UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Evandir Krummenauer

Princípio de Cavalieri: uma proposta de sequência didática

Blumenau
2025

Evandir Krummenauer

Princípio de Cavalieri: uma proposta de sequência didática

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.

Blumenau
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Krummenauer, Evandir
Princípio de Cavalieri: uma proposta de sequência didática / Evandir Krummenauer ; orientadora, André Vanderlinde da Silva, 2025.
55 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Blumenau, 2025.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria Espacial . 3. Volume dos sólidos geométricos. 4. O uso de material manipulável. 5. Princípio de Cavalieri. I. Silva, André Vanderlinde da. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

Evandir Krummenauer

Princípio de Cavalieri: uma proposta de sequência didática

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Bruno Tadeu Costa, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Rafael dos Reis Abreu, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eleomar Cardoso Junior
Data: 15/12/2025 19:59:44-0300
CPF: ***.666.459-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Andre Vanderlinde da Silva
Data: 15/12/2025 18:22:50-0300
CPF: ***.081.099-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Orientador

Blumenau, 2025.

Dedico este trabalho ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo, a minha família em especial aos meus pais, Armário Krummenauer e Olga O. Krummenauer a quem devo todos os ensinamentos de fé em Deus que trago comigo e à minha amada esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida, fé, perseverança, pela saúde, sabedoria, pois sem Ele, sequer eu chegaria até aqui. A minha família, em especial, à minha mãe Olga O. Krummenauer e ao meu pai Arnácio Krummenauer que me ensinaram no Caminho que é Cristo Jesus, e meus Irmãos que sempre me apoiaram em cada etapa da minha vida. A minha esposa Elizangela cuja caminhada esteve comigo incentivando e apoiando. Ao meu orientador Professor Dr. André Vanderlinde da Silva pelas valiosas contribuições, paciência e orientações ao longo do desenvolvimento da pesquisa.Também agradeço aos professores do curso e à coordenação do PROFMAT da UFSC, Câmpus Blumenau - SC.

Enfim, sou grato a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho e a este momento especial da minha vida. Muito Obrigado!

"Porque o Senhor dá a sabedoria, e da sua boca vem o conhecimento e o entendimento."
(BÍBLIA SAGRADA, Pv 2:6)

RESUMO

A pesquisa intitulada “Princípio de Cavalieri: uma proposta de sequência didática” propõe, a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem com Materiais Manipuláveis, uma sequência didática para o ensino do conceito de volume aos alunos do Ensino Médio. Como alternativa ao método tradicional de ensino, a proposta metodológica visa trazer mais significado à aprendizagem, diante da experimentação, visualização de aprendizagens concretas e da construção ativa do conhecimento. Os objetivos principais desta investigação incluem: construir materiais manipuláveis para o ensino sobre o volume, baseando-se no Princípio de Cavalieri; e criar uma oficina que possa ajudar os estudantes a compreender e calcular volumes usando recursos didáticos. Nossa pesquisa resultou num roteiro de oficinas. A partir desse método, os estudantes envolvem-se na construção do conhecimento permitindo um estudo mais acessível e dinâmico da Geometria Espacial. Espera-se que a pesquisa possa colaborar na compreensão do conteúdo, especialmente no que diz respeito ao conceito de volume. Além disso, o trabalho lança um olhar crítico sobre a metodologia do ensino de Matemática, e a construção ativa do conhecimento como caminhos para uma aprendizagem mais eficaz.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Sólidos Geométricos. Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT

The research entitled “Cavalieri’s Principle: a proposal for a didactic sequence” aims to develop a didactic sequence for teaching the concept of volume to high school students, grounded in the Teaching-Learning Methodology with Manipulative Materials. As an alternative to traditional instructional approaches, the proposed methodology seeks to enhance the meaningfulness of learning by emphasizing experimentation, the visualization of concrete concepts, and the active construction of knowledge. The primary objectives of this study include the development of manipulative instructional materials for teaching volume based on Cavalieri’s Principle, and the design of a workshop intended to support students in understanding and calculating volumes through the use of didactic resources. As an outcome of this investigation, a structured workshop guide was developed. This pedagogical approach encourages student engagement in the construction of mathematical knowledge, thereby promoting a more accessible and dynamic exploration of Solid Geometry. It is anticipated that this research will contribute to a deeper understanding of the subject matter, particularly concerning the concept of volume. Moreover, the study offers a critical perspective on current methodologies in mathematics education and advocates for the active construction of knowledge as a means to foster more effective and meaningful learning processes.

Keywords: Solid Geometry. Geometric Solids. Manipulable Materials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), em sua mais recente edição, no ano de 2022, revelou dados preocupantes a respeito do ensino de Matemática no Brasil (BRASIL, 2024). A pontuação de proficiência em Matemática dos estudantes brasileiros foi 379 pontos, dado inferior à média dos estudantes dos países membros do OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), que foi 472 pontos. Esse resultado é ainda inferior ao número apresentado pelos estudantes brasileiros em 2018, de 384 pontos. Além disso, desde 2009, o desempenho do Brasil, na disciplina de Matemática, apresenta tendência de queda.

Esse cenário de defasagem na aprendizagem matemática também é evidenciado pelas provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Esses resultados evidenciam a urgência de repensar as políticas educacionais e as práticas pedagógicas, a fim de melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem no Brasil. O último resultado obtido para a Matemática, referente à avaliação aplicada em 2023, especialmente para estudante do 3º ano do Ensino Médio, indica uma leve recuperação chegando a 271,9 pontos. Ao contrário de 2021, em que a média foi de 269,7 pontos, segundo o SAEB (BRASIL, 2023).

Diante deste cenário, são necessárias iniciativas que buscam a qualificação do Ensino de Matemática. O Ministério da Educação (MEC), em 2024, informa que estudantes de 15 anos têm mais facilidade quando a Matemática envolve diretamente atividades cotidianas, da qual podem fazer parte familiares e colegas. Problemas como preparação de refeições, jogos, saúde ou finanças pessoais são situações mais facilmente “matematizadas” e resolvidas autonomamente.

Ainda, no âmbito do ensino, o documento norteador da Educação Básica Brasileira, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), afirma que os estudantes devem aplicar as habilidades matemáticas em contextos reais, bem como, estar preparados para desafios concretos na vida acadêmica e profissional. É importante a abordagem dos conteúdos com metodologias adequadas à área e que tenham sentido e significado para o discente (BRASIL, 2018).

O professor de Matemática detém o conhecimento, todavia, isso pode não ser suficiente. Dar significado aos conceitos, contextualizar as ideias, pensar em estratégias alternativas, podem colaborar no processo.

> Cabe ao educador não apenas apresentar os elementos a serem conhecidos, mas despertar, como frequentemente é necessário, e acompanhar o interesse dos educandos pelo conhecimento. A partir disso, o educando deve construir propriamente o conhecimento, até chegar a elaborar e expressar uma síntese dele. (VASCONCELLOS, 1992, p.03)

Diante disso, percebemos que a educação não é um bolo pronto. O professor precisa verificar e analisar todos os ingredientes.

> A educação contemporânea busca um educador que faça com que seus alunos sejam desafiados com estratégias variadas de aprendizagem, nos processos de educar e principalmente na prática de ensinar. Diante das dificuldades de encontrar estratégias facilitadoras no processo de ensino, pode-se tornar uma ferramenta estratégica para o ensino-aprendizagem. (GUATURA, 2016, p.30)

Percebe-se a necessidade de explorar métodos pedagógicos que poderiam contribuir para a melhor compreensão da Matemática. Nessa direção, este trabalho tem como objetivo propor práticas para o ensino de conteúdos do campo da Geometria. O cálculo do volume está presente tanto em algumas atividades corriqueiras, tais como abastecer o carro, quanto em atividades mais complexas, tais como pintar um imóvel e nas diversas áreas da engenharia. No ambiente em que vivemos, é possível observar uma esplêndida variedade de formas geométricas na natureza, nas diferentes formas de expressões artísticas, na construção civil etc. Além disso, a Geometria exerce um papel fundamental na formação do raciocínio lógico e criatividade do estudante, possibilitando-lhe entender e representar o mundo que o rodeia.

1.1 OBJETIVOS

A seguir, estão o objetivo geral e os objetivos específicos deste trabalho.

1.1.1 Objetivo Geral

Abordar o ensino do conceito de volume e o Princípio de Cavalieri, para estudantes do Ensino Médio, com o uso de Materiais Manipuláveis.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Estudar a fundamentação teórica relativa à Geometria Espacial e ao uso de Materiais Manipuláveis;
2. Elaborar modelos de materiais manipuláveis;
3. Propor uma sequência didática, com o uso de Materiais Manipuláveis, para o ensino do conceito de volume e do Princípio de Cavalieri.

1.2 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Referente ao objetivo geral, o problema de pesquisa se traduz na seguinte questão: como abordar o cálculo do volume dos sólidos para estudantes do Ensino Médio usando o Princípio de Cavallieri, com o uso de Materiais Manipuláveis?

Para responder à questão acima, este trabalho está delineado em cinco capítulos. O primeiro fornece uma introdução ao tema, expondo os objetivos (geral e específicos) e o contexto. No segundo, são apresentados alguns sólidos geométricos

(Prismas, Pirâmides, Cilindros, Cone e Esfera) e seus elementos. O terceiro capítulo aprofunda a discussão da noção de volume com a apresentação do Princípio de Cavalieri e a aplicação deste nas demonstrações das fórmulas para os cálculos de volume. O quarto capítulo se concentra na abordagem dos materiais manipuláveis, a partir do conhecimento histórico, exemplos de alguns materiais existentes, o papel do professor em sala de aula na interação com os materiais, e as potencialidades do uso dos manipuláveis. No quinto capítulo é discutida a sequência didática e o detalhamento da trajetória do planejamento do recurso didático. Para encerrar este trabalho, são apresentadas as considerações, retomando os principais aspectos discutidos ao longo da dissertação e sugerindo futuros caminhos para aprofundamento e exploração.

2 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

A seguir, são detalhadas as figuras geométricas espaciais (poliedros e corpos redondos) estudadas nesta pesquisa. As referências para este capítulo são Lima (2011) e Muniz Neto (2013).

2.1 POLIEDROS

A palavra "poliedro" deriva do grego e significa "muitas faces poligonais". Mais precisamente, um *poliedro* é um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste da união de um número finito de polígonos satisfazendo as seguintes condições:

(i) dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano;

(ii) a interseção de dois polígonos é vazia ou é um vértice comum aos dois ou é um lado (aresta) comum aos dois;

(iii) cada lado (aresta) de um polígono é lado de exatamente mais um outro polígono.

Em síntese, os poliedros são limitados por polígonos planos (faces) cujos lados (arestas) são os segmentos de reta resultantes da interseção entre as faces, e os vértices são os pontos onde as arestas se encontram. Alguns exemplos de poliedros são os prismas, as pirâmides, os poliedros de Platão (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Nas seções seguintes, apresentaremos os poliedros necessários para o desenvolvimento desta pesquisa.

Prisma

Sejam α e β dois planos distintos e paralelos e $n \geq 3$ um número natural. Considere os polígonos convexos $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$ tais que:

(i) $A_1A_2 \cdots A_n \subset \alpha$ e $B_1B_2 \cdots B_n \subset \beta$;

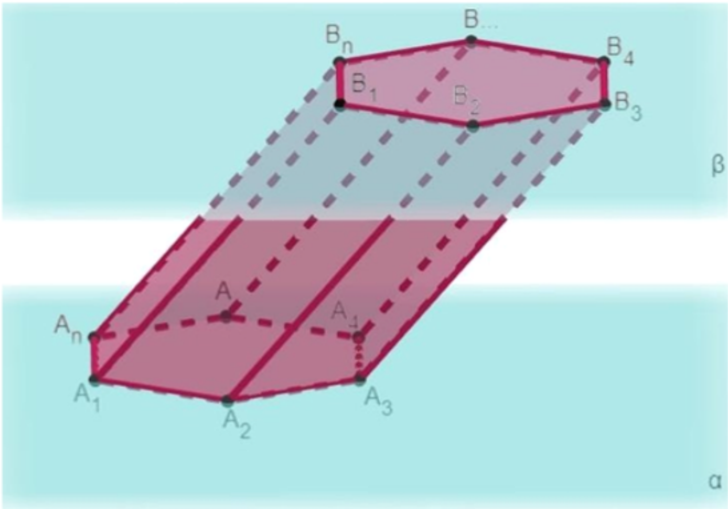
(ii) A_1B_1, A_2B_2, $\cdots$, A_nB_n são paralelos.

Segue que os polígonos $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$ são congruentes e $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$, para $1 \leq i \leq n$, são paralelogramos[1]. O *prisma de bases* $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$ é a porção limitada do espaço, delimitada pelos polígonos $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$ e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$, para $1 \leq i \leq n$.

Os pontos A_1, A_2, $\cdots$, A_n, B_1, B_2, $\cdots$, B_n são os vértices do prisma, os segmentos A_1B_1, A_2B_2, $\cdots$, A_nB_n, A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, A_nA_1 e B_1B_2, B_2B_3, $\cdots$, B_nB_1 são as arestas, os polígonos $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$ são as bases do prisma e os n paralelogramos $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$, para $1 \leq i \leq n$, são as faces laterais. Um exemplo de um prisma está apresentado na Figura 1.

[1] Considere $A_{n+1} = A_1$.

Figura 1 – Ilustração do prisma e seus elementos



Fonte: Elaborada pelo autor.

A nomenclatura dos prismas é baseada na quantidade de lados das bases. Por exemplo, um prisma cuja base seja um pentágono é denominado um prisma pentagonal. Além da característica relacionada à base, os prismas podem ainda ser classificados como *prismas retos* quando as arestas laterais forem perpendiculares às bases e *prismas oblíquos* quando arestas laterais forem inclinadas.

Antes de encerrar esta subseção, apresentamos o *paralelepípedo*, um prisma em que todas as faces (bases e laterais) são paralelogramos. Quando as faces laterais forem retangulares, temos um *paralelepípedo reto*, e se tanto as bases quanto as faces forem retangulares, temos um *paralelepípedo reto retângulo (ou bloco retangular)*. Quando um paralelepípedo reto retângulo tiver todas as arestas de mesma medida, temos um *cubo*.

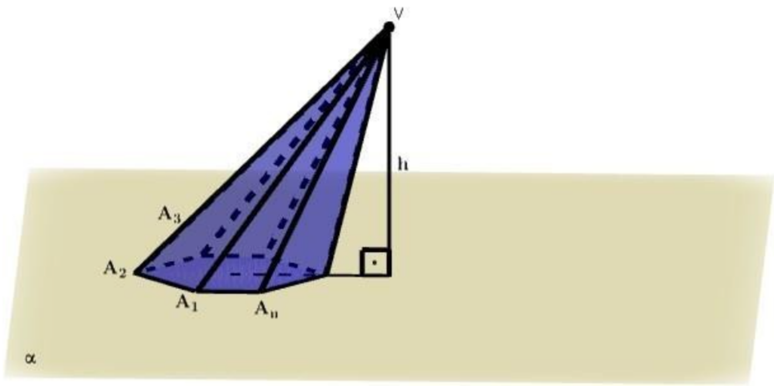
Pirâmide

Sejam α um plano, $V \notin \alpha$ um ponto, $n \geq 3$ um número natural e $A_1A_2 \cdots A_n$ um polígono convexo contido em α. A *pirâmide* $VA_1A_2 \cdots A_n$, de vértice V e de base $A_1A_2 \cdots A_n$, é a porção limitada do espaço, delimitada por $A_1A_2 \cdots A_n$ e pelos triângulos VA_1A_2, VA_2A_3, $\cdots$, VA_nA_1.

Os pontos V, A_1, A_2, $\cdots$, A_n são os vértices da pirâmide, os segmentos VA_1, VA_2, $\cdots$, VA_n e A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, A_nA_1 são as arestas, e o polígono $A_1A_2 \cdots A_n$ e os triângulos VA_1A_2, VA_2A_3, $\cdots$, VA_nA_1 são as faces da pirâmide. O polígono $A_1A_2 \cdots A_n$ é comumente denominado como a base (da pirâmide). A Figura 2 ilustra uma pirâmide e seus elementos.

A nomenclatura das pirâmides também depende da forma da base. Caso a base seja um pentágono, teremos uma pirâmide de base pentagonal. No caso particular de

Figura 2 – Ilustração da pirâmide e seus elementos



Fonte: Elaborada pelo autor.

uma pirâmide triangular em que todas as arestas possuem a mesma medida, temos que todas as faces são triângulos equiláteros e essa pirâmide é o *tetraedro regular.*

2.2 CORPOS REDONDOS

Os corpos redondos são sólidos geométricos que são parcialmente ou inteiramente limitados por superfícies curvas. Os mais importantes são: o cilindro, o cone e a esfera.

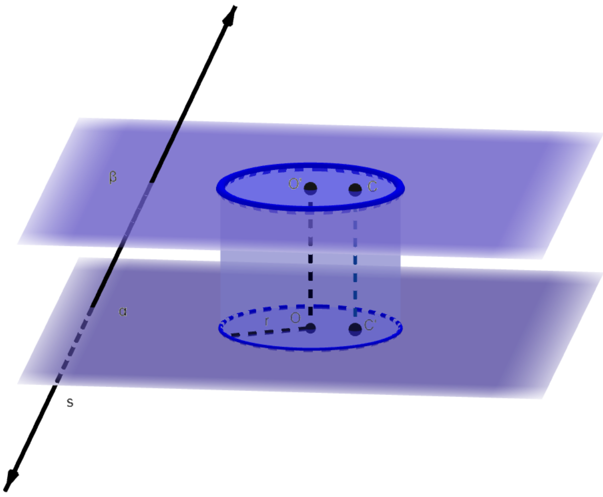
Cilindro

Sejam α e β dois planos distintos e paralelos, os pontos $O \in \alpha$ e $O' \in \beta$ e $r > 0$ um número real. Considere o círculo $\lambda(O,r)$ de centro O e raio r contido no plano α e o círculo $\lambda'(O',r)$ de centro O' e raio $r > 0$ contido em β. O *cilindro* determinado por $\lambda(O,r)$ e $\lambda'(O',r)$ é união dos círculos $\lambda(O,r)$ e $\lambda'(O',r)$ com os segmentos paralelos e congruentes ao segmento OO' com uma extremidade em $\lambda(O,r)$ e outra extremidade em $\lambda'(O',r)$. Um exemplo de um cilindro está apresentado na Figura 3. Note que o segmento CC' é tal que $C \in \lambda(O,r)$ e $C' \in \lambda'(O',r)$.

Os círculos $\lambda(O,r)$ e $\lambda'(O',r)$ são as bases do cilindro, e os segmentos congruentes e paralelos a OO' com uma extremidade em $\lambda(O,r)$ e outra extremidade em $\lambda'(O',r)$ são conhecidos como geratrizes. A inclinação das geratrizes é usada para a nomenclatura dos cilindros. De fato, um *cilindro oblíquo* é aquele cujas geratrizes são oblíquoas em relação aos planos das bases, e um *cilindro reto* é aquele cujas geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

Os cilindros retos são também chamados de *cilindros de revolução*. Intuitivamente, os cilindros de revolução são obtidos ao girar um retângulo em torno de um dos lados do próprio retângulo. No caso em que a altura de um cilindro reto for igual

Figura 3 – Ilustração do cilindro e seus elementos



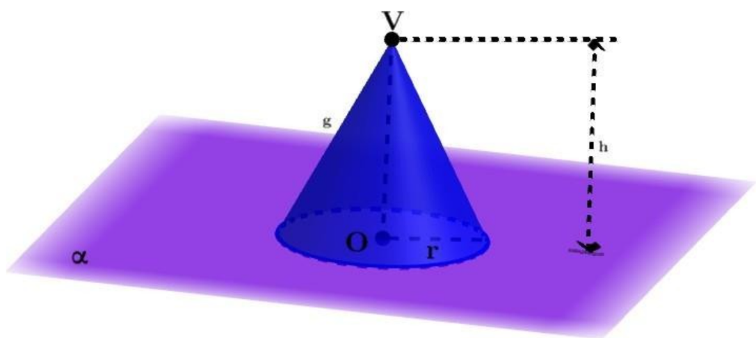
Fonte: Elaborada pelo autor.

ao diâmetro da base, temos o *cilindro equilátero.*

Cone

Dado um plano α, um ponto $V \notin \alpha$, um número real $r > 0$ e um círculo $\lambda(O,r)$ de centro O e raio r contido em α, o *cone* determinado por $\lambda(O,r)$ e V é a união do círculo $\lambda(O,r)$ com os segmentos com uma extremidade em V e a outra extremidade em $\lambda(O,r)$. O ponto V é o vértice do cone e o círculo $\lambda(O,r)$ é a base. Os segmentos com uma extremidade em V e a outra extremidade na circunferência que limita $\lambda(O,r)$ são as geratrizes. A altura do cone é a menor distância entre o vértice V e o plano α. A Figura 4 ilustra um cone e seus elementos.

Figura 4 – Ilustração do cone e seus elementos



Fonte: Elaborada pelo autor.

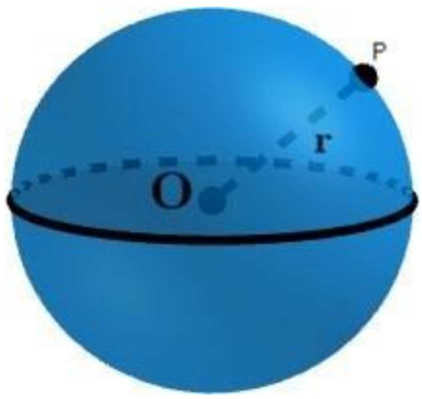
A inclinação do segmento OV é usada na nomenclatura dos cones. De fato, em um *cone oblíquo*, o segmento OV não é perpendicular ao plano da base, enquanto que em um *cone reto*, o segmento OV é perpendicular ao plano da base.

Todos os cones retos são também denominados *cones de revolução*. Intuitivamente, os cones de revolução são obtidos ao girar um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. No caso em que a geratriz de um cone reto for igual ao diâmetro da base, temos um *cone equilátero.*

Esfera

Dado um ponto O do espaço e $r > 0$ um número real, a *esfera* $S(O,r)$ de centro O e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que o comprimento de $OP \leq r$. O ponto O é denominado o centro da esfera e r é o raio. Geometricamente, a esfera pode ser visualizada como o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro. A Figura 5 ilustra uma esfera e seus elementos.

Figura 5 – Ilustração da esfera e seus elementos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que as esferas são sólidos geométricos diferentes dos outros sólidos apresentados até o momento. De fato, as esferas não possuem vértices ou arestas, não tem parte plana em sua superfície, e as suas partes visível e não-visível apresentam sempre a mesma forma, qualquer que seja a posição que a observemos (PEREIRA, 2017, p.52).

3 PRINCÍPIO DE CAVALIERI E O CÁLCULO DE VOLUMES

De uma maneira bem intuitiva, o volume de um sólido é a quantidade de espaço ocupado por ele. Por exemplo, considere um balde e uma caneca. Notavelmente, a capacidade da caneca é menor que a do balde. Encha a caneca de água e derrame dentro do balde. É necessário repetir essa ação várias vezes até que o balde esteja completamente cheio. Como resultado, temos um processo que nos possibilita fazer uma medida da capacidade do balde em relação à capacidade da caneca. A quantidade de canecas que foram necessárias para encher o balde é um número inteiro. Se na última caneca restar uma fração de água, podemos recorrer a um outro sólido de menor volume. Esse exemplo serve, intuitivamente, para ilustrar a ideia de volume, isto é, a quantidade de canecas de água necessárias para encher o balde.

É crucial observar que esse processo, em certo sentido, se limita ao exemplo supracitado ou a casos comparativamente equivalente, pois em outras situações pode tornar-se inviável. Por exemplo, ao medir o volume de uma piscina, a caneca é insignificante (o número de canecas para encher a piscina seria muito grande). Ou, ainda, a caneca poderia se tornar muito grande caso fosse necessário medir o volume da cápsula de um medicamento, ou inutilizável quando compararmos o balde com o volume de uma barra de aço.

Desta maneira, para um estudo mais abrangente, devemos estabelecer uma noção clara de volume e que seja independente dos objetos usados para medi-los. Neste capítulo, introduziremos uma noção de volume e calcularemos os volumes dos sólidos apresentados no capítulo anterior: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. As referências para este capítulo são Lima (2011) e Muniz Neto (2013).

3.1 DEFINIÇÃO DE VOLUME

O *volume* de um sólido $\mathcal{S}$, denotado por Volume($\mathcal{S}$), é um número real positivo satisfazendo:

Axioma 3.1 *Se $\mathcal{S}$ for um cubo de aresta 1, então*

$$\textit{Volume}(\mathcal{S}) = 1.$$

Axioma 3.2 *Se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ forem sólidos tais que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ e*

$$\textit{Interior}(\mathcal{S}_1) \cap \textit{Interior}(\mathcal{S}_2) = \emptyset,$$

então

$$\textit{Volume}(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = \textit{Volume}(\mathcal{S}_1) + \textit{Volume}(\mathcal{S}_2).$$

Axioma 3.3 *Se $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ forem sólidos tais que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, então*

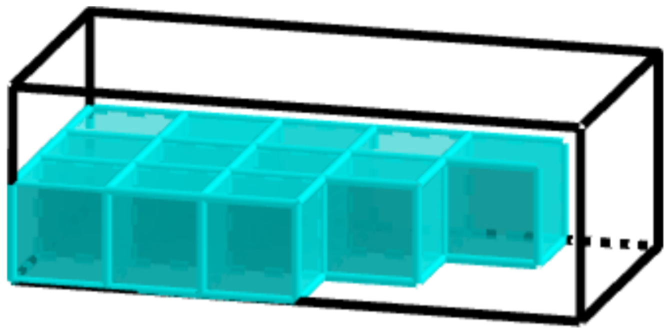
$$\textit{Volume}(\mathcal{S}_1) \leq \textit{Volume}(\mathcal{S}_2).$$

Axioma 3.4 *Se* $\mathcal{S}_1$ *e* $\mathcal{S}_2$ *forem congruentes, então Volume*$(\mathcal{S}_1)$ = *Volume*$(\mathcal{S}_2)$.

Observação 3.1 *A definição axiomática de volume estará completa quando for adicionado o Princípio de Cavalieri.*

De acordo com o Axioma 3.1, a unidade de volume é o cubo de aresta 1. Nesse caso, uma primeira estratégia para o cálculo do volume de um sólido geométrico é encaixar vários sólidos padrão (cubo com arestas unitárias) dentro do sólido. Este é caso ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Comparação entre o volume de um sólido e o cubo unitário



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como os sólidos podem ter diversas formas, em geral, não é possível contar o número de cubos necessários para completar o sólido. Nesses casos, estrategicamente, podemos simplificar os sólidos usando o Axioma 3.2 ou estimar o volume usando o Axioma 3.3.

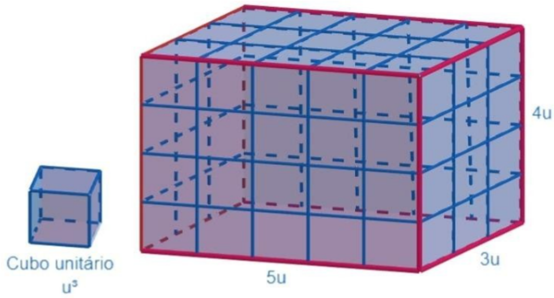
3.2 VOLUME DO BLOCO RETANGULAR

Inicialmente, vamos calcular o volume de um bloco retangular em que $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$ unidades de comprimento, como mostra a Figura 7.

Observe que a quantidade de cubos unitários que cabem dentro do bloco retangular é o produto de 5.3.4. Por isso, é intuitivo assumir que o volume de um bloco retangular será o produto das suas dimensões, ou seja, o produto do comprimento a, pela largura b pela altura c.

Este é o caso, por exemplo, quando as medidas das arestas são números racionais. De fato, se as arestas forem divididas em uma quantidade inteira de segmentos de uma medida fixada, o volume será o produto de suas dimensões. Por exemplo, se as arestas de um bloco retangular medirem $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{4}{3}$ e $c = \frac{1}{5}$, podemos dividir o lado a em 75 segmentos de medida $\frac{1}{30}$, o lado b em 40 segmentos de medida $\frac{1}{30}$ e o

Figura 7 – Ilustração do volume do bloco retangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

lado c em 6 segmentos de medida $\frac{1}{30}$. Note que, neste caso, um cubo unitário estaria dividido em $\frac{1}{30^3}$ cubos de aresta medindo $\frac{1}{30}$ (cubo pequeno). Portanto, o volume de cada um destes cubos pequenos é $\frac{1}{30^3}$. Como cabem $18000 = 75 \times 40 \times 6$ cubos pequenos dentro do bloco retangular de arestas $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{4}{3}$ e $c = \frac{1}{5}$, então o volume do bloco retangular é

$$18000.\frac{1}{30^3} = \frac{18000}{27000} = \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5},$$

isto é, o volume do bloco retangular de arestas $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{4}{3}$ e $c = \frac{1}{5}$ é $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$.

Ainda é necessário esclarecer o caso em que as medidas das arestas do bloco retangular podem ser números irracionais. Este é o conteúdo do seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Se $B(a,b,c)$ for um bloco retangular de dimensões $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$, então*

$$Volume(B(a,b,c)) = a.b.c.$$

Demonstração: Suponha, por contradição, que

$$v := \text{Volume}(B(a,b,c)) < abc. \tag{1}$$

Existem $r,s,t \in \mathbb{Q}$ tais que $r < a$, $s < b$, $t < c$ e

$$v < rst < abc \tag{2}$$

A existência de $r,s,t \in \mathbb{Q}$ será verificada na Observação 3.2. Seja $B(r,s,t)$ o bloco retangular cujas arestas medem $r,s,t \in \mathbb{Q}$. Sabemos que

$$\text{Volume}(B(r,s,t)) = rst.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $B(r,s,t) \subset B(a,b,c)$. Segue do Axioma 3.3 que

$$rst = \text{Volume}(B(r,s,t)) < \text{Volume}(B(a,b,c)) = v, \text{ isto é, } rst < v. \tag{3}$$

Note que (3) contradiz (2) e, portanto, (1) não pode ser válida. Analogamente,

$$\text{Volume}(B(a,b,c)) > abc$$

não é válida e, consequentemente,

$$\text{Volume}(B(a,b,c)) = abc.$$

■

Observação 3.2 *Vamos provar que se $v < abc$, existem $r,s,t \in \mathbb{Q}$ tais que $r < a$, $s < b$, $t < c$ e $v < rst < abc$. Como $v < abc$, então $\frac{v}{bc} < a$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{v}{bc} < r < a$, isto é,*

$$v < rbc < abc. \tag{4}$$

Como $v < rbc$, segue que $\frac{v}{rc} < b$. Logo, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{v}{rc} < s < b$, isto é,

$$v < rsc < rbc. \tag{5}$$

Como $v < rsc$, então $\frac{v}{rs} < c$. Logo, existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{v}{rs} < t < c$, isto é,

$$v < rst < rsc. \tag{6}$$

De (4), (5) e (6) segue que $v < rst < rsc < rbc < abc$, ou seja,

$$v < rst < abc,$$

em que $r < a$, $s < b$ e $t < c$.

Antes de encerrar esta seção, visto que o cubo é um bloco retangular em que as arestas têm o mesmo comprimento, isto é, $a = b = c$, podemos afirmar que

$$\text{Volume}(Cubo) = a^3, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Na seção seguinte, apresentaremos o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes. Vamos discorrer sobre aspectos históricos relacionados ao princípio e a determinação do volume dos sólidos apresentados no capítulo anterior: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

3.3 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Bonaventura Cavalieri, matemático e astrônomo italiano, nascido em Milão, no ano de 1598, é um dos precursores do cálculo integral. Foi professor de matemática na Universidade de Bolonha entre 1629 até a sua morte, em 1647. Se destacou pelo desenvolvimento do método dos indivisíveis, uma técnica anterior ao cálculo integral de

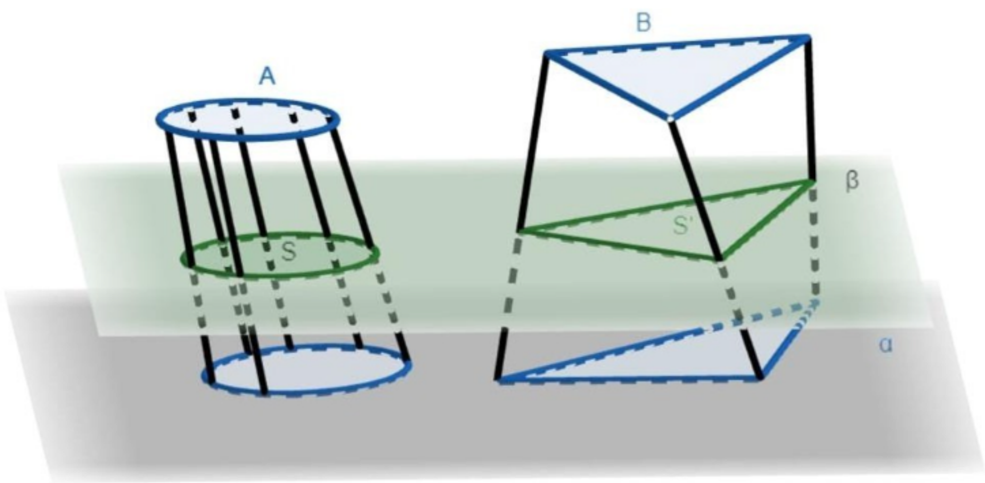
Leibniz e Newton. O trabalho fundamental de Cavalieri, *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota (1635)*, apresenta a ideia de dividir figuras geométricas em partes indivisíveis.

Ao apresentar o novo método para o cálculo de áreas e volumes, houve um verdadeiro avanço na solução de problemas complexos. Souza (2023, p.32) afirma que "este método deu origem a dois teoremas que permitem determinar as equações de área e de volume de sólidos geométricos e ficaram conhecidos como Princípio de Cavalieri."

As demonstrações desses princípios, que envolvem cálculo integral, demandam técnicas que não estão disponíveis no Ensino Médio. Por esse motivo, os livros desse nível de ensino apresentam esses teoremas como axiomas, sem provas mais elaboradas. Diante disso, o Princípio de Cavalieri é tratado, neste trabalho, como um axioma para o cálculo dos volumes e a demonstração é omitida.

Axioma 3.5 (Príncipio de Cavalieri) *Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado seccionar os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos possuem o mesmo volume.*

Figura 8 – Ilustração do Princípio de Cavalieri



Fonte: Elaborada pelo autor.

O Princípio de Cavalieri facilita o cálculo de volumes de sólidos complexos sem depender das técnicas avançadas de cálculo integral. Para ilustrar tal feito, podemos imaginar sólidos formados por resmas de papel A4 com a mesma quantidade de folhas em cada pilha. Nesse contexto, chamamos a atenção para o fato de que cada folha A4 possui espessura extremamente fina e áreas iguais. A primeira pilha é organizada para formar o sólido A, com formato de um bloco retangular. Já nas pilhas seguintes, podemos formar um paralelepípedo oblíquo e um terceiro sólido com formato diferente dos anteriores. Ambos os sólidos podem ser divididos por planos horizontais em fatias finas, com volumes aproximadamente iguais. O volume total de cada sólido é a soma dos volumes das suas fatias. Com isso, é possível aproximar o volume das fatias o quanto for necessário. Sabendo que o número de fatias (folhas), em cada bloco, são iguais, é possível concluir que o volume dos três sólidos é o mesmo. Cada pilha de papel, de uma maneira intuitiva, possuem volumes iguais, pois as fatias presentes em cada pilha formam sólidos com a mesma altura. Assim, aproximam-se da mesma quantidade.

Figura 9 – Intuição para o Princípio de Cavalieri

Fonte: Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p.313)

3.4 APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Cálculo do volume do prisma

Vamos calcular o volume de um prisma S_2 de altura h, em que a base é um polígono de área $\mathcal{A}_2$ contido em um plano β. Para aplicar o Princípio de Cavalieri, vamos considerar, ao lado do prisma, um bloco retangular S_1 de altura h cuja base, contida no plano β, é um quadrado de área igual a $\mathcal{A}_1$ satisfazendo $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

Suponhamos que esses dois sólidos de áreas são intersectados por um outro plano $\alpha \parallel \beta$ formando, assim, duas novas regiões $\alpha \cap S_1$, no bloco retangular, e $\alpha \cap S_2$ no prisma, como demonstra a Figura 10.

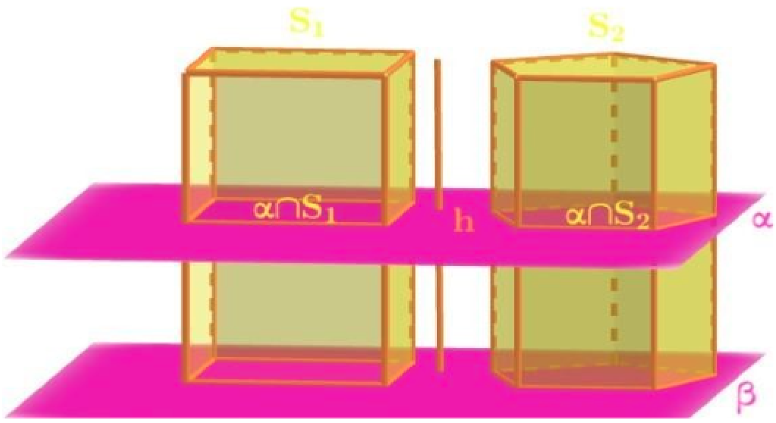
O bloco retangular e o prisma quando interceptados por um plano α paralelo ao plano β determinam regiões $\alpha \cap S_1$ e $\alpha \cap S_2$, respectivamente, satisfazendo

$$\text{Área}(\alpha \cap S_1) = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \text{Área}(\alpha \cap S_2),$$

ou seja, Área$(\alpha \cap S_1)$ = Área$(\alpha \cap S_2)$. Como o volume do bloco retangular é calculado pelo produto da área da sua base pela sua altura, pelo Princípio de Cavalieri, o volume de qualquer prisma satisfaz

$$\text{Volume}(S_2) = \mathcal{A}_2.h.$$

Figura 10 – Ilustração do prisma e paralelepípedo



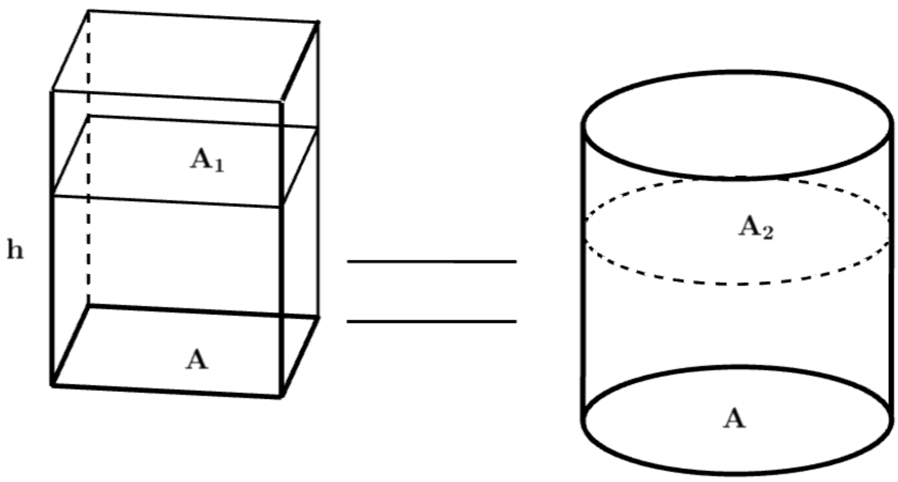
Fonte: Elaborada pelo autor.

Cálculo do volume do cilindro

No cilindro, todas as seções paralelas à base são congruentes à base dele. Esse fato permite concluir que o volume do cilindro é análogo ao volume do prisma pelo Princípio de Cavalieri. Isto é, o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura.

Para demonstrar essa afirmação, considere um cilindro de altura h e base circular de raio $R > 0$. A base está contida em um plano α. Fixe um bloco retangular de altura h e base quadrangular de lado $R\sqrt{\pi}$. A base do bloco retangular também está contida no plano α. Nessa mesma ótica, cada plano β, paralelo a α, secciona ambos os dois sólidos formando duas seções de áreas iguais a πR^2, conforme a Figura 11.

Figura 11 – Comparação da área das bases do cilindro e do paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor.

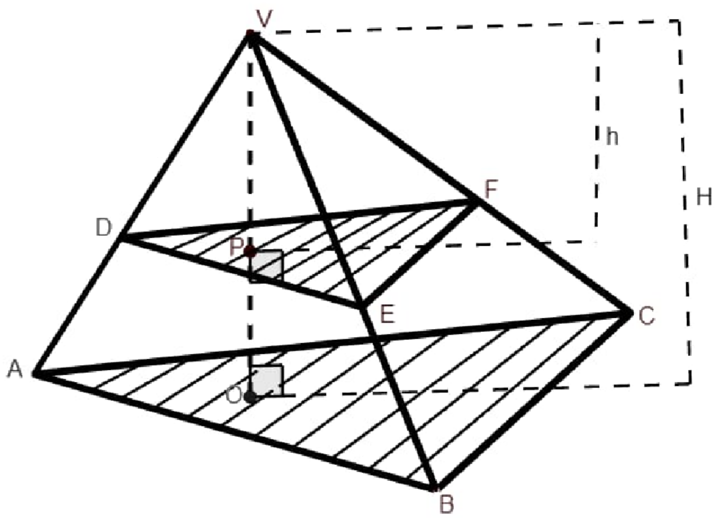
Como as seções determinadas pelo plano β tem a mesma área, o Princípio de Cavalieri implica que os dois sólidos têm o mesmo volume. Portanto, o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura.

Cálculo do volume da pirâmide

Para calcular o volume de uma pirâmide, é necessário considerar alguns resultados adicionais. Em particular, é crucial entender que, se o vértice de uma pirâmide se mover em um plano paralelo à sua base, o volume dessa pirâmide não se altera. Para demonstrar isso, examinemos o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

Para fixar a notação, considere uma pirâmide de base triangular $VABC$, em que V é o vértice e ABC é a base. Se $H > 0$ for a altura de $VABC$, fixe h satisfazendo $0 < h < H$. Seja α o plano paralelo ao plano determinado pela base ABC, com distância h do vértice V. Seja DEF o triângulo determinado pela interseção de $VABC$ com α. Veja Figura 12

Figura 12 – Ilustração da seção da pirâmide



Fonte: Elaborada pelo autor

Lema 3.1 *Nas condições acima, a seção DEF e a base ABC da pirâmide são figuras semelhantes cuja razão de semelhança satisfaz* $\dfrac{h}{H}$.

Demonstração: Considere os triângulos VDE e VAB. Note que os triângulos são semelhantes, de acordo com o caso de semelhança AA (ângulo, ângulo), pois $DE \parallel AB$. Segue que

$$\frac{VD}{VA} = \frac{DE}{AB} = \frac{EV}{BV} = k, \text{ para algum } k \in \mathbb{R}^*. \quad (7)$$

Pelo mesmo argumento, VEF é semelhante a VBC e VFD é semelhante a VCA. Além disso, temos que

$$\frac{VE}{VB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FV}{CV} = k \tag{8}$$

e

$$\frac{VF}{VC} = \frac{FD}{CA} = \frac{DV}{AV} = k. \tag{9}$$

Combinando (7), (8) e (9), temos que

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k, \tag{10}$$

ou seja, os triângulos DEF e ABC são semelhantes com razão de semelhança k. Resta calcular k.

Sejam VP a altura da pirâmide $VDEF$ e VO a altura da pirâmide $VABC$. Note que P pertence ao plano determinado por DEF e O pertence ao plano determinado por ABC. Segue que $h = VP$ e $H = VO$. Considere os triângulos VDP e VAO. Como $DP \parallel AO$, segue que VDP e VAO são semelhantes e

$$\frac{VD}{VA} = \frac{DP}{AO} = \frac{PV}{OV} = \frac{h}{H}, \tag{11}$$

Combinando (7) e (11), temos que

$$k = \frac{VD}{VA} = \frac{h}{H},$$

isto é, a razão de semelhança entre os triângulos DEF e ABC é $\dfrac{h}{H}$. ■

Observação 3.3 *Como a razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos que a razão entre as áreas dos triângulos DEF e ABC é igual a*

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

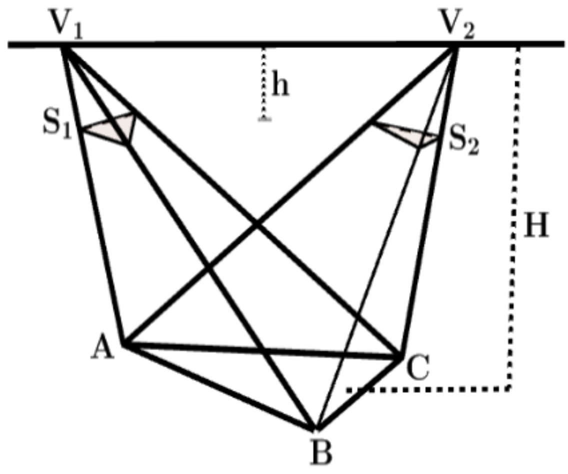
Teorema 3.2 (Propriedade do Volume da Pirâmide) *Duas pirâmides de mesma base triangular e mesma altura têm o mesmo volume.*

Demonstração: Sejam V_1ABC e V_2ABC duas pirâmides de mesma base ABC e altura $H > 0$. Dado h satisfazendo $0 < h < H$, considere um plano α, paralelo ao plano determinado pela base ABC, com distância h dos vértices V_1 e V_2, e produzindo o triângulo S_1 na pirâmide V_1ABC e o triângulo S_2 na pirâmide V_2ABC. Veja Figura 13.

Note que Área(S_1) = Área$(V_1ABC \cap \alpha)$ e Área(S_2) = Área$(V_2ABC \cap \alpha)$. O Lema 3.1 implica que

$$\frac{\text{Área}(S_1)}{\text{Área}(ABC)} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\text{Área}(S_2)}{\text{Área}(ABC)}$$

Figura 13 – Comparação entre pirâmides de mesma altura e mesma base



Fonte: Elaborada pelo autor.

isto é,

$$\text{Área}(S_1) = \text{Área}(S_2).$$

Portanto

$$\text{Área}(V_1ABC \cap \alpha) = \text{Área}(S_1) = \text{Área}(S_2) = \text{Área}(V_2ABC \cap \alpha)$$

e o Princípio de Cavalieri implica que

$$\text{Volume}(V_1ABC) = \text{Volume}(V_2ABC).$$

■

Teorema 3.3 (Volume da Pirâmide (Versão Preliminar)) *O volume da pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura*[1]*.*

Demonstração: Seja $ADEF$ uma pirâmide cuja base é o triângulo DEF e o vértice é o ponto A. Seja $ABCDEF$ um prisma de base triangular, construído a partir da pirâmide $ADEF$, tal que as bases ABC e DEF são triângulos congruentes e as arestas laterais satisfazem $BE = AD = CF$ e $BE \parallel AD \parallel CF$. Considere as seguintes três pirâmides formadas pelos vértices de $ABCDEF$:

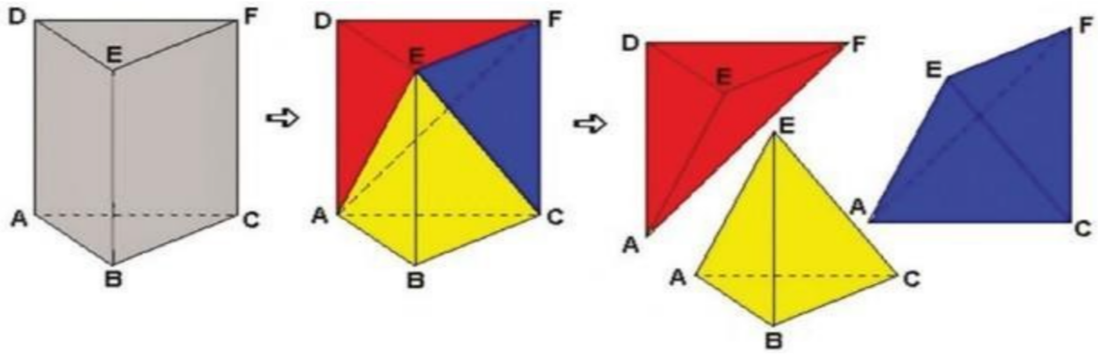
$$ADEF,\ EABC \text{ e } ACEF.$$

Vamos provar que

$$\text{Volume}(ADEF) = \text{Volume}(EABC) = \text{Volume}(ACEF). \tag{12}$$

[1] Alternativamente, o volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do volume de um prisma de mesma base e altura.

Figura 14 – Ilustração da decomposição do prisma em três pirâmides



Fonte: Proenem (2025).

Considere a pirâmide $ACEF$. Pelo Teorema 3.2, a pirâmide $ACED$ satisfaz

$$\text{Volume}(ACED) = \text{Volume}(ACEF),$$

pois a aresta DF é paralela ao plano determinado por ACE. Analogamente,

$$\text{Volume}(AFED) = \text{Volume}(ACED),$$

pois a aresta CF é paralela ao plano determinado por ADE. Por fim, combinando as duas igualdades acima e reorganizando a ordem dos vértices da pirâmide $AFED$ para $ADEF$, verificamos a segunda igualdade em (12), isto é

$$\text{Volume}(ADEF) = \text{Volume}(ACEF).$$

Por um argumento análogo, é possível verificar que

$$\text{Volume}(ADEF) = \text{Volume}(EABC).$$

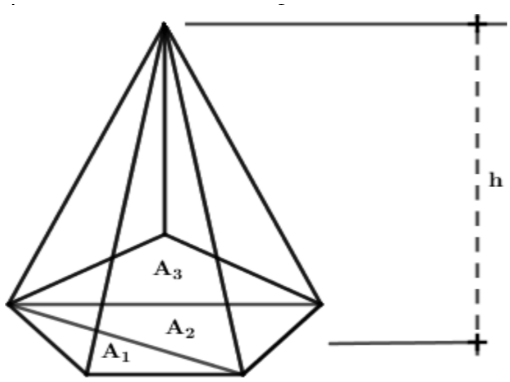
Portanto, a prisma $ABCDEF$ é decomposto em três pirâmides cujos volumes são Volume($ADEF$). Como o volume do prisma $ABCDEF$ é igual ao produto da área da base pela altura, temos que o volume de cada uma das pirâmides é igual a um terço do produto da área da base pela altura. ∎

Teorema 3.4 (Volume da Pirâmide (Versão Geral)) *O volume da pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração: Considere uma pirâmide $VA_1A_2A_3\cdots A_n$ cuja altura é $h > 0$ e a base é o polígono convexo $A_1A_2A_3\cdots A_n$ de n lados, em que $n \geq 3$ é um natural. Divida $A_1A_2A_3\cdots A_n$ em $n-2$ triângulos

$$A_1A_2A_3,\ A_1A_3A_4,\ \cdots,\ A_1A_{n-1}A_n.$$

Figura 15 – Decomposição da pirâmide em pirâmides de base triangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, podemos considerar $n-2$ pirâmides triangulares

$$VA_1A_2A_3,\ VA_1A_3A_4,\ \cdots,\ VA_1A_{n-1}A_n.$$

Pelo Teorema 3.3, sabemos que

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(VA_1A_2A_3) &= \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_2A_3)\cdot h\\
\text{Volume}(VA_1A_3A_4) &= \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_3A_4)\cdot h\\
&\vdots\\
\text{Volume}(VA_1A_{n-1}A_n) &= \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_{n-1}A_n)\cdot h
\end{aligned}$$

Assim, o volume da pirâmide $VA_1A_2A_3\cdots A_n$ é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, isto é,

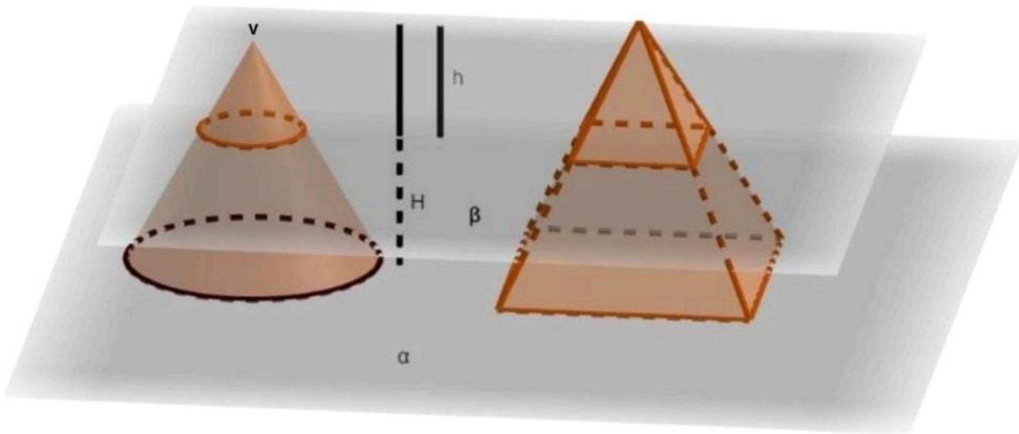
$$\begin{aligned}
\text{Volume}(VA_1A_2A_3\cdots A_n) &= \text{Volume}(VA_1A_2A_3) + \text{Volume}(VA_1A_3A_4) + \cdots +\\
&\qquad + \text{Volume}(VA_1A_{n-1}A_n)\\
&= \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_2A_3)\cdot h + \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_3A_4)\cdot h + \cdots +\\
&\qquad + \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_{n-1}A_n)\cdot h\\
&= \frac{1}{3}\Bigg(\text{Área}(A_1A_2A_3) + \text{Área}(A_1A_3A_4) + \cdots +\\
&\qquad + \text{Área}(A_1A_{n-1}A_n)\Bigg)\cdot h\\
&= \frac{1}{3}\,\text{Área}(A_1A_2A_3\cdots A_n)\cdot h
\end{aligned}$$

■

Cálculo do volume do cone

Seja $C(H,r)$ um cone (circular) de altura $H > 0$, raio da base $r > 0$ e vértice V. A área da base é πr^2. Para o cálculo do volume do cone $C(H,r)$, vamos aplicar o Princípio de Cavalieri a partir de uma pirâmide P de base quadrada, altura H e área da base πr^2. Suponha que as bases de $C(H,r)$ e P estão no mesmo plano α, conforme ilustra a Figura 16. Um plano β, paralelo a α, com distância entre V e β igual a $h > 0$, que seciona $C(H,r)$, também secciona P.

Figura 16 – Princípio de Cavalieri e o cálculo do volume do cone



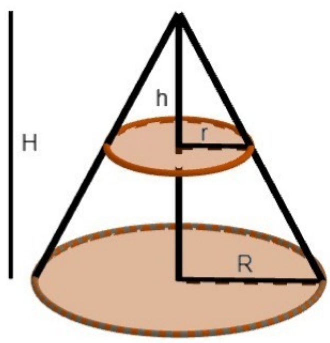
Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue do Lema 3.1 que

$$\frac{\text{Área}(P \cap \beta)}{\text{Área}(P \cap \alpha)} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Por outro lado, a seção mediana de $C(H,r)$ e os planos α e β formam triângulos semelhantes com razão de semelhança $\frac{h}{H}$ (veja Figura 17).

Figura 17 – Triângulos semelhantes determinados por seções do cone



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue que o raio do círculo $C(H,r) \cap \beta$ é $\dfrac{rh}{H}$. Logo,

$$\frac{\text{Área}(C(H,r) \cap \beta)}{\text{Área}(C(H,r) \cap \alpha)} = \frac{\pi\left(\frac{rh}{H}\right)^2}{\pi r^2} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Ou seja

$$\frac{\text{Área}(C(H,r) \cap \beta)}{\text{Área}(C(H,r) \cap \alpha)} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{\text{Área}(P \cap \beta)}{\text{Área}(P \cap \alpha)}.$$

Como Área$(C(H,r) \cap \alpha) = \pi r^2 =$ Área$(P \cap \alpha)$, segue que

$$\text{Área}(C(H,r) \cap \beta) = \text{Área}(P \cap \beta),$$

para todo plano β paralelo a α. Pelo Princípio de Cavalieri, Volume$(C(H,r))$ = Volume(P). Como o volume de P é igual a um terço do produto da área da base pela altura, a área da base é πr^2 e a altura é H, temos Volume$(C(H,r) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H$.

Cálculo do volume da esfera

Seja $S^2(O,R)$ uma esfera centrada em O e raio $R > 0$. Para o cálculo do volume de $S^2(O,R)$, vamos aplicar o Princípio de Cavalieri para $S^2(O,R)$ e um sólido S construído da seguinte forma:

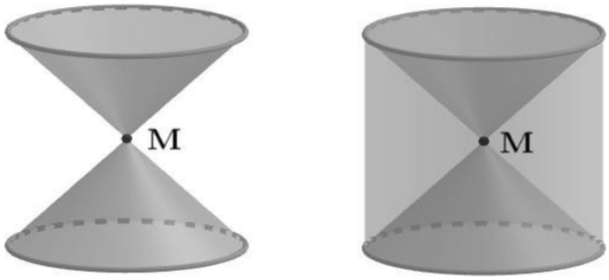
(i) Fixe um cilindro equilátero de raio da base R e altura $2R$;

(ii) Denote por M o ponto médio do eixo do cilindro;

(iii) Tome dois cones cujas bases são as bases dos cone e M é o vértice dos cones (os cones têm tanto o raio da base quanto a altura iguais a R);

O sólido S é a região dentro do cilindro e fora dos dois cones (veja Figura 18). A união dos dois cones é chamada **clepsidra** e o sólido S é chamado **anticlepsidra**.

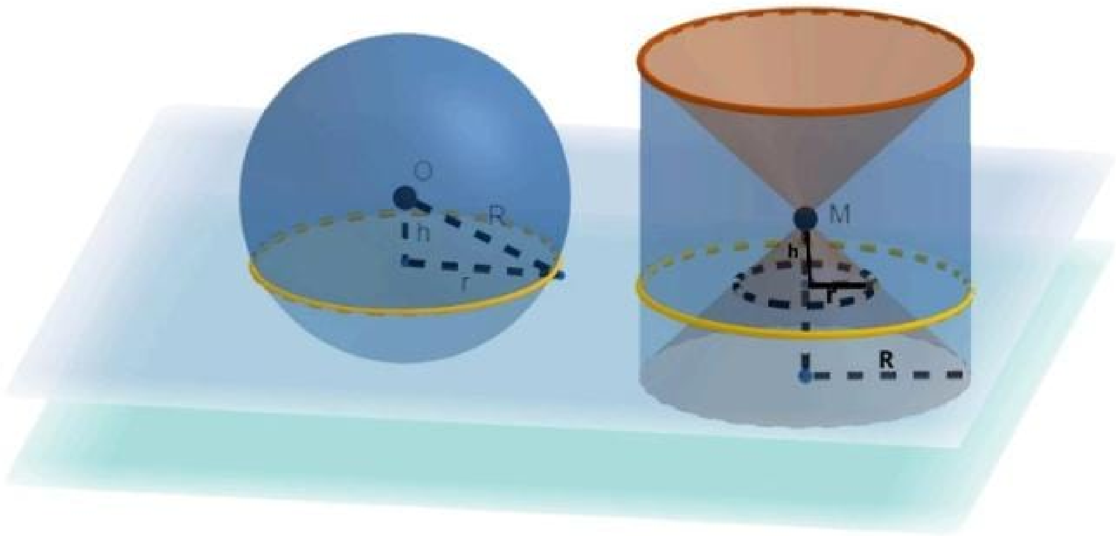
Figura 18 – Clepsidra e da anticlepsidra na construção do sólido S



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos supor que $S^2(O,R)$ é tangente a um plano α e uma das bases de S está contida em α, conforme Figura 19. Um plano β, paralelo a α, com distância entre O e β

Figura 19 – Princípio de Cavalieri e o cálculo do volume da esfera



Fonte: Elaborada pelo autor.

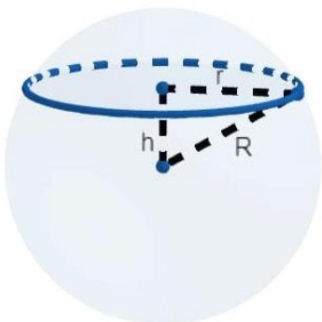
igual a $h > 0$, que secciona $S^2(O,R)$ formando um círculo de raio r, secciona também o sólido S formando uma coroa circular.

Vamos determinar o raio $r > 0$ e a área da seção de $S^2(O,R)$ obtida pela interseção entre $S^2(O,R)$ e β. Para isso, utilizaremos o triângulo retângulo, em que o raio R da esfera é a hipotenusa, a distância h entre o centro da esfera e o centro da seção é um dos catetos, e o raio r da seção que nos interessa é o outro cateto (veja Figura 20). Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = h^2 + r^2 \ \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2.$$

Portanto, a área da seção é $\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$.

Figura 20 – Ilustração da seção da esfera determinada pelo plano β



Fonte: Elaborada pelo autor.

A área da coroa circular também é $\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$, pois o raio externo é o raio do cilindro e o interno é igual à distância entre M e o plano β, que neste caso é h. Logo

$$\text{Área}(S^2(O,R) \cap \beta) = \pi(R^2 - h^2) = \text{Área}(S \cap \beta).$$

Pelo Princípio de Cavalieri, Volume($S^2(O,R)$) = Volume(S). Como Volume(S) é igual ao volume de um cilindro equilátero de raio da base R e altura $2R$ menos duas vezes o volume de um cone em que tanto o raio da base R quanto a altura são iguais a R, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(S^2(O,R)) &= \pi R^2 \cdot 2R - 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right) \\
&= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

4 MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Os materiais manipuláveis foram usados ao longo da história. Podemos encontrar vários educadores que ressaltaram a importância do uso de materiais visuais, táteis ou multissensoriais. Por exemplo, Jan Amos Comenius defendeu, já no Século XVII, uma educação através da instrução, conversa, jogos, momentos lúdicos e música (SANTOS, A. *et al.*, 2023).

No Brasil, Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido com o pseudônimo Malba Tahan, foi um crítico severo da didática usual nos cursos de Matemática e um pioneiro no uso da História da Matemática. Malba Tahan propôs o "uso didático da História da Matemática, na defesa de um ensino baseado na resolução de problemas não-mecânicos e na exploração didática das atividades recreativas e no uso de material concreto no ensino da Matemática." (SOUZA, A. *et al.*, 2022, p.124)

A partir desse momento, no Brasil, iniciou o uso de objetos concretos nas escolas. Todavia, somente da década de 1980 apareceria a abordagem pedagógica em livros didáticos para o ensino de Matemática com a aplicação de materiais manipuláveis. O uso desses recursos foi consolidado por programas governamentais. Mais recentemente, a BNCC destaca, por exemplo, a importância de "explorar o ambiente pela ação e observação, manipulando, experimentando e fazendo descobertas." (BRASIL, 2018)

Antes de dar sequência, é importante definir o que seriam materiais manipuláveis. Para Lorenzato, que usa a terminologia Material Didático (MD), é qualquer

> instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem. [...] Existem vários tipos de (MD) alguns não permitem modificações em suas formas. [...] por serem estáticos permitindo só observação. [...] Outros já permitem uma maior participação do aluno. [...] aqueles dinâmicos permitindo transformações por continuidade. Facilitando ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e construção de uma efetiva aprendizagem. (LORENZATO, 2012, p.18-19)

De acordo com esses entendimentos, um material manipulável pode ser um giz, uma folha, um livro, um jogo de dominó, uma dobradura, uma calculadora, um filme, uma embalagem, uma régua, um compasso, entre outros. Os materiais manipuláveis representam alternativas valiosas para o professor em sala de aula. Cabe a ele desenvolver estratégias que favoreçam a compreensão dos estudantes.

Como os materiais manipuláveis podem, por meio da manipulação sensorial, colaborar na compreensão de ideias matemáticas, conectando o conhecimento abstrato com a prática, "pois auxiliam na construção e na classificação de determinados conceitos que, de acordo com o nível de abstração, é necessário de um apoio físico que oriente os educandos à compreensão, formalização e estruturação deles." (CAMACHO, 2012, apud FACCHI, 2022)

Esses materiais contribuem para o envolvimento colaborativo do professor e do estudante. Isto é, ambos podem trabalhar na construção do material e do saber, promovendo o aprendizado matemático.

4.1 ALGUNS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Apresentaremos, nesta seção, alguns exemplos de materiais manipuláveis que podem impactar positivamente na aprendizagem matemática dos estudantes. Os materiais escolhidos estão relacionados à área de Geometria por causa da temática do trabalho.

Material Dourado

O Material Dourado, criado pela educadora Maria Montessori, e ilustrado pela Figura 21, é uma ferramenta pedagógica composta por quatro peças: cubinho, barra, placa e cubo. Destinado, principalmente, ao ensino de aritmética, o material também pode ser aplicado em álgebra e geometria.

Figura 21 – Material Dourado

Fonte: Disponível em `https://www.paparicosecia.com.br/mmp-30274`.
Acesso em: 28 de agosto de 2025.

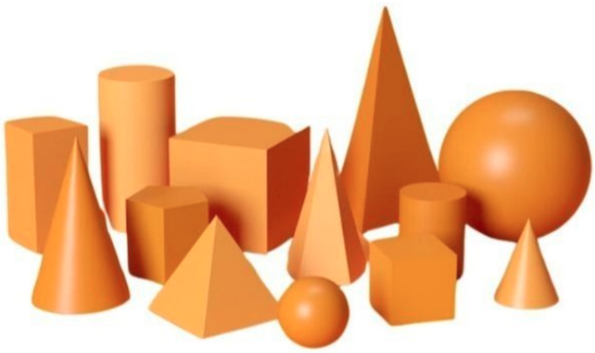
Ao manipular as peças, os estudantes interagem com conceitos tais como agrupamento, reagrupamento e trocas no Sistema de Numeração Decimal, e as operações: adição, subtração, multiplicação e divisão. Essa ferramenta colabora na compreensão de conceitos como volume, área, números fracionários e a multiplicação de polinômios. Ao permitir o contato físico com os números e suas representações, favorece a construção gradual e concreta do conhecimento matemático, sendo útil em diferentes níveis de ensino, especialmente na alfabetização matemática.

Sólidos Geométricos

Os materiais manipuláveis para o estudo dos sólidos geométricos são amplamente utilizados no ensino da Geometria, pois, em alguns casos, são objetos do cotidiano ou podem ser encontrados na natureza, na indústria ou em construções. O manuseio desses materiais permite aos estudantes a compreensão das formas e propriedades dos corpos, além de desenvolver a percepção espacial e a investigação de conceitos tais como: áreas, volume e planificação dos sólidos.

O estudo dos sólidos geométricos com materiais manipuláveis no Ensino Fundamental é essencial para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e pode "ser um grande passo no processo de construção do pensamento geométrico que servirá de base para estudos mais aprofundados no Ensino Médio." (SILVA, 2014, p.33)

Figura 22 – Exemplos de sólidos geométricos



Fonte: Disponível em: `https://br.freepik.com/fotos-vetores-gratis/solidos-geometricos` Acesso em: 28 de agosto de 2025.

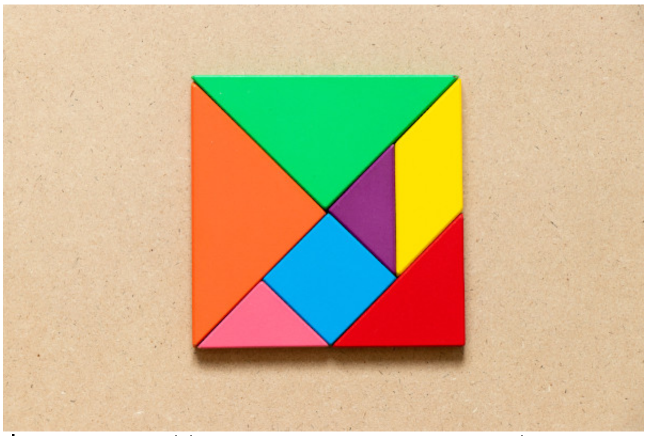
Tangram

O Tangram, ilustrado na Figura 23, é um quebra-cabeça chinês composto por sete peças geométricas: cinco triângulos (dois triângulos pequenos, um triângulo médio e dois triângulos grandes), um quadrado e um paralelogramo. Juntas, essas peças permitem a criação de várias figuras, como formas humanas, objetos e animais. É um material lúdico e útil no ensino de Artes e Matemática, estimula a criatividade, o raciocínio lógico e o aprendizado de conceitos geométricos, como simetria e área.

Cubo Soma

O Cubo Soma, ilustrado pela Figura 24, é um quebra-cabeça tridimensional composto por sete peças, chamadas policubos, formadas por três ou quatro cubos unitários, totalizando 27 cubos. Este material foi criado pelo matemático dinamarquês Piet Hein, em 1936.

Figura 23 – Tangram



Fonte: Disponível em https://escolakids.uol.com.br/matematica/tangram.htm
Acesso em: 28 de agosto de 2025.

O objetivo principal do quebra-cabeça é montar um cubo de lado 3. Mas ele também permite explorar alguns conceitos dos sólidos geométricos, tais como convexidade, simetria, área e volume. O quebra-cabeça estimula a criatividade ao manipular as peças.

Figura 24 – Cubo Soma

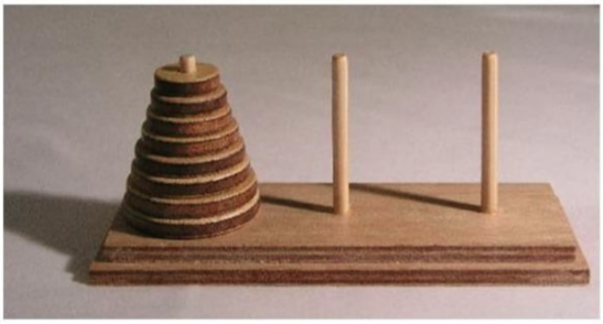
Fonte: Disponível em: https://mmaca.cat/moduls/cub-soma/.
Acesso em: 28 de agosto de 2025.

Torre de Hanói

A Torre de Hanói, ilustrada pela Figura 25, é um quebra-cabeça constituído por três hastes e discos de diferentes tamanhos. O material foi criado pelo matemático francês Édouard Lucas e o objetivo principal é mover todos os discos de uma haste para outra, sem que um disco maior fique sobre um disco menor.

Esse quebra-cabeça permite trabalhar conceitos matemáticos desde a pré-escola até o Ensino Médio: ordem, contagem, progressão geométrica, potenciação, funções exponenciais. Além disso, podem ser abordados os conceitos de área e volume, e o desenvolvendo da concentração, planejamento e resolução de problemas.

Figura 25 – Torre de Hanói



Fonte: Disponível em: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Hanoi`
Acesso em: 28 de agosto de 2025.

Blocos lógicos

Os blocos lógicos, apresentados na Figura 26, foram criados pelo educador matemático Zoltan Paul Dienes, na década de 1950. Esses materiais manipuláveis são compostos por 48 peças de diferentes formas, cores, tamanhos e espessuras.

Estes materiais manipuláveis auxiliam, principalmente, as crianças da Educação Infantil e do Ensino Fundamental - Anos Iniciais na aprendizagem dos conceitos matemáticos, tais como classificação, reconhecimento de formas, ordenação e comparação. Ao manipular os blocos lógicos, as crianças comparam as peças, as classificam por cores, formas, tamanhos e espessuras, criam figuras, torres, conjuntos. O uso dos blocos lógicos é uma estratégia de aprendizado que possibilita aos estudantes a interação com conceitos complexos de uma maneira mais concreta e formal. Nesse sentido, Borges, et.al. (2021) afirmam que:

> o trabalho com blocos lógicos no desenvolvimento matemático não se limita apenas a abstração ou a memorização, mas também pode articular situações que delimitem regras de criação, percepções espaciais, conhecimento geométrico, quantidades, conjuntos e agrupamentos.

Figura 26 – Blocos lógicos

Fonte: Disponível em: urlhttps://blog.psiqueasy.com.br/2017/09/15/blocos-logicos/
Acesso em: 28 de agosto de 2025.

Geoplano

O geoplano, criado pelo professor Caleb Gattegno, em 1960, é um recurso pedagógico para o ensino prático de geometria. O instrumento é composto por uma placa de madeira com pregos em malhas (quadrada, triangular ou circular) e elásticos coloridos, conforme ilustrado pela Figura 27. O uso deste material permite que os estudantes construam figuras geométricas, facilitando o aprendizado visual e concreto dos conceitos geométricos.

O uso do geoplano torna o ensino da Matemática dinâmico e atrativo, favorecendo a compreensão de diversos conceitos. Conforme postula MARTINS et al. (2012), atividades com o geoplano podem “proporcionar experiências geométricas a crianças desde cinco anos, propondo problemas de forma, dimensão e simetria [...]”. Afirmam também que o instrumento oferece uma experiência geométrica para estudantes a partir de cinco anos, abordando desde conceitos básicos como ponto, reta e plano, até o cálculo de áreas e alguns teoremas. Esse material é uma ferramenta eficaz em todos os níveis de ensino, tornando o aprendizado da geometria mais interativo e acessível.

Figura 27 – Geoplano

Fonte: Disponível em:
`https://jisjoaosalaa.blogspot.com/2012/05/aprendizagens-com-o-geoplano.html`
Acesso em: 28 de agosto de 2025.

Geoespaço

O geoplano espacial, ou geoespaço, é uma adaptação que possibilita a visualização e manipulação de formas tridimensionais, explorando, assim, na prática, os conceitos da geometria espacial. O instrumento, ilustrado pela Figura 28, é composto por dois geoplanos quadrados paralelos e interligados por hastes, os quais utilizam ganchos ou furos para representar vértices e pontos. O uso de barbantes coloridos permite demonstrar as arestas dos sólidos geométricos.

Este recurso possibilita a construção de prismas, pirâmides, cilindros e cones, propiciando a visualização das formas e facilitando a percepção da estrutura dos sólidos. No contexto das aulas de Matemática, esse recurso auxilia os estudantes na compreensão de conceitos básicos, como faces, arestas, vértices, bem como de conceitos mais complexos, como área e volume.

Figura 28 – Geoespaço

Fonte: SILVA, BRAGA, ANDRADE (2018).

4.2 USO DO MATERIAL MANIPULÁVEL NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Os materiais manipuláveis, no ensino da Matemática, são ferramentas essenciais para promover um ensino mais dinâmico, crítico e criativo, alinhado com as novas demandas educacionais. Esses materiais favorecem o desenvolvimento da autonomia intelectual dos alunos, estimulando a reflexão e a capacidade de ação. (LORENZATO, 2012)

O uso de materiais manipuláveis facilita o desenvolvimento de diversas habilidades, como a resolução de problemas, o planejamento de ações, a estimativa e os cálculos mentais. O uso adequado desses objetos também auxilia na concentração, raciocínio e criatividade dos estudantes, além de incentivar a investigação científica e a aprendizagem matemática.

4.2.1 O papel do professor no uso de materiais manipuláveis

O professor é o mediador e o orientador no manuseio dos materiais manipuláveis no ensino da Matemática. É responsável pela seleção dos materiais adequados ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos ao nível de compreensão dos estudantes. Os materiais devem estar relacionados com os conceitos matemáticos e permitir que os alunos explorem os objetos de forma prática e individual.

Neste contexto, quando um material pode modelar um grande número de ideias matemáticas, adaptações podem ser necessárias. O professor precisa refletir sobre o objetivo do uso dos manipuláveis, seja para apresentar um tópico, estimular o interesse dos alunos ou apoiar a fixação de conteúdo. Nesse sentido, “tais materiais podem auxiliar os alunos na construção dos conhecimentos matemáticos. E, para isso, é necessário que o professor saiba conduzir os conteúdos e os materiais manipuláveis. (FACCHI, 2022)

Mas é preciso entender as limitações do uso de materiais. Segundo Caporale (2014), o uso de "materiais manipulativos não garante a aprendizagem matemática dos alunos, visto que não há garantias de que eles consigam relacionar as experiências concretas com a matemática formal." Além disso, Lorenzato (2012, p.79) destaca que o professor tem um papel crucial ao elaborar o planejamento das aulas utilizando materiais manipuláveis, os quais são utilizados como recursos auxiliares no ensino-aprendizagem, logo não como substitutos da prática docente.

Soma-se ao exposto acima, a importância da formação inicial e continuada do professor. Defende-se a relevância da inclusão do aprendizado sobre o uso adequado desses materiais, já que muitos currículos ainda carecem dessa abordagem prática. Para tanto, é primordial que as instituições de ensino integrem o uso de materiais manipuláveis nos cursos de formação para professores com o intuito de preparar futuros educadores.

É inegável observar que a aplicação dessas ferramentas de forma eficaz, pode colaborar com as necessidades dos estudantes contemplando os objetivos educacionais. Por isso, sugere-se que a utilização dos materiais manipuláveis seja vista como uma estratégia pedagógica que auxilia na construção do conhecimento matemático, tornando o aprendizado mais significativo e dinâmico.

4.2.2 Potencialidades do uso de materiais manipuláveis no Ensino Médio

Os materiais manipuláveis podem ser ferramentas valiosas numa abordagem mais dinâmica e prática, com o objetivo de construir conceitos matemáticos e superar a abstração da disciplina de Matemática e desenvolver habilidades cognitivas e psicomotoras. Ao manipular os instrumentos, os estudantes não apenas visualizam conceitos, mas também, exploram, investigam e resolvem problemas de forma ativa e autônoma. O uso de materiais manipulaveis pode "levar os estudantes a pensarem por eles mesmos, a questionar, observar padrões - resumindo, desenvolver uma atitude de investigação matemática." (PASSOS, 2012)

Compreendemos que os recursos incentivam a criatividade, a investigação e a resolução de problemas, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático. Quando ocorre a dinâmica do uso de materiais manipuláveis há uma promoção de atitudes essenciais, como a busca constante de soluções e a confiança na própria capacidade de aprender. Além disso, favorece a comunicação e a troca de ideias entre os estudantes, estimulando a cooperação e a aprendizagem colaborativa.

No que concerne à Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), é interessante destacar que o documento norteia o uso dos materiais manipuláveis, reconhecendo-os como fundamentais para o desenvolvimento de habilidades e competências essenciais no ensino de Matemática. Podemos verificar tal afirmação, por exemplo, na habilidade EF05MA21 em que é sugerido “reconhecer volume como grandeza associada a sólidos geométricos e medir volumes por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos.”

O envolvimento dos estudantes com a manipulação de objetos concretos contribui diretamente na construção ativa do conhecimento. Vale ressaltar, nesse viés, que tal ação permite uma aprendizagem mais significativa, quando o estudante se sentir pertencente.

> O conhecimento é um processo próprio da natureza social e cultural do homem, na medida que o homem desenvolve o conhecimento como forma de enfrentamento da natureza, ao invés de a ela se adaptar. No entanto, a necessidade de conhecer é mais forte em algumas ocasiões do que em outras. A aprendizagem significativa depende, além do nível de representação, da carga afetiva envolvida. (VASCONCELLOS, 1992, p.7)

Dessa forma, a compreensão de conceitos, e a eliminação dos métodos tradicionais de memorização e abstração, facilitam a compreensão de conceitos complexos e promove um ensino mais eficaz e motivador, desenvolvendo habilidades cognitivas e psicomotoras.

5 PROPOSTA DE OFICINA: CÁLCULO DE VOLUMES COM O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O estudo dos sólidos geométricos é importante porque permite aos estudantes quantificarem o espaço ocupado por um sólido ou até mesmo a sua capacidade de armazenamento. Nesse contexto, o Princípio de Cavalieri é um conceito matemático importante, visto que permite calcular o volume de um sólido específico, estabelece aplicação e comparação de volumes de sólidos

A fim de tornar mais acessível e interativa essa discussão, propomos por meio de uma oficina, atividades práticas, em que o estudante fará uso de materiais manipuláveis. Pretendemos, assim, reforçar o embasamento teórico e promover a utilização do Princípio de Cavalieri. As oficinas combinam teoria e prática por meio da manipulação de materiais, a fim de que o estudante compreenda com clareza à aplicação do Princípio de Cavalieri.

Salientamos que não temos a intenção de oferecer aqui um planejamento completo e definitivo sobre todas as formas de ensino-aprendizagem tampouco de desestimular a criatividade do professor. A ideia foi, por meio de oficinas, promover o interesse e estimular o professor na aplicação de práticas pedagógicas. O professor tem liberdade para adaptar as atividades, a fim de atender não só as necessidades dos estudantes como também as particularidades de sua realidade local e perfil de cada turma.

A aplicação do Princípio de Cavalieri com o uso de materiais manipuláveis se justifica pela necessidade de tornar conceitos abstratos da Geometria mais concretos. Essa abordagem pode fornecer aos estudantes a compreensão e aprendizado significativo, e promover a motivação, resolução de problemas e investigação, tornando o saber mais dinâmico e engajador.

5.1 APRESENTAÇÃO DAS OFICINAS

A discussão e aplicação do Princípio de Cavalieri consiste em quatro oficinas:

Oficina 1: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Paralelepípedo;

Oficina 2: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Prisma e no Cilindro;

Oficina 3: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume na Pirâmide e no Cone;

Oficina 4: Princípio de Cavalieri no cálculo do volume na Esfera.

Informações básicas:

Local: Sala de aula.

Duração de cada oficina: 2 encontros.

Recursos físicos e materiais: Sala de aula, círculos com os papelões, ou EVA, ou papel de caixa de sapato, ou papel cartão, régua, esquadros, tesoura ou estiletes (com supervisão do professor), palito de churrasco e base de papelão (sugestão).

Público-alvo: Estudantes do 3° ano Médio.

Objetivos:

(i) Demonstrar o Princípio de Cavalieri utilizando materiais manipuláveis para que os estudantes compreendam o conceito de volume de maneira concreta e visual;

(ii) Compreender o conceito de sólidos geométricos;

(iii) Explorar o Princípio de Cavalieri e a sua aplicação no cálculo de volume;

(iv) Desenvolver a percepção espacial por meio de atividades práticas;

(v) Validar o cálculo de volume no Princípio de Cavalieri para qualquer sólido.

5.2 ROTEIRO DAS OFICINAS

Para um melhor entendimento, visualização e aplicação das oficinas propostas, detalharemos o roteiro de cada um dos quatro momentos da oficina. Sugere-se que os estudantes sejam divididos em 4 grupos para o desenvolvimento das atividades.

O professor ilustra o conceito de volume e enuncia o Princípio de Cavalieri como um postulado. Para tornar o conteúdo mais lúdico e acessível, o professor pode realizar uma demonstração prática, comparando duas pilhas de papel dispostas de formas diferentes, mas mantendo a altura e o mesmo número de folhas. Isso permite visualizar como o volume pode permanecer inalterado, ilustrando o Princípio de Cavalieri de maneira concreta.

Em seguida, os estudantes, organizados em grupo, colocarão em prática o Princípio de Cavalieri através da construção dos sólidos geométricos. A atividade será desenvolvida em dois encontros: no primeiro, os estudantes farão a confecção do produto manipulável; e no segundo, apresentarão o Princípio de Cavalieri utilizando os sólidos construídos explicando o raciocínio a partir dos sólidos construídos.

OFICINA 1: *Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Paralelepípedo*

A primeira atividade consiste na construção de placas retangulares e quadradas. Os estudantes, divididos em 4 grupos, farão essas construções. Utilizando papelão, são confeccionados retângulos, com as medidas de $8\,\text{cm} \times 15\,\text{cm}$, e quadrados, com medidas $11\,\text{cm} \times 11\,\text{cm}$. Sugere-se que os grupos construam 24 placas de cada formato. Assim, ao empilhar as placas, obteremos o formato de duas figuras harmônicas, como ilustrado na Figura 29.

Figura 29 – Comparação entre blocos retangulares

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao elaborar as placas, é necessário que o grupo marque o centro de cada figura. Neste ponto, em cada placa, será espetada o palito de churrasco para a montagem do sólido. Esta construção produz um paralelepípedo reto retâgulo na primeira torre de placas, e na segunda um prisma de base quadrada.

No segundo momento da atividade, o grupo explicará o Princípio de Cavalieri a partir dos produtos construídos, relacionando a teoria com o material construído.

OFICINA 02: *Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Prisma e no Cilindro*

Nesta atividade, os estudantes construirão placas quadradas e circulares. São necessários quadrados, com as medidas de 11 cm $\times$11 cm, e círculos, de raio 6,2 cm . Novamente, sugere-se a construção de 24 placas de cada formato.

Conforme ilustrado pela Figura 30, será formado um prisma de base quadrada, na primeira torre de placas, e, na segunda, um cilindro. Para finalizar, cabe aos estudantes fixarem os sólidos na base um ao lado do outro.

No segundo momento, os grupos serão convidados a explicar o conceito do Princípio de Cavalieri, a partir dos produtos construídos.

Figura 30 – Comparação entre um prisma e um cilindro

Fonte: Elaborada pelo autor.

OFICINA 03: *Princípio de Cavalieri no cálculo de volume na Pirâmide e no Cone*

A terceira oficina assumirá que o volume da pirâmide é a terça parte do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. Com base nisso, os estudantes construirão placas quadradas e circulares de diversos tamanhos. A maior placa quadrada terá 11 cm $\times$11 cm, e a menor será de 1,8 cm $\times$1,8 cm, seguindo a redução de tamanho de 0,4 cm de largura e 0,4 cm no comprimento para cada nova placa. Já nas placas circulares, o maior círculo terá raio 6,2 cm e o menor terá raio 1 cm, seguindo a redução de tamanho de 0,2 cm de raio para cada placa. Sugere-se a construção de 24 placas de cada formato, com tamanhos variados indicados.

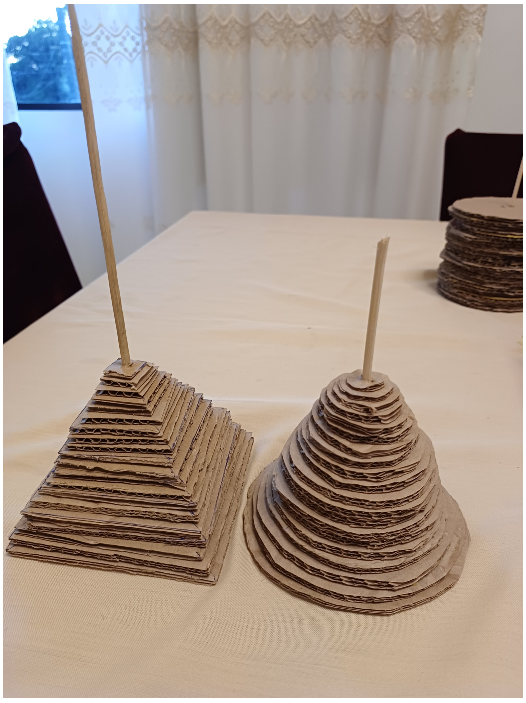
Assim, será formado um sólido que parecerá uma pirâmide, e outro que se assemelhará a um cone. Ao observarmos a Figura 31, teremos uma noção mais clara do formato da construção solicitada.

No segundo momento, os grupos explicarão o conceito do Princípio de Cavalieri, a partir dos produtos construídos. Quando verificamos os dois sólidos, podemos analisar que foram utilizadas a mesma quantidade de material, a fim de formar figuras de formato diferente.

OFICINA 04: *Princípio de Cavalieri no cálculo do volume na Esfera*

Na última oficina, o grupo formará um cilindro equilátero composto de círculos de papelão e massinha (de modelar), isto é, uma Clépsidra, semelhante a uma ampulheta,

Figura 31 – Comparação entre uma pirâmide e um cone



Fonte: Elaborada pelo autor.

que será completada com o uso de massinha.

Para formar a Clépsidra, serão confeccionadas placas circulares duplicadas, isto é, serão produzidas 28 placas de papelão, com 14 tamanhos diferentes. Sugere-se que as duas primeiras placas tenham 6 cm de raio, e as últimas, 0,5 cm de raio, com uma redução de 0,5 cm no raio a cada novo tamanho.

Para a montagem dos sólidos, espete o primeiro grupo de 14 placas em ordem crescente, formando um sólido semelhante a um cone equilátero. Em seguida, espete as 14 placas restantes, em ordem decrescente, formando outro cone, e então teremos um sólido com aparência de uma ampulheta. Vejamos na Figura 32, a ilustração do sólido com as medidas descritas acima.

Para completar o cilindro equilátero, os estudantes são convidados a utilizar massinha para envolver o sólido construído acima, de modo a obter um cilindro, como percebemos na Figura 33. Em outras palavras, a Clépsidra será revestida pela anticlepsidra e, ao final, as duas estruturas juntas formarão o cilindro equilátero.

Na sequência, os estudantes são convidados a remover a massinha que revestia a Clépsidra construída anteriormente. Após a remoção completa, o estudante deve manipular a massinha de modo que o formato final seja próximo de uma esfera. Neste caso, a esfera terá diâmetro igual ao dobro do raio do cone da ampulheta. Ou seja, o volume da esfera será equivalente ao volume do cilindro equilátero menos o dobro do volume dos cones que formavam a Clépsidra, isto é, o volume da anticlepsidra é igual ao volume da esfera, conforme ilustra a Figura 34.

Figura 32 – Construção da Clépsidra

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Construção de um cilindro a partir da Clépsidra

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Volume da Esfera

Fonte: Elaborada pelo autor.

No segundo momento, sugerimos que os grupos expliquem o conceito do Princípio de Cavalieri, a partir dos produtos construídos.

Avaliação:

Finalizamos a oficina direcionando aos estudantes um rol de perguntas orientadas, com objetivo de estimular a reflexão sobre o conceito abordados nesta oficina.

- O que acontece com a quantidade de camadas quando você inclina os sólidos?
- A área de cada camada é a mesma? Como você calcula a altura do sólido em relação ao número de camadas?
- Qual é o volume dos sólidos montados pelas camadas de polígonos ou pelas camadas de círculos?
- De acordo com o Princípio de Cavalieri, como você calcularia o volume de cada sólido?
- Se a área das camadas poligonais é igual a área das camadas circulares, de acordo com o Princípio de Cavalieri, o que você pode concluir a respeito dos sólidos construídos pelo mesmo número de camadas?

As perguntas têm a função de promover o raciocínio crítico, incentivar a observação dos padrões geométricos e consolidar a compreensão dos estudantes sobre o Princípio de Cavalieri, mediante a comparação e análise dos sólidos manipuláveis construídos ao longo da oficina.

Por fim, será solicitado aos estudantes, em grupo, que expliquem como o Princípio de Cavalieri garante a igualdade de volumes. Além disso, apresentarão a aplicação do princípio em problemas matemáticos que utilizam esse conceito.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, o objetivo era abordar o ensino do conceito de volume e o Princípio de Cavalieri, para estudantes do Ensino Médio, a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Materiais Manipuláveis. Ao decorrer do estudo, procuramos fundamentar como essa dinâmica auxilia no desempenho dos estudantes, oferecendo novos olhares e conhecimento para o processo do aprender e ensinar Matemática.

Iniciamos o trabalho com a exposição de alguns conceitos da Geometria Espacial relacionados à temática do trabalho. Na sequência, introduzimos a noção de volume e o Princípio de Cavalieri. No Capítulo 3, discorremos a respeito dos Materiais Manipuláveis e apresentamos fundamentos teóricos que sustentam as práticas pedagógicas voltadas ao processo de ensino com o uso desses materiais

No decorrer deste estudo, elaboramos uma sequência didática voltada ao uso dos Materiais Manipuláveis para o ensino do Princípio de Cavalieri. É interessante destacar que tal proposta deve ser encarada como uma sugestão para o processo ensino-aprendizagem no 3º Ano do Ensino Médio.

De modo geral, no que se refere aos resultados da sequência didática, o uso do material manipulável cumpriu com o objetivo de explorar o Princípio de Cavalieri e o cálculo de volume em sólidos geométricos. Com a aplicação dessa sequência, é possível que o professor, ao usar tal material, possibilite ao estudante a compreensão do volume, isto é, este pode ser um método para o ensino de cálculo de volumes no Ensino Médio, conforme previsto pela BNCC (BRASIL, 2018).

No que concerne às limitações dessa proposta, é notório afirmar que a superação do ensino tradicional pode se tornar um desafio tanto para os professores como para os estudantes. Outro ponto importante a ser considerado é o tempo destinado à construção dos sólidos geométricos, pois esses necessitam de momentos diferentes. Por exemplo, a construção do sólido para a explicação do volume da esfera precisa de um tempo maior. Portanto fica a critério do docente organizar a apresentação inicial da oficina.

Esperamos que este trabalho contribua para que professores possam inovar suas práticas no ensino dos sólidos geométricos a partir do Princípio de Cavalieri. Outrossim, que a sequência didática sirva de modelo para inspirar novas possibilidades de estratégias de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BORGES, T.; OLIVEIRA, G.; BORGES, J.; RODRIGUES, M. Os blocos lógicos na educação infantil: teoria e prática. **Cadernos da Fucamp**, v. 20, n. 43, p. 165–181, 2021. ISSN 2358-0520.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 25 ago. 2025.

BRASIL. **Infográfico (PISA 2022)**. Brasília: Inep, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa. Acesso em: 25 ago. 2025.

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)**. Brasília: Inep, 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 25 ago. 2025.

CAPORALE, S. **Materiais manipulativos nas aulas de matemática**. *In*: XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). São Carlos, SP: [*s.n.*], 2014. Anais do XI ENEM.

FACCHI, M. **A importância do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco: [*s.n.*], 2022. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/27641. Acesso em: 1 dez. 2025.

GUATURA, D. **A utilização do recurso tecnológico GeoGebra com oficinas de geometria como estratégias de aprendizagem**. 2016. Dissertação (Mestrado em Projetos Educacionais de Ciências) — Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena: [*s.n.*], 2016.

LIMA, E. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, S. **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

MARTINS, R.; NETO, J.; SANTOS, D. **Laboratório de matemática: área e perímetro no geoplano**. [*S.l.*]: Universidade Federal de Sergipe (UFS), 2012. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/10183/50/124.pdf. Acesso em: 12 nov. 2024.

MUNIZ NETO, A. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. *In*: LORENZATO, S. (Ed.). **O laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3º. Campinas – SP: Autores Associados, 2012. p. 77–92.

PEREIRA, F. **Estudo do volume dos sólidos geométricos com a utilização do software GeoGebra**. 2017. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus: [*s.n.*], 2017.

SANTOS, A.; PAIVA, A.; OLIVEIRA, G.; SANTOS, J.; SANTOS, A. Jan Amos Comenius: biografia, principais ideias e contribuições para a educação. **Revista Valore (Online)**, Volta Redonda, v. 8, 2023. Disponível em: `https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/1237`. Acesso em: 30 out. 2024.

SILVA, J. **Materiais Manipulativos**: uma reflexão acerca desse recurso didático na aprendizagem de Geometria no Ensino Fundamental. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa: [*s.n.*], 2014.

SOUZA, A.; OLIVEIRA, G.; SANTOS, A.; BORGES, J. Malba Tahan: algumas das suas contribuições para a educação matemática. **Cadernos da FUCAMP**, v. 21, n. 51, p. 1237–1249, 2022.

SOUZA, T. **O teorema de Pappus Guldin e o Princípio de Cavalieri**: uma proposta de cálculo de volume de sólidos de revolução no ensino médio. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade de São Paulo, São Paulo: [*s.n.*], 2023.

VASCONCELLOS, C. Metodologia Dialética em Sala de Aula. **Revista de Educação AEC**, Brasília, n. 83, p. 1–18, 1992.