum is demonstrated experimentally through the dispersion relation and phase velocity. A method for retrieving the negative effective properties of the metamaterial was used. Consequently, a bulk modulus and a mass density with negative values at specific frequencies were obtained, providing a deep understanding of the underlying physical mechanisms of the structure's behavior. A full-size sample of a ventilated AM configuration was evaluated in three practical problems: diffuse field, acoustic barrier, and noise source enclosure. Consequently, the results demonstrate the versatility of the structure and significant sound attenuation with substantial space savings, weight reduction, and ventilation. Finally, on a technical-scientific level, this work contributes substantially to advances in the field of control and manipulation of sound waves propagating in periodic and dispersive media.

Keywords: Dispersion relation, sound absorption coefficient, sound transmission loss, transfer matrix, Bloch waves, metamaterials applications.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

RESUMO EXPANDIDO

Título: Metamaterial periódico e dispersivo com propriedades efetivas negativas: controle e manipulação de ondas sonoras.

Introdução: O controle e a manipulação de ondas, independente de sua natureza, em estruturas com periodicidade espacial tornou-se um campo importante, especialmente quando os aspectos científico, tecnológico e de inovação são considerados. Embora o comportamento dos fenômenos físicos associado a estruturas periódicas tenham se consolidado ao longo dos últimos anos em diversos campos da física e da engenharia, o caso acústico ainda é um campo de estudo pouco explorado e neste sentido se faz necessário. Por exemplo, estudos que considerem a manipulação acústica por meio de fenômenos subjacente ao comportamento das ondas sonoras que se propagam em metamateriais periódicos e dispersivos (ondas de Bloch) são escassos na literatura. Nesta perspectiva, conceitos como dispersão sonora, velocidades de fase, velocidade de grupo e bandas de frequências proibidas (*bandgaps*) são destaques. Por outro lado, o controle simultâneo da energia sonora em problemas de reflexão e transmissão sonora frequentemente é explorado e resultados frutíferos podem ser consultados na literatura. No entanto, em geral o comportamento deste controle é modelado e abordado de forma separada da propriedade de bandas proibidas nos metamateriais. A principal vantagem de se abordar este amplo controle considerando a propriedade de banda é que a partir da dimensão dos *bandgaps* pode se estabelecer melhor este controle ao longo do espectro de frequência. Outro destaque é que a propriedade de banda oferece *insights* sobre outras características físicas do comportamento dos metamateriais, tais como: ressonâncias do tipo monopolo e dipolo, densidade de massa efetiva, módulo de compressibilidade efetivo e índice de refração efetivo com valores negativos. Ademais, do ponto de vista experimental, a obtenção destas características físicas é desafiadora devido a raridade de metodologias para se extrair tais informações no campo da acústica. Portanto, avanços no campo de controle e manipulação de ondas sonoras que se propagam em estruturas periódicas é latente. Consequentemente, discussões no campo da física ondulatória particularmente sobre o comportamento das ondas de Bloch dissipativas também.

Objetivos: Entre as principais lacunas existentes na literatura sobre o comportamento dos metamateriais acústicos periódicos e dispersivos destacamos: (i) análise do com-

portamento das ondas sonoras que se propagam em meios periódicos através da dispersão sonora, velocidade de fase e bandas de frequências proibidas simultaneamente é pouco conhecido, (ii) o controle das ondas sonoras em problema de reflexão e transmissão sonora em geral é dissociada da propriedade de bandas proibidas, (iii) compreensões mais profundas sobre as características físicas dos metamateriais as quais podem ser derivadas a partir da propriedade de bandas são escassamente exploradas. Desta forma, o objetivo principal desta pesquisa é fornecer uma ampla metodologia de projeto de um metamaterial acústico periódico e dispersivo, cuja perspectiva permita um amplo e efetivo controle e manipulação das ondas sonoras em um amplo espectro de frequências ($f \in [100 - 4.000]$ Hz).

Metodologia: Com uma proposta multifacetada, a metodologia desta pesquisa considera diferentes perspectivas para compreender e discutir os fenômenos físicos aqui abordados e, conseqüentemente, o comportamento das configurações do metamaterial proposto. Desta forma, a metodologia é dividida em quatro etapas:

- i) Modelo matemático baseado no método da matriz de transferência considerando integralmente as perdas visco-térmicas no metamaterial;
- ii) Relação de dispersão do metamaterial a qual é derivada com base na teoria de meios periódicos, ou seja, através do teorema de Bloch-Floquet 1D;
- iii) Modelos numéricos baseados no método dos elementos finitos e métodos experimentais normativos. Vale destacar que os experimentos são divididos em: (i) campo direto e (ii) campo difuso;
- iv) Caracterização experimental das propriedades efetivas. Em que um método do meio efetivo é empregado para obter uma interpretação mais ampla dos mecanismos físicos subjacentes ao comportamento do metamaterial.

Resultados e discussões: Os proeminentes resultados derivados das diferentes configurações do metamaterial podem ser melhor sintetizados ao dividi-los em três etapas:

- (i) Controle da energia sonora;
- (ii) Manipulação das ondas sonoras;
- (iii) Propriedades efetivas negativas do metamaterial.

O controle da energia sonora é dividido em etapas subsequentes, primeiramente através de diferentes configurações é apresentado um amplo controle da energia sonora, ou seja, absorção e perda de transmissão sonora simultaneamente. É demonstrado que as elevadas magnitudes de atenuação sonora alcançadas nas estruturas se deve primordialmente a propriedade de bandas proibidas (*bandgaps*). Além disso, uma estratégia para se estabelecer a localização e a dimensão destas bandas proibi-

das é discutida analiticamente. Em seguida o controle da energia sonora exclusivamente no problema de reflexão (absorção sonora) é apresentado, consequentemente é demonstrado que um acúmulo de picos de absorção sonora antes do primeiro *bandgap* da estrutura é possível, de modo que a quantidade de picos é proporcional ao número de dispersores periódicos. O acoplamento crítico nas frequências de ressonância da estrutura e o excesso ou falta de perda de energia sonora foi avaliado e anunciado pelo método gráfico do plano de frequência complexa, de forma que introduzimos uma frequência imaginária para avaliar o seu estado de amortecimento. Ainda sobre o controle da energia sonora, com a finalidade de investigar o caráter simétrico e recíproco do metamaterial, uma análise da propriedade invariância de reflexão no amplo controle sonoro foi conduzida. Por fim, a eficiência do controle da energia sonora em campo difuso foi investigada através de um painel em tamanho real de uma configuração ventilada ($\approx 10\%$ de abertura) do metamaterial. Além disso, o comportamento da estrutura ventilada foi avaliado como uma barreira acústica e na sequência como clausura de uma fonte de ruídos de um eletrodoméstico.

A manipulação das ondas através da dispersão sonora, velocidade de fase e bandas de frequências proibidas é apresentada em detalhes, e as discussões são apoiadas por resultados experimentais. Finalmente, a partir dos coeficientes de reflexão e transmissão sonora experimentais, o método do meio efetivo foi usado para recuperar as propriedades efetivas negativas do metamaterial. Neste sentido, o módulo de compressibilidade efetivo e a densidade de massa efetiva exibiram valores negativos em frequências específicas, fornecendo uma melhor compreensão dos mecanismos físicos subjacentes ao comportamento de diferentes configurações do metamaterial.

Considerações finais: Esta pesquisa que, fornece uma perspectiva de controle e manipulação das ondas sonoras mediante o projeto de um metamaterial, lida com ondas que se propagam em um meio periódico e dispersivo, consequentemente estas ondas serão frequentemente chamadas de ondas de Bloch. Modelos matemáticos que descrevem o comportamento do metamaterial é detalhado, assim como a importância de se considerar as perdas visco-térmicas. Expressões analíticas da impedância de Bloch que especifica o comportamento dos dispersores e do parâmetro adimensional que especifica o comportamento das funções de ondas de Bloch na estrutura também são apresentadas. Além disso, a caracterização experimental de diferentes configurações do metamaterial é avaliada sob a incidência de ondas direta e aleatória em termo das duas condições de contorno, ou seja, em problemas de reflexão e transmissão. Entre possíveis trabalhos futuros para responder lacunas em aberto, destaca-se: (i) combinar

a estrutura do metamaterial com materiais porosos afim de obter um maior controle da energia sonora em problema de reflexão sonora; (ii) através de simulações numéricas avaliar o efeito de curvatura dos canais enrolados do dispersor no comportamento do metamaterial; (iii) desenvolver simulações numéricas para quantificar a influência da rugosidade interna das paredes dos canais enrolados no comportamento da estrutura, conseqüentemente, formular correções na modelagem matemática; (iv) estabelecer um modelo matemático que represente o comportamento do metamaterial como uma barreira acústica ventilada.

Palavras-chave: Relação de dispersão, coeficiente de absorção sonora, perda de transmissão sonora, matriz de transferência, ondas de Bloch, aplicações de metamateriais.

Lista de Figuras

1	Modelos de estruturas periódicas - parte 1.	52
2	Modelos de estruturas periódicas - parte 2.	53
3	Modelos de estruturas periódicas - parte 3.	54
4	Modelos de estruturas periódicas - parte 4.	55
5	Modelos de estruturas periódicas - parte 5.	56
6	Seção transversal da geometria arbitrária dividida em duas regiões distintas.	59
7	Representação da física dos efeitos visco-térmicos. (a) Camada limite viscosa e (b) camada limite térmica.	60
8	Perfil da velocidade de partículas num tubo circular em função da frequência.	61
9	Tubo circular com direção axial $\hat{x}$ ao longo da qual a onda se propaga e a direção radial $\hat{r}$	63
10	Perspectiva de um tubo de seção transversal retangular com as coordenadas usadas nas análises.	66
11	Perspectiva de uma fenda de seção transversal $2a \times 2b$	68
12	Relação de dispersão em função da área de seção transversal do tubo. . .	70
13	Velocidade de propagação em função da área de seção transversal de um tubo.	70
14	Estrutura genérica arbitrária de periodicidade h	73
15	Estrutura genérica de periodicidade h	75
16	Estrutura arbitrária periódica para análise da impedância de Bloch. . .	79
17	Representação de um tubo contínuo com paredes rígidas e comprimento t_1 . P_I e P_R representam as amplitudes das ondas incidentes e refletidas. .	87
18	Guia de ondas principal carregado com um tubo ramificado de $\lambda/4$. . .	90
19	Fenômeno da radiação sonora de um guia de ondas principal.	91
20	Guia de ondas com um ressonador de $\lambda/4$ acoplado lateralmente. . . .	92
21	Fenômeno da radiação de um ressonador acoplado lateralmente num guia de ondas.	93
22	Estrutura genérica de comprimento h de um problema de transmissão. .	94
23	Estrutura do MA periódico para problema de: (a) transmissão e (b) reflexão.	100
24	Modelo numérico construído para o problema de transmissão.	108

25	(a) Configuração do modelo numérico construído para o problema de reflexão. (b) Exemplo de malha do modelo com elementos tetraédricos quadráticos.	108
26	(a) Equipamentos utilizados nos ensaios no problema de transmissão. (b) Cadeia de sinal da instrumentação utilizada nos ensaios.	111
27	(a) Equipamentos utilizados nos ensaios no problema de reflexão. (b) Cadeia de sinal da instrumentação utilizada nos ensaios.	114
28	(a) Estrutura do MA com ondas incidentes, refletidas e transmitidas. (b) Representação de um material efetivo equivalente a estrutura. (c) Ilustração do método para obter os parâmetros efetivos.	117
29	Ilustração do processo de fotopolimerização em cuba baseada na técnica LCD.	120
30	(a) Vista interna, (b) desenho no plano e (c) fotografia da amostra do MA para problema de transmissão: Configuração T1 composta de $N = 1$ dispersor com $n = 5$ canais enrolados.	120
31	Comportamento do MA: Configuração T1. (a) Coeficientes de reflexão e transmissão sonora. (b) Coeficiente de absorção sonora. (c) Perda de transmissão sonora (PTS) em dB.	122
32	Campo de pressão sonora e distribuição da velocidade de partículas (setas pretas): (a) Ressonância monopolo (750 Hz) e (b) Ressonância dipolo (2.000 Hz).	123
33	Diagrama ou relação de dispersão. (a) Guia de ondas. (b) - (c) MA configuração T1. (d) - (e) Com e sem as perdas visco-térmicas.	125
34	Comportamento da impedância de Bloch do MA: Configuração T1.	126
35	Amplitude e fase do parâmetro g_n/f_n do MA: Configuração T1.	127
36	Velocidade de fase do MA periódico: Configuração T1.	128
37	Esboço do MA: Configuração T1 considerando ondas incidentes para frente.	128
38	Comportamento teórico e experimental do MA: Configuração T1. (a) Coeficiente de absorção sonora. (b) Perda de transmissão sonora (PTS) em dB.	129
39	(a) Vista interna e (b) fotografia do MA para problema de transmissão: Configuração T2 composta de $N = 2$ dispersores e $n = 2$ e 3 canais enrolados cada.	130

40	(a) - (b) Diagrama de dispersão do MA: Configuração T2. Partes real e imaginária do número de onda de Bloch. (c) Comportamento da perda de transmissão sonora em dB.	131
41	Comportamento do diagrama de dispersão em razão de L_f/h	132
42	(a) Esquema geral da estrutura. (b) Sub-sistema simétrico. (c) Sub-sistema anti-simétrico.	134
43	(a) Vista interna da Configuração T3 com $N = 1$ dispersor simétrico e $n = 2$. (b) e (c) Vista interna e fotografia da Configuração T3 com $N = 2$ e $n = 2$ cada.	136
44	(a) e (b) Estrutura recíproca com simetria de espelho: Configuração T3, caso 1. (c) - (d) Comportamento do coeficiente de absorção sonora. (e) - (f) Comportamento da PTS em dB.	137
45	(a) - (d) Comportamento do campo de pressão acústica nas frequências dos modos simétrico e antissimétrico do MA: Configuração T3, caso 1. .	138
46	(a) Estrutura recíproca e simétrica: Configuração T3, caso 2. (b) - (c) Comportamento do coeficiente de absorção e PTS em dB. (d) Velocidade de fase. (e) Coeficiente de absorção sonora em função do número de dispersores. (f) Diagrama de dispersão.	139
47	(a) - (c) Campos de pressão acústica e velocidade de partículas nas frequências dos modos simétrico e antissimétrico do MA: Configuração T3, caso 2.	141
48	Esboço e fotografia das amostras do MA para o problema de reflexão. . .	142
49	Comportamento do coeficiente de absorção sonora das amostras 1 – 4. .	144
50	Plano de frequência complexo do coeficiente de reflexão do MA: (a) Amostra 1 e (b) Amostra 2.	145
51	(a) Campo de pressão. (b) Perdas viscosas. (c) Perdas térmicas e (d) Campo de velocidade na primeira ressonância (688 Hz) da amostra 1. . .	147
52	(a) e (d) Campo de pressão. (b) e (e) Perdas viscosas. (c) e (f) Perdas térmicas nas primeiras ressonâncias da amostra 3.	148
53	Estruturas do MA cujas propriedades efetivas foram avaliadas: (a) Configuração T1 e (b) Configuração T3, caso 1.	148
54	(a) Coeficientes de reflexão e absorção sonora do tubo de impedância com terminação anecoica e coeficiente de reflexão e transmissão do MA: Configuração T1. (b) Partes real e imaginária experimental da impedância acústica efetiva normalizada do MA.	149

55	(a) Comportamento da parte real dos parâmetros efetivos do MA: Configuração T1. (a) Densidade de massa. (b) Módulo de compressibilidade. (c) Índice de refração acústico.	151
56	(a) Comportamento da parte real dos parâmetros efetivos do MA: Configuração T3. (a) Densidade de massa, (b) Módulo de compressibilidade e (c) índice de refração acústico.	152
57	(a) Painel com 64 células unitárias do MA ventilado. (b) - (c) Detalhes da célula unitária composta por duas configurações de dispersores. (d) - (e) Detalhe dos dispersores cujos parâmetros geométricos são os mesmos descritos na Capítulo 6.	157
58	Painel final do MA ventilado de área $S_a = 0,64 \times 0,64 \approx 0,41 \text{ m}^2$	158
59	Tubo de impedância de seção transversal quadrada construído para avaliar o comportamento do MA ventilado.	158
60	Comportamento do MA ventilado. (a) Perda de transmissão sonora das 16 amostras. (b) Média e desvio padrão populacional das curvas realizada em escala linear para em seguida ser convertida em dB.	159
61	Comportamento do MA ventilado. Média da perda de transmissão sonora e coeficiente de absorção sonora.	159
62	<i>Setup</i> utilizado para avaliar o desempenho de ventilação do MA. . . .	160
63	(a) Histograma das curvas de velocidade do fluxo com e sem a amostra. (b) Velocidade do fluxo de ar medida com ou sem amostra. (c) Queda de pressão. A curva continua preta é o resultado do ajuste (regressão linear) dos resultados medidos.	161
64	Desenho esquemático das câmaras reverberante do LVA da UFSC. . . .	163
65	(a) Esquema da parede dupla tipo sanduíche desenvolvida. (b) Parede dupla de $1,8 \text{ m} \times 1,3 \text{ m}$ construída e montada na abertura entre as câmaras reverberante.	164
66	Comportamento da PTS da parede dupla tipo sanduíche.	164
67	Teste realizado nas câmaras reverberante do LVA da UFSC. (a) Perspectiva da câmara emissora. (b) Painel acoplado na janela. (c) Perspectiva da câmara receptora.	165
68	(a) Comportamento da perda de transmissão sonora do MA ventilado em campo difuso. (b) Perda de transmissão sonora do grupo de controle.	167
69	Painel do MA ventilado instrumentado com acelerômetros.	168
70	Eficiência de radiação e velocidade quadrática média do painel do MA ventilado.	169

71	(a) Vista lateral da montagem experimental. (b) Experimento de perda de inserção realizado na câmara semi-anecoica do LVA da UFSC.	171
72	(a) Detalhes do modelo numérico 2D. (b) Malha do modelo numérico. .	171
73	(a) Pressão sonora média com e sem a presença do MA ventilado. (b) Relação de dispersão do MA ventilado. (c) Comportamento da perda de inserção (IL) do metamaterial. (d) Comportamento da perda de inserção do grupo de controle.	173
74	Campo de pressão sonora ao aplicar uma barreira rígida e uma barreira do MA ventilada em 506 Hz.	174
75	Campo de pressão sonora ao aplicar o MA como uma barreira ventilada em diferentes frequências.	175
76	(a) - (b) Estrutura desenvolvida para alojar o MA ventilado no refrigerador.	176
77	Fotos dos testes de ruído do refrigerador. (a) Com MA ventilado aplicado. (b) Sem MA ventilado aplicado.	177
78	(a) Espectro de ruído do refrigerador doméstico com e sem a aplicação do MA ventilado. (b) Diferença da pressão sonora.	178

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

Lista de Tabelas

1	Analogia entre propriedades das ondas eletromagnética e mecânica. . .	51
2	Parâmetros e propriedades consideradas importantes: Coeficientes de reflexão (R) e transmissão (τ). Número de onda de Bloch (q) e velocidade de fase ($\tilde{c}_p$). Módulo de compressibilidade efetiva (K_{eff}) e densidade de massa efetiva (ρ_{eff}).	57
3	Equipamentos utilizados para ensaios no problema de reflexão.	116
4	Parâmetros geométricos (em mm) usados na manufatura do MA: Configuração T1. A definição de cada parâmetro encontra-se na Figura 23 da seção 6.1.	121
5	Parâmetros geométricos (em mm) usados na manufatura do MA: Configuração T2.	130
6	Parâmetros geométricos (em mm) usados na fabricação da Configuração T3.	135
7	Parâmetros geométricos (em mm) usados na manufatura das amostras. .	143
8	Síntese dos resultados da perda de transmissão sonora do MA ventilado.	167
9	Dados experimentais do desempenho de estruturas ventiladas e não-ventiladas.	179
10	Comparação da versatilidade/aplicabilidade entre estruturas ventiladas.	180

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MA	Metamaterial acústico
AM	Acoustic metamaterial
CFs	Cristais fotônicos
1D	Unidimensional
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
PTS	Perda de transmissão sonora
LRF	<i>Low Reduced Frequency</i>
EDO	Equações diferenciais ordinárias
LI	Linearmente independente
Wron	Wronskiano
MMT	Método da matriz de transferência
det	Determinante
MEF	Método dos elementos finitos
dB	Decibel
EDs	Equações diferenciais
GB	Gigabyte
GHz	Gigahertz
HD	<i>Hard Disk</i>
RAM	<i>Random Access Memory</i>
SSD	<i>Solid State Drive</i>
TB	TeraByte
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
B&K	<i>Bruel and Kjaer</i>
MATLAB	<i>MATrix LABoratory</i>
uff	<i>Universal file format</i>
FRF	Função resposta em frequência
ISO	<i>International Organization of Standardization</i>
FFT	Transformada rápida de Fourier
LCD	<i>Liquid Crystal Display</i> ou Tela de cristal líquido
ABS	<i>Acrylonitrile butadiene styrene</i>

CAD	<i>Computer-aided design</i>
NBC	Condição de contorno de Newmann
DBC	Condição de contorno de Dirichlet
DOI	<i>Digital Object identifier</i>
MDF	<i>Medium density fiberboard</i>
SPL	Nível de pressão sonora
SPL_1	Nível de pressão sonora câmara fonte
SPL_2	Nível de pressão sonora câmara receptora
SPL_{ref}	Nível de pressão sonora de referência
$SPL_{sem\ painel}$	Nível de pressão sonora sem o painel
$SPL_{com\ painel}$	Nível de pressão sonora com o painel
SWL_{ref}	Nível de potência sonora de referência
L_w	Nível de potência sonora na câmara receptora
IL	Insertion loss (Perda de inserção)
LVA	Laboratório de Vibrações e Acústica
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
IPS	Imaginary point source
POSMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

LISTA DE SÍMBOLOS

Acrônimos

$\ddot{a}$	Aceleração	[m/s ²]
$2a$	Largura do tubo de seção retangular	[mm]
$2b$	Altura do tubo de seção retangular	[mm]
$2L$	Comprimento total do metamaterial simétrico	[mm]
A_d	Área da seção transversal do dispersor	[mm ²]
A_{tt}	Área de seção transversal do tubo retangular	[mm ²]
A_{tc}	Área de seção do tubo contínuo	[mm ²]
A_t	Área total do metamaterial	[mm ²]
$A_{\text{slit}} = A_{\text{gp}}$	Área do guia de ondas	[mm ²]
A_{gp}	Área do guia de ondas principal	[mm ²]
A_{rl}	Área de seção transversal do tubo ramificado	[mm ²]
A_{ut}	Coefficientes	[-]
A	Largura do dispersor	[mm]
$A_1 = A_2$	Coefficientes constantes	[-]
$ A\rangle$	Vetor coluna	[-]
b	Espessura das paredes do metamaterial	[mm]
$c_0 = c_{\text{real}}$	Velocidade do som no ar	[m/s]
$\tilde{c}_p$	Velocidade de fase	[m/s]
$c = c_{\text{ef}}$	Velocidade de propagação	[m/s]
c_{eff}	Velocidade de propagação efetiva	[m/s]
C_{ef}	Função compressibilidade efetiva complexa	[Pa]
C_p	Calor específico a pressão constante	[J/kg.K]
C_v	Calor específico a volume constante	[J/kg.K]
$\tilde{C}_p^t$	Velocidade de fase no dispersor	[m/s]
$\tilde{C}_p^w$	Velocidade de fase no guia de ondas	[m/s]
d	Altura do guia de ondas	[mm]
e	Largura e altura da abertura da célula unitária	[mm]
$D_t = d_t$	Diâmetro do tubo de impedância	[mm]
f_r	Frequência real	[Hz]
$f = f'$	Frequência	[Hz]

f_i	Dissipações intrínsecas no sistema	[-]
f_n	Amplitudes da onda que se propaga para frente	[Pa]
$f_{\min}$	Frequência mínima do tubo de impedância	[Hz]
$f_{\max}$	Frequência máxima do tubo de impedância	[Hz]
f_{corte}	Frequência de corte do tubo de impedância	[Hz]
f_c	Frequência de corte do metamaterial	[Hz]
f_{RH}	Frequência do ressonância	[Hz]
$F(\nu)$	Função dependente da geometria do tubo	[-]
$F_n(x)$	Função de onda de Bloch	[-]
g_n	Amplitudes da onda que se propaga para trás	[Pa]
$G_n(x)$	Função de onda de Bloch	[-]
Hz	Hertz	[s ⁻¹]
h	Periodicidade, espessura ou constante de rede do MA	[mm]
H	Comprimento total do metamaterial	[mm]
h_1	Altura do tubo contínuo	[mm]
H_{cor}	Função transferência corrigida	[-]
$H_{1,2}$	Função transferência entre os microfones 1 e 2	[-]
$H_{2,1}$	Função transferência entre os microfones 2 e 1	[-]
H_{11}	Função transferência do mic. 1 em relação ao mesmo	[-]
H_{21}	Função transferência do mic. 2 em relação ao 1	[-]
H_{31}	Função transferência do mic. 3 em relação ao 1	[-]
H_{41}	Função transferência do mic. 4 em relação ao 1	[-]
I	Matriz identidade	[-]
I_i	Amplitude da onda incidente	[Pa]
I_{in}	Intensidade sonora de entrada	[W/m ²]
I_{out}	Intensidade sonora transmitida	[W/m ²]
I_{ref}	Intensidade sonora de referência	[W/m ²]
j	Componente complexa $\sqrt{-1}$	[-]
$k_0 = k_{\text{real}}$	Número de onda do ar	[m ⁻¹]
k	Número de onda	[m ⁻¹]
K_{eff}	Módulo de compressibilidade efetivo	[Pa]
$K_{\text{ef}} = K_d$	Módulo de compressibilidade efetivo complexo	[Pa]
K_0	Módulo de compressibilidade isentrópico do ar	[Pa]
k_{ef}	Número de onda complexo efetivo	[m ⁻¹]
k_{go}	Número de onda efetivo do guia de ondas	[m ⁻¹]

k_{eq}	Número de onda do tubo ressonador	$[m^{-1}]$
k_d	Número de onda efetivo do dispersor	$[m^{-1}]$
L_g	Largura do guia de ondas	$[mm]$
L	Altura de uma célula do metamaterial	$[mm]$
L_f	Comprimento total de propagação	$[mm]$
l	Comprimento do tubo ressonador	$[mm]$
l_1	Largura do tubo contínuo	$[mm]$
m	Largura de uma célula do metamaterial	$[mm]$
$\mathbf{M}_{go-1}$	Matriz do guia de onda - parte 1	$[-]$
$\mathbf{M}_{go-2}$	Matriz do guia de onda - parte 2	$[-]$
$\mathbf{M}_{rad}$	Matriz de correção devido a radiação sonora	$[-]$
$\mathbf{M}_d$	Matriz do dispersor	$[-]$
M_{tc}	Matriz de transferência do tubo contínuo	$[-]$
M_{rl}	Matriz de transferência do tubo ramificado	$[-]$
m_{ef}	Constante de propagação	$[m^{-1}]$
n	Número de canais enrolados	$[-]$
n_{eff}	Índice de refração	$[-]$
n_i	Índice de refração negativo	$[-]$
N	Número de dispersores periódicos	$[-]$
P_I	Pressão incidente	$[Pa]$
P_R	Pressão refletida	$[Pa]$
P_T	Pressão acústica total	$[Pa]$
P_{in}	Pressão sonora a jusante	$[Pa]$
P_{out}	Pressão sonora a montante	$[Pa]$
PTS_{Vibra}	Perda de transmissão sonora numérica	$[dB]$
P_n	Pressão sonora no modelo numérico	$[Pa]$
P_0	Pressão do ar	$[Pa]$
P_{or}	Porosidade	$[\%]$
$P = p$	Pressão sonora	$[Pa]$
Pr	Número de Prandtl	$[-]$
Q	Largura e altura do painel do metamaterial	$[mm]$
$q = q_1 = q_2$	Número de onda de Bloch	$[m^{-1}]$
$Q = Q(x)$	Velocidade de volume	$[m^3/s]$
$R_{sim} = R_{asim}$	Coeficiente de reflexão	$[-]$
$R = R_f = R_t$	Coeficiente de reflexão	$[-]$

$R^+ = R^-$	Coeficiente de reflexão	[-]
$ R ^2$	Fator de reflexão	[-]
R^2	Coeficiente de determinação	[-]
$R(f')$	Coeficiente de reflexão no plano complexo	[-]
$\hat{r}$	Direção radial	[-]
r	Raio do tubo circular	[mm]
[S]	Matriz de espalhamento	[-]
$S_{11} = S_{22}$	Coeficientes de reflexão	[-]
$S_{12} = S_{21}$	Coeficientes de transmissão	[-]
$s = s_1 = s_2$	Autovalores	[-]
S_a	Área do painel do metamaterial ventilado	[mm ²]
S_{go}	Área do tubo de seção retangular	[mm]
S	Distância entre os microfones 1 e 2	[mm]
S_0	Área de seção transversal a jusante	[mm ²]
S_1	Área de seção transversal a montante	[mm ²]
S_r	Área de seção transversal do tubo ressonador	[mm ²]
$\mathbf{T} = (P, Q)$	Vetor de estado	[-]
$\mathbf{T}_t$	Matriz de transferência da ASTM E2611-09	[-]
$\mathbf{T}_{pr}$	Matriz do problema de reflexão	[-]
$\mathbf{T}_{pt}$	Matriz do problema de transmissão	[-]
$T_{11} = t_{11} = m_{11}$	Coeficiente 1,1 da matriz de transferência total	[-]
$T_{12} = t_{12} = m_{12}$	Coeficiente 1,2 da matriz de transferência total	[-]
$T_{21} = t_{21} = m_{21}$	Coeficiente 2,1 da matriz de transferência total	[-]
$T_{22} = t_{22} = m_{22}$	Coeficiente 2,2 da matriz de transferência total	[-]
T_0	Temperatura de equilíbrio	[K]
T_e	Temperatura	[K]
t_1	Comprimento do tubo continuo	[mm]
$ U(x)\rangle$	Vetor de base LI	[-]
U_n	Velocidade de partículas no modelo numérico	[m/s]
u	Componente axial da velocidade de partículas	[m/s]
v_{in}	Velocidade de partículas a jusante	[m/s]
v_{out}	Velocidade de partículas a montante	[m/s]
v_a	Velocidade do fluxo de ar	[m/s]
$v_{ar, com}$	Velocidade do fluxo de ar com amostra	[m/s]

$v_{\text{ar, sem}}$	Velocidade do fluxo de ar sem amostra	[m/s]
$\vec{v}$	Vetor velocidade de partículas	[m/s]
v_0	Velocidade ambiente	[m/s]
v_n	Velocidade normal prescrita	[m/s]
$\langle \overline{V^2} \rangle$	Velocidade média quadrática	[m/s]
W_{in}	Potência sonora incidente	[Watts]
W_{out}	Potência sonora transmitida	[Watts]
W	Altura do dispersor	[mm]
x_1	Distância da frente da amostra ao microfone 1	[mm]
x_3	Distância da frente da amostra ao microfone 3	[mm]
x_2	Distância da frente da amostra ao microfone 2	[mm]
x_4	Distância da frente da amostra ao microfone 4	[mm]
$Z_B = Z_{Ba}$	Impedância de Bloch	[Pa.s/m]
Z_S	Impedância de superfície do metamaterial	[Pa.s/m]
Z_L	Impedância de um dispersor local	[Pa.s/m]
Z_a	Impedância característica do guia de ondas	[Pa.s/m]
$Z_0 = Z_o$	Impedância característica do ar	[Pa.s/m]
Z_{eff}	Impedância característica efetiva do meio	[Pa.s/m]
Z_{go}	Impedância característica do guia de ondas	[Pa.s/m]
Z'	Impedância normalizada pela área	[Pa.s/m]
Z'_{eq}	Impedância característica do tubo ressonador	[Pa.s/m]
Z_{eq}	Impedância do tubo ressonador	[Pa.s/m]
Z_{rad}	Impedância de radiação do meio para o ar	[Pa.s/m]
Z_{campo}	Impedância de campo	[Pa.s/m]
Z_{dis}	Impedância total do dispersor	[Pa.s/m]
Z_d	Impedância característica do dispersor	[Pa.s/m]
Z_{vibra}	Impedância de superfície no modelo numérico	[Pa.s/m]
Z_{MA}	Impedância de superfície do MA nos ensaios	[Pa.s/m]

Letras Gregas

$\alpha = \alpha_{\text{sim}} = \alpha_{\text{asim}}$	Coeficiente de absorção sonora	[-]
ϵ	Permissividade elétrica	[F/m]
μ	Permeabilidade magnética	[N/A ²]
λ	Comprimento de onda	[m]
$\tau = \tau^+ = \tau^-$	Coeficiente de transmissão sonora	[-]
$\tau_f = \tau_t$	Coeficiente de transmissão sonora	[-]
ρ_{eff}	Densidade efetiva	[kg/m ³]
Δ_S	Acústica isentrópica	[]
δ_v	Camada limite viscosa	[mm]
δ_t	Camada limite térmica	[mm]
ϱ	Constante de propagação complexa	[1/m]
η	Viscosidade dinâmica do ar	[Pa.s]
κ	Condutividade térmica do ar	[W/m.K]
ν	Viscosidade cinemática do ar	[m ² /s]
ν'	Constante de difusividade	[m ² /s]
$\rho_0 = \rho$	densidade do ar	[kg/m ³]
δ	Variação da densidade	[kg/m ³]
τ_t	Variação de temperatura	[K]
ψ	Solução da propagação da onda num tubo	[-]
α_k	Constante	[-]
β_n	Constante	[-]
γ	Relação de calor específico	[-]
ρ_{ef}	Função densidade efetiva complexa	[kg/m ³]
ρ_{eff}	Densidade efetiva complexa	[kg/m ³]
ω	Frequência angular	[rad/s]
$\Phi_{q1} = \Phi_{q2}$	Funções de modulação periódica	[-]
$\lambda/4$	Tubo de um quarto de compr. de onda	[-]
$\Psi(x)$	Função de onda	[-]
δ_f	Espessura de uma massa oscilante	[mm]
δl	Correção final	[mm]
ρ_{go}	Densidade complexa do guia de ondas	[kg/m ³]
ρ_d	Densidade complexa do dispersor	[kg/m ³]
δ_{ef}	Radiação sonora	[-]
ϕ_t	Fração de preenchimento do MA	[%]

Φ	Razão de área aberta	[-]
Φ_1	Amplitude de pressão	[Pa]
Φ_2	Amplitude de velocidade de volume	[m ³ /s]
ξ	Função exponencial	[-]
$\lambda_{\max}$	Tamanho máximo de elemento	[mm]
$\lambda_{\min}$	Tamanho mínimo de elemento	[mm]
π	Constante matemática	[-]
χ	Parâmetro do método de carac. inversa	[-]
ζ	Parâmetro do método de carac. inversa	[-]
$\Lambda = \Lambda_{f,t}$	Autovalores	[-]
σ	Resistividade estática ao fluxo	[Pa·s·m ⁻²]
ΔP	Variação da pressão	[Pa]
$\tau_a = \tau_d$	Coeficiente de transmissão sonora	[-]
$\mu_x = \mu_y$	Parâmetros da impedância de radiação	[-]
θ	Ângulo polar	[rad]
ϕ	Ângulo azimutal	[rad]
σ_{rad}	Eficiência de radiação	[-]
Π_{rad}	Potência sonora radiada	[Watt]
∞	Símbolo de infinito	[-]
$\Omega(p)$	Variáveis de campo	[-]
$\Gamma(x)$	Solução obtida de uma combinação linear	[-]
$\varphi(x,t)$	Fase de uma onda	[-]

Operadores

∇	Operador gradiente	[-]
$\nabla \cdot$	Operador divergente	[-]
∇P	Gradiente de pressão	[Pa]
∇T	Gradiente de temperatura	[K]
∇u	Gradiente de velocidade	[m/s]
∇T_e	Gradiente de temperatura	[K]
$\nabla \times (\nabla \times .)$	Rotacional do rotacional de um vetor	[-]
∇^2	Operador Laplaciano	[-]
$L_i = \square^2$	Operador d'Alembertiano	[-]

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

SUMÁRIO

1	Introdução	43
1.1	Problema e Motivação	46
1.2	Justificativa para desenvolver este trabalho	46
1.3	Objetivos	47
1.4	Contribuições do trabalho	47
1.5	Organização da tese	48
2	Revisão da literatura	51
2.1	Estruturas periódicas	51
2.2	Síntese do capítulo	58
3	Acústica visco-térmica	59
3.1	Introdução	59
3.2	Breve história da acústica visco-térmica	61
3.3	Acústica visco-térmica de Stinson	62
3.3.1	Seção transversal retangular	65
3.3.2	Seção transversal tipo fenda	68
3.4	Análise prévia da acústica visco-térmica	69
3.5	Síntese do capítulo	71
4	Teoria de meios periódicos	73
4.1	Invariância translacional	73
4.2	Soluções linearmente independentes	74
4.3	Teoria de Floquet e condição de ondas de Bloch	76
4.4	Impedância de Bloch	79
4.4.1	Função geral da impedância de Bloch	80
4.4.2	Impedância de um dispersor simétrico	82
4.4.3	Impedância de um dispersor de carga de impedância	83
4.5	Parâmetro g_n/f_n das ondas de Bloch	84
4.6	Síntese do capítulo	84
5	Método da matriz de transferência	87
5.1	Matriz de transferência de um tubo contínuo	87
5.2	Matriz de um tubo ramificado	89
5.3	Impedância de radiação	91
5.4	Impedância de um ressonador lateral	92

5.5	Condições físicas associadas ao problema de transmissão	94
5.5.1	Sistema não-recíproco	97
5.5.2	Sistema recíproco	97
5.5.3	Sistema recíproco e simétrico	98
5.6	Síntese do capítulo	98
6	Materiais e métodos	99
6.1	A estrutura sob estudo	99
6.2	Métodos matemáticos	101
6.2.1	Método matemático do problema de transmissão	101
6.2.2	Método matemático do problema de reflexão	103
6.3	Relação de dispersão	104
6.4	Método numérico	106
6.4.1	Modelo numérico para problemas de transmissão e reflexão . . .	107
6.5	Métodos experimentais	110
6.5.1	Método normativo ASTM E2611-09	110
6.5.2	Método normativo ISO 10534-2	113
6.6	Método de caracterização das propriedades efetivas negativas	116
6.7	Síntese do capítulo	118
7	Resultados e discussões	119
7.1	Introdução	119
7.2	Problema de transmissão sonora	120
7.2.1	Configuração T1	120
7.2.2	Configuração T2	129
7.2.3	Configuração T3	133
7.3	Problema de reflexão sonora	142
7.4	Propriedades efetivas negativas	148
7.5	Síntese do capítulo	153
8	Aplicações	155
8.1	Introdução e contextualização	155
8.2	Metamaterial ventilado sob estudo	156
8.3	Estudo de caso - 1	158
8.3.1	Primeira etapa - Repetibilidade da PTS	158
8.3.2	Segunda etapa - Desempenho de ventilação	160
8.3.3	Terceira etapa - PTS em campo difuso	162

8.4	Estudo de caso - 2	170
8.5	Estudo de caso - 3	176
8.6	Comparativo entre projetos, avanços e contribuições do trabalho	179
8.7	Síntese do capítulo	181
9	Conclusões e trabalhos futuros	183
9.1	Considerações finais	183
9.2	Trabalhos futuros	185
9.2.1	Extensão das análises	186
9.2.2	Modificações e melhorias do metamaterial	186
	Referências	187
	Apêndice A: Lista de publicações e pedidos de patentes	199
	Apêndice B: Coeficiente de reflexão via MMT	217
	Apêndice C: Análise de convergência e Validação numérica: Vibra × Comsol	219

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

1 Introdução

A propagação de ondas, independente de sua natureza, em meios periódicos tem sido de grande interesse em diversos campos da física e da engenharia nas últimas décadas. Este interesse é motivado não somente pelo desejo de se controlar, mitigar e manipular estas ondas, mas, também pelos aspectos científico, tecnológico e de inovação associados a esta condição espacial. Em geral, quando uma onda interage com um meio periódico esta onda apresenta propriedades e comportamento que normalmente não manifesta quando a mesma interage com um meio aperiódico, por exemplo, propriedades dispersivas, atenuação seletiva, baixa velocidade de fase, acúmulo de ressonâncias, entre outros. Em especial no caso das ondas sonoras quando as perdas visco-térmicas do meio periódico são consideradas, algumas destas propriedades e comportamento se manifestam de maneira ainda mais proeminente.

Pesquisas pioneiras sobre estruturas com propriedades e comportamento incomuns é creditada a [Lindman, 1920](#), que analisou a polarização rotacional de ondas eletromagnéticas por meio de um sistema isotrópico de ressonadores espiral e direcionados aleatoriamente. Destaques para [Kock, 1948](#) que trabalhando no *Bell Labs*¹ estudou e desenvolveu estruturas com reduzida velocidade de fase e forte dispersão. Em seguida [Veselago, 1968](#) formalizou a possibilidade de um material eletromagnético apresentar propriedades da permissividade elétrica (ϵ) e permeabilidade magnética (μ) com valores negativos, desta forma, este material apresentaria características de propagação incomum, por exemplo, índice de refração negativo $n_i = -\sqrt{\epsilon \cdot \mu}$. Neste material, chamado de duplo negativo, a velocidade de fase de uma onda torna-se antiparalela à sua velocidade de grupo. Consequentemente, a primeira evidência experimental de um material com tais características foi apresentada por [Pendry et al., 1999](#).

Considerando a interação de uma onda com um meio periódico, o primeiro estudo começou com *Sir* Isaac Newton na tentativa de obter a velocidade de propagação das ondas sonoras neste meio ([G. N. Almeida et al., 2025](#); [Bradley, 1991](#)). Todavia, estudos mais abrangentes começaram com ondas de matéria no nível da estrutura atômica em metais e semicondutores no campo da física do estado sólido ([Ashcroft &](#)

¹ AT & T Bell Laboratories ou Bell Labs - empresa de pesquisa industrial e desenvolvimento científico, que desenvolveu uma série de tecnologias revolucionárias para a sociedade.

Mermin, 1976). Em um sólido, os átomos estão distribuídos em uma rede cristalina periódica. Quando um elétron que se comporta como uma onda se propaga nesta estrutura, ela experimenta uma variação periódica de sua energia potencial causada pelo núcleo positivo de íons metálicos (Gupta, 2014). Estas ondas receberam então o nome de ondas de Bloch, uma vez que tal designação surgiu no trabalho de doutorado do físico suíço, ganhador do Nobel, Felix Bloch (Bloch, 1929). Foi Bloch quem demonstrou que as soluções de ondas de matéria da equação de Schrödinger são uma forma particular do que hoje é conhecida como funções de onda de Bloch. Portanto, seu trabalho formou a base da teoria de bandas na mecânica quântica, permitindo assim classificar um material como isolante, condutor ou semicondutor (Kittel, 1957). Posteriormente, no final dos anos 80, os físicos Yablonovitch, 1987 e John, 1987 apresentaram simultaneamente pesquisas sobre propriedades de propagação das ondas eletromagnéticas em sistemas periódicos. Ambas propostas consistiam em usar uma distribuição periódica de dispersores dielétricos embutidos num meio hospedeiro com distintas propriedades dielétricas, desta maneira, esta configuração geométrica ficou conhecida como cristais fotônicos² (CFs). Interessante destacar que estas estruturas exibiam uma faixa de frequência, que devido à sua periodicidade, não permitia a propagação da onda eletromagnética. Desta forma, por analogia com o conceito de lacuna de banda eletrônica em semicondutores, essa faixa de frequência recebeu então o nome de *bandgap*. Além disso, Yablonovitch, 1987 mostrou que emissões espontâneas de átomos podem ser controladas modificando as propriedades do campo de radiação eletromagnética usando os cristais fotônicos, por tais contribuições ele é considerado o autor intelectual do conceito de *bandgap* fotônico.

Do ponto de vista do conceito de bandas proibidas (*bandgap*) ou de passagem (*bandpass*) oriundo da interação de uma onda com um meio periódico, pesquisas sobre estas características não ficaram limitadas exclusivamente às ondas eletromagnéticas. Nos anos 90 surgiram estudos sobre a origem de *bandgap* a partir da propagação de ondas mecânicas do tipo elástica em arranjos periódicos compostos de sólidos isotrópicos imersos num meio elástico isotrópico (Sigalas, 1992; Sigalas e Economou, 1993; Kushwaha et al., 1993). Em geral, estes arranjos podem apresentar configurações periódicas unidimensional (1D), bidimensional (2D) e tridimensional (3D) e em cada uma destas configurações pôde-se observar diferentes combinações de ondas, ou seja, ondas transversais, longitudinais e mistas (Romero-García, 2010). Portanto, devido a similaridade com os CFs e por apresentar *bandgap* relativo agora ao não movimento das par-

²Cristais fotônicos são nanoestruturas periódicas unidimensional, bidimensional ou tridimensional que permitem o controle e a manipulação das ondas eletromagnéticas.

tículas vibracionais (fônons) do arranjo, esta nova estrutura geométrica foi chamada de cristais fonônicos³. Especificamente, no caso de ondas mecânicas longitudinais se propagando em estruturas periódicas compostas de dispersores alojados em um meio homogêneo (por exemplo, o ar), os cristais fonônicos são chamados de cristais sônicos ou cristais sonoros⁴. Sendo as primeiras evidências experimentais da presença de *bandgap* em cristais sônicos demonstrada por [Martínez-Sala et al., 1995](#) e [Robertson e Rudy, 1998](#). Importante salientar que embora alguns autores classifiquem os cristais sônicos como os primeiros metamateriais acústicos⁵ (MA) inventados, neste trabalho julgamos que a origem do MA⁶ surge de uma limitação dos cristais sônicos no controle e manipulação das ondas sonoras. Em outras palavras, para que haja interação com as ondas os cristais sonoros exigem que o espaçamento dos dispersores sejam da ordem do comprimento de onda (λ) da onda propagante, como λ aumenta a medida que a frequência diminui, os cristais sonoros exigem grandes dimensões para atuarem em frequências com longos comprimentos de onda ($f \in [10 - 1.000]$ Hz), sendo essa limitação suprimida nos MA devido principalmente a sua delineada configuração geométrica bem como pela forte presença dos efeitos visco-térmicos.

Considerando agora a propagação de ondas mecânicas longitudinais (som) em meios periódicos, importantes estudos foram apresentados por [Bradley, 1991](#), [Sugimoto, 1992](#), [Bradley, 1993, 1994a, 1994b](#) e [Sugimoto e Horioka, 1995](#). Apesar de não atribuir às suas estruturas a terminologia metamaterial acústico, estes autores forneceram importantes contribuições ao demonstrar as ondas de Bloch no campo da física acústica, bem como a relação de dispersão⁷ e estrutura de bandas (*bandgap* e *band-pass*). Portanto, somente no ano 2000 o primeiro estudo sobre um metamaterial acústico periódico atuando no controle e manipulação das ondas sonoras na faixa entre 350 – 2.000 Hz foi apresentado por [Liu et al., 2000](#). Baseado em ressonâncias locais e considerando a periodicidade, a estrutura proposta pelos autores apresentou ampla

³Cristais fonônicos são estruturas que possuem uma periodicidade espacial em suas propriedades acústicas ou mecânicas e projetados especificamente para controlar a propagação de fônons.

⁴Cristais sônicos são estruturas compostas de dispersores sólidos distribuídos periodicamente em um meio hospedeiro. Sendo a impedância dos dispersores maior que a impedância do meio alojador.

⁵Metamateriais acústicos são estruturas periódicas que replicam uma célula unitária primitiva e que apresentam: (i) propriedades efetivas incomuns e (ii) comportamento não encontrado em materiais naturais usuais especialmente para grandes comprimentos de onda, ou seja, maiores que a dimensão da estrutura.

⁶O termo metamaterial foi designado em 1999 por Rodger M. Walser.

⁷A dispersão está associada a dependência não linear com a frequência que o número de onda e a velocidade de fase apresentam. Isso significa que componentes de diferentes frequências do som podem viajar a velocidades diferentes, dependendo das características do meio pelo qual estão se propagando.

lacuna de *bandgap*, cuja constante de rede era da ordem de magnitude menor que o comprimento de onda da frequência de atuação. Desde então diversos estudos sobre o comportamento e as propriedades exibidas nestes materiais tem surgido e permitido novas possibilidades, especialmente no campo de controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras ao longo de todo espectro de frequências.

1.1 Problema e Motivação

Mediante estruturas periódicas com escala de sub-comprimento de onda, perdas visco-térmicas inerentes e extraordinárias propriedades físicas, os MA têm possibilitado um efetivo controle e manipulação das ondas sonoras. Os trabalhos propostos por [Merkel et al., 2015](#), [G. N. Almeida et al., 2024](#), [Romero-García et al., 2020](#), [Jiménez, 2017](#), [Ding et al., 2022](#), [X. Wang e Mak, 2012](#) e [G. N. Almeida et al., 2023](#) corroboram esse aspecto e demonstram que essas estruturas dispersivas são capazes de superar desafios de aplicações e limitações de estruturas convencionais como painéis micro-perfurado e de membrana. Consequentemente, os MA tornaram-se um campo de pesquisa emergente criando um ponto de inflexão na concepção dos materiais acústico. Em particular, essas estruturas se destacam ainda mais quando apresentam parâmetros efetivos não usuais, por exemplo, densidade de massa e módulo de compressibilidade negativos. Portanto, aplicações e investigações adicionais de novas configurações geométricas periódicas são necessárias para melhorar e ampliar as características de controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras principalmente na região das baixas frequências, assim, é latente e se faz necessário avanços no tema.

Em contrapartida, o interesse motivador deste trabalho é que a manipulação, a mitigação e o controle de ondas com longos comprimento de onda sempre foi um desafio por conta das fortes habilidades de difração e penetração destas ondas, além da fraca atenuação em comparação às médias e altas frequências. Além disso, ondas sonoras que se propagam em um meio periódico e dissipativo apresentam características dispersivas e propagação lenta, o que torna muito útil ao se propor materiais acústicos inovadores aplicáveis tanto para a absorção quanto para atenuação sonora.

1.2 Justificativa para desenvolver este trabalho

A partir do contexto acima, justifica-se a necessidade de pesquisas e desenvolvimento de novas estruturas que considerem a periodicidade do meio. Desta forma, a estrutura periódica deste trabalho encontra diversas aplicações práticas de aspecto científico-tecnológico, mas não se limitando a isolamento acústico, filtragem acústica,

sistema de ondas lentas, camuflagem acústica, entre outros.

1.3 Objetivos

Objetivo geral

Esta tese de doutorado lida com ondas que se propagam unidimensionalmente (1D) em meios periódicos, as quais serão frequentemente chamadas de ondas de Bloch, e revela as propriedades acústicas intrínsecas às estruturas propostas. Assim, o objetivo principal desta pesquisa é fornecer uma ampla metodologia de projeto de um metamaterial, cuja perspectiva permite um amplo e efetivo controle e manipulação das ondas sonoras em um amplo espectro de frequências ($f \in [100 - 4.000]$ Hz). Portanto, como será demonstrado, esta metodologia de projeto pode ser aplicada em diversas situações, por exemplo: acústica de salas, setor aeroespacial, clausuras de fontes de ruído e barreira acústica.

Objetivos específicos

- Demonstrar a importância do acoplamento crítico na estrutura, ou seja, a compatibilidade de sua impedância de superfície com a impedância do meio;
- A partir de um método de recuperação de parâmetros efetivos entender melhor os mecanismos físicos subjacente ao comportamento do metamaterial;
- Apresentar a importância da impedância de Bloch e do parâmetro adimensional (g_n/f_n) responsável pelo comportamento das funções de onda de Bloch numa célula unitária do metamaterial acústico;
- Apresentar resultados derivados de aplicações práticas do metamaterial; e,
- Entender a física subjacente ao controle e a manipulação das ondas no metamaterial.

1.4 Contribuições do trabalho

Este trabalho contribui para avanços no campo da física acústica especificamente para a área de controle e manipulação de ondas sonoras que se propagam em meios periódicos e dispersivo, fornecendo uma metodologia de projeto que possibilita efetiva aplicabilidade em problemas práticos de reflexão e transmissão sonora. Ademais, este trabalho fornece novas interpretações sobre o comportamento das ondas de Bloch em metamateriais acústicos, principalmente, por meio da impedância acústica

de Bloch e do parâmetro adimensional que especifica as funções de onda de Bloch nestas estruturas.

1.5 Organização da tese

Uma descrição concisa da organização do conteúdo deste documento é anunciada nesta seção. Portanto, o trabalho foi dividido em nove Capítulos e três Apêndices.

O Capítulo 2 é dedicado a uma revisão de literatura das estruturas acústicas periódicas desenvolvidas para o controle e manipulação das ondas sonoras em problemas de reflexão e transmissão sonora. O Capítulo 3 disserta sobre uma questão fundamental no campo da física acústica, que é a distinção entre as regiões de domínio da acústica iséntropica e da acústica visco-térmica. Demostramos a influência e a importância de se considerar os efeitos visco-térmicos quando ondas sonoras se propagam em geometrias de baixas dimensões. Além disso, introduzimos o modelo de perdas visco-térmicas que será utilizado ao descrever o comportamento das configurações do metamaterial acústico proposto.

O Capítulo 4 introduz os fundamentos básicos da teoria dos meios periódicos, ou seja, a teoria de Bloch-Floquet. É mostrado que a teoria de Floquet pode ser aplicada a qualquer sistema, desde que o mesmo apresente invariância translacional e duas soluções linearmente independente. Portanto, a teoria pode ser aplicada à nossa estrutura desde que a solução do sistema de equações obedeça a condição de ondas de Bloch, isto é, que as funções de onda sejam irrestritamente as funções de Bloch. Além disso, a impedância acústica de Bloch e um parâmetro adimensional responsável pelo comportamento das funções de onda de Bloch, em uma célula unitária do metamaterial, são derivados.

O comportamento da propagação sonora em qualquer sistema acústico pode ser descrita por meio de um vetor de estado $\mathbf{T} = (P, Q)$, sendo este vetor de estado o fundamento do método da matriz de transferência. Nesta perspectiva, matrizes de configurações geométricas usuais, uma matriz de radiação e a obtenção da impedância de um ressonador carregado lateralmente em um guia de ondas são deduzidos e apresentados no Capítulo 5. Além disso, três condições físicas que sob a perspectiva da incidência das ondas sonoras especificam o comportamento de uma estrutura acústica em problema de transmissão também são apresentadas.

O Capítulo 6 introduz os materiais e os métodos usados neste trabalho. Os materiais utilizados para lidar com o controle, mitigação e a manipulação das ondas sonoras são as configurações geométricas periódicas propostas. Por outro lado, os métodos

utilizados são divididos em quatro: (i) modelos matemáticos baseados no método da matriz de transferência considerando integralmente as perdas visco-térmicas na estrutura; (ii) relação de dispersão do metamaterial com base no teorema de Bloch-Floquet associado ao método da matriz de transferência; (iii) modelo numérico baseado no método dos elementos finitos e métodos experimentais normativos; (iv) método de caracterização do metamaterial a partir de dados experimentais.

As discussões conduzidas a partir de diferentes configurações do metamaterial e apoiadas em resultados teórico, numérico e experimental considerando a incidência normal de ondas são apresentadas no Capítulo 7. Além disso, a física implícita ao comportamento do metamaterial é investigada com base no comportamento do campo de pressão, da velocidade de partículas, das perdas visco-térmicas e dos parâmetros efetivos incomuns da estrutura.

O Capítulo 8 apresenta as análises do comportamento de uma configuração do metamaterial que garante simultaneamente passagem de fluxo de ar e desempenho acústico em aplicações práticas. Neste contexto, primeiramente é avaliado o comportamento da perda de transmissão sonora de um painel em tamanho real do metamaterial ventilado em campo difuso. Além disso, um estudo sobre a característica de ventilação e a eficiência de radiação sonora do metamaterial, ou seja, o acoplamento físico entre as vibrações estruturais e o campo acústico do painel também são apresentados. Em seguida, a performance da estrutura ventilada como uma barreira acústica é anunciada. Por fim, blocos do metamaterial ventilado são aplicados na redução de ruídos de um refrigerador residencial. Finalmente, o Capítulo 9 resume o trabalho, mostrando as conclusões mais importantes e introduzindo as possibilidades para trabalhos futuros.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

2 Revisão da literatura

Este capítulo fornece um estado da arte de estruturas, do tipo metamateriais e convencionais, que possibilitam a interação de ondas sonoras com a periodicidade do meio e, conseqüentemente, os fenômenos físicos e as propriedades provenientes desta interação. Neste sentido, serão consideradas estruturas propostas para o controle, mitigação e manipulação de ondas em problemas de reflexão (absorção sonora) e transmissão sonora (perda de transmissão).

2.1 Estruturas periódicas

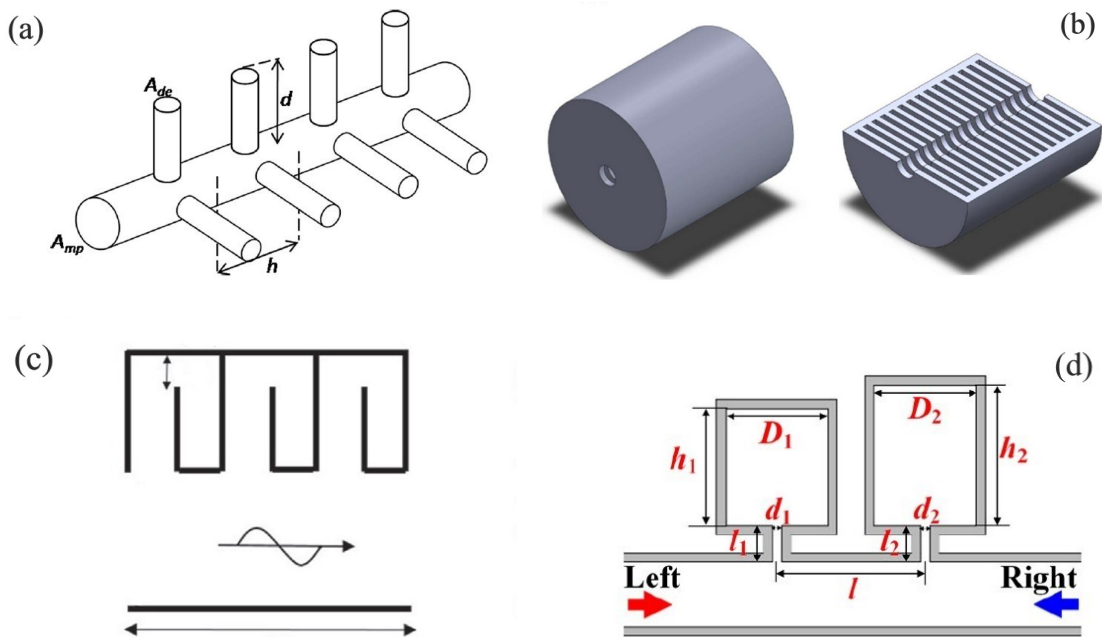
Conforme anunciado, os MA periódicos surgiram em função da limitação dos cristais sônicos, mas, também de uma transição natural dos metamateriais eletromagnéticos, devido principalmente às semelhanças existentes entre algumas propriedades das ondas eletromagnética e mecânica (G. N. Almeida, 2019; Yunker, 2012), conforme ilustrado na Tabela 1. Desde o surgimento dos MA o catálogo de trabalhos tem se tornado abrangente, por exemplo, Leclaire et al., 2015 apresentaram um estudo sobre o efeito da periodicidade na distribuição de cavidades laterais de um poro principal, conforme ilustrado na Figura 1 (a). A presença destas cavidades seja ela longa ou curta altera significativamente a absorção sonora de baixas frequências. Além disso, ou autores demonstraram a redução da velocidade de propagação ($c = 205,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) na estrutura em função do comprimento destas cavidades laterais. Em seguida, Dupont et al., 2018 apresentaram uma estrutura baseada em finos poros anulares conectados periodicamente a um poro principal, conforme mostra a Figura 1 (b). Demonstrando que em baixas frequências a matriz periódica aumenta a compressibilidade efetiva do

Tabela 1: Analogia entre propriedades das ondas eletromagnética e mecânica.

Eletromagnética	Permeabilidade magnética	Permissividade elétrica	Campo elétrico	Campo magnético
Mecânica	Densidade efetiva	Compressibilidade efetiva	Pressão acústica	Velocidade de partícula

meio sem modificar a densidade dinâmica efetiva quando comparada ao caso aperiódico. Além disso, devido a esse efeito o primeiro pico de absorção sonora aparece em uma frequência menor. Yu et al., 2019 investigaram a perda de transmissão sonora (PTS) com um metamaterial periódico que consiste em um largo duto decorado com ressonadores enrolados, conforme apresentado na Figura 1 (c). A atenuação sonora sob incidência normal e oblíqua foi avaliada e demonstrado que o comportamento da PTS é governado principalmente por três fenômenos físicos: banda de parada acústica (*bandgap*), difração de borda e interferência destrutiva de radiação. O mecanismo de absorção sonora e a manipulação acústica assimétrica devido a uma estrutura baseada em duas portas com ressonadores igualmente espaçados, conforme mostrado na Figura 1 (d), foi estudado por Long et al., 2017. A partir de análises teórica, numérica e experimental verificou-se que a energia sonora é quase totalmente absorvida (96,1 %) em 373 Hz quando as ondas incidem de um lado da estrutura, enquanto é amplamente refletida de volta no lado oposto. Sendo este comportamento devido a descombinação da impedância de superfície manipulada com a impedância do meio.

Figura 1: Modelos de estruturas periódicas - parte 1.

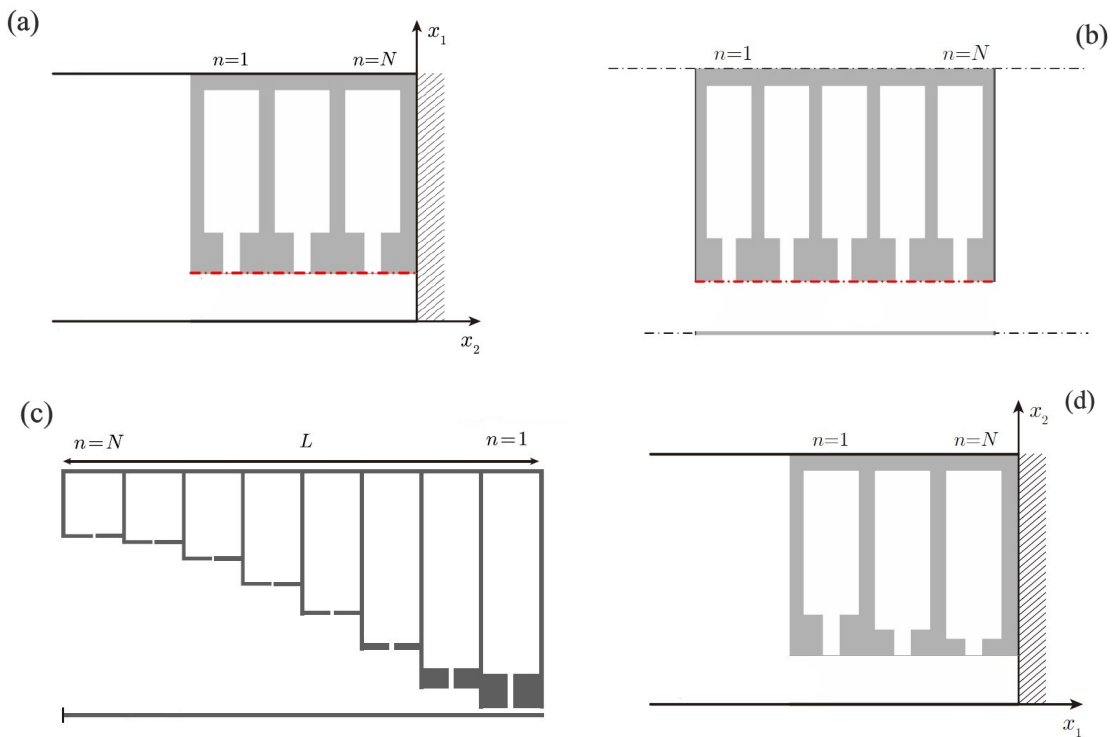


Fonte: Adaptado de: (a) Leclaire et al., 2015, (b) Dupont et al., 2018, (c) Yu et al., 2019 e (d) Long et al., 2017.

Destaque para a estrutura apresentada na Figura 2 (a) proposta por Jiménez et al., 2016, em que usando os conceitos de som lento e acoplamento crítico os autores apresentaram um metamaterial acústico periódico ultra-fino ($\lambda/88$) para absorção sonora perfeita e quase omnidirecional. Além disso, controlando a geometria do guia de ondas principal (fenda) e dos idênticos ressonadores de Helmholtz os autores de-

monstram que as perdas visco-térmicas intrínsecas podem ser ajustada para compensar exatamente o vazamento de energia e alcançar a condição de acoplamento crítico na estrutura. Em seguida, [Jiménez, 2017](#) implementando uma mudança nas condições de contorno da mesma estrutura, consoante apresentado na Figura 2 (b), avaliaram a transmissão sonora e o acúmulo de ressonâncias devido ao fenômeno do som lento ($c \leq 120 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Ademais, a relação de dispersão na estrutura e um acoplamento quasi-crítico simétrico e anti-simétrico foram demonstrados pelos autores. Uma absorção sonora quase perfeita e problema de transmissão sonora foram relatados por [Jiménez, Romero-García et al., 2017](#) mediante um metamaterial composto por um guia de ondas com ressonadores de Helmholtz de dimensões graduadas, conforme exibido na Figura 2 (c). Com base no conceito de acoplamento crítico os autores obtiveram uma absorção sonora quase perfeita em quase duas oitavas de frequências ($f \in [300 - 1.000] \text{ Hz}$) com a estrutura apresentando uma espessura 10 vezes menor que o maior comprimento de onda de atuação. Em seguida, [Jiménez, Groby et al., 2017](#) por meio de um metamaterial com diferentes configurações de ressonadores de Helmholtz periódicos, conforme mostrado na Figura 2 (d), mostraram que numa estrutura de reação local, a absorção sonora perfeita e omnidirecional para uma dada frequência é impossível de ser obtida

Figura 2: Modelos de estruturas periódicas - parte 2.

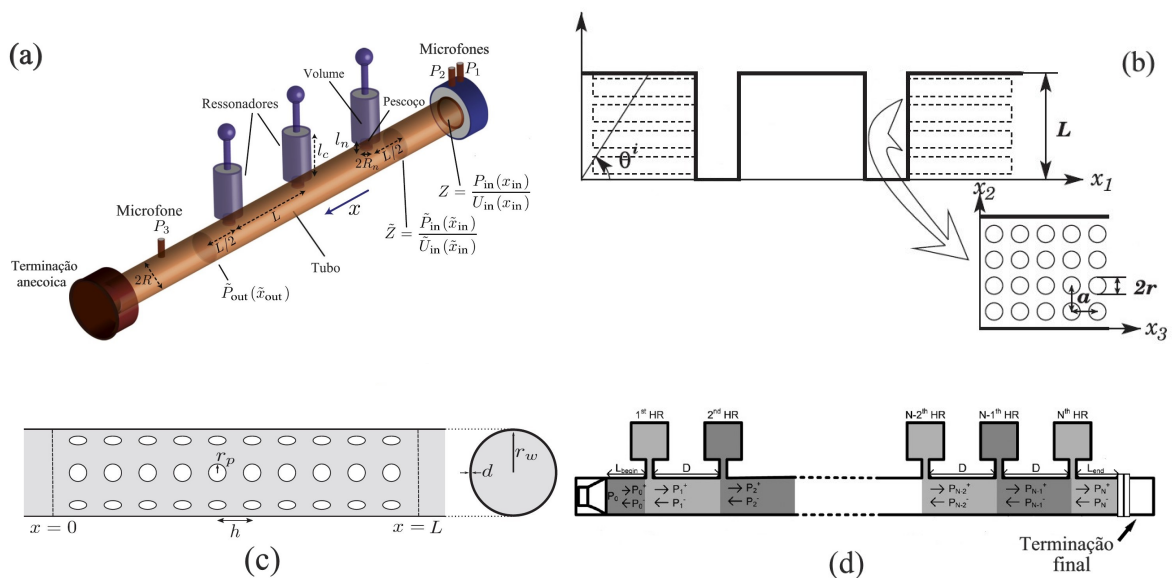


Fonte: Adaptado de: (a) [Jiménez et al., 2016](#), (b) [Jiménez, 2017](#), (c) [Jiménez, Romero-García et al., 2017](#) e (d) [Jiménez, Groby et al., 2017](#).

porque a impedância do metamaterial não depende do ângulo de incidência.

A Figura 3 (a) exibe a estrutura composta de um tubo periodicamente carregado de ressonadores de Helmholtz proposta por Theocharis et al., 2014. Considerando as perdas visco-térmicas e ajustando o ressonador com a lacuna de Bragg os autores estudaram a característica da propagação lenta do som. Enquanto no caso em que as perdas são desconsideradas a sobreposição das lacunas de Bragg resulta na transparência induzida por som lento de uma banda de frequência estreita, a inclusão das perdas impõe limites ao fator de desaceleração e transmissão sonora. Ainda na perspectiva do fenômeno de propagação lenta, Groby et al., 2015 por meio de um arranjo periódico composto por ressonadores de um quarto de comprimento de onda (ver Figura 3 (b)) demonstrou que este fenômeno está associado a dissipação inerente da estrutura. Além disso, revelaram que a desaceleração do som ocorre abaixo da lacuna de banda associada à ressonância dos ressonadores de um quarto de comprimento de onda ($\lambda/4$). Destaques também para a estrutura periódica apresentada por Dell et al., 2023, conforme exibido na Figura 3 (c). O qual forneceram evidências de que perfurações periódicas na parede de um tubo resultam em uma banda proibida de baixa frequência dentro da qual as ondas sonoras atenuam rapidamente. Um estudo sobre a propagação unidimensional de ondas sonoras em um duto com ressonadores de ramificação lateral idênticos montados periodicamente foi apresentado por X. Wang e Mak, 2012. A estrutura é ilustrada na Figura 3 (d) e a partir da teoria de ondas de Bloch e do método da matriz de transferência os autores demonstraram que o acopla-

Figura 3: Modelos de estruturas periódicas - parte 3.

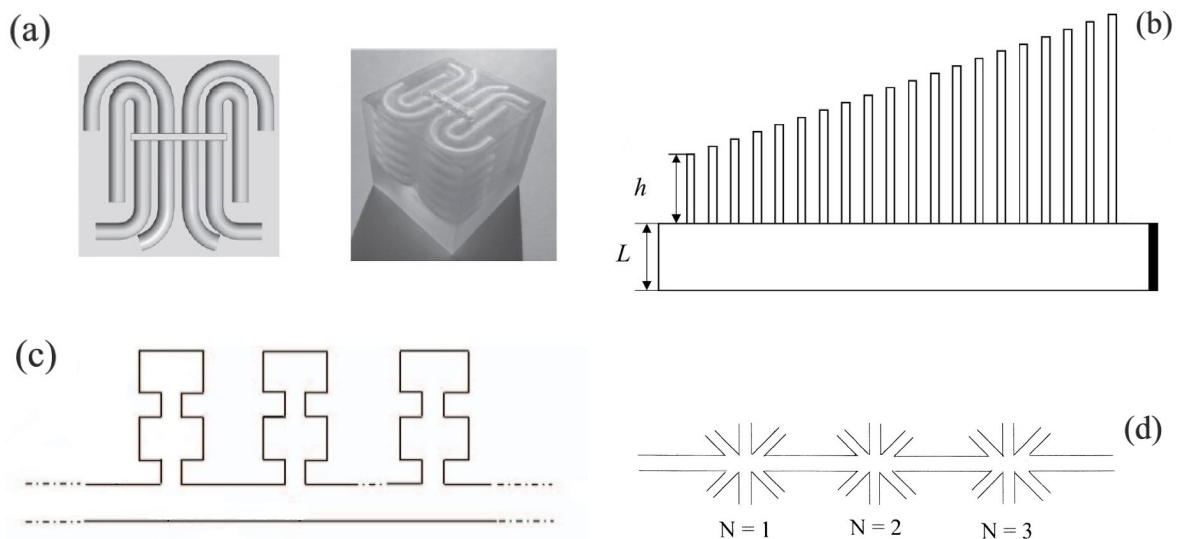


Fonte: Adaptado de: (a) Theocharis et al., 2014, (b) Groby et al., 2015, (c) Dell et al., 2023 e (d) X. Wang e Mak, 2012.

mento das ondas neste sistema periódico resulta na dispersão da banda de frequências, ou seja, nas bandas de parada e passagem. Além disso, demonstram que ressonadores periódicos controlam o ruído de forma mais eficaz, ampliando a largura de banda e aumentando a magnitude da atenuação. [Campos et al., 2018](#) baseado numa configuração semelhante a da Figura 3 (d) e utilizando o teorema de Floquet-Bloch demonstraram que os diagramas de dispersão da estrutura revelam que os intervalos das lacunas de banda são causados pela dispersão de Bragg.

A Figura 4 (a) representa a estrutura apresentada no trabalho de [Groby et al., 2016](#), o qual é uma referência sobre arranjos periódicos de canais retangulares com ressonadores de $\lambda/4$ desafinados. Os autores demonstram que absorção sonora perfeita de baixas frequência alcançada na estrutura se deve ao acoplamento crítico e a propagação sonora lenta ($c \approx 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) nos canais retangulares. Do ponto de vista de estruturas baseadas em ressonadores de $\lambda/4$ periódicos, [Liao et al., 2023](#) com base num método de otimização hierárquica apresentaram a estrutura exibida na Figura 4 (b), a qual garante uma absorção sonora quase perfeita e plana entre 1.000 – 1.800 Hz. [Khettabi e Elmalki, 2017](#) apresentaram um estudo sobre a relação de dispersão e a perda de transmissão sonora de uma estrutura baseada em ressonadores de Helmholtz duplos (2 graus de liberdade) dispostos periodicamente, conforme ilustrado na Figura 4 (c). [Kushwaha et al., 1998](#) relataram a estrutura de banda e o espectro de transmissão considerando a propagação sonora 1D em um sistema composto de N ramos laterais pendentes acoplados periodicamente em um tubo fino com água, conforme apresen-

Figura 4: Modelos de estruturas periódicas - parte 4.

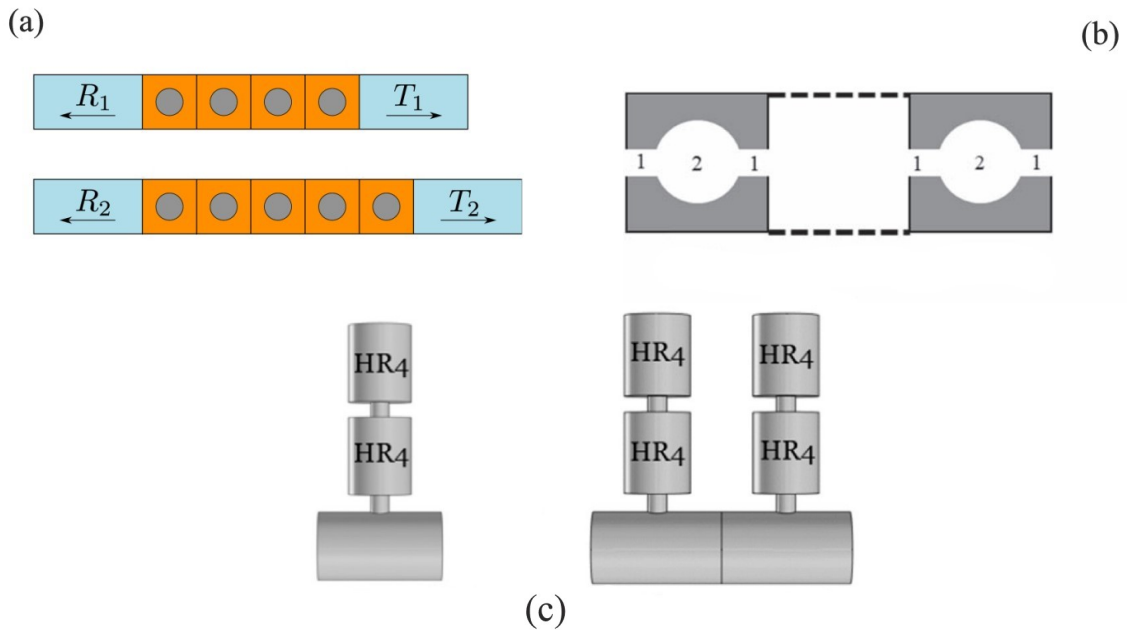


Fonte: Adaptado de: (a) [Groby et al., 2016](#), (b) [Liao et al., 2023](#), (c) [Khettabi e Elmalki, 2017](#) e (d) [Kushwaha et al., 1998](#).

tado na Figura 4 (d). Consequentemente, os autores mostraram que a estrutura tem consequências importantes na supressão de ruídos de baixa frequências e filtragem.

As propriedades de bandas de parada (*bandgap*) e de passagem (*bandpass*) através de estruturas periódicas foram especificamente estudas por [Boström, 1983](#) e [Munday et al., 2002](#). Além disso, um estudo teórico sobre a perda de transmissão sonora em baixas frequência por meio de metamateriais periódicos foi apresentado por [Zanoni, 2023](#). Por fim, destaca-se as estruturas exibidas na Figura 5 (a) - (c) oriundas respectivamente dos trabalhos de [Roux et al., 2020](#), [Seçgin e Baygün, 2019](#) e [Jena et al., 2019](#). Que além de avaliar o comportamento dos coeficientes de reflexão e/ou transmissão destas estruturas, a partir destes coeficientes e usando um método de recuperação os autores apresentaram análises sobre os parâmetros efetivos, ou seja, impedância característica, densidade, índice de refração e *bulk modulus* (módulo de compressibilidade), para melhor compreender os mecanismos físicos subjacentes a estas estruturas.

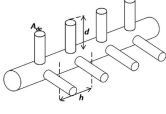
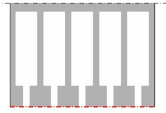
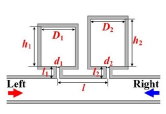
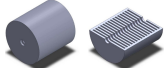
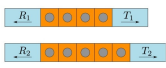
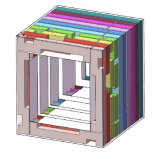
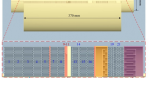
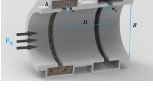
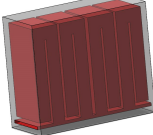
Figura 5: Modelos de estruturas periódicas - parte 5.



Fonte: Adaptado de: (a) [Roux et al., 2020](#), (b) [Seçgin e Baygün, 2019](#) e (c) [Jena et al., 2019](#).

Por fim, afim de estimar inicialmente a contribuição desta pesquisa, mapeamos alguns estudos sobre estruturas comuns ou do tipo MA periódicos na última década, conforme elencado na Tabela 2. Note que listamos uma série de parâmetros físicos e propriedades consideradas importantes nestas pesquisas, os quais se concentram em três áreas: (i) controle e manipulação das ondas; (ii) propriedades efetivas e (iii) invariância de reflexão. Note que diferentemente dos trabalhos 1 a 11, o trabalho proposto é mais abrangente, de modo que a estrutura proposta é mais versátil, contribuindo para uma ampla análise dos parâmetros físicos e das propriedades de interesse.

Tabela 2: Parâmetros e propriedades consideradas importantes: Coeficientes de reflexão (R) e transmissão (τ). Número de onda de Bloch (q) e velocidade de fase ($\tilde{c}_p$). Módulo de compressibilidade efetiva (K_{eff}) e densidade de massa efetiva (ρ_{eff}).

	Configuração geométrica	Controle e Manipulação das ondas				Propriedades efetivas negativas	Invariância de reflexão	Referência
		R	τ	q	$\tilde{c}_p$			
						K_{eff} e ρ_{eff}	$R^+ = R^-$ $\tau^+ = \tau^-$	
1		Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Leclaire et al., 2015
2		Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Groby et al., 2016
3		Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Jiménez, 2017
4		Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Long et al., 2017
5		Sim	Não	Não	Não	Não	Não	Dupont et al., 2018
6		Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Yu et al., 2019
7		Sim	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Roux et al., 2020
8		Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Dell et al., 2023
9		Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	T. Wang et al., 2023
10		Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	T. Wang et al., 2023
11		Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Gao et al., 2023
12		Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Este trabalho

2.2 Síntese do capítulo

Neste capítulo, sobre o prisma de estruturas acústicas periódicas uma revisão da literatura foi apresentado. Primeiramente, apresentamos estruturas que possibilitam o controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras com extraordinárias propriedades físicas. Em geral, as propriedades que se destacaram nestas estruturas foram as bandas de frequências proibidas e a propagação lenta ou velocidade de fase reduzida. Em seguida, foram apresentados trabalhos que a partir de um método de recuperação ou caracterização forneceram uma melhor compreensão da física subjacente ao comportamento de estruturas periódicas. Portanto, é notório que a característica de banda (*bandgap* e/ou *bandpass*) nestas estruturas está associada ao(s) dispersor(es) que compõe a estrutura e a sua periodicidade, por outro lado, a propagação lenta depende da configuração geométrica combinada às perdas visco-térmicas. Desta forma, uma exposição sobre a acústica visco-térmica será introduzida em detalhes no Capítulo [3](#).

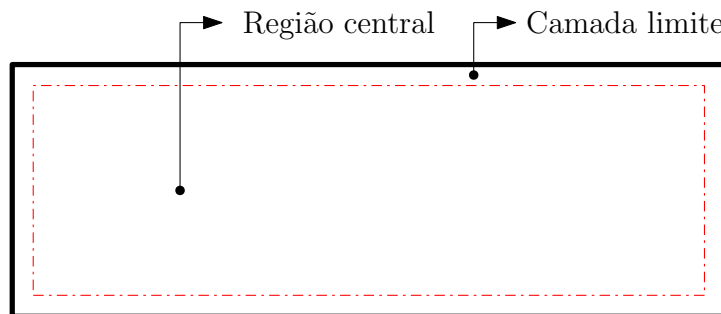
3 Acústica visco-térmica

A propagação de ondas sonoras em geometrias que apresentam área de seção transversal pequena, da ordem de $1,0 - 100 \text{ mm}^2$, é uma questão fundamental em diversas situações da acústica. Neste caso, a propagação é fortemente influenciada pelos efeitos visco-térmicos, uma vez que estes efeitos decorrem dos fenômenos de atrito viscoso e difusão térmica no fluido que permeia o interior da geometria. Assim, a acústica visco-térmica descreve melhor a física do problema em comparação a acústica isentrópica (sem perdas), neste caso, a entropia mantém-se constante ($DS/Dt = 0$). Nesta aspecto, um estado da arte sobre a acústica visco-térmica será inicialmente apresentado neste capítulo. Em seguida, o modelo de perdas visco-térmicas do Stinson que será incorporado ao modelo matemático que descreverá o comportamento das estruturas do metamaterial desenvolvido neste trabalho será detalhado.

3.1 Introdução

Considerando uma geometria arbitrária de seção transversal pequena ($1,0 - 100 \text{ mm}^2$) na qual uma onda se propaga, o seu domínio pode ser dividido em duas regiões, conforme apresentado na Figura 6. A região central a qual pode ser descrita com precisão pela acústica isentrópica e a região da camada limite, a qual exige um modelo de acústica visco-térmica para descrever com precisão a física das perdas viscosas e térmicas. Portanto, a camada limite ocupa uma região substancial do domínio, de modo que altera o comportamento da pressão e do gradiente de pressão local.

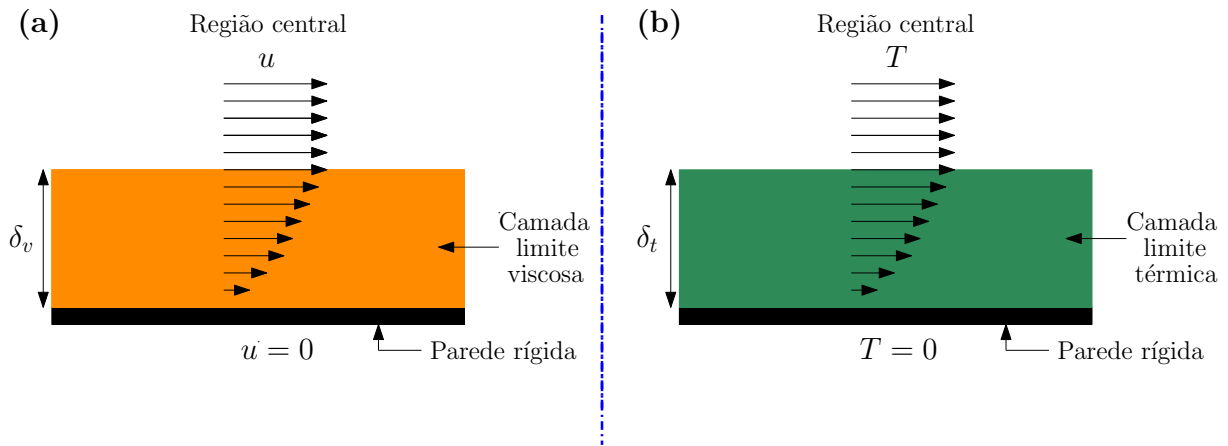
Figura 6: Seção transversal da geometria arbitrária dividida em duas regiões distintas.



Fonte: O autor.

A perda viscosa está associada à viscosidade do ar, a qual se opõe aos gradientes de velocidade (∇u) criando forças opostas. Imagine a propagação de uma onda harmônica em um tubo de baixa dimensão, as partículas do ar na região central oscilam para frente e para trás em resposta ao fenômeno ondulatório, em contrapartida, as partículas adjacentes às paredes rígidas do tubo as aderem. Desta forma, uma transição deve ocorrer para que a amplitude de oscilação das partículas diminua seu valor nominal na região central para zero nas paredes do tubo, e esta região é a camada limite viscosa (δ_v). Por outro lado a perda térmica está associada à condutividade térmica do ar, a qual é proporcional ao gradiente de temperatura (∇T). De forma similar, na região central da geometria as compressões e rarefações do ar ocorrem sem transferência de calor (processo adiabático), porém, nas proximidades das paredes do tubo o processo é isotérmico uma vez que há efetivamente uma fonte ou dissipador de calor. Assim, as partículas adjacentes apresentam a mesma temperatura das paredes, ou seja, variações na temperatura do ar adjacente será imediatamente extinta devido ao fluxo de calor. Portanto, existe uma região que caracteriza a mudança entre os processos adiabático e isotérmico, sendo esta região a camada limite térmica (δ_t) (Kampinga, 2010). Note que uma representação da física das perdas visco-térmicas é ilustrada na Figura 7.

Figura 7: Representação da física dos efeitos visco-térmicos. (a) Camada limite viscosa e (b) camada limite térmica.



Fonte: Adaptado de Schmitt, 2023.

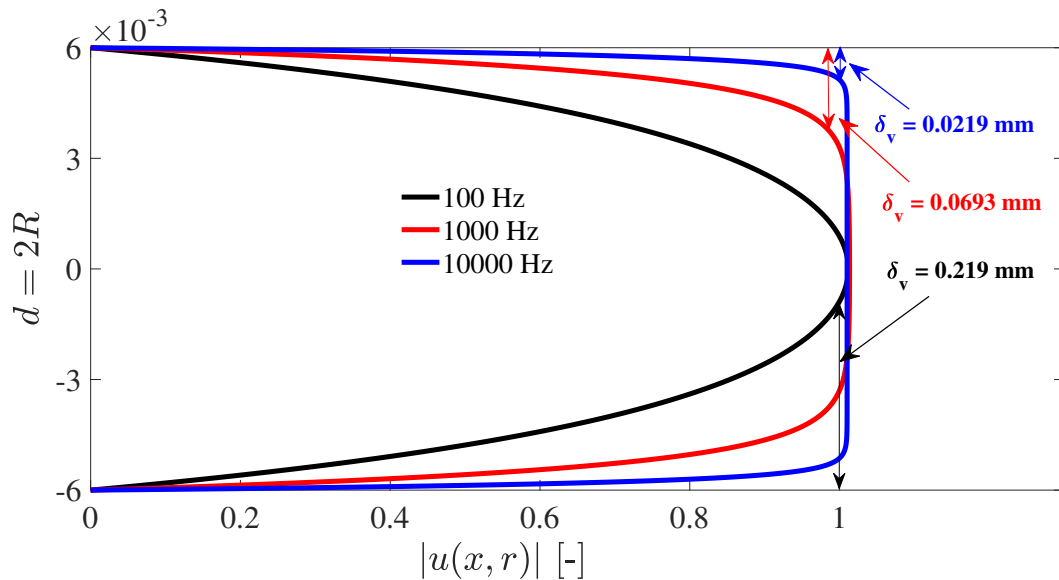
Importante destacar que as camadas limites viscosa e térmica possuem uma espessura que depende da frequência, considerando o ar o fluido que permeia o interior do tubo, estas espessuras são obtidas, respectivamente, como (Blackstock, 2000),

$$\delta_v = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0}} \approx \frac{2,19}{\sqrt{f}} \text{ [mm]} \quad ; \quad \delta_t = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0 Pr}} \approx \frac{2,60}{\sqrt{f}} \text{ [mm]}. \quad (1)$$

Para ilustrar melhor o fenômeno físico deste problema, o perfil de velocidade

axial em um tubo circular de 6 mm de raio foi implementado. Neste sentido, leitores interessados na formulação que descreve o comportamento dos perfis de velocidade e temperatura bem como na natureza destes perfis em função do número de onda de cisalhamento podem consultar os trabalhos de [Barbosa, 2017](#); [Mareze, 2013](#); [Tijde-man, 1975](#). A Figura 8 exibe o comportamento do perfil da velocidade para diferentes frequências, de modo que os limites do eixo vertical representam a parede rígida do tubo e as magnitudes estão normalizadas pela amplitude de velocidade no centro do tubo. Observe que as velocidades são nulas na parede e aumentam na direção do centro a medida que a frequência aumenta. Além disso, a região que caracteriza a camada limite viscosa aumenta a medida que a frequência diminui (ver setas verticais). Comportamento similar ocorre com o perfil de temperatura e a camada limite térmica, conforme pode ser consultado nos trabalhos de [Barbosa, 2017](#) e [Mareze, 2013](#).

Figura 8: Perfil da velocidade de partículas num tubo circular em função da frequência.



Fonte: O autor.

3.2 Breve história da acústica visco-térmica

O primeiro trabalho sobre a propagação de ondas sonoras em tubos com baixa dimensão foi apresentado por [Kirchhoff, 1868](#), de modo que as equações de Navier-Stokes linearizadas completas, ou seja, a conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e energia, foram desacopladas em modos acústicos, vorticais e entrópicos independentes. Sendo estes modos acoplados somente pelas condições de contorno da geometria. Desta forma, a decomposição proposta por Kirchhoff permitiu que o autor estudasse os efeitos da viscosidade e da condutividade térmica na

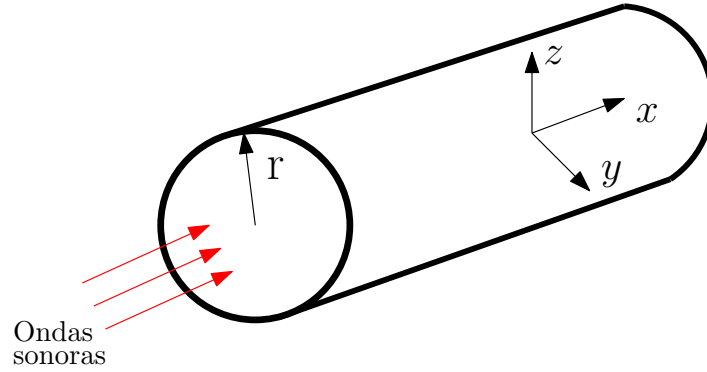
propagação e atenuação sonora em tubos cilíndricos. Em seguida [Rayleigh, 1894](#) revisou o trabalho de Kirchhoff e incluiu a propagação em tubos mais estreitos. Neste caso, ele simplificou o problema ao considerar um processo isotérmico em toda a seção transversal do tubo, onde apenas a viscosidade necessitava ser considerada. Posteriormente, [Zwikker e Kosten, 1949](#) propuseram uma solução aproximada que ficou conhecida como modelo de baixa frequência reduzida *LRF* (*Low Reduced Frequency*), cujas premissas são: (i) o comprimento de onda acústico deve ser muito maior que o comprimento característico do tubo e (ii) o comprimento de onda deve ser maior que a espessura da camada limite. Assim, os efeitos da viscosidade e condutividade térmica foram abordados distintamente e resumidos em funções complexas da densidade e compressibilidade. Sendo que, a proposta apresentou-se coerente somente para altas e baixas frequências. [Iberall, 1950](#) com base nas premissas do modelo *LRF* apresentou uma investigação teórica da atenuação da pressão acústica em um tubo de transmissão com área de seção transversal de 5 mm^2 . Posteriormente, [Tijdeman, 1975](#) avaliou a propagação de ondas em tubos cilíndricos por meio da implementação numérica, seu modelo também baseou-se nas premissas do modelo *LRF*. Por considerar que a pressão sonora é constante em toda a seção transversal e, conseqüentemente, dividir as equações em direções transversal e propagacional por meio de uma constante de propagação que descreve o comportamento da amplitude e fase na direção de propagação. Tijdeman demonstrou que a abordagem *LRF* é a melhor solução para uma ampla faixa de frequências. Desta forma, o autor ratificou a influência dos efeitos da viscosidade e condutividade térmica do fluido na propagação sonora.

Por fim, uma abordagem alternativa e mais ampla foi então proposta por [Stinson, 1991](#), em que a partir das equações da solução exata de Kirchhoff e reduzindo as soluções de Zwikker e Kosten, o autor exibiu uma formulação de propagação de ondas em tubos de seção transversal qualquer. Sendo as perdas visco-térmicas consideradas mediante as funções densidade e compressibilidade efetivas complexas e dependentes da frequência.

3.3 Acústica visco-térmica de Stinson

Considere um tubo cilíndrico de raio r , contendo um gás ideal (ar) com viscosidade dinâmica absoluta η e condutividade térmica κ , cuja direção axial é $\hat{x}$ e direção radial $\hat{r}$, conforme ilustrado na Figura 9. As quantidades físicas envolvidas na descrição de estado deste gás são: a pressão P , a temperatura T_e , a densidade ρ e a velocidade de partículas v . As relações de primeira ordem entre essas variáveis são dadas

Figura 9: Tubo circular com direção axial $\hat{x}$ ao longo da qual a onda se propaga e a direção radial $\hat{r}$.



Fonte: O autor.

respectivamente pela: equação de Navier-Stokes linearizada; equação da conservação da massa e pela equação que descreve a condução térmica no gás:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla P + \frac{4}{3}\eta \nabla(\nabla \cdot v) - \eta \nabla \times (\nabla \times v), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot v, \quad (3)$$

$$\kappa \nabla^2 T_e = \frac{T_0}{P_0} \left(\rho_0 C_v \frac{\partial P}{\partial t} - P_0 C_p \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \quad (4)$$

sendo ρ_0 , T_0 e P_0 a densidade de equilíbrio, a temperatura e a pressão do ar, respectivamente. C_v é o calor específico a volume constante, C_p o calor específico a pressão constante, e o operador ∇ é o gradiente. Além disso, a equação de estado de um gás ideal é dado por,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \left(\rho_0 \frac{\partial T_e}{\partial t} + T_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (5)$$

Assumindo perturbações harmônicas temporal ($e^{j\omega t}$) para todas as variáveis, em que ω é a frequência angular e $j = \sqrt{-1}$. As grandezas complexas p , δ , τ_t e $\bar{v}$, representando a pressão sonora, a variação da densidade, a variação da temperatura e da velocidade de partícula, respectivamente, são introduzidas pelas equações abaixo:

$$P(t) = P_0 + \text{Re}\{pe^{j\omega t}\}, \quad (6)$$

$$\rho(t) = \rho_0 + \text{Re}\{\delta e^{j\omega t}\}, \quad (7)$$

$$T_e(t) = T_0 + \text{Re}\{\tau_t e^{j\omega t}\}, \quad (8)$$

$$v(t) = v_0 + \text{Re}\{\bar{v}e^{j\omega t}\}. \quad (9)$$

Note que na Equação 9 a velocidade ambiente é nula ($v_0 = 0$). Consequentemente, as Equações 2 - 5, assumem a seguinte forma,

$$j\omega\rho_0\bar{v} = -\nabla p + \frac{4}{3}\eta\nabla(\nabla\cdot\bar{v}) - \eta\nabla\times\nabla\times\bar{v}, \quad (10)$$

$$j\omega\delta = -\rho_0\nabla\cdot\bar{v}, \quad (11)$$

$$\kappa\nabla^2\tau_t = \frac{j\omega T_0}{P_0}(\rho_0 C_v p - P_0 C_p \delta), \quad (12)$$

$$p = \frac{P_0}{\rho_0 T_0}(\rho_0 \tau_t + T_0 \delta). \quad (13)$$

As Equações 10 - 13 são gerais e não se limitam a tubos circulares somente. Entretanto, determinar uma solução destas equações para o caso de tubos com área de seção transversal arbitrária onera um trabalho formidável. A solução exata dada por Kirchhoff é válida para tubos circulares estreitos, largos e muito largos. Contudo, uma simplificação considerável da solução de Kirchhoff pode ser obtida ao restringir-se para o caso de tubos estreitos e largos apenas. A simplificação das equações gerais tornam-se então aplicáveis a tubos de seção qualquer. Para isso, três características⁸ da solução para tubos circulares, dentro do regime estreito e largo, são de grande importância nesta simplificação, a saber:

(i) A pressão sonora p não varia de forma significativa através da seção transversal de tubos de seção transversal qualquer, ou seja, p tem dependência apenas na direção axial $\hat{x}$;

(ii) A variação da densidade δ e da pressão sonora p apresentam magnitude comparável quando comparados com ρ_0 e P_0 , respectivamente. Ou seja, os dois termos serão iguais em magnitude para condições isotérmicas e diferentes por um fator $\gamma = 1,4$ para condições adiabáticas, assim, assume-se que;

$$\frac{\delta}{\rho_0} \approx \frac{p}{P_0}. \quad (14)$$

(iii) Para o regime que inclui tubos circulares estreitos e largos, a constante de propagação ($m_{\text{ef}} = jk_{\text{ef}}$) é muito menor que alguns termos, sendo k_{ef} o número de onda complexo efetivo. Por outro lado, para tubos com área de seção qualquer, m_{ef} apresenta valor desprezível em relação a outros termos.

⁸Para mais detalhes sobre a discussão física e o desenvolvimento matemático, a referência Stinson, 1991 pode ser consultada.

A partir destas três hipóteses e sendo a velocidade de partículas composta de duas componentes, ou seja, $\vec{v} = q\hat{r} + u\hat{x}$, Stinson propôs sua formulação de propagação de ondas em tubos de seção qualquer, no qual considerou que a equação da força de Navier-Stokes (Equação 10) pode ser reescrita em relação a componente $\hat{x}$ como,

$$\nabla^2 u - \frac{j\omega u}{\nu} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{1}{3} \eta \nabla \cdot \vec{v} \right), \quad (15)$$

sendo $\nu = \eta / \rho_0$ a viscosidade cinemática do ar ou difusividade da quantidade de movimento. O termo envolvendo $(\nabla \cdot \vec{v})$ pode ser negligenciado, uma vez que este termo contribui menos que a pressão p , haja visto que p e u na Equação 15 variam apenas em relação a $\hat{x}$, enquanto $\vec{v}$ varia em relação a $\hat{r}$ e $\hat{x}$. Além disso, assumindo que a pressão tem a forma $p = P_0 e^{m_{\text{ef}} x}$ e tomando sua derivada em relação a x , a Equação 15 torna-se

$$\nabla^2 u - \frac{j\omega u}{\nu} = \frac{m_{\text{ef}}}{\eta} p. \quad (16)$$

Devido às condições de contorno a velocidade u deve ser identicamente zero no perímetro da seção do tubo, além disso, uma variável generalizada é introduzida por meio de

$$u = -\frac{m_{\text{ef}} p}{j\omega \rho_0} \psi. \quad (17)$$

Assim, após um desenvolvimento matemático e algumas considerações⁹ a Equação 16 torna-se,

$$\nabla^2 \psi - \left(\frac{j\omega}{\nu} \right) \psi = -\frac{j\omega}{\nu}. \quad (18)$$

Observe que ψ se torna uma solução para a Equação 18 desde que satisfaça as condições de contorno do problema, ou seja, $\psi = 0$ nas paredes da seção transversal do tubo. Consequentemente, a Equação 18 fornece a base para o cálculo das características de propagação de ondas em tubos de seção transversal qualquer, conforme veremos a seguir.

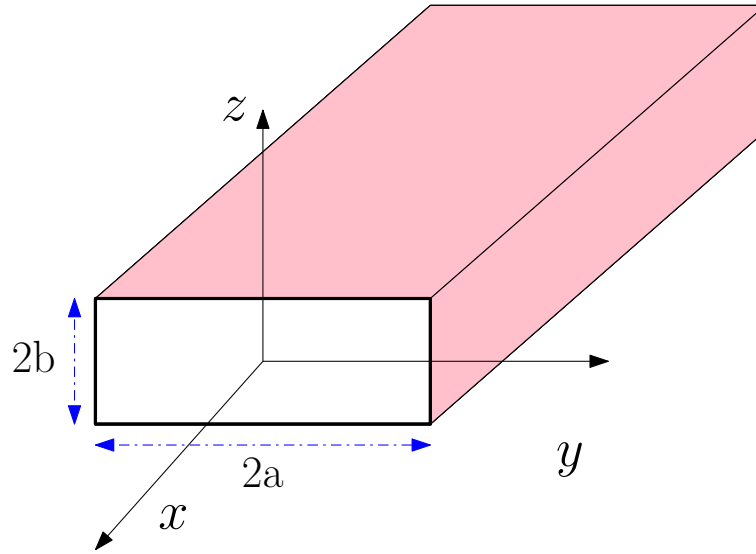
3.3.1 Seção transversal retangular

Considere o caso de um tubo de paredes rígidas e de seção transversal retangular no plano yz , no qual apresenta uma largura $2a$ na direção y e uma altura $2b$ na direção z , conforme mostrado na Figura 10. Neste contexto, a Equação 18 torna-se,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{j\omega}{\nu} \psi = -\frac{j\omega}{\nu}. \quad (19)$$

⁹Tais considerações baseia-se na teoria de Kirchhoff, 1868 e são discutidas na referência Stinson, 1991.

Figura 10: Perspectiva de um tubo de seção transversal retangular com as coordenadas usadas nas análises.



Fonte: O autor.

Admitindo para a solução de ψ uma expansão do tipo,

$$\psi(y, z) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} A_{ut} \cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z), \quad (20)$$

sendo α_u e β_t constantes dadas por:

$$\alpha_u = \left(u + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} \quad ; \quad \beta_t = \left(t + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{b}. \quad (21)$$

Cada termo da Equação 20 satisfaz as condições de contorno $\psi = 0$ em $y = \pm a$ e em $z = \pm b$, e juntos formam um conjunto completo de funções básicas, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -A_{ut} \alpha_u^2 \cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z), \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -A_{ut} \beta_t^2 \cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z). \quad (23)$$

Substituindo as Equações 22 e 23 na Equação 19 obtém-se

$$\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} A_{ut} \left(\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega}{\nu} \right) \cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z) = \frac{j\omega}{\nu}. \quad (24)$$

Os coeficientes (A_{ut}) podem ser avaliados fazendo uso da propriedade da ortogonalidade, ou seja, multiplicando ambos lados da Equação 24 por $(\cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z))$ e integrando ao longo das dimensões do tubo, isto é,

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{ut} \left(\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega}{\nu} \right) \cos^2(\alpha_u y) \cos^2(\beta_t z) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{j\omega}{\nu} \cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z). \quad (25)$$

Utilizando algumas propriedades trigonométricas e resolvendo as integrais acima, tem-se que,

$$A_{ut} = \frac{j\omega}{vab} \frac{4(-1)^u(-1)^t}{\alpha_u\beta_t(\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega}{v})}. \quad (26)$$

A partir da Equação 26, a Equação 20 que é a solução da Equação 19 é reescrita da seguinte forma,

$$\psi(y, z) = \frac{4j\omega}{vab} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^u(-1)^t \cos(\alpha_u y) \cos(\beta_t z)}{\alpha_u\beta_t(\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega}{v})}. \quad (27)$$

As perdas visco-térmicas são representadas pelas funções efetivas da densidade e da compressibilidade que é o inverso do módulo de compressibilidade, ambas são complexas e dependentes da frequência e são, respectivamente, escrita da seguinte forma (Allard & Atalla, 2009; Stinson, 1991),

$$\rho_{\text{ef}} = -\frac{\rho_0}{F(\nu)}, \quad (28)$$

$$C_{\text{ef}} = \frac{1}{K_{\text{ef}}} = \frac{1}{\gamma P_0} [\gamma - (\gamma - 1)F(\frac{\nu'}{\gamma})], \quad (29)$$

no qual $\nu' = \kappa/\rho_0 C_v$ é a constante de difusividade, γ representa a relação de calor específico e $F(\nu)$ uma função que depende da geometria do tubo. No caso de tubos retangulares $F(\nu) = \langle \psi(y, z) \rangle$, ou seja, esta função é obtida fazendo a média da Equação 27 sobre a seção transversal do tubo

$$F(\nu) = \langle \psi(y, z) \rangle = \frac{1}{A_{tt}} \oint \psi(x, y) dA, \quad (30)$$

em que A_{tt} é a área de seção transversal do tubo retangular. Sendo assim, $F(\nu)$ torna-se

$$F(\nu) = \frac{4j\omega}{va^2b^2} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\alpha_u^2 \beta_t^2 \left[\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega}{v} \right] \right)^{-1}. \quad (31)$$

Desta forma, as Equações 28 e 29 são reescritas da seguinte maneira

$$\rho_{\text{ef}} = -\rho_0 \frac{va^2b^2}{4j\omega} \left[\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left[\alpha_u^2 \beta_t^2 \left(\alpha_u^2 + \beta_t^2 - \frac{j\omega}{v} \right) \right]^{-1} \right]^{-1}, \quad (32)$$

$$C_{\text{ef}} = \frac{1}{P_0} \left[1 - \frac{4j\omega(\gamma - 1)}{\nu' a^2 b^2} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left[\alpha_u^2 \beta_t^2 \left(\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega\gamma}{\nu'} \right) \right]^{-1} \right]^{-1}. \quad (33)$$

É muito comum utilizar-se o módulo de compressibilidade efetivo, o qual é escrito da seguinte forma,

$$K_{\text{ef}} = \frac{\eta K_0 a^2 b^2}{\gamma \eta a^2 b^2 - 4j(\gamma - 1)Pr\rho_0\omega \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left[\alpha_u^2 \beta_t^2 \left(\alpha_u^2 + \beta_t^2 + \frac{j\omega Pr\rho_0}{\eta} \right) \right]^{-1}}. \quad (34)$$

Sendo $K_0 = \gamma P_0$ e $Pr = \gamma \nu / \nu'$ o módulo de compressibilidade isentrópico do ar e o número de Prandtl, respectivamente. Importante destacar que os termos de ordem superior dos somatórios nas Equações 32, 33 e 34 podem ser desprezíveis, sendo assim a soma infinita pode ser reduzida a um número finito de termos suficientes para se obter uma solução precisa. Desta forma, se a faixa de frequência analisada for inferior a 2.000 Hz por exemplo, pode-se assumir $u = t \leq 200$ (G. N. Almeida, 2019).

As funções densidade e compressibilidade caracterizam um fluido equivalente, e como se observa, são dependentes da frequência e da área de seção transversal do tubo. Assim, a partir destas duas funções pode-se determinar a constante de propagação acústica e a impedância característica do meio, as quais são obtidas, respectivamente, da seguinte forma

$$m_{ef} = jk_{ef} = j\omega \sqrt{\rho_{ef} C_{ef}}, \quad (35)$$

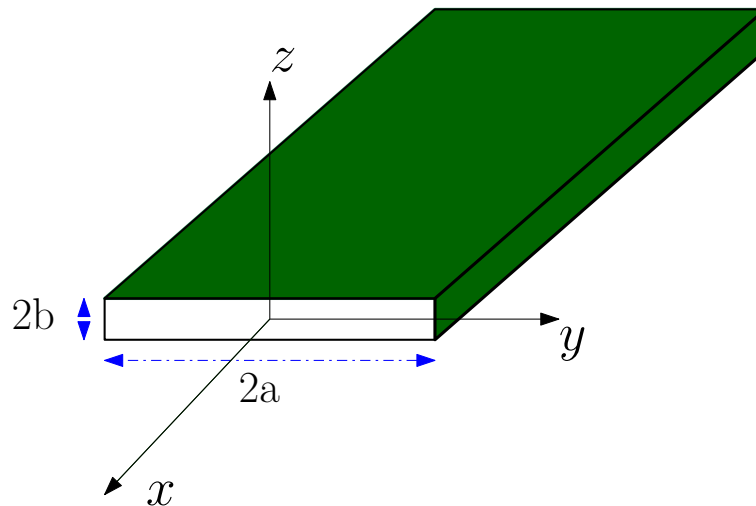
$$Z_{ef} = \sqrt{\frac{\rho_{ef}}{C_{ef}}}. \quad (36)$$

Destaque para a Equação 35 cuja parte real caracteriza a propagação sonora no tubo, enquanto a parte imaginária representa a atenuação, isto é, o decaimento da amplitude da onda na direção de propagação (Basu et al., 2018).

3.3.2 Seção transversal tipo fenda

Considere agora um tubo com seção transversal do tipo fenda que apresenta um lado muito maior que outro ($a \gg b$), conforme ilustrado na Figura 11. As equações da densidade e compressibilidade efetivas assumem outra forma. Portanto, o termo

Figura 11: Perspectiva de uma fenda de seção transversal $2a \times 2b$.



Fonte: O autor.

α_u^2 entre parênteses na Equação 31 pode ser descartado. A partir das definições da Equação 21 esta simplificação nos fornece uma nova função $F(\nu)$, ou seja,

$$F(\nu) \approx \frac{4j\omega b^2}{\nu\pi^6} \sum_{u=0}^{\infty} \left(u + \frac{1}{2}\right)^{-2} \times \sum_{t=0}^{\infty} \left(t + \frac{1}{2}\right)^{-2} \left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{j\omega b^2}{\nu\pi^2} \right]^{-1}. \quad (37)$$

Os dois somatórios na equação acima podem ser avaliadas e reescritos, nos fornecendo então (Stinson, 1991)

$$F(\nu) = 1 - \left(\frac{j\omega b^2}{\nu}\right)^{-1/2} \times \tanh\left(\frac{j\omega b^2}{\nu}\right)^{1/2}. \quad (38)$$

A partir da Equação 38, as funções densidade (Equação 28) e compressibilidade (Equação 29) para uma seção transversal do tipo fenda podem ser reescritas como

$$\rho_{\text{ef}} = \rho_0 \left[1 - \frac{\tanh\left(b\sqrt{\frac{j\omega}{\nu}}\right)}{\left(b\sqrt{\frac{j\omega}{\nu}}\right)} \right]^{-1}, \quad (39)$$

$$C_{\text{ef}} = \frac{1}{\gamma P_0} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{\tanh\left(b\sqrt{\frac{j\omega Pr}{\nu}}\right)}{\left(b\sqrt{\frac{j\omega Pr}{\nu}}\right)} \right]. \quad (40)$$

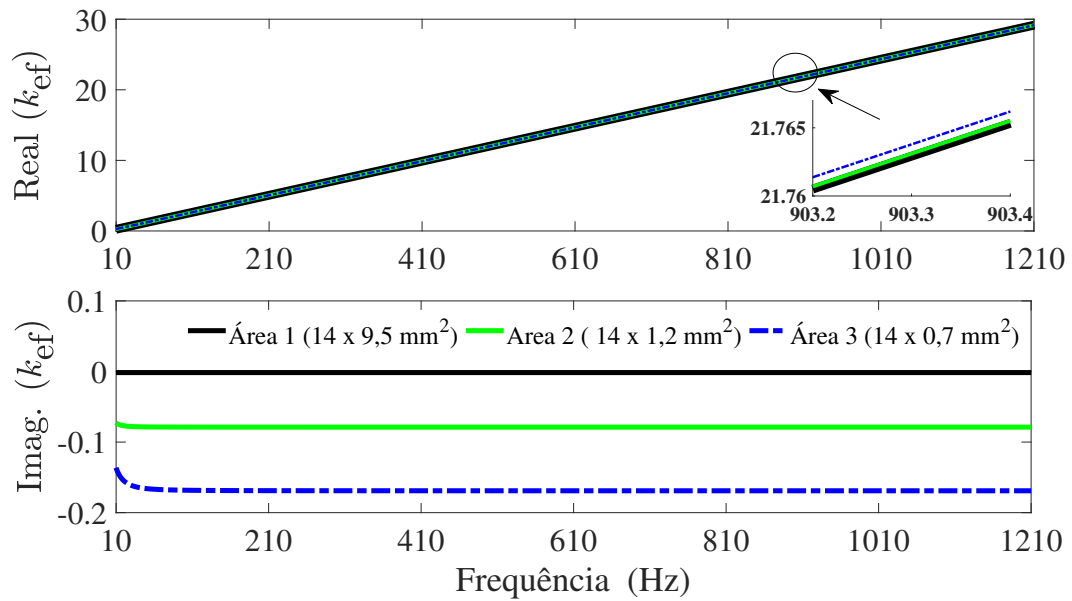
Naturalmente a partir da Equação 40 obtém-se o módulo de compressibilidade para seção tipo fenda

$$K_{\text{ef}} = K_0 \left[1 + (\gamma - 1) \frac{\tanh\left(b\sqrt{\frac{j\omega Pr}{\nu}}\right)}{\left(b\sqrt{\frac{j\omega Pr}{\nu}}\right)} \right]^{-1}. \quad (41)$$

3.4 Análise prévia da acústica visco-térmica

Para ilustrar a influência das perdas visco-térmicas na propagação sonora em função da variação da seção transversal de um tubo estreito, o comportamento teórico do número de onda efetivo (relação de dispersão) é apresentado na Figura 12 enquanto o comportamento da velocidade de propagação ($c_{\text{ef}} = \sqrt{K_{\text{ef}}/\rho_{\text{ef}}}$) é apresentado na Figura 13. Note que devido as perdas visco-térmicas o número de onda efetivo (k_{ef}) apresenta componentes real e imaginária, a parte real que caracteriza a propagação sonora é linear com a frequência em todos os casos. Por outro lado, a componente imaginária que representa atenuação de propagação apresenta uma magnitude que aumenta a medida que a área diminui. Com relação a velocidade de propagação (ver Figura

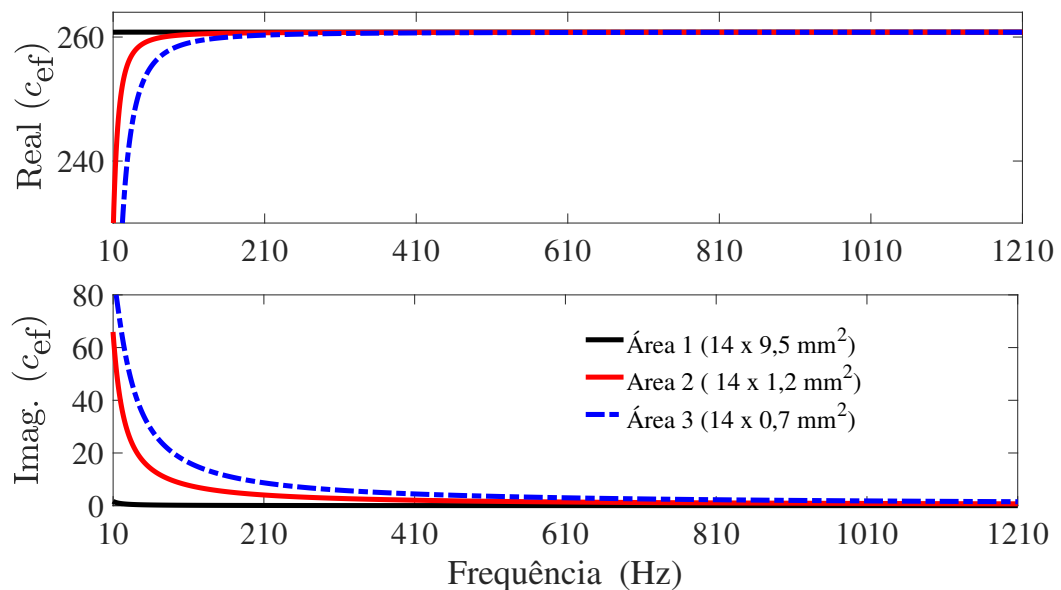
Figura 12: Relação de dispersão em função da área de seção transversal do tubo.



Fonte: O autor.

13), observa-se que com a diminuição da área suas componentes apresentam comportamento opostos principalmente abaixo de 500 Hz, o que revela uma maior influência das perdas. Em todos os casos a componente real da velocidade apresenta uma magnitude menor que a velocidade de propagação do som no ar ($c_0 = 343 \text{ m/s}$). Notadamente, na menor seção transversal (típico de uma fenda) a velocidade diminui mais

Figura 13: Velocidade de propagação em função da área de seção transversal de um tubo.



Fonte: O autor.

proeminentemente com o aumento do comprimento de onda, e este comportamento é devido ao fato das camadas limites serem inversamente proporcionais à frequência.

3.5 Síntese do capítulo

Neste capítulo, contemplou-se que as dimensões transversais de uma geometria exercem influência na propagação sonora em seu interior, esta influência foi abordada a partir da divisão do domínio acústico em duas regiões, ou seja, a região central dominada pela acústica isentrópica e a região limite descrita pela acústica visco-térmica. Neste sentido, o modelo visco-térmico de Stinson para geometrias de seção quadrada, retangular e fenda foi apresentado em detalhes, de forma que as perdas viscosas e térmicas foram descritas, respectivamente, pelas funções densidade e compressibilidade complexas e dependentes da frequência e da geometria. Desta forma, este modelo de perdas será fundamental na formulação que descreverá o comportamento das estruturas do metamaterial periódico e dispersivo que será apresentado no Capítulo 6.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

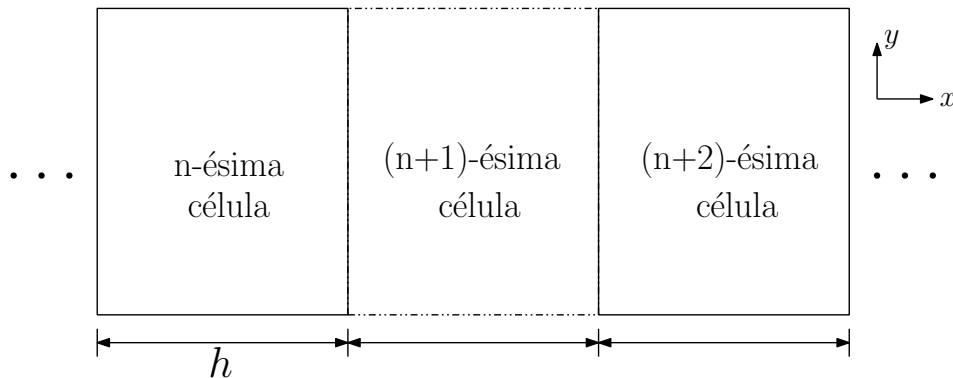
4 Teoria de meios periódicos

Este trabalho aborda o controle, mitigação e a manipulação das ondas sonoras e, conseqüentemente, a dispersão e propriedades de ondas que se propagam em estruturas periódicas. Assim, neste capítulo é demonstrado que embora a teoria de Floquet tenha sido escrita para ser aplicada a uma classe de equações diferenciais, ela se mostra mais geral desde que o sistema apresente invariância translacional e duas soluções linearmente independentes. Portanto, a teoria pode ser aplicada a nossa estrutura, desde que a solução do sistema de equações obedeça a condição de onda de Bloch, ou seja, que as funções de onda sejam as funções de Bloch. Desta forma, essa teoria será fundamental na obtenção da relação de dispersão de nossas estruturas. Além disso, a impedância acústica de Bloch e um parâmetro responsável pelo comportamento das funções de onda de Bloch em uma célula primitiva do MA são derivados em detalhes.

4.1 Invariância translacional

Para assumir que um sistema é invariante translacionalmente, deve-se demonstrar que existe um operador translacional sob o qual o sistema permanece inalterado. Para isso, considere uma estrutura genérica com periodicidade h , conforme apresentado na Figura 14 e um conjunto de variáveis de campo Ω sob um conjunto de operadores $\mathcal{L}_i$. Note que o conjunto Ω consiste em variáveis que descrevem a propagação das ondas sonoras na estrutura, especificamente a variável de interesse aqui é a

Figura 14: Estrutura genérica arbitrária de periodicidade h .



Fonte: O autor.

pressão sonora, desta forma, $\Omega = \Omega\{p\}$. Por outro lado, o conjunto de operador é definido como o conjunto de operações matemáticas utilizadas na equação que descreve o comportamento das ondas sonoras (Jacobsen & Juhl, 2013)

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}. \quad (42)$$

Nota-se que em coordenadas cartesianas o único operador na Equação 42 é o d'Alembertiano,

$$\mathcal{L}_i = \square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (43)$$

O operador $\mathcal{L}_i$ apresenta invariância translacional se permanecer inalterado sob uma translação qualquer no domínio da pressão sonora,

$$\mathcal{L}_i(x,t) = \mathcal{L}_i(x + \Delta x, t + \Delta t), \quad (44)$$

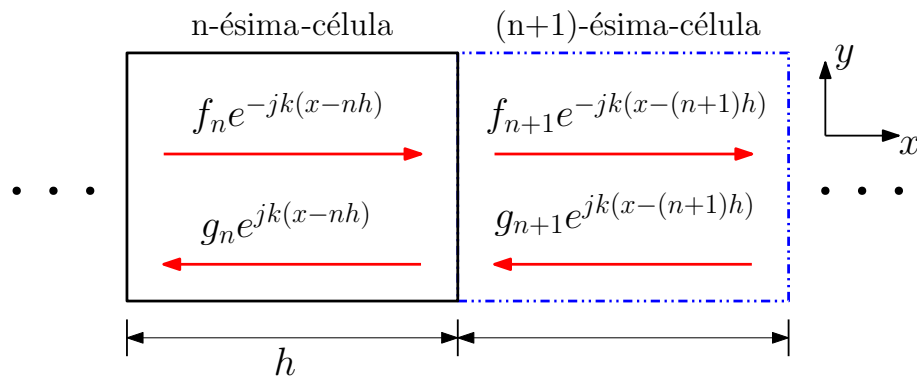
ou melhor,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial(x + \Delta x)\partial(x + \Delta x)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial(t + \Delta t)\partial(t + \Delta t)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial t}. \quad (45)$$

Desta forma, o operador que atua na variável de interesse, sendo invariante sob translações arbitrárias implica que o conjunto de equações governantes também é invariável translacionalmente. Havendo condições de contorno, seus operadores também são invariantes, embora a região de avaliação não seja. No entanto, com translações de comprimento h , as condições de contorno são invariantes, o sistema é, portanto, invariante sob translações de h ao longo da direção x . Consequentemente, como o conjunto de equações governantes e as condições de contorno são invariantes sob translações ao longo de x , o sistema como um todo é invariante sob translações de h ao longo de x . Por fim, destaca-se que a invariância translacional depende da homogeneidade do meio, ou seja, que $\rho_0 = \rho_0(x,y,z)$ e $T_0 = T_0(x,y,z)$ por exemplo sejam constantes.

4.2 Soluções linearmente independentes

Para entender os tipos de soluções exigidas consideraremos a estrutura genérica (metamaterial) como uma linha de transmissão unidimensional, de modo que há um dispersor em cada célula, conforme ilustrado na Figura 15. As soluções são compostas por ondas que se propagam para frente e para trás em cada célula. As amplitudes das ondas para frente e para trás no centro da n -ésima célula são f_n e g_n . Por outro lado, para a $(n + 1)$ -ésima célula são f_{n+1} e g_{n+1} . Assumiremos que as amplitudes das

Figura 15: Estrutura genérica de periodicidade h .

Fonte: O autor.

ondas na n -ésima célula do dispersor são $f_n e^{-jkx/2}$ e $g_n e^{jkx/2}$ e aquelas na $(n+1)$ -ésima célula do dispersor são $f_{n+1} e^{-jkx/2}$ e $g_{n+1} e^{jkx/2}$.

As relações de espalhamento, definidas pela matriz $[S]$, que relacionam as amplitudes das ondas na entrada e na saída de um dispersor de uma célula são expressas da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} g_n e^{jkx/2} \\ f_{n+1} e^{-jkx/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n e^{-jkx/2} \\ g_{n+1} e^{jkx/2} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Sendo os termos S_{11} e S_{22} os coeficientes de reflexão e os termos S_{12} e S_{21} os coeficientes de transmissão. Resolvendo a Equação 46 para f_{n+1} e g_{n+1} obtemos a seguinte matriz de transmissão (Bradley, 1993)

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{12}} \begin{bmatrix} -(\det[S])e^{-jkx} & S_{22} \\ -S_{11} & e^{jkx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Desta forma, a função de onda de todo o sistema pode, portanto, ser expresso em função de apenas duas constantes, ou seja, das amplitudes de onda f_n e g_n . Note que para examinar a validade da Equação 47 na aplicação da teoria de Floquet, um sistema com amplitudes de onda f_n e g_n , cuja combinação forma uma solução geral na forma

$$U(x) = f_n e^{-jk(x-nh)} + g_n e^{jk(x-nh)}, \quad (48)$$

deve satisfazer duas condições: invariância translacional e independência linear.

A solução geral apresentada na Equação 48 pode ser considerada como sendo composta de uma combinação linear de duas funções componentes $U(x)^{(1)}$ e $U(x)^{(2)}$. Este par de funções na n -ésima célula são definidas pelo princípio da superposição como

$$U(x)^{(1)} = M_n^{(1)} e^{-jk(x-nh)} + N_n^{(1)} e^{jk(x-nh)}, \quad (49)$$

$$U(x)^{(2)} = M_n^{(2)} e^{-jk(x-nh)} + N_n^{(2)} e^{jk(x-nh)}. \quad (50)$$

As condições sob as quais as funções $U(x)^{(1)}$ e $U(x)^{(2)}$ são linearmente independentes (LI) é investigada pelo cálculo do Wronskiano (Jayme & Edmundo, 2016; Kreider et al., 1966),

$$\text{Wron} = \begin{bmatrix} U(x)^{(1)} & U(x)^{(2)} \\ \frac{dU(x)^{(1)}}{dx} & \frac{dU(x)^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} \Rightarrow 2jk [N_n^{(1)} M_n^{(2)} - M_n^{(1)} N_n^{(2)}] \neq 0. \quad (51)$$

Ou seja, as funções são LI se Wron for diferente de zero, o que torna-se verdadeiro, se e somente se,

$$\frac{N_n^{(1)}}{M_n^{(1)}} \neq \frac{N_n^{(2)}}{M_n^{(2)}}. \quad (52)$$

Portanto, este resultado mostra que $U(x)^{(1)}$ e $U(x)^{(2)}$ são linearmente independentes, desde que não sejam a mesma função.

4.3 Teoria de Floquet e condição de ondas de Bloch

Bradley, 1993 em seu trabalho relevante demonstrou que um sistema matemático com invariância translacional e duas soluções LI é um candidato à aplicação do teorema de Floquet em um problema acústico. Além disso, demonstrou que as duas soluções linearmente independentes incomuns são as funções de ondas de Bloch que se propagam para frente e para trás em uma estrutura periódica. Desta forma, o teorema de Floquet em conjunto com as condições de ondas de Bloch será frequentemente chamado teorema de Bloch-Floquet neste trabalho. A seguir o teorema de Bloch-Floquet é investigado em detalhes.

O teorema de Floquet, 1883 é um resultado celebrado na teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO), essencialmente, o teorema afirma que, ao estudar um sistema diferencial linear com coeficientes periódicos, podemos aplicar uma mudança de variável periódica, possivelmente complexa, que o transforma em um sistema linear com coeficientes constantes. Dito isto, considere a EDO de n -ésima ordem com coeficientes periódicos,

$$Y(U) = \frac{d^n U(x)}{dx^n} + Q_1(x) \frac{d^{n-1} U(x)}{dx^{n-1}} + Q_2(x) \frac{d^{n-2} U(x)}{dx^{n-2}} + \dots + Q_n U(x) = 0. \quad (53)$$

A Equação 53 é translacionalmente invariante na direção x , de modo que $Q_n(x+h) = Q_n(x)$ e, se $U_j(x)$ for uma solução, então $U_j(x+h)$ também é, onde h é uma translação arbitrária. Para um conjunto arbitrário de n soluções linearmente independentes

$U(x) = \{U_1(x), U_2(x), U_3(x), \dots, U_n(x)\}^T$, uma outra solução é obtida pela combinação linear dessas soluções, ou seja,

$$\Gamma(x) = A_1 U_1(x) + A_2 U_2(x), \quad (54)$$

sendo A_1 e A_2 coeficientes constantes. É evidente que $|A\rangle$, um vetor coluna $[1 \times n]$ composto por A_1 e A_2 , é um vetor de estado. Em contrapartida, $|U(x)\rangle$ é um vetor de base LI composto por $U_1(x)$ e $U_2(x)$. Pode-se então afirmar que $\Gamma(x)$ é simplesmente o produto interno do vetor de estado pelo vetor de base LI:

$$\Gamma(x) = [A_1 A_2] \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix} = \langle A | U(x) \rangle. \quad (55)$$

Como o sistema é invariante sob translações de h ao longo da direção x , o conjunto de soluções $U(x+h)$ também é uma solução para o problema, ou seja,

$$U(x+h) = \langle B | U(x) \rangle, \quad (56)$$

onde B é um vetor de estado composto de coeficientes constantes. Procuramos agora a existência de uma solução que tenha a seguinte propriedade (Floquet, 1883)

$$\Gamma(x+h) = s\Gamma(x), \quad (57)$$

sendo s uma constante complexa. Expandindo $\Gamma(x+h)$ como $\langle A | U(x+h) \rangle$ obtém-se

$$\langle A | U(x+h) \rangle = s\langle A | U(x) \rangle. \quad (58)$$

Substituindo a Equação 56 na Equação 58, obtemos uma formulação de vetor de estado do problema de autovalor,

$$\langle A | B | U(x) \rangle = s\langle A | U(x) \rangle \longrightarrow B | A \rangle = s | A \rangle. \quad (59)$$

A Equação 59 pode ser reescrita na forma padrão de uma equação homogênea,

$$(B - sI) | A \rangle = | 0 \rangle, \quad (60)$$

onde I é a matriz identidade e $| 0 \rangle$ é o vetor nulo. Note que uma solução não trivial para a Equação 60 é garantida pela condição

$$(B - sI) = 0, \quad (61)$$

que é satisfeito para dois valores de s , ou seja, os autovalores s_1 e s_2 . E para cada autovalor tem-se um autovetor associado a ele.

O interesse aqui reside em ondas sonoras que se propagam para frente e para trás em uma célula da estrutura genérica do MA periódico, ou seja, este problema envolve duas soluções. Uma solução para uma onda que se propaga para frente e outra solução para a onda que se propaga para trás. Com base na formulação da Equação 54 estas soluções são

$$F_n(x) = A_1 U_1(x), \quad (62)$$

$$G_n(x) = A_2 U_2(x), \quad (63)$$

e pela Equação 57

$$F_n(x + h) = s_1 F_n(x), \quad (64)$$

$$G_n(x + h) = s_2 G_n(x). \quad (65)$$

No contexto da propagação sonora, devido a facilidade de manipulação matemática, os autovalores que são complexos podem ser escritos na forma exponencial, $s_1 = e^{-jq_1 h}$ e $s_2 = e^{jq_2 h}$, sendo q_1 e q_2 os números de onda de Bloch ou frequências espaciais de Bloch (Bradley, 1994a). Desta forma, as relações de translação nas Equações 64 e 65 tornam-se

$$F_n(x + h) = e^{-jq_1 h} F_n(x), \quad (66)$$

$$G_n(x + h) = e^{jq_2 h} G_n(x). \quad (67)$$

As Equações 66 e 67 são, portanto, as condições de onda de Bloch, as quais relacionam diretamente as soluções de células unitárias consecutivas de uma estrutura periódica. Além disso, as funções de onda LI (Equações 62 e 63) que atendem a essas condições são chamadas de funções de onda de Bloch, as quais podem ser representadas de várias formas, a saber: padrão, espectral e convolucional (Bradley, 1994a). A forma padrão destas funções são, portanto,

$$F_n(x) = \Phi_{q_1} e^{-jq_1 h}, \quad (68)$$

$$G_n(x) = \Phi_{q_2} e^{jq_2 h}. \quad (69)$$

Φ_{q_1} e Φ_{q_2} são as funções de modulação periódica com a periodicidade da estrutura:

$$\Phi_{q_1}(x + h) = \Phi_{q_1}(x), \quad (70)$$

$$\Phi_{q_2}(x + h) = \Phi_{q_2}(x). \quad (71)$$

A representação padrão (Equações 68 e 69) das funções de onda de Bloch evidencia diversas características das ondas sonoras que se propagam em estruturas periódicas, dentre as quais podemos destacar:

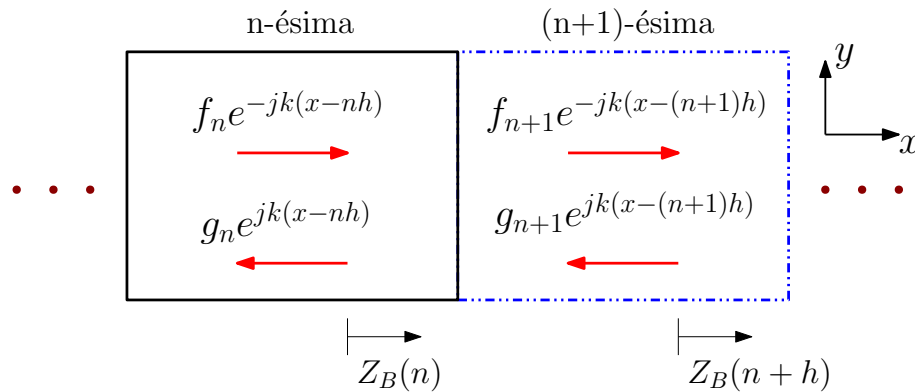
- Como $\Phi_{q_i}(x)$ tem a periodicidade da estrutura, $e^{\mp jq_i h}$ determina as mudanças na fase e amplitude das funções de ondas de Bloch de uma posição em uma célula para a posição correspondente a célula vizinha;
- A variação da fase é determinada pela componente $\text{Real}(q_i)$ do número de onda de Bloch e a variação de amplitude pela componente $\text{Imag.}(q_i)$;
- Enquanto a componente exponencial de $F_n(x)$ e $G_n(x)$ representam variações na função de onda de célula a célula, Φ_{q_i} representa o comportamento da função de onda em uma única célula. Por outro lado, $e^{\mp jq_i h}$ representa uma onda com fase que varia linearmente com a distância;
- $\Phi_{q_i}(x)$ representa desvios periódicos em fase e amplitude das mudanças lineares e exponenciais descritos por $e^{\mp jq_i h}$.

Por fim, destaca-se que embora tenha anunciado a forma padrão das funções de onda de Bloch, a forma convolucional é digna de destaques. Principalmente porque através desta representação foi demonstrado também que a relação de dispersão das ondas de Bloch de uma estrutura infinita pode ser derivada a partir da análise da propagação das ondas em uma única célula da estrutura, conforme pode ser consultado no trabalho de [Bradley, 1993](#).

4.4 Impedância de Bloch

Em geral, a literatura destaca a relação de dispersão como a principal característica das ondas sonoras que se propagam em um meio periódico (ondas de Bloch), contraponto, destacaremos também a impedância de Bloch e em seguida o parâmetro g_n/f_n . A impedância de Bloch (Z_B) é a impedância acústica em um ponto intermediário da estrutura (ver Figura 16), de modo que esta especifica o comportamento da estrutura dentro e fora das regiões de *bandgap*. Destaca-se que esta impedância é uma

Figura 16: Estrutura arbitrária periódica para análise da impedância de Bloch.



Fonte: O autor.

função da posição do dispersor e não uma impedância característica do guia de ondas que compõe uma estrutura periódica. Para derivá-la a condição de onda de Bloch é introduzida por meio de uma impedância iterativa, que relaciona a impedância acústica nas células subsequentes da estrutura. Primeiramente uma função geral da impedância de Bloch para um metamaterial carregado periodicamente por dispersores arbitrários será deduzida. Em seguida, resultados mais específicos e de interesse deste trabalho serão demonstrados.

4.4.1 Função geral da impedância de Bloch

Nossa estrutura é invariante sob translações de h , não havendo diferença em um ponto qualquer e um ponto correspondente a um número inteiro de períodos. Neste sentido, a impedância acústica deve se repetir com a periodicidade, matematicamente a condição de impedância de Bloch é declarada da seguinte forma

$$Z_B(x) = Z_B(x + h). \quad (72)$$

A condição de impedância de Bloch pode ser derivada ao se generalizar os resultados apresentados na Seção 4.3. Neste caso as condições de onda de Bloch (Equações 66 e 67) podem ser escritas em função de qualquer variável acústica de nosso interesse, especificamente em função da pressão e da velocidade de partículas temos que

$$P(x + h) = P(x)e^{-jqh}, \quad (73)$$

$$u(x + h) = u(x)e^{-jqh}. \quad (74)$$

Consequentemente, a impedância nos pontos x e $x + h$, por definição é

$$Z(x) = \frac{P(x)}{u(x)}, \quad (75)$$

$$Z(x + h) = \frac{P(x + h)}{u(x + h)} = \frac{P(x)e^{-jqh}}{u(x)e^{-jqh}} = Z(x). \quad (76)$$

Note que a condição de impedância acústica acima é uma propriedade inerente às ondas que se propagam em um meio periódico, ou seja, as ondas de Bloch. Considerando a configuração da Figura 16, por definição a impedância acústica na n -ésima célula é (Kinsler et al., 2000)

$$Z_B(x) = Z_B(nh) = Z_a \frac{f_n + g_n}{f_n - g_n}, \quad (77)$$

e na $(n + 1)$ -ésima célula é

$$Z_B(x) = Z_B(nh + h) = Z_a \frac{f_{n+1} + g_{n+1}}{f_{n+1} - g_{n+1}}, \quad (78)$$

Sendo f_n e g_n as amplitudes das ondas que se propagam para frente e para trás na n -ésima célula. Por outro lado, f_{n+1} e g_{n+1} são as amplitudes das ondas que se propagam para frente e para trás na $(n+1)$ -ésima célula. $Z_a = Z_o / S_{go}$ representa a impedância característica do guia de onda no qual o dispersor é acoplado normalizado pela sua área. Conforme destacamos na Seção 4.2, as amplitudes das ondas nas células estão relacionadas pela seguinte matriz de transmissão

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{12}} \begin{bmatrix} -(\det[S])e^{-jkh} & S_{22} \\ -S_{11} & e^{jkh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ g_n \end{bmatrix}. \quad (79)$$

A Equação 79 pode ser reescrita da seguinte forma,

$$f_{n+1} = \frac{-(\det[S])e^{-jkh}f_n + S_{22}g_n}{S_{12}}, \quad (80)$$

$$g_{n+1} = \frac{-S_{11}f_n + e^{jkh}g_n}{S_{12}}. \quad (81)$$

Introduzindo as Equações 80 e 81 na Equação 78 e após algumas manipulações, obtém-se a seguinte equação

$$Z_B(nh + h) = Z_a \frac{f_n(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11}) + g_n(S_{22} + e^{jkh})}{f_n(-(\det[S])e^{-jkh} + S_{11}) + g_n(S_{22} - e^{jkh})}. \quad (82)$$

A Equação 77 pode ser reescrita em função de f_n e g_n da seguinte maneira,

$$f_n = \frac{g_n(Z_B(nh) + Z_a)}{Z_b(nh) - Z_a}, \quad (83)$$

$$g_n = \frac{f_n(Z_B(nh) - Z_a)}{Z_b(nh) + Z_a}. \quad (84)$$

Consequentemente, introduzindo as Equações 83 e 84 na Equação 82 e após algumas manipulações obtemos a seguinte equação

$$Z_B(nh + h) = Z_a \frac{(Z_B(nh) + Z_a)(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11}) + (Z_B(nh) - Z_a)}{(Z_B(nh) + Z_a)(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11}) + (Z_B(nh) - Z_a)} \times \frac{(S_{22} + e^{jkh})}{(S_{22} - e^{jkh})}. \quad (85)$$

A condição de impedância de Bloch afirma que as impedâncias em nh e $(n+1)h$ devem ser iguais, dado que é assumido que os dispersores da estrutura são iguais, desta forma, $Z_B(nh) = Z_B(nh + h) = Z_{Ba}$. A introdução da condição de impedância de Bloch torna a Equação 85 quadrática, ou seja,

$$\begin{aligned} (Z_{Ba}^2 + Z_{Ba}Z_a)(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11}) + (Z_{Ba}^2 - Z_{Ba}Z_a)(S_{22} - e^{jkh}) = \\ (Z_{Ba}Z_a + Z_a^2)(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11}) + (Z_{Ba}Z_a - Z_a^2)(S_{22} + e^{jkh}), \end{aligned} \quad (86)$$

$$\left(\frac{Z_{Ba}}{Z_a}\right)^2 \left(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11} - S_{22} + e^{jkh} \right) + \left(\frac{Z_{Ba}}{Z_a}\right) (2S_{22} - 2S_{11}) + \left(-(\det[S])e^{-jkh} - S_{11} - S_{22} - e^{jkh} \right) = 0. \quad (87)$$

As soluções de Z_{Ba} podem ser obtidas por meio da fórmula quadrática de Bhaskara, o que resulta em

$$\frac{Z_{Ba}}{Z_a} = \frac{S_{11} - S_{22} \pm e^{jkh} \sqrt{\left((\det[S])e^{-2jkh} - 1 \right)^2 + 4S_{12}S_{21}e^{-2jkh}}}{(\det[S])e^{-jkh} - S_{11} - S_{22} + e^{jkh}}. \quad (88)$$

A Equação 88, portanto, é a forma geral da impedância de Bloch. Note que esta impedância foi especificada independentemente da natureza do dispersor, desta forma, a seguir a impedância de Bloch para algumas configurações de dispersores é detalhada.

4.4.2 Impedância de um dispersor simétrico

Considerando que o dispersor apresente um espelhamento em relação a $x = h/2$, devido a natureza recíproca e simétrica, os termos $S_{11} = S_{22}$ e $S_{12} = S_{21}$, desta forma, a Equação 88 torna-se

$$Z_{Ba} = Z_a \sqrt{\frac{(\det[S])e^{-jkh} + 2S_{11} + e^{jkh}}{(\det[S])e^{-jkh} - 2S_{11} + e^{jkh}}}. \quad (89)$$

Caso o dispersor seja considerado discreto, ou seja, que sua extensão axial seja muito menor que o comprimento da onda, a pressão sonora em ambos os lados do dispersor é aproximadamente a mesma, resultando em $S_{12} = 1 + S_{11}$ (Bradley, 1993). Deste modo o determinante reduz-se a:

$$(\det[S]) = (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) = (S_{11}^2 - S_{12}^2) = (S_{11}^2 - (1 + S_{11})^2) = -1 - 2S_{11}.$$

Consequentemente, a Equação 89 torna-se

$$\frac{Z_{Ba}}{Z_a} = \sqrt{\frac{(-1 - 2S_{11})e^{-jkh} + 2S_{11} + e^{jkh}}{(-1 - 2S_{11})e^{-jkh} - 2S_{11} + e^{jkh}}} = \sqrt{\frac{-e^{-jkh} - 2S_{11}e^{-jkh} + 2S_{11} + e^{jkh}}{-e^{-jkh} - 2S_{11}e^{-jkh} - 2S_{11} + e^{jkh}}}. \quad (90)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da raiz por (-1), utilizando a identidade exponencial ($e^{-jkh} - e^{jkh} = -2j\sin(kh)$) e fazendo algumas considerações, a Equação 90 que é a impedância do dispersor simétrico e discreto é reescrita da seguinte forma

$$Z_{Ba} = Z_a \sqrt{\frac{S_{11}(e^{-jkh} - 1) - j\sin(kh)}{S_{11}(e^{-jkh} + 1) - j\sin(kh)}}. \quad (91)$$

4.4.3 Impedância de um dispersor de carga de impedância

Na prática a dispersão em um metamaterial é causado por um dispersor local de impedância Z_L . De modo que o termo S_{11} se relaciona com a impedância do dispersor pela seguinte expressão (Kinsler et al., 2000)

$$S_{11} = \frac{1}{-(1 + 2Z_L/Z_a)}. \quad (92)$$

Substituindo a Equação 92 na Equação 91 obtém-se

$$Z_{Ba} = Z_a \frac{\sqrt{\frac{(e^{-jkh}-1)}{\left(\frac{-Z_a-2Z_L}{Z_a}\right)} - j\sin(kh)}}{\sqrt{\frac{(e^{-jkh}+1)}{\left(\frac{-Z_a-2Z_L}{Z_a}\right)} - j\sin(kh)}} = Z_a \frac{\sqrt{\frac{Z_a(e^{-jkh}-1)}{(-Z_a-2Z_L)} - j\sin(kh)}}{\sqrt{\frac{Z_a(e^{-jkh}+1)}{(-Z_a-2Z_L)} - j\sin(kh)}}, \quad (93)$$

$$Z_{Ba} = Z_a \sqrt{\frac{Z_a(e^{-jkh}-1) + jZ_a\sin(kh) + j2Z_L\sin(kh)}{Z_a(e^{-jkh}+1) + jZ_a\sin(kh) + j2Z_L\sin(kh)}}. \quad (94)$$

Manipulando a Equação 94 e considerando que $\cos(kh) = e^{-jkh} + j\sin(kh)$, a impedância de um dispersor de carga de impedância é escrita da seguinte forma

$$Z_{Ba} = Z_a \sqrt{\frac{(Z_a/2jZ_L)(\cos(kh)-1) + \sin(kh)}{(Z_a/2jZ_L)(\cos(kh)+1) + \sin(kh)}}. \quad (95)$$

Impedância de um dispersor de $\lambda/4$

Finalmente, como veremos no Capítulo 6, o dispersor das estruturas do metamaterial proposto nesta pesquisa baseia-se em um tubo de $\lambda/4$, a impedância acústica Z_L deste tipo de dispersor com uma terminação rígida é expresso como (G. N. Almeida et al., 2024)

$$Z_L = -j \frac{Z_o}{A_d} \cot(kL_f). \quad (96)$$

Sendo A_d a área de seção transversal do dispersor. Finalmente, introduzindo a Equação 96 na Equação 95 obtém-se a impedância acústica de Bloch para um dispersor de $\lambda/4$ na seguinte forma,

$$Z_{Ba} = Z_a \sqrt{\frac{\frac{A_d}{2S_{go}} \frac{1}{\cot(kL_f)} (\cos(kh)-1) + \sin(kh)}{\frac{A_d}{2S_{go}} \frac{1}{\cot(kL_f)} (\cos(kh)+1) + \sin(kh)}}. \quad (97)$$

4.5 Parâmetro g_n/f_n das ondas de Bloch

O parâmetro g_n/f_n especifica o comportamento das funções de ondas de Bloch dentro de uma única célula de uma estrutura periódica. Sucede que g_n/f_n tem uma relação objetiva com a impedância acústica de Bloch (Equação 97), portanto, este parâmetro será expresso em função desta impedância. A função de onda numa célula da estrutura é simplesmente uma combinação linear de duas soluções LI da equação da onda, em outras palavras, uma onda que se propaga para frente com amplitude f_n e uma onda que se propaga para trás com amplitude g_n ,

$$\Psi(x) = f_n e^{-jkh} + g_n e^{jkh}. \quad (98)$$

Uma forma alternativa de expressar $\Psi(x)$ é normalizando as amplitudes das onda por $f_n + g_n$, que é a pressão total na célula

$$\Psi(x) = \frac{f_n e^{-jkh} + g_n e^{jkh}}{f_n + g_n}. \quad (99)$$

Em termos das amplitudes das ondas propagantes da função de onda acima, a impedância é expressa da seguinte forma (Kinsler et al., 2000)

$$\frac{Z_{Ba}}{Z_a} = \frac{P}{u} = \frac{f_n + g_n}{f_n - g_n}. \quad (100)$$

A qual pode ser reescrita em função de g_n/f_n , ou seja,

$$Z_{Ba}f_n - Z_{Ba}g_n = Z_af_n + Z_ag_n \implies Z_{Ba} - Z_{Ba}\frac{g_n}{f_n} = Z_a + Z_a\frac{g_n}{f_n}, \quad (101)$$

$$\frac{g_n}{f_n} = \frac{Z_{Ba} - Z_a}{Z_{Ba} + Z_a}. \quad (102)$$

Consequentemente, a forma explícita do parâmetro g_n/f_n é obtida introduzindo a impedância acústica de Bloch (Equação 97) na Equação 102.

4.6 Síntese do capítulo

Neste capítulo, vimos que sobre a ótica da invariância translacional e de duas soluções linearmente independentes a teoria de Floquet pode ser estendida para outras classes de sistemas. Contemplamos que a teoria de Floquet pode ser aplicada a nossa estrutura acústica periódica desde que a solução do sistema de equações obedeçam as condições de onda de Bloch e que as funções de onda sejam as funções de Bloch. Devido a estas condições o termo teorema de Bloch-Floquet será frequentemente empregado quando avaliarmos a relação de dispersão do MA periódico no Capítulo 6.

Além disso, a impedância acústica de Bloch e o parâmetro g_n/f_n responsável pelo comportamento das funções de onda de Bloch em uma célula unitária da estrutura foram derivados, portanto, a análise e o comportamento destes conceitos serão apresentados no Capítulo 7.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

5 Método da matriz de transferência

A propagação de ondas planas unidimensionais em qualquer tipo estrutura acústica pode ser descrita pelo método da matriz de transferência (MMT), o qual relaciona um vetor de estado $\mathbf{T} = (P, Q)$ no início e no fim da estrutura. As principais vantagens deste método é a possibilidade de adicionar as perdas visco-térmicas e facilidade na obtenção da relação de dispersão da estrutura. Desta forma, neste capítulo as matrizes de sistemas geométricos usuais, uma matriz de radiação e a determinação da impedância de um ressonador lateral pelo MMT serão apresentados. Além disso, três condições físicas que sob a perspectiva da incidência das ondas sonoras especificam o comportamento de estruturas em problema de transmissão será detalhado também.

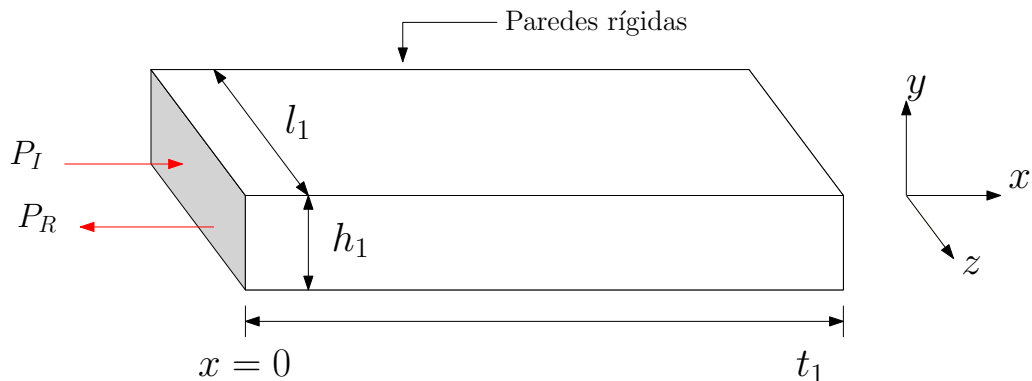
5.1 Matriz de transferência de um tubo contínuo

A propagação sonora unidimensional em qualquer estrutura é descrito pela equação da onda, a qual é dada por (Jacobsen & Juhl, 2013)

$$\nabla^2 P_T(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_T(x, t)}{\partial t^2}, \quad (103)$$

sendo $P_T(x, t)$ a pressão acústica total e c a velocidade do som. Considere um tubo contínuo de comprimento t_1 com seção retangular de área $A_{tc} = l_1 h_1$, conforme ilustrado na Figura 17. A solução do campo de pressão na estrutura pode ser escrito como uma

Figura 17: Representação de um tubo contínuo com paredes rígidas e comprimento t_1 . P_I e P_R representam as amplitudes das ondas incidentes e refletidas.



Fonte: O autor.

sobreposição das ondas, ou seja, ondas incidentes e refletidas,

$$P_T(x, t) = P_I e^{j(-kx + \omega t)} + P_R e^{j(kx + \omega t)}, \quad (104)$$

com $k = \omega / c_0$ representando o número de onda. A partir da equação de Euler,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}(x, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} P(x, t) = 0, \quad (105)$$

e assumindo uma propagação no sentido x -positivo, a seguinte equação é obtida

$$\frac{\partial \vec{u}(x, t)}{\partial t} = \frac{jk P_I e^{-j(kx - \omega t)}}{\rho_0}. \quad (106)$$

Organizando a Equação 106 e integrando em relação ao tempo, a velocidade de partículas é obtida,

$$\int_0^t \partial \vec{u}(x, t) dt = \int_0^t \frac{jk P_I e^{-j(kx - \omega t)}}{\rho_0} dt \Rightarrow \vec{u}(x, t) = \frac{P_I}{Z_0} e^{-j(kx - \omega t)}, \quad (107)$$

sendo $Z_0 = \rho_0 c_0$ a impedância característica do meio. Por similaridade para o sentido x -negativo obtém-se,

$$\vec{u}(x, t) = -\frac{P_R}{Z_0} e^{j(kx + \omega t)}. \quad (108)$$

Assim, velocidade de partículas total é dada por,

$$\vec{u}(x, t) = \frac{P_I}{Z_0} e^{-j(kx - \omega t)} - \frac{P_R}{Z_0} e^{j(kx + \omega t)}. \quad (109)$$

Multiplicando $\vec{u}(x, t)$ pela área (A_{tc}) encontramos a velocidade de volume,

$$Q(x) = \frac{P_I e^{-jkx} - P_R e^{jkx}}{Z'}, \quad (110)$$

com $Z' = Z_0 / A_{tc}$ representando a impedância normalizada pela área. Portanto, a pressão total e a velocidade de volume em $x = 0$ assumem a seguinte forma,

$$P_T(0) = P_I + P_R \quad ; \quad Z' Q(0) = P_I - P_R. \quad (111)$$

Por outro lado, em $x = t_1$ e omitindo a parcela $e^{j\omega t}$ tem se que,

$$P_T(t_1) = P_I e^{-jkt_1} + P_R e^{jkt_1} = P_I [\cos(kt_1) - j \sin(kt_1)] + P_R [\cos(kt_1) + j \sin(kt_1)], \quad (112)$$

$$P_T(t_1) = [P_I + P_R] \cos(kt_1) - [P_I - P_R] j \sin(kt_1), \quad (113)$$

$$Z' Q(t_1) = P_I e^{-jkt_1} - P_R e^{jkt_1} = P_I [\cos(kt_1) - j \sin(kt_1)] - P_R [\cos(kt_1) + j \sin(kt_1)], \quad (114)$$

$$Q(t_1) = \frac{[P_I - P_R] \cos(kt_1)}{Z'} - j \frac{[P_I + P_R] \sin(kt_1)}{Z'}. \quad (115)$$

Substituindo as Equações 111 nas Equações 113 e 115 obtém-se as pressões e as velocidades de volume em ambos os limites da condição de contorno da geometria,

$$\begin{cases} P_T(t_1) = P_T(0) \cos(kt_1) - jZ' Q(0) \sin(kt_1), \\ Q(t_1) = Q(0) \cos(kt_1) - j \frac{P_T(0) \sin(kt_1)}{Z'}. \end{cases} \quad (116)$$

A Equação 116 pode ser apresentada na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{x=t_1} = \begin{bmatrix} \cos(kt_1) & -jZ' \sin(kt_1) \\ -j \frac{\sin(kt_1)}{Z'} & \cos(kt_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{x=0}. \quad (117)$$

A matriz da Equação 117 pode ser invertida¹⁰ afim de recuperar a orientação coerente com o problema geométrico da Figura 17 (Jiménez et al., 2021),

$$\begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} \cos(kt_1) & jZ' \sin(kt_1) \\ j \frac{\sin(kt_1)}{Z'} & \cos(kt_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{x=t_1}. \quad (118)$$

A Equação 118 é a forma geral do método da matriz de transferência para se descrever o comportamento de qualquer estrutura geométrica, visto que relaciona um vetor de estado $\mathbf{T} = (P, Q)$ em ambos os lados da estrutura. Assim, a matriz de transferência do tubo contínuo é identificada como,

$$M_{tc} = \begin{bmatrix} \cos(kt_1) & jZ' \sin(kt_1) \\ j \frac{\sin(kt_1)}{Z'} & \cos(kt_1) \end{bmatrix}. \quad (119)$$

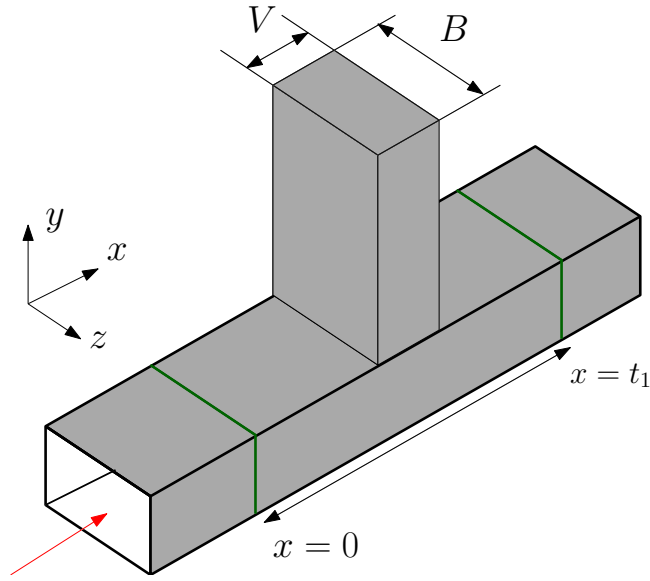
Note que a matriz acima depende apenas do número de onda, da impedância do meio e do comprimento de propagação da onda no tubo. Além disso, para tubos de pequenas dimensões com qualquer tipo de seção transversal, as perdas são adicionadas simplesmente substituindo k e Z' pelos parâmetros complexos do modelo visco-térmico apresentado no Capítulo 3.

5.2 Matriz de um tubo ramificado

Um tubo ramificado fechado de $\lambda/4$ acoplado a um guia de ondas é considerado um elemento localmente ressonante, a Figura 18 ilustra este sistema. A pressão

¹⁰A inversão (A^{-1}) de uma matriz $A_{2 \times 2}$ pode ser obtida através da divisão do seu adjunto pelo seu determinante, ou seja,

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Figura 18: Guia de ondas principal carregado com um tubo ramificado de $\lambda/4$.

Fonte: O autor.

sonora total é constante ao longo do guia de ondas principal, ou seja, $P_{(x=0)} = P_{(x=t_1)}$. Por outro lado, a continuidade do fluxo de velocidade de volume assume a seguinte forma,

$$Q(x) = Q_{(x=0)} - Q_{(x=t_1)}. \quad (120)$$

Como $Z_{rl'} = P/Q(x)$ e assumindo a continuidade da pressão, a Equação 120 torna-se,

$$Q(x) = Q_{x=0} - Q_{x=t_1} = \frac{P}{Z_{rl'}}, \quad (121)$$

com $Z_{rl'} = Z_{rl} / A_{rl}$ representando a impedância normalizada pela área do tubo ramificado e $A_{rl} = V \times B$ sua área de seção transversal. A pressão e a velocidade de volume nos limites laterais ($x = 0$ e $x = t_1$) do tubo ramificado se relacionam como (Jiménez et al., 2021),

$$P_{x=0} = P_{x=t_1}, \quad (122)$$

$$Q_{x=0} - Q_{x=t_1} = \frac{P_{x=t_1}}{Z_{rl'}} \implies Q_{x=0} = \frac{P_{x=t_1}}{Z_{rl'}} + Q_{x=t_1}. \quad (123)$$

As Equações 122 - 123 podem ser escritas na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{rl'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_{x=t_1}. \quad (124)$$

Assim, a matriz de transferência de um tubo ramificado é identificada como,

$$M_{rl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{rl'} & 1 \end{bmatrix}. \quad (125)$$

5.3 Impedância de radiação

Fisicamente a radiação sonora de um guia de ondas principal para o meio externo pode ser compreendido como uma carga inercial adicional, ou seja, uma pequena massa oscilante de espessura δ_f em série ao guia de ondas, conforme ilustrado na Figura 19. Importante salientar que δ_f é muito menor que o comprimento do guia de ondas. Dito isto, o fluxo de velocidade neste problema é contínuo, $Q_0 = Q_x$, por outro lado, uma queda de pressão é evidente, a qual é dada por,

$$\Delta P = P_x - P_0 = -Z_{\text{rad}} Q_x, \quad (126)$$

com Z_{rad} representando a impedância de radiação da massa inercial. As equações que relacionam as pressões e o fluxo de velocidade são

$$\begin{cases} P_0 = P_x + Z_{\text{rad}} Q_x, \\ Q_0 = Q_x. \end{cases} \quad (127)$$

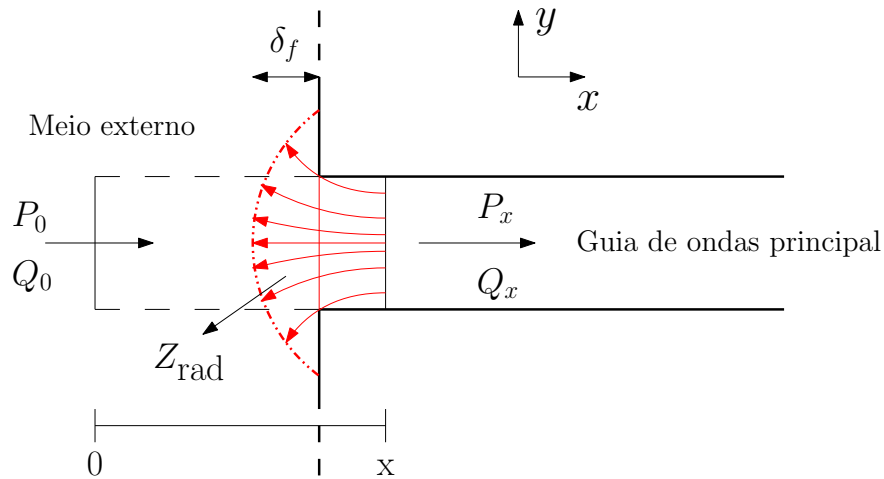
O sistema acima pode ser escrito na forma matricial (Jiménez et al., 2021),

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1 & Z_{\text{rad}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_x. \quad (128)$$

Consequentemente, a matriz de transferência que representa a radiação é reconhecida como,

$$M_{\text{rad}} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{\text{rad}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Figura 19: Fenômeno da radiação sonora de um guia de ondas principal.

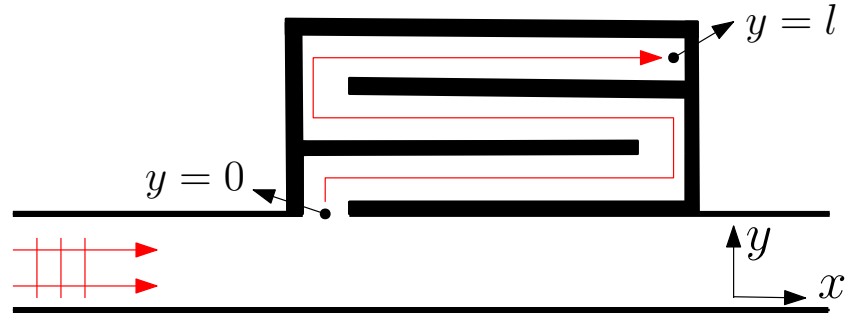


Fonte: O autor.

5.4 Impedância de um ressonador lateral

Em um guia de ondas principal carregado lateralmente por um tubo ressonador enrolado¹¹ de comprimento l , conforme ilustrado na Figura 20, a pressão total e a velocidade de volume ao final do tubo ($y = l$) são respectivamente: $P_T \neq 0$ e $Q = 0$.

Figura 20: Guia de ondas com um ressonador de $\lambda/4$ acoplado lateralmente.



Fonte: O autor.

A matriz (Equação 118) que representa este ressonador lateral se reduz a,

$$\begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{y=0} = \begin{bmatrix} \cos(k_{eq}l) & jZ'_{eq} \sin(k_{eq}l) \\ j \frac{\sin(k_{eq}l)}{Z'_{eq}} & \cos(k_{eq}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_T \\ 0 \end{bmatrix}_{y=l}. \quad (130)$$

A Equação 130 pode ser rescrita como,

$$\begin{cases} P_T(0) = \cos(k_{eq}l) P_T(l), \\ Q(0) = j \frac{\sin(k_{eq}l)}{Z'_{eq}} P_T(l). \end{cases} \quad (131)$$

Logo, a impedância na entrada do tubo ressonador acoplado é obtida como,

$$Z'_r = \frac{P_T(0)}{Q(0)} = -jZ'_{eq} \frac{\cos(k_{eq}l)}{\sin(k_{eq}l)} = -jZ'_{eq} \cot(k_{eq}l), \quad (132)$$

sendo $Z'_{eq} = Z_{eq}/S_r$ a impedância característica do tubo ressonador, S_r sua área de seção transversal e k_{eq} o seu número de onda. Se as dimensões envolvidas no ressonador lateral forem pequenas, k_{eq} e Z_{eq} tornam-se as Equações 35 e 36. Veja que o comprimento l do tubo é o comprimento de propagação da onda sonora. Além disso, o tubo é um ressonador de $\lambda/4$, desta maneira, sua primeira ressonância é determinada quando a impedância na entrada é zero, o que implica que $l = \lambda/4$ e explica a nomenclatura

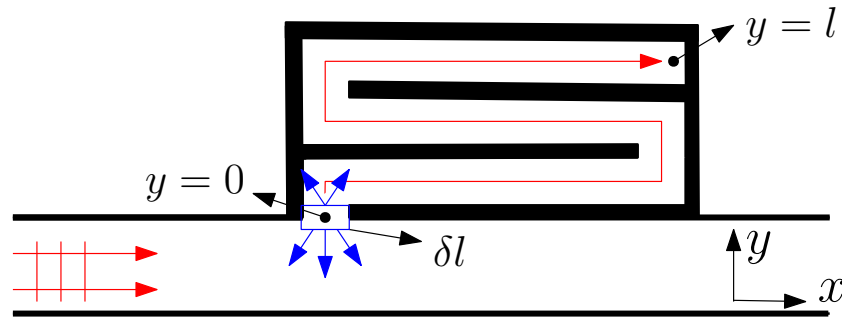
¹¹Importante destacar que nosso objetivo reside em caracterizar a impedância do tubo ressonador enrolado, portanto, os efeitos de curvatura no comprimento total e, consequentemente, na dissipação não receberão nenhum tratamento especial.

dada, ou seja,

$$\cot(k_{eq}l) = \cot\left(\frac{2\pi f}{c_{eq}} \times \frac{\lambda}{4}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (133)$$

A Equação 132 não representa integralmente a física do comportamento do ressonador de $\lambda/4$ devido ao fenômeno da radiação sonora do ressonador para o guia de ondas principal. Assim, uma correção final deve ser computada com um comprimento de propagação adicional, isto é, $k\delta l \ll 1$. Esta correção é influenciada pela geometria do tubo e torna-se importante principalmente quando a altura da seção transversal do ressonador é pequeno (Mechel, 2013). A Figura 21 ilustra a radiação do ressonador para o guia de ondas principal. Para determinar a expressão da correção final da radiação pode-se multiplicar uma matriz de correção pela matriz da Equação 130, ou seja,

Figura 21: Fenômeno da radiação de um ressonador acoplado lateralmente num guia de ondas.



Fonte: O autor.

$$\begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{y=0} = \begin{bmatrix} \cos(k\delta l) & jZ' \sin(k\delta l) \\ j\frac{\sin(k\delta l)}{Z'} & \cos(k\delta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_{eq}l) & jZ'_{eq} \sin(k_{eq}l) \\ j\frac{\sin(k_{eq}l)}{Z'_{eq}} & \cos(k_{eq}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{y=l}, \quad (134)$$

sendo k e $Z' = Z/A_{gp}$, respectivamente, o número de onda e a impedância normalizada do guia de onda principal. A_{gp} representa sua área. Os termos da matriz de correção acima podem ser expandidos por meio da série de Taylor,

$$\cos(k\delta l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (k\delta l)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{k^2 \delta l^2}{2!} + \frac{k^4 \delta l^4}{4!} - \dots + \approx 1 - k^2 \delta l^2, \quad (135)$$

$$\sin(k\delta l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (k\delta l)^{2n+1}}{(2n+1)!} = k\delta l - \frac{k^3 \delta l^3}{3!} + \frac{k^5 \delta l^5}{5!} - \dots + \approx k\delta l. \quad (136)$$

Assim, a Equação 134 pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{y=0} = \begin{bmatrix} 1 - k^2 \delta l^2 & jZ' k\delta l \\ j\frac{k\delta l}{Z'} & 1 - k^2 \delta l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_{eq}l) & jZ'_{eq} \sin(k_{eq}l) \\ j\frac{\sin(k_{eq}l)}{Z'_{eq}} & \cos(k_{eq}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_T \\ Q \end{bmatrix}_{y=l}. \quad (137)$$

Portanto, aplicando as condições de contorno ($Q = 0$ em $y = l$) e desenvolvendo as equações envolvidas, chega-se na seguinte equação (Liao et al., 2023),

$$Z'_r = \frac{P_T(0)}{Q(0)} = -j \frac{Z_{eq} \cot(k_{eq}l)}{S_r} + j \frac{\rho_0 \omega \delta l}{A_{gp}}. \quad (138)$$

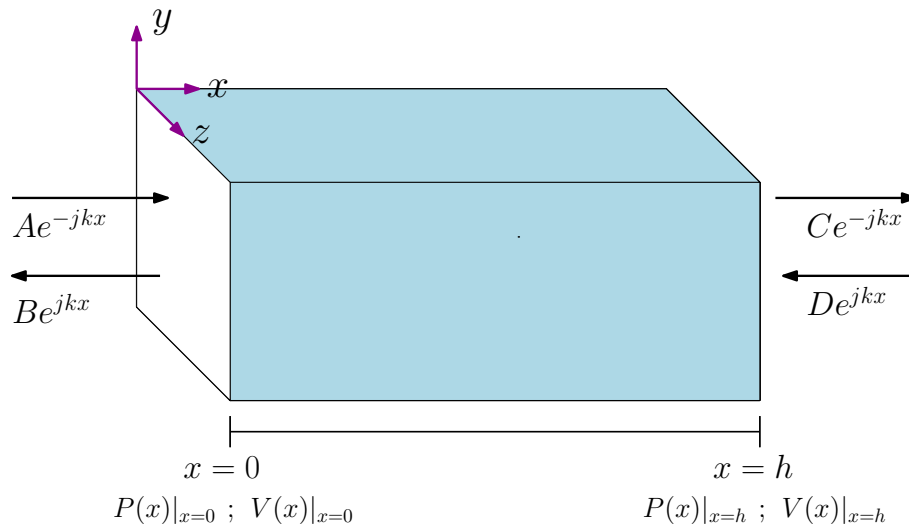
A equação acima que é a impedância total na entrada do ressonador acoplado ao guia de ondas e difere da Equação 132 pela adição da correção final devido a radiação. Além disso, se o ressonador apresentar área de seção transversal pequena (cm^2 ou mm^2), as perdas visco-térmicas são adicionadas substituindo k_{eq} e Z_{eq} pelos parâmetros complexos do modelo visco-térmico apresentado no Capítulo 3.

5.5 Condições físicas associadas ao problema de transmissão

Em problemas de transmissão ambos os lados da estrutura é envolvida pelo ar, desta forma, devido a esta condição de contorno as ondas sonoras que incidem de um lado podem se propagar na estrutura e posteriormente transmitir para o outro lado. Consequentemente, a depender da configuração geométrica da estrutura, três condições físicas são possíveis de ser analisada: se o sistema é simultaneamente recíproco e simétrico, não-recíproco e recíproco. Tais condições físicas implicam em comportamentos da estrutura que dependem da perspectiva de como as ondas sonoras incidem sobre si.

Antes de detalhar tais condições e perspectivas, vamos avaliar as relações entre os coeficiente de transmissão (τ) e reflexão (R) de uma estrutura genérica, conforme representado na Figura 22.

Figura 22: Estrutura genérica de comprimento h de um problema de transmissão.



Fonte: O autor.

Os campos de pressão envolvidos no problema são explicitados na figura acima. O vetor de estado que relaciona a pressão sonora e a velocidade de partículas em ambos lados da estrutura é,

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x=0} = T \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x=h} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x=h}. \quad (139)$$

No qual pode ser reescrita como,

$$\begin{cases} P|_{x=0} = T_{11}P|_{x=h} + T_{12}V|_{x=h}, \\ V|_{x=0} = T_{21}P|_{x=h} + T_{22}V|_{x=h}. \end{cases} \quad (140)$$

Além disso, considerando ondas sonoras oriundas de $-\infty$ e se propagando na direção positiva de x , tem-se,

$$P|_{x=0} = A + B \quad ; \quad V|_{x=0} = \frac{A - B}{Z_0}. \quad (141)$$

Por outro lado,

$$P|_{x=h} = C + D \quad ; \quad V|_{x=h} = \frac{C - D}{Z_0}. \quad (142)$$

Dividindo a Equação 141 por A e assumindo que D na Equação 142 é desprezível em comparação a C , pois a onda incide na direção positiva de x , obtém-se

$$P|_{x=0} = 1 + R^- \quad ; \quad P|_{x=h} = \tau^- e^{-jkh}, \quad (143)$$

$$V|_{x=0} = \frac{1 - R^-}{Z_0} \quad ; \quad V|_{x=h} = \frac{\tau^- e^{-jkh}}{Z_0}. \quad (144)$$

É imediato perceber que $R^- = B/A$ e $\tau^- = C$. Semelhantemente, considerando ondas sonoras oriundas de $+\infty$ e se propagando na direção negativa de x , tem-se

$$P|_{x=0} = A + B \quad ; \quad V|_{x=0} = \frac{A - B}{Z_0}, \quad (145)$$

$$P|_{x=h} = D + C \quad ; \quad V|_{x=h} = \frac{D - C}{Z_0}. \quad (146)$$

Assumindo que A é desprezível em relação a B na Equação 145, pois a onda incide na direção negativa de x e dividindo a Equação 146 por C , chega-se

$$P|_{x=0} = \tau^+ e^{jkh} \quad ; \quad P|_{x=h} = R^+ + 1, \quad (147)$$

$$V|_{x=0} = \frac{-\tau^+ e^{jkh}}{Z_0} \quad ; \quad V|_{x=h} = \frac{R^+ - 1}{Z_0}. \quad (148)$$

Note que neste caso $R^+ = D/C$ e $\tau^+ = B$.

Combinando a parte superior da Equação 140 com as Equações 143 e 144, obtemos

$$1 + R^- = T_{11}\tau^- e^{-jkh} + \frac{T_{12}\tau^- e^{jkh}}{Z_0}, \quad (149)$$

$$1 + R^- = \tau^- e^{-jkh} \left[T_{11} + T_{12}/Z_0 \right]. \quad (150)$$

A equação acima pode ser reescrita de modo que,

$$\boxed{\tau^- e^{-jkh} = \frac{1 + R^-}{T_{11} + T_{12}/Z_0}.} \quad (151)$$

De outra forma, combinando a parte inferior da Equação 140 com as Equações 143 e 144 obtém-se

$$\frac{1 - R^-}{Z_0} = T_{21}\tau^- e^{-jkh} + \frac{T_{22}\tau^- e^{-jkh}}{Z_0}, \quad (152)$$

$$\frac{1 - R^-}{Z_0} = \tau^- e^{-jkh} \left[T_{21} + T_{22}/Z_0 \right]. \quad (153)$$

A equação acima pode ser reescrita de modo que,

$$\boxed{\tau^- e^{-jkh} = \frac{1 - R^-}{Z_0 T_{21} + T_{22}}.} \quad (154)$$

Sob outra perspectiva, combinando a parte superior da Equação 140 com as Equações 147 e 148 obtém-se

$$\tau^+ e^{jkh} = T_{11}(R^+ + 1) + \frac{T_{12}(R^+ - 1)}{Z_0}, \quad (155)$$

ou melhor,

$$\boxed{\tau^+ e^{jkh} = T_{11}(1 + R^+) + \frac{T_{12}(R^+ - 1)}{Z_0}.} \quad (156)$$

Por fim, combinando a parte inferior da Equação 140 com as Equações 147 e 148 chega-se a

$$\frac{-\tau^+ e^{jkh}}{Z_0} = T_{21}(R^+ + 1) + \frac{T_{22}(R^+ - 1)}{Z_0}. \quad (157)$$

A expressão acima pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\boxed{\tau^+ e^{jkh} = -T_{21}Z_0(1 + R^+) - T_{22}(R^+ - 1).} \quad (158)$$

A partir das Equações 151, 154, 156 e 158, as possíveis condições físicas que implicam em distintos comportamentos da estrutura pode ser avaliada. Desta forma, estas condições são destacadas a seguir.

5.5.1 Sistema não-recíproco

As Equações 151 e 154 permitem definir os coeficientes de transmissão e reflexão na direção positiva de x ,

$$(1 + R^-) + (1 - R^-) = \tau^- e^{-jkh} \left[T_{11} + T_{12}/Z_0 \right] + \tau^- e^{-jkh} \left[Z_0 T_{21} + T_{22} \right], \quad (159)$$

$$\tau^- = \frac{2e^{-jkh}}{T_{11} + T_{12}/Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}, \quad (160)$$

$$(1 + R^-) - (1 - R^-) = \tau^- e^{-jkh} \left[T_{11} + T_{12}/Z_0 \right] - \tau^- e^{-jkh} \left[Z_0 T_{21} + T_{22} \right], \quad (161)$$

$$R^- = \frac{T_{11} + T_{12}/Z_0 - Z_0 T_{21} - T_{22}}{T_{11} + T_{12}/Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}. \quad (162)$$

Por similaridade, as Equações 156 e 158 fornece os coeficientes de transmissão e reflexão da direção negativa de x ,

$$\tau^+ = \frac{2e^{jkh} [T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21}]}{T_{11} + T_{12}/Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}, \quad (163)$$

$$R^+ = \frac{-T_{11} + T_{12}/Z_0 - Z_0 T_{21} + T_{22}}{T_{11} + T_{12}/Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}. \quad (164)$$

Assim, é imediato concluir que os coeficientes de transmissão e reflexão são diferentes, $\tau^+ \neq \tau^-$ e $R^+ \neq R^-$. Logo, o sistema é caracterizado como não-recíproco, pois seu comportamento depende da direção na qual a onda sonora incide sobre sua estrutura.

5.5.2 Sistema recíproco

Pelo princípio da reciprocidade uma estrutura recíproca implica que o determinante da Equação 139 é unitário ($\det[T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21}] = 1$) (Jiménez et al., 2021). Consequentemente, a Equação 163 torna-se idêntica a Equação 160,

$$\tau = \tau^+ = \tau^- = \frac{2}{T_{11} + T_{12}/Z_0 + Z_0 T_{21} + T_{22}}. \quad (165)$$

Assim, a estrutura apresenta comportamento em problemas de transmissão que independente da direção da onda incidente, ou seja, a estrutura torna-se linear e invariante no tempo. Esta condição é facilmente satisfeita por materiais acústicos do tipo porosos, mas nem sempre por metamateriais periódicos. Por outro lado, nesta condição o coeficiente de reflexão são os mesmos dados pelas Equações 162 e 164.

5.5.3 Sistema recíproco e simétrico

Por fim, se a estrutura na Figura 22 apresentar espelhamento em relação a $x = h/2$ a mesma é chamada de recíproca e simétrica, visto que seu comportamento em problemas de reflexão e transmissão independe da direção da onda incidente, ou seja, $R^+ = R^-$ e $\tau^+ = \tau^-$. Neste caso, na matriz total (Equação 139) o termo $T_{11} = T_{22}$. Consequentemente, os coeficientes tornam-se,

$$\tau = \tau^+ = \tau^- = \frac{2}{2T_{22} + T_{12}/Z_0 + Z_0T_{21}}, \quad (166)$$

$$R = R^+ = R^- = \frac{+T_{12}/Z_0 - Z_0T_{21}}{2T_{22} + T_{12}/Z_0 + Z_0T_{21}}. \quad (167)$$

O caráter recíproco e simétrico ou invariância de reflexão de uma configuração do metamaterial será explorado no Capítulo 7, de modo que sua importância no controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras será demonstrado.

5.6 Síntese do capítulo

Neste capítulo, demonstramos que o comportamento da propagação de ondas planas 1D em qualquer estrutura acústica pode ser representada por um método que considera o vetor de estado $\mathbf{T} = (P, Q)$. Este método é conhecido como método da matriz de transferência (MMT) e o vetor de estado descreve os campos de pressão sonora e velocidade de volume no início e no final da estrutura. A riqueza deste método reside na facilidade de adicionar as perdas visco-térmicas. Matrizes de sistemas geométricos usuais, uma matriz de radiação e a determinação da impedância de um ressonador foram obtidas de forma delineada por este método. Além disso, três condições físicas que sob a perspectiva da incidência das ondas sonoras especificam o comportamento de estruturas acústicas em problema de transmissão foram detalhadas também. Por fim, a partir do MMT e utilizando o teorema de Bloch-Floquet apresentado no Capítulo 4, a relação de dispersão em qualquer estrutura periódica pode ser facilmente derivada, conforme será detalhado a seguir no Capítulo 6.

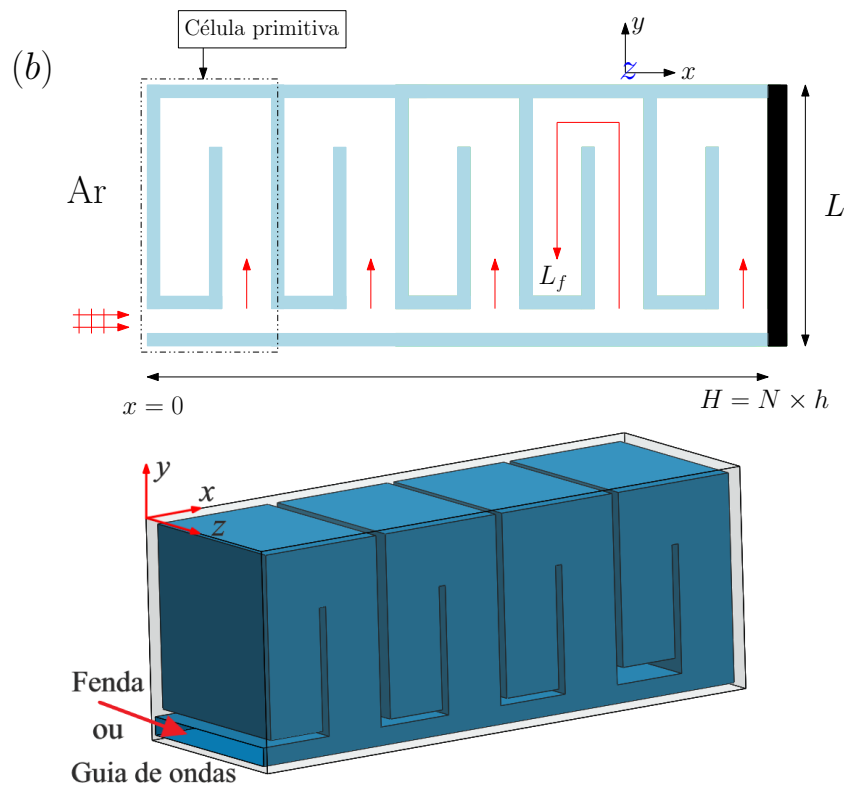
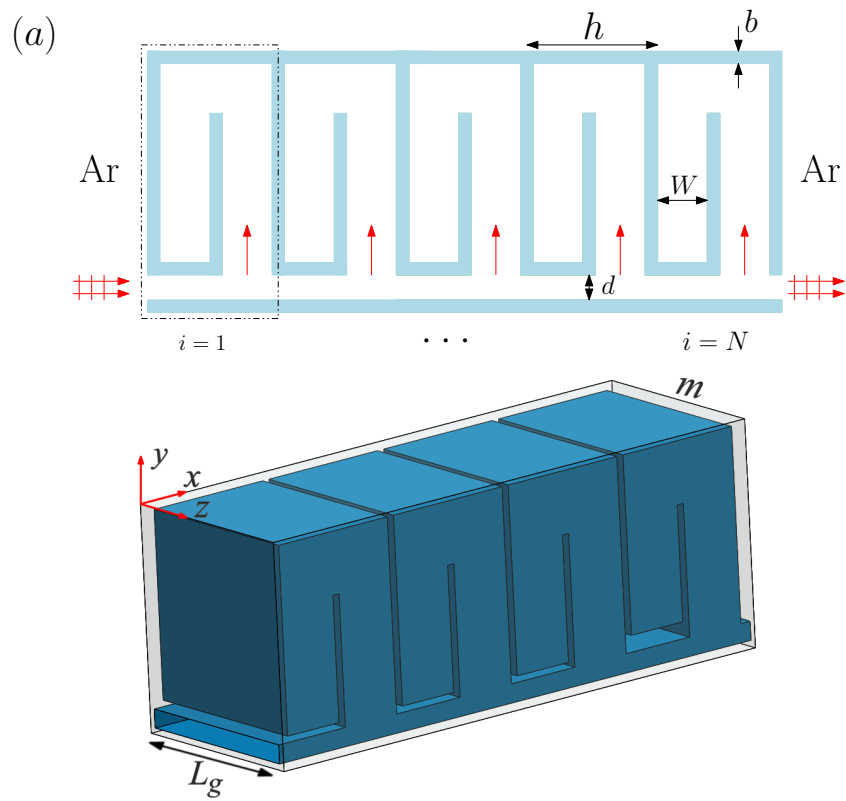
6 Materiais e métodos

Neste capítulo são apresentados os materiais utilizados para lidar com o controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras num amplo espectro de frequências, ou seja, as estruturas geométricas periódicas propostas para problemas de reflexão e transmissão sonora. Além disso, os métodos necessários para alcançar os objetivos propostos também são detalhados. Neste sentido, primeiramente são descritos os modelos matemáticos baseados no MMT incluindo as perdas visco-térmicas. Em seguida, o teorema de Bloch-Floquet é combinado com o MMT, consequentemente, a relação de dispersão que é uma das principais características das ondas de Bloch em estruturas periódicas é derivada. Um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos (MEF) e os métodos experimentais também são detalhados. Por fim, com base em dados experimentais um método de caracterização das propriedades efetivas negativas do metamaterial acústico (MA) é apresentado.

6.1 A estrutura sob estudo

As configurações geométricas elementares do MA proposto para problemas de transmissão e reflexão sonora são, respectivamente, apresentadas na Figura 23 (a) e (b). Note que a diferença entre elas reside simplesmente nas condições de contorno geométrica. A estrutura baseia-se num guia de ondas planas de baixa dimensão (fenda), ou seja, um tubo de seção transversal retangular $S_{go} = d L_g$ e comprimento total H , com d representando a altura do guia de ondas. $L_g = m - 2b$ define a largura do guia de ondas na direção z e m a largura total da estrutura. Neste estudo considera-se que não existe interação fluido-estrutura, portanto, o parâmetro b estabelece a espessura das paredes rígidas que moldam toda a estrutura. Na parte superior do guia de ondas N dispersores locais são acoplados periodicamente, estes dispersores são tubos enrolados de $\lambda/4$ de espessura h , a qual define a constante de rede do MA. Além disso, cada dispersor tem altura $W = (h - b - (n - 1) \times b)/n$ e uma largura $A = L_g$ na direção z . Como as ondas sonoras são forçadas a se propagarem em um comprimento total $L_f \approx n \times (L - 2b) - (n - 1) \times W$ nos dispersores enrolados, mais energia pode ser dissipada na estrutura. O parâmetro n representa a número de canais enrolados e pode variar desde que a constante de rede seja preservada. Por fim, destaca-se que

Figura 23: Estrutura do MA periódico para problema de: (a) transmissão e (b) reflexão.



Fonte: O autor.

no Capítulo 8 a estrutura postulada para problema de transmissão será combinada de forma a gerar um arranjo geométrico que possibilite desempenho acústico e passagem

de fluxo de ar, portanto, este arranjo será denominado MA ventilado.

6.2 Métodos matemáticos

Algumas hipóteses são assumidas ao descrever o comportamento analítico das estruturas acima, entre elas destacamos: (i) o meio está sob excitação harmônica temporal ($e^{j\omega t}$) e (ii) as estruturas estão sob excitação de baixa frequência, de modo que as frequências consideradas nas análises estão abaixo da frequência de corte ($f_c < c_0/(2L_g)$) do primeiro modo de ordem superior das seções transversais do guia de ondas e dos dispersores.

6.2.1 Método matemático do problema de transmissão

Considerando excitações ao longo da direção x , é notório que o comportamento da estrutura pode ser teoricamente analisado por meio de uma matriz global ($\mathbf{T}_{pt}$), a qual relaciona um vetor de estado $\mathbf{T} = (P, Q)$ em ambos os lados, ou seja,

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_{pt} \mathbf{T}_H = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}_H \Rightarrow \begin{bmatrix} P(x=0) \\ Q(x=0) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{pt} \begin{bmatrix} P(x=H) \\ Q(x=H) \end{bmatrix}. \quad (168)$$

Considerando que há N dispersores periódicos acoplados ao guia de ondas e obedecendo as condições de contorno, todo o sistema pode ser modelado usando o modelo de célula unitária primitiva, conforme destacado na Figura 23 (a). Desta forma, $\mathbf{T}_{pt}$ é escrito por um produto de matrizes da seguinte forma (G. N. Almeida et al., 2024; Jiménez et al., 2021)

$$\mathbf{T}_{pt} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{rad} \left(\mathbf{M}_{go-1} \mathbf{M}_d \mathbf{M}_{go-2} \right)^N \mathbf{M}_{rad}, \quad (169)$$

com $\mathbf{M}_{go-1}$ e $\mathbf{M}_{go-2}$ representando as matrizes do guia de ondas antes e depois do dispersor, respectivamente,

$$\mathbf{M}_{go-1} = \begin{bmatrix} \cos[k_{go}(h-W)] & jZ_{go} \sin[k_{go}(h-W)] \\ j \sin[k_{go}(h-W)]/Z_{go} & \cos[k_{go}(h-W)] \end{bmatrix}, \quad (170)$$

$$\mathbf{M}_{go-2} = \begin{bmatrix} \cos[k_{go}b] & jZ_{go} \sin[k_{go}b] \\ j \sin[k_{go}b]/Z_{go} & \cos[k_{go}b] \end{bmatrix}, \quad (171)$$

de maneira que $k_{go} = \omega \sqrt{\rho_{go}/K_{go}}$ e $Z_{go} = \sqrt{\rho_{go}K_{go}}/S_{go}$ representam o número de onda efetivo e a impedância acústica característica no guia de ondas, respectivamente.

ρ_{go} e K_{go} são as funções densidade e *bulk modulus* complexas e dependentes da frequência, ambas representadas pelas Equações 39 e 41.

Observe que o dispensor é um tubo enrolado ramificado acoplado paralelamente ao guia de ondas, sua matriz na Equação 169 é, portanto,

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{dis} & 1 \end{bmatrix}, \quad (172)$$

com Z_{dis} representando a impedância total do dispensor. Conforme vimos no Capítulo 5, esta impedância considerando a correção final devido a radiação sonora do dispensor para o guia de ondas é escrita na seguinte forma

$$Z_{dis} = -jZ_d \cot(k_d L_f) + j \frac{\omega \rho_0 (\delta_{ef})}{A_{gp}}. \quad (173)$$

Com $A_{gp} = A \times h$ representando a área da seção transversal do guia de ondas e δ_{ef} denotando a radiação sonora, a qual é determinada por (G. N. Almeida et al., 2025; Mechel, 2013)

$$\delta_{ef} = 0,82W \left[1 - 0,235 \left(\frac{W}{L_g} \right) - 1,32 \left(\frac{W}{L_g} \right)^2 + 1,54 \left(\frac{W}{L_g} \right)^3 - 0,86 \left(\frac{W}{L_g} \right)^4 \right]. \quad (174)$$

Por outro lado, na Equação 173 a grandeza $k_d = \omega \sqrt{\rho_d / K_d}$ representa o número de onda efetivo e $Z_d = (\sqrt{\rho_d K_d}) / A_d$ a impedância característica do dispensor. Com $A_d = W \times A$ representando sua área de seção transversal. Importante destacar que a impedância total do dispensor é dependente de seu comprimento (L_f) no qual a onda se propagará. Ademais, os parâmetros ρ_d e K_d são as funções densidade e módulo de compressibilidade ambas representadas pelas Equações 32 e 34, respectivamente.

Por fim, devido à condição de contorno geométrica, ambos os lados do MA são circundados pelo ar (veja Figura 23 (a)). Portanto, a radiação sonora deve ser considerada e sua matriz final é expressa como

$$\mathbf{M}_{rad} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{rad} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -j\omega \rho_0 \delta_f / (\phi_t A_t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (175)$$

com $A_t = L \times m$ e $\phi_t = A_{slit} / A_t$ representando, respectivamente, a área total e a fração de preenchimento do MA. A correção final da radiação sonora para o meio externo pelo guia de ondas é dada por (Mechel, 2013)

$$\delta_f = \sum_{n_r=1}^{\infty} d\phi_t \frac{\sin^2(n_r \pi \phi_t)}{(n_r \pi \phi_t)^3}. \quad (176)$$

A partir da matriz de transferência (Equação 169), o coeficiente de absorção sonora e a perda de transmissão sonora do MA podem ser expressos, respectivamente, como

$$\alpha = 1 - |R|^2 - |\tau|^2, \quad (177)$$

$$PTS = 10 \log_{10} \left(|\tau^{-1}|^2 \right) \text{ [dB]}. \quad (178)$$

Observe que dependendo da direção de incidência das ondas na estrutura, os coeficientes τ e R para uma estrutura não-recíproca são representados pelas Equações 160 , 162 , 163 e 164. Para uma estrutura recíproca pelas Equações 165 , 162 e 164. E para um metamaterial recíproco e simétrico pelas Equações 166 e 167. Ademais, significantes informações sobre os parâmetros efetivos do MA podem ser derivados diretamente dos coeficientes da matriz global do sistema (Equação 169). Destaca-se primeiramente a impedância característica efetiva, a qual é obtida como

$$Z_{\text{eff}} = \frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{T_{12}}{T_{21}}}. \quad (179)$$

Consequentemente, a partir da impedância efetiva o módulo de compressibilidade efetivo e a densidade de massa efetiva da estrutura são obtidos da seguinte forma

$$K_{\text{eff}} = Z_{\text{eff}} \frac{\omega}{q}, \quad (180)$$

$$\rho_{\text{eff}} = Z_{\text{eff}} \frac{q}{\omega}. \quad (181)$$

O parâmetro q na Equações 180 e 181 representa o número de onda de Bloch, o qual será derivado na Seção 6.3.

6.2.2 Método matemático do problema de reflexão

Considere agora a estrutura do problema de reflexão de maneira que N dispersores periódicos são acoplados ao guia de ondas, conforme apresentado na Figura 23 (b). Obedecendo as condições de contorno do problema, a matriz global ($\mathbf{T}_{\text{pr}}$) obtida a partir do modelo de célula unitária é escrito por um produto de matrizes da seguinte forma (G. N. Almeida et al., 2023)

$$\mathbf{T}_{\text{pr}} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\text{rad}} \left(\mathbf{M}_{\text{go-1}} \mathbf{M}_{\text{d}} \mathbf{M}_{\text{go-2}} \right)^N. \quad (182)$$

Observe que cada matriz que compõe o sistema na Equação 182 obedece a mesma descrição relatada no problema de transmissão. Desta forma, a partir da matriz global acima, os coeficientes de reflexão e absorção sonora são, nesta ordem, obtidos como,

$$R = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0}, \quad (183)$$

$$\alpha = 1 - |R|^2. \quad (184)$$

sendo $Z_S = t_{11}/t_{21}$ a impedância de superfície da estrutura. Detalhes da derivação da Equação 183 pelo método da matriz de transferência pode ser consultado no Apêndice B. Por fim, a partir dos coeficientes da matriz global da estrutura nos problemas de transmissão (Equação 169) e reflexão (Equação 182) e considerando o teorema de Bloch-Floquet, a relação de dispersão do MA será derivada a seguir.

6.3 Relação de dispersão

A dispersão no MA está associada a dependência não linear com a frequência que o vetor de onda (número de onda de Bloch) apresenta, conseqüentemente, componentes de diferentes frequências do som podem se propagar a diferentes velocidades na estrutura. Tomando como exemplo a estrutura periódica da Figura 23 (a) somente ondas planas interagem. Desta forma, com base no teorema de Bloch-Floquet estas ondas assumem a mesma simetria e periodicidade da estrutura, a qual é conhecida como ondas de Bloch. Conseqüentemente, o campo de pressão e o campo de velocidade destas ondas tornam-se funções de Bloch e assumem a seguinte forma padrão (G. N. Almeida et al., 2025; Bradley, 1993)

$$P(x) = \Phi_1 e^{-jqh}, \quad (185)$$

$$Q(x) = \Phi_2 e^{-jqh} \quad (186)$$

onde $\Phi_1 = P(x + h)$ e $\Phi_2 = Q(x + h)$ representam, respectivamente, a amplitude de pressão e a velocidade de volume que variam periodicamente com período h e q é o número de onda de Bloch. Na representação padrão acima, as ondas de Bloch são ondas viajantes unidimensionais de frequência espacial q que são moduladas em amplitude e fase periodicamente por $P(x + h)$.

Considerando o comportamento harmônico temporal das quantidades governantes ($e^{j\omega t}$), para se obter a relação de dispersão do MA usando sua periodicidade especificamente necessita-se resolver um problema de autovalor, o qual é construído a partir de uma célula primitiva unitária. Assim, o teorema de Bloch-Floquet pode ser cumprido de modo que a matriz de transferência de uma célula primitiva pode ser descrita da seguinte forma (Bradley, 1993)

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_{x=0} = \mathbf{T}_{pt} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_{x=h} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_{x=h} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \cdot (e^{-jqh}) \\ Q \cdot (e^{-jqh}) \end{bmatrix}_{x=0}. \quad (187)$$

Note que a matriz $\mathbf{T}_{pt}$ acima é obtida pela Equação 169 para o problema de transmissão e pela Equação 182 para o problema de reflexão. A partir da Equação 187 um problema de autovalor é adquirido da seguinte forma

$$\left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{jqh} & 0 \\ 0 & e^{jqh} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}_{x=h} = 0, \quad (188)$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{jqh} & 0 \\ 0 & e^{jqh} \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (189)$$

A Equação 189 é uma equação característica ou polinômio mônico, portanto, substituindo $\xi = e^{jqh}$, o seguinte problema é obtido

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \xi & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \xi \end{vmatrix} = \xi^2 - \xi(T_{11} + T_{22}) + |T| = 0. \quad (190)$$

Na Equação 190 por meio do princípio da reciprocidade, $|T| = [T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}] = 1$, portanto as ondas de Bloch que se propagam para frente e para trás exibem a mesma dispersão. Desta forma, reescrevendo a Equação 190 a forma usual da relação de dispersão de Bloch pode ser encontrada como

$$\xi^2 + 1 = \xi(T_{11} + T_{22}) \implies \xi + \frac{1}{\xi} = T_{11} + T_{22}, \quad (191)$$

finalmente substituindo ξ por e^{jqh} encontramos o número de onda de Bloch, ou seja,

$$e^{jqh} + e^{-jqh} = T_{11} + T_{22} \implies 2\cos(qh) = T_{11} + T_{22}, \quad (192)$$

$$q = \frac{\cos^{-1} \left(\frac{T_{11} + T_{22}}{2} \right)}{h}. \quad (193)$$

Podemos investigar melhor o vetor de onda de Bloch resolvendo o produto da matriz global (Equação 169 por exemplo), de modo que os coeficientes são expressos como

$$\begin{aligned} T_{11} = & \cos[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] + j \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \sin[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] \\ & + j \frac{Z_{go}}{Z_{dis}} \sin[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] + \frac{Z_{rad}}{Z_{dis}} \cos[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] \\ & - \sin[k_{go}(h - W)] \sin[k_{go}b] + j \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \cos[k_{go}(h - W)] \sin[k_{go}b], \end{aligned} \quad (194)$$

$$\begin{aligned} T_{22} = & j \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \sin[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] + \frac{Z_{rad}}{Z_{dis}} \cos[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] \\ & + j \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \cos[k_{go}(h - W)] \sin[k_{go}b] - j \frac{1}{Z_{go}} \sin[k_{go}(h - W)] \sin^2[k_{go}b] \\ & - j \frac{1}{Z_{dis}} \cos[k_{go}b] \sin^2[k_{go}b] + j \frac{1}{Z_{go}} \cos[k_{go}(h - W)] \cos[k_{go}b] \sin[k_{go}b]. \end{aligned} \quad (195)$$

Manipulando as Equações 194 e 195 e substituindo na Equação 193, obtém-se

$$q = \frac{1}{h} \cos^{-1} \left(\frac{\cos[k_{go} b]}{2} \left\langle \cos[k_{go} (h - W)] + 2j \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \sin[k_{go} (h - W)] + \frac{Z_{go}}{Z_{dis}} \left(j \sin[k_{go} (h - W)] + 2 \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \cos[k_{go} (h - W)] \right) \right\rangle + j \frac{\sin[k_{go} b]}{2} \right. \\ \left. \left\langle j \sin[k_{go} (h - W)] + 2 \frac{Z_{rad}}{Z_{go}} \cos[k_{go} (h - W)] + j \sin[k_{go} b] \left(j \sin[k_{go} (h - W)] + \frac{Z_{go}}{Z_{dis}} \cos[k_{go} (h - W)] \right) + \cos[k_{go} (h - W)] \cos[k_{go} b] \right\rangle \right). \quad (196)$$

Portanto, é imediato perceber que a relação de dispersão da estrutura periódica torna-se uma relação funcional entre a frequência temporal (ω) e a frequência espacial de Bloch (q) (Brillouin, 1946). Uma análise objetiva da Equação 193 ou Equação 196 pode ser feita assumindo a inexistência dos dispersores ($L_f = 0$) no metamaterial, neste caso, observe que a relação degenera para a relação de dispersão linear clássica $q = k_{go}$. Além disso, devido a função cosseno inverso ser uma função com vários valores, a relação de dispersão recorrentemente é chamada de relação de dispersão multivalorada (Bradley, 1991). Conforme veremos, na prática a relação de dispersão, em conjunto com a impedância acústica de Bloch e o parâmetro g_n/f_n especificam integralmente as funções de onda de Bloch numa estrutura periódica. Por fim, a velocidade de fase¹² na estrutura periódica é obtida da seguinte forma (Vergara et al., 2025)

$$\tilde{c}_p = \text{Re} \left(\frac{\omega}{q} \right) = \text{Re} \left[\frac{\omega}{\frac{\cos^{-1}}{h} \left(\frac{T_{11} + T_{22}}{2} \right)} \right]. \quad (197)$$

6.4 Método numérico

Para validar os modelos teóricos apresentados acima, simulações numéricas utilizando o método dos elementos finitos (MEF) foram realizadas. Resumidamente, o MEF é um método numérico que se baseia no processamento de diversas equações algébricas mediante operações matriciais (G. Liu & Quek, 2003). O mesmo busca solucionar problemas físicos que são descritos por equações diferenciais (EDs) fornecendo uma solução numérica por meio da discretização do domínio do problema em elementos que se ligam por nós, sendo então possível resolver as EDs algebricamente. Usando o princípio dos trabalhos virtuais¹³ é possível obter a forma fraca da ED de

¹²A velocidade de fase é a velocidade com que as frentes de fase ($\varphi(x, t) = qx - \omega t$) se propagam em um meio. Portanto, esta velocidade está relacionada com o número de onda de Bloch (q).

¹³O princípio do trabalho virtual é um método variacional que afirma que para qualquer deslocamento virtual, a soma dos trabalhos feitos por forças externas, internas e pseudo-forças inerciais é nula.

um problema acústico (equação de Helmholtz), consequentemente, a partir das funções de forma que descrevem os elementos que compõem o domínio discreto monta-se a equação matricial global do domínio (Petyt, 2010).

Em geral, a construção de um modelo numérico utilizando o MEF em *softwares* de código aberto ou comercial, requer quatro etapas principais (Cook et al., 2007):

- (i) A construção do domínio do problema;
- (ii) A tipificação das propriedades do material e/ou meio utilizados;
- (iii) A discretização do domínio (malha) em elementos suficientemente pequenos, no qual as características físicas destes elementos estão nos nós;
- (iv) A especificação das condições de contorno do problema.

Em problemas acústicos o objetivo nas simulações é determinar a velocidade de partículas e o campo de pressão em todos os nós da malha, para em seguida realizar o estudo desejável. É notório que a evolução no processamento de dados computacionais tornou o MEF uma ferramenta robusta e aplicável a diversos problemas físicos e de engenharia, desta forma, justifica-se a escolha do método devido a três vantagens:

- (i) Informações completas das variáveis mais importantes podem ser adquiridas em qualquer ponto (nó) de interesse do domínio;
- (ii) As condições de contorno podem ser aplicadas livremente no problema;
- (iii) Descreve concisamente a propagação sonora em áreas de baixa dimensão.

Portanto, observe que a última vantagem desempenha papel importante ao descrever o comportamento metamaterial proposto. A seguir o modelo numérico de cada problema é detalhado.

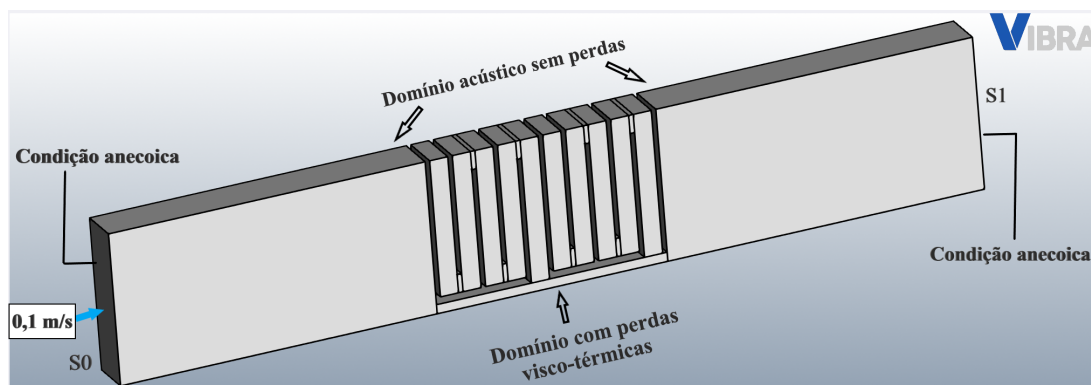
6.4.1 Modelo numérico para problemas de transmissão e reflexão

Embora algumas análises específicas tenham sido realizadas no *software* comercial COMSOL 6.2, em geral os modelos numéricos para os problemas de transmissão e reflexão sonora foram estabelecidos utilizando o *software* de código aberto Vibra¹⁴ (Vargas et al., 2025). Neste sentido, assumiu-se um comportamento harmônico estacionário, de modo que adquiriu-se o comportamento da velocidade de partículas, do campo de pressão acústica, entre outros parâmetros, no domínio da frequência. Em ambos modelos a interação entre a acústica clássica sem perdas e acústica visco-térmica foi estabelecida. Os modelos construídos para os problemas de transmissão e reflexão

¹⁴O Vibra é um *software* de código aberto desenvolvido em linguagem Python para modelar problemas vibroacústicos utilizando o MEF. O *software* é o resultado de um projeto desenvolvido no Laboratório de Vibrações e Acústica pelo grupo *Multidisciplinary Modeling and Optimization* (MOPT) e patrocinado pela Petrobras. Para mais detalhes acesse: <https://github.com/MOPT-UFSC/VIBRA/tree/main>.

são ilustrados nas Figuras 24 e 25, respectivamente. Uma condição de contorno do tipo velocidade superficial com amplitude de 0,1 m/s foi aplicado em ambos os problemas.

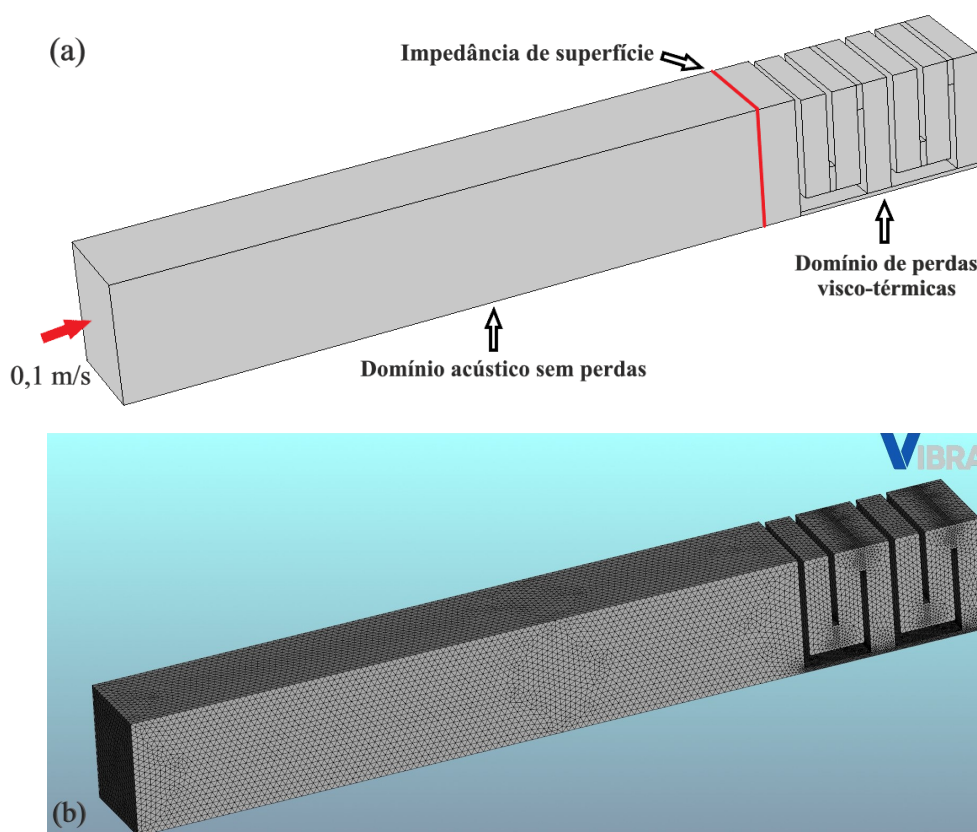
Figura 24: Modelo numérico construído para o problema de transmissão.



Fonte: O autor.

Em relação às condições de contorno, todas as bordas laterais dos domínios são consideradas como paredes rígidas, portanto, não existe interação fluido-estrutura.

Figura 25: (a) Configuração do modelo numérico construído para o problema de reflexão. (b) Exemplo de malha do modelo com elementos tetraédricos quadráticos.



Fonte: O autor.

Além disso, no modelo numérico do problema de transmissão uma condição de não reflexão (anecoica) é aplicada no início e no final do domínio. Note que na região do metamaterial devido as pequenas dimensões envolvidas as perdas foram adicionadas no *software* através da função *viscous-thermal loss model*, onde o modelo de perdas visco-térmicas do Stinson foi selecionado.

As linhas sólidas vermelha na Figura 25 (a) representa a superfície na qual a média da impedância de superfície é calculada,

$$Z_{\text{Vibra}} = \left\langle \frac{P_n}{U_n} \right\rangle, \quad (198)$$

com P_n e U_n representando a pressão sonora e a velocidade de partículas complexas na interface, respectivamente. Portanto, o coeficiente de absorção sonora (Equação 184) no modelo numérico pode ser calculado substituindo Z_S por Z_{Vibra} na Equação 183.

De outro modo, na Figura 24 tem-se as áreas de seção transversal a jusante (S_0) e a montante (S_1) do metamaterial no problema de transmissão, assim, a potência sonora incidente e transmitida no Vibra são determinadas da seguinte forma,

$$W_{\text{in}} = 10 \log_{10} \left(\int_{S_0} \frac{I_{\text{in}}}{I_{\text{ref}}} dA \right), \quad (199)$$

$$W_{\text{out}} = 10 \log_{10} \left(\int_{S_1} \frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{ref}}} dA \right), \quad (200)$$

com $I_{\text{ref}} = 10^{-12}$ watt/m² representando o nível de intensidade sonora de referência. As intensidades sonora a jusante e a montante nas Equações 199 e 200 são determinadas como,

$$I_{\text{in}} = \frac{P_{\text{in}} \times \bar{v}_{\text{in}}}{2}, \quad (201)$$

$$I_{\text{out}} = \frac{P_{\text{out}} \times \bar{v}_{\text{out}}}{2}, \quad (202)$$

sendo $P_{\text{in}} = (v_n \times Z_0)/2$ a pressão sonora a jusante e $\bar{v}_{\text{in}} = P_{\text{in}}/Z_0$ velocidade de partículas a jusante. P_{out} e $\bar{v}_{\text{out}}$ representam, respectivamente, a pressão e a velocidade de partículas na interface a montante. Note que $v_n = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ representa a velocidade normal prescrita na entrada. Consequentemente, a PTS no *software* é determinada como

$$PTS_{\text{Vibra}} = W_{\text{in}} - W_{\text{out}}. \quad (203)$$

Uma malha travada nos modelos numéricos foram definidas com a seguinte regra: o tipo de elemento selecionado foi tetraédrico com função de forma quadrática, com tamanho máximo de elemento $\lambda_{\max}/12$ e tamanho mínimo de elemento $\lambda_{\min} = 0,1$ mm. Note que a escolha por elementos tão pequenos se deve a necessidade de capturar integralmente a física da camada limite em nossas análises. Tomando como exemplo o problema de transmissão, a solução final resultou em 100.846 elementos sólidos. O tempo computacional máximo para toda a faixa de frequência avaliada (100 – 2600 Hz) com intervalo de frequência de 2 Hz foi de 18 minutos e 48 segundos. Todas as simulações foram realizadas em um computador *desktop* com as seguintes configurações: processador AMD Ryzen 9 7950X 16-Core processor 4.50 GHz, 64 GB de RAM e HD SSD (estado sólido) de 1 TB. Por fim, para confirmar a precisão e consistência das simulações realizadas, uma análise de convergência do modelo numérico e uma validação entre o Vibra V0.4.0 e o COMSOL 6.2 são apresentados no Apêndice C.

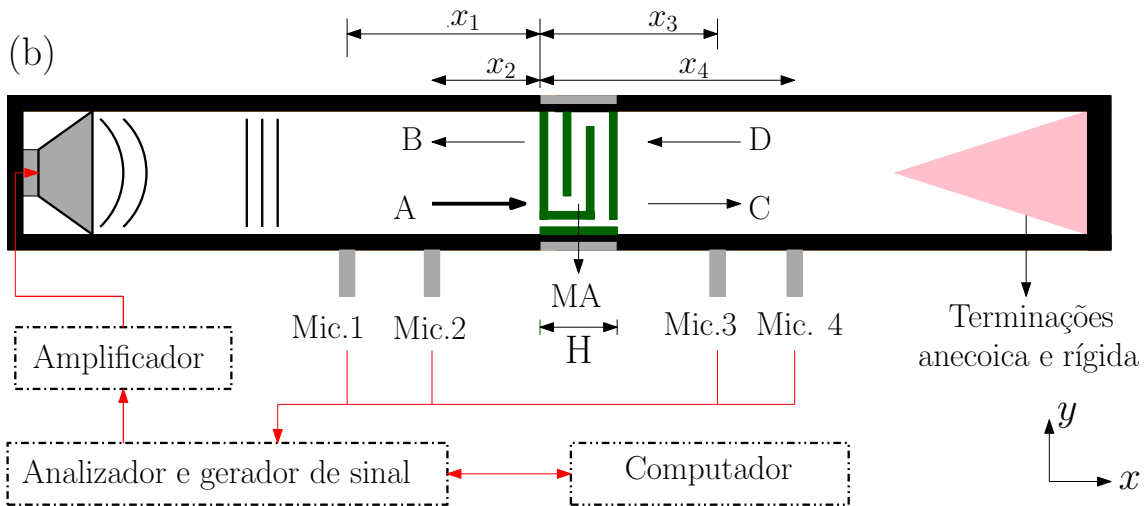
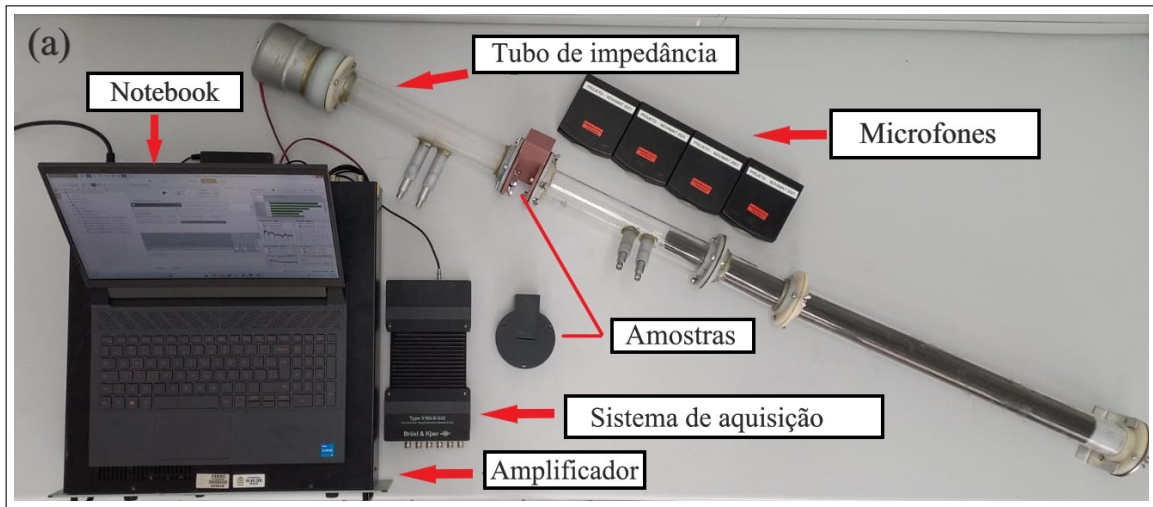
6.5 Métodos experimentais

O comportamento de diferentes configurações do MA foi avaliado por meio de experimentos normalizados considerando especificamente a incidência normal de ondas sonoras. A seguir os detalhes dos *setups* experimentais são apresentados detalhadamente.

6.5.1 Método normativo ASTM E2611-09

No problema de transmissão sonora amostras do MA foram avaliadas utilizando um *setup* fundamentado na norma ASTM E2611-09, 2009. Em síntese, a configuração baseia-se no uso de um tubo de impedância cilíndrico com diâmetro $D_t = 46$ mm, correspondendo a uma frequência de corte $f_c = 1,84c_0/(\pi D_t) = 4.367$ Hz. Uma fonte sonora geradora de ondas planas é alojada em uma das extremidades do tubo, a amostra do MA é acoplada no centro do tubo e ao final do tubo tem-se uma terminação com duas condições de contorno distintas. Uma imagem do *setup* de medição e uma representação de toda a cadeia de sinal são ilustrados na Figura 26 (a) e (b), respectivamente. Um sinal aleatório com mesma densidade de energia em todas as frequências (ruído branco) é gerado e amplificado por um amplificador Bruel & Kjaer tipo 2718. Quatro microfones condensadores de 1/2 polegada Bruel & Kjaer 4971-H-041 (campo de pressão) em posições fixas registraram a pressão sonora e um sistema de aquisição de dados Bruel & Kjaer LAN-XI tipo 3160-B-042 com *software* BK Connect foram utilizados para adquirir e processar os sinais. É importante destacar que antes de realizar os

Figura 26: (a) Equipamentos utilizados nos ensaios no problema de transmissão. (b) Cadeia de sinal da instrumentação utilizada nos ensaios.



Fonte: O autor.

testes, a curva de sensibilidade dos microfones era ajustada usando um calibrador de nível sonoro padrão (1 kHz, 94 dB). Na configuração do *setup*, x_1 e x_2 são as distâncias entre a face a jusante da amostra e os microfones 1 e 2, respectivamente. Da mesma forma, x_3 e x_4 são as distâncias entre a face a montante da amostra e os microfones 3 e 4. Os sinais adquiridos foram exportados em formato de arquivo universal (uff) e pós-processados no *software* MATLAB.

No interior do tubo o padrão de ondas estacionárias resultante é decomposto em componentes de deslocamento para frente e para trás medindo a pressão sonora simultaneamente nos quatro microfones e examinando suas amplitudes e fases relativas. Deste modo, a partir das duas condições de contorno representadas pelas letras *a* (anecoica) e *r* (rígida), o objetivo é determinar uma matriz de transferência (T_t) que relaciona dois vetores de estado $T = (P, U)^{a,r}$ em função da pressão acústica (P) e da

velocidade de partículas (U) em ambos os lados da amostra do MA, ou seja,

$$\mathbf{T}_0^{a,r} = \mathbf{T}_t \mathbf{T}_H^{a,r} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}_H^{a,r}. \quad (204)$$

Considerando que a amostra do metamaterial tenha espessura H , assume-se que a face frontal da amostra está em $x = 0$ e que a face de trás em $x = H$. Observe que as setas A, B, C e D, respectivamente, indicam ondas sonoras incidente e refletida à face frontal e ondas sonoras transmitida e refletida à face posterior da amostra. No tocante a terminação, destaca-se que idealmente a mesma deve ser totalmente anecoica, como veremos na Seção 6.6 esta exigência será muito importante na caracterização dos parâmetros efetivos do MA. Em todos os ensaios o microfone 1 foi mantido como a referência para todas as funções de transferência medidas.

Pela Equação 204 um sistema linear com quatro equações e quatro incógnitas é estabelecido. Para determinar as incógnitas deve-se primeiramente determinar as pressões e velocidade de partículas em ambas as fronteiras da amostra. Desta forma, para cada condição a e r os campos de ondas sonoras dentro do tubo são decompostos da seguinte forma (E2611-09, 2009),

$$A = j \frac{H_{11}e^{-jk_0(x_2)} - H_{21}e^{-jk_0(x_1)}}{2 \sin(k_0(x_1 - x_2))}, \quad (205)$$

$$B = j \frac{H_{21}e^{jk_0(x_1)} - H_{11}e^{jk_0(x_2)}}{2 \sin(k_0(x_1 - x_2))}, \quad (206)$$

$$C = j \frac{H_{31}e^{jk_0(x_4)} - H_{41}e^{jk_0(x_3)}}{2 \sin(k_0(x_4 - x_3))}, \quad (207)$$

$$D = j \frac{H_{41}e^{-jk_0(x_3)} - H_{31}e^{-jk_0(x_4)}}{2 \sin(k_0(x_4 - x_3))}, \quad (208)$$

com $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c_0$ representando o número de onda no ar. Quatro funções resposta em frequência (FRF) são obtidas, sendo a primeira FRF de referência H_{11} um vetor com valores unitários de mesma dimensão da faixa de frequência adotada nas análises, as demais FRFs nas Equações 205 - 208 são obtidas nos ensaios. Desta forma, as pressões e velocidades exatamente nas faces jusante e montante do MA para cada condição de contorno são dadas por

$$P_0^{a,r} = A + B, \quad (209)$$

$$U_0^{a,r} = \frac{(A - B)}{Z_0}, \quad (210)$$

$$P_H^{a,r} = Ce^{-jk_0H} + De^{jk_0H}, \quad (211)$$

$$U_H^{a,r} = \frac{(Ce^{-jk_0H} - De^{jk_0H})}{Z_0}. \quad (212)$$

Portanto, a matriz de transferência (Equação (204)) pode ser reescrita da seguinte maneira (E2611-09, 2009)

$$\mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0^a U_H^r - P_0^r U_H^a}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_H^a} & \frac{P_0^r P_H^a - P_0^a P_H^r}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_H^a} \\ \frac{U_0^a U_H^r - U_0^r U_H^a}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_H^a} & \frac{P_H^a U_0^r - P_H^r U_0^a}{P_H^a U_H^r - P_H^r U_H^a} \end{bmatrix}. \quad (213)$$

Para sanar possíveis dúvidas e tomando as variáveis P_0^a e U_H^r como exemplo, observe que estas correspondem respectivamente, a pressão sonora em $x = 0$ para a terminação anecoica e a velocidade de partícula em $x = H$ para a terminação rígida. Novamente, dependendo da direção de incidência das ondas na estrutura, os coeficientes τ e R para uma estrutura não-recíproca são representados pelas Equações 160 , 162 , 163 e 164. Para uma estrutura recíproca pelas Equações 165 , 162 e 164. E para um metamaterial recíproco e simétrico pelas Equações 166 e 167. Importante lembrar que os coeficientes T_{ij} nestas equações são substituídos pelos coeficientes m_{ij} da matriz da Equação 213.

Por fim, a partir dos coeficientes da Equação 213 o número de onda de Bloch experimental é obtido da seguinte forma

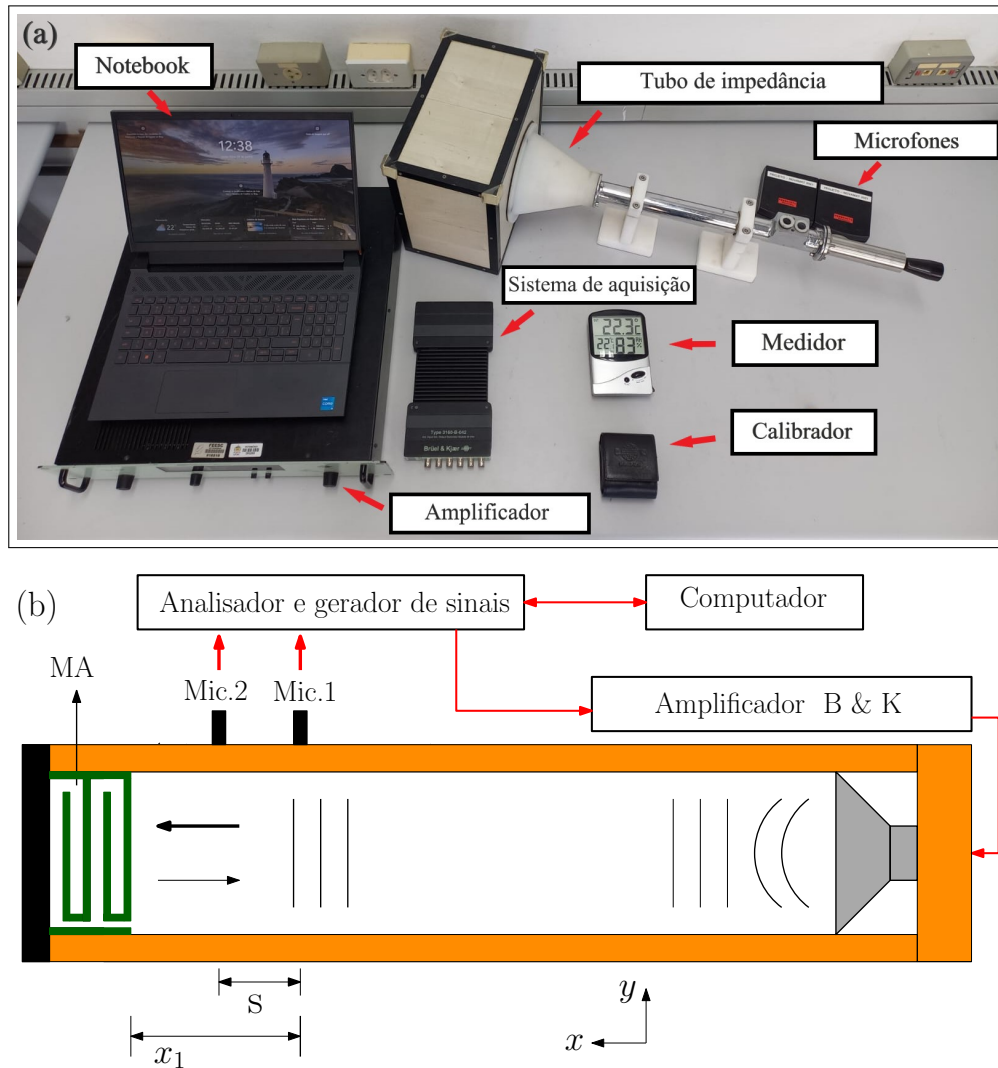
$$qh = \cos^{-1} \left(\frac{m_{11} + m_{22}}{2} \right). \quad (214)$$

Consequentemente, a velocidade de fase experimental pode ser derivada de acordo com a Equação 197.

6.5.2 Método normativo ISO 10534-2

Nos ensaios do problema de reflexão sonora o interesse reside na impedância de superfície e nos coeficientes de reflexão e absorção sonora das amostras do MA. Estes parâmetros foram determinados em um tubo de impedância cilíndrico com diâmetro $d_t = 26$ mm. Neste caso, o método da função de transferência cuja metodologia é regida pela norma ISO 10534-2, 1998 foi utilizado. Nesta configuração dois microfones acoplados ao tubo garantem a aferição da pressão acústica interna, convertendo-as para o domínio da frequência mediante a transformada rápida de Fourier (FFT). O *setup* de medição e uma representação de toda a cadeia de sinais são ilustrados na Figura 27 (a) e (b), com S representando a distância entre os centros dos microfones e x_1 a distância entre a amostra e o primeiro microfone. Com as pressões sonoras mensu-

Figura 27: (a) Equipamentos utilizados nos ensaios no problema de reflexão. (b) Cadeia de sinal da instrumentação utilizada nos ensaios.



Fonte: O autor.

radar, determina-se a FRF cuja nomenclatura é função de transferência, esta função é obtida por meio da razão entre a pressão sonora no microfone 1 e a pressão sonora no microfone 2,

$$H_{1,2} = \frac{P_1}{P_2}. \quad (215)$$

Na prática é muito comum erros de medições referentes a diferença de fase existente entre os microfones utilizados nos ensaios. Para atenuar estes erros um procedimento de calibração pode ser adotado, o mesmo consiste em obter uma FRF corrigida, alterando as posições entre os microfones. Assim, o microfone 1 ocupa a posição que antes era do microfone 2 e o recíproco aplica-se também. A FRF corrigida é obtida então pela

raiz quadrada da razão entre as FRF obtida em cada posição,

$$H_{\text{cor}} = \sqrt{\frac{H_{1,2}}{H_{2,1}}}. \quad (216)$$

Por consequência, o coeficiente de reflexão é determinado da seguinte forma,

$$R = \left(\frac{H_{\text{cor}} - e^{-jk_0 S}}{e^{jk_0 S} - H_{\text{cor}}} \right) e^{j2k_0 x_1}. \quad (217)$$

Embora a norma sugira a utilização de um $\tilde{k}$ complexo, adota-se aqui o número de onda do ar (k_0) pois esta formulação foi utilizado por [Dupont et al., 2011](#) de maneira satisfatória. Note que o coeficiente de absorção sonora é obtido substituindo a Equação 217 na Equação 184. Além disso, o coeficiente de reflexão e a impedância de superfície do metamaterial se relacionam da seguinte forma,

$$Z_{\text{MA}} = Z_0 \left(\frac{1 + R}{1 - R} \right). \quad (218)$$

Algumas recomendações adicionais e muito importantes são fornecidas pela norma, por exemplo, o porta amostra do tubo de impedância deve apresentar uma parede rígida com no mínimo 20 mm de espessura, o tubo escolhido para as análises experimentais assegura esta recomendação. Outras precauções são para as frequências inferior e superior de análise, as quais dependem das dimensões do tubo e são, respectivamente, determinadas pelas seguintes relações

$$f_{\text{min}} > \frac{0,05c_0}{S}, \quad (219)$$

$$f_{\text{max}} < \frac{0,45c_0}{S}, \quad (220)$$

com $S = 24$ mm. Por outro lado, a frequência de corte na qual a partir dela se formam ressonâncias no plano transversal da seção transversal do tubo deve ser considerada,

$$f_{\text{corte}} = \frac{0,585c_0}{d_t}. \quad (221)$$

Logo, calculando tem-se $f_{\text{min}} = 714$ Hz, $f_{\text{max}} = 6.431$ Hz e $f_{\text{corte}} = 7.740$ Hz. Destaca-se que segundo a norma, é factível a realização de ensaios numa faixa de frequência inferior a f_{min} do tubo, esta viabilidade depende da maneira como os experimentos são conduzidos e principalmente da precisão dos equipamentos de processamento de sinais. Neste contexto, tal viabilidade foi executada nas análises que serão apresentadas no Capítulo 7, ou seja, os ensaios foram realizados numa faixa de frequência de 100 – 2600 Hz, com um intervalo de frequência de 1 Hz. Por fim, a lista de equipamentos utilizado nos ensaios do problema de reflexão é apresentado na Tabela 3.

Tabela 3: Equipamentos utilizados para ensaios no problema de reflexão.

Item	Quantidade	Descrição dos equipamentos
1	1	Analisador de sinais B&K LAN-XI tipo 3160-B-042
2	1	Notebook com <i>software</i> BK Connect
3	2	Microfones de 1/2 polegada Bruel & Kjaer tipo 4971-H-041
4	1	Calibrador acústico Bruel & Kjaer tipo 4231
5	1	Amplificador de potência Bruel & Kjaer tipo 2718
6	1	Medidor de umidade relativa do ar e temperatura
7	1	Tubo de impedância

6.6 Método de caracterização das propriedades efetivas negativas

Estudar as propriedades ou parâmetros efetivos incomuns que um MA pode apresentar é crucial para compreender melhor os mecanismos físicos subjacentes ao seu comportamento. Nesta perspectiva, o método do meio efetivo proposto por [Fokin et al., 2007](#) foi empregado. Essencialmente, este método visa recriar as características do campo acústico no MA através de um meio homogêneo. Embora inicialmente usado para caracterizar a permissividade elétrica efetiva e a permeabilidade magnética efetiva de metamateriais eletromagnéticos ([X. Chen et al., 2004](#); [Smith et al., 2002](#)), o método tem sido frequentemente aplicado para caracterizar ressonadores de Helmholtz ramificados ([Jena et al., 2019](#)), metamateriais acústicos ([G. N. Almeida et al., 2024](#); [A. Chen et al., 2022](#); [Xiang et al., 2022](#); [Yu et al., 2019](#)) e lentes acústicas de Luneburg ([da Silva & Duarte, 2024](#)).

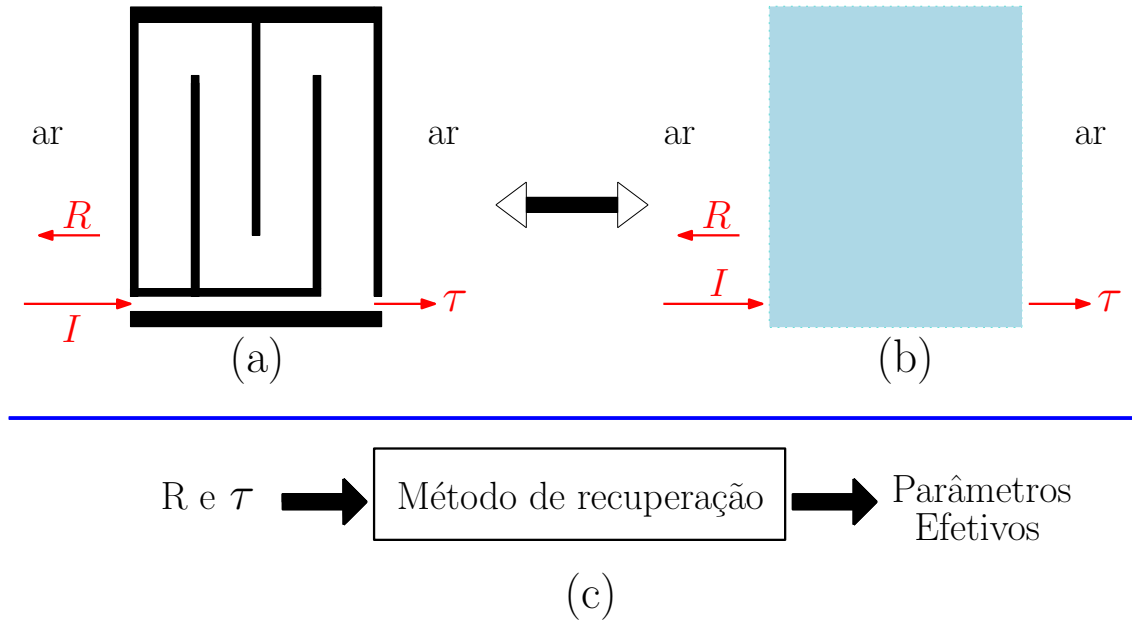
Uma representação esquemática do processo para recuperar os parâmetros efetivos é mostrada na Figura 28, onde a estrutura do MA é considerada como um fluido homogêneo, cujos coeficientes de reflexão (R) e transmissão (τ) apresentam a mesma amplitude e fase. A partir de R e τ adquiridos experimentalmente, os parâmetros efetivos são obtidos usando o método de recuperação na Figura 28 (c), o qual será apresentado a seguir.

Considerando uma onda plana incidindo no plano da célula do MA com a estrutura cercada pelo ar em ambos os lados, e assumindo uma terminação anecoica ideal no aparato experimental, a impedância acústica efetiva é expressa como ([Fokin et al., 2007](#))

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\chi}{1 - 2R + R^2 - \tau^2}, \quad (222)$$

onde R and τ , respectivamente, são os coeficientes de reflexão e transmissão experi-

Figura 28: (a) Estrutura do MA com ondas incidentes, refletidas e transmitidas. (b) Representação de um material efetivo equivalente a estrutura. (c) Ilustração do método para obter os parâmetros efetivos.



Fonte: O autor.

mentais. O parâmetro χ é definido da seguinte forma

$$\chi = \pm \sqrt{(R^2 - \tau^2 - 1)^2 - 4\tau^2}. \quad (223)$$

Na Equação 223 deve se selecionada a raiz que fornece uma solução positiva na Equação 222 (Fokin et al., 2007; Xiang et al., 2022). Além disso, o índice de refração acústico é expresso como

$$n_{\text{eff}} = \frac{-j \ln(\zeta) + 2\pi F}{k_0 H}, \quad (224)$$

de modo que F é o número de tubos periódicos, o valor trivial que corresponde a $F = 1$ foi usada durante a recuperação de parâmetros efetivos neste trabalho. O parâmetro ζ é definido como

$$\zeta = \frac{1 - R^2 - \tau^2 + \chi}{2\tau}. \quad (225)$$

Consequentemente, a partir das Equações 222 e 224, a densidade efetiva e o módulo de compressibilidade efetivo da estrutura podem ser estimados usando as seguintes relações matemáticas

$$\rho_{\text{eff}} = Z_{\text{eff}} \cdot n_{\text{eff}}, \quad (226)$$

$$K_{\text{eff}} = \frac{Z_{\text{eff}}}{n_{\text{eff}}}. \quad (227)$$

6.7 Síntese do capítulo

Sob a perspectiva de distintas configurações geométricas do metamaterial periódico, os materiais utilizados para lidar com o controle, mitigação e a manipulação das ondas sonoras em problema de transmissão e reflexão sonora foram apresentados neste capítulo. Além disso, os métodos utilizados para alcançar os objetivos desta pesquisa foram detalhados. Em resumo a metodologia de trabalho foi dividida e apresentada em quatro etapas: (i) modelos matemáticos, (ii) relação de dispersão, (iii) métodos numéricos e experimentais e, por fim, (iv) caracterização dos parâmetros efetivos da estrutura. Sendo assim, os resultados e as discussões de diversas configurações do MA são declarados nos Capítulos 7 e 8.

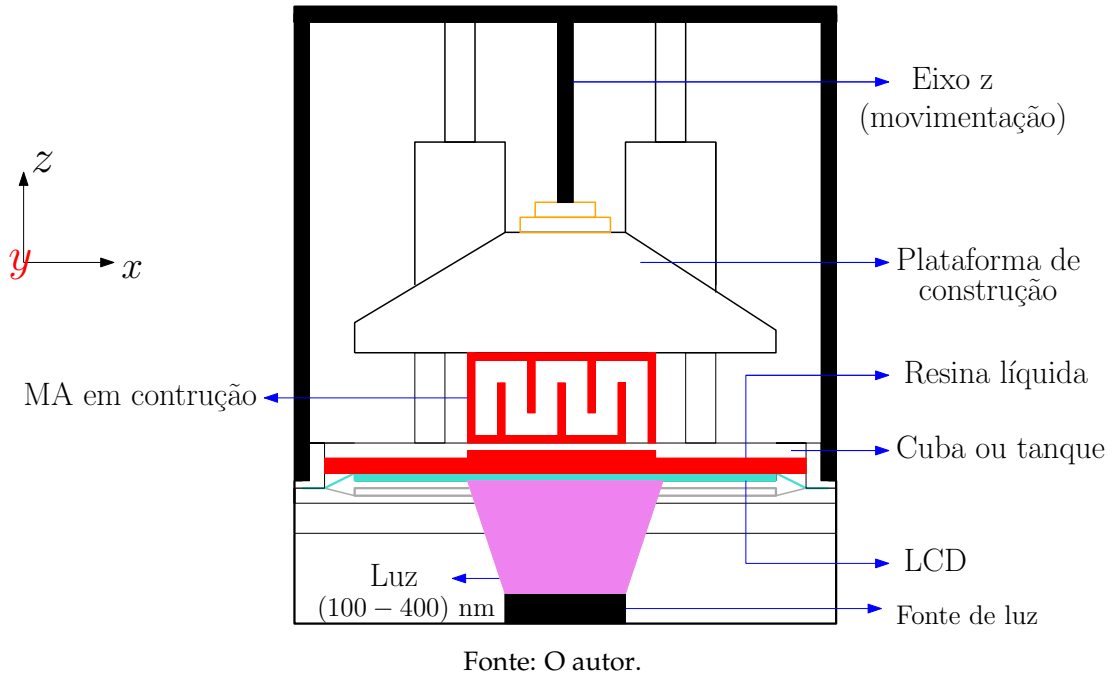
7 Resultados e discussões

O comportamento de diferentes configurações do MA considerando a incidência normal de ondas sonoras é apresentado neste capítulo, sendo as discussões fundamentadas em resultados teórico, numérico e experimental. Paralelamente, apoiado em simulações numéricas, investigações adicionais sobre a distribuição dos campos de pressão sonora e da velocidade de partículas e as perdas visco-térmicas de algumas configurações também são exploradas. Além disso, uma interpretação mais ampla da física subjacente ao comportamento do MA é apresentado em termos das propriedades efetivas incomuns de alguns modelos.

7.1 Introdução

Os resultados e discussões apresentados a seguir estarão divididos em duas etapas, a primeira associada ao problema de transmissão sonora e a segunda ao problema de reflexão sonora. Nestes dois casos diversas amostras do MA com distintas configurações foram fabricadas usando a tecnologia de impressão 3D por meio do processo de fotopolimerização em cuba ([ISO/ASTM-52900, 2015](#)). A Figura 29 ilustra a fabricação numa impressora 3D de processo de fotopolimerização em cuba baseada na técnica LCD (*Liquid Crystal Display* ou tela de cristal líquido). Resumidamente, na fotopolimerização uma resina líquida é depositado em uma cuba com fundo transparente que permite a passagem de um feixe de luz ultravioleta. A resina é então curada seletivamente por este feixe de luz direcionado. Por usar feixes de luz na cura da resina esse processo apresenta elevada resolução ($\pm 50 \mu\text{m}$). Portanto, por este motivo justifica-se a escolha da técnica LCD na fabricação das amostras do metamaterial, utilizando como matéria-prima uma resina do tipo ABS (*acrylonitrile butadiene styrene*). Adicionalmente, um processo de pós cura da resina ou acabamento das amostras construídas se fez necessário também. Por fim, é importante destacar que as amostras avaliadas no problema de transmissão sonora foram construídas com um flange em ambos os lados de modo a garantir uma melhor fixação no tubo de impedância.

Figura 29: Ilustração do processo de fotopolimerização em cuba baseada na técnica LCD.



7.2 Problema de transmissão sonora

7.2.1 Configuração T1

A Figura 30 mostra o desenho CAD (*Computer-aided design*) e a amostra da configuração T1 fabricada. Observe que esta configuração é composta de uma célula unitária de modo que o guia de ondas apresenta $N = 1$ dispersor com $n = 5$ canais enrolados. Vale ressaltar que intencionalmente analisamos o comportamento da estrutura considerando o início do dispersor invertido, em outras palavras, na prática assumimos que as ondas incidem para trás na Figura 23 (a). Os parâmetros geométricos adotados na fabricação da amostra são elencados na Tabela 4.

Figura 30: (a) Vista interna, (b) desenho no plano e (c) fotografia da amostra do MA para problema de transmissão: Configuração T1 composta de $N = 1$ dispersor com $n = 5$ canais enrolados.

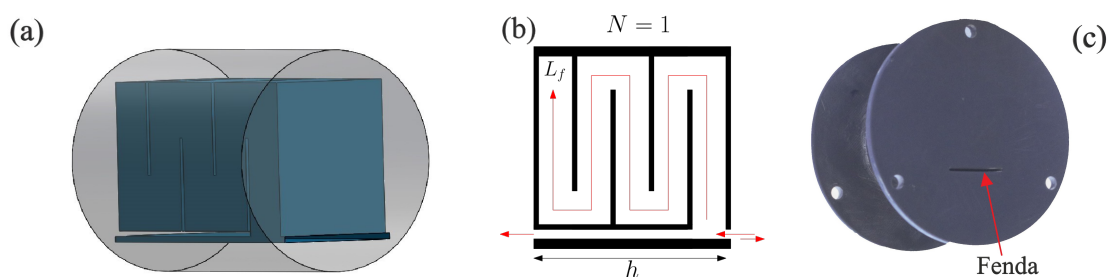


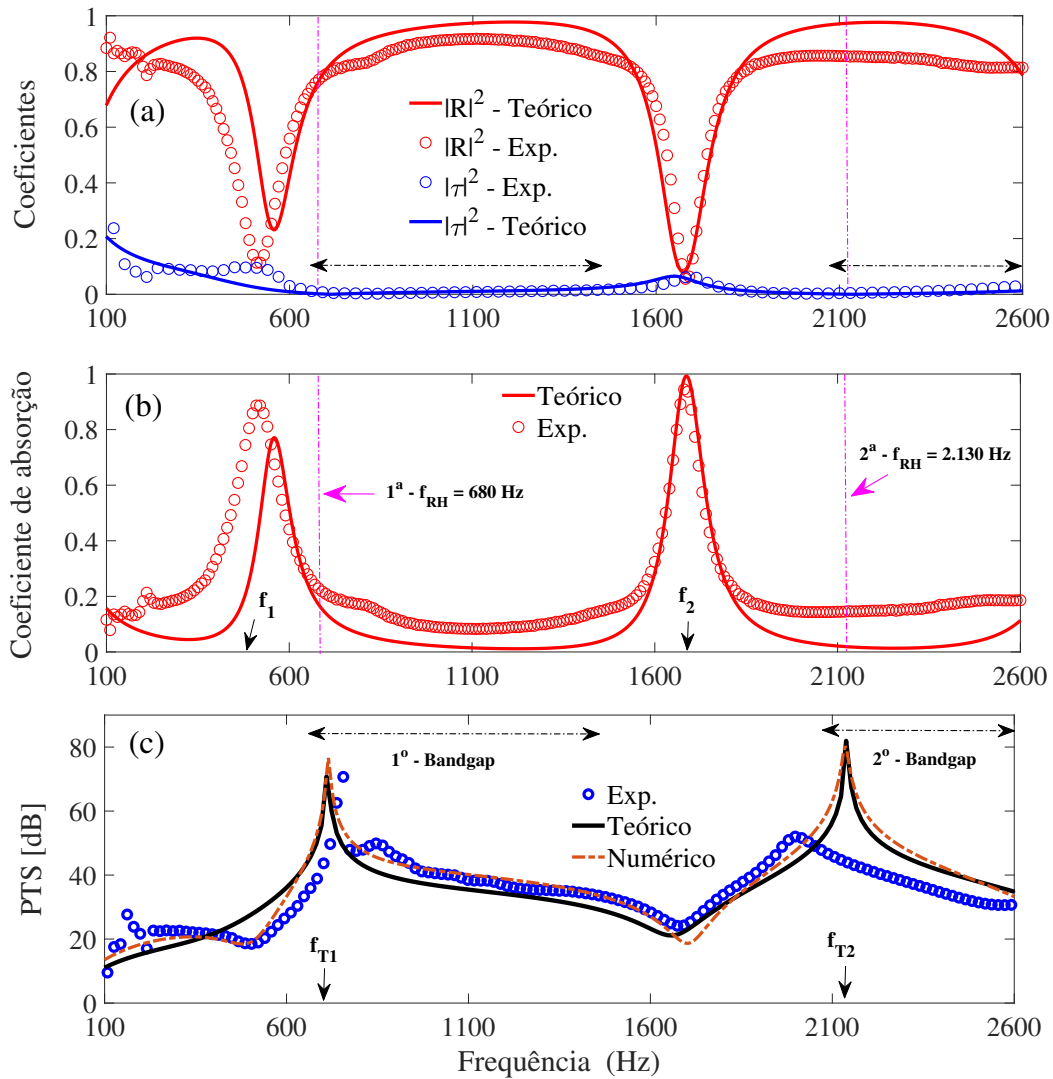
Tabela 4: Parâmetros geométricos (em mm) usados na manufatura do MA: Configuração T1. A definição de cada parâmetro encontra-se na Figura 23 da seção 6.1.

$N = 1$	m	L	h	d	b
$n = 5$	25,0	30,0	61,0	1,20	1,5

A Figura 31 mostra o comportamento dos coeficientes de reflexão, transmissão e absorção sonora, bem como a perda de transmissão sonora (em dB) da configuração T1 para diferentes previsões. Embora a configuração seja aplicada ao problema de transmissão sonora, um controle abrangente e simultâneo da energia sonora é obtido pela estrutura e uma boa concordância pode ser observada entre as previsões. Para entender esse amplo controle começaremos definindo as frequências de ressonância do dispersor de $\lambda/4$ que compõe a estrutura, ou seja, $f_{RH} = (2u - 1)c/(4L_f)$ com u representando um número inteiro. As primeiras ressonâncias são ilustradas pelas linhas verticais rosa na Figura 31 (a) e (b). Dito isto, podemos observar na Figura 31 (b) que a primeira frequência de ressonância do MA ocorre em $f_1 = 517$ Hz com amplitude de 0,89 para o experimento e 556 Hz com amplitude de 0,76 para a teoria, enquanto a segunda ressonância ocorre em $f_2 = 1.683$ Hz com amplitude de 0,95 para o experimento e 1.690 Hz com amplitude de 0,98 para a teoria. Essas frequências são mais baixas que as frequências do tubo de $\lambda/4$ (680 Hz e 2.130 Hz) devido à forte dispersão introduzida pelo dispersor acoplado ao guia de ondas do MA. Acima das frequências f_1 e f_2 , *bandgaps* são introduzidos (ver setas horizontais pretas), consequentemente, o coeficiente de transmissão sonora (τ) é significativamente reduzido fazendo com que a estrutura que é leve e fina atue como uma parede altamente rígida (veja Figura 31 (a)). Futuramente, exploraremos o surgimento e o comportamento dos *bandgaps* na configuração T1 do metamaterial. Observando especificamente os picos de absorção sonora experimental, estes claramente demonstram um acoplamento quase crítico entre a impedância de superfície da estrutura e a impedância do ar. Consequentemente, quase nenhuma onda refletida é produzida nessas frequências e, portanto, $\alpha = 1 - |R|^2 - |\tau|^2 \approx 1$. É importante destacar que nenhuma absorção sonora efetiva é alcançada na região dos *bandgaps* e esta observação já demonstra que um acúmulo de picos de absorção sonora somente é possível abaixo das regiões de frequências proibidas. Posteriormente, exploraremos como esse comportamento está intimamente relacionado à componente imaginária do número de onda de Bloch.

O resultado da PTS é apresentado na Figura 31 (c) e uma atenuação sonora

Figura 31: Comportamento do MA: Configuração T1. (a) Coeficientes de reflexão e transmissão sonora. (b) Coeficiente de absorção sonora. (c) Perda de transmissão sonora (PTS) em dB.



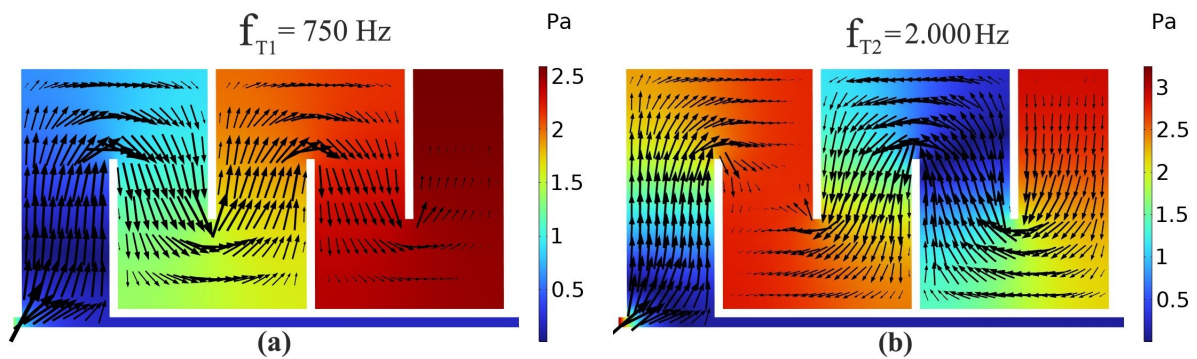
Fonte: O autor.

acima de 30 dB na região dos *bandgaps* [660 – 1.460 Hz e 2.090 – 2.600 Hz] é observada, indicando que o comportamento do coeficiente de transmissão é fortemente influenciado por esta propriedade da estrutura. O MA exibe dois picos proeminentes de PTS e esses picos ocorrem próximos das frequências de ressonância f_{RH} do dispersor. Na primeira ressonância f_{T1} o metamaterial atua como um monopolo e esta ressonância com sua respectiva magnitude aparece em 750 Hz (70 dB) para o experimento, 710 Hz (70 dB) para a teoria e 715 Hz (76 dB) para o modelo numérico. Na segunda ressonância f_{T2} a estrutura atua como um dipolo e aparece em 2.000 Hz (53 dB) para o experimento, 2.138 Hz (82 dB) para a teoria e 2.135 Hz (80 dB) para o modelo numérico (G. N. Almeida et al., 2024). Desta forma, esta configuração do MA demonstra bom desempenho de isolamento acústico de banda larga e baixa frequência, garantindo um

isolamento acima de 24 dB em duas oitavas de frequências (542 – 2.600 Hz), e esse desempenho é atribuído principalmente às regiões de banda de frequências proibidas. A seguir explicaremos melhor o comportamento monopolar e dipolar da estrutura. Note que discrepâncias entre os resultados experimentais e teórico-numérico são observadas. Embora a impressora utilizada na fabricação das amostras tenha uma tolerância dimensional de $\pm 0,15$ mm, o que introduz um desvio máximo de até 0,3 mm, essas discrepâncias são devidas a imperfeições na fabricação, como a rugosidade das paredes internas da estrutura (G. N. Almeida et al., 2021; Mareze et al., 2025). Observe que comportamento semelhante foi observado por Jiang et al., 2021 e X. Zhang, He et al., 2025. Outro fator que contribui para os pequenos desvios nas curvas experimentais principalmente abaixo de 200 Hz são as condições experimentais não ideais, nas quais podemos destacar vazamento indesejado de ondas sonoras na interface entre os flanges da amostra e o tubo de impedância.

Para obter mais informações a respeito do desempenho significativo da PTS do MA, simulações da distribuição do campo de pressão sonora e da distribuição instantânea da velocidade de partículas foram realizadas, conforme apresentado na Figura 32. Em $f_{T1} = 750$ Hz onde a estrutura se comporta como um monopolo, a pressão sonora no final do dispersor é quase três vezes maior que a pressão na entrada do sistema, e a velocidade de partículas se propaga em uma única direção, ou seja, da entrada do guia de ondas para o final do dispersor. Por outro lado, em $f_{T2} = 2.000$ Hz onde a estrutura se comporta como um dipolo, a pressão sonora apresenta duas regiões de valores máximo (≈ 3 Pa), indicando que a vibração do ar está dividido em duas regiões. Consequentemente, a velocidade de partículas vibra fora de fase, conforme representado pelas setas pretas.

Figura 32: Campo de pressão sonora e distribuição da velocidade de partículas (setas pretas): (a) Ressonância monopolo (750 Hz) e (b) Ressonância dipolo (2.000 Hz).



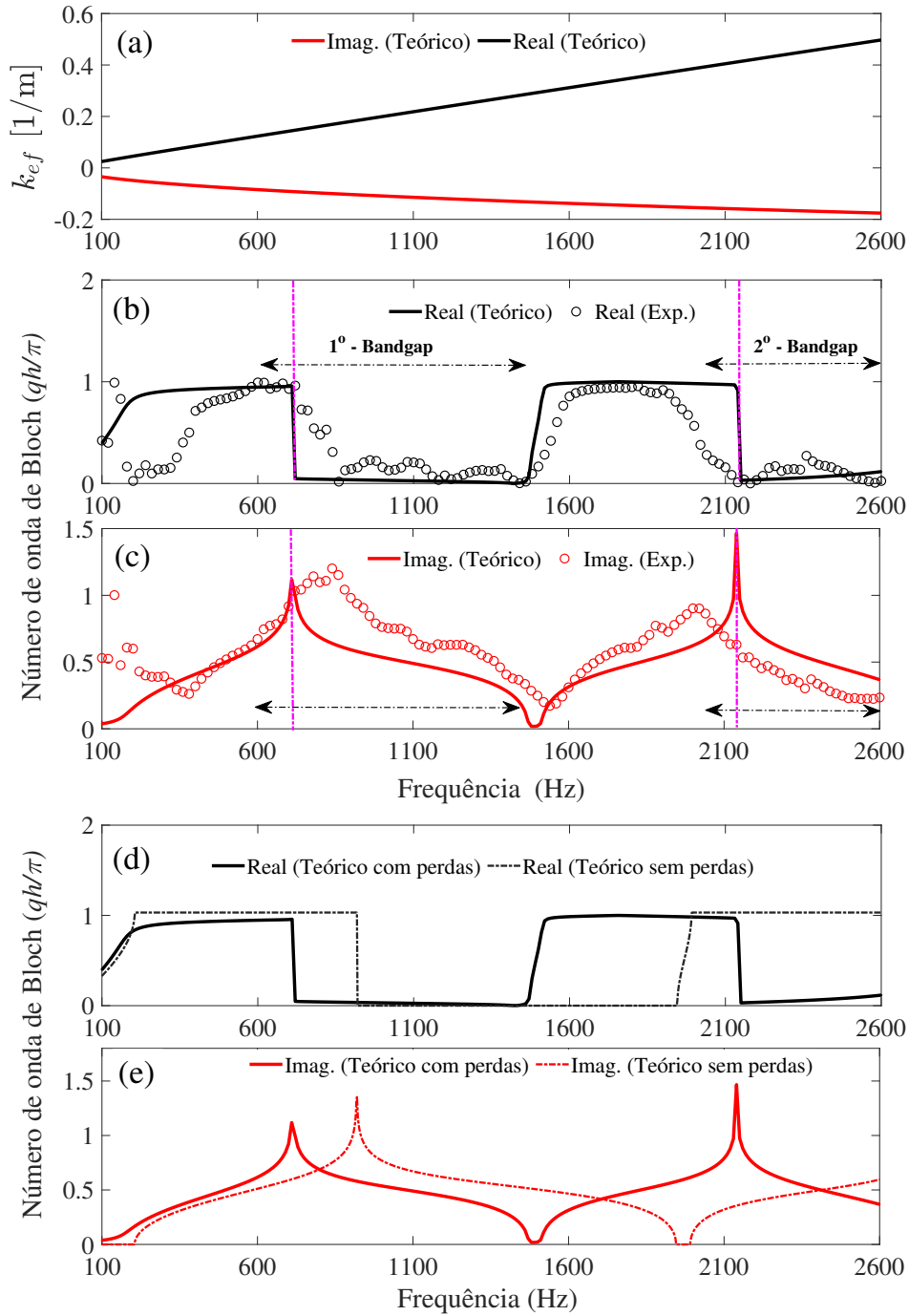
Fonte: O autor.

O diagrama de dispersão teórico e experimental da estrutura é apresentado

na Figura 33 (b) - (c), e uma boa concordância é observada. Antes de iniciar as discussões algumas observações precisam ser ditas ao leitor sobre a apresentação gráfica deste diagrama, uma vez que a grande variedade de esquemas presentes na literatura frequentemente gera confusão. Neste trabalho apresentaremos o diagrama de duas formas: (i) zona estendida em valor absoluto e normalizado, conforme Figura 33 e (ii) zona estendida em valor não absoluto e não normalizado. Como grupo de controle fornecemos também a relação de dispersão teórica do guia de ondas (k_{ef}) na ausência do dispersor, conforme mostrado na Figura 33 (a). Neste caso devido às perdas visco-térmicas esta relação também é uma grandeza complexa. Contudo, a componente real que caracteriza a propagação sonora é linear com a frequência e apresenta valores que variam de 0,02 a 0,5, e este comportamento é característico e similar ao de uma onda que se propaga num meio homogêneo e aperiódico como o ar. Por outro lado, a componente imaginária que representa a atenuação sonora apresenta valores que variam de -0,03 nas baixas frequências até -0,18 nas altas frequências, demonstrando uma atenuação mais proeminente nas altas frequências.

Prosseguindo, vimos na Seção 6.3 que as ondas de Bloch apresentam uma dispersão que independe da direção de propagação uma vez que o $\det[T] = 1$ no problema de autovalor da Equação 190. Desta forma, é apresentado a relação de dispersão da estrutura considerando somente ondas se propagando para trás. Note que a dispersão no MA é notavelmente forte quando o dispersor é acoplado ao guia de ondas, levando à origem física dos *bandgaps* antes das frequências de ressonância do dispersor, conforme revela a Figura 33 (b) e (c). Nas regiões dos *bandgaps* [660 – 1460 Hz e 2.040 – 2600 Hz] a propagação das ondas sonoras na estrutura é do tipo evanescente visto que a parte imaginária do número de onda de Bloch se desvia de zero. Neste caso a componente $\text{imag.}(q)$ se torna significativa em torno da f_{HR} contribuindo para a dispersão em todo o sistema, em outras palavras, a componente imaginária é uma função não linear com a frequência, a atenuação sonora é exponencial e as ondas são dispersivas. Além disso, a componente $\text{real}(q)$ permanece constante ao longo de toda a banda de frequência proibida. Os *bandgaps* são, portanto, bandas de frequência associadas a um único comprimento de onda de Bloch (Bradley, 1993). Por outro lado, fora dos *bandgaps* na região das bandas de passagem a componente $\text{real}(q)$ do número de onda de Bloch é real e uma função não linear com a frequência, o que demonstra que as ondas sonoras nesta região também são dispersivas. Observe que ao longo de todo o espectro de frequência existem dois *bandgaps* na estrutura, o primeiro tem sua origem física devido a reflexão sonora induzida pela ressonância local do dispersor, o outro *bandgap* é chamado de *bandgap* de Bragg e tem sua origem na periodicidade h da estrutura, em outras pala-

Figura 33: Diagrama ou relação de dispersão. (a) Guia de ondas. (b) - (c) MA configuração T1. (d) - (e) Com e sem as perdas visco-térmicas.



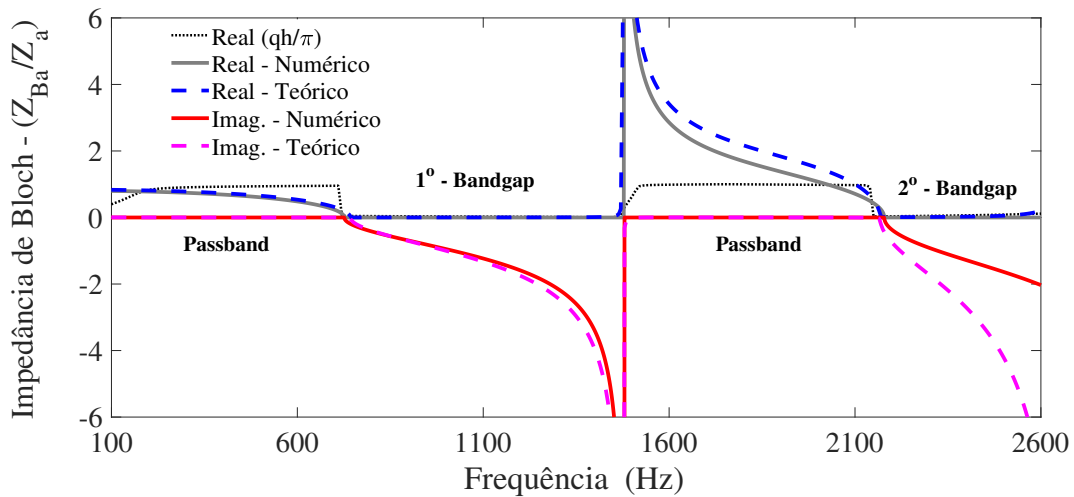
Fonte: O autor.

vas, devido ao fenômeno de interferência destrutiva das ondas sonoras (Theocharis et al., 2014). Por fim, a Figura 33 (d) e (e) revela que independente da presença das perdas visco-térmicas, há uma forte dispersão quando o dispersor é acoplado ao guia de ondas. Contudo, quando introduzimos as perdas, a dispersão é modificada e as componentes do número de onda são então suavizadas. Além disso, podemos observar que as perdas visco-térmicas causam uma forte mudança na ressonância, no posicio-

namento e, principalmente, na dimensão dos *bandgaps* na estrutura.

Conforme dito anteriormente a relação de dispersão é característica das ondas de Bloch que mais se destaca na literatura, adicionalmente destacaremos agora outras duas características destas ondas. A Figura 34 mostra o comportamento da impedância acústica de Bloch da configuração T1 e uma boa concordância entre a teoria e a simulação numérica é observada. Como referência fornecemos a parte real do número de onda de Bloch (qh/π) da configuração. Conforme se esperava o argumento da raiz quadrada na impedância de Bloch (Equação 97) apresenta valores ora positivo e ora negativo, o que corresponde a uma impedância resistiva ou reativa. É interessante notar que a impedância de Bloch é uma função fortemente variável na frequência, de modo que nas regiões de frequências proibidas (*bandgap*) ela é imaginária enquanto que nas regiões de frequências permitidas (*passband*) ela é real. Além disso, devido as perdas visco-térmicas as transições nas curvas são suavizadas. Por fim, um fenômeno interessante é observado na passagem do primeiro *bandgap* para o segundo *bandpass*, ou seja, na transição as componentes da impedância de Bloch se inclinam para seu valor máximo, no entanto, em seguida a componente imaginária torna-se zero de imediato e a componente real decai suavemente na frequência.

Figura 34: Comportamento da impedância de Bloch do MA: Configuração T1.

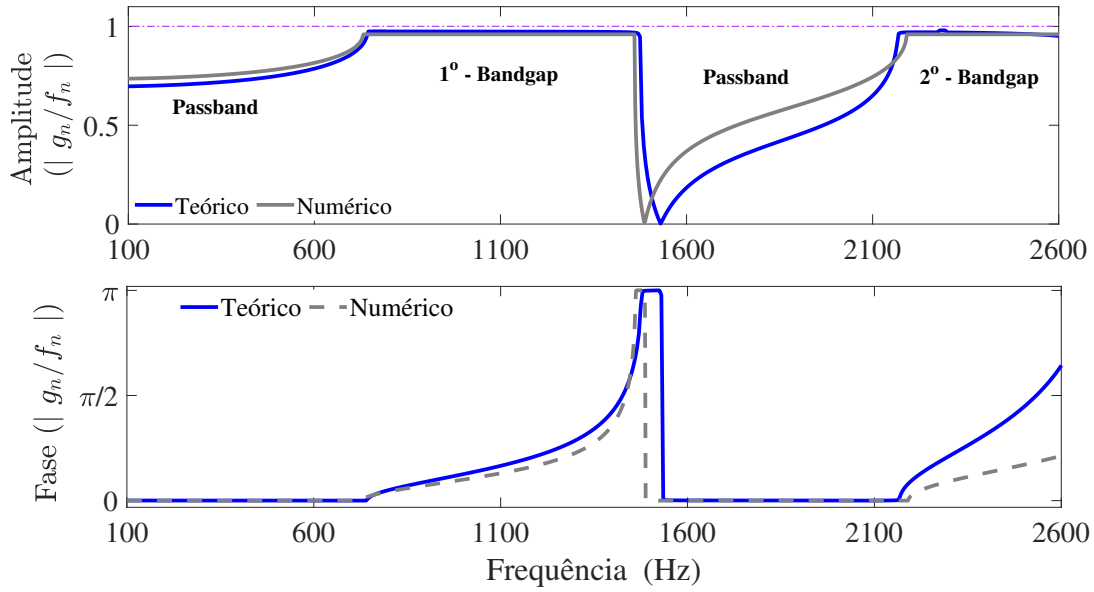


Fonte: O autor.

Por outro lado, a amplitude e fase do parâmetro g_n/f_n são apresentados na Figura 35 e demonstra que as regiões de *bandgaps* são notadamente reconhecidas como as bandas de frequências nas quais as ondas que se propagam para frente (f_n) e para trás (g_n) na célula do metamaterial tem amplitudes iguais, condição que caracteriza uma onda estacionária ressonante. Note que a amplitude de g_n/f_n não é igual a unidade devido as perdas visco-térmicas na estrutura, fato que é corroborado também

pelas bordas suavizadas da curva. Este comportamento em que $|g_n| = |f_n|$ corrobora os resultados da impedância acústica de Bloch apresentados na Figura 34, uma vez que a impedância nos *bandgaps* é reativa. As regiões de *passband* são claramente reconhecidas como as regiões nas quais a fase entre as ondas que se propagam para frente e para trás é constante e igual a zero, ou seja, as ondas estão perfeitamente em fase, sendo esta relação de fase coerente com o fato de que a impedância é resistiva nesta região do espectro de frequência.

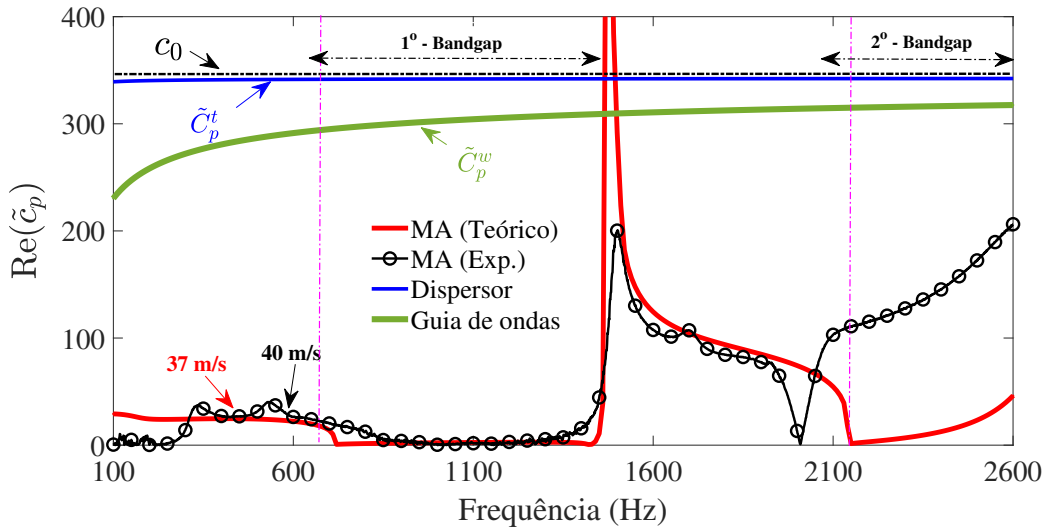
Figura 35: Amplitude e fase do parâmetro g_n/f_n do MA: Configuração T1.



Fonte: O autor.

O comportamento da velocidade de fase das ondas de Bloch na estrutura do MA é apresentado na Figura 36 e como grupo de referência a velocidade de fase no ar ($c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0} = 343 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), a velocidade de fase no guia de ondas na ausência do dispersor e a velocidade de fase no dispersor são fornecidas também. A velocidade de fase de um meio homogêneo e não dispersivo é constante, no caso do ar, a magnitude desta velocidade corresponde à velocidade do som (Basu et al., 2018). Neste caso a velocidade de fase é uma função da rigidez do ar ($K_0 = \gamma P_0$), da densidade e sua magnitude depende da temperatura, pressão e composição do ar. No caso do dispersor (ver curva azul), a velocidade de fase ($\tilde{C}_p^t = \sqrt{K_{\text{ef}} / \rho_{\text{ef}}}$) apresenta magnitude ($335 \sim 342 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) menor que a velocidade no ar, este resultado menor se deve as perdas visco-térmicas consideradas. Agora dado que não existe *bandgap* no guia de ondas na ausência do dispersor, sua velocidade de fase ($\tilde{C}_p^w = \sqrt{K_{\text{ef}} / \rho_{\text{ef}}}$) apresenta magnitude que varia de $230 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ até $317 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Notadamente, por apresentar seção transversal menor que o dispersor, a velocidade de fase no guia de ondas diminui proeminentemente a medida

Figura 36: Velocidade de fase do MA periódico: Configuração T1.

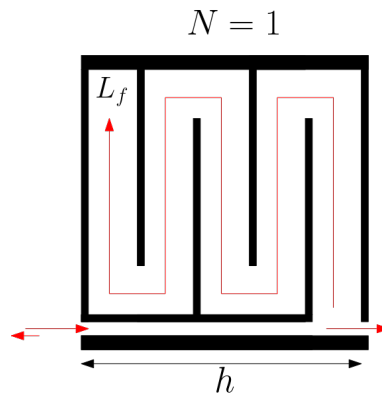


Fonte: O autor.

que λ aumenta, e este comportamento é devido às perdas visco-térmicas serem inversamente proporcionais a frequência ($\delta_v = \sqrt{\text{Pr}} \delta_t \approx (\sqrt{f})^{-1}$), conforme contemplado no Capítulo 3. Considerando a dispersão causada pelo dispersor acoplado ao guia de ondas, a velocidade de fase no MA em geral é significativamente reduzida em comparação as demais velocidades. Portanto, podemos concluir que a propagação das ondas de na estrutura apresenta um regime lento e subsônico. Além disso, corroborando a teoria note que principalmente na região que antecede o primeiro *bandgap* [660 – 1460 Hz] a velocidade de fase decai rapidamente e tende a zero no *bandgap*, e este comportamento confirma o caráter evanescente das ondas de Bloch no metamaterial.

Agora, vamos analisar o controle da energia sonora na configuração T1 do MA considerando a incidência de ondas para frente, conforme ilustrado na Figura 37. Na prática o interesse é avaliar as possíveis condições físicas na estrutura: recíproca,

Figura 37: Esboço do MA: Configuração T1 considerando ondas incidentes para frente.

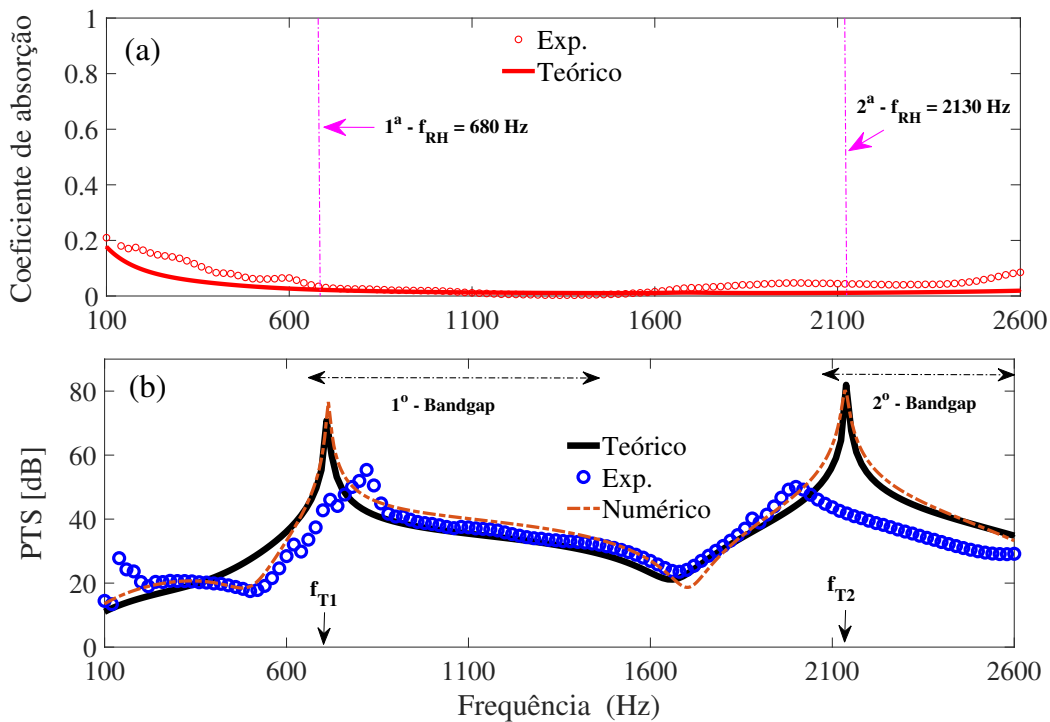


Fonte: O autor.

não recíproca ou recíproca e simétrica. Em outras palavras, a dependência que os coeficientes de absorção e transmissão sonora apresentam com a direção em que as ondas incidem sobre a estrutura.

A Figura 38 exibe o comportamento da estrutura considerando a incidência de ondas para frente. Ao comparar com os resultados da Figura 31 pode-se observar que a condição de reciprocidade é garantida nesta configuração da estrutura, de modo que o comportamento da PTS é indiferente quanto a direção de incidência das ondas sonoras ($\tau^+ = \tau^-$). Portanto, este comportamento demonstra que a estrutura se comporta como uma sistema linear e invariante no tempo. Por outro lado, comparando o comportamento do coeficiente de absorção observa-se que este apresenta dependência com a direção de incidência das ondas ($R^+ \neq R^-$), desta forma, concluímos que esta configuração da estrutura se comporta como um sistema recíproco e não-simétrico. Devido a relevância no controle e manipulação das ondas sonoras, o caráter recíproco e simétrico de uma estrutura será avaliado posteriormente.

Figura 38: Comportamento teórico e experimental do MA: Configuração T1. (a) Coeficiente de absorção sonora. (b) Perda de transmissão sonora (PTS) em dB.



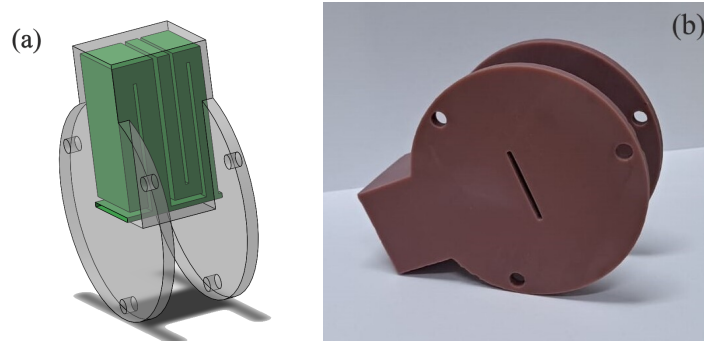
Fonte: O autor.

7.2.2 Configuração T2

A Figura 39 mostra o esboço e a amostra da configuração T2 fabricada. Neste caso o guia de ondas apresenta $N = 2$ dispersores acoplados com $n = 2$ e 3 canais

enrolados cada. Os parâmetros geométricos adotados nas análises são descritos na Tabela 5. Note que a estrutura apresenta dois dispersores com a mesma periodicidade ou constante de rede (h), o objetivo nesta configuração é obter um controle mais amplo da energia sonora em problemas de transmissão numa faixa de frequência abaixo de 2.000 Hz.

Figura 39: (a) Vista interna e (b) fotografia do MA para problema de transmissão: Configuração T2 composta de $N = 2$ dispersores e $n = 2$ e 3 canais enrolados cada.



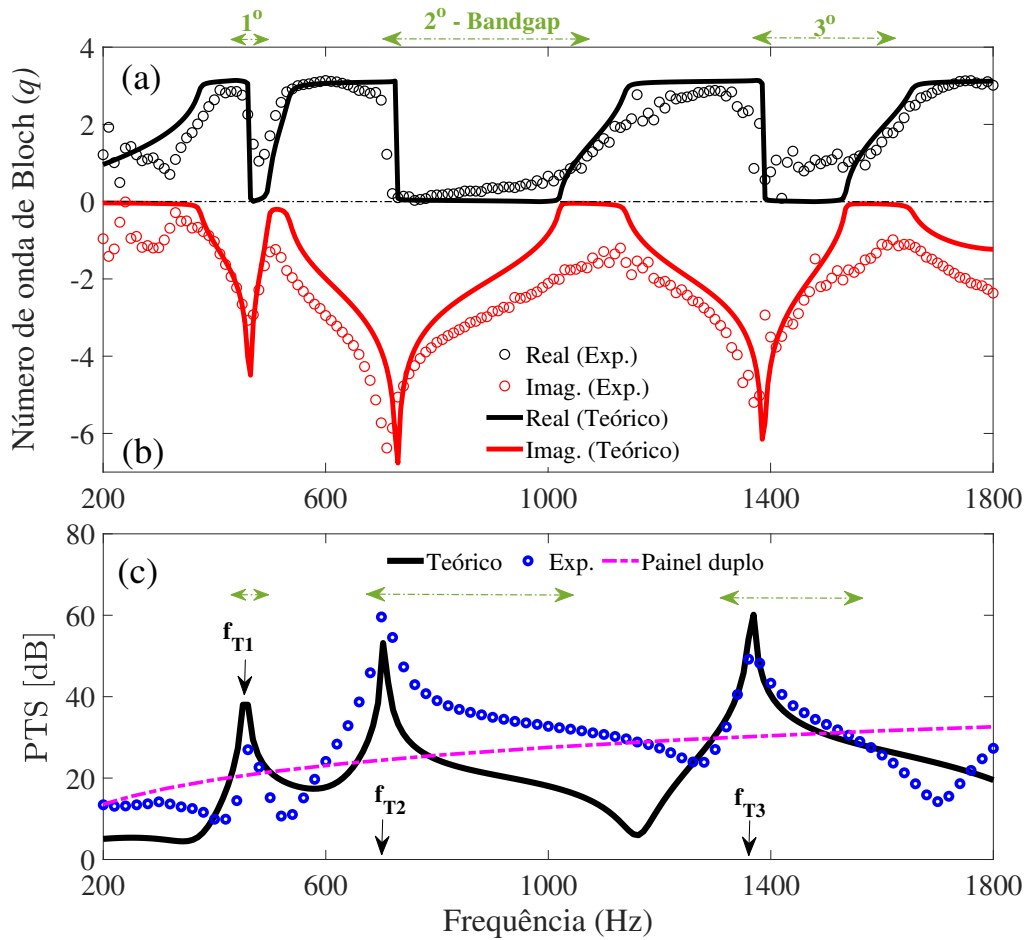
Fonte: O autor.

Tabela 5: Parâmetros geométricos (em mm) usados na manufatura do MA: Configuração T2.

$N = 2$	m	L	h	d	b
$n = 2$	29,0	56,0	20,0	2,50	1,5
$n = 3$	29,0	56,0	20,0	2,50	1,5

A Figura 40 mostra o comportamento teórico e experimental da perda de transmissão sonora bem como o diagrama de dispersão da configuração T2. Apresentamos também o comportamento da perda de transmissão sonora de um painel duplo, o qual é uma estrutura com dimensões (L, m, b) idênticas ao MA, contudo, com uma cavidade de ar no espaço interno. Na Figura 40 (c) três picos de PTS com magnitude máxima são observados com boa concordância entre os métodos, dois desses picos ocorrem abaixo de 1.000 Hz. Novamente as curvas de PTS ocorrem dentro das regiões dos *bandgaps* com magnitudes ≥ 29 dB. O primeiro pico f_{T1} (ressonância monopolo) está vinculada ao dispersor com $n = 3$ canais enrolados e ocorre em 465 Hz com magnitude 29 dB para o experimento e em 460 Hz com magnitude de 38 dB para a teoria. O segundo pico f_{T2} (ressonância monopolo) está associada ao dispersor com $n = 2$ canais enrolados e ocorre em 703 Hz para ambas previsões com magnitudes de 60 dB para o experimento e 53 dB para a teoria. O terceiro pico f_{T3} (ressonância dipolo) está associada

Figura 40: (a) - (b) Diagrama de dispersão do MA: Configuração T2. Partes real e imaginária do número de onda de Bloch. (c) Comportamento da perda de transmissão sonora em dB.



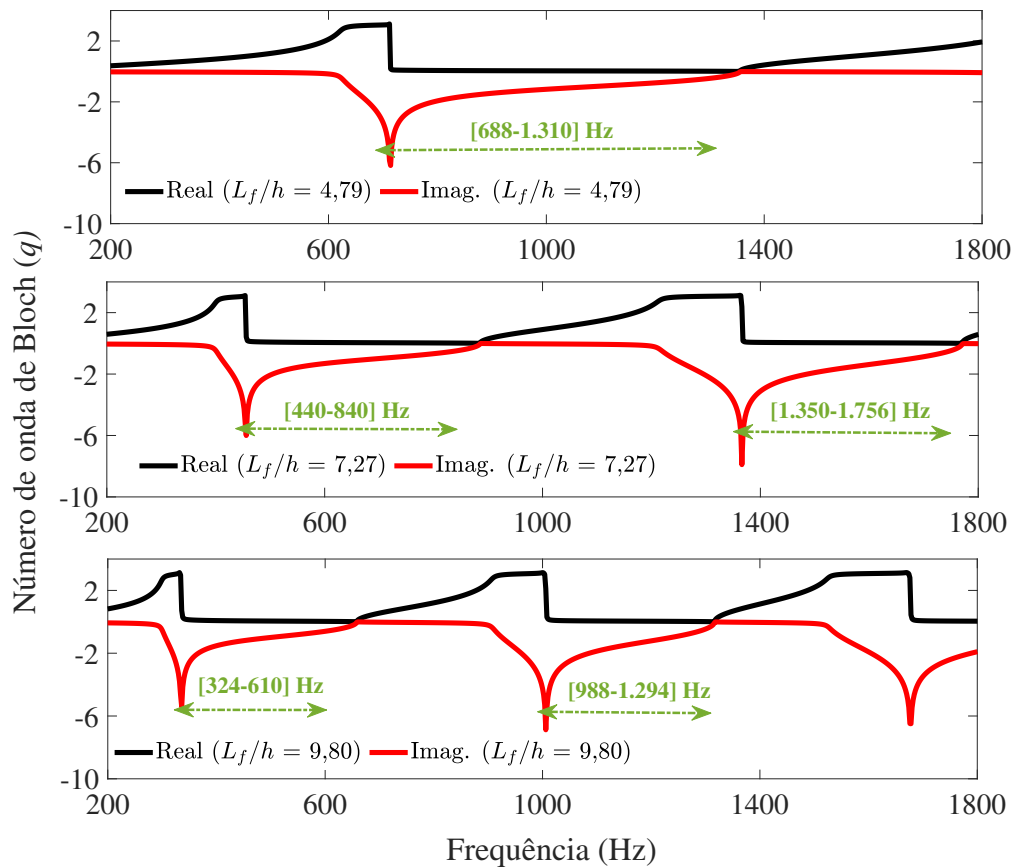
Fonte: O autor.

ao dispersor com $n = 3$ canais enrolados e ocorre em 1.369 Hz para ambas as predições com magnitudes de 60 e 52 dB, respectivamente. Quando comparado ao comportamento do painel duplo, a curva da PTS experimental do MA apresenta melhores resultados devido à sua configuração geométrica especificamente delineada. Além disso, por intermédio do MA um desempenho de isolamento acústico de banda larga e baixa frequência acima de 24 dB entre 600 Hz e 1.616 Hz é garantido experimentalmente. Para mensurar melhor esta boa atuação no controle e mitigação da energia sonora introduzimos o conceito de fator de escala, o qual relaciona a espessura da estrutura com o comprimento de onda da menor frequência de atuação, $E = Hf/c_0 = H/\lambda$. Como a amostra tem uma espessura total $H = N \times h = 40$ mm, esta corresponde a apenas 0,055 ou $\lambda/18$ do menor pico experimental da PTS ($f_{T1} = 465$ Hz).

O diagrama de dispersão da configuração T2 é apresentado na Figura 40 (a) e (b), outra vez uma boa concordância é obtida entre os métodos e a existência de três

bandgaps é confirmada. Agora o diagrama é apresentado na forma de zona estendida em valor não absoluto e não normalizado. O primeiro *bandgap* apresenta menor dimensão e está associado ao dispersor com $n = 3$ canais enrolados, o segundo *bandgap* está associado ao dispersor com $n = 2$ e, por fim, o terceiro *bandgap* está associado à periodicidade da estrutura. Observe que embora a constante de rede (h) seja preservada, os primeiros *bandgaps* apresentam dimensões e localizações diferentes devido à estrutura apresentar dispersores com diferentes comprimentos de propagação sonora (L_f). Portanto, esta afirmação pode ser avaliada através de uma razão adimensional, ou seja, a razão entre o comprimento total do dispersor e a periodicidade da estrutura (L_f/h), conforme apresentado na Figura 41. Na prática esta adimensionalidade nos permite quantificar a reatância acústica dos *bandgaps* e consequentemente sua localização. Nas análises a seguir a periodicidade foi mantida fixa ($h = 20$ mm) e o caminho de propagação sonora no dispersor foi variado. Podemos observar que a medida que esta razão aumenta o primeiro *bandgap* tem sua localização deslocada para frequências de maior comprimento de onda, embora seu tamanho diminua. Este comportamento está vinculado a um maior caminho no qual a onda tem para se propagar no dispersor,

Figura 41: Comportamento do diagrama de dispersão em razão de L_f/h .



Fonte: O autor.

assim como a mudança na impedância acústica do dispersor (ver Equação 173). Por outro lado, o *bandgap* associado a periodicidade da estrutura somente se revela quando a razão adimensional L_f/h apresenta maiores valores. Desta forma, com esta estratégia podemos estabelecer em qual região do espectro de frequência se quer estabelecer a banda de frequências proibidas bem como a dimensão desta banda na estrutura.

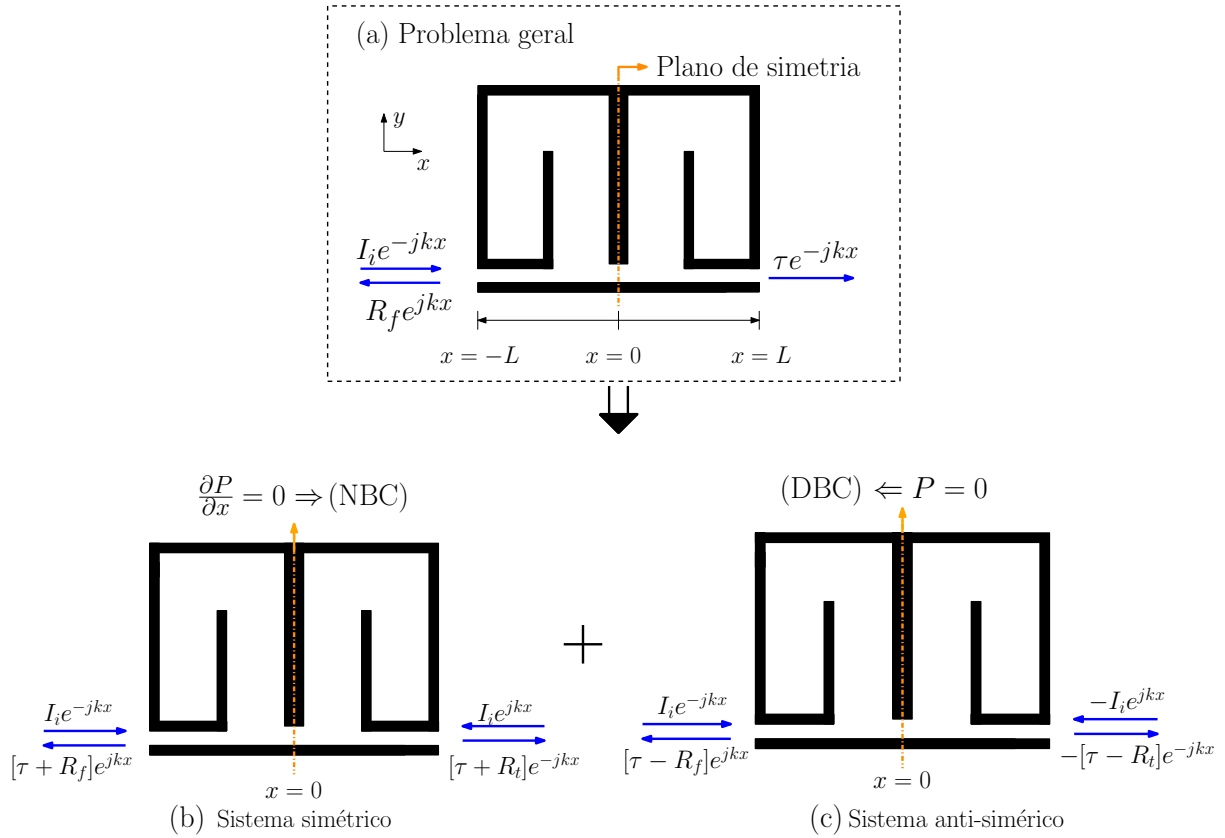
Uma questão importante a ser destacada em estruturas periódicas é o espaçamento e o tamanho dos dispersores, contemplamos no Capítulo 1 que dois tipos de estruturas interagem com as ondas sonoras, os cristais sônicos e os metamateriais acústicos. Para que haja interação com as ondas, os cristais sônicos exigem que os dispersores tenham a mesma ordem do comprimento de onda (λ) da onda propagante, como λ aumenta a medida que diminui a frequência, os cristais exigem grandes escalas para atuarem em frequências com longos λ . Por outro lado, veja que os dispersores da configuração T2 do metamaterial apresentam um espaçamento ou constante de rede da ordem de milímetros ($h = 20$ mm) e a estrutura atua eficientemente na região de longos comprimento de onda ($0,343 - 1,71$ m), tal viabilidade é possível pelo arranjo geométrico especificamente delineado combinado às perdas visco-térmicas. Portanto, a partir deste arranjo combinado às perdas e principalmente pela física subjacente ao seu comportamento, a estrutura relatada aqui encontra diversas aplicações práticas de aspecto científico-tecnológico, por exemplo: controle e manipulação sonora, filtragem acústica, clausura de fontes de ruídos, camuflagem acústica, lentes acústicas e outros.

7.2.3 Configuração T3

Nesta configuração do MA introduziremos uma análise sobre a propriedade de invariância de reflexão, a qual é muito importante no controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras por garantir a estrutura um caráter simétrico e recíproco ao mesmo tempo. Em geral, essa propriedade é facilmente garantida quando se estuda o comportamento dos materiais porosos tradicionais e pouco explorado do ponto de vista dos metamateriais periódicos. A invariância de reflexão ou invariância de paridade se mostra muito importante pois devido à simetria de espelho os coeficientes de reflexão e transmissão independem da incidência das ondas ($R^+ = R^-$ e $\tau^+ = \tau^-$).

A Figura 42 (a) mostra uma visão geral da estrutura simétrica e recíproca da configuração T3, ou seja, simétrica em relação ao plano mediano. A estrutura, portanto, pode ser reescrita em dois sub-sistemas complementares (G. d. N. Almeida et al., 2025; Merkel et al., 2015): (i) um sistema simétrico, que é estabelecido quando a condição rígida ou de Neumann (NBC) é imposta ao plano de simetria (ver Figura 42 (b)); e (ii) um sistema anti-simétrico que é estabelecido quando a condição suave ou de Dirichlet

Figura 42: (a) Esquema geral da estrutura. (b) Sub-sistema simétrico. (c) Sub-sistema anti-simétrico.



Fonte: O autor.

(DBC) é imposta ao plano de simetria (ver Figura 42 (c)). Note que nesta configuração a célula agora passa a ter um comprimento total $2L = 2 \times Nh$.

Um sistema totalmente simétrico, anti-simétrico e recíproco pode ser caracterizado teoricamente por uma matriz de espalhamento (Romero-García et al., 2020),

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_f & R_f \\ R_t & \tau_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau & R_f \\ R_t & \tau \end{bmatrix}, \quad (228)$$

onde $\tau = \tau_f = \tau_t$ é o coeficiente de transmissão. R_f e R_t são os coeficientes de reflexão para as ondas que se propagam para frente (subíndice f) e para trás (subíndice t) na estrutura, respectivamente. A partir da matriz $\mathbf{S}$ um problema de autovalor é obtido da seguinte forma

$$\det \left(\begin{bmatrix} \tau_f & R_f \\ R_t & \tau_t \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \implies \tau^2 - 2\Lambda\tau + \Lambda^2 - R_f R_t = 0, \quad (229)$$

$$(\tau - \Lambda)^2 = R_f R_t \implies \Lambda_{f,t} = \tau \pm \sqrt{R_f R_t}. \quad (230)$$

Como a estrutura tem simetria de espelho, isso implica que, $R = R_f = R_t$, portanto, a partir da Equação 230 os autovalores tornam-se, $\Lambda_{f,t} = \tau \pm R$. Consequentemente,

substituindo os autovalores no sistema abaixo

$$[\mathbf{S} - (\Lambda_{f,t})I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (231)$$

obtem-se os autovetores do problema $\vec{v}_{f,t} = (1, \pm 1)$. Para o sub-sistema simétrico na Figura 42 (b) e considerando que as ondas se propagam para frente, o coeficiente de reflexão torna-se $R_{\text{sim}} = \tau + R_f$. Portanto, este caso seleciona apenas aqueles modos que são simétricos em relação ao plano de simetria para o qual a condição NBC é aplicada na estrutura. Caso contrário, o sub-sistema anti-simétrico (ver Figura 42 (c)) atua como um espelho cuja imagem apresenta um deslocamento de fase π e apenas os modos anti-simétricos são selecionados na condição DBC, portanto, o coeficiente de reflexão anti-simétrico torna-se $R_{\text{asim}} = \tau - R_f$. Desta forma, os coeficientes de reflexão e transmissão do problema geral são expressos como

$$R = \frac{(R_{\text{sim}} - R_{\text{asim}})}{2}, \quad \tau = \frac{(R_{\text{sim}} + R_{\text{asim}})}{2}. \quad (232)$$

Neste caso os autovalores da matriz de espalhamento podem ser expressos como $\Lambda_f = R_{\text{sim}}$ e $\Lambda_t = R_{\text{asim}}$. Assim, o coeficiente de absorção sonora se torna

$$\alpha = \frac{(\alpha_{\text{sim}} + \alpha_{\text{asim}})}{2}, \quad (233)$$

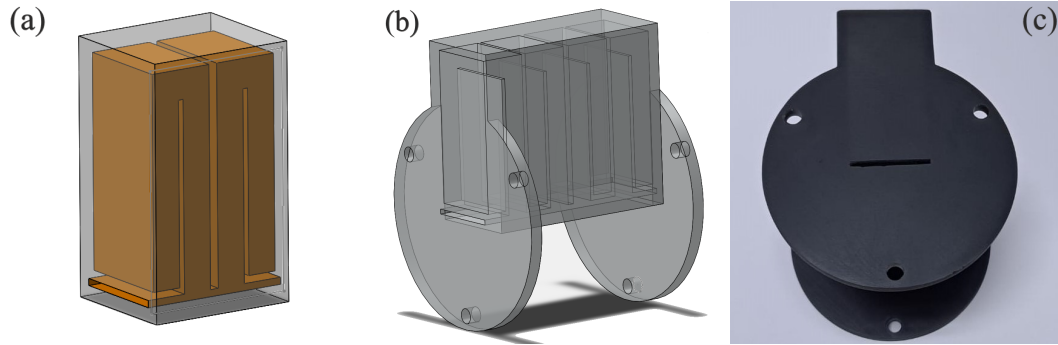
sendo $\alpha_{\text{sim}} = 1 - |R_{\text{sim}}|^2$ e $\alpha_{\text{asim}} = 1 - |R_{\text{asim}}|^2$. Note que na Equação 233 quando $\alpha_{\text{sim}} = \alpha_{\text{asim}} = 1$ uma absorção sonora máxima é obtida pois as ressonâncias no sistema são degeneradas, de maneira que modos simétricos e anti-simétricos ocorrem na mesma frequência ou próximos. Importante destacar que a determinação dos coeficientes da matriz de espalhamento (Equação 228) encontra-se nos Capítulos 5 e 6.

A Figura 43 mostra o esboço do MA simétrico e recíproco: Configuração T3. Neste caso primeiramente avaliaremos o caso em que o guia de ondas apresenta $N = 1$ dispersor simétrico com $n = 2$ canais enrolados, em seguida o caso com $N = 2$ dispersores simétricos com $n = 2$. Os parâmetros geométricos adotados nas análises são descritos na Tabela 6.

Tabela 6: Parâmetros geométricos (em mm) usados na fabricação da Configuração T3.

	N	n	m	l	h	d	b	$2L = 2 \times (Nh)$
caso 1	1,0	2,0	15,0	62,0	20,5	2,0	1,5	41,0
caso 2	2,0	2,0	15,0	62,0	20,5	2,0	1,5	81,0

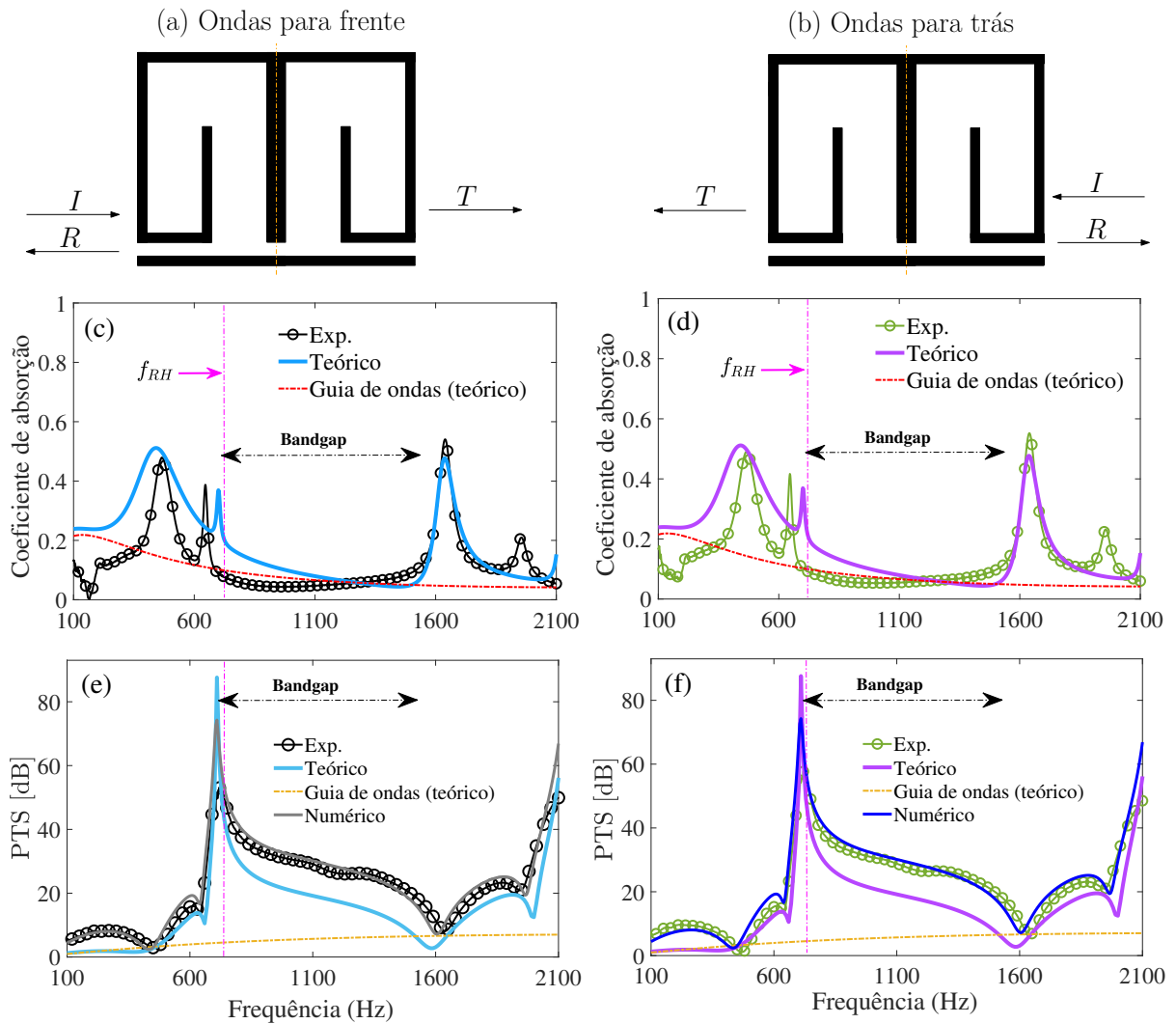
Figura 43: (a) Vista interna da Configuração T3 com $N = 1$ dispersor simétrico e $n = 2$. (b) e (c) Vista interna e fotografia da Configuração T3 com $N = 2$ e $n = 2$ cada.



Fonte: O autor.

O caráter simétrico e recíproco da estrutura e, conseqüentemente, o comportamento dos modos simétricos e anti-simétricos no controle, mitigação e manipulação das ondas sonoras que se propagam para frente e para trás são apresentados na Figura 44. Em geral os coeficientes de absorção sonora e a perda de transmissão sonora exibem uma boa concordância entre as diferentes predições. Como grupo de referência fornecemos a curva de absorção sonora teórica do guia de ondas na ausência do dispersor simétrico (veja curva tracejada vermelha). Conforme esperado a estrutura apresenta invariância de reflexão, ou seja, $R_f = R_t = R$ e $\tau_f = \tau_t = \tau$. Dois picos de absorção sonora em baixas frequências (≤ 600 Hz) correspondentes às duas primeiras ressonâncias da estrutura são observados e estes picos ocorrem notavelmente antes do *bandgap* [720 – 1560 Hz] e da f_{RH} do dispersor (tubo de $\lambda/4$). O primeiro pico está associado ao primeiro modo simétrico da estrutura e ocorre em 468 Hz com amplitude de 0,49 para o experimento e em 440 Hz com uma amplitude de 0,50 para a teoria, enquanto o segundo pico está associado ao primeiro modo anti-simétrico da estrutura e ocorre em 646 Hz (0,42) para o experimento e em 702 Hz (0,37) para a teoria. Em síntese, $\alpha = 0,5$ significa que $\alpha_{sim} = 1$ e $\alpha_{asim} = 0$ para o modo simétrico e $\alpha \approx 0,5$ significa que $\alpha_{sim} = 0$ e $\alpha_{asim} \approx 1$ para o modo anti-simétrico. Como os modos simétricos e anti-simétricos na estrutura não estão acoplados criticamente na mesma ou em frequências próximas, uma absorção sonora quase perfeita ($\alpha \geq 0,9$) não é alcançada. Portanto, para absorver perfeitamente as ondas sonoras neste problema de transmissão seria necessário a ocorrência de ressonâncias degeneradas, de modo que a estrutura apresentasse modos simétricos e anti-simétricos na mesma frequência ou próximos, conforme relatado por [Romero-García et al., 2020](#). Outros picos de absorção sonora após a banda proibida são observados na Figura 44 (c) e (d), o primeiro ocorre em 1.639 Hz (0,52) para o experimento e 1.639 Hz (0,49) para a teoria e o segundo pico ocorre em 1.957 Hz (0,24) para

Figura 44: (a) e (b) Estrutura recíproca com simetria de espelho: Configuração T3, caso 1. (c) - (d) Comportamento do coeficiente de absorção sonora. (e) - (f) Comportamento da PTS em dB.



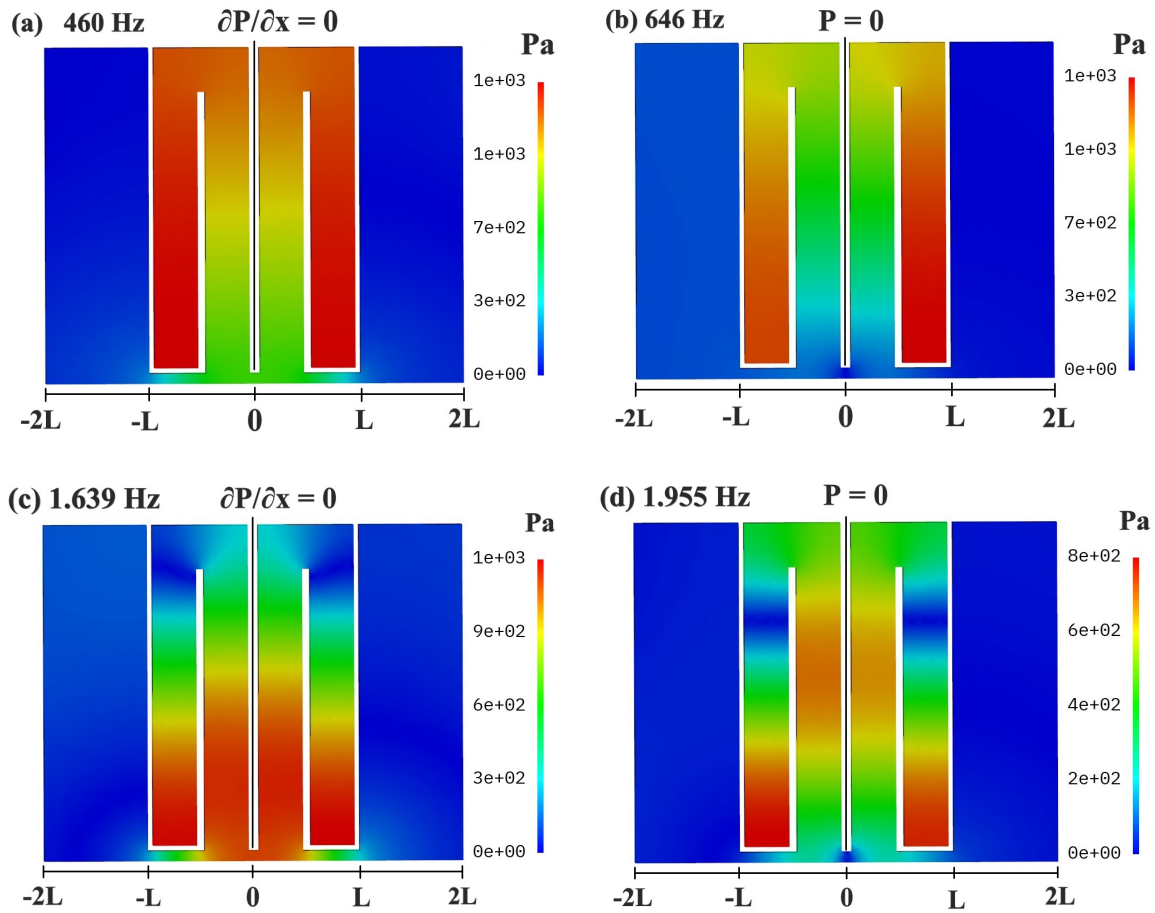
Fonte: O autor.

o experimento e 2.112 Hz (0,21) para a teoria, sendo esses picos relativos ao segundo modo simétrico e anti-simétrico, respectivamente. A Figura 44 (e) e (f) demonstra que o comportamento da PTS de uma estrutura que apresenta invariância de reflexão é idêntico ao de uma estrutura sem esta propriedade, ou seja, seu comportamento é recíproco e fortemente influenciado pelos *bandgaps*. Consequentemente, um isolamento acústico de banda larga e baixa frequência é garantindo com uma atenuação sonora superior a 20 dB entre 655 – 1.495 Hz. Além disso, esse comportamento é mais destacado quando comparamos com a PTS do guia de ondas sem o dispersor simétrico acoplado (ver curva tracejada amarela). A espessura total do caso 1 da configuração T3 é $2 \times (Nh) = 41,0$ mm, o que corresponde a 0,05 ou $\lambda/19$ para o último pico de absorção sonora teórico (440 Hz), revelando a boa capacidade de controle da energia

sonora com a estrutura apresentando uma escala de sub-comprimento de onda.

A física dos modos simétricos e anti-simétricos na estrutura recíproca e simétrica podem ser melhor compreendidas pelo comportamento do campo de pressão, conforme mostrado na Figura 45 (a) - (d). Note que o primeiro (460 Hz) e segundo (1.639 Hz) modo simétrico é simétrico em relação ao plano mediano da estrutura, de maneira que em $x = 0$ a condição NBC ($\partial P / \partial x = 0$) é garantida, enquanto o primeiro (646 Hz) e segundo (1.955 Hz) modo anti-simétrico é anti-simétrico em relação ao plano mediano, desta forma, em $x = 0$ a condição DBC ($P = 0$) é obtida.

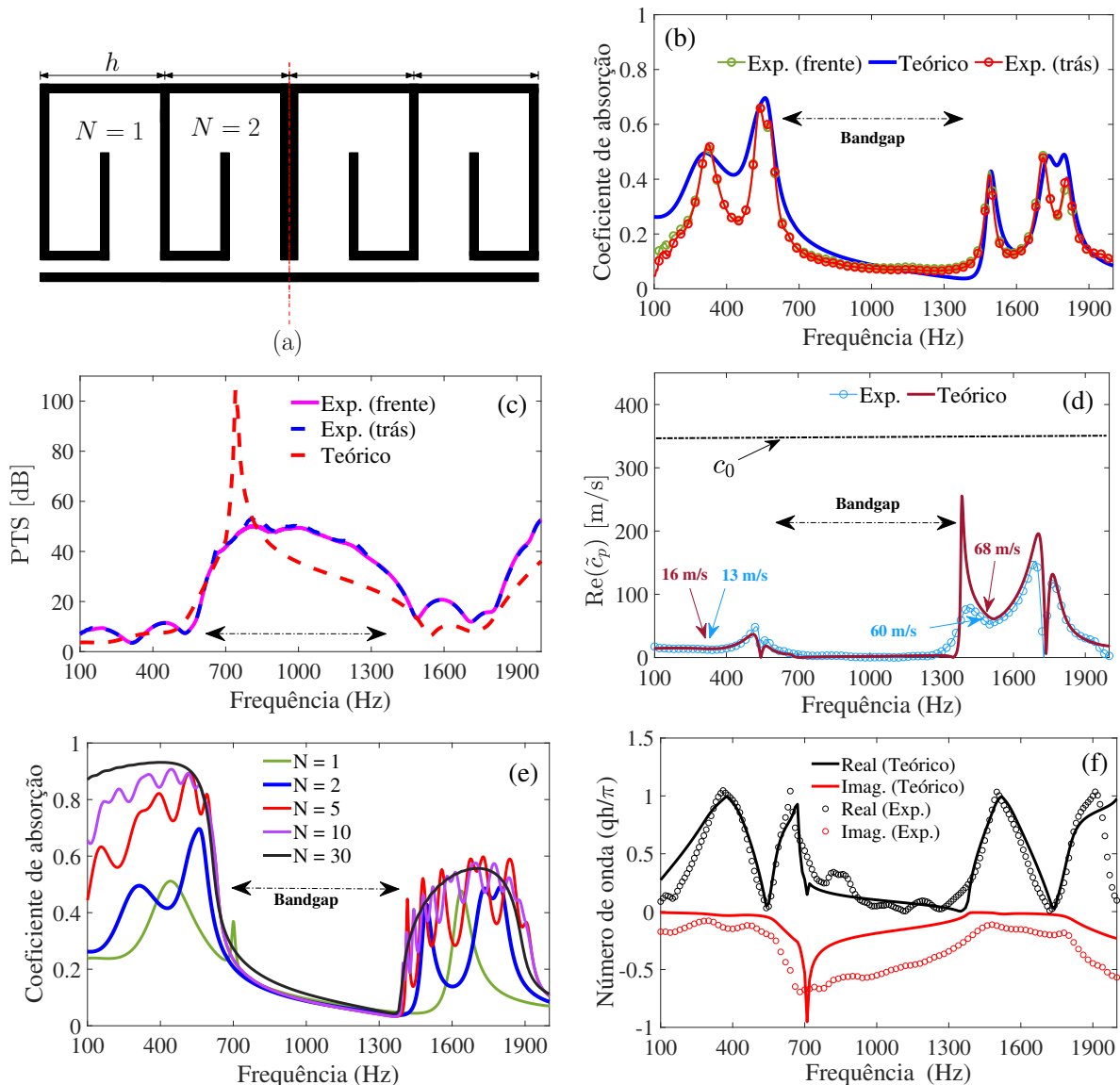
Figura 45: (a) - (d) Comportamento do campo de pressão acústica nas frequências dos modos simétrico e antissimétrico do MA: Configuração T3, caso 1.



O desempenho da estrutura simétrica e recíproca (caso 2) é apresentado na Figura 46. O objetivo com esta segunda configuração é obter um controle, mitigação e manipulação mais amplo das ondas sonoras. Novamente a invariância de reflexão é garantida e um aumento no controle e mitigação da energia sonora abaixo do primeiro *bandgap* [720 – 1.560 Hz] é alcançado (ver Figura 46 (b)). O primeiro e o terceiro pico de absorção sonora que estão associados ao primeiro e segundo modo simétrico da estrutura ocorrem em 320 Hz (0,52) e 578 Hz (0,61) para o experimento. Enquanto o

segundo pico que é relativo ao primeiro modo anti-simétrico ocorre em 537 Hz (0,66). Note que um $\alpha \geq 0,5$ é obtido em ambos os métodos independente da direção das ondas incidentes, ou seja, motivado pelo existência do *bandgap*, esse comportamento se deve ao fato dos picos relativos aos modos simétrico e anti-simétrico aparecerem escalonados em frequências próximas. Portanto, há um melhor acoplamento na estrutura e como consequência uma superposição de amplitudes, o que não ocorre com os picos após o *bandgap*. Assim, em nossa estrutura simétrica os modos simétrico e anti-simétrico podem ser acumulados próximos um do outro aumentando a absorção sonora principalmente na fronteira do *bandgap*. A partir desse resultado podemos afir-

Figura 46: (a) Estrutura recíproca e simétrica: Configuração T3, caso 2. (b) - (c) Comportamento do coeficiente de absorção e PTS em dB. (d) Velocidade de fase. (e) Coeficiente de absorção sonora em função do número de dispersores. (f) Diagrama de dispersão.



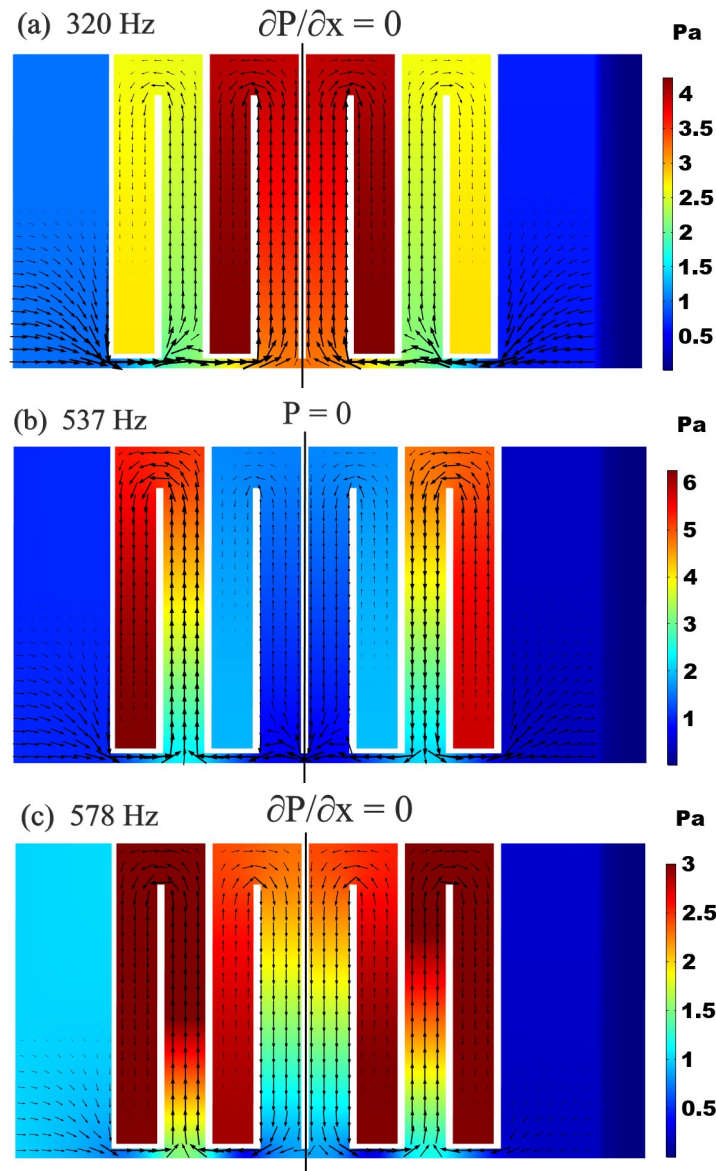
Fonte: O autor.

mar que ressonâncias degeneradas podem ser obtidas na estrutura pelo simples fato de aumentar o número de dispersores periódicos simétricos, e essa discussão é corroborada pelo resultado apresentado na Figura 46 (e). É notável que o aumento do número N de dispersores simétricos nos permite obter um aumento na amplitude da absorção sonora antes do *bandgap*, e essa possibilidade se deve ao acúmulo de picos que ocorrem na banda de passagem. Portanto, esse acúmulo permite que os modos simétrico e anti-simétrico apareçam próximos um do outro, caracterizando assim as ressonâncias degeneradas no sistema. Neste caso, o modo simétrico introduz uma ressonância no autovalor simétrico ($\Lambda = R_{\text{sim}}$) da matriz de espalhamento do problema geral, enquanto o modo anti-simétrico introduz uma ressonância no autovalor anti-simétrico ($\Lambda = R_{\text{asim}}$), e ambos aparecem escalonados na mesma frequência. Observe que, como ambas as ressonâncias aparecem na mesma frequência, uma absorção sonora quase perfeita é alcançada na estrutura. Por fim, na Figura 46 (c) constata-se um ganho de 5 dB no isolamento acústico em comparação ao comportamento da primeira amostra apresentada na Figura 44 (e) e (f), ou seja, temos agora um isolamento superior a 25 dB na faixa entre 655 – 1.495 Hz. Dessa forma, concluímos que a estrutura composta por mais dispersores simétricos permite maior capacidade de controle da energia em problemas de reflexão e transmissão simultaneamente.

Os resultados teóricos e experimentais da propagação sonora bem como o diagrama de dispersão da estrutura simétrica e recíproca são apresentados na Figura 46 (d) e (f), respectivamente. Devido a forte dispersão introduzida pelos $N = 2$ dispersores simétricos (ver Figura 46 (f)), podemos observar que a estrutura desacelera fortemente as ondas sonoras, de modo que o valor máximo da velocidade de fase antes da banda de parada é significativamente reduzido em comparação com a velocidade do som no ar, ou seja, $13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ para o experimento e $16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ para a teoria. Como consequência, a propagação das ondas na estrutura apresenta um regime subsônico. Note que na região da banda de parada não há propagação ($\tilde{c}_p = 0$), pois as ondas são evanescentes devido à parte imaginária da relação de dispersão se desviar de zero, conforme discutimos anteriormente nas configurações T1 e T2. Após a banda de parada na frequência 1.490 Hz, a velocidade de fase aumenta e apresenta um valor maior, $60 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ para o experimento e $68 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ para a teoria. Portanto, o comportamento da velocidade de fase da estrutura confirma a boa capacidade de manipular as ondas sonoras em problemas de reflexão e transmissão sonora simultaneamente.

Por fim, simulações numéricas do campo de pressão sonora e da distribuição instantânea da velocidade de partículas nos primeiros modos simétrico e anti-simétrico é apresentado na Figura 47. Neste caso consideramos somente a incidência de ondas

Figura 47: (a) - (c) Campos de pressão acústica e velocidade de partículas nas frequências dos modos simétrico e antissimétrico do MA: Configuração T3, caso 2.



Fonte: O autor.

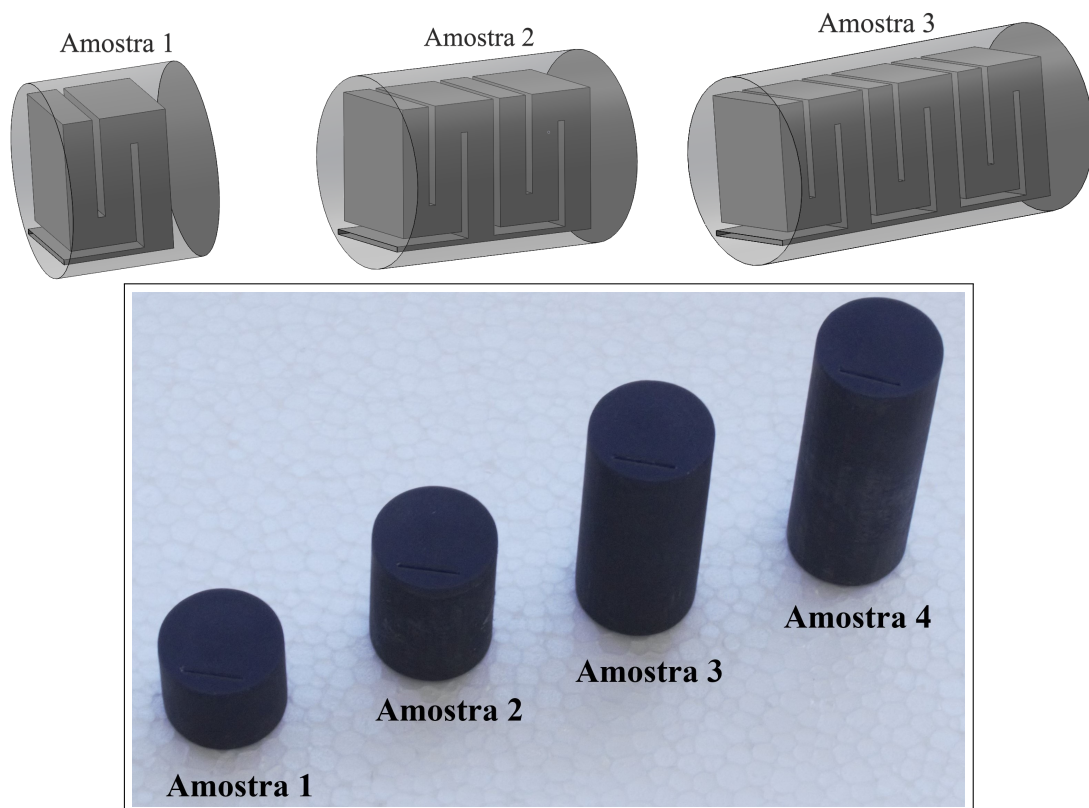
apenas para frente na estrutura. Outra vez, a condição NBC é observada no primeiro (320 Hz) e segundo (578 Hz) modo simétrico, enquanto a condição DBC é observada no primeiro modo anti-simétrico (537 Hz). Observe que o primeiro modo simétrico é governado principalmente pelo dispersor simétrico central da estrutura, enquanto no segundo modo por todos os dispersores, neste caso, a pressão sonora no final dos dispersores é, respectivamente, quase quatro e três vezes superior a pressão na entrada do sistema. Além disso, a velocidade de partículas para o primeiro modo simétrico (320 Hz) se propaga na mesma direção da entrada até o final dos dispersores. Enquanto que para o segundo modo (578 Hz) ela vibra fora de fase. Em outras palavras, a velocidade das partículas se propaga na mesma direção da entrada até o final nos dispersores

periféricos e do final até a entrada para os dispersores centrais (ver Figura 47 (c)). E esse comportamento explica as ressonâncias degeneradas obtidas na estrutura, já que o sistema apresenta um comportamento duplo para sua velocidade de partículas. Por outro lado, o primeiro modo anti-simétrico (537 Hz) é governado pelos dispersores periféricos, onde a pressão sonora no final desses dispersores é quase seis vezes maior do que na entrada da estrutura. Além de tudo, veja que neste modo a velocidade de partículas em todos os dispersores, ou seja, dispersores periféricos e centrais, também vibra fora de fase (ver setas pretas).

7.3 Problema de reflexão sonora

Os resultados da estrutura desenvolvida para o problema de reflexão sonora serão apresentados. A Figura 48 mostra o desenho CAD e as amostras fabricadas. Observe que as amostras desta configuração são compostas pelo guia de ondas com $N = 1, 2, 3$ e 4 dispersores periódicos com $n = 3$ canais enrolados cada um deles. Os parâmetros geométricos adotados na fabricação são apresentados na Tabela 7.

Figura 48: Esboço e fotografia das amostras do MA para o problema de reflexão.



Fonte: O autor.

O desempenho do controle da energia sonora das amostras 1 – 4 é apresentado na Figura 49 e uma boa concordância entre os métodos pode ser observado,

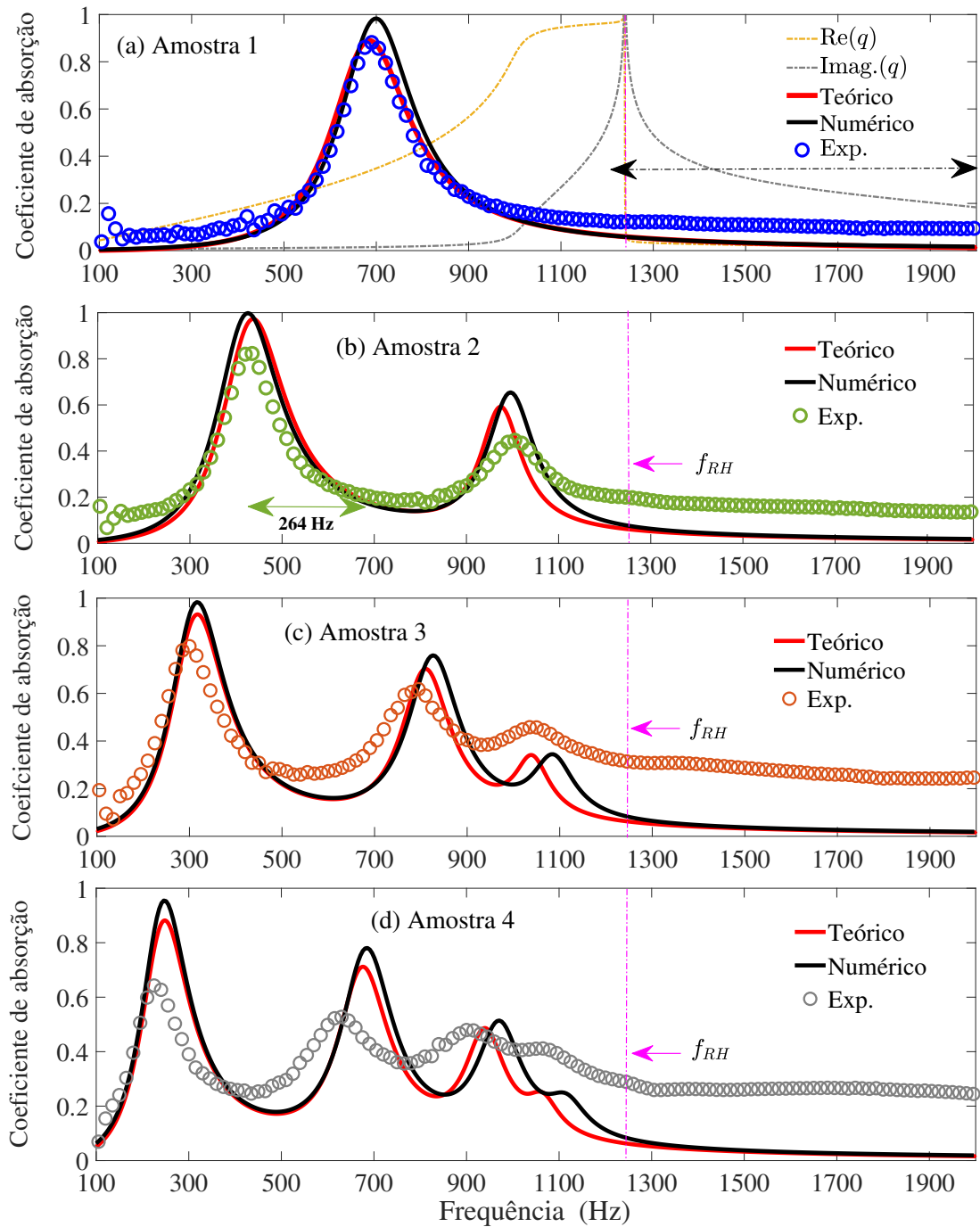
Tabela 7: Parâmetros geométricos (em mm) usados na manufatura das amostras.

Amostra	m	L	h	d	b	n	N	$N \times h$
1	16,0	20,0	16,0	0,65	1,0	3,0	1,0	16,0
2	16,0	20,0	16,0	0,65	1,0	3,0	2,0	32,0
3	16,0	20,0	16,0	0,65	1,0	3,0	3,0	48,0
4	16,0	20,0	16,0	0,65	1,0	3,0	4,0	64,0

com exceção para a amostra 4. Para uma melhor compreensão dos resultados o diagrama de dispersão teórico da estrutura no formato zona estendida em valor absoluto e normalizado também é fornecido. Além disso, a primeira frequência de ressonância $f_{RH} = 1.240$ Hz do dispersor é fornecida e representada pela linha rosa vertical. Conforme esperado o controle e mitigação da energia sonora da amostra 1 acontece antes do *bandgap* da estrutura, de modo que os picos de absorção sonora ocorrem em 682 Hz, 701 Hz e 686 Hz para a teoria, simulação e experimento. As amplitudes destes picos são, respectivamente, 0,88, 0,92 e 0,89. Focando na amostra 2 um deslocamento de 264 Hz (ver seta horizontal verde) no pico de absorção sonora experimental pode ser observado quando comparado à amostra 1, de maneira que seu último pico está localizado em 439 Hz com amplitude de 0,97 para a teoria, 426 Hz com amplitude de 0,99 para a simulação e 422 Hz com amplitude de 0,84 para o experimento. Com relação a amostra 3 e 4 o deslocamento do último pico experimental é de 392 Hz (686 Hz $\rightarrow$ 294 Hz) e 456 Hz (686 Hz $\rightarrow$ 230 Hz), respectivamente. A partir destes resultados conclui-se que devido a dispersão na estrutura um acúmulo de picos de absorção sonora a medida que aumenta o número de dispersores periódicos é garantido e este acúmulo é diretamente proporcional a N . Além disso, as características modulares do MA reveladas pela periodicidade dos dispersores mostra que a possibilidade de ajustar o controle da energia sonora em frequências mais baixas é possível.

Uma discrepância proeminente na amplitude do resultado experimental da amostra 4 é notório, e este comportamento está associado a imprecisão na fabricação da amostra, conforme relatado nos trabalhos de [Vergara et al., 2025](#) e [G. N. Almeida et al., 2021](#). Ou seja, como o guia de ondas da estrutura é um canal retangular (fenda) de baixa dimensão ($d \times (m - 2b) \approx 8,4e^{-6} \text{ m}^2$), qualquer não uniformidade interna oriundo da fabricação modifica os valores da resistência e reatância do sistema afetando assim a amplitude e a frequência dos picos de absorção sonora. Finalmente, como as amostras 1 e 2 apresentam uma espessura total $H = N \times h = 16$ mm e 32 mm,

Figura 49: Comportamento do coeficiente de absorção sonora das amostras 1 – 4.



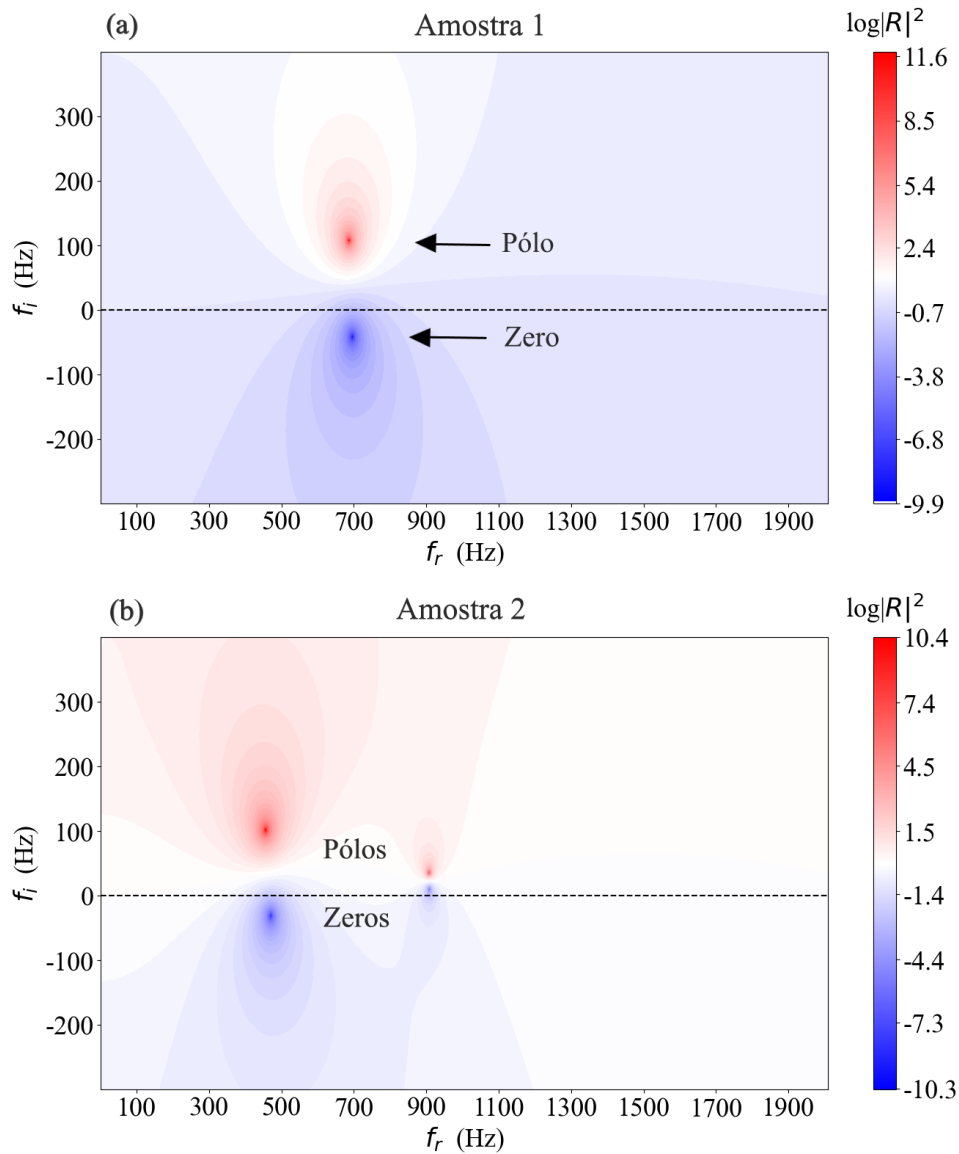
Fonte: O autor.

as mesmas correspondem, respectivamente, a $0,03 (\lambda/31)$ e $0,04 (\lambda/25)$, o que revela uma escala de sub-comprimento de onda do MA aplicado ao problema de reflexão também.

Informações adicionais sobre o acoplamento crítico e o excesso ou falta de perda de energia sonora inerente ao MA foi avaliado pelo coeficiente de reflexão (R) no plano complexo (G. N. Almeida et al., 2023; Groby et al., 2015). Esta análise é descrita no plano de frequência complexa ($\log |R(f')|^2$) de forma a avaliar o estado de amor-

tecimento na estrutura, onde $f' = f_r + jf_i$ com f_r representando a frequência real e f_i as dissipações intrínseca e adicional no sistema. Em geral, na condição sem perdas, um par de pólos e zeros de R são distribuídos simetricamente em ambos os lados do eixo de frequência real no plano de frequência complexo. Quando as perdas são consideradas no sistema, o par de pólos e o zeros serão então deslocados. Nas frequências de ressonância do metamaterial, a absorção sonora máxima é obtida quando o zero está localizado no eixo de frequência real, portanto, a condição de acoplamento crítico ($Z_S \approx Z_0$) é garantida. Por outro lado, a largura de banda da absorção sonora é avaliada pelo vazamento de radiação em termos da distância entre o zero e o pólo no método gráfico. A Figura 50 representa os coeficientes de reflexão no plano de frequência com-

Figura 50: Plano de frequência complexo do coeficiente de reflexão do MA: (a) Amostra 1 e (b) Amostra 2.

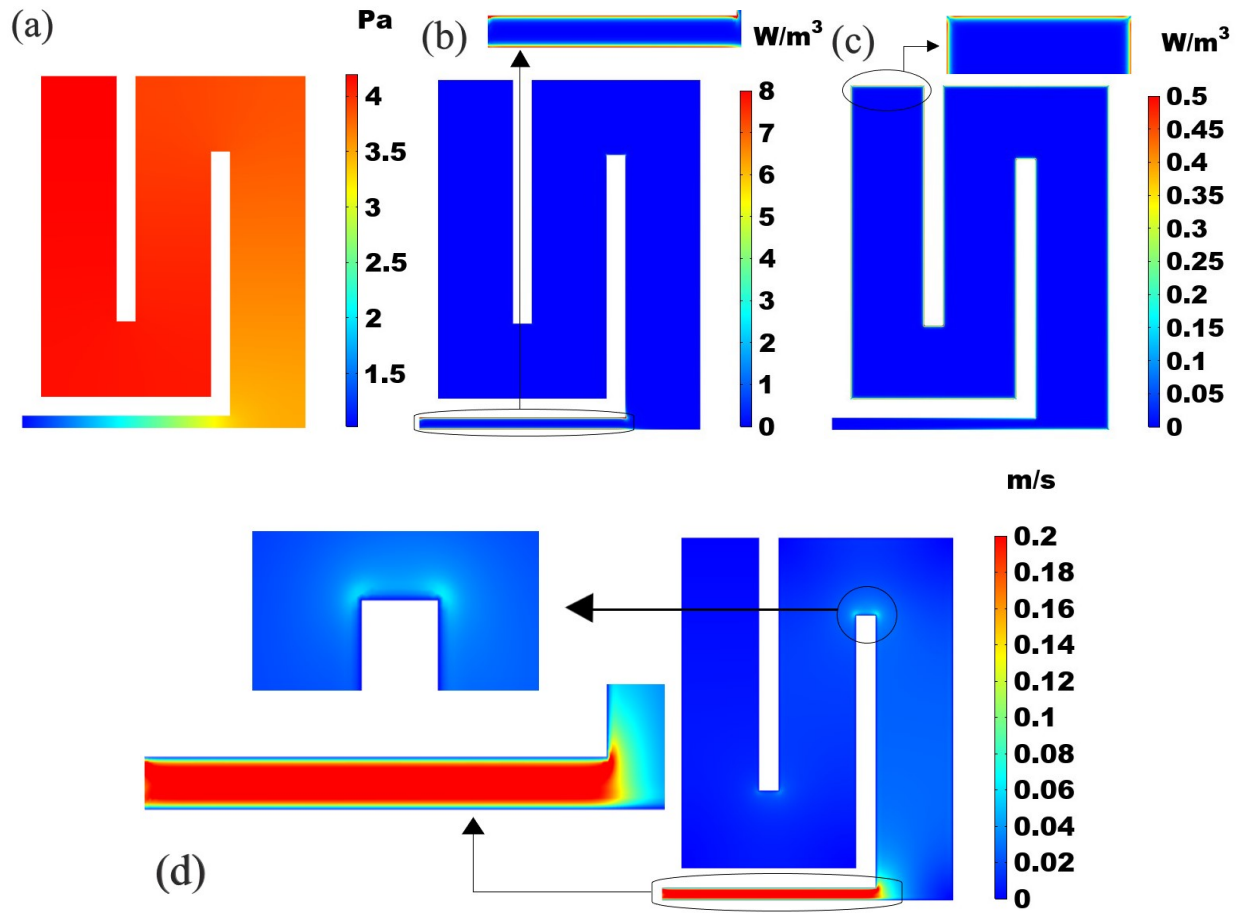


Fonte: O autor.

plexo das amostras 1 e 2 do metamaterial. Para amostra 1, o zero está localizado muito próximo ao eixo de frequência real, ou seja, o acoplamento crítico é quase garantido levando a um coeficiente de absorção sonora quase máximo, conforme apresentado na Figura 49 (a). Para amostra 2, o zero está localizado um pouco mais distante do eixo de frequência real, o que revela um pico de absorção sonora e um acoplamento crítico menor, corroborando o resultado apresentado na Figura 49 (b). Note que a afirmação anterior é comprovada pelo comportamento do zero e pólo relativo à segunda ressonância da amostra 2. Além disso, uma distância maior entre zero e pólo da amostra 1 demonstra uma maior taxa de vazamento e, conseqüentemente, uma largura de banda relativa mais ampla.

Para entender de forma abrangente o mecanismo de controle da energia sonora do MA no problema de reflexão foram conduzidas investigações sobre o comportamento do campo de pressão e das perdas visco-térmicas no plano 2D das amostras 1 e 3. E sob a perspectiva microscópica analisamos também especificamente o perfil de velocidade na amostra 1. A Figura 51 (a) revela que o campo de pressão sonora da amostra 1 é aproximadamente quatro vezes maior no final do dispersor em comparação ao campo de pressão incidente na entrada do guia de ondas da estrutura. Sob outra perspectiva, uma predominância de perdas do tipo viscosa (ver Figura 51 (b)) em relação a térmica (ver Figura 51 (c)) na frequência de ressonância da estrutura é observada, a qual ocorre principalmente na região do guia de ondas devido sua área de seção transversal ser menor em comparação a do dispersor. Além disso, as perdas térmicas acontecem de maneira amplamente distribuída na superfície das paredes internas do dispersor. Em resumo, após alguns cálculos verifica-se que a perda térmica representa 6,25% da dissipação total. Desta forma, a constatação de que 93,75% da dissipação máxima de energia na estrutura ser de natureza viscosa e ocorrer primordialmente no guia de ondas, justifica o mecanismo físico de absorção sonora do metamaterial, uma vez que o dispersor local acoplado ao guia de ondas apresenta um fenômeno de ressonância. Por outro lado, embora exista uma variação no campo de velocidade nas curvas abruptas no dispersor da estrutura, a Figura 51 (d) confirma que a predominância da dissipação viscosa está associada ao comportamento do campo de velocidade no guia de ondas, por dois motivos: (i) a velocidade aumenta gradualmente de zero nas paredes até o centro do guia de ondas e (ii) a dissipação ocorre dentro da camada limite viscosa. Portanto, este último motivo corrobora a importância da acústica visco-térmica apresentada no Capítulo 3, na descrição correta da física subjacente ao comportamento do metamaterial.

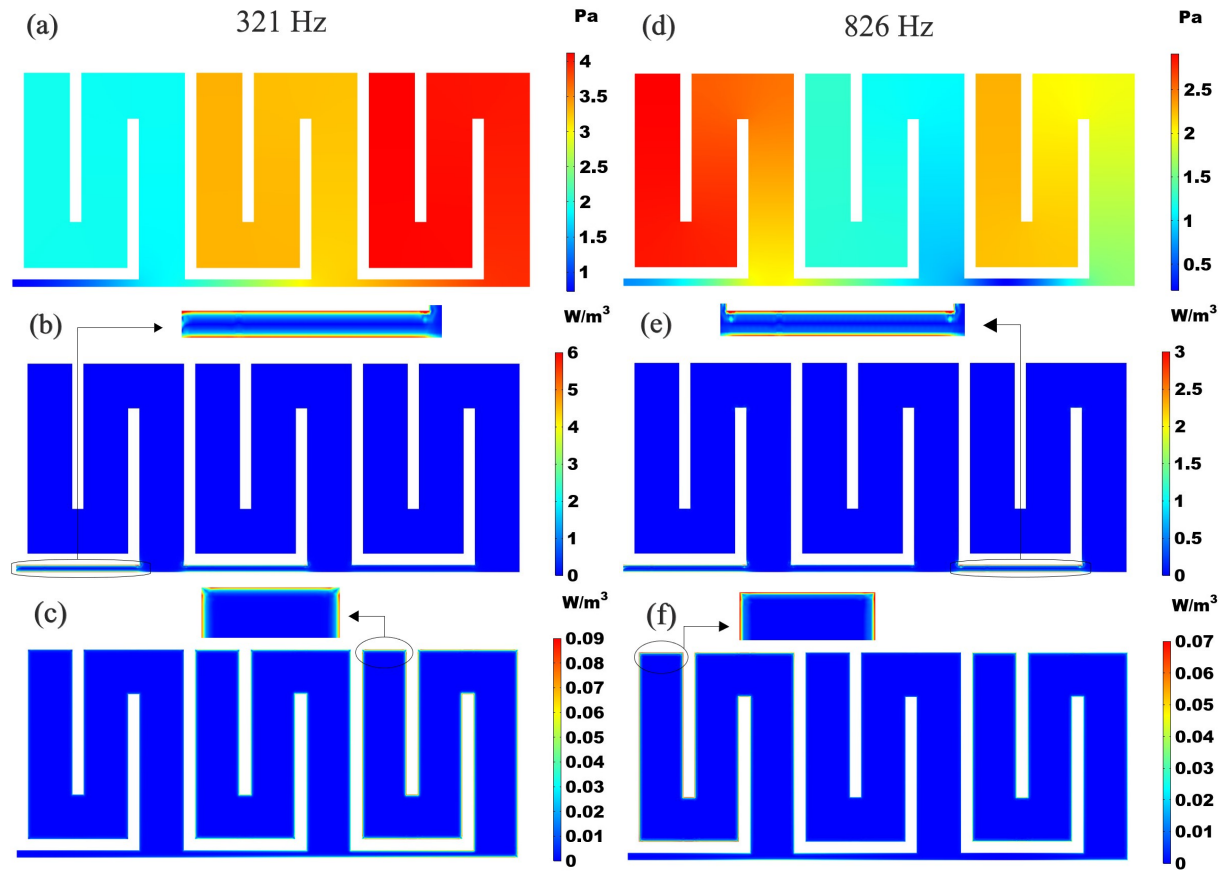
Figura 51: (a) Campo de pressão. (b) Perdas viscosas. (c) Perdas térmicas e (d) Campo de velocidade na primeira ressonância (688 Hz) da amostra 1.



Fonte: O autor.

A Figura 52 mostra o comportamento do campo de pressão e das perdas viscosas e térmicas no plano 2D da amostra 3 nas duas primeiras frequências de ressonância. Em geral, podemos observar que de certa forma o campo de pressão sonora em cada ressonância da estrutura com $N = 3$ dispersores está associado ao comportamento do campo de pressão no guia de ondas. Por exemplo, na segunda ressonância (826 Hz) o guia de ondas suporta quase dois comprimentos de onda, de forma que dois dispersores apresentam pressão sonora com maior magnitude. Com relação as perdas térmicas, novamente esta ocorre de maneira distribuída na superfície das paredes internas do terceiro dispersor para a primeira ressonância e do primeiro dispersor para a segunda ressonância, conforme apresentado na Figura 52 (c) e (f). Em contrapartida, as perdas viscosas a qual é predominante na estrutura, na primeira ressonância ocorre de maneira dominante no início do guia de ondas enquanto que na segunda ressonância ocorre ao final do guia de ondas, conforme Figura 52 (b) e (e), respectivamente.

Figura 52: (a) e (d) Campo de pressão. (b) e (e) Perdas viscosas. (c) e (f) Perdas térmicas nas primeiras ressonâncias da amostra 3.

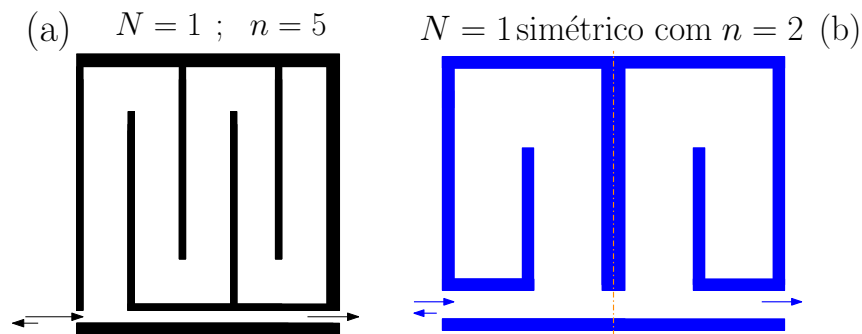


Fonte: O autor.

7.4 Propriedades efetivas negativas

Os parâmetros ou propriedades efetivas incomuns de duas amostras do meta-material do problema de transmissão são avaliadas com base no método apresentado no Capítulo 6 seção 6.6. A Figura 53 ilustra as configurações T1 e T3 cujas propriedades efetivas negativas serão apresentadas.

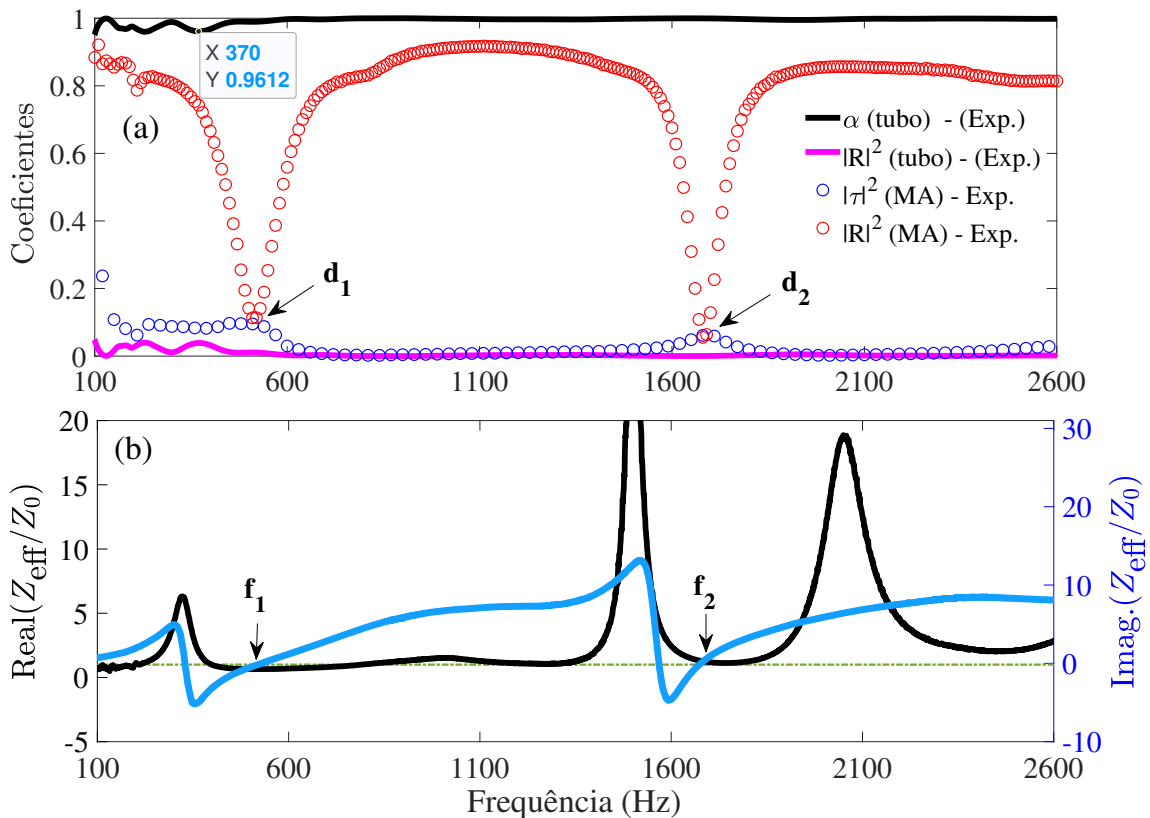
Figura 53: Estruturas do MA cujas propriedades efetivas foram avaliadas: (a) Configuração T1 e (b) Configuração T3, caso 1.



Fonte: O autor.

Para uma determinação realista dos parâmetros efetivos do metamaterial é importante verificar se o procedimento conduzido nos fornece características confiáveis. Esta verificação pode ser feita em dois passos: (i) observando se o aparato experimental garante uma condição de contorno anecoica ideal em todo o espectro de frequência de análise e (ii) verificando se a parte real da impedância acústica efetiva (Z_{eff}) do metamaterial apresenta magnitude positiva. A Figura 54 (a) demonstra que o tubo de impedância utilizado garante uma total condição de ausência de reflexão sonora, visto que uma absorção sonora superior a 96,12% ($R \leq 0,0388$) é observada ao longo de todo o espectro $f \in [100 - 2.600]$ Hz. Por outro lado, a Figura 54 (b) mostra que a parte real da impedância acústica efetiva da configuração T1 apresenta magnitude positiva. Na verdade o comportamento da impedância acústica efetiva demonstra ser mais elucidativo. Ela explica os dois picos proeminentes de absorção sonora nas frequências $f_1 = 517$ Hz e $f_2 = 1.683$ Hz apresentados na Figura 31 (b), os quais estão representados pelo coeficiente de reflexão sonora na Figura 54 (a). Observe que nesses picos

Figura 54: (a) Coeficientes de reflexão e absorção sonora do tubo de impedância com terminação anecoica e coeficiente de reflexão e transmissão do MA: Configuração T1. (b) Partes real e imaginária experimental da impedância acústica efetiva normalizada do MA.



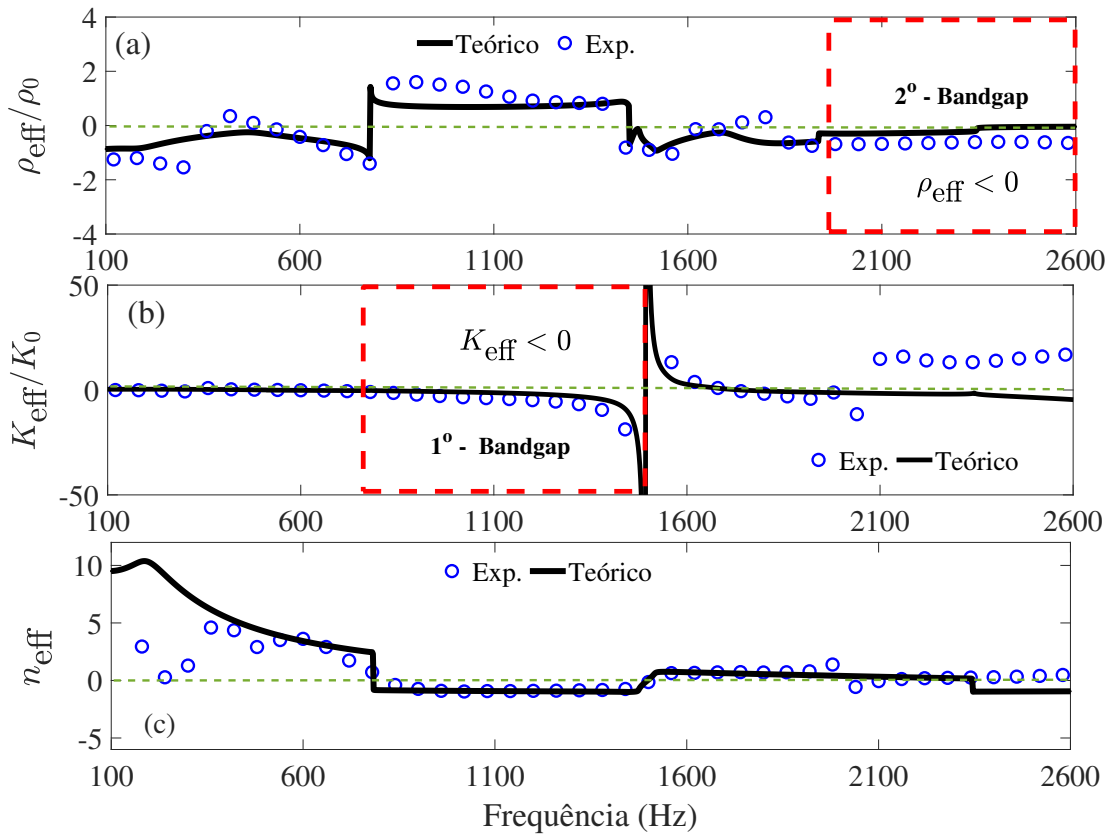
Fonte: O autor.

Z_{eff} se alinha estritamente com a impedância do ar, caracterizada pela parte real se aproximando da unidade e a parte imaginária de zero. Esse alinhamento significa que mais energia acústica está contida na estrutura durante esses picos de absorção sonora. Além disso, o comportamento das partes da impedância efetiva fornece informações adicionais sobre a eficácia do MA. Por exemplo, os platôs observados em d_1 e d_2 (ver Figura 54 (a)), localizados próximos aos respectivos picos de absorção sonora, contribuem para as quedas (vales) observadas na curva de perda de transmissão sonora (ver Figura 31 (c)). Essa descoberta, portanto, sugere que as características de absorção sonora do MA também desempenham um papel importante na definição de seu desempenho geral de transmissão sonora. E esse comportamento concorda com observações semelhantes realizadas em estruturas sanduíche incorporando metamateriais acústicos ressonantes apresentadas por [Lin et al., 2021](#).

O comportamento teórico e experimental da parte real da densidade de massa efetiva, do módulo de compressibilidade efetivo e do índice de refração acústico da configuração T1 são apresentados na Figura 55. Estes parâmetros nos fornecem novas revelações sobre o comportamento da estrutura, particularmente em relação às regiões dos *bandgaps*, ou seja, quando a estrutura se comporta como um monopolo e dipolo. No contexto das ressonâncias dipolo em metamateriais uma densidade de massa efetiva negativa pode ser observada, indicando que a velocidade de partículas está fora de fase com o gradiente de pressão dinâmica do meio. Essa densidade negativa se torna mais pronunciada quando a ressonância da estrutura é forte o suficiente para dispersar o campo a um nível mais alto do que o campo sonoro de fundo. Por outro lado, as ressonâncias monopolo contribuem para a possibilidade de um módulo de compressibilidade efetivo negativo, indicando uma instabilidade mecânica da estrutura e não um estado de equilíbrio. Nesse caso, o meio interno do metamaterial se expande quando submetido à compressão externa e se contrai quando esticado.

Com isto em mente, esta caracterização nos fornece uma visão abrangente de como esses parâmetros variam em diferentes frequências, lançando luz sobre o comportamento complexo do MA em resposta às ondas sonoras. Consequentemente, essas observações contribuem para a compreensão dos mecanismos por trás das propriedades de absorção e principalmente de transmissão sonora na estrutura. Observe que a Figura 55 (a) nos revela que a densidade de massa efetiva se torna negativa ($\rho_{\text{eff}} < 0$) antes do primeiro e principalmente do segundo *bandgap*, onde permanece negativa dentro da região onde ocorre a ressonância dipolo. Esta densidade de massa negativa implica que uma onda sonora dentro da estrutura exibe uma resposta oposta à direção da excitação. De outro modo, na Figura 55 (b), durante a ressonância monopolo na

Figura 55: (a) Comportamento da parte real dos parâmetros efetivos do MA: Configuração T1. (a) Densidade de massa. (b) Módulo de compressibilidade. (c) Índice de refração acústico.



Fonte: O autor.

primeira região de *bandgap*, a estrutura exibe um módulo de compressibilidade efetivo negativo ($K_{\text{eff}} < 0$). Esta região negativa surge da ressonância local do dispersor que compõe a estrutura, provando que o dispersor provoca uma reflexão sonora. Além disso, a Figura 55 (c) demonstra que o índice de refração acústico tem valores positivos somente antes das bandas de frequências proibidas. Portanto, fisicamente este parâmetro representa um fator de desaceleração na velocidade das ondas de Bloch no meio dispersivo.

O comportamento da parte real dos três parâmetros efetivos da configuração T3 são apresentados na Figura 56. Observe que dentro da faixa de frequência adotada esta configuração da estrutura exibe uma densidade efetiva puramente positiva, contudo, um módulo de compressibilidade efetivo negativo ($K_{\text{eff}} < 0$). Neste sentido, diferentemente da discussão apresentada anteriormente, vamos apresentar uma outra interpretação física para as consequências do módulo de compressibilidade negativo no metamaterial, e conseqüentemente, para o índice de refração. Para isso considere a equação da onda 1D para uma onda que se propaga na direção positiva de x ,

$$\nabla^2 P(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2}, \quad (234)$$

admitindo uma onda harmônica, a solução da equação acima pode ser escrita como, $P = P_I e^{j(-kx + \omega t)}$. A velocidade do som (c) na Equação 234 pode ser escrita da seguinte forma,

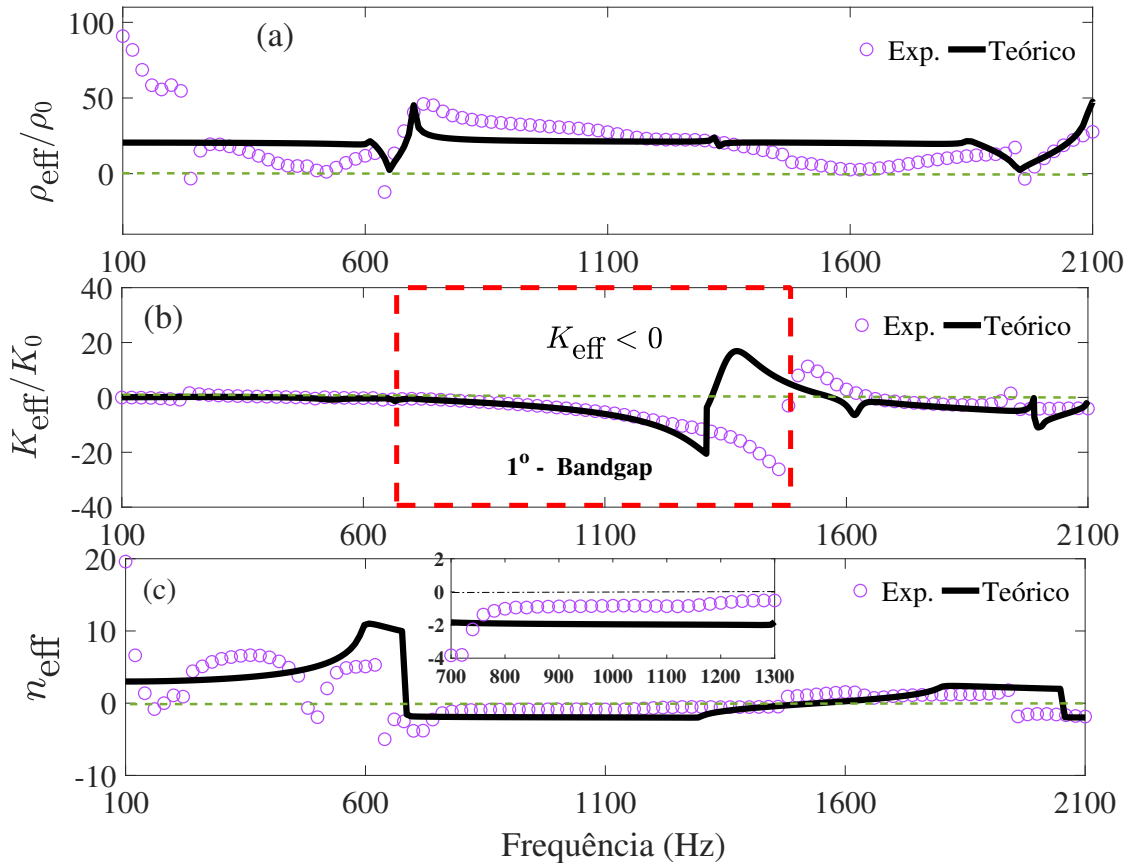
$$c = c_{\text{real}} = \sqrt{\frac{K_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}}}. \quad (235)$$

No caso em que K_{eff} é negativo e pelas propriedades de variável complexa, a velocidade do som torna-se imaginário, em outras palavras, $c = (-K_{\text{eff}}/\rho_{\text{eff}})^{1/2} = j c_{\text{real}}$. Consequentemente, o número de onda torna-se também, $k = \omega/c = -j k_{\text{real}}$. Substituindo nosso novo k na solução da equação da onda obtemos que,

$$P = P_I e^{j(j k_{\text{real}} x + \omega t)} = P_I e^{-k_{\text{real}} x} e^{j \omega t}.$$

Portanto, quando $K_{\text{eff}} < 0$ a solução da propagação da onda sonora muda para uma onda que é periódica e propagante com o tempo ($e^{j \omega t}$), além disso, a onda apre-

Figura 56: (a) Comportamento da parte real dos parâmetros efetivos do MA: Configuração T3. (a) Densidade de massa, (b) Módulo de compressibilidade e (c) índice de refração acústico.



Fonte: O autor.

senta um decaimento exponencial espacial ($e^{-k_{\text{real}}x}$). Consequentemente, devido ao decaimento exponencial, não existe propagação espacial da onda sonora resultando numa forte atenuação, caracterizando assim a região do *bandgap* em nossa estrutura. Desta forma, concluímos que este comportamento corrobora com a Teoria de Floquet e as condições de ondas de Bloch apresentado no Capítulo 4 seção 4.3 e principalmente com os resultados apresentados na seção 7.2.

Com relação ao comportamento do índice de refração exibido na Figura 56 (c), ainda que este tenha sido obtido no método de recuperação pela Equação 224, este parâmetro pode ser avaliado também através da seguinte relação,

$$n_{\text{eff}} = c_0 / c_{\text{eff}} = c_0 \sqrt{\rho_{\text{eff}} / K_{\text{eff}}}.$$

No caso em que $K_{\text{eff}} < 0$ implica que $n_{\text{eff}} = j c_0 \sqrt{\rho_{\text{eff}} / |K_{\text{eff}}|}$. Desta forma, este parâmetro se torna imaginário o que significa uma desaceleração da velocidade de fase da onda sonora na estrutura, conforme apresentado na Figura 46 (d). Por fim, esses parâmetros não convencionais exibidos pelas diferentes configurações do MA expandem significativamente as possibilidades de controle e manipulação das ondas sonoras nesta classe de material acústico periódico.

7.5 Síntese do capítulo

No presente capítulo, tanto a eficiência do controle e mitigação da energia sonora quanto a manipulação das ondas sonoras por meio de diferentes configurações do MA em problemas de transmissão e reflexão foram investigados. O amplo controle da energia sonora foi investigado considerando estruturas com e sem a propriedade de invariância de reflexão. A manipulação das ondas foi investigada por meio do número de onda de Bloch e da velocidade de fase. Foi demonstrado que a impedância acústica de Bloch, o parâmetro g_n / f_n e o número de onda especificam integralmente o comportamento das funções de onda de Bloch em uma célula primitiva do metamaterial. Além disso, simulações do campo de pressão sonora, da distribuição instantânea da velocidade de partículas e das perdas visco-térmicas foram realizadas para compreender melhor os mecanismos subjacente ao desempenho das estruturas. Em geral, foi relatado o comportamento do MA fundamentado em resultados experimentais. Portanto, os resultados adquiridos podem ajudar em soluções promissoras e abrir caminho para estratégias de manipulação e controle da energia sonora em aplicações diversas. Neste sentido, algumas aplicações de uma configuração específica do metamaterial proposto serão apresentadas a seguir no Capítulo 8.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

8 Aplicações

Neste capítulo, resultados de uma configuração do MA que garante simultaneamente passagem de fluxo de ar e desempenho acústico em situações reais são apresentados em detalhes. Neste contexto, o comportamento da estrutura ventilada foi avaliada em três cenários distintos: (i) um painel em tamanho real ($\approx 0,41 \text{ m}^2$) é analisado num campo difuso (incidência aleatória); (ii) a propriedade de perda de inserção (*insertion loss*) do painel do metamaterial como uma barreira acústica ventilada é avaliado; (iii) blocos de amostras do MA ventilado são aplicados na redução de ruídos de um refrigerador residencial.

8.1 Introdução e contextualização

É de senso comum que a poluição sonora tornou-se um desafio da sociedade moderna, visto que a exposição prolongada à ruídos impacta severamente a saúde humana, contribuindo para o aumento do risco de cardiopatia e hipertensão (Babisch et al., 2005), redução do desempenho no trabalho (Rossi et al., 2018; Scamoni et al., 2023) e provocando dores de cabeça e insônia (Kumar & Lee, 2019; Lusk et al., 2016). Por via de regra, em cenários práticos como residências e edifícios empresariais, janelas e portas ventiladas são fornecidas afim de garantir circulação de ar e, consequentemente, conforto térmico. No entanto, estes sistemas de ventilação natural permitem que o ruído externo penetrem facilmente nestes ambientes. Portanto, uma solução que possibilite ventilação natural e insonorização é uma tarefa desafiadora e necessária. Neste sentido, ainda que soluções como ressonadores de $\lambda/4$ (Q. Chen et al., 2023; Field & Fricke, 1998) e persianas ressonadoras (Lee et al., 2018) tenham sido aplicadas e resultados frutíferos tenham sido alcançados, propostas baseadas em metasuperfícies e metamateriais ventilados tem sido as soluções mais eficientes, devido principalmente a seu desempenho em baixas frequências associado ao seu baixo fator de escala.

Exemplificando, um meta-barreira baseada em deslocamento espacial e excelente desempenho de isolamento acústico foi proposto por S. Wang et al., 2025. A estrutura com 25% de área aberta apresentou um isolamento sonoro médio de 14 dB entre 900 – 2.000 Hz. Uma metasuperfície baseada num orifício central aberto e vias helicoidais com camadas empilhadas foi apresentado por Dong, Mao, Wang e Li, 2021, conse-

quentemente, um bloqueio efetivo de 90% da energia incidente na faixa de 650 – 2.000 Hz com a estrutura apresentando apenas 53 mm ($\approx \lambda/10$) foi demonstrado. Ademais, estruturas geométricas similares foram propostas por [A. Chen et al., 2022](#); [Dong, Mao, Zhu et al., 2021](#); [Lu et al., 2025](#); [Xu et al., 2024](#); [X. Zhang et al., 2024](#).

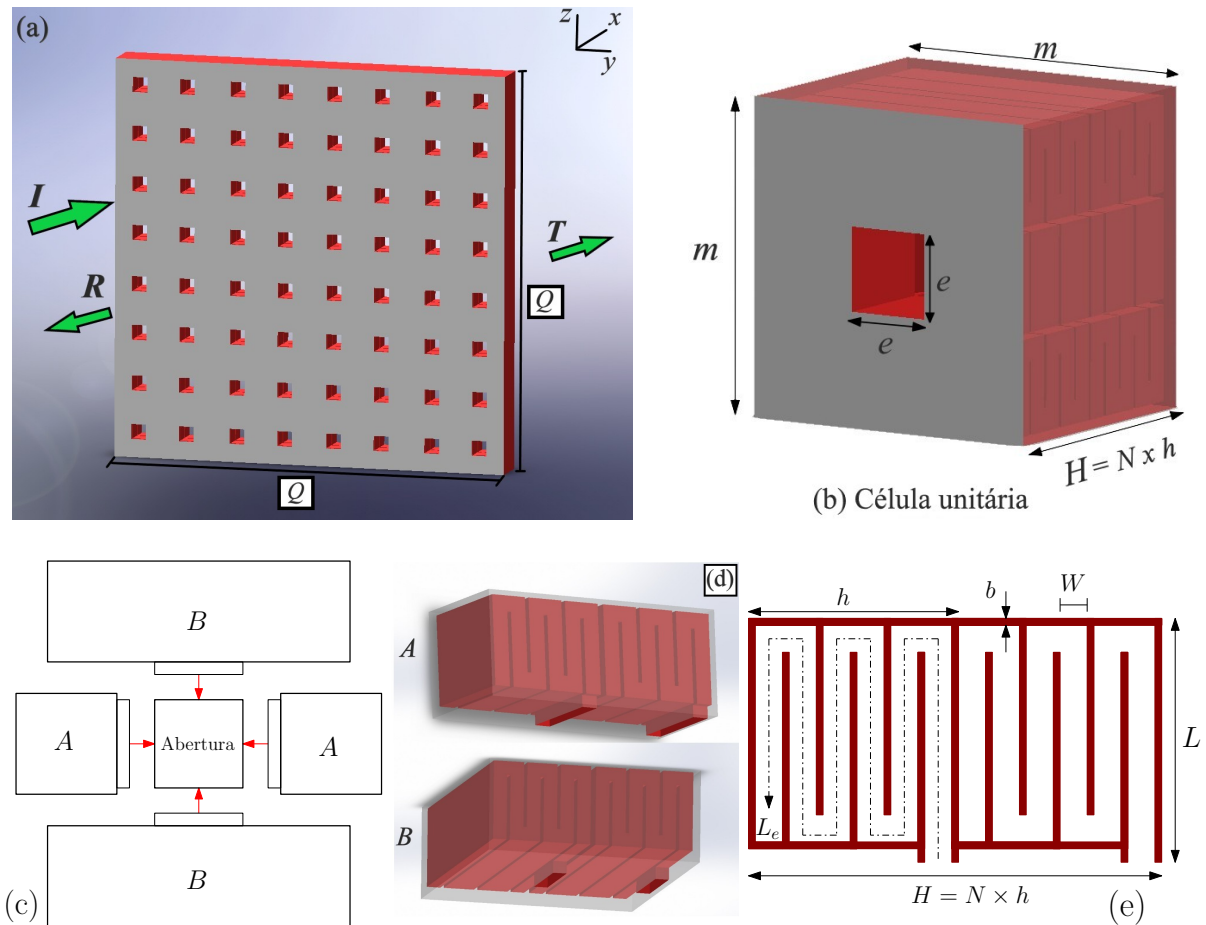
Destaques para a barreira acústica ventilada de tamanho real (0.36 m^2) baseada em trajetórias helicoidais proposta por [Dong, Mao, Zhu et al., 2021](#), onde os autores confirmaram a eficácia do projeto ($\text{PTS} > 10 \text{ dB}$ entre 610 – 1.120 Hz) mediante testes em campo difuso. Por outro lado, o estudo sobre o desempenho de isolamento acústico e ventilação natural de uma janela baseada em metamateriais apresentado por [Fusaro et al., 2024](#) também merece relevância. Neste caso, sob a perspectiva de três métodos experimentais os autores demonstraram que a estrutura apresenta uma diferença de nível sonoro entre 5 – 15 dB superior a uma janela sem o metamaterial na faixa de frequência de 500 a 5.000 Hz. Outros estudos envolvendo estruturas que permitem simultaneamente isolamento sonoro e ventilação e que merecem destaques foram apresentados por [Jiang et al., 2021](#), [Y. Zhang et al., 2025](#) e [Wu et al., 2026](#).

Portanto, embora estruturas do tipo metamateriais ventilados sejam conhecidos na literatura, trabalhos que abordem e demonstrem aplicações práticas destas estruturas em escala real são escassos. Sendo assim, estudos que considerem essa questão são necessários e se faz importante.

8.2 Metamaterial ventilado sob estudo

Para alcançar simultaneamente desempenho acústico e passagem de fluxo de ar em diferentes aplicações práticas, estruturas básicas do MA desenvolvido para problemas de transmissão e apresentadas no Capítulo 6 foram combinados para formar um arranjo geométrico ventilado. Portanto, trata-se de um painel de área $S_a = Q^2 = 0,64 \times 0,64 \text{ m}^2$ e espessura $H = 0,063 \text{ m}$. A Figura 57 (a) e (b) ilustra um esboço do painel e uma célula unitária, respectivamente. Por outro lado, a Figura 57 (c) e (d) elucidada sua combinação, de modo que agora a célula unitária apresenta um guia de onda de seção transversal quadrada ($e \times e$). Note que a célula apresenta duas combinações (A e B) de N dispersores acoplados periodicamente, conforme ilustrado na Figura 57 (e). A abertura central que permite a ventilação apresenta $\approx 10\%$ da área total da célula unitária. Por fim, no Capítulo 7 foi contemplado que quando a abertura (guia de ondas) apresenta baixa dimensão, as perdas visco-térmicas causam uma forte mudança na ressonância, no posicionamento e na dimensão dos *bandgaps* na estrutura, conforme resultados apresentados na Figura 33 (d) e (e). Todavia, descobrimos que,

Figura 57: (a) Painel com 64 células unitárias do MA ventilado. (b) - (c) Detalhes da célula unitária composta por duas configurações de dispersores. (d) - (e) Detalhe dos dispersores cujos parâmetros geométricos são os mesmos descritos na Capítulo 6.

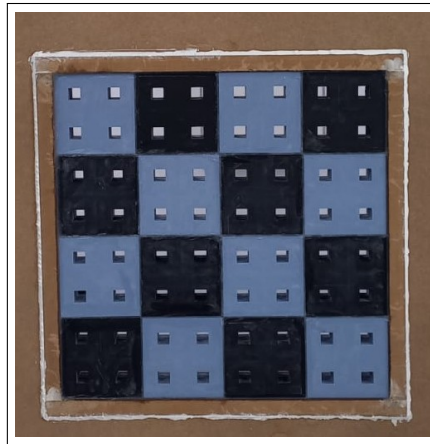


Fonte: O autor.

ao acoplar duas combinações de estruturas básicas (A e B) com *bandgaps* próximos, o forte acoplamento entre eles pode servir como uma ferramenta poderosa para obter ventilação e atenuação efetiva nas baixas-médias e até altas frequências. Diante disto, as características e comportamento da estrutura ventilada foram investigadas em três estudos de caso, os quais serão apresentados em detalhes a seguir.

Importante salientar que o painel ventilado foi montado a partir de 16 amostras ($0,16 \times 0,16 \text{ m}^2$) idênticas, cada amostra composta de 4 células unitárias, as quais foram fabricadas utilizando a mesma tecnologia de impressão 3D descrita no Capítulo 7 seção 7.1. Além disso, para garantir uma montagem final ideal uma moldura em MDF (*medium density fiberboard*) foi construída, consequentemente, as amostras foram fixadas e coladas com silicone acético. O resultado final do painel montado é apresentado na Figura 58.

Figura 58: Painel final do MA ventilado de área $S_a = 0,64 \times 0,64 \approx 0,41 \text{ m}^2$.



Fonte: O autor.

8.3 Estudo de caso - 1

O primeiro estudo sobre o desempenho do MA ventilado foi conduzido em três etapas subsequentes: (i) as 16 amostras foram numeradas, avaliadas num tubo de impedância de seção quadrada ($16 \times 16 \text{ cm}^2$) e os resultados da PTS comparado com a teoria e a simulação; (ii) afim de quantificar sua resistividade ao fluxo o desempenho de ventilação do MA foi avaliado; (iii) análises sobre comportamento da PTS da estrutura em campo difuso bem como de sua eficiência de radiação foram conduzidas. Portanto, a seguir é apresentado os resultados e as discussões de cada etapa.

8.3.1 Primeira etapa - Repetibilidade da PTS

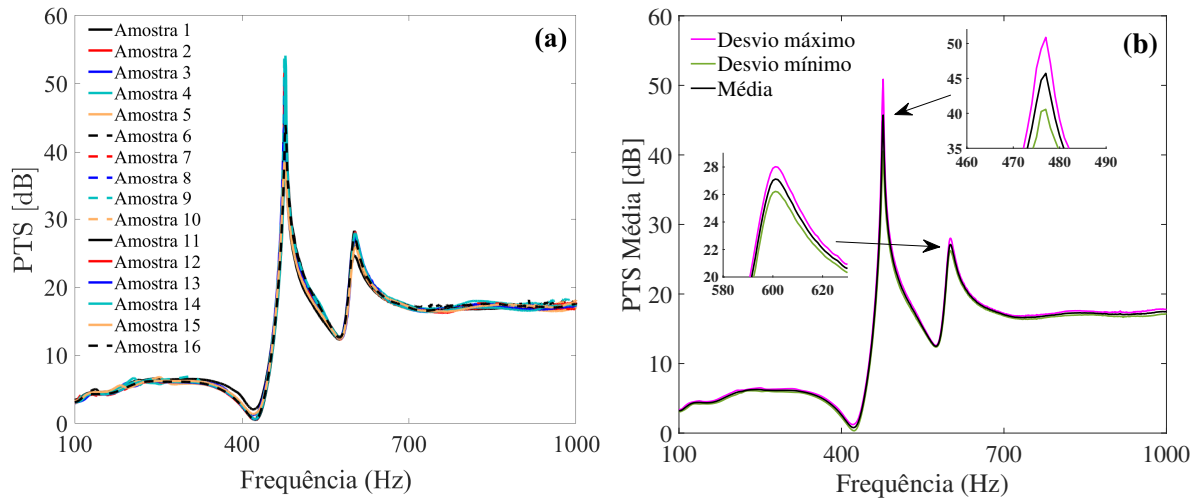
A Figura 59 ilustra o tubo de impedância utilizado nas análises da PTS cujo procedimento metodológico e instrumentação adotados são os mesmos apresentados na seção 6.5 do Capítulo 6. Neste caso a faixa de frequência de operação do tubo é limitada de 50 a 1.000 Hz. A Figura 60 (a) e (b) mostra o comportamento da perda de

Figura 59: Tubo de impedância de seção transversal quadrada construído para avaliar o comportamento do MA ventilado.



Fonte: O autor.

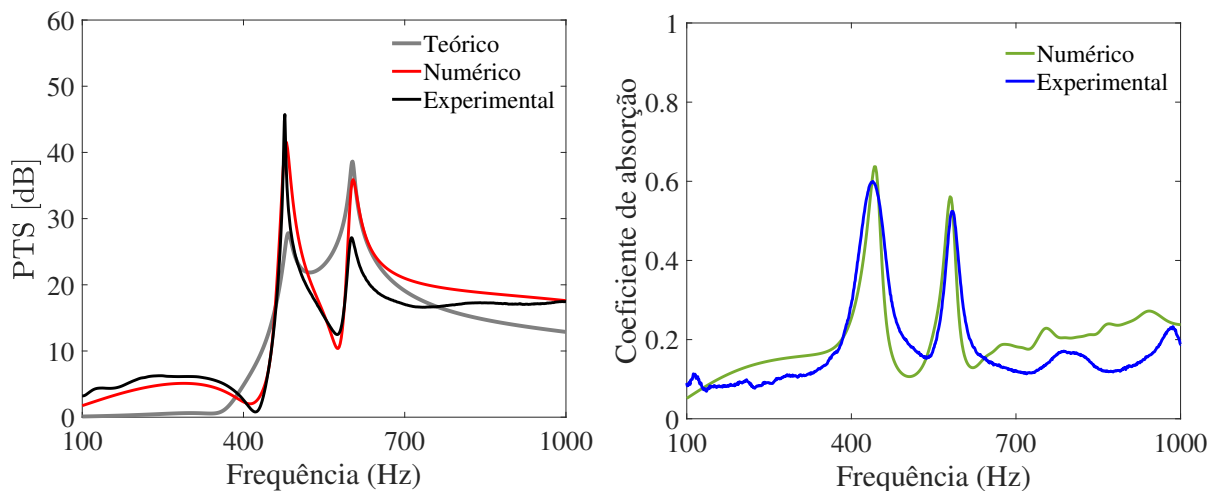
Figura 60: Comportamento do MA ventilado. (a) Perda de transmissão sonora das 16 amostras. (b) Média e desvio padrão populacional das curvas realizada em escala linear para em seguida ser convertida em dB.



Fonte: O autor.

transmissão sonora das 16 amostras e a média e o desvio padrão entre as curvas experimentais, respectivamente. A partir do resultado da Figura 60 (a) pode-se concluir que o processo de fotopolimerização em cuba adotado na fabricação das amostras nos garante repetibilidade dos resultados. Além disso, os máximos desvios ± 5 dB e ± 1 dB, ocorrem justamente nos respectivos picos da perda de transmissão sonora, conforme imagens ampliadas na Figura 60 (b). Em continuidade, um controle abrangente e simultâneo da energia sonora é garantido também na estrutura ventilada conforme apresentado na Figura 61. Neste caso, note que a estrutura apresenta dois picos proe-

Figura 61: Comportamento do MA ventilado. Média da perda de transmissão sonora e coeficiente de absorção sonora.



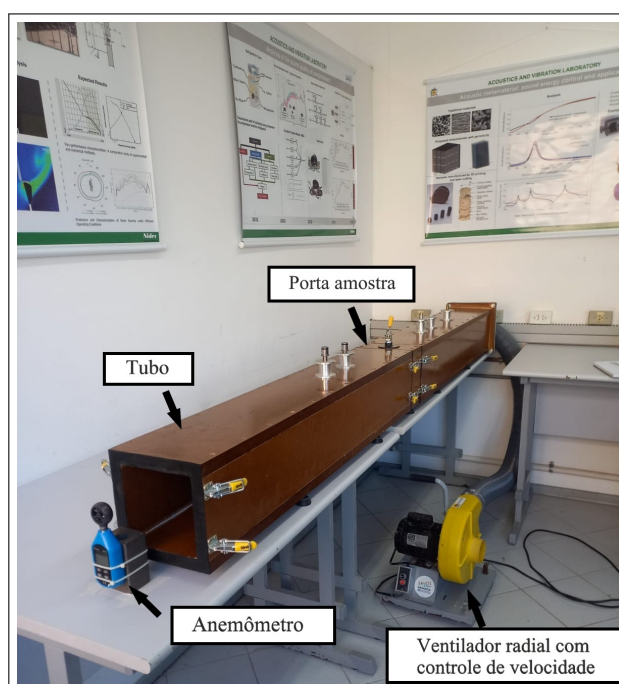
Fonte: O autor.

minentes de PTS, de modo que o primeiro pico com sua respectiva magnitude ocorre em 482 Hz (28 dB) para a teoria, 477 Hz (44 dB) para o experimento e 480 Hz (41 dB) para a simulação. O segundo pico ocorre em 603 Hz (38 dB) para a teoria, 601 Hz (28 dB) para o experimento e 604 Hz (36 dB) para a simulação. Por outro lado, os picos de absorção sonora, os quais precedem os picos de atenuação sonora, ocorrem em 439 Hz (0,60) para o experimento e 444 Hz (0,63) para a simulação. Já o segundo pico ocorre em 583 Hz (0,53) para o experimento e 580 Hz (0,56) para a simulação. Estes resultados demonstram que mais energia sonora pode ficar confinada na estrutura ventilada também. Portanto, assim como discutido na Capítulo 7 (ver Figura 54) pode-se afirmar que as características de absorção sonora do MA ventilado desempenham uma influência significativa na definição de seu desempenho na atenuação sonora também.

8.3.2 Segunda etapa - Desempenho de ventilação

A bancada experimental utilizada para avaliar o desempenho de ventilação do MA é apresentado na Figura 62. Resumidamente, utilizando o tubo quadrado como duto de ar avaliou-se as relações entre a velocidade do fluxo de ar com e sem a amostra como um indicador do seu desempenho de ventilação. A amostra era acoplada no centro do tubo de forma a garantir um fluxo de ar uniforme ao passar pela mesma, evitando assim qualquer impacto potencial na precisão da medição resultante das variações do fluxo de ar devido ao seu posicionamento inadequado. Durante os testes

Figura 62: *Setup* utilizado para avaliar o desempenho de ventilação do MA.

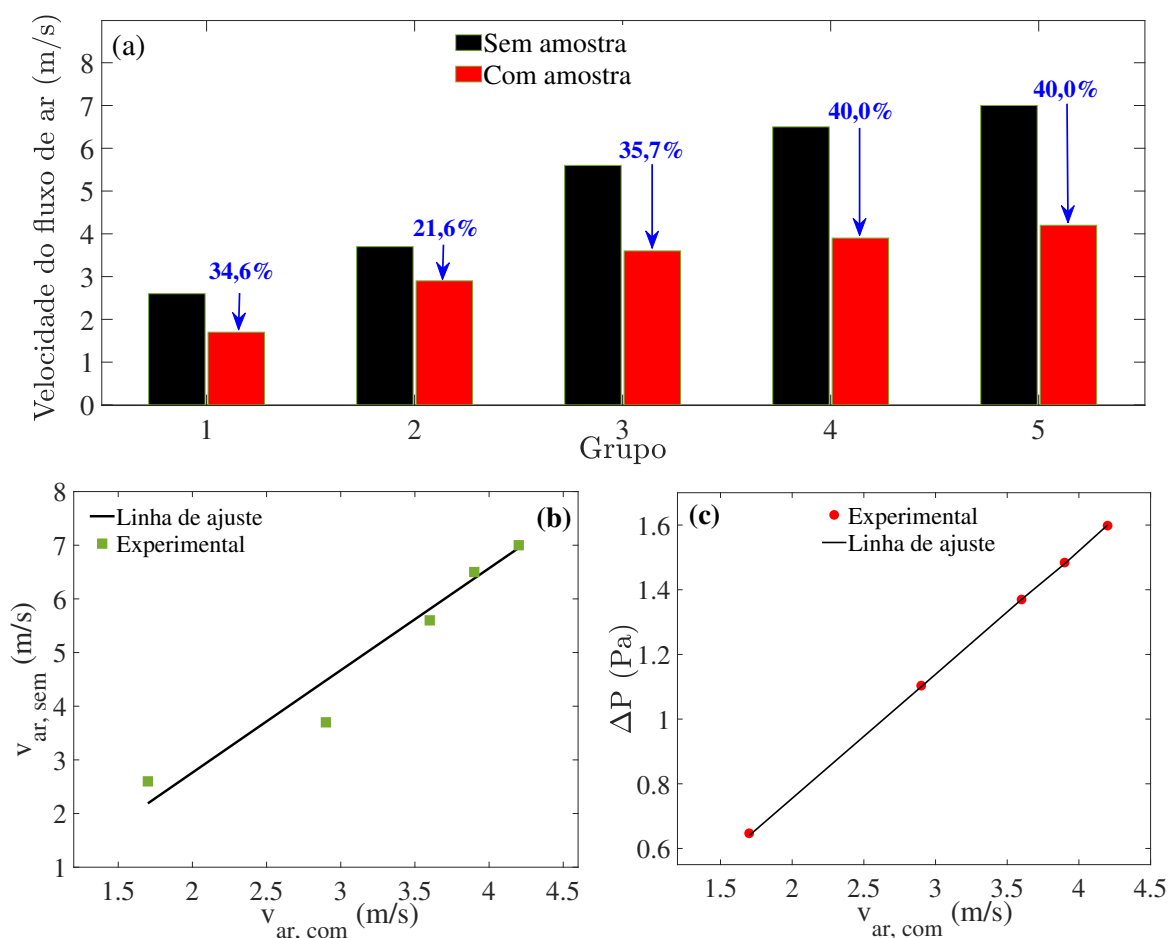


Fonte: O autor.

um ventilador radial com velocidades ajustadas por meio de um variador de tensão e acoplado em uma extremidade do tubo serviu como gerador do fluxo de ar. Na extremidade oposta um anemômetro (minipa modelo MDA-01) registrava a velocidade do fluxo de ar. Para atenuar os erros de medição e melhorar a confiabilidade dos dados experimentais, o valor médio obtido a partir dos resultados das 16 amostras será apresentado como resultado final. Importante destacar que as medições foram realizadas através de um grupo de cinco velocidades distintas.

A Figura 63 (a) e (b) revela as velocidades do fluxo de ar com e sem a amostra e observa-se que velocidades do fluxo de ar mais altas aumentam o efeito de bloqueio do metamaterial ventilado. Uma regressão linear foi conduzida e demonstra uma correlação linear entre a velocidade do fluxo com e sem a amostra, de modo que um coeficiente de determinação $r^2 = 94\%$ foi obtido pelo ajuste. As velocidades do fluxo de ar tiveram uma redução que variou de 21,6% a 40,0%, o que indica que o MA ventilado

Figura 63: (a) Histograma das curvas de velocidade do fluxo com e sem a amostra. (b) Velocidade do fluxo de ar medida com ou sem amostra. (c) Queda de pressão. A curva contínua preta é o resultado do ajuste (regressão linear) dos resultados medidos.



Fonte: O autor.

com uma área de abertura de $\approx 10\%$ apresenta bom desempenho de isolamento acústico, mantendo uma ventilação eficiente. Sendo assim, a característica de ventilação da estrutura proposta é similar aos modelos propostos por [A. Chen et al., 2022](#) que tem 16% de área aberta e [Dong, Mao, Wang e Li, 2021](#) com 19% de área aberta e melhor que os modelos propostos por [Lu et al., 2025](#) com 15% de área aberta e [X. Zhang, He et al., 2025](#) com 5,6% de área aberta.

É notório que o tamanho da abertura de estruturas ventiladas influencia o comportamento da resistividade ao fluxo de ar, de modo que aberturas menores oferecem alta resistência. Consequentemente, a resistividade estática ao fluxo de ar que é inversamente proporcional a taxa de abertura pode ser avaliada como ([Stinson & Champoux, 1992](#)),

$$\sigma = \frac{8\eta}{\Phi(0,5d)^2}, \quad (236)$$

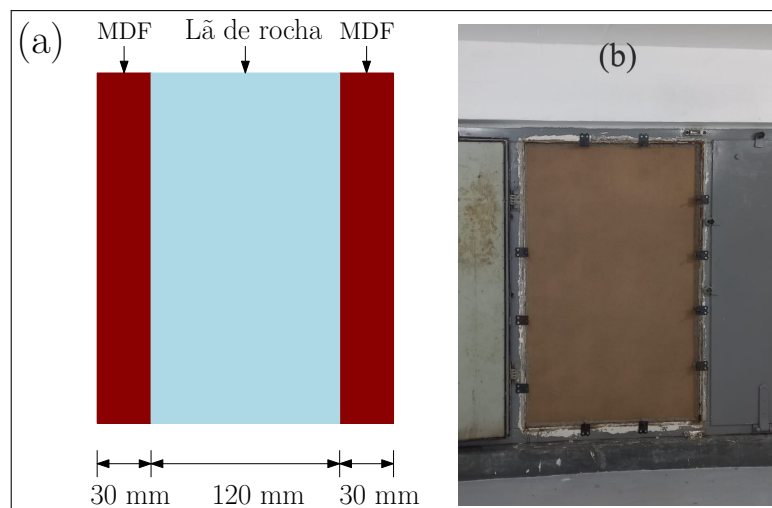
com $\eta = 1,81 \times 10^{-5}$ Pa·s representando a viscosidade dinâmica do ar, $\Phi = 0,1$ a razão de área aberta da estrutura e $d = 0,031$ m a diagonal da abertura quadrada. Portanto, a resistividade ao fluxo do MA proposto é $\sigma \approx 6,04$ Pa·s·m⁻², a qual é inferior aos valores típicos de materiais porosos convencionais (4.000 – 40.000 Pa·s·m⁻²) ([Allard & Atalla, 2009](#)) e metamateriais ventilados (972 Pa·s·m⁻²) ([X. Wang et al., 2019](#)). Pode-se observar pela Equação 236 que σ diminui rapidamente quando d aumenta, o que significa que a capacidade de ventilação do metamaterial pode ser ampliada. Além disso, indiretamente é possível avaliar o comportamento da queda de pressão ($\Delta P = \sigma H v_a$) na estrutura, onde v_a é a velocidade do fluxo de ar e H sua espessura. Note que na Figura 63 (c) a medida que a velocidade do fluxo aumenta uma maior queda de pressão é promovida, e esta queda ocorre de forma quase linear, por exemplo, quando $v_a = 1,7$ m/s tem-se $\Delta P = 0,647$ Pa, por outro lado, quando $v_a = 3,6$ m/s tem-se $\Delta P = 1,37$ Pa. Por fim, a seguinte análise pode ser feita, a medida que d diminui σ aumenta, consequentemente, uma alta queda de pressão também é promovida.

8.3.3 Terceira etapa - PTS em campo difuso

O comportamento do MA ventilado foi avaliado num campo sonoro difuso cuja metodologia experimental é baseada nas normas ISO 10140-2: 2010 e ASTM E-90, 2009. Neste sentido, utilizou-se duas câmaras reverberantes, ou seja, uma câmara fonte (147 m³) acoplada a uma câmara receptora (200 m³). Cada câmara foi equipada com um suporte rotativo Bruel & Kjaer tipo 3923 e um microfone de campo difuso Bruel & Kjaer tipo 4942-A. Adicionalmente, uma fonte de referência Bruel & Kjaer tipo 4204 foi utilizada nos testes também. Uma ilustração da configuração da câmaras do

através da amostra de teste, a barreira deve apresentar baixa transmissão ($\tau \rightarrow 0$), ou seja, uma perda de transmissão sonora maior que a amostra. A Figura 65 (b) mostra a parede dupla fixada e com suas bordas selada para evitar possíveis vazamentos.

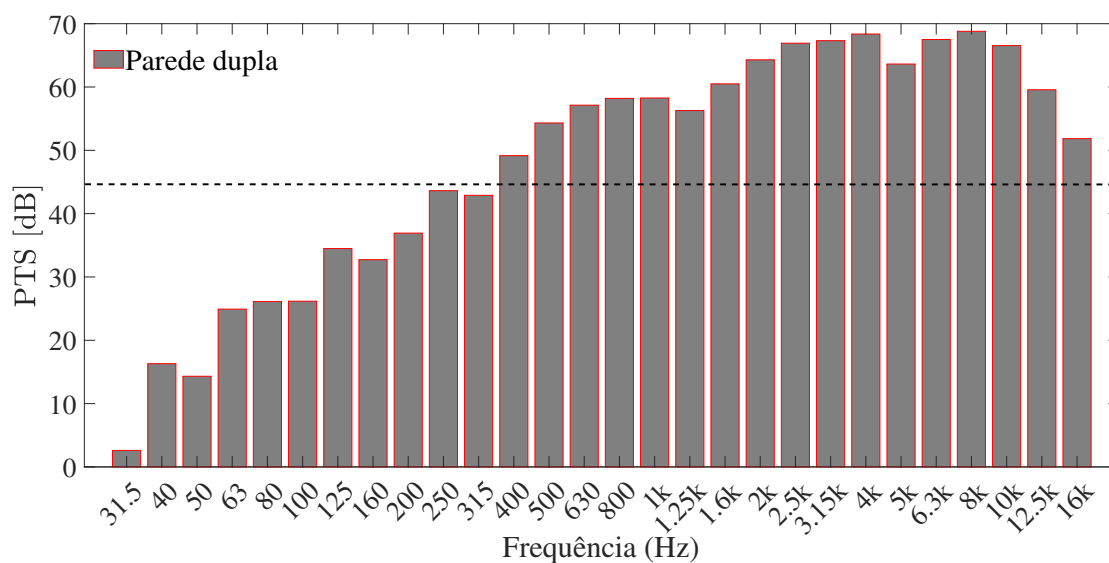
Figura 65: (a) Esquema da parede dupla tipo sanduíche desenvolvida. (b) Parede dupla de 1,8 m $\times$ 1,3 m construída e montada na abertura entre as câmaras reverberante.



Fonte: O autor.

O resultado da PTS da parede dupla em bandas de terço de oitava é apresentado na Figura 66 e como pode-se observar a estrutura apresenta um isolamento sonoro superior a 45 dB entre 400 – 16.000 Hz (ver linha preta horizontal). Deste modo, conclui-se que a estrutura atende as exigências para realização dos testes com o MA.

Figura 66: Comportamento da PTS da parede dupla tipo sanduíche.



Fonte: O autor.

Na sequência a parede dupla teve uma parte de sua área central recortada para acoplar o painel do MA ventilado, conforme destacado na Figura 67 (b). Importante salientar que para garantir uma análise ideal os limites do painel do MA foram selados com silicone acético em ambos os lados, por outro lado, os limites da parede dupla foram selados com massa de calafetar. Por fim, perspectivas da configuração experimental são apresentadas na Figura 67 (a) e (c).

Figura 67: Teste realizado nas câmaras reverberante do LVA da UFSC. (a) Perspectiva da câmara emissora. (b) Painel acoplado na janela. (c) Perspectiva da câmara receptora.



Fonte: O autor.

O modelo matemático adotado para descrever o comportamento do MA ventilado é o mesmo do Capítulo 6 (seção 6.2), contudo, para considerar o tamanho finito na previsão o coeficiente de transmissão sonora (Equação 165) é atualizado para levar em conta a radiação da amostra, ou seja, (Allard & Atalla, 2009; Schiller & Allen, 2016)

$$\tau_a(\theta, \phi) = \tau \times \operatorname{Re} \left(\frac{Z_{\text{campo}}(\theta, \phi)}{Z_0} \right) \cos(\theta), \quad (239)$$

com $Z_{\text{campo}}(\theta, \phi) / Z_0$ representando a impedância de campo, a qual é descrita como

$$\frac{Z_{\text{campo}}(\theta, \phi)}{Z_0} = \frac{jk}{2\pi Q^2} \int_0^a \int_0^b 4 \cos(k_0 \mu_x \kappa) \cos(k_0 \mu_y \tau) \frac{e^{-jk_0 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \times (a - \kappa)(b - \tau) d\kappa d\tau. \quad (240)$$

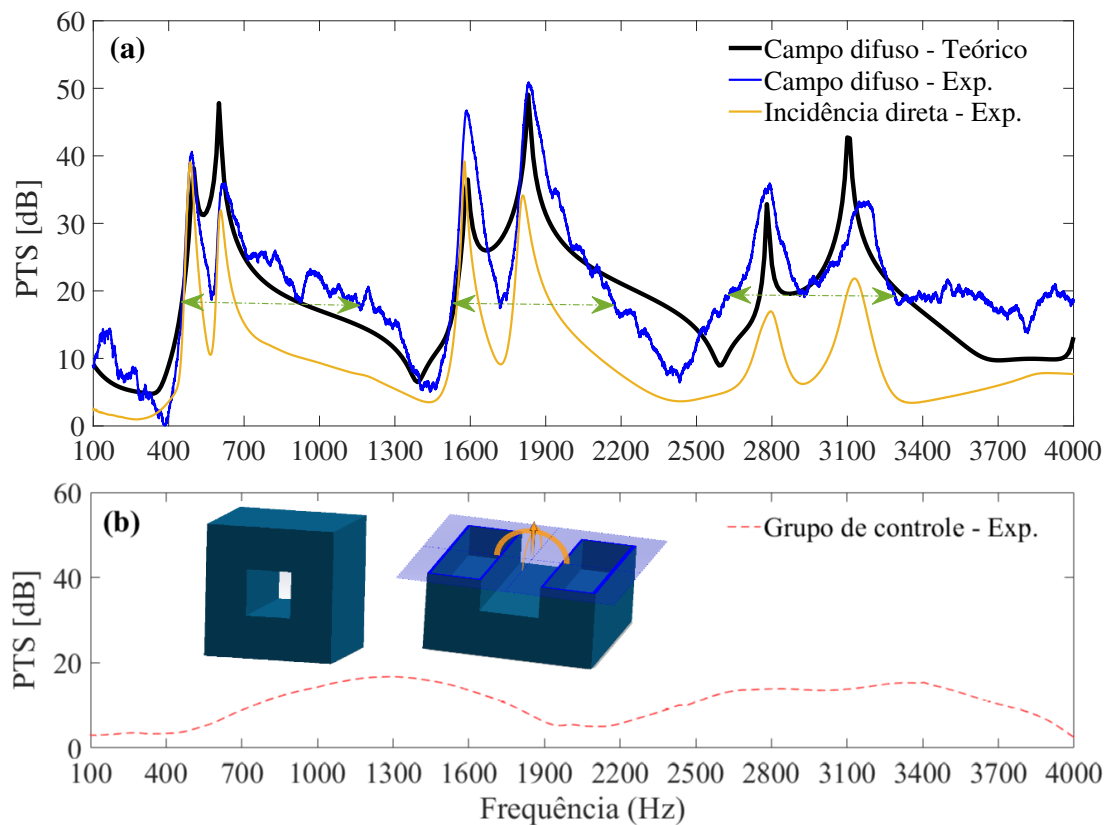
Observe que, desta forma, os efeitos de espalhamento e difração – efeitos de borda na abertura do metamaterial – são considerados. Leitores interessados podem encontrar detalhes da derivação da Equação 240 nos trabalhos de [Allen, Schiller et al., 2016](#); [Brunskog, 2012](#); [Thomasson, 1980](#). Neste estudo, $Z_{\text{campo}}(\theta, \phi)$ foi resolvida numericamente usando uma função de integração dupla [*integral2(fun, 0, a, 0, b)*] no *software MATLAB* ([Pereira et al., 2021](#)). Os termos μ_x e μ_y são definidos como $\mu_x = \sin(\theta) \cos(\phi)$ e $\mu_y = \sin(\theta) \sin(\phi)$, respectivamente. Consequentemente, o coeficiente de transmissão sonora em campo difuso é calculado integrando o coeficiente de transmissão atualizado (Equação 239) considerando todos os ângulos de incidência (polar e azimutal), ou seja,

$$\tau_d(\theta, \phi) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \tau_a(\theta, \phi) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\phi}. \quad (241)$$

Por fim, a perda de transmissão sonora em campo sonoro difuso pode ser calculado substituindo τ por $\tau_d(\theta, \phi)$ na Equação 178.

O comportamento teórico e experimental da PTS do MA ventilado em campo difuso é apresentado na Figura 68 e uma boa concordância pode ser observada entre os diferentes métodos. Adicionalmente, um resumo dos principais resultados é anunciado na Tabela 8. Diferentemente dos resultados apresentados na seção 7.2 do Capítulo 7, declaramos as análises numa faixa de frequência mais ampla (100 – 4.000 Hz). Ademais, como grupo de controle apresentamos a perda de transmissão sonora de uma célula unitária do metamaterial em campo direto (incidência normal) e de um painel duplo, o qual é uma estrutura ventilada com as mesmas dimensões da célula unitária do metamaterial, no entanto, com uma cavidade de ar no espaço dos dispersores periódicos (ver imagens inseridas na Figura 68 (b)). Comparando o resultado do metamaterial ventilado com o painel ventilado podemos observar um resultado de isolamento sonoro superior do metamaterial, e este resultado deve-se à sua configuração geométrica especificamente elaborada. Analisando a performance do MA ventilado nos distintos tipos de campo observa-se uma maior atenuação ao longo de todo o espectro de frequência em campo difuso, e este comportamento ocorre principalmente pelo efeito de borda ([Pieren & Heutschi, 2015](#)), a qual se origina devido ao fenômeno de difração sonora nas bordas da abertura de cada célula unitária da estrutura. Focando nos resultados em campo difuso podemos observar algumas discrepâncias entre

Figura 68: (a) Comportamento da perda de transmissão sonora do MA ventilado em campo difuso. (b) Perda de transmissão sonora do grupo de controle.



Fonte: O autor.

as predições, no entanto, conforme explicado no Capítulo 7 essas pequenas divergências são causadas pelas imperfeições (rugosidade) das paredes internas da estrutura. Além disso, a estrutura apresenta uma atenuação sonora que é superior a 19 dB entre 460 – 1.200 Hz e 1.528 – 2.165 Hz e superior a 20 dB entre 2.618 – 3.290 Hz (ver linhas horizontais verdes). Por fim, o fator de escala que relaciona a espessura da estrutura com o comprimento de onda da menor frequência de atuação $E = H/\lambda$, sendo $H = 63$ mm, corresponde a apenas 0,09 ou $\lambda/11$ do menor pico experimental da PTS (493 Hz).

Tabela 8: Síntese dos resultados da perda de transmissão sonora do MA ventilado.

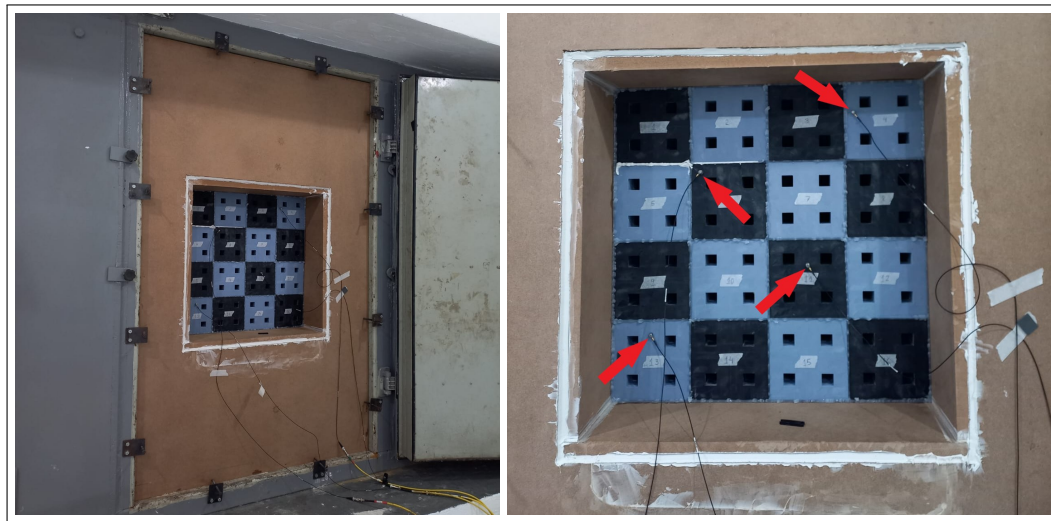
Picos de PTS	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Experimental	493 Hz 40,6 dB	622 Hz 35,92 dB	1.586 Hz 46,73 dB	1.833 Hz 50,83 dB	2.792 Hz 35,94 dB	3.166 Hz 33,23 dB
Teórico	500 Hz 38,15 dB	600 Hz 47,81 dB	1.590 Hz 36,5 dB	1.830 Hz 49,0 dB	2.780 Hz 32,85 dB	3.100 Hz 42,7 dB

Complementarmente uma investigação para analisar a eficiência de radiação do painel ventilado foi realizada, na prática o objetivo reside em avaliar o acoplamento físico entre as vibrações estruturais e o campo acústico. Portanto, a eficiência de radiação nos permite mensurar quão radiador de ondas sonoras é nosso painel ventilado. Experimentalmente este indicador é determinado como (Fahy, 2007)

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{\Pi_{\text{rad}}}{Z_0 S_a \langle \bar{V}^2 \rangle}, \quad (242)$$

com $\Pi_{\text{rad}} = 10^{-12} 10^{(L_w/10)}$ representando a potência sonora radiada pelo painel do MA ventilado para a câmara receptora, $L_w = SPL_2 - 10 \log_{10}(4/A)$ é o nível de potência sonora na câmara receptora com o parâmetro A determinado pela Equação 238. Por fim, $\langle \bar{V}^2 \rangle = \ddot{a}/j\omega$ é a velocidade média quadrática do painel com $\ddot{a}$ representando sua aceleração, a qual foi obtida a partir da média de quatro pontos usando acelerômetros Bruel & Kjaer tipo 4519-001. A Figura 69 ilustra os acelerômetros já calibrados e fixados na estrutura do painel.

Figura 69: Painel do MA ventilado instrumentado com acelerômetros.

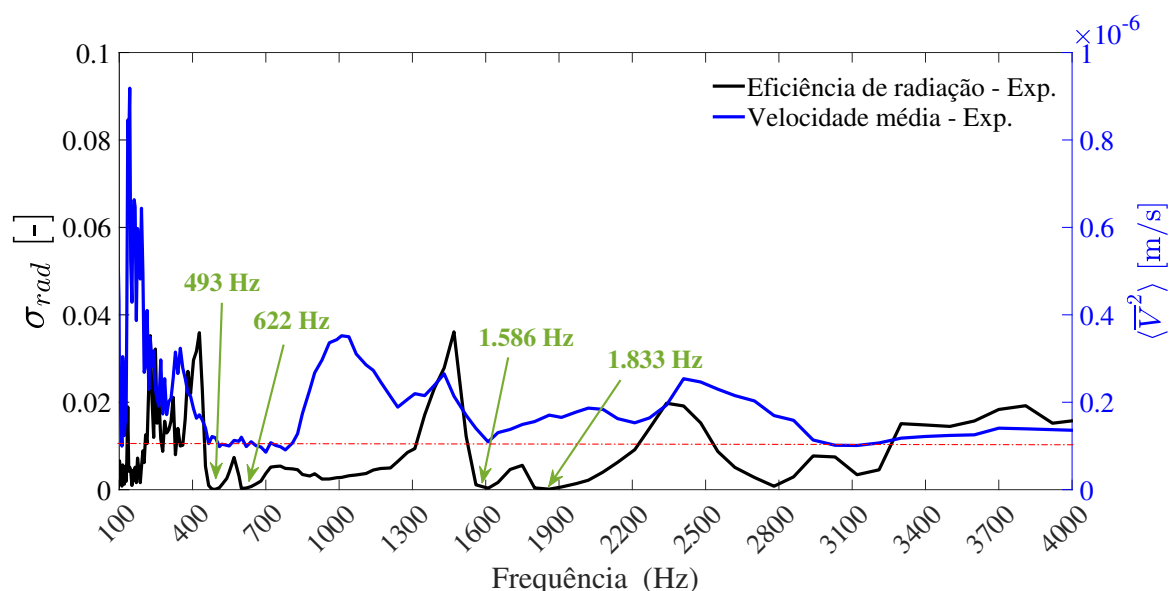


Fonte: O autor.

O comportamento da eficiência de radiação e da velocidade quadrática média são apresentados na Figura 70. Pode-se observar que as regiões onde acontecem os picos de maior perda de transmissão sonora no metamaterial ventilado são claramente reconhecidas como regiões nas quais a estrutura apresenta menor eficiência de radiação ($\sigma_{\text{rad}} \rightarrow 0$) e consequentemente os níveis de vibração mais baixo. Neste contexto, como grupo de referência fornecemos a eficiência de radiação média (0,01) do painel (ver linha horizontal vermelha tracejada). Comparativamente pode-se observar que as menores radiações ocorrem em 493 Hz, 622 Hz, 1.586 Hz e 1.833 Hz. Por outro lado, as regiões que caracteriza os vales na curva de PTS experimental (ver Figura 68) são

reconhecidas como aquelas que apresentam maiores radiação. No geral, uma baixa magnitude de velocidade de vibração da estrutura é observada e esse comportamento era esperado, uma vez que o painel é espesso ($H = 0,063$ m) e além disso o ABS apresenta elevada densidade (1150 kg/m^3) e uma resistência a compressão axial de 2,5 GPa. Portanto, a partir destes resultados pode-se concluir que a perda da energia que incide no metamaterial ventilado sucede exclusivamente por efeito físico-geométrico e não estrutural. Em outras palavras, seu excelente desempenho se deve às ressonâncias locais causada pelos dispersores bem como ao fenômeno de interferência destrutiva das ondas sonoras causada por sua periodicidade.

Figura 70: Eficiência de radiação e velocidade quadrática média do painel do MA ventilado.



Fonte: O autor.

Portanto, com base nos resultados apresentado nas Figuras 63, 68 e 70 pode-se afirmar que o MA ventilado obteve bom desempenho acústico e excelente capacidade de ventilação. Assim, a estrutura proposta apresenta-se como uma ótima candidata para aplicações multifuncionais mas não limitando-se a isolamento acústico, enclausuramento de fontes de ruídos, barreiras ventiladas, controle de ruído em fachadas de edifícios e residências, entre outros. Desta forma, a seguir demonstraremos sua funcionalidade como uma barreira acústica em campo sonoro livre e, em seguida, como clausura de uma fonte de ruídos de um eletrodoméstico.

8.4 Estudo de caso - 2

O painel do metamaterial foi analisado como uma barreira ventilada, de maneira que a perda de inserção (*insertion loss - IL*) foi o parâmetro acústico avaliado. Este parâmetro é definido como a diferença entre os níveis de pressão sonora (*SPL*) sem e com a presença do painel (Munjal, 2014),

$$IL = SPL_{\text{sem painel}} - SPL_{\text{com painel}}. \quad (243)$$

Por barreira acústica pressupõe qualquer obstáculo sólido ou ventilado que bloqueia total ou parcialmente a passagem das ondas sonoras, portanto, impedindo a linha de ação direta entre a fonte sonora e um receptor. Na prática quatro fenômenos físicos sucedem numa barreira finita, a saber:

- (i) Ondas difratadas¹⁵ pelas bordas da estrutura;
- (ii) Ondas transmitidas pela barreira;
- (iii) Ondas refletidas para longe do receptor;
- (iv) Ondas absorvidas, cuja existência depende da tipologia da barreira.

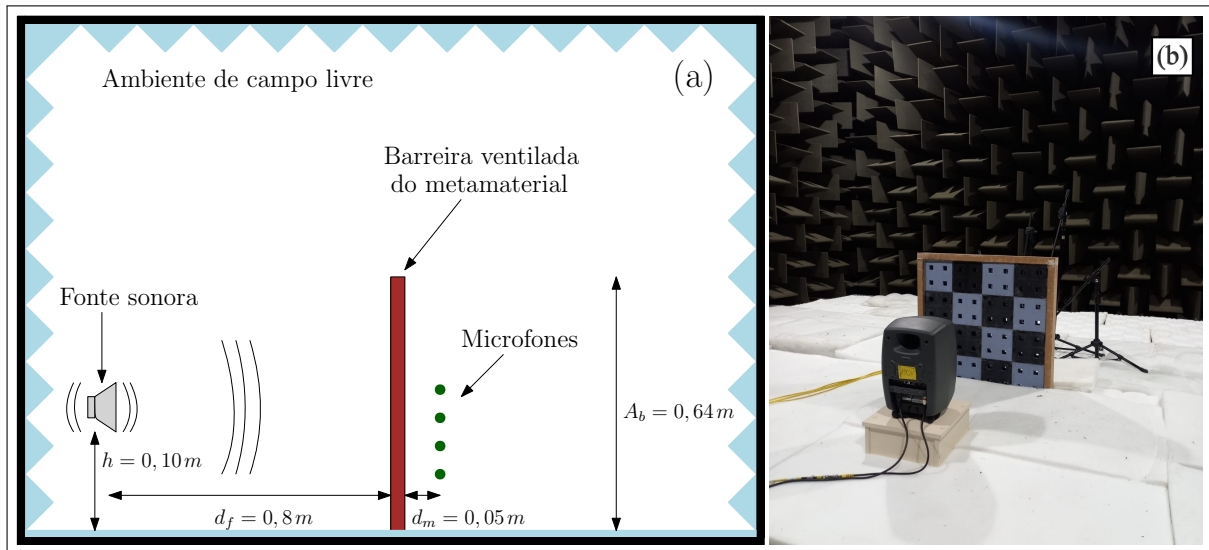
Embora existam diversas formulações analíticas e semi-empíricas que descrevam o comportamento de barreiras sólidas, formulações para barreiras ventiladas ainda continuam em aberto, portanto, o objetivo aqui reside tão somente em apresentar o comportamento experimental e simulado da barreira ventilada. Deste modo, o procedimento metodológico experimental utilizado baseia-se na norma ISO 10847, 1997. Os testes foram realizados numa câmara semi-anecoica, no entanto, para se aproximar das condições ideal de campo livre o piso inferior da câmara foi revestido com material absorvente. Assim, a existência de ondas refletidas indesejadas vinda do solo (piso refletor) são evitadas. Um esquema da montagem e da configuração experimental são apresentados na Figura 71. Em síntese, os ensaios decorrem com o campo acústico da câmara sendo excitado por uma fonte sonora¹⁶ através de um ruído aleatório, consequentemente, os níveis de pressão sonora médio com e sem a presença do painel ventilado foram obtidos utilizando 4 microfones de campo livre de 1/2 polegada Bruel & Kjaer 4189.

De outro modo, simulações numéricas 2D utilizando o método dos elementos finitos foram conduzidas, em que projetamos um painel do MA ventilado com 1,28

¹⁵A difração pode ser definida como a capacidade que as ondas sonoras apresentam de contornarem uma borda. De modo geral, a difração pode ser estudada considerando o princípio de Huygens, de forma que cada ponto atingido pela onda incidente se torne uma fonte de uma nova onda sonora, e a envoltória dessas novas ondas formam a nova frente de onda.

¹⁶Monitor amplificado Genelec modelo 8020D.

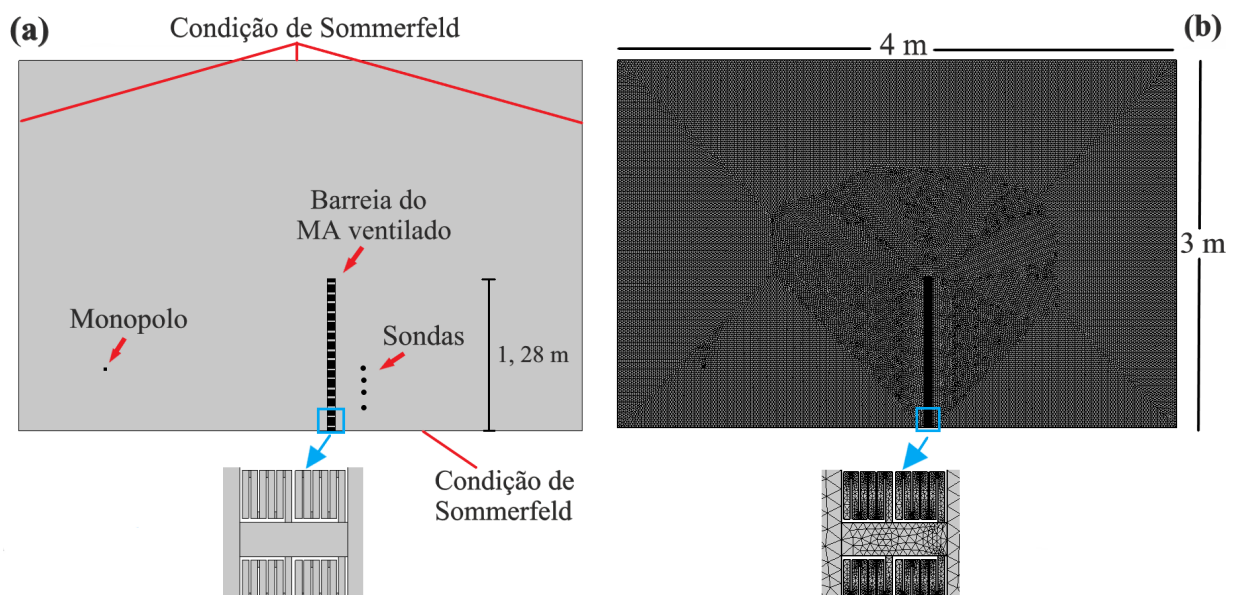
Figura 71: (a) Vista lateral da montagem experimental. (b) Experimento de perda de inserção realizado na câmara semi-anecoica do LVA da UFSC.



Fonte: O autor.

m de altura num ambiente de 12 m^2 para avaliar sua perda de inserção. Neste caso, utilizamos o *software* COMSOL 6.2. A configuração e a malha do modelo numérico são apresentados na Figura 72 (a) e (b), respectivamente. Por se tratar de um problema de espalhamento a condição de radiação de Sommerfeld (camada perfeitamente combinada) foi aplicada em todas as fronteiras do domínio, assim um campo livre ideal é representado. A malha foi definida com a mesma regra apresentada no Capítulo 6 (seção 6.4), ou seja, o elemento utilizado foi o tetraédrico com função de forma qua-

Figura 72: (a) Detalhes do modelo numérico 2D. (b) Malha do modelo numérico.



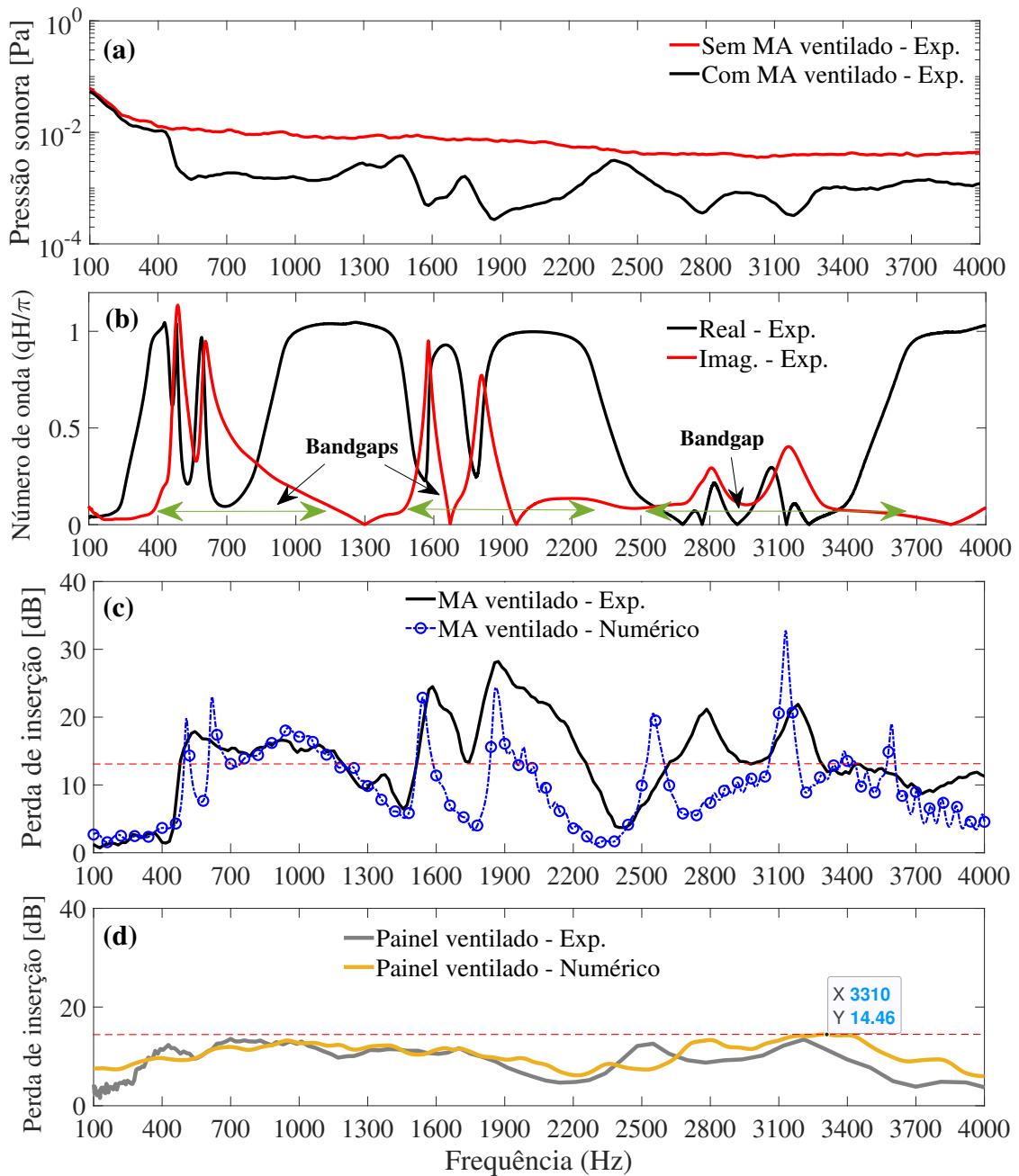
Fonte: O autor.

drática com tamanho máximo de elemento $\lambda_{\max}/12$ e tamanho mínimo de elemento $\lambda_{\min} = 0,1$ mm. As perdas visco-térmicas do modelo de Stinson são aplicadas na geometria do metamaterial ventilado, além disso, o painel é considerado acusticamente rígido. Para excitar o campo acústico uma fonte sonora do tipo monopolo foi aplicada. Importante destacar que tanto as condições de contorno quanto a geometria da estrutura são projetadas de tal forma que apenas os fenômenos de transmissão, absorção e difração sejam predominante, evitando que outros efeitos possam mascarar os resultados numéricos. Por fim, a partir das pressões acústica obtidas através de sondas pontuais (*point probes*) com e sem a presença do metamaterial, a perda de inserção numérica é calculada pela Equação 243.

Na Figura 73 (c) e (d) apresentamos o comportamento da perda de inserção do MA ventilado e de um painel ventilado idêntico (grupo de controle) mas sem a presença dos dispersores da estrutura proposta. Uma concordância significativa é observada entre a teoria e a simulação para o painel do grupo de controle. Entretanto, ao longo de todo o espectro de frequência a perda de inserção apresenta uma magnitude que não excede a 14,5 dB (3.310 Hz), conforme ilustrado pela linha tracejada vermelha na Figura 73 (d). Analisando os resultados do metamaterial ventilado fica evidente que a concordância entre os resultados numérico e experimental ocorre principalmente abaixo de 1.600 Hz, além disso, comparando com o grupo de controle um desempenho superior pelo MA ventilado é notório. Uma perda de inserção experimental superior a 13 dB (ver linha horizontal vermelha) predominante em três regiões distintas do espectro de frequência para o MA ventilado é observado. E para entender melhor esse desempenho, apresentamos a relação de dispersão experimental de uma célula unitária do MA na Figura 73 (b), observe que as três regiões que caracteriza os *bandgaps* são claramente reconhecida como regiões onde há maior perda de inserção. Portanto, embora a estrutura seja ventilada e absorva parcialmente a energia sonora incidente, seu desempenho como barreira acústica está fortemente associado as ondas que são atenuadas exponencialmente, conforme discussões apresentadas na Capítulo 7 (seção 7.2). Comparando o resultado do MA ventilado com outras estruturas ventiladas da literatura, constata-se que seu desempenho experimental é similar ao metamaterial acústico proposto por Weber e Gomez-Agustina, 2015, melhor que os cristais sônicos proposto por Mohapatra e Jena, 2021 e Veloso et al., 2023 e inferior ao metamaterial acústico proposto por Kim et al., 2025, contudo, neste último foi considerado escoamento.

Em relação às diferenças entre as predições acima de 1.600 Hz, acredita-se que estas ocorram devido às condições experimentais não ideais e principalmente à diferença entre as abordagens experimental e numérica, visto que a simulação foi repre-

Figura 73: (a) Pressão sonora média com e sem a presença do MA ventilado. (b) Relação de dispersão do MA ventilado. (c) Comportamento da perda de inserção (IL) do metamaterial. (d) Comportamento da perda de inserção do grupo de controle.



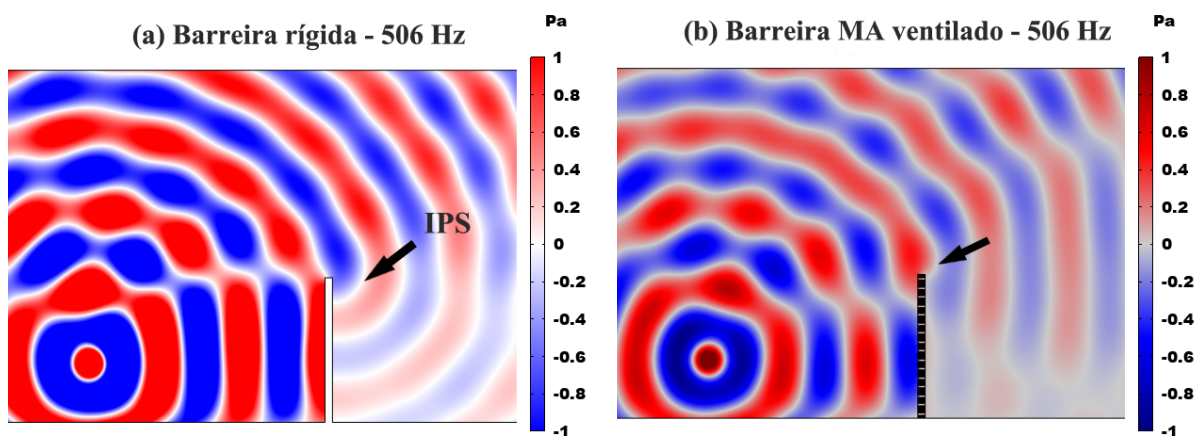
Fonte: O autor.

sentada por um modelo 2D, onde a barreira possui largura infinita, enquanto que nos ensaios experimentais, a barreira possui largura finita. Por outro lado, pode existir influência devido a fonte sonora utilizada, uma vez que no modelo numérico utilizou um monopolo (fonte pontual) enquanto que nos testes experimentais foi adaptado um monitor amplificado com diretividade diferente de um monopolo. Por fim, a Figura 73 (a) revela que a redução do nível de pressão sonora (em escala linear) é evidente após a

instalação da barreira ventilada, de modo que a regiões dos *bandgaps* são reconhecidas como as regiões de maior queda da pressão sonora.

Para entender mais detalhadamente o desempenho do metamaterial como uma barreira ventilada, analisamos a distribuição do campo de pressão sonora. Primeiramente, caracterizamos o campo acústico na zona de sombra imediatamente após a barreira, onde os fenômenos de transmissão e difração atuam em conjunto. Para tal, comparamos o comportamento do campo de pressão da estrutura ventilada com o de uma barreira rígida e fechada de mesma altura (1,28 m) em uma frequência específica (506 Hz), conforme apresentado na Figura 74. Esta frequência foi escolhida pois a mesma especifica o primeiro *bandgap* da estrutura. Note que a representação 2D é suficiente para verificar o padrão circular clássico do campo difratado na barreira rígida e fechada (veja Figura 74 (a)), de modo que o campo difratado está localizado num ponto chamado fonte pontual imaginária (*imaginary point source* - IPS) (Castiñeira-Ibáñez et al., 2013). Ou seja, neste ponto a difração ocorre destacadamente para comprimentos de onda ($\lambda_{506\text{ Hz}} = 0,67\text{ m}$) muito maiores que a espessura da barreira ($H = 0,063\text{ m}$). Portanto, a forma desse padrão circular pode ser compreendida levando em consideração principalmente o princípio de espalhamento de Huygens. Ademais, o campo difratado é predominante na zona de sombra acústica na barreira rígida, ou seja, na região que caracteriza o decaimento da amplitude de pressão. Com isso em mente, na Figura 74 (b) verifica-se forte interação entre os campos transmitido e difratado na barreira ventilada. Em que o campo de pressão total até apresenta o padrão circular característico de um campo difratado próximo a extremidade superior da estrutura, de modo que este ponto também atua como uma fonte pontual imaginária. Contudo, na

Figura 74: Campo de pressão sonora ao aplicar uma barreira rígida e uma barreira do MA ventilada em 506 Hz.

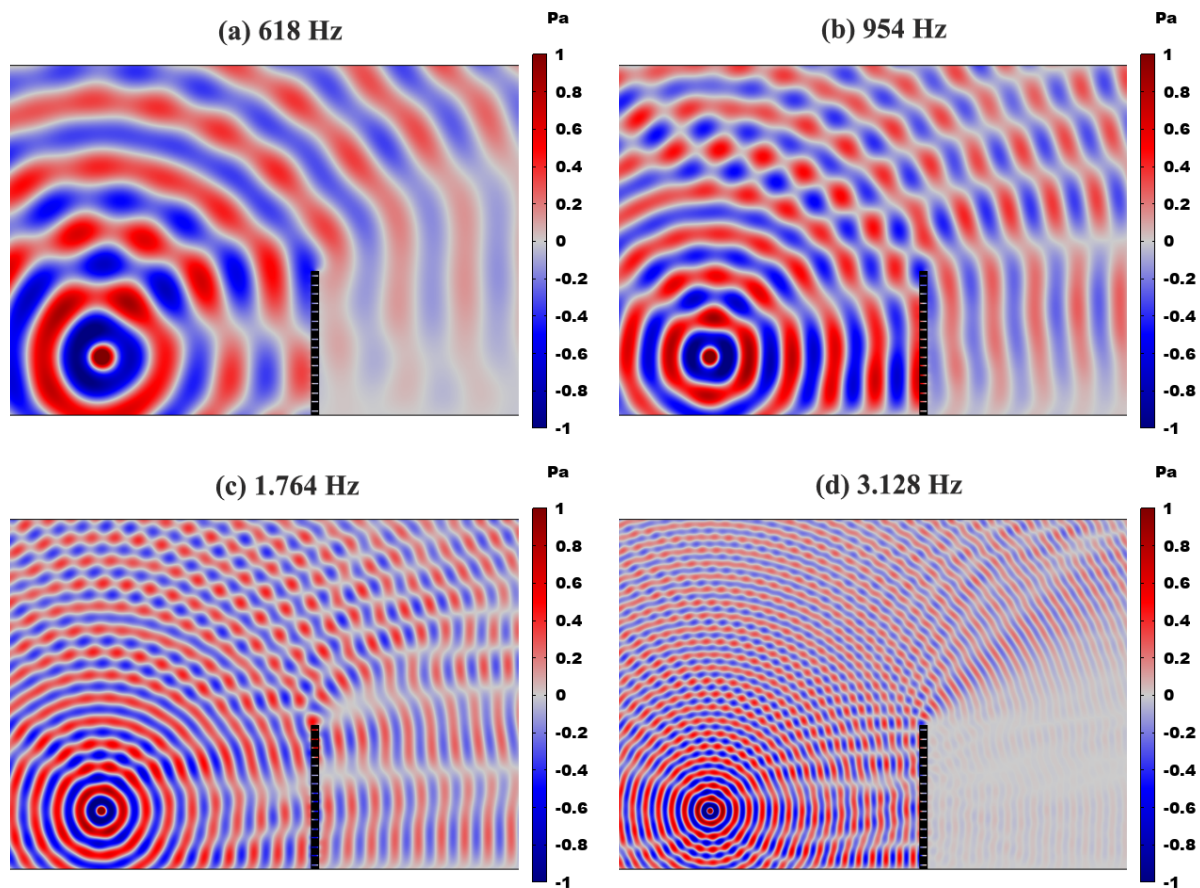


Fonte: O autor.

região imediatamente após o metamaterial o campo difratado é extinto devido ao fenômeno de interferência destrutiva causado pelo campo transmitido, consequentemente, uma ampla região de sombra acústica também é visível. Além disso, interferência de ondas devido o campo espalhado no lado da fonte sonora é nitidamente reconhecida, consequentemente, pequenas regiões de sombra acústica podem ser observadas.

Prosseguindo, o campo de pressão total em outras frequências é apresentado na Figura 75. Note que nas frequências 618 Hz, 954 Hz e 3.128 Hz onde há elevada perda de inserção (ver Figura 73 (c)) uma interação entre os diferentes campos pode ser observada também, consequentemente, uma zona de sombra de diferentes intensidades é reconhecida. Sob outra perspectiva, na frequência de 1.764 Hz que caracteriza um vale na curva da perda de inserção o campo transmitido é predominante, como consequência uma zona de sombra não é nitidamente reconhecida.

Figura 75: Campo de pressão sonora ao aplicar o MA como uma barreira ventilada em diferentes frequências.

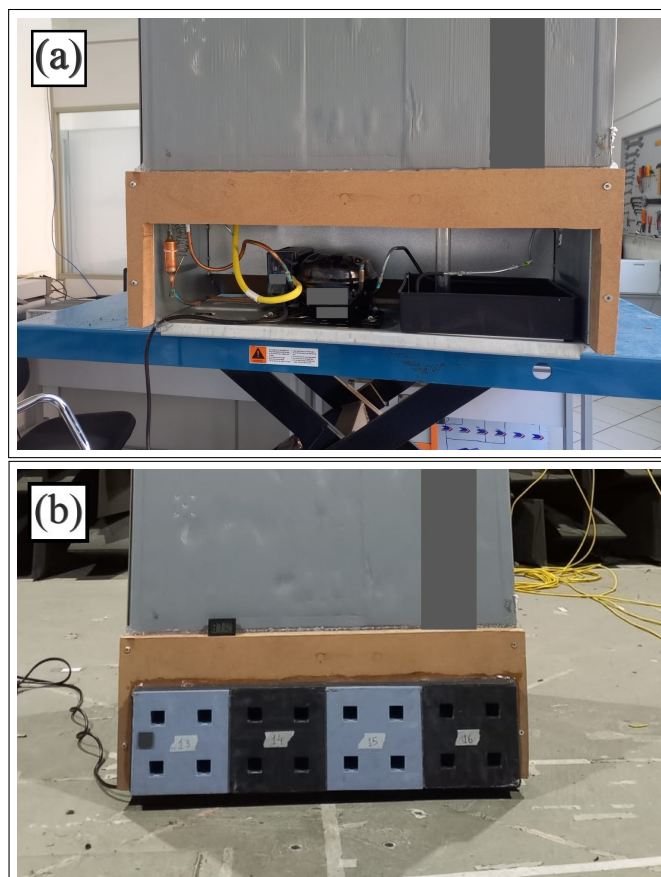


Fonte: O autor.

8.5 Estudo de caso - 3

Quatro blocos de amostras do MA ventilado foram combinados para formar uma clausura parcial de uma fonte de ruídos, neste contexto, devido ao fácil acesso no Laboratório de Vibrações e Acústica um refrigerador residencial foi escolhido como objeto de estudo. Na prática, o compartimento conhecido como *housing* onde fica o compressor do refrigerador contribui significativamente para o espectro de ruído gerado pelo sistema. Contudo, o fluxo de ar deve ser garantido ao propor uma solução de controle de ruídos, uma vez que a ventilação de ar é fundamental na dissipação de calor no compartimento. Desta forma, o desempenho do MA ventilado como uma clausura foi estimado fechando somente a parte frontal do compartimento do refrigerador, conseqüentemente, pontos próximos ao compartimento foram escolhidos para medir o nível de pressão sonora. Embora nosso foco seja a atenuação do ruído de baixas frequências (< 1.000 Hz), apresentaremos os resultados num amplo espectro de frequências. Além disso, devido a restrição de espaço, uma estrutura em MDF foi desenvolvida para melhor alojar o MA no refrigerador. A Figura 76 ilustra a estrutura fixada e com suas bordas selada com silicone acético para evitar possíveis vazamentos.

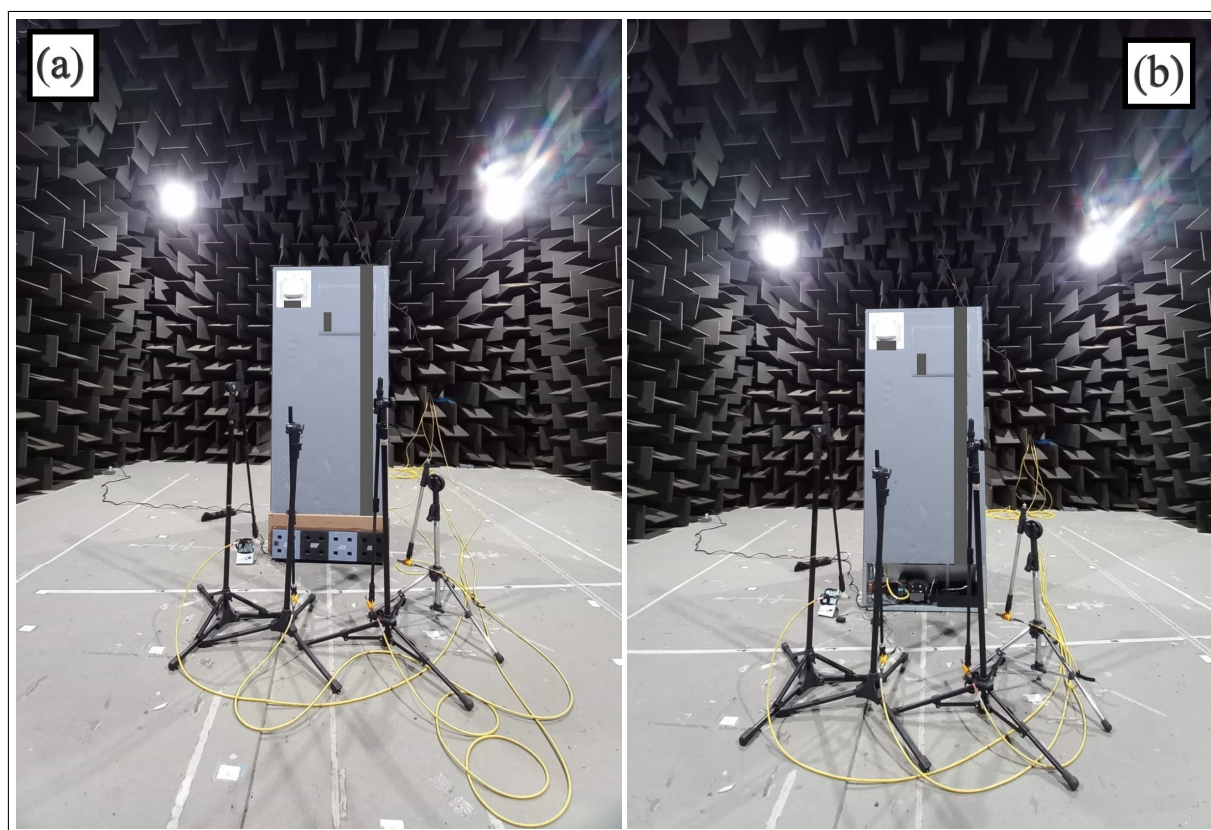
Figura 76: (a) - (b) Estrutura desenvolvida para alojar o MA ventilado no refrigerador.



Fonte: O autor.

A Figura 77 ilustra o refrigerador com e sem a clausura parcial do MA ventilado posicionado no centro da câmara semi-anecoica. Note que quatro microfones de campo livre de 1/2 polegada Bruel & Kjaer 4189 posicionados a 0,4 m foram utilizados para medir a pressão sonora (espectro de ruído). Ademais, a temperatura dentro e fora do compartimento do refrigerador ao final de cada processo de medição também foi registrada. Nos testes a média dos níveis de pressão sonora foram obtidos durante um período de uma hora de funcionamento do refrigerador.

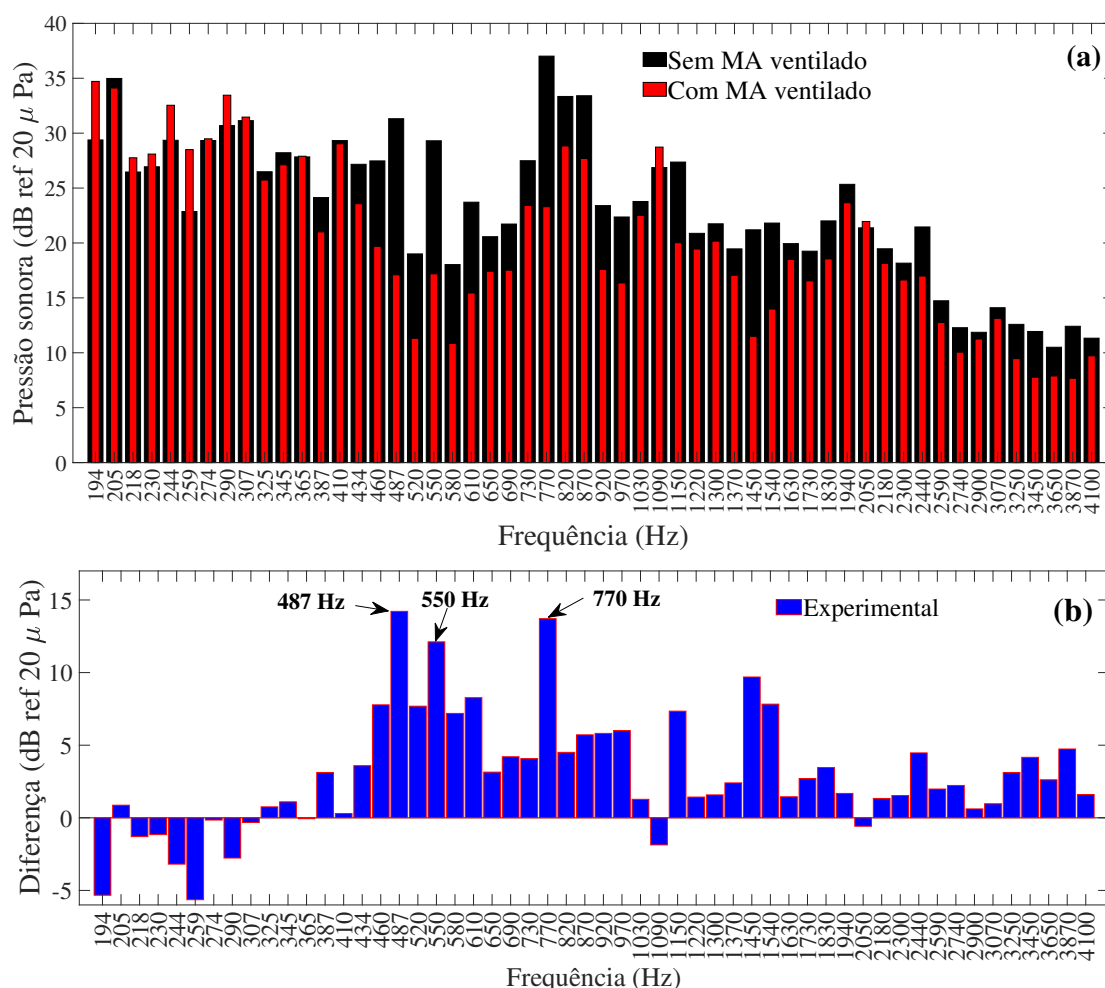
Figura 77: Fotos dos testes de ruído do refrigerador. (a) Com MA ventilado aplicado. (b) Sem MA ventilado aplicado.



Fonte: O autor.

Os espectros do nível de pressão sonora com e sem a clausura ventilada e a diferença dos níveis de pressão em bandas de 1/12 de oitava são apresentados na Figura 78 (a) e (b). Pode-se observar que a maior parcela da energia do ruído emitido pelo refrigerador está concentrada abaixo de 1.000 Hz, além disso, a curva em preto (sem MA ventilado) apresenta uma magnitude maior ao longo de quase todo o espectro de frequência em comparação a curva vermelha (com MA ventilado). Focando na diferença dos níveis de pressão sonora observa-se uma redução significativa do ruído de banda larga, o que comprova a eficácia da clausura do metamaterial ventilado. Portanto, uma queda na magnitude principalmente na região entre 434 – 1.030 Hz a qual

Figura 78: (a) Espectro de ruído do refrigerador doméstico com e sem a aplicação do MA ventilado. (b) Diferença da pressão sonora.



Fonte: O autor.

faz parte do primeiro *bandgap* da estrutura é notório. Destaques para as frequências 487 Hz, 550 Hz e 770 Hz que apresentam uma diferença de 14,5 dB, 12,2 dB e 13,7 dB, respectivamente. Diferença com valores negativos pode ser observado principalmente abaixo de 307 Hz, este comportamento é devido provavelmente a ressonâncias intensificadas no compartimento do refrigerador ao aplicar a clausura. Por fim, a temperatura monitorada e registrada dentro do *housing* ao final de cada processo de medição foi 37,2 °C (com MA ventilado) e 27,2 °C (sem MA ventilado), portanto, a clausura promoveu um acréscimo de apenas 10 °C na temperatura do compartimento. A partir desses achados pode-se concluir que a clausura ventilada promove uma efetiva atenuação de banda larga do ruído gerado pelo sistema do refrigerador, no entanto, como as trocas de calor ocorre mediante o fenômeno de convecção natural, a influência do aumento da temperatura interna do compartimento no desempenho do sistema necessita ser melhor investigado.

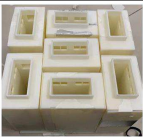
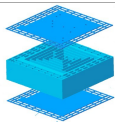
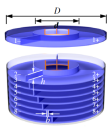
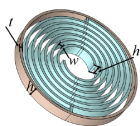
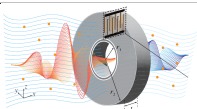
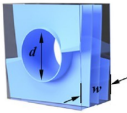
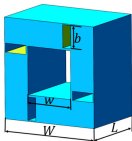
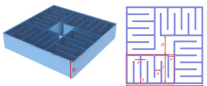
8.6 Comparativo entre projetos, avanços e contribuições do trabalho

A vantagem e versatilidade do metamaterial ventilado proposto neste trabalho em comparação a outras estruturas projetadas para garantir ou não ventilação com desempenho acústico são anunciados nas Tabelas 9 e 10. Neste caso, apresentamos dados experimentais e listamos uma série de possíveis aplicabilidade destas estruturas. Note que diferentemente dos modelos geométricos apresentados nas referências 1 a 10 na Tabela 10, nosso modelo é mais abrangente e versátil, contribuindo para uma ampla gama de aplicabilidade. Adicionalmente, tendo em vista que o objetivo desta tese consiste numa metodologia de projeto que possibilite o controle e manipulação das ondas sonoras em um amplo espectro de frequência ($f \in [100 - 4.000]$ Hz). Apresentamos na Tabela 9 dados experimentais que refletem as contribuições e os avanços no campo da física acústica especificamente para a área de controle e manipulação das ondas sonoras que este estudo possibilitou. Note que os avanços reside principalmente no fato do metamaterial ter sido submetido e apresentar bom desempenho acústico em distintas aplicações de caráter prático.

Tabela 9: Dados experimentais do desempenho de estruturas ventiladas e não-ventiladas.

Referência	PTS [Frequência]	IL	Ventilada[redução]	Aplicação
Q. Chen et al., 2023	4,2 dB [10 - 6.400] Hz	Não	Sim [-]	Refrigerador
S. Wang et al., 2025	14 dB [900 - 2.000] Hz	Não	Sim [2,5 - 15,7]%	Não
A. Chen et al., 2022	18 dB [1.200 - 1.870] Hz	Não	Sim [39]%	Não
Dong, Mao, Zhu et al., 2021	> 10 dB [610 - 1.120] Hz	Não	Sim [-]	Salas
Fusaro et al., 2024	5 - 15 dB [500 - 5.000]Hz	[5 - 27] dB	Sim [-]	Salas
Y. Zhang et al., 2025	> 20 dB [894 - 1.800] Hz	Não	Sim [16]%	Não
Jiang et al., 2021	> 5 dB [490 - 970] Hz	Não	Sim [-]	Não
Y. Zhang et al., 2023	5 dB [100 - 1.700] Hz	Não	Sim [-]	Não
Yu et al., 2017	20 dB [750 - 1.500] Hz	Não	Não	Salas
Kumar e Lee, 2022	Não [1.600 - 3.000] Hz	> 5 dB	Sim	Não
Amado-Mendes et al., 2016	Não [650 - 1.400] Hz	> 5 dB	Sim [-]	Barreira
X. Zhang, Zhao et al., 2025	>20 dB [200 - 6.300] Hz	Não	Não	Barreira
Este trabalho	> 19 dB [460 - 1.200] Hz	> 13 dB	Sim [21,6 - 40]%	Salas
Este trabalho	> 19 dB [1.528 - 2.165] Hz	> 13 dB	Sim [21,6 - 40]%	Refrigerador
Este trabalho	> 20 dB [2.618 - 3.290] Hz	> 13 dB	Sim [21,6 - 40]%	Barreira

Tabela 10: Comparação da versatilidade/aplicabilidade entre estruturas ventiladas.

	Modelo	Isolamento	Ventilação	Perda de inserção	Clausura	Referência
1		Sim	Sim	Não	Não	Q. Chen et al., 2023
2		Sim	Sim	Não	Não	S. Wang et al., 2025
3		Sim	Sim	Não	Não	Dong, Mao, Wang e Li, 2021
4		Sim	Sim	Não	Não	Lu et al., 2025
5		Sim	Sim	Não	Não	A. Chen et al., 2022
6		Sim	Sim	Não	Não	Dong, Mao, Zhu et al., 2021
7		Sim	Sim	Sim	Não	Fusaro et al., 2024
8		Sim	Sim	Não	Não	Jiang et al., 2021
9		Sim	Sim	Não	Não	Y. Zhang et al., 2025
10		Sim	Sim	Não	Não	Wu et al., 2026
11		Sim	Sim	Sim	Sim	Este trabalho

8.7 Síntese do capítulo

No decorrer deste capítulo o desempenho acústico de uma configuração geométrica do metamaterial que garante passagem de fluxo de ar em situações práticas foi apresentado. Primeiramente, o comportamento da perda de transmissão sonora da estrutura ventilada ($\approx 10\%$) de tamanho real ($S_a \approx 0,41 \text{ m}^2$) foi avaliada num campo difuso e uma atenuação sonora superior a 19 dB entre 460 – 1.200 Hz e 1.528 – 2.165 Hz e superior a 20 dB entre 2.618 – 3.290 Hz foi alcançada. Além disso, a característica de ventilação da estrutura foi avaliada, consequentemente, sua resistividade ao fluxo foi quantificada em $\sigma \approx 6,03 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$, a qual é inferior aos valores típicos de materiais porosos convencionais e metamateriais ventilados. Em seguida, a estrutura foi avaliada na condição de uma barreira acústica ventilada, neste contexto, foi demonstrado que uma perda de inserção superior a 13 dB em regiões de frequências distintas se deve ao fato das ondas serem atenuadas exponencialmente (*bandgaps*) na estrutura. Além disso, a perda de inserção da barreira ventilada foi melhor compreendida ao simular e comparar a distribuição do seu campo de pressão sonora com o de uma barreira fechada. Por fim, amostras da estrutura ventilada foram utilizadas para montar uma clausura do compartimento de um refrigerador residencial, consequentemente, uma redução significativa do ruído de banda larga ($\geq 4 \text{ dB}$ entre 434 – 1.030 Hz) foi demonstrado experimentalmente. Portanto, os resultados oriundos de aplicações práticas adquiridos aqui demonstram que a estrutura proposta neste trabalho pode ajudar a promover soluções eficientes no controle e manipulação das ondas sonoras.

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

9 Conclusões e trabalhos futuros

O objetivo do projeto de doutorado que resultou nesta tese foi fornecer uma detalhada metodologia de projeto de um metamaterial periódico e dispersivo, cuja perspectiva possibilitasse um amplo e efetivo controle e manipulação das ondas sonoras num amplo espectro de frequências ($f \in [100 - 4.000]$ Hz). Desta forma, as principais conclusões do trabalho são declaradas neste capítulo. Ademais, algumas sugestões de trabalhos futuros também são apresentadas.

9.1 Considerações finais

O trabalho relatado nesta tese de doutorado pode ser decomposto em três partes principais: (i) O estudo do comportamento de ondas sonoras que se propagam em meios periódicos (ondas de Bloch) e dispersivos considerando a influência das perdas visco-térmicas; (ii) uma metodologia de projeto de um metamaterial periódico e dispersivo com propriedades efetivas negativas; e (iii) controle, mitigação e manipulação de ondas sonoras em um amplo espectro de frequência. Com isso em mente, todas as partes foram combinadas e aplicadas em conjunto para avaliar diferentes configurações do metamaterial em problemas de reflexão e transmissão sonora. Finalmente, a versatilidade de uma configuração do metamaterial com elevada capacidade de ventilação foi avaliada em aplicações práticas. Portanto, as seguintes conclusões foram obtidas:

- Do ponto de vista teórico, a física da acústica visco-térmica, a qual foi incorporada integralmente na modelagem matemática que descreve o comportamento do metamaterial, foi apresentada e discutida em detalhes no Capítulo 3. Em seguida, no Capítulo 4, foram apresentados de forma sucinta e intuitiva os aspectos fundamentais da teoria acústica dos meios periódicos (teorema de Bloch-Floquet). De maneira que esta teoria nos permitiu analisar a dispersão e as propriedades das ondas de Bloch na estrutura proposta. Desta forma, no Capítulo 6, combinando o teorema de Bloch-Floquet e o método da matriz de transferência, foi possível estabelecer a estrutura de banda acústica (relação de dispersão) das diferentes configurações geométricas. Além disso, a importância das perdas visco-térmicas ao analisar a relação de dispersão do

metamaterial também foi declarada. Consequentemente, a natureza dispersiva das ondas que se propagam na estrutura periódica foi demonstrada, e uma excelente concordância entre as previsões teórica e experimental foi alcançada. Não satisfeito, embora a relação de dispersão seja a característica das ondas de Bloch mais destacada na literatura, ampliamos a compreensão destas ondas mediante análises do comportamento da impedância de Bloch e do parâmetro g_n/f_n . Adicionalmente, resultados interessantes de como se estabelecer a localização e a dimensão dos *bandgaps* na estrutura foram apresentados através da razão adimensional L_f/h .

- Da perspectiva metodológica, mediante uma proposta heterogênea, foi possível obter profundas compreensões dos fenômenos físicos subjacentes ao comportamento do metamaterial. Os materiais utilizados para lidar com o controle e manipulação das ondas sonora foram as distintas configurações geométricas propostas para problemas de reflexão e transmissão sonora. Por sua vez, os métodos foram divididos em quatro etapas: (i) modelos matemáticos; (ii) relação de dispersão; (iii) modelos numéricos e métodos experimentais, sendo este último dividido em campo direto e campo difuso, e por fim; (iv) caracterização do metamaterial para derivar suas propriedades efetivas negativas. Destaques para a última etapa metodológica, visto que, para garantir que as análises das propriedades incomuns fossem realistas, assegurar uma condição de contorno idealmente anecoica no *setup* experimental, principalmente na região das baixas frequências, foi desafiador.

- Do ponto de vista dos resultados em campo direto, estes podem ser divididos em duas etapas: (i) controle e mitigação das ondas sonoras e (ii) manipulação das ondas sonoras. Sobre a primeira etapa, os resultados foram obtidos por meio de estruturas com e sem a propriedade de invariância de reflexão (invariância de paridade). Embora excelentes resultados tenham sido obtidos nas configurações do metamaterial sem a propriedade de invariância, foi demonstrado que a vantagem desta propriedade no amplo controle das ondas sonoras reside em garantir simultaneamente um caráter simétrico e recíproco a ele. Portanto, conjuntamente, resultados de absorção e atenuação sonora foram garantidos e estes resultados independem da direção em que as ondas sonoras incidem sob a estrutura. Além disso, foi demonstrado que ressonâncias degeneradas podem ser obtidas em nossa estrutura simétrica pelo simples fato de aumentar o número de dispersores periódicos. Focando na segunda etapa, a manipulação das ondas sonoras foi demonstrada por meio da relação de dispersão (estrutura de banda) e da velocidade de fase, com os resultados teóricos e experimentais apresentando excelente concordância. Ademais, o comportamento das propriedades efetivas negativas de duas configurações do metamaterial com e sem a propriedade de invari-

riância de reflexão foi investigado. Consequentemente, resultados de densidade de massa efetiva, módulo de compressibilidade efetivo e índice de refração acústico efetivo com valores negativos nas regiões dos *bandgaps* foram obtidos, lançando luz sobre o comportamento complexo do metamaterial em resposta às ondas que se propagam em seu interior. Estes resultados, portanto, demonstram uma profunda compreensão do comportamento das ondas de Bloch obtida neste trabalho.

- Da perspectiva das aplicações, por meio de um painel do metamaterial em escala real que garante desempenho acústico e ventilação, o controle e manipulação das ondas sonoras foram estudadas em três aplicações distintas. Na primeira aplicação, a capacidade de atenuação da estrutura com $\approx 10\%$ de área aberta foi comprovada em testes num campo difuso. Consequentemente, atenuações superiores a 19 dB entre 460 – 1.200 Hz e 1.528 – 2.165 Hz e superiores a 20 dB entre 2.618 – 3.290 Hz foram obtidas e demonstram a funcionalidade do projeto. Não satisfeito, o desempenho de ventilação da estrutura foi analisado. Como consequência, uma queda do fluxo de ar que variou entre 21,6 – 40,0 % e uma baixa resistividade ao fluxo ($\approx 6,04 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$) foram obtidos e ratificam sua aplicabilidade. Além disso, o acoplamento físico entre as vibrações estruturais do painel e o campo acústico foi avaliado pelo comportamento da eficiência de radiação, cuja magnitude máxima foi de 0,1. O que levou a concluir que a atenuação sonora obtida no metamaterial ventilado ocorre integralmente por efeito físico-geométrico. Na segunda aplicação, o desempenho do painel do MA foi analisado como uma barreira acústica ventilada; neste caso, um perda de inserção superior a 13 dB em três regiões de frequências foi obtida. E, ao analisar o comportamento da relação de dispersão da estrutura ventilada, descobriu-se que o bom desempenho da barreira está fortemente associado ao fato das ondas serem atenuadas exponencialmente, ou seja, por estas ondas serem dispersivas. Ademais, embora careça de uma descrição analítica, uma forte interação entre os campos transmitido e difratado na barreira ventilada foi demonstrado via simulações numéricas; consequentemente, regiões de sombra acústica foram observadas. Por fim, na ultima aplicação, o metamaterial ventilado foi empregado como uma clausura parcial de uma fonte de ruídos em um refrigerador residencial. Novamente, foi demonstrado que a atenuação em regiões específicas do espectro de frequências ocorre devido os *bandgaps* da estrutura.

9.2 Trabalhos futuros

Uma pesquisa científica, por melhor que seja, sempre estará inacabada; portanto, esta seção discute as possibilidades de pesquisas adicionais sobre a estrutura

geométrica do metamaterial desta tese. A discussão é dividida em duas partes: (i) extensões das análises e (ii) modificações e melhorias das configurações.

9.2.1 Extensão das análises

- De um ponto de vista desafiador, uma primeira proposta seria um modelo matemático que descreva analiticamente o comportamento do MA como uma barreira acústica ventilada. Neste caso, os fenômenos de difração, transmissão, reflexão e absorção sonora devem ser contabilizados concomitantemente na modelagem matemática.

- Tem-se como sugestão também uma investigação da influência da temperatura no comportamento do sistema de um refrigerador ao aplicar uma clausura parcial ou total do metamaterial ventilado, uma vez que a transferência e dissipação de calor no compartimento ocorre por convecção natural.

- O comportamento acústico do metamaterial ventilado foi conduzido sem considerar escoamento, portanto, outra sugestão seria conduzir investigações considerando também o efeito do escoamento.

- Por fim, vimos que a fabricação das amostras por intermédio da tecnologia de impressão 3D está associada a um desvio devido a tolerância dimensional da impressora, na prática isso promove rugosidades nas paredes internas das cavidades. Portanto, recomendo investigar via simulação numérica essas influências no comportamento da perda de transmissão e absorção sonora do metamaterial, consequentemente, formular e adicionar correções na modelagem matemática.

9.2.2 Modificações e melhorias do metamaterial

- Uma modificação sugerida é a hibridização do metamaterial afim de ampliar o controle da energia sonora. Para tal finalidade, pode-se adicionar uma camada de material poroso na frente da estrutura e avaliar o seu comportamento principalmente em problema de reflexão sonora.

- Trabalhos recentes sobre o conceito de PT -simetria ou simetria paridade-tempo tem ganhado destaques na literatura. Assim sendo, outra proposta de melhoria interessante seria recombina a estrutura aqui proposta de maneira a permitir transparência acústica unidirecional em frequências excepcionais. Essa transparência unidirecional tem origem no arranjo assimétrico de unidades periódicas de perda e ganho o que resulta em diferentes dispersões de Bragg. A transparência também é conhecida como capa direcional e tem aplicações úteis, tais como, cancelamento de ruídos, imageamento acústico direcional, camuflagem acústica, entre outros.

Referências

- 10140-2: (2010). Acoustics - Laboratory measurement of sound insulation of building elements - Part 2: Measurement of airborne sound insulation.
- 10534-2, I. (1998). Acoustics - Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes - Part 2: Transfer-function method.
- 10847, I. (1997). *Acoustics - In Situ Determination of Insertion Loss of Outdoor Noise Barriers of All Types*. International Organization for Standardization.
- Allard, J., & Atalla, N. (2009). *Propagation of sound in porous media: modelling sound absorbing materials*. John Wiley & Sons.
- Allen, A. R., Schiller, N. H., et al. (2016). Experimental evaluation of equivalent-fluid models for melamine foam. *INTER-NOISE and NOISE-CON congress and conference proceedings*, 252(2), 511–521.
- Almeida, G. N. (2019). Análise de um metamaterial acústico do tipo labiríntico na absorção sonora de baixas frequências. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina. Orientador: Erasmo Felipe Vegara.
- Almeida, G. N., Vergara, E. F., Barbosa, L. R., & Brum, R. (2021). Low-frequency sound absorption of a metamaterial with symmetrical-coiled-up spaces. *Applied Acoustics*, 172, 107593. DOI: 10.1016/j.apacoust.2020.107593.
- Almeida, G. N., Vergara, E. F., Barbosa, L. R., Lenzi, A., & Silva, O. M. (2024). On the use of metamaterials with negative effective parameters for dual sound energy control. *Applied Acoustics*, 221, 110010. DOI: 10.1016/j.apacoust.2024.110010.
- Almeida, G. N., Vergara, E. F., & Lenzi, A. (2023). Metamaterial based on labyrinthine tubes loaded periodically and ultra-low phase velocity to the low-frequency energy control. *Applied Physics Letters*, 123(8). DOI: 10.1063/5.0165639.
- Almeida, G. N., Vergara, E. F., & Lenzi, A. (2025). Ondas de Bloch em um metamaterial acústico periódico dispersivo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 47, e20240310. DOI: 10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0310.
- Almeida, G. d. N., Vergara, E. F., Lenzi, A., & Klein, A. N. (2025). Control and manipulation of sound waves by a mirror symmetric reciprocal labyrinth. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 47(12), 610. DOI: 10.1007/s40430-025-05922-1.
- Amado-Mendes, P., Godinho, L., Santos, P., Dias, A., & Martins, M. (2016). Laboratory and full-scale experimental evaluation of the acoustic behaviour of sonic crystal

- noise barriers. *Proceedings of the International Congress on Acoustics, Buenos Aires, Argentina*, 5–9.
- Ashcroft, N. W., & Mermin, N. D. (1976). Solid state physics.
- Babisch, W., Beule, B., Schust, M., Kersten, N., & Ising, H. (2005). Traffic noise and risk of myocardial infarction. *Epidemiology*, 16(1), 33–40. DOI: 10.1097 / 01.ede.0000147104.84424.24.
- Barbosa, L. R. (2017). Uso de materiais acústicos metálicos em filtros de descarga de sistemas de refrigeração. Tese de Doutorado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina. Orientador: Arcanjo Lenzi.
- Basu, D., Perera, A. U., Gingrich, D. M., Deck, R. T., Cruz-Cruz, L., Collins, J., O'Shea, M. J., Chow, L., Jeffers, S., Khachan, J., et al. (2018). *Dictionary of pure and applied physics*. CRC press.
- Blackstock, D. T. (2000). *Fundamentals of physical acoustics*. John Wiley & Sons.
- Bloch, F. (1929). Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Zeitschrift für physik*, 52(7), 555–600. DOI: 10.1007 / BF01339455.
- Boström, A. (1983). Acoustic waves in a cylindrical duct with periodically varying cross section. *Wave Motion*, 5(1), 59–67. DOI: 10.1016 / 0165-2125(83)90007-0.
- Bradley, C. E. (1993). *Linear and nonlinear acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides*. The University of Texas at Austin.
- Bradley, C. E. (1994a). Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part I. Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(3), 1844–1853. DOI: 10.1121 / 1.410196.
- Bradley, C. E. (1994b). Time harmonic acoustic Bloch wave propagation in periodic waveguides. Part II. Experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 96(3), 1854–1862. DOI: 10.1121 / 1.410197.
- Bradley, C. E. (1991). Acoustic Bloch wave propagation in a periodic waveguide. *Technical report*.
- Brillouin, L. (1946). Wave propagation in periodic structures. *McGraw-Hill Book Company google schola*, 2, 2022–2025.
- Brunskog, J. (2012). The forced sound transmission of finite single leaf walls using a variational technique. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 132(3), 1482–1493. DOI: 10.1121 / 1.4740501.
- Campos, B. V. L., et al. (2018). Controle de ruído em dutos usando metamateriais do tipo ressonadores de Helmholtz. *Orientador: José Maria Campos dos Santos*.
-

- Castiñeira-Ibáñez, S., Rubio, C., & Sánchez-Pérez, J. V. (2013). Acoustic wave diffraction at the upper edge of a two-dimensional periodic array of finite rigid cylinders. A comprehensive design model of periodicity-based devices. *Europhysics Letters*, 101(6), 64002. DOI: 10.1209/0295-5075/101/64002.
- Chen, A., Zhao, X., Yang, Z., Anderson, S., & Zhang, X. (2022). Broadband labyrinthine acoustic insulator. *Physical Review Applied*, 18(6). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.18.064057.
- Chen, Q., Jiang, J., Wang, Z., Chen, X., Zhao, S., Zhang, H., & Hu, H. (2023). Broadband muffler with acoustic bright and dark modes for refrigerator noise control. *Applied Acoustics*, 211, 109471. DOI: 10.1016/j.apacoust.2023.109471.
- Chen, X., Grzegorczyk, T. M., Wu, B.-I., Pacheco Jr, J., & Kong, J. A. (2004). Robust method to retrieve the constitutive effective parameters of metamaterials. *Physical review E*, 70(1), 016608. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016608.
- Cook, R. D., et al. (2007). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & sons.
- da Silva, A. R., & Duarte, V. M. (2024). Towards an optimal design of acoustic Luneburg lenses. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 156(4), 2211–2219. DOI: 10.1121/10.0030405.
- Dell, A., Krynkina, A., Horoshenkov, K., & Sailor, G. (2023). Low frequency attenuation of acoustic waves in a perforated pipe. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 153(3), 1791–1801. DOI: 10.1121/10.0017644.
- Ding, H., Wang, N., Qiu, S., Huang, S., Zhou, Z., Zhou, C., Jia, B., & Li, Y. (2022). Broadband acoustic meta-liner with metal foam approaching causality-governed minimal thickness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 232, 107601. DOI: 10.1063/5.0166720.
- Dong, R., Mao, D., Wang, X., & Li, Y. (2021). Ultrabroadband acoustic ventilation barriers via hybrid-functional metasurfaces. *Physical Review Applied*, 15(2), 024044. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.15.024044.
- Dong, R., Mao, D., Zhu, Y., Mo, F., Wang, X., & Li, Y. (2021). A ventilating acoustic barrier for attenuating broadband diffuse sound. *Applied Physics Letters*, 119(26). DOI: 10.1063/5.0074575.
- Dupont, T., Leclaire, P., Panneton, R., & Umnova, O. (2018). A microstructure material design for low frequency sound absorption. *Applied Acoustics*, 136, 86–93. DOI: 10.1016/j.apacoust.2018.02.016.
-

- Dupont, T., Leclaire, P., Sicot, O., Gong, X. L., & Panneton, R. (2011). Acoustic properties of air-saturated porous materials containing dead-end porosity. *Journal of applied physics*, 110(9). DOI: 10.1063/1.3646556.
- E2611-09, A. (2009). ASTM E2611-09 Standard Test Method for Measurement of Normal Incidence Sound Transmission of Acoustical Materials Based on the Transfer Matrix Method.
- E-90, A. (2009). Standard test method for laboratory measurement of airborne sound transmission loss of building partitions and elements.
- Fahy, F. J. (2007). *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. Elsevier.
- Field, C., & Fricke, F. (1998). Theory and applications of quarter-wave resonators: A prelude to their use for attenuating noise entering buildings through ventilation openings. *Applied Acoustics*, 53(1-3), 117–132. DOI: 10.1016/S0003-682X(97)00035-2.
- Floquet, G. (1883). Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 12, 47–88. DOI: 10.24033/asens.220.
- Fokin, V., Ambati, M., Sun, C., & Zhang, X. (2007). Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials. *Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics*, 76(14), 144302. DOI: 10.1103/PhysRevB.76.144302.
- Fusaro, G., Barbaresi, L., Guidorzi, P., & Garai, M. (2024). Investigation of the sound insulation and natural ventilation performance of a metamaterial-based open window. *Building and Environment*, 266, 112140. DOI: 10.1016/j.buildenv.2024.112140.
- Gao, C., Hu, C., Hou, B., Zhang, X., Li, S., & Wen, W. (2023). Ventilation duct silencer design for broad low-frequency sound absorption. *Applied Acoustics*, 206, 109324. DOI: 10.1016/j.apacoust.2023.109324.
- Grobby, J.-P., Huang, W., Lardeau, A., & Aurégan, Y. (2015). The use of slow waves to design simple sound absorbing materials. *Journal of Applied Physics*, 117(12). DOI: 10.1063/1.4915115.
- Grobby, J.-P., Pommier, R., & Aurégan, Y. (2016). Use of slow sound to design perfect and broadband passive sound absorbing materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(4), 1660–1671. DOI: 10.1121/1.4945101.
- Gupta, A. (2014). A review on sonic crystal, its applications and numerical analysis techniques. *Acoustical Physics*, 60(2), 223–234. DOI: 10.1134/S1063771014020080.
-

- Iberall, A. S. (1950). Attenuation of oscillatory pressures in instrument lines. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 72(5), 689–695. DOI: 10.1115/1.4016800.
- ISO/ASTM-52900. (2015). ISO/ASRM 52900 Additive Manufacturing: General: Principles: Terminology.
- Jacobsen, F., & Juhl, P. M. (2013). *Fundamentals of general linear acoustics*. John Wiley & Sons.
- Jayme, V. J., & Edmundo, C. O. (2016). *Metódos Matemáticos. Volume 1*. Editora Unicamp.
- Jena, D., Dandsena, J., & Jayakumari, V. (2019). Demonstration of effective acoustic properties of different configurations of Helmholtz resonators. *Applied Acoustics*, 155, 371–382. DOI: 10.1016/j.apacoust.2019.06.004.
- Jiang, Q., Wang, X., Xi, Y., Huang, W., & Chen, T. (2021). Broadband ventilated metamaterial silencer for high reflection based on Fano-like interference. *International Journal of Modern Physics B*, 35(06), 2150087.
- Jiménez, N., Groby, J.-P., Pagneux, V., & Romero-García, V. (2017). Iridescent perfect absorption in critically-coupled acoustic metamaterials using the transfer matrix method. *Applied Sciences*, 7(6), 618. DOI: 10.3390/app7060618.
- Jiménez, N., Romero-García, V., Pagneux, V., & Groby, J.-P. (2017). Rainbow-trapping absorbers: Broadband, perfect and asymmetric sound absorption by subwavelength panels for transmission problems. *Scientific reports*, 7(1), 13595. DOI: 10.1038/s41598-017-13706-4.
- Jiménez, N. (2017). Quasiperfect absorption by subwavelength acoustic panels in transmission using accumulation of resonances due to slow sound. *Physical Review B*, 95(1), 014205. DOI: 10.1103/PhysRevB.95.014205.
- Jiménez, N., Huang, W., Romero-García, V., Pagneux, V., & Groby, J.-P. (2016). Ultra-thin metamaterial for perfect and quasi-omnidirectional sound absorption. *Applied Physics Letters*, 109(12). DOI: 10.1063/1.4962328.
- Jiménez, N., Groby, J.-P., & Romero-García, V. (2021). The Transfer Matrix Method in Acoustics: Modelling One-Dimensional Acoustic Systems, Phononic Crystals and Acoustic Metamaterials. *Acoustic Waves in Periodic Structures, Metamaterials, and Porous Media: From Fundamentals to Industrial Applications*, 103–164.
- John, S. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical review letters*, 58(23), 2486. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.2486.
- Kampinga, W. R. (2010). Viscothermal acoustics using finite elements-Analysis tools for engineers.
-

- Khettabi, A., & Elmalki, M. (2017). Analytical study by transfer matrix and Green's method of a periodic lattice formed by dual Helmholtz resonators (DHR). *2017 International Conference on Electrical and Information Technologies (ICEIT)*, 1–3. DOI: 10.1109/EITech.2017.8255268.
- Kim, D., Kim, J., & Jeon, W. (2025). Ventilated acoustic metamaterial for noise insulation in a duct with non-uniform cross sections. *Journal of Sound and Vibration*, 615, 119086. DOI: 10.1016/j.jsv.2025.119086.
- Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., & Sanders, J. V. (2000). *Fundamentals of acoustics*. John Wiley & sons.
- Kirchhoff, G. (1868). Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. *Annalen der Physik*, 210(6). DOI: 10.1002/andp.18682100602.
- Kittel, C. (1957). *Introduction to solid state physics*. John Wiley & Sons.
- Kock, W. E. (1948). Metallic delay lenses. *Bell System Technical Journal*, 27(1), 58–82. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01331.x.
- Kreider, D., Kuller, R., Ostberg, D., & Perkins, F. (1966). *An Introduction to Linear Analysis*, Addition-Wesley. Reading, Massachusetts.
- Kumar, S., & Lee, H. P. (2019). The present and future role of acoustic metamaterials for architectural and urban noise mitigations. *Acoustics*, 1(3), 590–607. DOI: 10.3390/acoustics1030035.
- Kumar, S., & Lee, H. P. (2022). Acoustic performance of sonic metacage consisting of Helmholtz's resonator columns with internal partitions. *Applied Acoustics*, 196, 108887. DOI: 10.1016/j.apacoust.2022.108887.
- Kushwaha, M. S., Akjouj, A., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., & Vasseur, J. O. (1998). Acoustic spectral gaps and discrete transmission in slender tubes. *Solid state communications*, 106(10), 659–663. DOI: 10.1016/S0038-1098(98)00112-4.
- Kushwaha, M. S., Halevi, P., Dobrzynski, L., & Djafari-Rouhani, B. (1993). Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Physical review letters*, 71(13), 2022. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.2022.
- Leclaire, P., Umnova, O., Dupont, T., & Panneton, R. (2015). Acoustical properties of air-saturated porous material with periodically distributed dead-end pores. *the Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4), 1772–1782. DOI: 10.1121 / 1.4916712.
- Lee, H. M., Tan, L. B., Lim, K. M., Lee, H. P., & Xie, J. (2018). Environmental noise attenuation by resonator blinds. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 189(5), 052060. DOI: 10.1088/1755-1315/189/5/052060.
-

- Liao, W., Hu, R., Xing, G., & Luo, X. (2023). Quasi-perfect and wideband absorption with gradient non-uniform micro-slit array absorber via a hierarchical optimization method. *Applied Acoustics*, 206, 109321. DOI: 10.1016/j.apacoust.2023.109321.
- Lin, Q., Lin, Q., Wang, Y., & Di, G. (2021). Sound insulation performance of sandwich structure compounded with a resonant acoustic metamaterial. *Composite Structures*, 273, 114312. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114312.
- Lindman, K. F. (1920). Über eine durch ein isotropes System von spiralförmigen Resonatoren erzeugte Rotationspolarisation der elektromagnetischen Wellen. *Annalen der Physik*, 368(23), 621–644. DOI: 10.1002/andp.19203682303.
- Liu, G., & Quek, S. (2003). Finite Element Method: A Practical Course (BH, Burlington, MA).
- Liu, Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T., & Sheng, P. (2000). Locally resonant sonic materials. *science*, 289(5485), 1734–1736. DOI: 10.1126 / science. 289.5485.1734.
- Long, H., Cheng, Y., & Liu, X. (2017). Asymmetric absorber with multiband and broadband for low-frequency sound. *Applied Physics Letters*, 111(14). DOI: 10.1063/1.4998516.
- Lu, T., Li, Z., & Zhang, Y. (2025). Broadband low-transmission study of ventilation metasurfaces based on Archimedean spirals. *Applied Acoustics*, 228, 110335. DOI: 10.1016/j.apacoust.2024.110335.
- Lusk, S. L., McCullagh, M., Dickson, V. V., & Xu, J. (2016). Position statement: Harmful effects of environmental noise exposures. *Nursing outlook*, 64(4), 395–396. DOI: 10.1016/j.outlook.2016.06.001.
- Mareze, P. H., Silva, O. M., Fonseca, W. D., Brandão, E., & Godinho, L. (2025). Optimization of acoustic porous material absorbers modeled as rigid multiple microducts networks: Metamaterial design using additive manufacturing. *Journal of Sound and Vibration*, 596, 118739. DOI: 10.1016/j.jsv.2024.118739.
- Mareze, P. H. (2013). Análise da influência da microgeometria na absorção sonora de materiais porosos de estrutura rígida. Tese de Doutorado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina. Orientador: Arcanjo Lenzi.
- Martínez-Sala, R., Sancho, J., Sánchez, J. V., Gómez, V., Llinares, J., Meseguer, F., et al. (1995). Sound attenuation by sculpture. *nature*, 378(6554), 241–241. DOI: 10.1038/378241a0.
- Mechel, F. P. (2013). *Formulas of acoustics*. Springer Science & Business Media.
-

- Merkel, A., Theocharis, G., Richoux, O., Romero-García, V., & Pagneux, V. (2015). Control of acoustic absorption in one-dimensional scattering by resonant scatterers. *Applied Physics Letters*, 107(24). DOI: 10.1063/1.4938121.
- Mohapatra, K., & Jena, D. (2021). Insertion loss of sonic crystal made with multi resonant shells. *Applied Acoustics*, 171, 107676. DOI: 10.1016/j.apacoust.2020.107676.
- Munday, J., Bennett, C. B., & Robertson, W. (2002). Band gaps and defect modes in periodically structured waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(4), 1353–1358. DOI: 10.1121/1.1497625.
- Munjal, M. L. (2014). *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons.
- Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., & Stewart, W. J. (1999). Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 47(11), 2075–2084. DOI: 10.1109/22.798002.
- Pereira, M., Mareze, P., Godinho, L., Amado-Mendes, P., & Ramis, J. (2021). Proposal of numerical models to predict the diffuse field sound absorption of finite sized porous materials—BEM and FEM approaches. *Applied Acoustics*, 180, 108092. DOI: 10.1016/j.apacoust.2021.108092.
- Petyt, M. (2010). *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge university press.
- Pieren, R., & Heutschi, K. (2015). Predicting sound absorption coefficients of lightweight multilayer curtains using the equivalent circuit method. *Applied Acoustics*, 92, 27–41. DOI: 10.1016/j.apacoust.2015.01.003.
- Rayleigh, L. (1894). *The theory of sound, 2nd edition* (Vol. 2). Donver publications.
- Robertson, W., & Rudy, J. (1998). Measurement of acoustic stop bands in two-dimensional periodic scattering arrays. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(2), 694–699. DOI: 10.1121/1.423344.
- Romero-García, V. (2010). On the control of propagating acoustic waves in sonic crystals: analytical, numerical and optimization techniques. *Universidad Politécnica de Valencia*, 1–327. <http://hdl.handle.net/10261/32093>
- Romero-García, V., Jiménez, N., Groby, J.-P., Merkel, A., Tournat, V., Theocharis, G., Richoux, O., & Pagneux, V. (2020). Perfect absorption in mirror-symmetric acoustic metascreens. *Physical Review Applied*, 14(5), 054055. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.14.054055.
- Rossi, L., Prato, A., Lesina, L., & Schiavi, A. (2018). Effects of low-frequency noise on human cognitive performances in laboratory. *Building Acoustics*, 25(1), 17–33. DOI: 10.1177/1351010X18756800.
-

- Roux, L., Croënne, C., Audoly, C., & Hladky-Hennion, A.-C. (2020). Homogenization of acoustic metamaterials using retrieval methods. *Journal of Applied Physics*, 127(22). DOI: 10.1063/5.0002859.
- Scamoni, F., Salamone, F., & Scrosati, C. (2023). A Survey on Perceived Indoor Acoustic Quality by Workers from Home during COVID-19 Lockdown in Italy. *Buildings*, 13(3), 640. DOI: 10.3390/buildings13030640.
- Schiller, N. H., & Allen, A. R. (2016). *Tuned chamber core panel acoustic test results*.
- Schmitt, M. P. (2023). Computational improvements in the boundary element method for acoustics including viscothermal dissipation. *Ph.D. thesis*.
- Seçgin, A., & Baygün, T. (2019). Determination of effective medium parameters of an in-line cavity based acoustic metamaterials with visco-thermal losses. *Materials Research Express*, 6(6), 065801. DOI: 10.1088/2053-1591/ab0b26.
- Sigalas, M. (1992). Elastic and acoustic wave band structure. *Journal of sound and vibration*, 158(2), 377–382. DOI: 10.1016/0022-460X(92)90059-7.
- Sigalas, M., & Economou, E. N. (1993). Band structure of elastic waves in two dimensional systems. *Solid state communications*, 86(3), 141–143. DOI: 10.1016 / 0038-1098(93)90888-T.
- Smith, D. R., Schultz, S., Markovs, P., & Soukoulis, C. M. (2002). Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients. *Physical review B*, 65(19), 195104. DOI: 10.1103 / PhysRevB.65.195104.
- Stinson, M. R. (1991). The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(2), 550–558. DOI: 10.1121 / 1.400379.
- Stinson, M. R., & Champoux, Y. (1992). Propagation of sound and the assignment of shape factors in model porous materials having simple pore geometries. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(2), 685–695. DOI: 10.1121 / 1.402530.
- Sugimoto, N. (1992). Propagation of nonlinear acoustic waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators. *Journal of Fluid Mechanics*, 244, 55–78. DOI: 10.1017 / S0022112092002969.
- Sugimoto, N., & Horioka, T. (1995). Dispersion characteristics of sound waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(3), 1446–1459. DOI: 10.1121 / 1.412085.
- Theocharis, G., Richoux, O., García, V. R., Merkel, A., & Tournat, V. (2014). Limits of slow sound propagation and transparency in lossy, locally resonant periodic
-

- structures. *New Journal of Physics*, 16(9), 093017. DOI: 10.1088/1367-2630/16/9/093017.
- Thomasson, S.-I. (1980). On the absorption coefficient. *Acta Acustica united with Acustica*, 44(4), 265–273.
- Tijdeman, H. (1975). On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *Journal of Sound and Vibration*, 39(1), 1–33. DOI: 10.1016/S0022-460X(75)80206-9.
- Vargas, J. G., Silva, O. M., Fernandes, A. S., Slongo, V. V., Schwartz, R., Almeida, G. N., Ribeiro, V. H., & Martins, G. C. (2025). Vibra: Vibroacoustic Analysis using FEM. GitHub. Release v0.3.2. Disponível em: <https://github.com/MOPT-UFSC/VIBRA/tree/main>.
- Veloso, M., Pereira, M., Godinho, L., Amado-Mendes, P., & Redondo, J. (2023). Insertion loss prediction of sonic crystal noise barriers covered by porous concrete using the Method of Fundamental Solutions. *Applied Acoustics*, 211, 109543. DOI: 10.1016/j.apacoust.2023.109543.
- Vergara, E. F., Almeida, G. d. N., Zanatta, L. R., & Lenzi, A. (2025). Hybrid Acoustic Metamaterial Based on Absorption Accumulation Peaks for a Broad Sound Energy Control. *Advanced Engineering Materials*, 2402345. DOI: 10.1002/adem.202402345.
- Veselago, V. (1968). The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Sov. Phys. Usp.*, 10(4). DOI: 10.1070/PU1968v010n04ABEH003699.
- Wang, S., Li, H., Liu, Y., Cao, G., Yang, Z., & Ma, F. (2025). Ultra-thin metasurface meta-barrier for integrated ventilation and sound insulation. *Applied Acoustics*, 231, 110486. DOI: 10.1016/j.apacoust.2024.110486.
- Wang, T., Gong, C., Zhang, S., Zhu, Y., Long, H., Cheng, Y., & Liu, X. (2023). An acoustic metaliner for ultra-broadband sound absorption. *Applied Physics Letters*, 123(16). DOI: 10.1063/5.0166720.
- Wang, X., Luo, X., Yang, B., & Huang, Z. (2019). Ultrathin and durable open metamaterials for simultaneous ventilation and sound reduction. *Applied Physics Letters*, 115(17). DOI: 10.1063/1.5121366.
- Wang, X., & Mak, C.-M. (2012). Wave propagation in a duct with a periodic Helmholtz resonators array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(2), 1172–1182. DOI: 10.1121/1.3672692.
- Weber, L., & Gomez-Agustina, L. (2015). Investigation into the application of an acoustic metamaterial for sound attenuation with airflow. *22nd International Congress on Sound and Vibration, ICSV 2015*.
-

- Wu, C., Fan, J., Gao, C., Li, X., Ma, J., Shi, Y., Huang, Y., & Wu, X. (2026). Ultra-ventilated sound absorption lamina metamaterial with labyrinth structure. *Applied Acoustics*, 241, 111025. DOI: 10.1016/j.apacoust.2025.111025.
- Xiang, L., Wang, G., & Zhu, C. (2022). Controlling sound transmission by space-coiling fractal acoustic metamaterials with broadband on the subwavelength scale. *Applied Acoustics*, 188, 108585. DOI: 10.1016/j.apacoust.2021.108585.
- Xu, Z.-x., Qiu, W.-j., Cheng, Z.-q., Yang, J., Liang, B., & Cheng, J.-c. (2024). Broadband ventilated sound insulation based on acoustic consecutive multiple Fano resonances. *Physical Review Applied*, 21(4), 044049. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.21.044049.
- Yablonovitch, E. (1987). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical review letters*, 58(20), 2059. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.2059.
- Yu, X., Lu, Z., Cheng, L., & Cui, F. (2017). On the sound insulation of acoustic metasurface using a sub-structuring approach. *Journal of Sound and Vibration*, 401, 190–203. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.04.042.
- Yu, X., Lu, Z., Liu, T., Cheng, L., Zhu, J., & Cui, F. (2019). Sound transmission through a periodic acoustic metamaterial grating. *Journal of Sound and Vibration*, 449, 140–156. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.02.042.
- Yunker, W. N. (2012). *Sound attenuation using MEMS fabricated acoustic metamaterials*. Auburn University.
- Zanoni, G. P. (2023). Perda de transmissão sonora em metamateriais periódicos usando o método de propagação de ondas por elementos finitos. *Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas*.
- Zhang, X., He, J., Nie, J., Liu, Y., Yu, H., Chen, Q., & Yang, J. (2025). Deep-Subwavelength Composite Metamaterial Unit for Concurrent Ventilation and Broadband Acoustic Insulation. *Materials*, 18(9), 2029.
- Zhang, X., Zhao, C., Shi, D., Liu, P., Lu, T., Chen, R., & Wang, P. (2025). Gene-modified acoustic metamaterials for improving the low-frequency broadband noise reduction performance of sound barriers for transportation buildings. *Journal of Building Engineering*, 113090. DOI: 10.1016/j.job.2025.113090.
- Zhang, X., Zhao, C., Wang, P., & Chen, R. (2024). Combined acoustic metamaterial design based on multi-channel Fano resonance effect. *Journal of Applied Physics*, 136(1). DOI: 10.1063/5.0211050.
- Zhang, Y., Chin, Y. W., Yu, X., Shrestha, M., Lau, G.-K., Koo, B. C., Liu, K., & Lu, Z. (2023). Ventilated acoustic metasurface with low-frequency sound insulation. *JASA express letters*, 3(7). DOI: 10.1121/10.0020133.
-

- Zhang, Y., Zhang, L., Duan, Y., & Zhou, X. (2025). Broadband sound reduction in space-coiling ventilation structures with microperforated shells. *Applied Acoustics*, 235, 110676. DOI: 10.1016/j.apacoust.2025.110676.
- Zwikker, C., & Kosten, C. W. (1949). Sound absorbing materials.
-

Apêndice A: Lista de publicações e pedidos de patentes

Durante o período de doutorado foram desenvolvidas pesquisas sobre os seguintes temas: ondas de Bloch, metasuperfícies e metamateriais acústicos periódicos e aperiódicos, sistemas de baixo custo, índice de transmissão de vibrações, absorvedores fractais, desenvolvimento de *software* de código aberto e materiais do tipo porosos e híbridos. Desta forma, a seguir é fornecido as contribuições do candidato ao título de doutor. A lista inclui pedidos de patentes, publicações submetidas e apresentadas em congressos internacionais e publicações revisadas por pares em periódicos indexados.

(i) - Pedidos de patentes

1. CASSETTARI, I.; VERGARA, E. F.; ALMEIDA, G. N.; MIKULSKI, R. Z.; BARBOSA, L. R.; FARIAS, L. C. B. **METAMATERIAL ACÚSTICO FABRICADO POR CORTE A LASER COM CAMADAS JUSTAPOSTAS**. 2023. Pedido de Patente. Número do registro: BR1020230174914. Data de depósito registrada: 29/08/2023. Instituição de registro: INPI - *Instituto Nacional da Propriedade Industrial*.

2. ALMEIDA, G. N.; VERGARA, E. F.; LENZI, A.; BARBOSA, L. R.; CASSETTARI, I.; MIKULSKI, R. Z.; FARIAS, L. C. B. **MATERIAL ACÚSTICO HÍBRIDO PARA CONTROLE DA ENERGIA SONORA COM BANDA LARGA INCLUINDO BAIXAS, MÉDIAS E ALTAS FREQUÊNCIAS**. 2024. Pedido de Patente. Número do registro: BR102024010512. Data de depósito registrada: 27/05/2024. Instituição de registro: INPI - *Instituto Nacional da Propriedade Industrial*.

3. FARIAS, L. C. B. ; VERGARA, E. F. ; LENZI, A. ; ALMEIDA, G. N. ; BARBOSA L. R. ; CASSETTARI, I. ; BAHU, V. H. P. . **METAMATERIAL ACÚSTICO CONFIGURADO POR ACOPLAMENTO DE PAINEL MICROPERFURADO E CAVIDADE DE AR PARA CONTROLE DE ENERGIA SONORA EM BAIXAS FREQUÊNCIAS**. 2024. Pedido de Patente. Número do registro: BR10202402531. Data de depósito registrada: 04/12/2024. Instituição de registro: INPI - *Instituto Nacional da Propriedade Industrial*.

(ii) - Publicação em congresso internacional proveniente da tese

1. ALMEIDA, G. do N.; ZANATTA, L. R.; ZIMMERMANN, K. K.; VERGARA, E. F.; LENZI, A. Metamaterial dispersivo aplicado simultaneamente a problemas de reflexão e transmissão sonora. **13th Congresso Iberoamericano de Acústica**. 2024.

(iii) - Publicações em congressos internacionais não provenientes da tese

1. LINCONL, C. B. F.; ALMEIDA, G. do N.; VERGARA, E. F.; BARBOSA, L. R.; MIKULSKI, R. Z. Performance of acoustic metamaterial based on a double layer MPP. **XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics**. Cilamce-Panacm 2021.
 2. ALMEIDA, G. do N.; VERGARA, E. F.; BARBOSA, L. R.; MIKULSKI, R. Z. Low-frequency sound absorption with bandwidth expanded by symmetric labyrinthine acoustic metamaterial. **26th International Congress of Mechanical Engineering**. 2021. URL: <https://abcm.org.br/proceedings/view/COB2021/0197>.
 3. ALMEIDA, G. do N.; VERGARA, E. F.; CASSETTARI, I.; BARBOSA, L. R.; MIKULSKI, R. Z.; CARVALHO de SOUZA, A. Absorvedores acústicos perfeitos baseados em ressonadores de Helmholtz com dupla abertura embutida. **12th Congresso Iberoamericano de Acústica**. 2022.
 4. ALMEIDA, G. N.; VERGARA, E. F.; BARBOSA, L. R.; ZANATTA, L. R.; ZIMMERMANN, K. K.; MIKULSKI, R. Z.; BAHÚ, V. P. Sound energy control in a wide frequency domain by a hybrid acoustic material. **27th International Congress of Mechanical Engineering**. 2023. URL: <https://abcm.org.br/proceedings/view/COB2023/0163>
 5. BARBOSA, L. R.; ALMEIDA, G. do N.; VERGARA, E. F.; LENZI, A.; MIKULSKI, R. Z. Development of slotted panel to acoustic treatment of rooms. **27th International Congress of Mechanical Engineering**. 2023. URL: <https://abcm.org.br/proceedings/view/COB2023/2110>
 6. BRUM, R.; ALMEIDA, G. do N.; ZIMMERMANN, K. K.; CAVALHEIRO, T.; BARBOSA, L. R.; VERGARA, E. F.; LENZI, A. Avaliação de uma bancada de baixo custo para medições de absorção sonora em tubo de impedância. **13th Congresso Iberoamericano de Acústica**. 2024.
 7. FARIAS, L. C. B.; ALMEIDA, G. do N.; ZIMMERMANN, K. K.; CASSETTARI, I.; VERGARA, E. F. Metamaterial acústico para absorção sonora em baixas frequências por modelo de fluido equivalente. **13th Congresso Iberoamericano de Acústica**. 2024.
 8. SILVA, O. M.; VARGAS, J. G.; FERNANDES, A. S.; SLONG, V. V.; SCHWARTZ, R.; ALMEIDA, G. do N.; RIBEIRO, V. H.; MARTINS, G. C. OpenPulse: An Open Source Software for Acoustically Induced Vibration Analysis of Piping Systems. **Conference: OpenSD: The 2nd Open-source Scientific Computing in Structural Dynamics**, 2025.
-



Control and manipulation of sound waves by a mirror symmetric reciprocal labyrinth

Gildean do N. Almeida¹ · Erasmo F. Vergara¹ · Arcanjo Lenzi¹ · Alosio N. Klein²

Received: 28 February 2025 / Accepted: 15 August 2025

© The Author(s), under exclusive licence to The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2025

Abstract

Reflection invariance is a very important property in the control and manipulation of sound waves in several practical applications; however, this aspect is modestly explored in acoustic metamaterials with labyrinthine cavities. In this work, we report theoretically and experimentally a comprehensive control of sound energy by a novel subwavelength scale metamaterial based on a mirror symmetric and reciprocal labyrinth with a slit-type main pore for forward and backward incident waves. The experimental results of the sound transmission problem showed an effective attenuation greater than 22 dB between 659 and 1495 Hz and greater than 26 dB between 1975 and 2750 Hz, and this result is due to the bandgap property of local scattering and Bragg scattering of the symmetric structure. Furthermore, the results of the reflection problem showed a non-suppressible sound energy control of approximately 0.5 for the symmetric and antisymmetric modes of the structure, which allowed to reach a ratio of $\lambda/18$. Nevertheless, due to the dispersion relation and the accumulation of absorption peaks below the bandgap, degenerate resonances were obtained in the structure and, consequently, a quasi-perfect sound absorption was obtained. The physical origin of the degenerate resonances was best understood in terms of the behavior of the acoustic pressure and the velocity of the particles in the structure. In addition, the manipulation of sound waves was experimentally evaluated by the behavior of the Bloch spatial frequency components and the phase velocity. Finally, this work contributes to advances in the area of control and manipulation of sound waves through the use of metamaterials with reflection invariance at subwavelength scale.

Keywords Sound control · Dispersion relation · Phase velocity · Reflection invariance · Degenerate resonances

List of symbols

a	Width of labyrinthine tubes (m)	n	Number of labyrinths
b	Internal walls thickness in the tubes (m)	W	Height of tubes (m)
d_f	Height of main pore (m)	L_g	Width of the main pore (m)
h	Periodicity of tubes (m)	N	Number of identical labyrinthine tubes
$2L$	Total depth of cell (m)	P	Acoustic pressure (Pa)
L_{ef}	Total length of labyrinthine tubes (m)	u	Volume velocity ($m \cdot s^{-1}$)
l	Height of cell (m)	U	Particle velocity ($m \cdot s^{-1}$)
m	Width of cell (m)	$\mathbf{n}$	Normal vector
		$c_{air} = c_o$	Speed of sound in air ($m \cdot s^{-1}$)
		Pr	Prandtl number
		P_0	Atmospheric pressure (Pa)
		K_0	Air bulk modulus
		A_S	Cross sectional area of main pore (m)
		r_S	Radius of main pore (m)
		A_T	Labyrinthine tube area (m)
		A_{gp}	Area of main pore (m)
		q	Theoretical Bloch wavenumber (m^{-1})
		q_{exp}	Experimental Bloch wavenumber (m^{-1})
		f_c	Cutoff frequency (Hz)
		$\vec{v}_{f,b}$	Eigenvectors

Technical Editor: Lucas Vignoli.

All authors contributed equally to this work.

✉ Gildean do N. Almeida
gildean_fsa@hotmail.com¹ Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil² Laboratory of Materials, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil

Ondas de Bloch em um metamaterial acústico periódico dispersivo

Bloch waves in a periodic dispersive acoustic metamaterial

G. do N. Almeida^{*1}, E. F. Vergara¹, A. Lenzi¹

¹Universidade Federal de Santa Catarina, Laboratório de Vibrações e Acústica, Florianópolis, SC, Brasil.

Recebido em 27 de agosto de 2024. Aceito em 10 de janeiro de 2025.

A propagação de ondas mecânicas e eletromagnéticas em estruturas com periodicidade espacial tornou-se um campo relevante, especialmente quando os aspectos científico, tecnológico e de inovação são considerados. Embora o comportamento dos fenômenos físicos associado a estruturas periódicas tenham se consolidado ao longo dos últimos anos, o caso acústico ainda é um campo de estudo pouco explorado e neste sentido se faz necessário. Neste trabalho, investigamos alguns fenômenos subjacente ao comportamento das ondas de Bloch em um metamaterial acústico periódico dispersivo. O formalismo matemático da matriz de transferência considerando as perdas visco-térmicas combinada ao teorema de Bloch-Floquet unidimensional são adotados e se revelam suficientemente precisos para descrever e extrair as características da estrutura periódica. Conceitos como dispersão sonora, velocidade de fase e bandas de frequências proibidas (*bandgaps*) são abordados, e seus respectivos comportamentos são apoiados por resultados experimentais. Além disso, uma estratégia de como estabelecer a localização e a dimensão destes *bandgaps* é apresentada. Por fim, este estudo possibilita uma discussão no campo da física ondulatória, particularmente sobre o comportamento das ondas sonoras dissipativas que se propagam em estruturas periódicas.

Palavras-chave: Metamaterial acústico, Relação de dispersão, Velocidade de fase, Ondas de Bloch.

The propagation of mechanical and electromagnetic waves in structures with spatial periodicity has become a relevant field, especially when scientific, technological and innovation aspects are considered. Although the behavior of physical phenomena associated with periodic structures has been consolidated over the last few years, the acoustic case is still a poorly explored field of study and in this sense it is necessary. In this work, we investigate some phenomena underlying the behavior of Bloch waves in a dispersive periodic acoustic metamaterial. The mathematical formalism of the transfer matrix considering the viscothermal losses combined with the one-dimensional Bloch-Floquet theorem are adopted and are shown to be sufficiently accurate to describe and extract the characteristics of the periodic structure. Concepts such as sound dispersion, phase velocity and forbidden frequency bands (*bandgap*) are addressed, and their respective behaviors are supported by experimental results. In addition, a strategy for establishing the location and dimension of these bandgaps is presented. Finally, this study enables a discussion in the field of wave physics, particularly in the behavior of dissipative sound waves that propagate in periodic structures.

Keywords: Acoustic metamaterial, Dispersion relation, Phase velocity, Bloch waves.

1. Introdução

Fenômenos físicos provenientes da interação de ondas com estruturas periódicas são frequentemente estudados em cursos de ciências exatas no ensino superior do Brasil. No entanto, em geral estes estudos estão demasiadamente associados às ondas eletromagnéticas (rádio, micro-ondas, luz) e de matéria (mecânica quântica) em comparação às ondas mecânicas (som). O primeiro estudo sobre a propagação de ondas sonoras em estruturas com periodicidade espacial remete a alguns séculos atrás, com a tentativa de se obter a velocidade de propagação do som realizada por *Sir* Isaac Newton [1]. Normalmente dois tipos de estruturas asseguram a propagação desta

classe de ondas em meios periódicos: os cristais sônicos ou sonoros (CS) e os metamateriais acústicos (MMA) periódicos. Os CS são estruturas que consistem em um conjunto de dispersores alojados periodicamente em um meio hospedeiro homogêneo, por exemplo, o ar. Os dispersores podem ser qualquer material denso e refletor sonoro, e em geral, apresentam uma impedância acústica característica muito maior que a impedância do meio hospedeiro [2, 3]. Por outro lado, MMA são estruturas periódicas que replicam uma célula unitária primitiva e apresentam propriedades e comportamentos únicos, especialmente para grandes comprimentos de onda [4].

Os primeiros CS surgiram a partir da ideia relacionada aos cristais fotônicos (CF), uma vez que ambas estruturas possibilitam o controle e a manipulação das ondas, no entanto, a primeira está relacionada às

*Endereço de correspondência: gildean_fsa@hotmail.com

Hybrid Acoustic Metamaterial Based on Absorption Accumulation Peaks for a Broad Sound Energy Control

Erasmio F. Vergara, Gildean do N. Almeida,* Lucas R. Zanatta, and Arcanjo Lenzi

Controlling sound energy over a wide spectrum of frequencies through structures with a subwavelength scale is a challenge in acoustics. In this sense, a hybrid acoustic metamaterial model (HAMM) that acts over a wide frequency spectrum is presented. The structure consists of a combination of a porous layer and an acoustic metamaterial (AMM). Two samples are evaluated to establish effective control of sound energy ($\alpha \geq 60\%$) between 450 and 6400 Hz with the structure reaching a maximum ratio of $\lambda/11.5$. Furthermore, the behavior of sound waves in the structure is explored through analysis of the sound pressure field, instantaneous particle velocity, and thermoviscous dissipation. One of the highlights of the HAMM is that it is composed of an AMM that has a low phase velocity. Thus, the ultra-slow sound in part of the structure allows the low-frequency resonance frequency to be shifted to lower frequencies. Another characteristic is that because of the accumulation of absorption peaks below the bandgap of the AMM, a low-frequency broadband absorption is guaranteed. Therefore, this work contributes substantially to advances in the area of sound energy control over a wide spectrum of frequencies through the use of different combined acoustic materials.

1. Introduction

Reducing and controlling sound energy across a broad frequency spectrum is essential for a wide range of acoustic engineering applications and challenges, such as noise mitigation and human health effects. This control becomes even more challenging when the absorbing structure must have a subwavelength scale, i.e., its total thickness is smaller than the wavelength of the lowest operating frequency. It is known that for the mid-high-frequencies region (≥ 1000 Hz) traditional porous materials (e.g., cellular, fibrous, granular, and ceramic) present efficient energy control.^[1–3] Taking into account only sound absorption in the low-frequency region (≤ 1000 Hz), several structures can be highlighted, such as acoustic metamaterials,^[4–12] acoustic metasurfaces,^[13–17] modified Helmholtz resonators,^[3,18–21] and composite materials.^[22–25]

E. F. Vergara, G. N. Almeida, L. R. Zanatta, A. Lenzi
 Laboratory of Vibrations and Acoustics
 Federal University of Santa Catarina
 R. Eng. Agrônomo Andrei Cristian Ferreira, s/n - Trindade,
 Florianópolis - SC 88040-900, Brazil
 E-mail: gildean_fsa@hotmail.com

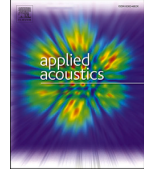
 The ORCID identification number(s) for the author(s) of this article can be found under <https://doi.org/10.1002/adem.202402345>.

DOI: 10.1002/adem.202402345

Considering the control of sound energy over a wide spectrum of frequencies, several works stood out in recent years. For example, Doutres et al.^[26] investigated the acoustic absorption and transmission performance of a porous cellular material with a two-dimensional periodic array of Helmholtz resonator (HR) inclusions. The model was validated by comparison with impedance tube measurements and simulations based on the finite element method and a homogenization-based model. At the HR resonance frequency, the transmission loss is improved, and the sound absorption of the foam can be decreased or improved depending on the HR tuning frequency and the thickness and properties of the host foam. In order to improve sound absorption performance, Xie et al.^[27] established an acoustic metamaterial structure composed of a coupled multicavity tunable resonator and polyurethane-filled slits. The results obtained by the authors demonstrate that

the proposed final structure exhibited significantly improved bandwidth and sound absorption coefficient, leading to more stable sound absorption effects. The double layer structure effectively absorbs sound between 375 and 4270 Hz and the average sound absorption coefficient exceeded 85% from 430 to 2370 Hz. We also highlight an acoustic structure composed of a perforated resonator panel and porous sound-absorbing material to improve sound absorption for low to medium frequencies proposed by Li et al.^[28] Thus, the designed composite structure achieved effective broadband sound absorption through the resonance dissipation effect of the perforated panel resonator and the energy trapped by the porous sound-absorbing material. In summary, in a limited space of 80 mm, the low perforation rate structure has an average sound absorption coefficient greater than 0.89 and in between 200 and 1600 Hz.

Liu et al.^[29] proposed an absorber structure composed of a gradually perforated porous material and supported by a Helmholtz resonant cavity. The results show that gradual perforation substantially improves the impedance matching between the material and the air to increase the absorption of broadband sound (100–3000 Hz). Meanwhile, the Helmholtz resonant cavity brings a low-frequency sound absorption peak to increase sound absorption. The proposed absorber realizes an excellent combination of low-frequency and broadband sound absorption. Furthermore, its easy-to-manufacture characteristics present great application potential. Vergara et al.^[3] proposed a hybrid



On the use of metamaterials with negative effective parameters for dual sound energy control

Gildean do N. Almeida ^{*}, Erasmo F. Vergara, Leandro R. Barbosa, Arcanjo Lenzi, Olavo M. Silva

Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil

ARTICLE INFO

Keywords:

Sound absorption
Sound transmission loss
Dispersion relation
Phase velocity
Retrieving parameters

ABSTRACT

This study investigates the comprehensive control of sound energy through a acoustic metamaterial. The unit cell is composed of a main waveguide periodically loaded with labyrinthine tubes that may feature a different number of coiled channels. A theoretical approach employs the four-pole transfer matrix, taking into account visco-thermal effects, to explore the behavior of the metamaterial. Furthermore, experimental tests were conducted in an impedance tube for normal incidence waves. The results of the reflection problem showed that an effective sound energy control ($\alpha \geq 85\%$ at 520 Hz and $\geq 99\%$ at 1287 Hz) only exists outside the bandgap regions and that accumulation of absorption peaks is possible by increasing the periodicity of the structure. On the other hand, in the transmission problem, high sound transmission loss (70 dB at 750 Hz and 30 dB at 465 Hz) was obtained. This result is primarily due to the bandgap property, as the behavior of the transmission coefficient is strongly attributed to the wide stopband property in the structure. Therefore, the proposed metamaterial can manipulate sound waves in a wide frequency domain and enables broadband and low-frequency sound insulation. A method for retrieving parameters was used from the experimental reflection and transmission coefficients to obtain the effective parameters of the structure. The effective bulk modulus and the effective mass density exhibited negative values at specific frequencies, providing a better understanding of the physical mechanisms of the metamaterial. Finally, this work contributes to advances in the area of control and manipulation of sound energy through periodic structures as well as understanding the dual properties revealed by the structure.

1. Introduction

The development of acoustic metamaterials (AMM) for simultaneous utilization in reflection and transmission problems is of great interest in acoustic engineering, mainly due to the wide range of applications for controlling sound energy, such as soundproofing, acoustic barriers, and noise reduction. In this sense, different works have been reported in the literature with efficient geometric configurations [1–11]. In general, the sound energy control in these materials is evaluated through two physical parameters: the reflection coefficient (sound absorption) and transmission coefficient (sound transmission loss). However, further analyses can be conducted to gain a better understanding of the underlying physical mechanisms governing the behavior of AMMs. In this regard, the numerical or experimental methods for retrieving effective parameters have demonstrated to be a valuable approach.

Considering only problems of sound transmission, several works have highlighted the use of the theory of effective parameters. Jena et al. [12] proposed a robust analytical method and using the theory of the

effective properties, estimated and measured the mass density and bulk modulus properties of eight configurations of an acoustic metamaterial based on Helmholtz resonators in parallel and series. To demonstrate the possibility of breaking the law of mass and manipulating the propagation of acoustic wave with a deep sub-wavelength structure, Xin et al. [13] designed a labyrinthine acoustic metamaterial with ultra-high refractive index fractal structure based on the construction method of Hilbert curve. The authors showed that this configuration has transmission characteristics that stabilize the acoustic isolation performance at monopole and dipole resonances. A fractal acoustic metamaterial (FAM) was also proposed and studied by Xiang et al. [14], for which the bandgap properties and the acoustic isolation capabilities were evaluated by the dispersion relations and the transmission properties on the sub-wavelength scale. The effective responses of the FAM with various fractal levels were clarified based on the transfer matrix method and equivalent medium theory.

In pursuit of improved sound transmission loss, Yu et al. [15] introduced a finite-size grating periodic acoustic metamaterial. The unit

^{*} Corresponding author.

E-mail address: gildean_fsa@hotmail.com (G.d.N. Almeida).

<https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2024.110010>

Received 26 December 2023; Received in revised form 30 March 2024; Accepted 2 April 2024

Available online 12 April 2024

0003-682X/© 2024 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Metamaterial based on labyrinthine tubes loaded periodically and ultra-low phase velocity to the low-frequency energy control

Cite as: Appl. Phys. Lett. **123**, 081706 (2023); doi: [10.1063/5.0165639](https://doi.org/10.1063/5.0165639)

Submitted: 29 June 2023 · Accepted: 14 August 2023 ·

Published Online: 25 August 2023



G. N. Almeida,^{a)} E. F. Vergara, and Arcanjo Lenzi

AFFILIATIONS

Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil

^{a)} Author to whom correspondence should be addressed: gildean_fsa@hotmail.com

ABSTRACT

Sound energy control at low frequencies (≤ 1000 Hz) is necessary and very important in acoustics, especially when considering scientific and technological aspects. In this work, a modular acoustic metamaterial composed of a main waveguide loaded with small quarter-wavelength tubes is presented. Theoretical, numerical, and experimental methods are used to describe the accumulation of sound absorption peaks below the structure's bandgap with the number of peaks proportional to the structure's periodicity. The origin of the bandgap is due to the loaded tubes in the main waveguide. Ultra-low phase velocity ($\tilde{c}_p = 16$ m/s) and critical coupling were obtained in the model, which allowed perfect sound absorption at 292 Hz with a structure reaching a ratio of $\lambda/90$. The experimental results in the impedance tube support the theoretical and numerical discussions and demonstrate a sound energy control of 89% and 84% at 686 and 422 Hz, respectively. Finally, this work contributes to advances in the field of control and manipulation of low-frequency sound energy through periodic structures.

Published under an exclusive license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0165639>

It is well known that the evolutionary nature of the science of acoustic materials has enabled the development of prominent sound absorbing structures. From this perspective, acoustic metamaterials (AMMs)^{1–7} emerged as advanced alternatives and allowed effective energy control.^{8,9} AMMs assume periodic structures that repeat a unit cell and have unique properties and behaviors. However, the control of sound waves with long wavelengths remains a challenging task. This challenge becomes greater, especially when it is desired that the structure of the absorber presents sub-wavelength scale, dispersive properties, and critical coupling conditions. The sound energy control through the AMM depends on the boundary conditions that these structures present.¹⁰

Considering the problem of sound reflection, several AMM studies have been highlighted in recent years. Jiménez *et al.*¹¹ using the concepts of slow sound ($\tilde{c}_p < 50$ m/s) and critical coupling presented an AMM based on periodically distributed Helmholtz resonators for sound absorption between 200 and 600 Hz with the structure presenting scale subwavelength. In the case of slow sound propagation, Groby *et al.*¹² demonstrated the inherent sound energy dissipation when designing metamaterials with quarter-wavelength resonators. The performance of a metamaterial using different local reaction Helmholtz resonators under oblique incidence was evaluated by Jiménez *et al.*,¹³

where the perfect sound absorption peaks were obtained at selected frequencies with different angles of incidence by the structure. Resonant panels for almost perfect absorption of low frequency sounds were proposed by Jiménez *et al.*¹⁴ when considering the accumulation of resonances and slow sound. At the structure's resonant frequency (350 Hz), the authors obtained a sound absorption of 87% and a phase velocity of $\tilde{c}_p = 34$ m/s. Aiming at noise control, a two-port silencing metamaterial based on the effect of slow waves ($\tilde{c}_p < 150$ m/s) was proposed by Yang *et al.*,¹⁵ and the authors obtained an nearly perfect broadband sound absorption of 600–900 Hz with the ventilation capacity in the absorber guaranteed. Liao *et al.*¹⁶ optimized an AMM-type gradient microslit array with quarter-wavelength resonators ($\lambda/4$) for sound absorption in the range of 1000–1800 Hz. These authors confirm that the selection of $\lambda/4$ resonators for the proposal is due to the flexible adaptation and the simplicity of the geometry, and an almost perfect sound absorption in the frequency range was experimentally demonstrated. In this work, a modular acoustic metamaterial (MAMM) composed of a main waveguide periodically loaded with quarter-wavelength labyrinthine tubes ($\lambda/4$) is presented, as shown in Fig. 1. Based on the concept of slow sound and critical coupling, effective control of low-frequency sound energy is ensured by the structure featuring sub-wavelength scale.

On broadband absorption in a fractal chirped porous material using a smaller amount of material: Estimates to normal and random incidence

Gildean do N. Almeida,^{a)} Ricardo Brum, Erasmo F. Vergara, and Arcanjo Lenzi

Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, Brazil

ABSTRACT:

Designing broadband sound absorption devices using a smaller amount of porous material is of great importance for practical applications: for example, in the civil aviation sector. In this context, this paper proposes a chirped porous material based on the Cantor fractal, and the performance of the absorber is estimated under normal and random wave incidence. For normal incidence and using the transfer matrix method with the Johnson–Champoux–Allard–Lafarge model, and through numerical simulations and experimental tests, this paper demonstrates that the proposed absorber with increasing infinite complexity maintains an average sound absorption (Q_a) greater than 90% in a wide frequency range (100–6400 Hz). To achieve these results, the initial generation of the fractal structure must be composed of porous materials with different flow resistivity (σ_{fi}), i.e., $\sigma_{f1} > \sigma_{f2}$. Furthermore, based on the concept of radiation impedance and the first empirical London model, this paper proves that for random incidence, the absorber maintains a behavior similar to that observed for normal incidence up to the second iteration of the structure. Therefore, this study suggests that the Cantor fractal pattern allows the development of broadband sound absorbers that consider a smaller amount of porous material in their design. © 2025 Acoustical Society of America.

<https://doi.org/10.1121/10.0037083>

(Received 25 February 2025; revised 11 June 2025; accepted 17 June 2025; published online 1 July 2025)

[Editor: Franck C. Sgard]

Pages: 16–27

I. INTRODUCTION

Porous materials (PMs) of the cellular, fibrous, and granular type are designed to convert sound energy into other forms of energy through a series of physical phenomena, such as viscous, thermal, and even structural effects.¹ These materials consist of a solid layer, called the structure, which is filled with a working fluid (e.g., air). In general, they exhibit a wide variety of small pores and, connected to the external environment, ensure sound absorption, for example. Over the years, PMs have played an important role in controlling sound energy in various applications through different combinations.

A structure based on Helmholtz resonators embedded in slits covered with porous material modulation crowns (PMMC) was proposed for ultra-broadband efficient sound absorption.² Analysis of the absorption mechanism revealed that the PMMC facilitates impedance matching and energy dissipation within the structure. Furthermore, it is shown that the PMMC composed of four subunits can achieve efficient ultra-broadband absorption ($\alpha \geq 0.8$) between 100 and 10 000 Hz with a thickness of 200 mm. A novel slit-resonator acoustic metastructure (SRAM) composed of Helmholtz resonators and PMs is highlighted, which combines the resonance effect and thermoviscous dissipation to achieve perfect and continuous sound absorption between

200 and 3000 Hz.³ A composed structure of a perforated panel resonator (PPR) and porous sound absorbing material (PSAM) was designed to improve sound absorption at low to mid-frequencies.⁴ By properly introducing a PSAM that consists of PM layers into the PPR, the authors obtained a matched acoustic impedance due to the coupling of the PPR and PSAM. The designed composite structure, PPR-PSAM, achieved effective broadband sound absorption through the resonance dissipation effect of the PPR and the energy retained by the PSAM. The normal sound absorption coefficient measured by the impedance tube remained in good agreement with the theoretical results. Therefore, in a limited space of 80 mm, the PPR-PSAM with low perforation rate had an average sound absorption coefficient of greater than 0.89 from 200 to 1600 Hz. Furthermore, in the literature, the ideas of gradient perforated PM,^{5,6} a porous layer with embedded resonators,^{7–10} slit-perforated dual-porosity materials,¹¹ and a set of rigid partitions of varying lengths inserted into a rigid supporting porous layer¹² have also been reported.

Although the different configurations composed of PMs previously reported have been shown to be a good solution to control sound energy, research and development specifically of efficient PMs across the frequency spectrum using a smaller amount of material are a desire mainly in the civil aviation transportation sector. This desire is due to the fact that airlines need to reduce aircraft weight and consequently fuel consumption. In this regard, the concept of chirped

^{a)}Email: gildean_fsa@hotmail.com

Influence of the variation of concrete properties in determining the vibration transmission index K_{ij}

Building Acoustics

1–20

© The Author(s) 2024

Article reuse guidelines:

sagepub.com/journals-permissions

DOI: 10.1177/1351010X241285201

journals.sagepub.com/home/bua



Wagner de Sousa Santos¹, Erasmo F Vergara
and Gildean do Nascimento Almeida

Abstract

In this work, the influence of the modulus of elasticity, the loss factor and the density of reinforced concrete on the vibration transmission index (K_{ij}) of a reduced concrete bench was evaluated. An experimental modal analysis based on the Operating Deflection Shape (ODS) methodology is carried out on a reinforced concrete slab ($1.20 \times 0.80 \times 0.20$ m) supported on four concrete pillars, applying four sources of distinct impacts: mallets of 1 and 4 kg, impact machine and one person jumping. The experimental results served to validate the finite element bench model (FEM) considering both the first four modes of slab vibration and the adjustment of the elasticity and shear modulus, the loss factor and the density of the concrete using the NSGA genetic algorithm-II. The K_{ij} index between the slab and the columns was determined experimentally, numerically and analytically, according to the Gerretsen model. The FEM model showed a percentage difference in the frequencies of the vibration modes less than 10% concerning the tests for the K_{ij} index. The influence of density and the modulus of elasticity mainly in the direction perpendicular to the plane of the structure modify the values of the frequencies of the vibration modes by up to 10% without interfering in the modal forms of the structure. In addition, the internal loss factor alters the amplitude of the K_{ij} results by an average of 10 dB. Finally, it is shown that the stiffness varies according to the orthotropy of the material. It was possible to conclude that the computational model showed good convergence in results ($> 90\%$) when compared with the K_{ij} experiments, with the same varying along the frequency, different from what is proposed in the analytical and normative models. This fact proves the hypothesis raised that structural couplings in practice generate significant interference in the results, as happens in residential buildings, with the test bench being an important experiment for initial predictions with little interference from energy transmission to the environment.

Keywords

Impact noise, vibration transmission index, modal analysis, mechanical properties

Mechanical Engineering Department, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, Brazil

Corresponding author:

Wagner de Sousa Santos, Mechanical Engineering Department, Federal University of Santa Catarina, R. Eng. Agronômica Andrei Cristian Ferreira, S/N-Trindade, Florianópolis, Santa Catarina 88040, 900, Brazil.

Email: wagsousa16@gmail.com



Low-frequency acoustic attenuator based on a labyrinthine Helmholtz resonator

Augusto B. Beck¹ · Gildean do N. Almeida¹ · Robson Z. Mikulski¹ · Erasmo F. Vergara¹

Received: 27 October 2023 / Accepted: 14 May 2024 / Published online: 31 May 2024

© The Author(s), under exclusive licence to The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2024

Abstract

Low-frequency noise attenuation is a challenge in different engineering applications. This study investigates the effectiveness of a labyrinth-type Helmholtz resonator to control noise in pipelines, whose configuration aims to efficiently reduce low-frequency noise, occupying a small volume compared to the working wavelength. An analytical model was developed using the transfer matrix method, implementing simplified assumptions of the resonator geometry. The results of this model are compared to results of numerical simulations obtained by the finite element method, which indicated errors in the simplified hypotheses. The Schwarz–Christoffel mapping allowed a better representation of the duct, so that the curves in the analytical model were considered and subsequently the dissipative effects of air by the Stinson equivalent fluid model were also included in its formulation. Three resonator prototypes were built by 3D printing. Experimental tests were carried out with an impedance tube and the results compared to theoretical predictions showed an excellent agreement in the resonator tuning frequency with a maximum error of 1%, and adequate agreement in the magnitude with a maximum error of 16%. The modified labyrinthic resonator proved to be a viable alternative for controlling low-frequency noise, reaching attenuations of around 28 dB at 182 Hz, with a total thickness 20 times smaller than the working wavelength.

Keywords Noise control · Coiled spaces · Transfer matrix · 3D printing

1 Introduction

A significant part of the noise produced by machinery, equipment and vehicles is transmitted through pipelines. To reduce the noise that escapes from these ducts, acoustic filters are usually used as a control measure. For example, we can mention the automotive silencers modeled and optimized for better pressure reduction and noise attenuation presented by Prajapati and Desai [1], and the acoustic attenuation of a single-pass perforated concentric muffler filled with continuous strand fibers investigated theoretically and experimentally by Selamat et al. [2].

Traditional acoustic filters (area discontinuities, expansion chambers, ducts lined with foam and porous materials) attenuate the medium and high frequency bands with great efficiency, but require large dimensions to operate properly at low frequencies [3, 4]. Alternative methods are being developed to solve this problem with the use of so-called metamaterials: periodic structures that repeat a unit cell and have unique properties and behaviors not found in nature [5, 6]. Acoustic metamaterials are capable of absorbing low-frequency sounds with small working thicknesses. They are devices normally manufactured applying traditional materials, such as plastic, rubber and metals, but in arrangements and shapes that promote sound absorption and attenuation in frequencies of interest [6–14].

In this perspective, Wang et al. [15], with the aim of obtaining good attenuation at low frequencies, developed a labyrinthine Helmholtz resonator (HR), as represented in Fig. 1. The HR is composed of a hollow parallelepiped, with a square face of side L and depth b . Inside there is a partition of height h and length l_d , which can be rolled up inside the cavity. This partition forms a duct that connects the interior of the cavity to a main tube, creating a resonator that acts

Technical Editor: Samuel da Silva.

✉ Augusto B. Beck
augusto.barth.beck@gmail.com

✉ Gildean do N. Almeida
gildean_fsa@hotmail.com

¹ Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC 88040-970, Brazil



Sound absorption performance of a labyrinthine metamaterial with arbitrary cross-sectional microperforations

Gildean do N. Almeida¹ · Erasmo F. Vergara¹ · Leandro R. Barbosa¹ · Arcanjo Lenzi¹ · Iago Cassettari¹ · Robson Z. Mikulski¹

Received: 20 June 2023 / Accepted: 25 September 2023
© The Author(s), under exclusive licence to The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2023

Abstract

Studies on acoustic metamaterials (AMM) with coiled spaces as a solution for low-medium frequency sound absorption are regularly presented. However, the influence of panel microperforation shapes on the behavior of these absorbers is not discussed in detail in the current literature. In this work, the acoustic performance of a labyrinthine AMM with slit, square and circular microperforations, with similar cross-sectional area perforation, is discussed theoretically, numerically and experimentally in terms of the bandwidth around the maximum sound absorption for the frequency tuning. The impedance tube results of AMM with slit and square microperforations presented an increase of 33.9% and 14.3% absorption bandwidth compared to circular perforation. The increase in the absorption bandwidth in these microperforations is due to the greater energy dissipation in their viscous boundary layer as demonstrated by finite element computational simulation. In addition, slit and square microperforations are more susceptible to the effect of variation in the cross-sectional area of the perforations, ensuring greater absorption bandwidth throughout its variation. Finally, this work contributes to understanding the interference of microperforation shapes under the bandwidth of sound absorption in the AMM with coiled-up spaces.

Keywords Sound absorption · Absorption bandwidth · Reflection coefficient · Acoustic metamaterial · Arbitrary cross-section

1 Introduction

Microperforated panels (MPPs), acoustic metamaterials (AMMs) and acoustic metasurfaces (AMs) offer benefits in the reduce low-frequency noise and improve acoustic comfort in a variety of situations. AMMs and AMs are periodic structures that repeat a unit cell presenting unique properties and behaviors for long wavelengths and in general have sub-wavelength scale (i.e., structures has a total thickness much less than the acting wavelength). On the other hand, MPP are acoustic structures that usually demand larger scale due

their intrinsic cavities [1, 2]. Research and development of several models of these structures have been presented in recent decades, and studies based on the concept of coiled spaces with smaller volumes can be highlighted, which act efficiently at low frequencies [3–14].

The excellent performance of these sound absorbers is mainly due to two important characteristics: (1) total impedance matched with the exterior medium, thus allowing sound waves to enter the structure efficiently and avoiding sound reflections [15], and (2) efficiently conversion of sound energy into heat by viscous losses in the microperforations since the thermal losses are generally lower due to the simple geometries involved [16, 17]. In this sense, the visco-thermal effects influence the sound propagation in these microperforations and these effects behave differently for each type of microperforation [18–21].

In general, the total surface impedance of the MPPs, AMMs, and AMs mainly depends on the shape of the panel microperforations. Analytical and numerical studies were presented about the influence of microperforations with triangular, circular, square and irregular circular

Technical Editor: Samuel da Silva.

✉ Gildean do N. Almeida
gildean_fsa@hotmail.com

✉ Robson Z. Mikulski
robsonmklk@gmail.com

¹ Graduate Program in Mechanical Engineering, Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC 88040-970, Brazil

Low-frequency broadband sound absorption based on Cantor fractal porosity

Cite as: J. Appl. Phys. 133, 235103 (2023); doi: 10.1063/5.0150998

Submitted: 17 March 2023 · Accepted: 31 May 2023 ·

Published Online: 16 June 2023



Gildean do N. Almeida,^{1,a)} Erasmo F. Vergara,¹ Arcanjo Lenzi,¹ Álvaro S. Alves,² and José C. O. de Jesus³

AFFILIATIONS

¹Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brazil

²Physics Department at States University of Feira de Santana, Physics Project on Campus, Av. Transnordestina, S/N, Novo Horizonte, Feira de Santana, BA, Brazil

³Exact and Earth Sciences of Department, University of the State of Bahia, Campus I, Rua Silveira Martins, 2555, Cabula, Salvador, BA, Brazil

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed: gildean_fsa@hotmail.com

ABSTRACT

Proposals for new absorber designs for broadband sound absorption are of great interest due to their wide applicability in sound energy control. In this sense, the behavior of an acoustic absorber composed of a panel with slit-type perforations based on Cantor's fractal is presented. The analytical model for the fractal porosity of the absorber as a function of the initial geometric parameters, the number of iterations, and the fractal dimension was established. The behavior of broadband sound absorption was evaluated theoretically, numerically, and experimentally, in which the predominant total thermal-viscous dissipation in the region of perforations increases as the fractal porosity of the absorber decreases. Furthermore, an experimental broadband sound absorption of 692 Hz (from 382 to 1074 Hz) with a peak amplitude greater than 80% is obtained with the proposed structure presenting a sub-wavelength scale, i.e., $\lambda/27$. Finally, this work contributes to the understanding of the use of Cantor's fractal porosity in the proposal of new absorbers that allow broadband sound absorption at low frequency.

Published under an exclusive license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0150998>

I. INTRODUCTION

Broadband sound absorption in the mid- and high-frequency region is generally achieved using traditional acoustic materials (e.g., porous materials) since strongly intrinsic dissipation is guaranteed in these materials. On the other hand, for the low-frequency region (≤ 1200 Hz), this is an interesting and challenging task, especially when it is desired that the absorber presents effective energy dissipation and sub-wavelength scale; that is, its structure presents a total thickness much smaller than the acting wavelength. In recent years, different types of structures, such as acoustic metamaterials,^{1–7} acoustic metasurfaces,^{8–12} and the Helmholtz resonator with embedded necks,^{13–18} have been highlighted in these objectives.

Other types of structures that have been highlighted are the absorbers based on fractal geometry. By fractal geometry, we mean the geometry that describes a family of generated irregular fragments, which have self-similarity at different scales and a fractional

dimension D_f .^{19,20} For example, in the proposal of an acoustic metamaterial based on the fractal filling of Hilbert space and spiral geometry with equal tortuosity for noise mitigation, an increase in sound absorption according to the fractal order was demonstrated.³ Also noteworthy is a theoretical and experimental investigation of the acoustic properties: sound absorption coefficient and sound pressure, of a three-dimensional fractal based on the Menger sponge,²¹ in which the frequency range that absorbs sound waves is amplified with the degree of fractality.

A new type of absorber with the fractal distribution of Helmholtz resonator (HR) structures combined with a crossed micro-perforated panel has also been proposed for broadband sound absorption.²² The authors demonstrated the efficiency of the absorber mainly due to the frictional losses of the structure imposed in the energy of the acoustic waves. It is also noteworthy that through the mechanism of sound energy dissipation, a self-similar coiled fractal acoustic metamaterial was designed for the low-frequency noise control problem by combining a perforated

Broadband and low-frequency sound absorption of modified Helmholtz resonator combined with porous layer addition

Cite as: J. Appl. Phys. **132**, 135114 (2022); doi: [10.1063/5.0108807](https://doi.org/10.1063/5.0108807)

Submitted: 10 July 2022 · Accepted: 10 September 2022 ·

Published Online: 7 October 2022



E. F. Vergara,¹  G. N. Almeida,^{1,a)}  L. R. Barbosa,¹ A. Lenzi,¹ and A. Carvalho de Sousa²

AFFILIATIONS

¹Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil

²Institute of Astronomy, Geophysics and Atmospheric Sciences (IAG), University of São Paulo (USP), São Paulo, Brazil

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed: gildean_fsa@hotmail.com

ABSTRACT

In this work, a hybrid acoustic material (HAM) is designed for broadband and low-frequency sound absorption based on the combination of two different materials: a porous layer (melamine foam) and a modified Helmholtz resonator with embedded necks (HRENs). Theoretical predictions, numerical simulations, and experimental measurements are conducted to investigate the acoustic characteristics of the HREN. The HAM absorption mechanism is presented to evaluate the broadband sound absorption by the impedance matching effect of the different structures. The results of experimental tests confirmed that the HAM has broadband sound absorption and presented good agreement with an equivalent fluid model and numerical simulations. Broadband sound absorption was comparatively evaluated by the broadband factor (Q_a), revealing the advantages due to the possible configurations of HAM in relation to HREN and melamine foam. In addition, the selection and dimensions of the HREN holes and the perforation ratio, in the range of 3%–10%, allow the hybrid sound absorber to achieve one absorption peak between 235 and 582 Hz with quasi-total absorption ($\alpha \geq 0.8$). This work contributes to the understanding of sound wave propagation and broadband absorption in acoustic materials composed of different materials combined.

Published under an exclusive license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0108807>

I. INTRODUCTION

The control of sound energy is essential to mitigate noise and vibration effects on human health, which are often caused by long exposure. In this sense, the sound absorption coefficient (α) is an important parameter to evaluate the energy dissipation efficiency of a material, which is defined as the ratio of the absorbed sound to the incident sound energy.¹ Generally, traditional porous materials have an excellent control of this energy in the middle-to-high frequency region (≥ 1000 Hz).^{2–4}

For example, innovative porous micro-structure designs of metallic foams, with interconnected pores and porosity and the pore size distribution, have shown a significant impact on α .⁵ Ceramic and metallic porous materials can be used in different noise control devices due to their high acoustic performance and mechanical strength.^{6,7} Micro-perforated panels (MPPs) have also been used as a solution to improve α in both low and mid frequencies.^{8–12} Although effective, the MPPs demand much space due to their intrinsic cavities.

Other structures that have excelled in this effective control are the Helmholtz resonators with embedded necks (HRENs),^{13–18} which are thinner than the traditional Helmholtz resonator (HR); that is, they operate in a sub-wavelength regime. In order to simultaneously acquire perfect low-frequency and broadband sound absorption,^{19–21} we highlight the absorbers with gradually perforated porous materials structured by a Helmholtz resonant cavity²² and also the design of a double porosity material (DPM) composed of two types of porous, i.e., the traditional porous layer and the mesopore formed by a labyrinthine channel.²³ Absorbers designed with different materials are also other strategies in this sound control energy,^{24,25} and proposals for resonators that combine porous material to improve frequency bandwidth are highlighted.²⁶ The porous concrete sound absorbers can also be considered, in which different acoustic resonators are built in to acquire an increase of the sound absorption bandwidth,²⁷ in addition to micro-perforated panel type absorbers mounted with Helmholtz resonators.²⁸ Absorbers with hard-backed porous layers with periodically embedded air filled



Acoustic analysis of a metasurface for normal and random incidence sound waves

Gildean do N. Almeida^{a,*}, Erasmo F. Vergara^a, Leandro R. Barbosa^a, Arcanjo Lenzi^a, Paulo H. Mareze^b, Robert S. Birch^c

^a Graduate Program in Mechanical Engineering, Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil

^b Acoustical Engineering, Federal University of Santa Maria, Roraima Avenue 1000, Camobi, Santa Maria, RS, Brazil

^c School of Engineering, University of Liverpool, UK

ARTICLE INFO

Article history:

Received 17 May 2022

Received in revised form 3 August 2022

Accepted 1 September 2022

Available online 5 September 2022

Communicated by A. Das

Keywords:

Low-frequency absorption

Diffuse field

Radiation impedance

Input impedance

Acoustic metasurface

ABSTRACT

This article proposes an acoustic metasurface (AMS) capable of effectively absorbing sound frequencies in the range of 100–800 Hz. The input and airborne impedances are combined considering incident normal and oblique sound waves, and the sound absorption capacity is presented analytically and numerically. Results of 99% sound absorption under normal incidence are obtained experimentally. Considering the radiation impedance of the Thomasson and Paris' models the analytical study of the sound absorption of different samples of the absorber in diffuse field is discussed. The results are coherent and confirm the influence of the sample area on its acoustic performance. This approach provides a practical and reliable procedure for evaluating the behavior of the AMS in a reverberant sound field.

© 2022 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The desire to absorb a sound wave field effectively through absorbers with deep-subwavelength dimensions has aroused considerable interest from the scientific community [1,2]. This interest is motivated by the wide applicability that these absorbers allow, for example in the control of noise and vibrations, acoustic insulation throughout the entire frequency spectrum, innovative acoustic solutions in the industrial field, among others. These absorbers require not only that their geometric dimensions be reduced, but that they have an efficient capacity to convert sound energy directly into thermal energy or via viscous friction, as well as having an input impedance corresponding to that of the medium, thus avoiding sound reflections [3,4].

Conventional porous absorbers (e.g. cellular and fibrous) are efficient in the conversion of sound energy, however, as the wavelength of the incident wave increases, the impedance is not compatible with the impedance of the medium [5]. On the other hand, multilayer absorbers composed of perforated panels, air spaces and porous materials are efficient as the wavelength increases. However, these absorbers tend to be bulky structures and the absorption depends mainly on the quality of manufacture of the absorber.

In this way, the possibility of absorbing a sound wave field effectively as the frequency decreases gained greater notoriety with different acoustic metamaterials (AMM) [4–9] and acoustic metasurfaces (AMS) [10–13] being proposed. In deriving their characteristics and properties through the interaction between sound waves and specifically designed structures [14], AMM and AMS enabled a new perspective regarding the manipulation, mitigation and control of sound waves. In this sense, two considerations are important when outlining these structures: 1) the visco-thermal effects that affect the sound propagation in small spaces [15,16] and 2) the concept of convoluted or coiled spaces [17–21]. A highlight of the second consideration being the possibility to reduce the physical volume of the absorber structure, a feature used frequently in the design of AMM and AMS based on Fabry-Pérot (FP) channels [18].

However, due to the challenge of manufacturing a standard sample of AMM or AMS and evaluating their behavior in a diffuse field (ISO 354 [22]), the aforementioned works present only studies considering the incidence of normal and/or oblique waves. Therefore, characterizing the behavior of these absorbers in a diffuse field is still a challenge. In this sense, through the concept of radiation impedance it is possible to evaluate analytically the behavior of these absorbers in a diffuse field by considering finite samples according to the model of Thomasson [23] or infinite samples according to the model of Paris' [24], since the radiation

* Corresponding author.

E-mail address: gildean_fsa@hotmail.com (G. do N. Almeida).



A low-frequency sound absorber based on micro-slit and coiled cavity

Gildean do N. Almeida¹ · Erasmo F. Vergara¹ · Leandro R. Barbosa¹ · Arcanjo Lenzi¹ · Robert S. Birch²

Received: 19 May 2020 / Accepted: 1 December 2020 / Published online: 9 February 2021
 © The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 2021

Abstract

The design of a compact low-frequency acoustic absorber whose thickness is less than the operating frequency wavelength is a difficult challenge. However, recent developments in metamaterial engineering have enabled significant advances towards this goal. This paper presents an investigation of a low-frequency absorber (i.e., operating between 100 and 600 Hz) structured around a new concept of a thin cavity of coiled spaces coupled with a panel and micro-slit. The ability of this acoustic metamaterial absorber to control sound energy with increased relative bandwidth is examined analytically and numerically considering the viscous-thermal losses in both the micro-slit and coiled spaces. A prototype absorber was manufactured using advanced additive manufacturing technique and evaluated in an impedance tube apparatus. The experimental results showed the absorber capable of controlling 95% of the sound energy at 365 Hz with a relative bandwidth of 60.3%. These results compare well to those obtained from the analytical analysis and finite element method. Thus, the proposed acoustic absorber is shown to be capable of operating in the deep-subwavelength scale.

Keywords Low-frequency absorber · Coiled spaces · Acoustic metamaterial · Micro-slit · Visco-thermal effects

List of symbols

a	Width of a coiled spaces (m)
b_o	Internal separator wall thickness in the coiled spaces (m)
c_o	Speed of sound in air (m s^{-1})
C_v	Specific heat at constant volume (J/kg K)
d_f	Width or hydraulic diameter of the slit in the y -axis (m)
h	Thickness of the air cavity (m)
L	Height of a single cell (m)
L_{eff}	effective length of propagation (increase as n increase) (m)
L_f	Height of the slit in the x -axis (m)
m	Width of a single cell (m)

n	Number of coiled spaces
t	Thickness of the micro-slit panel (m)
T	Position of the micro-slit along the xy plane (m)
w	Height of the coiled spaces (m)
P_o	Atmospheric pressure (N m^{-2})

Greek symbols

η	Viscosity of air (Pa s)
ρ_o	Density of air (kg m^{-3})
ω	Angular frequency (rad/s)
κ	Thermal conductivity (W/m K)
ν	Kinematic viscosity of air ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
γ	Specific heat ratio
Θ	Porosity
σ	Perforation constant

Subscripts

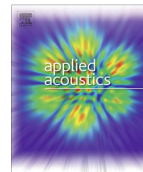
f	Refers to micro-slit
p	Refers to panel
s	Refers to surface to model
e	Indicates coiled spaces and elliptical integral
res	Refers to resistive
rea	Refers to reactive
eq	Indicates effective functions

Technical Editor: José Roberto de França Arruda.

✉ Gildean do N. Almeida
 gildean_fsa@hotmail.com
 Erasmo F. Vergara
 e.f.vergara@ufsc.br

¹ Graduate Program in Mechanical Engineering, Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis Campus, Florianópolis, SC 88040-970, Brazil

² School of Mechanical Engineering, University of Liverpool, Liverpool, UK



Sound absorption metasurface with symmetrical coiled spaces and micro slit of variable depth

Gildean do N. Almeida^{a,*}, Erasmo F. Vergara^a, Leandro R. Barbosa^a, Arcanjo Lenzi^a, Robert S. Birch^b

^a Graduate Program in Mechanical Engineering, Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil

^b School of Mechanical Engineering, University of Liverpool, UK

ARTICLE INFO

Article history:

Received 4 October 2020

Received in revised form 16 June 2021

Accepted 14 July 2021

Available online 27 July 2021

Keywords:

Low frequency sound absorption

Symmetrical coiled spaces

Variable depth micro slit

Visco-thermal dissipation

ABSTRACT

An acoustic metasurface (AMS) is proposed comprising a panel containing a micro slit of variable depth coupled to a thin cavity of symmetrical coiled spaces. Theoretical and numerical analyses are used to demonstrate that this metasurface has an effective low frequency sound absorption capability (i.e., between 100 Hz and 600 Hz) with a deep-subwavelength thickness. The mechanism underlying the sound absorption is explored by the different ways in which energy is dissipated in the absorber. It was observed that the dissipation of viscous energy takes place in the narrow region of the micro slit and represents 99.7% of the total energy dissipated while the thermal dissipation is 0.3% and occurs in the inner coiled spaces. Furthermore sound absorption of the AMS was investigated experimentally in an impedance tube for normal incidence. The results of the experimental work show that, by varying the depth of micro slit simultaneously with increasing the number of symmetrical coiled spaces, the peak frequency of the absorption can be shifted to a lower frequency without changing the total absorber thickness. A control of 93% of the sound energy, with a relative bandwidth of 50.4% in the frequency range of interest, was acquired with the proposed absorber presenting a thickness of $\lambda/48$. Furthermore, a coupled system was also evaluated experimentally which revealed the broadband absorption to be consistent with the theoretical model.

© 2021 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

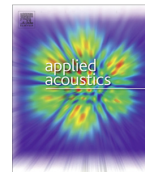
The feasibility of absorbing sound energy related to low frequencies (i.e., 100 Hz to 600 Hz) in confined spaces has proved to be challenging for engineers and designers. Conventional porous materials [1] and micro-perforated panels (MPPs) [2–6] are effective absorbers, but the overall thickness necessary to dissipate low frequency sound energy with these materials is large. Recently, acoustics metamaterials (AMM) [7–11] and acoustic metasurfaces (AMS) [12–15] have been proposed allowing the dissipation of sound waves and the improvement of acoustic absorption using less space. Due to their structure and compact geometry, the AMM and AMS have gained notoriety for their unique attributes and behavior in controlling low frequency sound, making them stand out in acoustic conditioning research. This paper considers AMS as compact structures specifically designed for the control and manipulation of sound waves [16].

An interesting characteristic that AMS exhibit is that of controlling the sound energy of low frequencies using structures that have a deep-wavelength thickness [17,18]. In order to obtain effective control of this energy, several types of structures have been proposed in recent years. Among these, Helmholtz (HR) resonators [8,10,13,19], membrane type resonators (MAMs) [20,21] and Fabry-Pérot (FP) channels [22] offer good design options. The concept of coiled spaces [11,23–25] has often been used in absorbers based on FP channels, since it considerably reduces the thickness of the absorber [26]. Zhang and Hu [27] proposed a fine structure based on the concept of coiled spaces and on visco-thermal losses (i.e., on the effects of viscous friction and thermal diffusion) which provided excellent sound absorption qualities with an increased relative bandwidth. Wu et al. [26] reported on a low frequency absorber based on a micro-perforated panel coupled to rolled FP type channels. Also noteworthy is the anechoic metasurface composed by FP type channels with a gradient cross-sectional area proposed by Shen et al. [28] with which an effective sound absorption at low frequencies could be achieved by adjusting the channels of the structure.

This work presents a study of the sound absorption characteristics of an acoustic metasurface of unit cells comprising a panel

* Corresponding author.

E-mail address: gildean_fsa@hotmail.com (G.do N. Almeida).



Low-frequency sound absorption of a metamaterial with symmetrical-coiled-up spaces

Gildean do N. Almeida ^{*}, Erasmo F. Vergara ^{*}, Leandro R. Barbosa, Ricardo Brum

Graduate Program in Mechanical Engineering, Laboratory of Vibrations and Acoustics, Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 15 February 2020

Received in revised form 29 June 2020

Accepted 10 August 2020

Available online 7 September 2020

Keywords:

Low-frequency sound absorption

Acoustic metamaterial

Subwavelength absorber

Symmetrical labyrinth

ABSTRACT

A theoretical, numerical and experimental investigation of a low-frequency acoustic absorber (100–600 Hz) is reported herein. The acoustic metamaterial is based on a micro-perforated panel coupled to a multi-cavity of coiled-up spaces that is similar to a symmetrical labyrinth. On considering the visco-thermal losses, the effect of increasing the number of symmetrically coiled-up spaces that determines the peak position of the sound absorption and allows a greater sound energy absorption is discussed theoretically and proven through numerical analysis (FEM). Prototypes were manufactured using 3D printing technology and evaluated in an impedance tube. The results for the sound absorption coefficient acquired in the desired frequency range were greater than 91% with relative bandwidth above 35%, in agreement with the analytical model. Therefore, it is demonstrated that the proposed absorber presents a scale of deep-subwavelength since its total thickness is 0.033λ .

© 2020 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

In the past two decades, the search for sound energy control in the most diverse everyday situations has motivated the research and development of new acoustic materials. In general, a variety of acoustic devices are used to acquire this control. Notable examples in this broad category are porous materials (e.g., cellular, fibrous and granular) and resonant devices, such as micro-perforated panels (MPP). However, the aforementioned porous materials present excellent sound absorption in the region of medium and high frequencies and low sound absorption in the region of low frequencies, since these materials require dimensions comparable to the operation wavelength [1,2,32]. On the other hand, MPP is a solution for the control of sound energy related to low frequencies, although these types of panels require an air cavity with large physical dimensions [3–6], which is not always possible in practice.

Alternatives for energy control associated with low frequencies (100–600 Hz) that have emerged recently are the acoustic metamaterials or metasurfaces, with enormous potential for application [7–13]. We consider metamaterials as periodic structures that present unique properties and behaviors for long wavelengths [14]. This unique behavior occurs when the metamaterial presents a total surface impedance corresponding to the impedance of the

medium, allowing the sound wave to pass efficiently into its interior [10]. In order to design a metamaterial efficiently, the visco-thermal characteristics, which affect the sound propagation in small spaces [15–17], as well as the concept of coiled-up spaces [18,19,33,34] have been found to be very useful. The concept of coiled-up spaces reduces the physical volume of the model to a deep-subwavelength scale and have been widely used in absorber based on Fabry-Pérot (FP) type channels [20,21].

Considering the concept of coiled-up spaces [21] and based on the design of micro-perforated panels [9,10,22], the aim of this study was to design and evaluate the behavior of an absorber metamaterial that occupies a small physical volume. The model is based on a micro-perforated panel coupled to a multi-cavity of coiled-up spaces, similar to a symmetrical labyrinth. The sensitivity analysis is conducted to determine the influence of the geometric parameters on the absorber behavior in the frequency range of 100 – 600 Hz. Lastly, numerical simulations using the finite elements method (FEM) and experimental evaluations in an impedance tube, applying the method of transfer functions to obtain the sound absorption coefficient of two proposed samples, are used to verify that good sound absorption, with broad bandwidth at low frequencies, is acquired.

2. Theoretical and numeric method

The sound absorber was comprised of a rigid panel containing a slit-type micro-perforation located in its geometrical center

^{*} Corresponding authors.

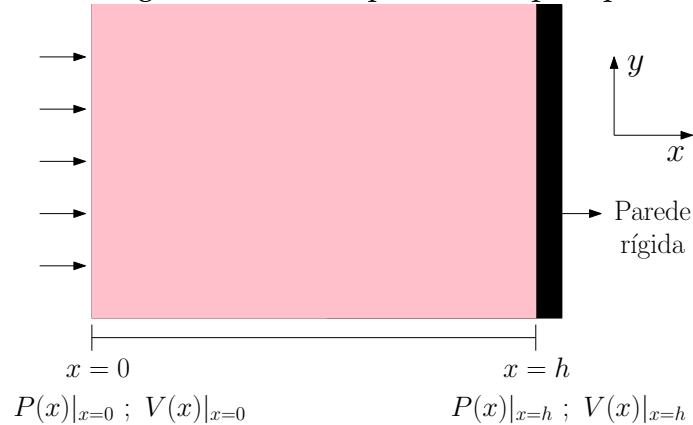
E-mail addresses: gildean_fsa@hotmail.com (G.d.N. Almeida), e.f.vergara@ufsc.br (E.F. Vergara).

Esta página foi deixada em branco intencionalmente!

Apêndice B: Coeficiente de reflexão via MMT

Em problema de reflexão um absorver genérico é apoiado numa estrutura cuja condição de contorno é rígida, conforme ilustrado na Figura B.1. Desta forma, considere ondas sonoras se propagam para frente na direção positiva de x . Em $x = h$ a velocidade de partículas é $V = 0$, visto que a impedância da estrutura tende ao infinito ($Z \rightarrow \infty$).

Figura B.1: Absorvedor genérico de comprimento h para problema de reflexão.



Fonte: O autor.

A pressão sonora P e a velocidade de partículas em $x = 0$ e $x = h$ podem se relacionar através da matriz de transferência T abaixo

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x=0} = T \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x=h} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}_{x=h}. \quad (244)$$

A partir da matriz acima obtém-se as seguintes relações

$$\begin{cases} P|_{x=0} = T_{11}P|_{x=h}, \\ V|_{x=0} = T_{21}P|_{x=h}. \end{cases} \quad (245)$$

A pressão sonora e a velocidade de partículas em $x = 0$ são obtidos, respectivamente, pelas Equações 143 e 144, as quais são declaradas abaixo,

$$P|_{x=0} = 1 + R^-, \quad (246)$$

$$V|_{x=0} = \frac{1 - R^-}{Z_0}. \quad (247)$$

Assim, a parte inferior da Equação 245 pode ser reescrita como,

$$T_{21}P|_{x=h} = \frac{1 - R^-}{Z_0}, \quad (248)$$

$$1 - R^- = T_{21}Z_0P|_{x=h}. \quad (249)$$

Pela parcela superior da Equação 245 tem-se que $P|_{x=h} = (P|_{x=0})/T_{11}$, substituindo na Equação 249, obtém-se

$$1 - R^- = \frac{T_{21}Z_0P|_{x=0}}{T_{11}}. \quad (250)$$

Como $P|_{x=0} = 1 + R^-$ (Equação 246), a Equação 250 pode ser escrita como,

$$1 - R^- = \frac{T_{21}Z_0(1 + R^-)}{T_{11}}. \quad (251)$$

Desenvolvendo a Equação 251 concluí-se que

$$R^- = \frac{T_{11} - T_{21}Z_0}{T_{11} + T_{21}Z_0}. \quad (252)$$

Semelhantemente, considerando ondas sonoras se propagando na direção negativa de x , o coeficiente de reflexão torna-se,

$$R^+ = \frac{T_{22} - T_{21}Z_0}{T_{22} + T_{21}Z_0}. \quad (253)$$

Apêndice C: Análise de convergência e Validação numérica: Vibra × Comsol

A análise de convergência do modelo numérico é apresentada aqui com base no modelo numérico proposto para o problema de reflexão. Como as geometrias propostas para este problema apresentam as menores dimensões geométricas, este modelo numérico requer uma melhor discretização do domínio afim de capturar adequadamente a física das perdas visco-térmicas e, conseqüentemente, o comportamento campo de velocidade. Diante disto, justifica-se o fato da convergência ser realizada somente para este problema. A análise qualitativa da convergência é apresentada Figura C.1, a mesma transcorre mediante o comportamento do coeficiente de absorção sonora de uma configuração do metamaterial proposto. Neste caso, o tamanho máximo do elemento foi mantido fixo pela regra $\lambda_{\max}/12$, por outro lado, o tamanho mínimo foi variado de 100 mm até 0,01 mm. Pode-se observar no detalhe da figura uma diferença de 6 Hz entre as curvas com malhas de 100 mm (552 Hz) e 10 mm (546 Hz), e uma convergência entre as curvas relativa às malhas de 1 mm, 0,1 mm e 0,01 mm para a frequência de 545 Hz. No geral a diferença máxima na amplitude entre as malhas é $\leq 1\%$. Ademais, a medida que o refinamento torna-se melhor o tempo de processamento aumenta, tornando o custo computacional oneroso, conforme demonstrado na Tabela T1. Por tanto, a partir desta análise, a malha com $\lambda_{\min} = 0,1$ mm foi a escolhida para apresentar os resultado numéricos neste trabalho.

Figura C.1: Análise de convergência da absorção sonora em função da malha.

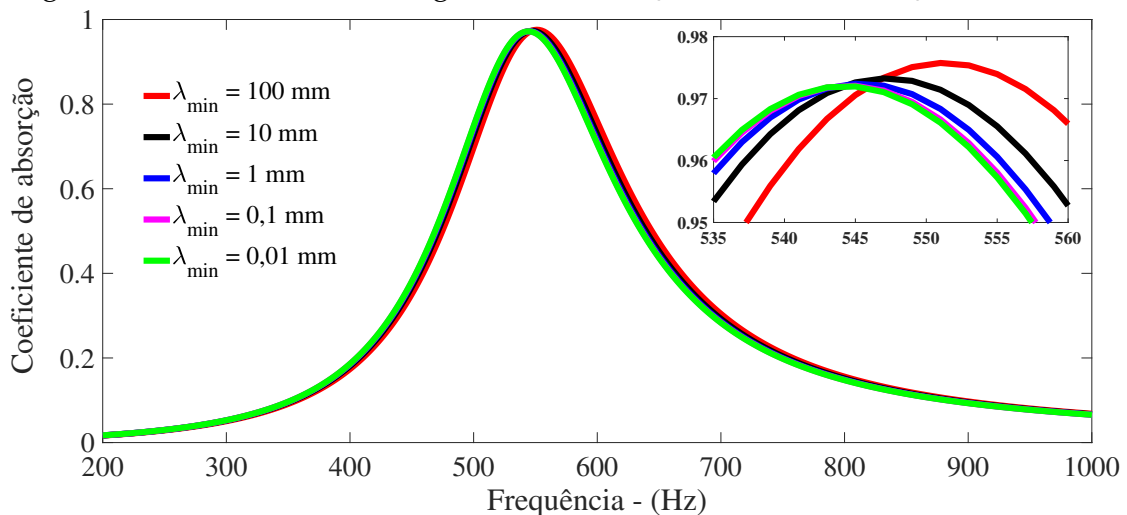
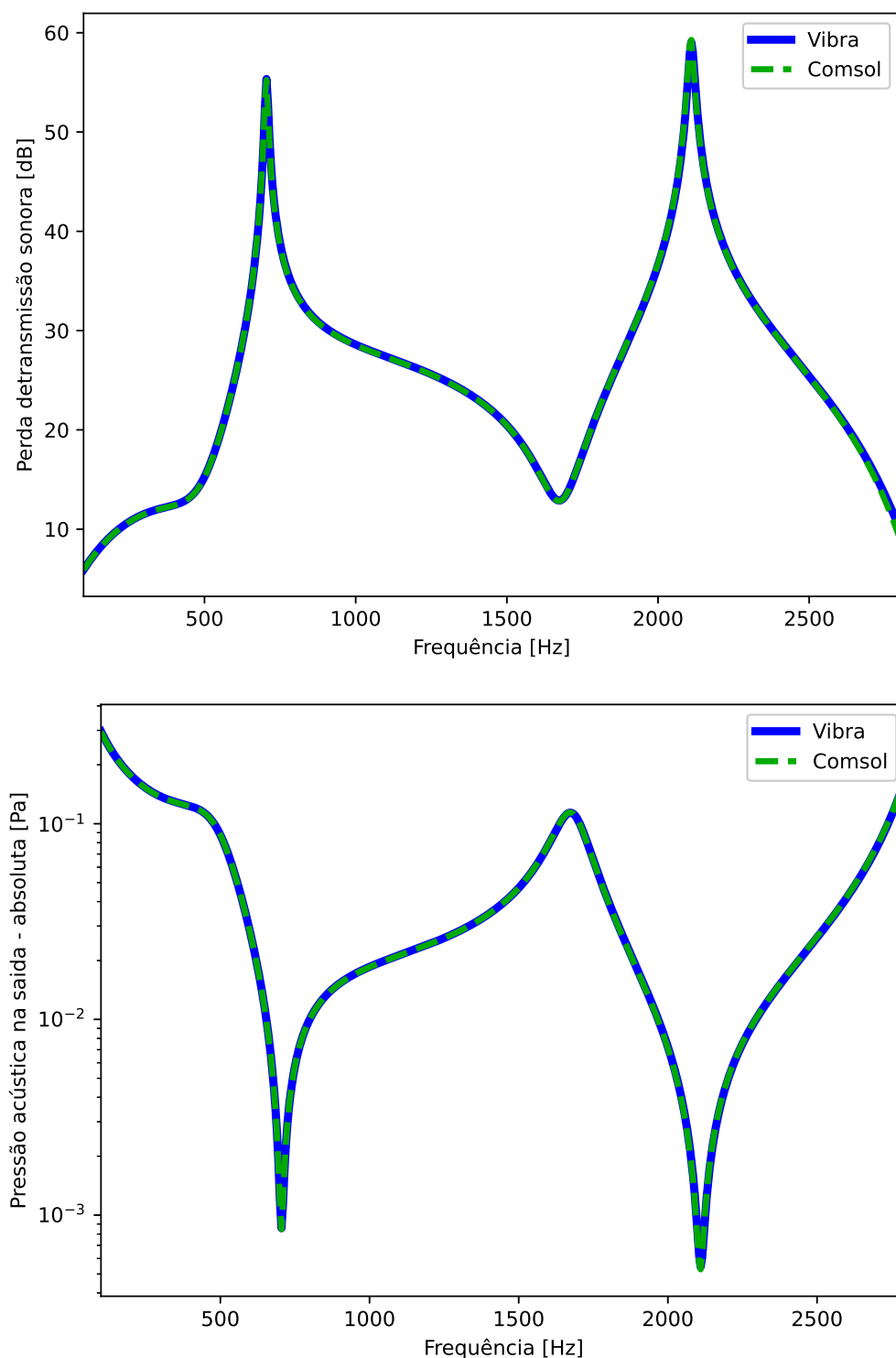


Tabela T1: Detalhes no estudo da convergência numérica.

Malha	100 mm	10 mm	1 mm	0,1 mm	0,01 mm
Tempo	6 min. 29 s.	8 min. 13 s.	12 min. 4 s.	18 min. 48 s.	35 min. 50 s.

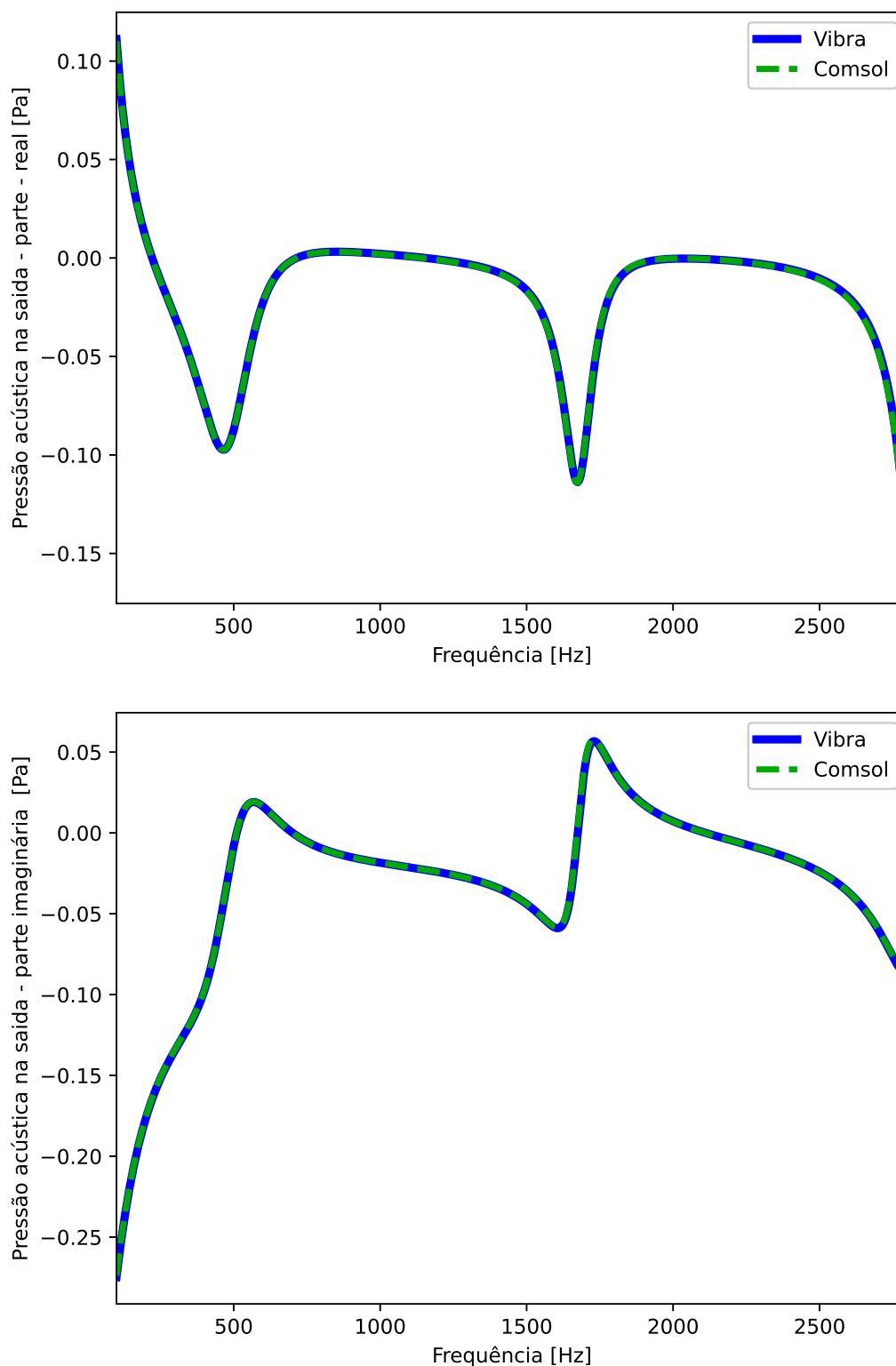
As validações entre o Vibra e COMSOL foram conduzidas sob a perspectiva de malha travada. Ou seja, a malha de um respectivo modelo geométrico era gerada no COMSOL em seguida exportada em formato NASTRAN e carregada no Vibra. Além disso, as mesmas condições de contorno e modelo de perdas visco-térmicas foram atribuídas nos *softwares*. A Figura C.2 ilustra a convergência do comportamento da PTS e pressão sonora (valor absoluto) de uma configuração do MA em ambos os *softwares*.

Figura C.2: Comportamento da PTS e pressão sonora (valor absoluto) na saída do MA.



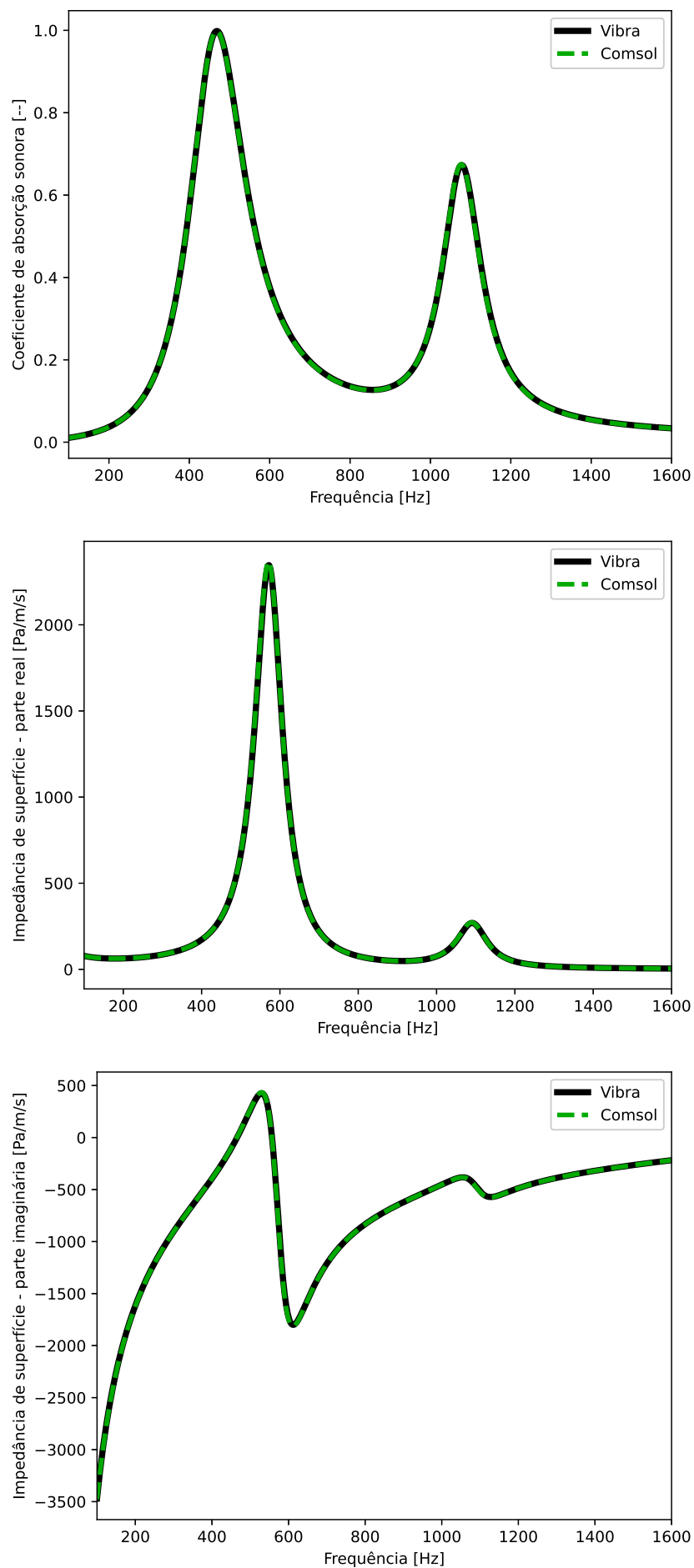
A Figura C.3 mostra a convergência do comportamento das componentes real e imaginária da pressão sonora na saída do MA.

Figura C.3: Comportamento da pressão sonora na saída do MA.



Já a Figura C.4 representa a concordância do comportamento do coeficiente de absorção sonora e das componentes da impedância de superfície não normalizada de uma configuração do MA em ambos os *softwares*.

Figura C.4: Comportamento do coeficiente de absorção e da impedância de superfície.



Por fim, a Figura C.5 representa os resultados do comportamento do coeficiente de absorção sonora, das componentes da impedância de superfície normalizada e campo de pressão acústica de uma configuração do MA em ambos os *softwares*.

Figura C.5: Comportamento do coeficiente de absorção sonora, impedância de superfície normalizada e pressão acústica.

