



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Raphael César de Souza Pimenta

Emaranhamento fotônico com luz estruturada

Florianópolis

2025

Raphael César de Souza Pimenta

Emaranhamento fotônico com luz estruturada

Tese de Doutorado submetido ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como re-
quisito parcial para a obtenção do título de doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro

Florianópolis

2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Souza Pimenta, Raphael César
Emaranhamento fotônico com luz estruturada / Raphael
César Souza Pimenta ; orientador, Paulo Henrique Souto
Ribeiro, 2025.
102 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Física. 2. Óptica Quântica. 3. Luz Estruturada. 4.
Fótons Gêmeos. I. Souto Ribeiro, Paulo Henrique. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Física. III. Título.

Raphael César Souza Pimenta

Emaranhamento fotônico com luz estruturada

O presente trabalho em nível de Doutorado foi avaliado e aprovado, em 04 de Dezembro de 2025, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Carlos Henrique Monken, Dr.
Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Antonio Zelaquett Khoury, Dr.
Universidade Federal Fluminense

Prof. Guilherme Luiz Zanin, Dr.
Universidade Federal de Goiás

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Física.



Documento assinado digitalmente
Natalia Vale Asari
Data: 16/12/2025 16:19:14-0300
CPF: ***.497.091-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Coordenação do Programa de Pós-Graduação



Documento assinado digitalmente
Paulo Henrique Souto Ribeiro
Data: 16/12/2025 16:02:56-0300
CPF: ***.886.506-**
Verifique as assinaturas em <https://v.ufsc.br>

Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, Dr.
Orientador(a)

Florianópolis, 2025.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, professor Paulo Henrique Souto Ribeiro, que durante todos os anos do meu doutorado ofereceu ajuda e apoio em assuntos dentro e fora do laboratório. Sem seus ensinamentos e suporte, nada disso seria possível.

Agradeço aos meus demais professores no laboratório, professor Renne Araújo e Nara Rubiano que além da relação de trabalho também se tornaram grandes amigos contribuindo em diversas frentes.

Agradeço aos colegas de laboratório, em especial meu amigo Lucas Marques, que presente esteve em todas as etapas até aqui.

Agradeço a minha família por me apoiar em minhas decisões e indecisões.

Aos amigos que fiz durante este doutorado, seja em Florianópolis ou em qualquer lugar que passei durante este projeto, obrigado. Sem tanto suporte o caminho trilhado seria ainda mais obtuso.

Agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina por financiar este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho nosso objetivo é estudar o emaranhamento entre dois fótons, no grau de liberdade espacial transversal, utilizando luz estruturada. Toda luz tem uma estrutura, mas o termo "luz estruturada" corresponde àquela que podemos controlar total ou parcialmente em diversos graus de liberdade e dimensões. Nosso primeiro experimento utilizou feixes de Airy como objeto de estudo, modulando um dos feixes gêmeos com essa estrutura. Nossos resultados mostraram que a modulação Airy não remove o emaranhamento entre os feixes. O experimento seguinte busca explorar o caráter auto-curativo do feixe de Airy, ainda carecendo de mais resultados e devidas análises para futuras conclusões. Nossa fonte de fótons emaranhados é a conversão paramétrica descendente, com cristal BBO tipo 1, e detecção de coincidências.

Palavras-chave: Óptica quântica. Luz Estruturada. Detecção de fótons.

ABSTRACT

In this work our objective is to study the entanglement between two photons, in the transverse spatial degree of freedom, using structured light. All light has a structure, but “structured light” corresponds to the truth that we can totally or partially control in different degrees of freedom and dimensions. Our first experiment used Airy beams as the object of study, modulating one of the double beams with this structure. Our results demonstrated that Airy modulation does not remove entanglement between beams. The following experiment explore the self-healing nature of the Airy beam, still lacking further results and analysis for future conclusions. Our source of entangled photons is parametric downconversion, with BBO, and coincidence detection.

Keywords: Quantum Optics. Structured Light. Photon counting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geração de pares de fótons por SPDC: o laser de bombeio incide no cristal não linear e dá origem a dois fótons correlacionados emitidos em cone. Os pontos indicam um par detectado em coincidência.	21
Figura 2 – (a) Propagação de um feixe de Airy ideal, no inset vemos a distribuição de energia do feixe na origem. (b) O mesmo padrão agora para o feixe truncado com $a=0.1$. Disponível em: (Zhang, Y. et al., 2017)	39
Figura 3 – Máscaras holográficas usadas pra geração do feixe de Airy. Em (a) temos a máscara 1D e em (b) a 2D. Disponível em: (Hu et al., 2012)	41
Figura 4 – Modelo de SLM utilizado nos experimentos desta tese.	43
Figura 5 – Esquema do arranjo experimental.	57
Figura 6 – Perfil de intensidade de um feixe 2D gerado no laboratório. Produção do autor.	60
Figura 7 – Gráfico de coincidências normalizadas em função do deslocamento vertical do detector intermediário e variando a distância de propagação (Z). As linhas sólidas são ajustes de funções gaussianas.	68
Figura 8 – Gráfico de coincidências normalizadas em função do deslocamento vertical do detector intermediário e variando a distância de propagação (Z). As linhas sólidas são adequadas às funções gaussianas. (a) Gráficos para medições de correlação posição-posição. (b) Gráficos para medições de correlação momento-momento.	68
Figura 9 – R_F em função do comprimento de inserção da obstrução b para ,fase Airy e ,sem modulação no <i>signal</i>	71
Figura 10 – Perfis de intensidade do <i>signal</i> e mapas condicionados de coincidências para $b = 0$: (a) sem modulação, (b) com fase Airy.	72
Figura 11 – Esquema geral do protocolo da máquina quântica: o esquema proposto do computador quântico consiste em uma câmera instalada na carga útil que fotografa a Terra. Em seguida, os valores de pixel são codificados na operação de um processador quântico. Esse processador recebe um estado quântico de dois fótons, que é medido na saída. Com base nas estatísticas dessas medições, a imagem é classificada como pertencente a uma classe, por exemplo vegetação, mar ou cidade. Por fim, o resultado da classificação é comunicado à estação em solo. Para cada componente do experimento, foi inserido o logotipo do grupo responsável por sua realização.	94

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESPONTÂNEA	17
2.1	SPDC EM MATERIAIS $\chi^{(2)}$ E CASO BBO TIPO-I	17
2.2	ESTADO BIFOTÔNICO NO DOMÍNIO ESPACIAL TRANSVERSAL	18
2.2.1	Hamiltoniano de interação e aproximações	18
2.3	CORRELAÇÕES POSIÇÃO–MOMENTO NO GRAU ESPACIAL TRANSVERSAL	22
2.3.1	Coordenadas canônicas e covariâncias	22
2.4	EMARANHAMENTO ESPACIAL E CRITÉRIOS DE INSEPARABILIDADE	24
2.4.1	Observáveis canônicos e normalização	24
2.5	PARTICULARIDADES DO BBO TIPO-I NO GRAU ESPACIAL	25
2.5.1	Abertura angular do anel (dependência do casamento de fase)	25
2.5.1.1	Walk-off do pump extraordinário	26
2.5.2	Perfil e foco do pump	27
2.5.3	Pumps estruturadas.	27
2.6	DETECÇÃO DE COINCIDÊNCIAS COM SPADS E CONTAGEM DE FÓTONS GÊMEOS	28
3	FEIXES DE AIRY E MODULADORES ESPACIAIS DE LUZ	33
3.1	EQUAÇÃO PARAXIAL ESCALAR E VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS	33
3.2	PROPAGAÇÃO DE FRESNEL E LIMITE DE FRAUNHOFER	34
3.3	SOLUÇÃO DE AIRY IDEAL (ENERGIA INFINITA)	35
3.4	FEIXE DE AIRY DE ENERGIA FINITA (APODIZAÇÃO)	36
3.5	REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL E FASE CÚBICA	41
3.6	MODULADOR ESPACIAL DE LUZ (SLM): PRINCÍPIO FÍSICO, MODELO E CALIBRAÇÃO	42
3.6.1	Holografia off-axis (blaze) e separação de ordens	47
3.7	GERAÇÃO EXPERIMENTAL DO FEIXE DE AIRY POR MÁSCARAS (SLM) E TRANSFORMADA DE FOURIER	48
3.7.1	Não-difração (quase-invariância) e auto-cicatrização	50
3.7.2	Auto-aceleração e limites da aproximação paraxial	50
3.7.3	Comparação conceitual: Airy vs. Bessel vs. Mathieu	52
4	EXPERIMENTO	55
4.1	VISÃO GERAL DO EXPERIMENTO	55
4.2	GERAÇÃO DO FEIXE DE AIRY POR MÁSCARA DE FASE NO SLM	58

4.3	DETECÇÃO DOS FÓTONS GÊMEOS	60
4.4	EQUAÇÃO TEÓRICA PARA AS COINCIDÊNCIAS APÓS MODULAÇÃO AIRY	62
4.5	QUANTIFICADORES DE NÃO SEPARABILIDADE E DE CORRELAÇÃO .	64
4.6	CONFIGURAÇÃO DE OBSTRUÇÃO E AUTO-CICATRIZAÇÃO NO SIGNAL	64
5	RESULTADOS	67
5.1	EXPERIMENTO I: MODULAÇÃO AIRY NO <i>SIGNAL</i>	67
5.2	EXPERIMENTO II: AUTO CICATRIZAÇÃO DO FEIXE DE AIRY NO <i>SIG-</i> <i>NAL</i> — ROBUSTEZ A OBSTRUÇÕES E IMPACTO NAS COINCIDÊNCIAS E NO EMARANHAMENTO	70
6	CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
	APÊNDICE A – INTERCÂMBIO DOUTORADO-SANDUÍCHE E PARTICIPAÇÃO NO COMPUTADOR QUÂNTICO EM ÓRBITA	93
	APÊNDICE B – PHOTONIC ENTANGLEMENT WITH ACCELE- RATED LIGHT	97
	APÊNDICE C – PARTIAL COHERENCE AND COHERENCE LENGTH IN STIMULATED PARAMETRIC DOWN CON- VERSION	99
	APÊNDICE D – REVISITING SEMICONDUCTOR BULK HAMIL- TONIANS USING QUANTUM COMPUTERS . .	101

1 INTRODUÇÃO

A óptica não linear é o ramo da óptica que descreve o comportamento da luz em meios não lineares, nos quais temos uma resposta não linear da densidade de polarização ao campo eletromagnético de um feixe intenso de luz (Saleh, B. E.; Teich, Malvin Carl, 2019). Como é necessário um feixe intenso, para estudarmos esses efeitos em laboratório utilizamos uma fonte de luz LASER. Ao irradiarmos esse feixe num meio não-linear, no nosso caso um cristal de β -BaB₂O₄ (BBO), observamos a criação de um cone de luz de diversos comprimentos de onda diferentes daquele da fonte LASER. Neste cone de luz, é possível encontrarmos um par de fótons emaranhados em diversos graus de liberdade, gerados através de processos como a soma de frequências, a oscilação paramétrica óptica, gerações de segundo e terceiro harmônicos, entre outros (Boyd, Robert W; Gaeta; Giese, 2008). Em nosso experimento, temos a soma de frequência, onde as frequências do signal e idler ao serem somadas devem corresponder a frequência do pump. Assim, nosso laser violeta oscilando entre 405 nm irradia um cristal BBO e gera pares de fótons em 810 nm. Utilizaremos esse cristal como fonte de pares de fótons emaranhados, manipulando o perfil de intensidade de um dos feixes e analisando os efeitos desta modulação no emaranhamento do estado.

No capítulo 2, analisamos a conversão paramétrica descendente espontânea ("SPDC") em seu papel como fonte de par de fótons emaranhados para nosso experimento. A SPDC é um processo de óptica não-linear que foi bastante estudado depois da invenção do laser (Grynberg; Aspect; Fabre, 2010), e comumente é utilizada como fonte de fótons correlacionados. Através de processos como a soma de frequência, a SPDC gera luz correlacionada em diversos graus de liberdade, como temporal e espacialmente ou até mesmo em polarização. Vamos nos valer da correlação no grau de liberdade espacial transversal (no domínio transversal), que os fótons idler e signal possuem ao serem criados, para analisar o efeito que uma modulação espacial causa no emaranhamento.

O capítulo 3 aborda o principal objeto de estudo deste trabalho atualmente, o feixe de Airy, um feixe não difrativo que sofre uma aceleração em sua propagação. Feixes não difrativos são conhecidos por serem pacotes de onda que se mantêm invariantes durante sua propagação. O feixe de Airy é dessa classe não difrativa, seu padrão uni ou bidimensional se mantém invariante durante toda sua propagação. Este feixe teórico careceria de energia infinita (Zhang, Y. et al., 2017) e sua equação não é de quadrado integrável (Siviloglou, Georgios A; Christodoulides, Demetrios N, 2007), tal que ele não possui significado físico real. Para que ele seja gerado no laboratório devemos truncar sua amplitude com outra função, de modo que sua energia seja finita e ele se torne quasi-não

difrativo. Sua aceleração foi investigada por Greeberg (Greenberger, 1980) que a associou com o princípio de equivalência.

Com o capítulo 4 mostraremos como foi feito o experimento e o que buscamos averiguar com ele. Através de uma fonte SPDC, mostramos que inicialmente os fótons são emaranhados quanticamente no grau de liberdade espacial transversal e partimos para criar a modulação de Airy em um dos fótons do par. A SPDC produz dois fótons em um estado puro emaranhado, chamados de *signal* e *idler*, onde modulamos o fóton *idler* com o padrão de Airy para verificar modificações no emaranhamento do estado. Fazemos inicialmente medições no plano do cristal onde os fótons são gerados, e depois deixamos ambos propagarem para um plano à frente do cristal e fazemos as mesmas verificações. A testemunha de emaranhamento se trata da desigualdade de Mancini (Mancini et al., 2002), que já foi demonstrada e utilizadas em diversos trabalhos da literatura (Howell, John C et al., 2004a; Walborn, Stephen P et al., 2010; Defienne; Gigan, 2019).

No capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos na montagem para ambas as configurações. Como esperado, o estado sem modulação gerado pelo cristal resultou em um estado emaranhado. Após atestarmos isso, partimos para a modulação de Airy no feixe *idler*, primeiramente com medidas no plano de geração do par de fótons e depois em um plano já com os feixes propagados. Ambos os resultados demonstraram que o estado se mantém emaranhado mesmo após a modulação de Airy, seja no plano do cristal e até mesmo após o feixe se propagar. Acreditamos que esses resultados tem potencial para entendermos o efeito da propagação em espaço-tempo no emaranhamento de um estado, como discutido no fim do capítulo.

Por fim no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras para o experimento. Pretendemos abordar o caráter auto-curativo do feixe de Airy, averiguando se a restauração do seu perfil de intensidade tem algum impacto no emaranhamento do estado quando comparado à mesma situação sem modulação.

Alguns dos resultados apresentados aqui estão disponíveis em (Pimenta et al., 2023).

2 CONVERSÃO PARAMÉTRICA DESCENDENTE ESPONTÂNEA

Este capítulo apresenta uma visão do processo de conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC, do inglês *Spontaneous Parametric Down-Conversion*), com ênfase nas correlações espaço-temporais (posição/momento) e nos critérios operacionais de inseparabilidade relevantes para os experimentos discutidos nesta tese.

A conversão paramétrica descendente espontânea (SPDC, do inglês *Spontaneous Parametric Down-Conversion*) é uma das fontes-padrão de pares de fótons correlacionados na óptica quântica. Sua consolidação decorre do avanço da óptica não linear após a invenção do laser, com marcos experimentais que evidenciaram a geração de pares e correlações não clássicas (Goeppert-Mayer, 1931; Harris; Oshman; Byer, 1967; Magde; Mahr, 1967; Ghosh; Mandel, L., 1987; Kwiat, P. G. et al., 1995; Boyd, Robert W et al., 1996).

Para especificidade, ao descrever interações consideramos a implementação em BBO tipo-I, adotando hipóteses de regime de baixo ganho, aproximação paraxial e bombeio clássico não depletado (Wang, 1992; Walborn, Stephen P et al., 2010; Boyd, R. W., 2020).

2.1 SPDC EM MATERIAIS $\chi^{(2)}$ E CASO BBO TIPO-I

A SPDC é um processo de mistura de três ondas em meios com susceptibilidade não linear de segunda ordem, $\chi^{(2)}$, no qual um fóton do pump é convertido probabilisticamente em dois fótons de menor energia. O processo obedece às conservações fundamentais de energia

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (1)$$

e momento

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, \quad (2)$$

onde p, s, i correspondem a "pump", "signal" e "idler", respectivamente. Em geometrias quase-colineares, a eficiência do processo é maximizada quando o casamento de fase longitudinal atende $\Delta k_z \approx 0$

$$\Delta k_z \equiv k_{p,z} - k_{s,z} - k_{i,z} \approx 0. \quad (3)$$

Consideramos um cristal BBO tipo-I, no qual os fótons gerados (*signal* e *idler*) possuem mesma polarização ordinária (*o*), enquanto o bombeio é extraordinário (*e*). A birrefringência do BBO permite ajustar o casamento de fase por rotação do cristal, definindo um cone de emissão cujo corte forma um anel no plano de observação. Próximo da degenerescência, pequenas variações do ângulo de corte controlam a abertura angular do anel e, por consequência, a largura das distribuições transversas (Wang, 1992; Saleh, B. E.; Teich, Malvin Carl, 2019).

Um efeito característico no BBO é o **walk-off** do feixe extraordinário do pump (desalinhamento entre os vetores de onda e de Poynting), que pode introduzir assimetrias no envelope espacial dentro do cristal. Teoricamente, tal efeito atua sobre o envelope do pump que “esculpe” as correlações, mas não altera a estrutura básica imposta pelas conservações (Joobeur; Saleh, B. E.; Teich, Malvin C, 1994; Torres, Juan P.; Molina-Terriza; Torner, Lluís, 2005).

Decompomos $\mathbf{k}_j = (\mathbf{q}_j, k_{j,z})$, em que $\mathbf{q}_j$ é a componente transversal. A conservação vetorial implica $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$.

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i. \quad (4)$$

Para um bombeio aproximadamente plano no cristal ($\mathbf{q}_p \approx \mathbf{0}$), segue a anti-correlação de momento transversal $\mathbf{q}_s \approx -\mathbf{q}_i$. Por dualidade canônica, tal estrutura conduz a correlações de posição no plano de imagem. A forma e a largura dessas correlações são governadas pelo perfil espacial do pump, pelo comprimento do cristal e pela dispersão birrefringente (via Δk_z) (Monken; Ribeiro; Pádua, 1998a; Schneeloch; Howell, John C., 2016b).

Adotaremos: (i) baixo ganho (depleção desprezável) (ii) aproximação paraxial para os campos gerados (iii) bombeio clássico (determinístico) (iv) casamento de fase birrefringente. No limite de cristal fino, as correlações transversas são dominadas pelo envelope do pump em cristais mais espessos, o termo de fase longitudinal associado a Δk_z atua como uma regra de seleção em espaço de modos e acopla ângulos e frequências de modo mais pronunciado (Rangarajan; Goggin; Kwiat, Paul G., 2009).

2.2 ESTADO BIFOTÔNICO NO DOMÍNIO ESPACIAL TRANSVERSAL

Nesta seção definimos a forma do estado de dois fótons gerado por SPDC em um cristal BBO tipo-I assumindo condições de contorno (baixo ganho, pump clássico não depletado e aproximação paraxial) (Wang, 1992), destacando a estrutura das correlações no grau de liberdade espacial transversal.

2.2.1 Hamiltoniano de interação e aproximações

Modelamos a interação óptica de segunda ordem pela polarização não linear proporcional a $\chi^{(2)}$ e tratamos o feixe de bombeio como campo clássico. Na representação de interação, o Hamiltoniano relevante é (Monken; Ribeiro; Pádua, 1998a)

$$\mathcal{H}_I(t) = \varepsilon_0 \int_V d^3r \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_{p,\alpha}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{s,\beta}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{i,\gamma}^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{H.c.}, \quad (5)$$

onde ε_0 é a permissividade do vácuo, V é o volume do cristal, os índices cartesianos $\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}$ obedecem à convenção de soma e p, s, i rotulam, respectivamente, pump, signal e

idler. Cada campo é decomposto em frequências positiva/negativa, $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ com $\hat{\mathbf{E}}^{(-)} = (\hat{\mathbf{E}}^{(+)})^\dagger$ por convenção, $\hat{\mathbf{E}}^{(+)} \propto e^{-i\omega t}$. O pump é tratado como campo clássico, e a sua componente cartesiana é $E_{p,\alpha}^{(+)} = \mathbf{e}_{p,\alpha} E_p^{(+)}$, com $E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_p u_p(\mathbf{r}) e^{-i\omega_p t}$ e $\mathbf{e}_p$ a polarização unitária. Os campos de signal e idler são quantizados: $\hat{E}_{\ell,\beta}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_m \sqrt{\hbar\omega_{\ell m}/(2\varepsilon_0)} e_{\ell m,\beta} u_{\ell m}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\ell m} e^{-i\omega_{\ell m} t}$, para $\ell \in \{s, i\}$. O índice m identifica o modo. Em base de ondas planas pode se tomar $m \equiv (\mathbf{k}, \sigma)$ com vetor de onda $\mathbf{k}$ e estado de polarização σ . O fator $e_{\ell m,\beta}$ é a componente β do vetor de polarização unitário $\mathbf{e}_{\ell m}$ que satisfaz $\mathbf{e}_{\ell m} \cdot \mathbf{e}_{\ell' m'}^* = 1$ e ortogonalidade entre polarizações distintas. A função $u_{\ell m}(\mathbf{r})$ é a função de modo espacial e é normalizada. Um exemplo é $u_{\ell m}(\mathbf{r}) = V_q^{-1/2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ para quantização em volume V_q . O operador $\hat{a}_{\ell m}$ aniquila um fóton no modo m do campo ℓ e obedece $[\hat{a}_{\ell m}, \hat{a}_{\ell' m'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$. A frequência angular do modo é $\omega_{\ell m}$ e o fator temporal é $e^{-i\omega_{\ell m} t}$. Em um dielétrico pode se substituir ε_0 por $\varepsilon = \varepsilon_0 n_\ell^2$ de acordo com a convenção adotada. Por definição $\hat{E}_{\ell,\beta}^{(-)} = (\hat{E}_{\ell,\beta}^{(+)})^\dagger$. (e $\hat{E}^{(-)}$ é o adjunto).

O termo H.c. garante que $\mathcal{H}_I$ é hermitiano. Aplicando a evolução temporal de primeira ordem (série de Dyson truncada) ao vácuo dos modos gerados, obtemos um estado bifotônico cuja amplitude de probabilidade conjunta depende de integrais no volume do cristal e no tempo de interação

$$|\psi\rangle \approx |0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^T dt \mathcal{H}_I(t) |0\rangle. \quad (6)$$

Após integrar sobre o tempo e sobre o volume do cristal, podemos chegar à forma integral do estado

$$|\psi\rangle \approx |0\rangle + \eta \iint d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) a_s^\dagger(\mathbf{q}_s) a_i^\dagger(\mathbf{q}_i) |0\rangle. \quad (7)$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo, η é o parâmetro de ganho (adimensional e pequeno, $|\eta| \ll 1$), $\mathbf{q}_\ell = (q_{\ell x}, q_{\ell y})$ ($\ell \in \{s, i\}$) é o vetor de onda transversal (2D) do modo de onda plana, com $d^2\mathbf{q}_\ell \equiv dq_{\ell x} dq_{\ell y}$, enquanto $a_\ell^\dagger(\mathbf{q}_\ell)$ cria um fóton no modo $(\ell, \mathbf{q}_\ell)$ e satisfaz $[a_\ell(\mathbf{q}), a_{\ell'}^\dagger(\mathbf{q}')] = \delta_{\ell\ell'} \delta^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, e $\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ é a amplitude conjunta espacial que incorpora o espectro angular do pump e o casamento de fase longitudinal, por exemplo

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \tilde{u}_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc}\left(\frac{L}{2} \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\right) \exp\left[\frac{iL}{2} \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)\right],$$

com $\tilde{u}_p$ o espectro angular do perfil do pump no cristal, L o comprimento, e $\Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = k_{pz}(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) - k_{sz}(\mathbf{q}_s) - k_{iz}(\mathbf{q}_i)$. Sob bombeio quase-monocromático, a integração temporal do operador de evolução já impõe a conservação de energia $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ no regime de baixo ganho, desprezam-se termos $\mathcal{O}(\eta^2)$ e normaliza-se o estado conforme $\iint |\eta \Phi|^2 d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i \ll 1$ (Wang, 1992).

Nesta formulação, restringimos a análise ao domínio espacial, assumindo banda espectral estreita (ou detecção quase-monocromática), de modo que as integrais de frequência ficam suprimidas na notação (Wang, 1992; Walborn, Stephen P et al., 2010).

A amplitude de probabilidade para criação conjunta de fótons nos vetores transversos $(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ fatoriza, em boa aproximação, no produto de um termo que codifica o envelope do pump e de uma função de fase associada ao casamento de fase longitudinal (Walborn, S. et al., 2004)

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \alpha(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i). \quad (8)$$

O envelope depende, essencialmente, da soma $\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$, refletindo a conservação de momento transversal imposta pelo pump (Torres, J.; Alexandrescu; Torner, Lluís, 2003) por exemplo, para bombeio gaussiano com raio w_p , o envelope efetivo no plano onde está a cintura do feixe é dado por

$$\alpha(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) = \exp \left[-\frac{w_p^2}{4} |\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i|^2 \right]. \quad (9)$$

A função de fase, por sua vez, assume a forma de sinc multiplicada por uma fase linear no comprimento do cristal

$$\phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = L \operatorname{sinc} \left(\frac{L \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)}{2} \right) \exp \left[i \frac{L \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)}{2} \right]. \quad (10)$$

Em BBO tipo-I, k_p é calculado com índice extraordinário para o pump e $k_{s,i}$ com índice ordinário para os fótons gêmeos gerados. No regime paraxial, as componentes longitudinais são expandidas em série nas componentes transversas, resultando em uma expressão para Δk_z que explicita o papel de $|\mathbf{q}_s|^2$, $|\mathbf{q}_i|^2$ e $|\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i|^2$

$$\begin{aligned} \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) &\equiv k_{p,z} - k_{s,z} - k_{i,z} \\ &\approx \Delta k_0 + \frac{|\mathbf{q}_s|^2}{2 k_s} + \frac{|\mathbf{q}_i|^2}{2 k_i} - \frac{|\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i|^2}{2 k_p}. \end{aligned}$$

A figura 1 ilustra de forma qualitativa o esquema de geração de pares por SPDC em cristal BBO tipo-I, o feixe de bombeio incide no meio e, sob a condição de casamento de fase, são emitidos dois fótons correlacionados (signal e idler) ao longo de cones cuja projeção forma anéis. A seleção de pontos nesses anéis corresponde à coleta de um par em coincidência.

No limite de cristal fino, a função de fase é aproximadamente constante na região de interesse, e as correlações são dominadas pelo envelope do pump: a dependência principal recai sobre $\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$ (Rangarajan; Goggin; Kwiat, Paul G., 2009). Para um cristal espesso, a função sinc seleciona "cascas" em espaço de modos, introduzindo estrutura angular adicional e acoplando a soma e as componentes individuais dos vetores transversos. A fronteira entre

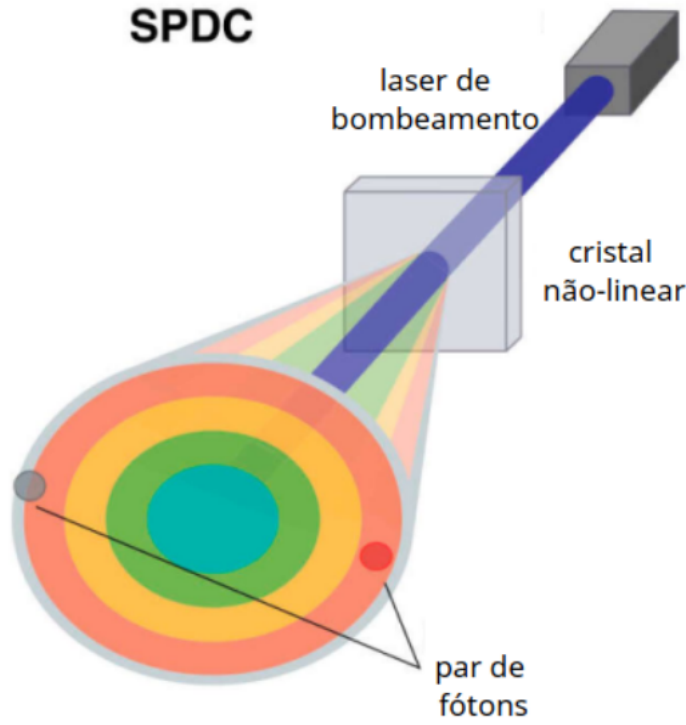


Figura 1 – Geração de pares de fótons por SPDC: o laser de bombeio incide no cristal não linear e dá origem a dois fótons correlacionados emitidos em cone. Os pontos indicam um par detectado em coincidência.

os regimes pode ser caracterizada por uma largura angular típica associada à primeira anulação da sinc (Walborn, Stephen P et al., 2010)

$$\Delta k_z(\mathbf{q}) \approx \frac{2\pi}{L} \Rightarrow \Delta q_{\text{typ}} \sim \sqrt{\frac{2\pi k_{\text{eff}}}{L}}. \quad (11)$$

As correlações de posição e momento transversos emergem de projeções conjugadas do estado. No campo distante (plano de Fourier), observa-se anti-correlação de momento transversal, consequência direta da dependência do envelope em $\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$. O mapeamento entre os ângulos de emissão e as coordenadas no plano de Fourier é dado por (Rubin, 1996; Keller; Rubin, 1997)

$$\mathbf{p}_\perp = \hbar \mathbf{k}_\perp \approx \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{\theta}, \quad (12)$$

$$\mathbf{x}_{\text{FF}} \approx f \boldsymbol{\theta}.$$

No campo próximo (plano de imagem), a distribuição conjunta em posição é, aproximadamente, a transformada de Fourier do envelope de bombeio (modulada pela função de fase), levando à correlação em x e y (Monken; Ribeiro; Pádua, 1998a; Walborn, Stephen P et al., 2010). O vínculo canônico entre ângulo e posição no plano de Fourier aparece na

$$p_x = \hbar k_x \approx \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \theta_x, \quad x_{\text{FF}} \approx f \theta_x. \quad (13)$$

Dessa maneira, o bombeio determina a direção principal das correlações (via $\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$), enquanto o casamento de fase longitudinal regula a largura e possíveis anisotropias. Podemos então definir a densidade de coincidências, que no campo distante é proporcional ao módulo quadrado da amplitude conjunta (Fonseca *et al.*, 1999)

$$G_{\text{FF}}^{(2)}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \propto |\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)|^2. \quad (14)$$

Já no campo próximo (plano de imagem), a amplitude em posição é a transformada de Fourier da amplitude em $\mathbf{q}$, a densidade de coincidências $G_{\text{NF}}^{(2)}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$ será dada por

$$G_{\text{NF}}^{(2)}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \left| \iint d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) e^{i(\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{r}_s + \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}_i)} \right|^2. \quad (15)$$

Nessas projeções, observa-se tipicamente anti-correlação em momento e correlação em posição, com larguras controladas por w_p , pelo comprimento L e pelo χ^2 . Efeitos, como o *walk-off* do pump extraordinário, desloca o envelope efetivo no interior do cristal, podendo introduzir anisotropias (por exemplo, alongamento em uma direção preferencial). Em primeira ordem, esse efeito pode ser modelado por um vetor de walk-off que desloca o argumento do envelope

$$\alpha(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \rightarrow \alpha(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{\text{wo}}), \quad (16)$$

sem alterar a forma geral da conservação transversal. Pequenas anisotropias de índices (dependência angular dos índices ordinário/extraordinário) também modulam a largura angular e podem ser incorporadas como correções na expansão de Δk_z (Molina-Terriza; Torres, Juan P.; Torner, Lluís, 2002).

2.3 CORRELAÇÕES POSIÇÃO–MOMENTO NO GRAU ESPACIAL TRANSVERSAL

Nesta seção, vamos analisar as correlações transversais e como limitações de resolução na detecção podem afetar as densidade de coincidências.

2.3.1 Coordenadas canônicas e covariâncias

Introduzimos as combinações de soma e diferença em momento e posição

$$\mathbf{q}_{\pm} \equiv \frac{\mathbf{q}_s \pm \mathbf{q}_i}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{r}_{\pm} \equiv \frac{\mathbf{r}_s \pm \mathbf{r}_i}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

No domínio de momento, a conservação transversal imposta pelo bombeio controla principalmente $\mathbf{q}_+$, enquanto o casamento de fase longitudinal controla $\mathbf{q}_-$ (Fedorov, M.; Mikhailova; Volkov, 2009; Schneeloch; Howell, John C, 2016a; Srivastav *et al.*, 2022). Por dualidade de Fourier, no domínio de posição a coordenação se inverte. É útil representar

as estatísticas por matrizes de covariância em campo distante e campo próximo no caso isotrópico, os blocos cruzados são desprezíveis:

$$\text{Cov}_{\text{CD}} \simeq \begin{pmatrix} \Sigma_{q_+} & 0 \\ 0 & \Sigma_{q_-} \end{pmatrix}, \quad \text{Cov}_{\text{CP}} \simeq \begin{pmatrix} \Sigma_{r_+} & 0 \\ 0 & \Sigma_{r_-} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Utilizando a aproximação gaussiana, no campo distante, a densidade de coincidências é proporcional ao módulo quadrado da amplitude conjunta como na equação (14), podemos escrever a amplitude em coordenadas $\mathbf{q}_{\pm}$ como gaussiana anisotrópica regulada por duas métricas simétricas definidas-positivas A e B (Schneeloch; Howell, John C, 2016a):

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \exp[-\mathbf{q}_+^T A \mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_-^T B \mathbf{q}_-]. \quad (19)$$

onde A controla a limitação em $\mathbf{q}_+$ que é determinada principalmente pelo espectro angular do pump e B controla a limitação em $\mathbf{q}_-$ que é determinada principalmente pela função de fase do cristal. Em uma dimensão escrevemos $A = a > 0$ e $B = b > 0$ e fica

$$\Phi(q_s, q_i) = \exp[-a q_+^2 - b q_-^2].$$

e então

$$\Phi(q_s, q_i) = \exp\left[-\frac{q_+^2}{2\sigma_+^2} - \frac{q_-^2}{2\sigma_-^2}\right],$$

tal que

$$\sigma_+^2 = \frac{1}{2a} \quad \sigma_-^2 = \frac{1}{2b}.$$

Como $G_{\text{FF}}^{(2)} \propto |\Phi|^2$, as larguras do padrão de coincidências ficam

$$\Sigma_+^2 = \frac{1}{4a} \quad \Sigma_-^2 = \frac{1}{4b}.$$

Em termos físicos, dois limites são especialmente úteis. Quando o pump tem grande largura espacial no cristal, o seu espectro angular é estreito. Nesse caso o parâmetro a aumenta e, pela relação $\sigma_+^2 = 1/(2a)$, a largura σ_+ diminui. A distribuição concentra-se perto de $\mathbf{q}_+ \approx \mathbf{0}$, o que favorece anticorrelação angular, isto é, $\mathbf{q}_s \approx -\mathbf{q}_i$.

Quando o cristal é suficientemente longo, no regime espesso, a função de fase impõe uma janela estreita em $\mathbf{q}_-$. O parâmetro b aumenta e, pela relação $\sigma_-^2 = 1/(2b)$, a largura σ_- diminui. A distribuição concentra-se perto de $\mathbf{q}_- \approx \mathbf{0}$, o que favorece correlação angular, isto é, $\mathbf{q}_s \approx \mathbf{q}_i$.

IPumps elípticos ($w_x \neq w_y$) e o *walk-off* do pump extraordinário no BBO podem gerar anisotropias nas direções $\hat{x}, \hat{y}$. Modelamos o pump por

$$A = \text{diag}(a_x, a_y), \quad B = \text{diag}(b_x, b_y), \quad (20)$$

o que implica

$$\sigma_{+,x}^2 = \frac{1}{2a_x}, \quad \sigma_{+,y}^2 = \frac{1}{2a_y}, \quad \sigma_{-,x}^2 = \frac{1}{2b_x}, \quad \sigma_{-,y}^2 = \frac{1}{2b_y}. \quad (21)$$

O *walk-off* pode ser incluído como um deslocamento vetorial no domínio de momento,

$$\Phi(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-) \longrightarrow \Phi(\mathbf{q}_+ - \mathbf{q}_{\text{wo}}, \mathbf{q}_-), \quad (22)$$

o que, por dualidade, corresponde a uma fase linear no domínio de posição,

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-) \propto e^{i\mathbf{q}_{\text{wo}}\mathbf{r}_+} \tilde{\Phi}_0(\mathbf{r}_+, \mathbf{r}_-). \quad (23)$$

Pequenos acoplamentos cruzados podem ser incluídos permitindo elementos fora da diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_x & a_{xy} \\ a_{xy} & a_y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_x & b_{xy} \\ b_{xy} & b_y \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Nesse caso, as covariâncias em campo distante e próximo relacionam-se por

$$\text{Cov}_{\text{FF}} \propto \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{Cov}_{\text{NF}} \propto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \quad (25)$$

2.4 EMARANHAMENTO ESPACIAL E CRITÉRIOS DE INSEPARABILIDADE

Nesta seção conectamos a estrutura do estado bifotônico espacial a critérios operacionais de não separabilidade em variáveis contínuas. Adotamos como testemunha principal o critério de Mancini–Giovannetti–Vitali–Tombesi (MGVT) (Mancini et al., 2002), formulado diretamente para combinações somas/diferenças de posição e momento transversos.

2.4.1 Observáveis canônicos e normalização

No plano paraxial, tomamos como observáveis canônicos x_j e p_j ($j = 1, 2$) satisfazendo $[x_j, p_k] = i\hbar \delta_{jk}$. A variável de momento transversal físico é $p = \hbar k_x \simeq \hbar(2\pi/\lambda) \theta_x$. Ao trabalhar no plano distante, é conveniente usar $q \equiv k_x$ e, ao final, restaurar $p = \hbar q$. No campo próximo, trabalhamos diretamente com x (coordenada física no plano conjugado àquele onde foi definida a distribuição angular). Temos as combinações

$$x_{\pm} \equiv \frac{x_1 \pm x_2}{\sqrt{2}}, \quad p_{\pm} \equiv \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}}, \quad (26)$$

de modo que x_- codifica a correlação de posição e p_+ a anti-correlação de momento esperadas para SPDC.

Para qualquer estado separável de duas partes em variáveis contínuas, vale a desigualdade de Mancini–Giovannetti–Vitali–Tombesi (MGVT) (Mancini et al., 2002)

$$\Delta^2(x_1 - x_2)\Delta^2(p_1 + p_2) \geq \hbar^2. \quad (27)$$

Sejam as combinações normalizadas por $\sqrt{2}$,

$$x_{\pm} \equiv \frac{x_1 \pm x_2}{\sqrt{2}}, \quad p_{\pm} \equiv \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}}, \quad (28)$$

temos $x_1 - x_2 = \sqrt{2} x_-$ e $p_1 + p_2 = \sqrt{2} p_+$, de modo que (27) é equivalente a

$$\Delta^2(x_-) \Delta^2(p_+) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (29)$$

Se definimos quadraturas adimensionais a partir de x_- e p_+ por

$$X \equiv \frac{x_-}{x_0}, \quad P \equiv \frac{p_+}{p_0}, \quad x_0 p_0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (30)$$

Com essa normalização, a desigualdade de separabilidade toma a forma

$$\langle \Delta^2 X \rangle \langle \Delta^2 P \rangle \geq 1, \quad (31)$$

isto é, o estado é inseparável (emaranhado) quando

$$\langle \Delta^2 X \rangle \langle \Delta^2 P \rangle < 1. \quad (32)$$

2.5 PARTICULARIDADES DO BBO TIPO-I NO GRAU ESPACIAL

Nesta seção buscamos evidenciar aspectos específicos do BBO operando em tipo-I que influenciam a estrutura das correlações espaciais, como a dependência angular do índice extraordinário do pump e a abertura do anel de emissão, o regime de cristal fino vs. cristal espesso via função de fase, efeitos do *walk-off* do pump extraordinário, influência do perfil e foco do pump e também observações sobre pumps modulados.

2.5.1 Abertura angular do anel (dependência do casamento de fase)

No BBO tipo-I degenerado ($\omega_s \simeq \omega_i \simeq \omega_p/2$), o bombeio é extraordinário (*e*) e os fótons gerados são ordinários (*o*). O índice extraordinário depende do ângulo ϑ entre o vetor de onda do pump e o eixo óptico do cristal para um cristal uniaxial,

$$k_{p,z}(\vartheta) = k_{s,z} + k_{i,z} \approx 2 k_o \left(\frac{\omega_p}{2} \right) \cos \alpha \quad (33)$$

onde $n_e \equiv n_e(\omega_p)$ e $n_o \equiv n_o(\omega_p)$ são os índices em ω_p medidos nas direções principais quando o pump incide com ângulo interno ϑ em relação ao eixo óptico (Boyd, Robert W et al., 1996; Monken; Ribeiro; Pádua, 1998a; Howell, John C. et al., 2004b; Walborn, Stephen P et al., 2010). A condição de casamento de fase longitudinal, para emissão simétrica com ângulo interno α (pequeno e idêntico para *s* e *i*), é bem aproximada por

$$k_p(\vartheta) = k_{s,z} + k_{i,z} \simeq 2 k_o(\omega_p/2) \cos \alpha, \quad (34)$$

de onde segue a abertura do anel

$$\alpha(\vartheta) = \arccos\left(\frac{k_p(\vartheta)}{2k_o(\omega_p/2)}\right), \quad k_p(\vartheta) = \frac{n_e(\vartheta)\omega_p}{c}, \quad k_o(\omega_p/2) = \frac{n_o(\omega_p/2)(\omega_p/2)}{c}. \quad (35)$$

Assim, pequenas rotações do cristal (que varrem ϑ) controlam a transição colinear ($\alpha \rightarrow 0$) $\leftrightarrow$ não-colinear ($\alpha > 0$), além de ajustar finamente a dispersão angular do anel (Wang, 1992; Boyd, R. W., 2020).

A função de casamento de fase que entra na amplitude bifotônica é, para um cristal de comprimento L ,

$$\phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = L \operatorname{sinc}\left(\frac{L \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)}{2}\right) \exp\left[i \frac{L \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)}{2}\right]. \quad (36)$$

No regime paraxial e próximo da degenerescência, a desfasagem longitudinal pode ser expandida como

$$\begin{aligned} \Delta k_z(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) &\equiv k_{p,z} - k_{s,z} - k_{i,z} \\ &\approx \Delta k_0 + \frac{|\mathbf{q}_s|^2}{2k_o(\omega_p/2)} + \frac{|\mathbf{q}_i|^2}{2k_o(\omega_p/2)} - \frac{|\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i|^2}{2k_p(\vartheta)}, \end{aligned} \quad (37)$$

onde Δk_0 é o desvio colinear ajustado por ϑ . A primeira anulação da sinc em (36) define uma largura angular típica,

$$\frac{L \Delta k_z(q)}{2} \approx \pi \Rightarrow \Delta q_{\text{typ}} \sim \sqrt{\frac{2\pi k_{\text{eff}}}{L}}, \quad k_{\text{eff}}^{-1} \equiv \left(\frac{1}{2k_o(\omega_p/2)} + \frac{1}{2k_p(\vartheta)}\right), \quad (38)$$

o que nos mostra os limites onde cristal fino (L pequeno) $\Rightarrow$ função de fase quase constante na região de interesse (correlações dominadas pelo envelope do pump), cristal espesso (L grande) $\Rightarrow$ seleção de “cascas” em espaço de modos, estabelecendo bandas para $\mathbf{q}_-$ (Walborn, Stephen P et al., 2010).

2.5.1.1 Walk-off do pump extraordinário

No cristal de BBO, o vetor de Poynting do feixe extraordinário não é colinear ao seu vetor de onda. Essa diferença angular, denominada ângulo de *walk-off* ρ (em radianos), causa um deslocamento lateral acumulado ao longo do comprimento L do cristal,

$$\Delta x_{\text{wo}} \simeq L \tan \rho \approx L \rho, \quad (39)$$

introduzindo anisotropias sutis no envelope efetivo do pump (nikogosyan2005; Boyd, Robert W et al., 1996). Um modelo conveniente (no domínio de momento) incorpora esse efeito como uma “média coerente” do pump deslocada ao longo de z :

$$\alpha_{\text{eff}}(\mathbf{q}_+) \propto \int_{-L/2}^{L/2} dz \alpha_0(\mathbf{q}_+) e^{-i q_{+,x} \rho z} = \alpha_0(\mathbf{q}_+) L \operatorname{sinc}\left(\frac{q_{+,x} \rho L}{2}\right) e^{-i \frac{q_{+,x} \rho L}{2}}, \quad (40)$$

mostrando um estreitamento adicional na direção do walk-off ($\hat{x}$ no exemplo) além de uma fase linear correspondente dualmente, no espaço real o envelope exibe um alongamento/assimetria nessa direção. No limite $\rho \rightarrow 0$, recupera-se $\alpha_{\text{eff}} \rightarrow \alpha_0$.

2.5.2 Perfil e foco do pump

O envelope do pump em $\mathbf{q}_+$ representa, em geral, o espectro angular do campo no interior do cristal. Para um feixe gaussiano elíptico com raios de cintura w_x e w_y localizados dentro do cristal, tem-se

$$\alpha(\mathbf{q}_+) = \exp \left[- \frac{w_x^2 q_{+,x}^2 + w_y^2 q_{+,y}^2}{4} \right], \quad (41)$$

de modo que o envelope “aperta” $\mathbf{q}_+$ inversamente aos raios de cintura ($\sigma_{+,x} \sim 2/w_x$, $\sigma_{+,y} \sim 2/w_y$).

Se a cintura não estiver posicionada no centro do cristal, o raio efetivo $w(z)$ segue a evolução gaussiana usual,

$$w_{x,y}(z) = w_{0,x/y} \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_{R,x/y}} \right)^2}, \quad z_{R,x/y} = \frac{\pi w_{0,x/y}^2}{\lambda_p}, \quad (42)$$

de modo que o envelope relevante para a geração corresponde, em boa aproximação, à média de $w(z)$ ao longo do cristal, $z \in [-L/2, L/2]$.

A posição do foco e o tamanho da cintura do pump exercem papel crucial na estrutura das correlações espaciais dos fótons gerados. Quando o feixe é focalizado fortemente dentro do cristal (pequenos $w_{0,x/y}$ e curtos comprimentos de Rayleigh), o campo de bombeio sofre variações de fase e amplitude significativas ao longo de L , o que degrada a correspondência entre os vetores de onda dos fótons sinal e idler e, consequentemente, reduz a pureza e o grau de correlação espacial do estado bipartido. Em contrapartida, um foco mais relaxado (grande cintura e cristal dentro da região de quase-colimação) preserva melhor o acoplamento transversal, resultando em anti-correlações mais pronunciadas no plano de Fourier (campo distante) e correlações mais estreitas no plano de imagem (campo próximo), conforme discutido nas (Bennink *et al.*, 2006; Di Lorenzo Pires; Coppens; Exter, 2011; Lee, J.-C.; Kim, Y.-H., 2016).

2.5.3 Pumps estruturadas.

Se o pump é estruturado, por exemplo elíptico, flat top, Airy ou com vórtice, o seu espectro angular $A_p(\mathbf{q})$ substitui a gaussiana em (9). No regime linear de baixo ganho, entendido como $|\eta| \ll 1$ com pump não depletado e emissão estimulada desprezível, a evolução é truncada na primeira ordem. Na ausência de elementos não locais, entendidos

como operações que atuam simultaneamente em signal e idler e não se fatoram em transformações independentes de cada braço, a estrutura do pump entra apenas no envelope $\alpha(\mathbf{q}_+) = A_p(\mathbf{q}_+)$ (Monken; Ribeiro; Pádua, 1998a; Torres, Juan P.; Alexandrescu, Adrian; Torner, Lluís, 2003; Carrasco et al., 2004; Walborn, S. P.; Pádua; Monken, 2005; Walborn, S. P.; Monken, 2007; Walborn, Stephen P et al., 2010; Straupe et al., 2011). Isso altera direção e forma das correlações em $\mathbf{q}_+$ sem criar emaranhamento por si só. O emaranhamento é fixado pela conservação de momento e pela função de fase do cristal, operações locais aplicadas a um único braço, como máscaras ou lentes, apenas reparametrizam as marginais nos planos escolhido (Walborn, Stephen P et al., 2010; Pimenta et al., 2023).

2.6 DETECÇÃO DE COINCIDÊNCIAS COM SPADS E CONTAGEM DE FÓTONS GÊMEOS

Podemos então definir como as grandezas de coincidência discutidas anteriormente se traduzem em observáveis experimentais quando se empregam fotodetectores de avalanche em modo Geiger (SPADs) associados a eletrônica de marcação temporal (*time tagging*). O objetivo é explicitar a relação entre a densidade de coincidência prevista pela teoria e as contagens de simples e de coincidências registradas em janelas temporais finitas, levando em conta as características essenciais do canal de detecção.

O diodo SPAD (Single-Photon Avalanche Diode) opera no regime de avalanche acima da tensão de ruptura (*breakdown voltage*), isto é, a tensão reversa a partir da qual o diodo se torna condutor devido ao fenômeno de multiplicação por avalanche (Cova et al., 1996; Hadfield, 2009). Neste regime, a absorção de um único fóton desencadeia uma avalanche de portadores de carga, que é rapidamente interrompida por um circuito de extinção (*quenching*) que reduz a tensão abaixo do limiar de ruptura (Cova et al., 1996; Eisaman et al., 2011). Cada evento de detecção bem-sucedido gera um pulso digital padronizado, de modo que as informações essenciais são a ocorrência do evento e seu instante de detecção (Becker, 2005; Hadfield, 2009).

Para cada braço experimental, a eficiência de detecção total (representada por η_s e η_i para signal e idler, respectivamente) consolida tanto a eficiência quântica intrínseca do detector, definida como a probabilidade de conversão fóton-elétron, quanto as perdas ópticas acumuladas ao longo do caminho (Hadfield, 2009; Eisaman et al., 2011). Consideramos também a taxa de contagens escuras (*dark counts*), decorrentes principalmente de processos térmicos e de tunelamento na ausência de fótons (Hadfield, 2009; Qian et al., 2023), e a resolução temporal do sistema, que determina a incerteza fundamental na temporização dos eventos de detecção (Becker, 2005; Buller; Collins, 2010).

Estes fatores, em conjunto, alargam o pico de correlação temporal e condicionam

a seleção da largura ótima da janela de coincidência (Becker, 2005; Hadfield, 2009). Em regimes de alta taxa de contagem, o tempo morto do detector, que é o período de inatividade necessário para a completa reconfiguração do diodo após cada detecção, e eventuais pós-pulsos podem influenciar significativamente as estatísticas de contagem (Dautet *et al.*, 1993; Cova *et al.*, 1996; Knoll, 2010). No entanto, sob as condições experimentais típicas com baixas intensidades luminosas, tais efeitos permanecem dentro de limites desprezíveis (Hadfield, 2009).

As taxas de contagem de fótons únicos em cada canal são denotadas por S_s e S_i (em eventos por segundo), enquanto C representa o número de coincidências obtido pela integração do pico no histograma de atrasos $H(\tau)$ dentro de uma janela de largura Δt_c centrada no atraso relativo entre os canais (Becker, 2005; Walborn, S. P. *et al.*, 2010; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019). No regime de baixo fluxo de bombeio, em que a probabilidade de geração de múltiplos pares por intervalo de tempo é desprezível, a contribuição dominante para o pico de coincidências origina-se de fótons pertencentes ao mesmo par correlacionado. Nesta aproximação, a taxa de coincidências verdadeiras pode ser escrita como

$$C_{\text{true}} \simeq R_p \eta_s \eta_i, \quad (43)$$

onde R_p é a taxa de geração de pares no cristal (Klyshko, 1988; Mandel, Leonard; Wolf, 1995; Monken; Ribeiro; Pádua, 1998b; Walborn, S. P. *et al.*, 2010; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019).

Sobre esse sinal útil sobrepõe-se um fundo aproximadamente constante, associado a coincidências acidentais entre eventos estatisticamente independentes. Para uma janela de integração Δt_c , a contribuição acidental é bem descrita por

$$C_{\text{acc}} \simeq S_s S_i \Delta t_c, \quad (44)$$

permitindo isolar a coincidência física por $C_{\text{true}} = C - C_{\text{acc}}$ e definir a razão coincidência-acidental $\text{CAR} = C_{\text{true}}/C_{\text{acc}}$ (Mandel, Leonard; Wolf, 1995; Becker, 2005; Walborn, S. P. *et al.*, 2010). A seleção de Δt_c busca capturar integralmente o pico de coincidência sem incorporar fundo desnecessário; na prática, adota-se uma janela algumas vezes superior à largura efetiva do pico, determinada pela combinação da incerteza temporal dos detectores com a resolução do sistema de temporização (Becker, 2005; Hadfield, 2009; Eisaman *et al.*, 2011; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019).

O histograma de atrasos $H(\tau)$ é construído a partir das diferenças temporais entre eventos registrados nos dois canais, acumuladas em intervalos de largura δt ; o máximo desse histograma determina o atraso relativo fixo entre os caminhos ópticos e a área sob o pico, integrada sobre a janela Δt_c , fornece o valor de C (Mandel, Leonard; Wolf, 1995;

Becker, 2005; Hadfield, 2009; Walborn, S. P. et al., 2010; Eisaman et al., 2011; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019). Para comparar diferentes configurações experimentais e mitigar o efeito de perdas assimétricas entre os braços, utiliza-se uma normalização que conduz ao estimador

$$g_{si}^{(2)}(0) \approx \frac{C}{S_s S_i \Delta t_c}, \quad (45)$$

o qual aumenta quando as correlações entre os fótons do par são mais pronunciadas e diminui quando as coincidências acidentais se tornam dominantes (Mandel, Leonard; Wolf, 1995; Walborn, S. P. et al., 2010; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019).

A eficiência total de cada canal pode ser estimada diretamente dos dados experimentais, sem necessidade de calibração absoluta, por meio da eficiência de Klyshko. Quando as coincidências acidentais são pequenas em comparação ao pico de correlação, obtêm-se as relações operacionais

$$\eta_s^{(K)} \approx \frac{C}{S_i}, \quad \eta_i^{(K)} \approx \frac{C}{S_s}, \quad (46)$$

com C entendido como coincidência já corrigida pelo fundo acidental de acordo com a Equação (44). Essas expressões incorporam, de forma consolidada, as transmissões ópticas, a eficiência quântica dos detectores e as eficiências de acoplamento determinadas por fibras, fendas e diafragmas (Klyshko, 1988; Mandel, Leonard; Wolf, 1995; Walborn, S. P. et al., 2010; Eisaman et al., 2011; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019).

Do ponto de vista formal, a conexão entre o formalismo teórico e as medidas experimentais é estabelecida pela integração da função de correlação de segunda ordem $G^{(2)}$ sobre os modos espaciais e espectrais coletados, bem como sobre a janela temporal do experimento (Glauber, 1963; Klyshko, 1988; Mandel, Leonard; Wolf, 1995; Monken; Ribeiro; Pádua, 1998b; Walborn, S. P. et al., 2010; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019). Considerando $G^{(2)}$ a correlação prevista para os dois braços e desprezando múltiplas gerações de pares por janela temporal e ruído de fundo, a taxa de coincidências físicas integrada em um tempo de aquisição T obedece a

$$C_{\text{true}} \propto \eta_s \eta_i \iint d\mathbf{r}_s d\mathbf{r}_i \int_{\Delta t_c} d\tau G^{(2)}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \tau), \quad (47)$$

em que as integrais espaciais abrangem as áreas efetivamente aceitas pelos sistemas de coleta e a integral temporal corresponde à janela de integração em torno do atraso relativo entre os canais (Mandel, Leonard; Wolf, 1995; Walborn, S. P. et al., 2010; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019). Essa forma evidencia que filtros espectrais, diafragmas e alinhamentos ópticos influenciam o resultado final por meio dos fatores de sobreposição com os modos coletados e das eficiências totais de cada canal.

Quando necessário, correções são aplicadas para manter as taxas de contagem dentro de um regime de interpretação direta. Para um tempo morto efetivo modelado como não paralisável, a taxa verdadeira de contagens únicas pode ser aproximada por

$$S_{\text{corr}} \approx \frac{S_{\text{meas}}}{1 - S_{\text{meas}} \tau_d}, \quad (48)$$

sendo τ_d o tempo morto característico do detector e da eletrônica associada (Dautet et al., 1993; Cova et al., 1996; Becker, 2005; Hadfield, 2009; Knoll, 2010). Em situações em que pós-pulsos se tornam relevantes, efeitos residuais podem manifestar-se em atrasos específicos no histograma de um único canal; com detectores independentes e nas taxas de contagem adotadas, o impacto sobre coincidências cruzadas permanece reduzido (Dautet et al., 1993; Cova et al., 1996; Hadfield, 2009). A escolha de Δt_c e da largura do intervalo δt do temporizador completa o quadro experimental, ajustando a resolução temporal do aparato à largura natural do pico de correlação (Becker, 2005).

Com essas definições e aproximações, as quantidades C_{true} , S_s , S_i , CAR, $g_{si}^{(2)}(0)$ e as eficiências de Klyshko passam a constituir o conjunto de observáveis que conectam diretamente a densidade de coincidência prevista pelo modelo à aquisição de dados. Nos capítulos seguintes, ao especificar geometrias e elementos ópticos particulares, faremos uso dessas mesmas definições sem alterar o esquema básico de detecção descrito aqui.

3 FEIXES DE AIRY E MODULADORES ESPACIAIS DE LUZ

Neste capítulo discutimos o feixe de Airy e a codificação de frentes de onda por moduladores espaciais de luz (SLMs), necessários para produzir feixes de Airy no laboratório. Partimos da equação paraxial escalar em 1D/2D e de sua forma adimensional, fixando a notação que será usada adiante. Em seguida, apresentamos a solução de Airy “ideal”, discutindo a fase associada e a trajetória parabólica do máximo de intensidade, e introduzimos a versão de energia finita por apodização, destacando as consequências para a quase-invariância de forma. Na sequência, conectamos a representação espectral à imposição de fase cúbica, que fundamenta a geração teórica do perfil de Airy. Por fim, descrevemos o modelo de SLM como modulador de fase. Aspectos de normalização e convenções já adotados no capítulo anterior são mantidos aqui.

3.1 EQUAÇÃO PARAXIAL ESCALAR E VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS

Considere o campo escalar monocromático $E(x, y, z)$ em meio homogêneo, que satisfaz a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (49)$$

Separamos a oscilação rápida ao longo de z de uma parte que varia lentamente escrevendo $E(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{ikz}$. A suposição de que ψ muda pouco em distâncias da ordem de um comprimento de onda significa, matematicamente, $|\partial_z \psi| \ll k|\psi|$ e $|\partial_z^2 \psi| \ll k|\partial_z \psi|$.

Substituindo $E = \psi e^{ikz}$ na equação de Helmholtz e usando a identidade de que $\partial_z^2(\psi e^{ikz}) = e^{ikz}(\partial_z^2 \psi + 2ik \partial_z \psi - k^2 \psi)$, obtemos, após cancelar os termos $\pm k^2 \psi$,

$$\partial_z^2 \psi + 2ik \partial_z \psi + \nabla_t^2 \psi = 0, \quad \text{com } \nabla_t^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (50)$$

Como ψ varia lentamente ao longo de z , o termo $\partial_z^2 \psi$ é muito menor do que $k \partial_z \psi$ e pode ser desprezado nessa ordem de aproximação. O resultado é a equação que governa a evolução da envoltória em propagação predominantemente ao longo de z (ângulos pequenos em relação ao eixo):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \nabla_t^2 \psi = 0.^1 \quad (51)$$

Em uma dimensão transversal (x), Eq. (51) se reduz a

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (52)$$

de forma que é útil definirmos,

$$s = \frac{x}{x_0}, \quad \xi = \frac{z}{kx_0^2}. \quad (53)$$

¹ Para um tratamento modal/paraxial alternativo (Eq. de Helmholtz paraxial) ver, por exemplo, Rosales-Guzmán & Forbes, SPIE Spotlight SL74 (Rosales-Guzmán; Forbes, 2024a)

Nessas relações, x_0 representa a escala transversal característica (ou cintura) do feixe, de modo que o termo kx_0^2 corresponde ao comprimento de difração, também conhecido como comprimento de Rayleigh (z_R). Fisicamente, essa normalização permite descrever a evolução do perfil transversal do feixe em diferentes planos de propagação (z) em unidades relativas à sua própria dimensão espacial, tornando a análise da difração independente de parâmetros geométricos absolutos. Dessa maneira, a Eq. (52) toma a forma canônica

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = 0. \quad (54)$$

Em 2D (x, y) procede-se de modo análogo com $s_x = x/x_0$, $s_y = y/y_0$ e $\xi = z/(kx_0^2)$.

É curioso notar que a Eq. (54) é matematicamente idêntica à equação de Schrödinger livre (com o papel de "tempo" exercido por z), o que fundamenta a conexão histórica entre os feixes de Airy ópticos e a solução de Berry–Balazs (Balazs, 1979).

3.2 PROPAGAÇÃO DE FRESNEL E LIMITE DE FRAUNHOFER

Dada a equação paraxial 1D em (52), a evolução de ψ pode ser escrita como uma convolução com o núcleo (função de Green) de Fresnel. Em variáveis dimensionais,

$$\psi(x, z) = \frac{e^{i\frac{k}{2z}x^2}}{\sqrt{i\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{k}{2z}x'^2\right] \exp\left[-i\frac{k}{z}xx'\right] \psi(x', 0) dx', \quad (55)$$

onde $\lambda = 2\pi/k$. Em 2D, substitui-se $x \rightarrow (x, y)$ e o termo quadrático por $x^2 + y^2$.

Em coordenadas adimensionais de §3.1, com $s = x/x_0$ e $\xi = z/(kx_0^2)$, o propagador assume a forma canônica

$$\psi(s, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \xi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{(s-s')^2}{2\xi}\right] \psi(s', 0) ds', \quad (56)$$

o que evidencia a escala natural de difração $z_0 = kx_0^2$ e simplifica a análise assintótica.

Denotando por $\tilde{\psi}(k_s, \xi) = \int \psi(s, \xi) e^{-ik_s s} ds$ a transformada de Fourier², a equação (54) implica a solução simples

$$\tilde{\psi}(k_s, \xi) = \tilde{\psi}(k_s, 0) \exp\left(-\frac{i}{2} k_s^2 \xi\right), \quad (57)$$

isto é, cada componente espacial k_s acumula uma fase quadrática proporcional a k_s^2 e ao “tempo” óptico ξ .

Quando $\xi \gg 1$ (equivalentemente, $z \gg z_0$), o termo de fase dominante em (55) permite a aproximação conhecida como Fraunhofer. Em forma 1D adimensional,

$$\psi(s, \xi) \approx \frac{e^{i\frac{s^2}{2\xi}}}{\sqrt{i\xi}} \tilde{\psi}\left(k_s = \frac{s}{\xi}, 0\right), \quad (58)$$

² Usaremos a convenção simétrica ao longo do capítulo: a transformada inversa é $\psi(s, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\psi}(k_s, \xi) e^{+ik_s s} dk_s$.

mostrando que o padrão no campo distante é (à menos de uma fase quadrática) a transformada de Fourier do campo no plano de entrada, amostrada em $k_s = s/\xi$. Em variáveis dimensionais, isto se reescreve como $U(x, z) \propto e^{ikz} e^{ikx^2/(2z)} \tilde{U}(k_x = \frac{k}{z}x)$, com $\tilde{U}$ a transformada do campo de entrada.

É útil notarmos que a escala $z_0 = kx_0^2$ separa os regimes de Fresnel ($z \sim z_0$) e Fraunhofer ($z \gg z_0$) e será a referência para discutirmos feixes quase-invariantes. As expressões (56)–(58) serão a base para conectar, adiante, perfis impostos no espectro (por exemplo, fases polinomiais) à formação de estruturas no espaço real, como no caso da fase cúbica associada ao feixe de Airy.

3.3 SOLUÇÃO DE AIRY IDEAL (ENERGIA INFINITA)

Partindo da forma adimensional da equação paraxial 1D,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = 0, \quad (59)$$

existe uma solução não-espalhante cujo perfil transversal é dado pela função de Airy:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt, \quad (60)$$

onde x denota a coordenada transversal adimensional e t é a variável de integração. Definindo

$$u(s, \xi) = s - \frac{\xi^2}{4}, \quad \Phi(s, \xi) = \frac{\xi s}{2} - \frac{\xi^3}{12}, \quad (61)$$

a solução ideal (de energia infinita) é

$$\psi_{\text{Ai}}(s, \xi) = \text{Ai}(u(s, \xi)) \exp[i \Phi(s, \xi)]. \quad (62)$$

No plano de entrada, $\xi = 0$, tem-se $\psi_{\text{Ai}}(s, 0) = \text{Ai}(s)$.

Usando $\text{Ai}''(u) = u \text{Ai}(u)$ e derivando (62),

$$\psi_s = \text{Ai}'(u) e^{i\Phi} + i \frac{\xi}{2} \text{Ai}(u) e^{i\Phi}, \quad \psi_\xi = \left(-\frac{\xi}{2} \text{Ai}'(u) + i \left[\frac{s}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right] \text{Ai}(u) \right) e^{i\Phi},$$

$$\psi_{ss} = \left(\text{Ai}''(u) + i\xi \text{Ai}'(u) - \frac{\xi^2}{4} \text{Ai}(u) \right) e^{i\Phi}.$$

Substituindo em (59) obtém-se cancelamento termo a termo, pois

$$\frac{1}{2} \text{Ai}''(u) - \left(\frac{s}{2} - \frac{\xi^2}{8} \right) \text{Ai}(u) = \frac{1}{2} u \text{Ai}(u) - \left(\frac{s}{2} - \frac{\xi^2}{8} \right) \text{Ai}(u) = 0,$$

com $u = s - \xi^2/4$. Logo, (62) satisfaz exatamente (59).

Já a intensidade $|\psi_{\text{Ai}}|^2$ apresenta um lóbulo principal cujo máximo segue a parábola

$$s_c(\xi) = \frac{\xi^2}{4},$$

isto é, a estrutura de máximos se desloca transversalmente com curvatura parabólica. Esse comportamento é frequentemente descrito como “auto-aceleração” do feixe, note, contudo, que o centróide do campo não acelera, a aceleração refere-se à cáustica (envoltória) dos máximos de intensidade.

É importante enfatizar que a função $\text{Ai}(s)$ não é quadrado-integrável, portanto, a solução (62) possui energia infinita e serve como idealização matemática. A versão fisicamente relevante, de energia finita (apodizada), será introduzida na próxima seção.

3.4 FEIXE DE AIRY DE ENERGIA FINITA (APODIZAÇÃO)

A solução "ideal" da Seção 3.3, $\psi_{\text{Ai}}(s, \xi) = \text{Ai}(s - \xi^2/4) e^{i(\xi s/2 - \xi^3/12)}$, não é quadrado-integrável: a função de Airy decai lentamente para $s \rightarrow +\infty$ e apresenta oscilações de amplitude não desprezível para $s \rightarrow -\infty$. Para obter um campo com significado físico real (energia finita), introduz-se no plano de entrada uma janela exponencial suave (também chamamos de truncamento),

$$\psi(s, 0) = \text{Ai}(s) e^{as}, \quad a > 0, \quad (63)$$

que atenua as contribuições de $s \rightarrow -\infty$ sem destruir a estrutura do lóbulo principal. O parâmetro a controla a intensidade dessa atenuação: valores menores preservam melhor as propriedades "Airy-like" por distâncias maiores, ao custo de uma distribuição inicial mais estendida, valores maiores concentram a energia no plano de entrada, mas encurtam o alcance de quase-invariância (Siviloglou, Georgios A; Christodoulides, Demetrios N, 2007; Siviloglou, G. A. et al., 2007a).

Na convenção de Fourier usada na Seção 3.2,

$$\tilde{\psi}(k_s, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s, \xi) e^{-ik_s s} ds, \quad \psi(s, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k_s, \xi) e^{ik_s s} dk_s.$$

$$\psi(s, 0) = \text{Ai}(s) e^{as}, \quad a > 0.$$

$$\tilde{\psi}(k, 0) = \exp\left(\frac{i}{3} (k + ia)^3\right).$$

Pela Eq. (57), cada componente acumula fase quadrática

$$\tilde{\psi}(k, \xi) = \tilde{\psi}(k, 0) \exp\left(-\frac{i}{2} k^2 \xi\right) = \exp\left(\frac{i}{3} (k + ia)^3 - \frac{i}{2} k^2 \xi\right).$$

A solução no espaço real é

$$\psi(s, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{3} (k + ia)^3 - \frac{i}{2} k^2 \xi + ik s\right) dk.$$

Introduzimos a mudança de variável

$$t = k - \frac{\xi}{2} + ia \quad \Longleftrightarrow \quad k = t + \frac{\xi}{2} - ia, \quad dk = dt,$$

e reescrevemos o expoente. Substituindo e expandindo, obtém-se

$$\frac{i}{3} (k + ia)^3 - \frac{i}{2} k^2 \xi + iks = \frac{i}{3} t^3 + i t \left(s - \frac{\xi^2}{4} + ia \xi \right) + \left[as - \frac{a \xi^2}{2} + i \left(\frac{\xi s}{2} - \frac{\xi^3}{12} + \frac{a^2 \xi}{2} \right) \right].$$

Logo,

$$\psi(s, \xi) = \exp \left[as - \frac{a \xi^2}{2} + i \left(\frac{\xi s}{2} - \frac{\xi^3}{12} + \frac{a^2 \xi}{2} \right) \right] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{i}{3} t^3 + i U t \right) dt,$$

com o argumento complexo

$$U \equiv s - \frac{\xi^2}{4} + ia \xi.$$

Pela representação integral

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(i \frac{t^3}{3} + i x t \right) dt,$$

o integral em t vale $\text{Ai}(U)$. Assim chegamos à forma fechada

$$\psi_{\text{Ai}}^{(a)}(s, \xi) = \text{Ai} \left(s - \frac{\xi^2}{4} + ia \xi \right) \exp \left[as - \frac{a \xi^2}{2} + i \left(\frac{\xi s}{2} - \frac{\xi^3}{12} + \frac{a^2 \xi}{2} \right) \right]. \quad (64)$$

Para $a \rightarrow 0^+$ recupera-se a solução ideal com argumento real $s - \xi^2/4$ e a fase $\xi s/2 - \xi^3/12$.

A forma fechada em (64) permite interpretar separadamente os efeitos de apodizar a função. O argumento $\text{Ai}(s - \xi^2/4 + ia \xi)$ contém uma parte real, $s - \xi^2/4$, que desloca o máximo principal ao longo de uma trajetória aproximadamente parabólica, preservando o desenho do lóbulo dominante durante a propagação. A parte imaginária, $ia \xi$, move o argumento no plano complexo e isso se manifesta como atenuação progressiva dos lóbulos laterais quando ξ cresce, de modo que o padrão se torna mais limpo sem perda abrupta das características próximas ao centro.

O fator multiplicativo $\exp[as - (a \xi^2)/2]$ atua em dois regimes complementares. No plano de entrada, onde $\xi = 0$, o termo as reduz gradualmente a contribuição da cauda para $s \ll 0$ e concentra a energia na vizinhança do lóbulo principal, o que facilita a implementação laboratorial de um feixe de energia finita. Ao longo da propagação, o termo $-(a \xi^2)/2$ introduz uma diminuição global da amplitude que se acentua com a distância adimensional e controla quão longe as propriedades características do feixe permanecem visíveis. Quando a é pequeno, a supressão inicial é mais branda e as propriedades de autoaceleração persistem por intervalos maiores em variáveis normalizadas, embora a distribuição inicial seja mais espalhada. Em unidades físicas, com $z = \xi k x_0^2$ e, quando

conveniente, $x = s x_0$, observa-se que o alcance útil cresce com x_0^2 e com k , o que significa que cinturas transversais maiores e números de onda mais altos prolongam a região de propagação na qual a estrutura do feixe se mantém. A fase em (64), dada por $\xi s/2 - \xi^3/12 + a^2\xi/2$, governa a curvatura da trajetória e a franja de interferência associada, acrescentando uma pequena correção dependente de a à evolução do feixe.

O termo cúbico na fase é o elemento que seleciona a família de soluções do tipo Airy. Na representação integral, a função $\text{Ai}(U)$ surge como transformada de Fourier de um fator puramente fásico do tipo $\exp(it^3/3)$ multiplicado por $\exp(iUt)$. A presença de t^3 na fase faz com que os pontos de fase estacionária satisfaçam $t^2 + U = 0$, o que produz a estrutura característica com cáustica parabólica e lóbulos assimétricos. Fases apenas lineares deslocam o feixe e fases quadráticas focam ou colimam, mas não geram a assimetria e a autoaceleração típicas do perfil de Airy. É exatamente o termo cúbico que cria o padrão de interferência capaz de manter um lóbulo principal quase invariante enquanto seu máximo segue uma trajetória aproximadamente parabólica controlada por $U = s - \xi^2/4 + ia\xi$.

Do ponto de vista experimental, a geração do feixe de Airy depende da imposição de uma fase cúbica no espectro angular seguida de uma transformada de Fourier óptica. Um feixe colimado incide em um modulador espacial de luz programado com uma máscara de fase cúbica e, após uma lente, o plano focal realiza a transformada que reconstrói a amplitude do tipo Airy. A intensidade dessa fase controla a escala transversal e a curvatura da trajetória do máximo, enquanto a apodização a regula a energia finita e a extensão axial observável. Sem a fase cúbica o resultado no plano de Fourier é gaussiano ou meramente transladado, portanto não há autoaceleração nem a sequência de lóbulos assimétrica que caracteriza o feixe de Airy.

Para valores pequenos de a e distâncias adimensionais moderadas ξ , a largura efetiva do lóbulo principal permanece praticamente constante, com variações discretas de contraste entre os lóbulos laterais. Nessa faixa de parâmetros é adequado descrever o feixe apodizado como quase não difrativo. A posição do máximo de intensidade segue a mesma parábola da solução ideal, $s_c(\xi) = \xi^2/4$, pois a parte real do argumento da Airy não é modificada pela apodização. O efeito observável da apodização manifesta-se como uma redução monotônica da amplitude global, associada ao fator $\exp[-(a\xi^2)/2]$, e como um ajuste suave do contraste decorrente do deslocamento imaginário $ia\xi$ no argumento da função.

A realização experimental de feixes de Airy exige energia finita, o que demanda suprimir a cauda para $s \rightarrow -\infty$ no plano de entrada ou, de modo equivalente, filtrar

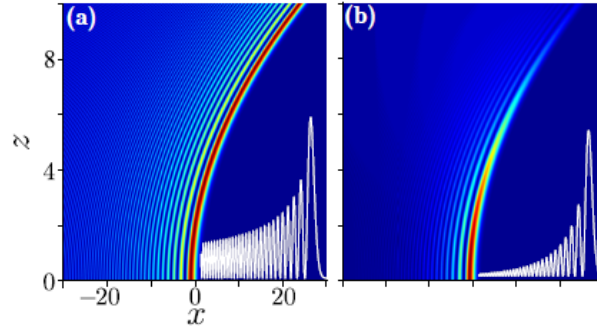


Figura 2 – (a) Propagação de um feixe de Airy ideal, no inset vemos a distribuição de energia do feixe na origem. (b) O mesmo padrão agora para o feixe truncado com $a=0.1$. Disponível em: (Zhang, Y. et al., 2017)

o espectro angular. A janela exponencial $w(x) = \exp(ax)$ preserva o lóbulo principal por vários comprimentos de difração quando a é pequeno e foi proposta/empregada nos trabalhos inaugurais sobre feixes de Airy de energia finita e sua observação experimental (Siviloglou, G. A. et al., 2007a; Siviloglou, Georgios A; Christodoulides, Demetrios N, 2007). O truncamento por abertura finita (janela retangular real) possui tratamento analítico específico e fornece métricas úteis para a distância máxima de quase-invariância (Zamboni-Rached, Michel; Nóbrega; Dartora, César A., 2012; Nóbrega; Dartora, C. A.; Zamboni-Rached, M., 2013).

Na figura 2 vemos a simulação do feixe gerado de forma ideal e de forma apodizada. O esquema de cores representa intensidade, com o lóbulo mais intenso se dissipando na propagação. A curva branca representa intensidade em função da posição.

Perfis compostos no plano de entrada também são usados. A família Airy–Gaussian resulta de uma janela Gaussiana multiplicando a Airy ideal e foi introduzida em (Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007), tendo variações e estudos posteriores (Deng; Li, H., 2012). De forma análoga, janelas do tipo Lorentz–Gaussian levam a feixes Airy–Lorentz–Gaussian, com formulação e propagação paraxial detalhadas em (Tang; Bian, 2019). No domínio espectral, abordagens de banda limitada (flat-top assimétrico) foram propostas para pulsos de Airy a fim de preservar a curvatura mantendo o conteúdo espectral dentro de uma faixa finita (Preciado; Muriel, 2012), a ideia é diretamente transponível à filtragem angular em óptica de campo contínuo. Uma visão unificada dos efeitos de apodização, escalas normalizadas e implementação com SLM pode ser encontrada na revisão (Efremidis et al., 2019a), enquanto uma análise por trajetórias ilustra de forma clara como diferentes janelas desviam gradualmente as linhas de fluxo em relação ao caso ideal (Sanz; Martínez-Herrero, 2024).

O caso bidimensional resulta naturalmente do produto de duas soluções unidimen-

sionais de Airy quando a fase cúbica e a apodização são separáveis em x e y . Com uma única escala transversal x_0 e variáveis normalizadas $s_x = x/x_0$, $s_y = y/x_0$ e $\xi = z/(kx_0^2)$, a solução de energia finita pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \psi_{\text{Ai,2D}}^{(a_x, a_y)}(s_x, s_y, \xi) &= \text{Ai}\left(s_x - \frac{\xi^2}{4} + ia_x \xi\right) \text{Ai}\left(s_y - \frac{\xi^2}{4} + ia_y \xi\right) \\ &\times \exp\left[a_x s_x + a_y s_y - \frac{(a_x + a_y)\xi^2}{2} + i\Phi(\xi, s_x, s_y)\right], \end{aligned} \quad (65)$$

com fase

$$\Phi(\xi, s_x, s_y) = \frac{\xi}{2}(s_x + s_y) - \frac{\xi^3}{6} + \frac{(a_x^2 + a_y^2)\xi}{2}. \quad (66)$$

Quando $a_x = a_y = a$ e as escalas de x e y são iguais, o máximo de intensidade percorre uma trajetória parabólica em cada eixo e o pico principal se desloca aproximadamente como $(s_{c,x}(\xi), s_{c,y}(\xi)) \simeq (\xi^2/4, \xi^2/4)$, enquanto a largura efetiva do lóbulo central permanece quase constante por distâncias moderadas em ξ , caracterizando um regime quase não difrativo em duas dimensões (Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Siviloglou, G. A. et al., 2007b; Efremidis et al., 2019a). A atenuação global é controlada por a_x e a_y através do fator real $\exp[-(a_x + a_y)\xi^2/2]$, de modo que apodizações simétricas preservam melhor a simetria do padrão e a extensão axial útil em comparação com escolhas muito assimétricas.

Se as escalas transversais diferem entre os eixos, uma formulação equivalente mantém $s_x = x/x_{0x}$ e $s_y = y/x_{0y}$, com evoluções normalizadas $\xi_x = z/(kx_{0x}^2)$ e $\xi_y = z/(ky_{0y}^2)$ aparecendo de forma independente nos argumentos das funções de Airy. Nesse caso, as trajetórias dos máximos seguem parábolas com curvaturas distintas em x e y , o que produz uma cáustica alongada e um padrão ligeiramente astigmático. Essa liberdade é útil para ajustar a curvatura e o tamanho do lóbulo principal em cada direção sem recorrer a elementos adicionais (Efremidis et al., 2019a; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007).

A geração experimental no plano de Fourier usa uma máscara de fase cúbica separável, que pode ser vista na figura 3,

$$\phi(k_x, k_y) = \beta_x k_x^3 + \beta_y k_y^3,$$

seguida da transformada óptica realizada por uma lente. O ajuste de β_x e β_y controla a escala e a curvatura nas duas direções e a inclusão de apodização exponencial ou gaussiana no mesmo plano define a energia finita do feixe (Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Efremidis et al., 2019a). Máscaras definidas em eixos rotacionados, obtidas pela mudança linear $(k_u, k_v)^\top = R(\theta)(k_x, k_y)^\top$, geram feixes de Airy alinhados a direções arbitrárias no plano, preservando a separabilidade em coordenadas (u, v) e permitindo

orientar a cáustica ao longo de diagonais ou eixos específicos do arranjo experimental. Quando desejado, apodizações alternativas como Airy–Gaussian e Airy–Lorentz–Gaussian estendem diretamente para 2D por produto das janelas em x e y ou por filtros espectrais equivalentes, reproduzindo as tendências discutidas no caso 1D quanto ao balanço entre concentração inicial e alcance de quase invariância (Tang; Bian, 2019; Deng; Li, H., 2012; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007).

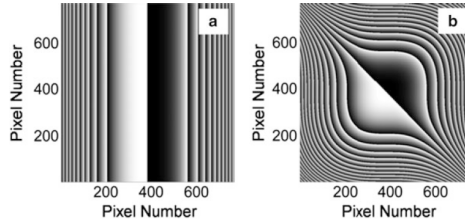


Figura 3 – Máscaras holográficas usadas pra geração do feixe de Airy. Em (a) temos a máscara 1D e em (b) a 2D. Disponível em: (Hu et al., 2012)

O caso separável $\text{Ai}(x) \text{Ai}(y)$ não transporta momento angular orbital intrínseco ($\ell = 0$). Perfis não separáveis (por exemplo, modulados por fator azimutal $e^{i\ell\varphi}$) podem carregar OAM (Kadlimatti; Parimi, 2018), mas isso foge do escopo desta seção.

3.5 REPRESENTAÇÃO ESPECTRAL E FASE CÚBICA

A solução espectral da Eq. (54) mostra que cada componente de número de onda transversal k_s propaga acumulando a fase quadrática $-\frac{i}{2}k_s^2 \xi$ (Eq. (57)). Assim, a escolha do espectro no plano de entrada $\tilde{\psi}(k_s, 0)$ determina de forma direta a estrutura do campo para $\xi > 0$.

A representação integral clássica da função de Airy,

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + x t\right)\right] dt,$$

permite identificar diretamente a transformada de Fourier de uma fase cúbica. Fazemos a mudança $t = (3\alpha)^{1/3} s$ com $\alpha > 0$ e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\alpha s^3 + i k_s s\right] ds = \frac{1}{(3\alpha)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{t^3}{3} + \frac{k_s}{(3\alpha)^{1/3}} t\right)\right] dt,$$

de onde, comparando termo a termo com a integral que define $\text{Ai}(\cdot)$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\alpha s^3 + i k_s s\right] ds = \frac{2\pi}{(3\alpha)^{1/3}} \text{Ai}\left(\frac{k_s}{(3\alpha)^{1/3}}\right). \quad (67)$$

Assim, o campo no plano de Fourier de uma função cujo argumento de fase possui termo cúbico é, a menos de constantes de escala, um perfil de Airy (Efremidis et al., 2019a; NIST Digital Library of Mathematical Functions, 2024).

No regime de Fraunhofer (Seção 3.2), o campo em distâncias grandes ξ equivale (à exceção de uma fase quadrática global) à transformada de Fourier do campo no plano de entrada, $\psi(s, \xi) \propto \tilde{\psi}(k_s = s/\xi, 0)$ (Eq. (58)). Portanto, escolhendo no plano de entrada um modulador de fase do tipo

$$\psi(s, 0) = \exp[i\alpha s^3], \quad (68)$$

o padrão no campo distante é proporcional a $\text{Ai}(k_s/(3\alpha)^{1/3})$. Em variáveis dimensionais, no plano focal de uma lente fina tem-se $k_x = (k/f)x$, de modo que o argumento assume a forma $\text{Ai}(x/x_A)$ com

$$x_A = \frac{f}{k} (3\alpha)^{1/3} = \frac{\lambda f}{2\pi} (3\alpha)^{1/3}, \quad (69)$$

o que fixa a escala transversal do feixe de Airy obtido a partir de uma máscara de fase cúbica de coeficiente α (Siviloglou, G. A. et al., 2007b; Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Saleh, B. E.; Teich, Malvin Carl, 2019).³

A versão apodizada discutida na Seção 3.4 corresponde a $\psi(s, 0) = \text{Ai}(s) e^{as}$. Sua transformada de Fourier segue diretamente da representação integral ao substituir $x \rightarrow (k_s + ia)$, resultando em $\tilde{\psi}(k_s, 0) = \exp[\frac{i}{3}(k_s + ia)^3]$. Em outras palavras, um deslocamento imaginário $k_s \rightarrow k_s + ia$ no espectro corresponde, no espaço real, à multiplicação por e^{as} , essa leitura deixa claro que o Airy de energia finita se obtém combinando a fase cúbica com uma atenuação exponencial (NIST Digital Library of Mathematical Functions, 2024; Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007). Em arranjos com SLM de fase única, o termo exponencial é implementado por codificação de amplitude, por exemplo via técnicas de dupla-fase ou hologramas de fase otimizados (Davis, J. A. et al., 1999; Arrizón, Victor et al., 2007a).

Para o caso separável em duas dimensões, usa-se uma fase cúbica por eixo, $\Phi(X, Y) = \alpha_x X^3 + \alpha_y Y^3$. A transformada de Fourier fatoriza e produz

$$\Psi(k_x, k_y) \propto \text{Ai}\left(\frac{k_x}{(3\alpha_x)^{1/3}}\right) \text{Ai}\left(\frac{k_y}{(3\alpha_y)^{1/3}}\right),$$

o que corresponde a um feixe Airy 2D com escalas independentes x_A e y_A análogas a (69). A implementação óptica segue a mesma receita do caso 1D, com máscara de fase separável e transformada por lente (Siviloglou, G. A. et al., 2007b; Efremidis et al., 2019a).

3.6 MODULADOR ESPACIAL DE LUZ (SLM): PRINCÍPIO FÍSICO, MODELO E CALIBRAÇÃO

Um modulador espacial de luz (SLM) altera, de forma endereçável por pixel, o estado de uma onda luminosa. A figura 4 mostra o modelo de modulador que foi empregado

³ Para propagação livre, substitui-se $f \rightarrow z$ em (69).

durante os experimentos que serão descritos nesta tese. Em operação ideal ele modula

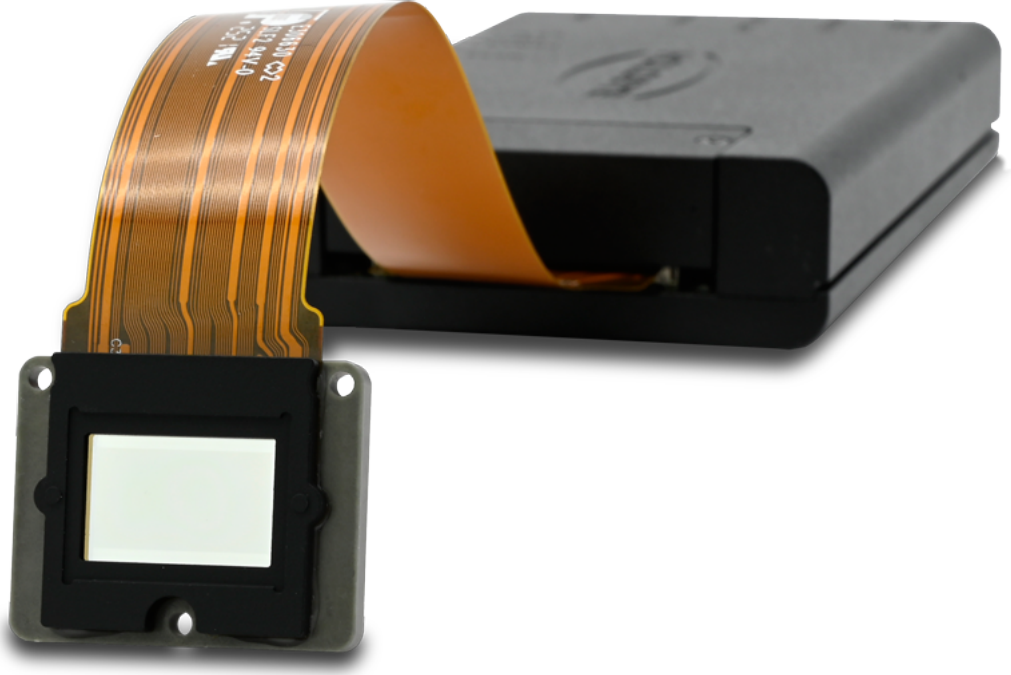


Figura 4 – Modelo de SLM utilizado nos experimentos desta tese.

fase e preserva amplitude e polarização, mas efeitos residuais podem introduzir modulação de amplitude e variações de polarização (Zhang, Z.; You; Chu, 2014; Yang, D.-K.; Wu, 2014; Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R., 2021b). Em SLMs baseados em cristal líquido, a modulação emerge da birrefringência controlável do meio. Moléculas anisotrópicas reorientam um eixo preferencial $\hat{n}$ sob campo elétrico e , com isso, a diferença entre índices extraordinário e ordinário $\Delta n = n_e - n_o$ passa a depender da tensão V aplicada ao pixel (Yang, D.-K.; Wu, 2014; Yeh; Gu, 2009). Os SLMs do tipo LCoS (Liquid Crystal on Silicon) são moduladores espaciais de luz que utilizam uma camada de cristal líquido depositada diretamente sobre um substrato de silício refletivo. Diferente dos SLMs transmissivos (Li, S.-Q. *et al.*, 2019), os LCoS operam em configuração reflexiva, onde a luz incidente é modulada e refletida pelo dispositivo. Na arquitetura refletiva LCoS, o feixe atravessa a célula, reflete em um espelho metalizado sobre o substrato de silício e a reatravessa, o que duplica o caminho birrefringente e amplia a faixa dinâmica de fase por pixel, facilitando cobrir 2π na banda de operação (Zhang, Z.; You; Chu, 2014; Rosales-Guzmán; Forbes, 2017).

Para modelagem adotamos por pixel a aproximação de um retardador linear ideal cujos eixos principais, rápido e lento, fazem ângulo θ com os eixos laboratoriais (x, y) . A

birrefringência efetiva induz uma diferença de fase

$$\delta(V, \lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(V) d, \quad (70)$$

onde d é a espessura ativa da célula. Em LCoS a diferença de fase efetiva no percurso de ida e volta é bem aproximada por $\delta_{\text{eff}} \simeq 2\delta(V, \lambda)$ (Zhang, Z.; You; Chu, 2014). No formalismo de Jones, o operador de atraso de fase ideal é (Collett, 2005; Goldstein, 2010)

$$J(\delta, \theta) = R(-\theta) \begin{bmatrix} e^{+i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix} R(\theta), \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (71)$$

de modo que um campo linearmente polarizado $\mathbf{E}_{\text{in}} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^\top$ é transformado em

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = J(\delta, \theta) \mathbf{E}_{\text{in}}. \quad (72)$$

A condição de "phase-only" aparece quando a polarização incidente é preparada alinhada a um eixo principal do pixel. Para $\alpha = \theta$ (eixo rápido) ou $\alpha = \theta + \pi/2$ (eixo lento) a polarização é preservada e o elemento atua como deslocador de fase escalar

$$\alpha = \theta \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{out}} = e^{+i\delta/2} \mathbf{E}_{\text{in}}, \quad \alpha = \theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{E}_{\text{out}} = e^{-i\delta/2} \mathbf{E}_{\text{in}}, \quad (73)$$

conforme a análise de Jones (Collett, 2005; Goldstein, 2010).

Sendo assim, a modulação de fase em SLMs é realizada por uma matriz de pixels endereçáveis, na qual cada pixel impõe um atraso de fase controlado sobre a luz incidente. Essa arquitetura e seu uso em processamento de coerência foram estabelecidos nos SLMs de LCTV e evoluíram para configurações mais avançadas (Liu; Chao, 1989; Collings et al., 1989; Efron, 1994). O controle eletrônico é feito por níveis de cinza digitais g (tipicamente 8 bits, $0 \leq g \leq 255$), cada um correspondendo a uma tensão de acionamento que define o deslocamento de fase do cristal líquido, relação já demonstrada experimentalmente nas calibrações de SLMs de TV de cristal líquido e amplamente explorada em hologramas gerados por computador (sigla "CGH" em inglês) em tempo real (Liu; Davis, Jeffrey A.; Lilly, 1985; Mok et al., 1986; Pezzaniti; Chipman, 1993). Para atingir uma operação exclusivamente de fase, condições de polarização apropriadas são empregadas para suprimir variações de amplitude e realçar a modulação de fase (Konforti; Marom; Wu, 1988; Barnes et al., 1989; Pezzaniti; Chipman, 1993). A curva $g \mapsto \delta$ não é intrinsecamente linear e depende do comprimento de onda, da temperatura, do espaçamento da célula e do esquema de acionamento, variáveis de dispositivo amplamente documentadas na literatura clássica de cristais líquidos e em compilações tecnológicas de SLMs (Collings et al., 1989; Efron, 1994; Wu; Yang, D.-K., 2001; Rosales-Guzmán; Forbes, 2017; Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R., 2021a). O formalismo de Jones também fornece um procedimento direto

de calibração da curva fase–nível de cinza. Colocando o SLM entre um polarizador de entrada e um analisador e varrendo o nível digital g mede-se a transmitância em função de δ e θ . Para geometrias paralela e cruzada entre os polarizadores tem-se

$$I_{\parallel} \propto 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad I_{\perp} \propto \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad (74)$$

o que permite extrair $\delta(V, \lambda)$ por ajuste e construir uma tabela $\phi(g, \lambda)$ monotônica em $[0, 2\pi]$ (Collett, 2005; Goldstein, 2010). Métodos interferométricos como Twyman–Green e variações de interferometria com mudança de fase refinam a calibração e permitem mapear variações espaciais da resposta de fase (Engström et al., 2013; Reichelt, 2013; Dai; Antonello; Booth, 2019; Lee, M.; Koo; Kim, J., 2023). Como a resposta é dispersiva e dependente do ângulo de incidência e da temperatura a calibração deve ser realizada no comprimento de onda e na geometria efetivamente usados (Yang, D.-K.; Wu, 2014; LCOS-SLM. . . , 2025). Em operação prática também se empregam técnicas de compensação para não uniformidades na fase por pixel em LCoS (Teng et al., 2014). Hologramas de fase única implementam campos complexos no SLM por codificação de amplitude em fase. Estratégias clássicas como a codificação de dupla fase e hologramas pixelados de fase computacional reproduzem com alta fidelidade amplitude e fase alvo (Davis, J. A. et al., 1999; Arrizón, Víctor et al., 2007). Formulações mais recentes apresentam soluções exatas e implementações eficientes para codificação simultânea de intensidade e fase usando apenas um SLM de fase (Bolduc et al., 2013a; Mendoza-Yero, Omar et al., 2014). Para uma visão de conjunto sobre geração e análise de modos estruturados com SLMs e boas práticas experimentais ver (Forbes; Dudley; McLaren, 2016; Pinnell et al., 2020; Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R., 2021b; Rosales-Guzmán; Forbes, 2017; Yang, Y.; Yang, H.; Chu, 2023; Rosales-Guzmán; Forbes, 2024b). Por se tratar de um dispositivo de pixels com passo p e fator de preenchimento finito, o painel impõe um limite de Nyquist às frequências espaciais que podem ser representadas no holograma. Este limite, em conjunto com os efeitos de amostragem discreta e o fator de preenchimento, determina como a energia óptica é distribuída entre as ordens de difração na configuração de óptica de Fourier (Goodman, 2005, 2017; Schnars; Jüptner, 2005; Voelz, 2011). Quando o conteúdo espacial do padrão ultrapassa $1/(2p)$, surgem réplicas (aliasing) e parte da energia migra para ordens indesejadas, reduzindo a eficiência na ordem escolhida para síntese do campo (Arrizón, Víctor, 1999; Schnars; Jüptner, 2005; Cibula; McIntyre, 2013). Por essa razão, algoritmos de projeto de hologramas buscam concentrar a energia na ordem de interesse sem sacrificar a fidelidade do campo-alvo, por exemplo com codificação de amplitude usando SLM "phase-only" e hologramas de fase pixelados de alta eficiência (Davis, J. A.

et al., 1999; Arrizón, Víctor et al., 2007; Mendoza-Yero, Omar et al., 2014; Birnbaum et al., 2020; Pi et al., 2022). Nos resultados a seguir, consideramos incidência próxima da normal, preparo de polarização para operação "phase-only" e uma curva $\phi(g, \lambda)$ previamente calibrada no comprimento de onda usado, nessas condições, o SLM se comporta, com boa aproximação, como um modulador escalar de fase (Zhang, Z.; You; Chu, 2014; Lazarev et al., 2019; Li, R. et al., 2019).

No formalismo de Jones, a condição para modulação puramente de fase é alcançada quando a polarização de entrada está alinhada com um dos eixos próprios do elemento birrefringente, isto é, $\alpha = \theta$ ou $\alpha = \theta + \pi/2$. Nesse caso,

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = e^{\pm i \delta/2} \mathbf{E}_{\text{in}}, \quad (75)$$

onde o sinal $\pm$ distingue entre os eixos de propagação rápida e lenta. A diferença de fase global resultante não produz variações observáveis na intensidade. Nessas condições, o SLM opera como um modulador de fase pura: a amplitude do campo permanece inalterada enquanto a fase é modulada por $\phi(V) = \pm \delta(V)/2$. Quando há desalinhamento angular ($\alpha \neq \theta$), as componentes ortogonais do campo acoplam-se, resultando em modulação conjunta de amplitude e fase. Este efeito torna-se evidente ao inserir o SLM entre polarizadores paralelos e medir a transmitância em função de δ e do desalinhamento angular:

$$T(\alpha, \theta, \delta) = 1 - \sin^2(2(\alpha - \theta)) \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (76)$$

A transmitância se mantém unitária ($T \equiv 1$) quando $\alpha = \theta$ ou $\alpha = \theta + \pi/2$, recuperando assim o caso de amplitude constante (Saleh, B. E.; Teich, Malvin Carl, 2019).

Para fins de modelagem, é conveniente expressar o mapa de fase por pixel nas geometrias transmissiva e refletiva, relacionando o parâmetro elétrico ao atraso de fase acumulado. Em primeira aproximação,

$$\begin{aligned} \phi(V, \lambda) &\simeq \frac{2\pi}{\lambda} n_{\text{eff}}(V) L_{\text{eff}} \quad (\text{transmissivo}), \\ \phi(V, \lambda, \gamma) &\simeq \frac{4\pi}{\lambda} n_{\text{eff}}(V) d \cos \gamma \quad (\text{refletivo, percurso duplo}), \end{aligned} \quad (77)$$

onde $n_{\text{eff}}(V)$ representa o índice de refração efetivo para a polarização incidente, L_{eff} denota a espessura óptica efetiva da célula, d é a espessura física e γ o ângulo interno de incidência.

Durante a operação, a função $\phi(V)$ é monotônica e utilizada de forma modular ($\text{mod } 2\pi$) para codificar máscaras de fase. Na prática experimental, assume-se que $\phi \in [0, 2\pi)$ é previamente calibrada e aproximadamente uniforme em cada pixel na região útil do painel (Zhang, Z.; You; Chu, 2014; Lazarev et al., 2019; Li, R. et al., 2019; Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R, 2021a).

A modelagem via equação (71) considera um comportamento ideal do modulador, desprezando perdas e histerese, efeitos como dispersão $\Delta n(\lambda)$, preenchimento de pixel, campos de borda e vazamento de polarização representam correções de ordem superior que preservam o quadro conceitual fundamental. Em dispositivos refletivos do tipo LCoS, a presença do espelho duplica a fase acumulada conforme a equação (77), necessitando controle preciso da polarização para alinhar o autovetor do dispositivo com a polarização projetada no plano do SLM, assegurando assim modulação exclusiva de fase. Para codificar amplitude complexa utilizando um SLM de fase única, empregam-se esquemas de codificação em fase para transformar padrões de fase em modulação de amplitude (Davis, J. A. et al., 1999; Hengeveld et al., 2022; Damaceno et al., 2025).

3.6.1 Holografia off-axis (blaze) e separação de ordens

Consideremos o campo no plano do SLM, operando como modulador de fase única (Arrizón, Victor et al., 2007b; Davis, Jeffrey A. et al., 1999). Para deslocar espacialmente, no plano de Fourier, a informação codificada pelo campo alvo $U(\mathbf{r}) = \exp[i\Phi_s(\mathbf{r})]$ e separá-la de componentes indesejados (como a ordem zero e suas réplicas), introduz-se uma portadora espacial na forma de uma fase linear ("blaze"), técnica consagrada em CGH e na supressão de ordem zero em SLMs (Lee, W.-H., 1979; Palima; Daria, V. R., 2007; Jesacher; Bernet; Ritsch-Marte, 2014):

$$H(\mathbf{r}) = \exp[i\Phi_s(\mathbf{r})] \exp(i 2\pi \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (78)$$

Pelo teorema do deslocamento da transformada de Fourier (Goodman, 2017),

$$\mathcal{F}\{H\}(\mathbf{k}) = \tilde{U}(\mathbf{k} - 2\pi \mathbf{f}_0), \quad (79)$$

onde $\tilde{U}$ denota a transformada de Fourier de $\exp[i\Phi_s]$. Assim, todo o conteúdo espectral do holograma é transladado para a frequência espacial $2\pi \mathbf{f}_0$, criando uma separação angular que permite isolar a ordem desejada mediante uma janela (filtro) espacial no plano de Fourier (Goodman, 2017; Palima; Daria, V. R., 2007).

Na implementação experimental, este princípio é realizado posicionando o SLM no plano focal de entrada de uma lente de distância focal f . Nesta configuração, o campo no plano focal de saída é proporcional à transformada de Fourier do campo incidente, sendo que as coordenadas no plano focal mapeiam as frequências espaciais via $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda f) \mathbf{r}_f$ (Goodman, 2017; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin C., 2019). Aplicando (79), obtém-se

$$U_f(\mathbf{r}_f) \propto \tilde{U}\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{r}_f - 2\pi \mathbf{f}_0\right),$$

de modo que a ordem que carrega Φ_s aparece deslocada de $\Delta \mathbf{r}_f = \lambda f \mathbf{f}_0$ (Goodman, 2017). Mediante a seleção desta componente com um diafragma no plano de Fourier (rejeitando

a ordem zero em $\mathbf{k} = 0$) e sua posterior reimagem com uma segunda lente em um arranjo $4f$, obtém-se no plano imagem um campo proporcional a $\exp[i\Phi_s(\mathbf{r})]$ ou ao alvo complexo, conforme o esquema de codificação adotado (Palima; Daria, V. R. M., 2007; Bolduc et al., 2013b; Mendoza-Yero, O.; Mínguez-Vega; Lancis, 2014).

Para evitar a sobreposição entre a ordem útil (centrada em $2\pi\mathbf{f}_0$) e a ordem zero, seleciona-se $\|\mathbf{f}_0\|$ maior que a **largura espectral efetiva** de $\tilde{U}$ somada à meia-largura da pupila de seleção. Em notação escalar (unidimensional), uma condição suficiente é

$$f_0 > B_U + B_{\text{pup}}, \quad (80)$$

onde B_U representa o raio do suporte (ou banda principal) de $\tilde{U}$ e B_{pup} caracteriza a abertura da janela de seleção no plano de Fourier. Na extensão bidimensional, aplica-se o mesmo critério vetorialmente, orientando $\mathbf{f}_0$ para maximizar a separação angular entre as ordens.

Dessa maneira, uma fase linear ideal (com perfil de "serra" de período infinito) desvia o feixe incidente de forma contínua. Quando implementada em um SLM com modulação de fase módulo 2π , esta fase converte-se em uma grade "blazed" que concentra eficientemente a energia na ordem de interesse. A escolha do vetor de portadora $\mathbf{f}_0$ é limitada pela amostragem do SLM, sujeita ao critério de Nyquist $\|\mathbf{f}_0\| < 1/(2p)$ em função do passo de pixel p , sendo os detalhes de amostragem, aliasing e quantização de fase. Na presença de termos residuais (ordem zero, ordens superiores de difração), a filtragem no plano de Fourier, realizada multiplicando $\mathcal{F}\{H\}$ por uma pupila $P(\mathbf{k})$ centrada na ordem desejada antes da transformada inversa, determina a eficiência efetiva de reconstrução do campo.

3.7 GERAÇÃO EXPERIMENTAL DO FEIXE DE AIRY POR MÁSCARAS (SLM) E TRANSFORMADA DE FOURIER

A geração experimental de feixes de Airy com energia finita baseia-se na aplicação de uma fase cúbica ao campo incidente, complementada por uma apodização exponencial fraca para tornar a solução fisicamente realizável. Na prática, um SLM de fase codifica $\phi(x) = ax^3$ em 1D (ou $\phi(x, y) = a_x x^3 + a_y y^3$ em 2D separável). Ao posicionar o SLM no plano focal de entrada de uma lente de distância focal f , o campo no plano focal de saída torna-se proporcional à transformada de Fourier do campo incidente. A implementação off-axis mediante uma grade em serra (blazed) desloca angularmente as ordens de difração e permite selecionar a ordem +1 por filtragem espacial, isolando assim o perfil de Airy. Embora muitos arranjos adotem um sistema $4f$ para facilitar a filtragem e reimagem, a geração pode ser realizada com uma única lente transformada de Fourier, ou mesmo sem lente física quando uma fase quadrática é incorporada ao holograma no próprio SLM,

conforme documentado na literatura de geração e controle por SLM (Arrizón, Víctor, 1999; Arrizón, Víctor et al., 2007; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007; Siviloglou, G. A. et al., 2007a; Siviloglou, Georgios A; Christodoulides, Demetrios N, 2007; Voelz, 2011; Zamboni-Rached, Michel; Nóbrega; Dartora, César A., 2012; Cibula; McIntyre, 2013; Saleh, B. E.; Teich, Malvin Carl, 2019; Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R, 2021a; Yang, Y.; Yang, H.; Chu, 2023).

A escala transversal do feixe deriva diretamente da integral de Airy associada à fase cúbica. Utilizando a relação $u = (k/f)x_f$ entre a frequência espacial e a coordenada no plano focal, a transformada de e^{iax^3} expressa-se como

$$U_f(x_f) \propto \frac{1}{(3a)^{1/3}} \text{Ai}\left(-\frac{1}{(3a)^{1/3}} \frac{kx_f}{f}\right) e^{i\Phi(x_f)}, \quad (81)$$

onde $\Phi(x_f)$ representa uma fase quadrática de variação lenta, irrelevante para o perfil de intensidade. Desta expressão obtém-se a escala característica $x_0 = \left[\frac{f}{k}(3a)^{1/3}\right]$: aumentar a contrai o padrão (aproximando os lóbulos), enquanto reduzir a expande o espaçamento entre eles. A apodização exponencial e^{+ax} aplicada no plano de entrada controla simultaneamente o alcance de quase não difração e o contraste entre lóbulos, conforme estabelecido na literatura sobre feixes de Airy com energia finita (Siviloglou, G. A. et al., 2007a; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007; Zamboni-Rached, Michel; Nóbrega; Dartora, César A., 2012; Zhang, Y. et al., 2017).

Na codificação com SLM de fase única, emprega-se tipicamente uma fase total $\phi_{\text{total}}(x, y) = \phi_{\text{cúbica}}(x, y) + \phi_{\text{grade}}(x, y)$, onde a grade blazed proporciona a separação angular das ordens e a seleção da ordem útil é realizada no plano de Fourier. Em SLMs LCoS, a relação entre nível de cinza e deslocamento de fase depende do comprimento de onda, polarização e temperatura, consequentemente, calibrações interferométricas e métodos de modulação de amplitude complexa (como os hologramas de Arrizón) são utilizados para linearizar a resposta e aumentar a eficiência efetiva. A amostragem do painel (passo de pixel e fator de preenchimento) impõe limites de Nyquist às frequências espaciais codificáveis, influenciando a escolha do período da grade e a janela de filtragem entre ordens. A quantização de fase e os erros de modulação introduzem perdas adicionais que devem ser balanceadas com a pureza modal desejada, conforme amplamente discutido nas referências especializadas em holografia de fase e desempenho de SLMs (Arrizón, Víctor, 1999; Arrizón, Víctor et al., 2007; Arrizón, Víctor et al., 2007a; Voelz, 2011; Cibula; McIntyre, 2013; Bolduc et al., 2013b; Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R, 2021a; Yang, Y.; Yang, H.; Chu, 2023).

3.7.1 Não-difração (quase-invariância) e auto-cicatrização

Para a solução ideal de Airy (Seção 3.3), o perfil transversal propaga-se sem alargamento no referencial que acompanha a cáustica $s_c(\xi) = \xi^2/4$: a estrutura dos lóbulos mantém sua forma enquanto se desloca ao longo da trajetória parabólica (Balazs, 1979; Siviloglou, G. A. et al., 2007a; Zhang, Y. et al., 2017; Efremidis et al., 2019a). Na versão de energia finita (Seção 3.4), a apodização introduz um decaimento suave com ξ , porém a largura característica do lóbulo principal permanece aproximadamente constante no intervalo $0 \leq \xi \lesssim \xi_{\max}(a)$, daí a designação de propagação quase não difrativa (Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007; Zamboni-Rached, Michel; Nóbrega; Dartora, César A., 2012; Zhang, Y. et al., 2017).

Este comportamento pode ser compreendido mediante a representação de Fresnel: o campo em $\xi > 0$ constitui uma superposição de contribuições com fase cúbica no domínio espectral. A condição de fase estacionária organiza a interferência de modo a concentrar energia ao longo da cáustica parabólica, estabilizando a largura do lóbulo principal no referencial acelerado (Goodman, 2017; Zhang, Y. et al., 2017; Efremidis et al., 2019a).

Quando uma obstrução local remove parte do campo próximo à entrada, por exemplo, um intervalo em s ao redor do lóbulo principal, o feixe tende a reconstituir esse lóbulo após certa distância. Na formulação da integral de Fresnel, a multiplicação por uma máscara $M(s)$ no plano de entrada convolve o espectro cúbico do Airy. Como a formação da cáustica envolve um contínuo de contribuições (especialmente das “caudas” em $s \ll 0$), a informação necessária para reconstruir o lóbulo não é completamente destruída por uma obstrução limitada. O resultado é o fenômeno de auto-cicatrização: o lóbulo principal reaparece mais adiante, com contraste e amplitude determinados pela apodização e pelo tamanho da obstrução (Broky et al., 2008; Zhang, Y. et al., 2017). Este efeito é intrínseco à estrutura de fase cúbica e não requer reflexão ou não linearidades.

Por fim, a aceleração refere-se à cáustica (envoltória dos máximos de intensidade), o centróide do campo, por conservação do momento transversal médio, não acelera. Deste modo, a invariância da largura e o deslocamento parabólico dos máximos podem coexistir com um centróide retilíneo (Siviloglou, Georgios A. et al., 2008; Zhang, Y. et al., 2017; Efremidis et al., 2019a).

3.7.2 Auto-aceleração e limites da aproximação paraxial

A solução de Airy exibe uma auto-aceleração aparente, na qual o máximo de intensidade segue a trajetória parabólica $s_c(\xi) = \xi^2/4$. Este comportamento emerge diretamente da representação integral da função de Airy, cuja interpretação óptica foi

inicialmente proposta por Berry e Balazs ao descrever pacotes de onda não dispersivos em potencial linear (Balazs, 1979). Décadas depois, a implementação óptica confirmou experimentalmente tanto o deslocamento parabólico quanto a quase-invariância de forma (Siviloglou, G. A. et al., 2007a; Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007).

Escrevendo o campo ideal como $\psi_{\text{Ai}}(s, \xi) = \text{Ai}(u)e^{i\Phi}$, com $u(s, \xi) = s - \xi^2/4$ e $\Phi(\xi, s) = \xi s/2 - \xi^3/12$, a integral geratriz $\text{Ai}(u) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\frac{t^3}{3} + ut)} dt$ possui pontos estacionários determinados por $\partial_t(\frac{t^3}{3} + ut) = t^2 + u = 0$. A cáustica ocorre quando estes pontos coalescem em $t = 0$ ($u = 0$), resultando em $s = \xi^2/4$. Portanto, a "aceleração" refere-se especificamente à envoltória dos máximos de intensidade, e não ao movimento do centróide do campo (Berry; Upstill, 1980; Efremidis et al., 2019a; Zhang, Y. et al., 2017).

Para elucidar esta distinção, considere os momentos adimensionais

$$\langle s \rangle(\xi) = \frac{\int s |\psi|^2 ds}{\int |\psi|^2 ds}, \quad \langle k_s \rangle(\xi) = \frac{\int \psi^* (-i \partial_s) \psi ds}{\int |\psi|^2 ds}.$$

A equação paraxial $i \partial_\xi \psi + \frac{1}{2} \partial_s^2 \psi = 0$ implica

$$\frac{d \langle s \rangle}{d \xi} = \langle k_s \rangle, \quad \frac{d \langle k_s \rangle}{d \xi} = 0,$$

demonstrando que $\langle k_s \rangle$ permanece constante e o centróide desloca-se retilineamente. Quando $\langle k_s \rangle(0) = 0$, tem-se $\langle s \rangle(\xi) = \langle s \rangle(0)$ para todo ξ . A aceleração observada constitui, assim, uma propriedade de interferência associada à cáustica, plenamente compatível com a conservação do momento transversal médio (Siviloglou, Georgios A. et al., 2008; Saleh, B. E. A.; Teich, Malvin Carl, 2019; Efremidis et al., 2019a).

O portador de fase em ψ_{Ai} apresenta gradiente $\partial_s \Phi = \xi/2$, de modo que o número de onda transversal local é $k_x \simeq (\partial_s \Phi)/x_0 = \xi/(2x_0)$. O ângulo de propagação (assumido pequeno) é $\theta \simeq k_x/k = \xi/(2kx_0)$. A condição paraxial $\theta \ll 1$ estabelece o domínio de validade

$$\boxed{\xi \ll 2kx_0} \quad \left(\text{equivalentemente, } z \ll 2k^2 x_0^3 \right), \quad (82)$$

no qual o propagador de Fresnel (fase quadrática em k_x) descreve adequadamente a evolução e a lei $s_c(\xi) = \xi^2/4$ mantém sua acurácia, exceto por correções devidas à apodização (Goodman, 2017; Efremidis et al., 2019a; Zhang, Y. et al., 2017).

Quando θ deixa de ser pequeno, termos de ordem superior na expansão de $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ tornam-se relevantes (por exemplo, termos $\propto k_x^4/k^3$), e o propagador deixa de ser puramente quadrático. Neste regime, a trajetória do máximo sofre pequenas correções em relação à parábola $s_c = \xi^2/4$, a largura do lóbulo principal passa a variar significativamente, e efeitos vetoriais associados à polarização tornam-se relevantes para

aberturas numéricas elevadas. Tais regimes têm sido investigados no contexto de feixes não paraxiais e soluções aceleradas de campo completo (Greenfield *et al.*, 2011; Kaminer; Segev; Christodoulides, D. N., 2012; Novitsky, D. V.; Novitsky, A. V., 2011; Zhang, Y. *et al.*, 2017; Efremidis *et al.*, 2019a). No feixe de Airy apodizado, o decaimento exponencial ao longo de ξ (Seção 3.4) provoca a perda da "invariância" de forma antes mesmo que os efeitos não paraxiais se tornem significativos (Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007; Zamboni-Rached, Michel; Nóbrega; Dartora, César A., 2012).

Assim, podemos entender que a auto-aceleração manifesta-se geometricamente como uma cáustica de dobra resultante da interferência gerada pela fase cúbica, permanecendo compatível com um centróide retilíneo. A lei parabólica e a quase-invariância mantêm sua validade desde que se respeite o limite estabelecido em (82) e a apodização mantenha o campo dentro da janela útil de propagação (Berry; Upstill, 1980; Zhang, Y. *et al.*, 2017; Efremidis *et al.*, 2019a).

3.7.3 Comparação conceitual: Airy vs. Bessel vs. Mathieu

Embora o feixe de Airy seja nosso foco, é útil situá-lo no panorama mais amplo das soluções quase ou não-difrativas da equação de Helmholtz no regime paraxial. Entre essas soluções, os feixes de Bessel e de Mathieu formam, ao lado do Airy, três "arquétipos" com propriedades de invariância de forma, porém sustentadas por mecanismos distintos: no Airy, a preservação do lóbulo principal emerge de uma distribuição espectral com fase cúbica e de uma cáustica parabólica. No Bessel, a estabilidade transversal decorre da superposição cônica de ondas planas e de um suporte espectral anular. Já no Mathieu, a invariância está ligada à separação de variáveis em coordenadas elípticas e ao suporte elíptico no espaço de frequências. A comparação entre essas três classes permite explicitar como as diferenças na estrutura espectral se traduzem em trajetórias de máximos, autocatrização, sensibilidade à truncagem e janela útil de propagação, fornecendo assim critérios objetivos para a seleção do perfil mais adequado em aplicações de óptica não difrativa.

Cada uma dessas três soluções preserva sua forma transversal mediante mecanismos fundamentais diferentes. Em todos os casos, as soluções ideais possuem energia infinita, necessitando de truncagem ou apodização para implementação prática, o que limita a extensão longitudinal na qual a quase-invariância se mantém (Balazs, 1979; Siviloglou, G. A. *et al.*, 2007a; Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007; Efremidis *et al.*, 2019a; Zhang, Y. *et al.*, 2017).

Como já discutimos, no caso do feixe de Airy, a preservação parcial da forma decorre de uma fase cúbica no domínio espectral. Em uma dimensão, a solução expressa-se como

$$\psi_{\text{Ai}}(s, \xi) = \text{Ai}(s - \xi^2/4) \exp[i(\xi s/2 - \xi^3/12)],$$

com máximos de intensidade que seguem a cáustica parabólica $s_c(\xi) = \xi^2/4$, enquanto o centróide do campo permanece estacionário. A versão de energia finita, obtida mediante apodização exponencial, preserva a estrutura do lóbulo principal ao longo de uma janela finita de propagação (Siviloglou, G. A. et al., 2007a; Siviloglou, G. A.; Christodoulides, D. N., 2007; Bandres, Miguel A.; Gutiérrez-Vega, Julio C., 2007; Efremidis et al., 2019a; Zhang, Y. et al., 2017).

Para o feixe de Bessel, a invariância transversal resulta de uma superposição cônica de ondas planas com idêntico módulo da componente transversal. Um representante típico é

$$\psi_{\text{Bes}}(r, z) = J_0(k_r r) e^{ik_z z}, \quad k_z^2 + k_r^2 = k^2,$$

com suporte espectral concentrado em um anel $|\mathbf{k}_t| = k_r$. Diferentemente do feixe de Airy, não há deslocamento parabólico dos máximos; a propagação mantém o perfil radial invariante e exibe auto-cicatrização pronunciada devido à interferência ao longo do cone. A truncagem realizada por aberturas anulares, axicons ou máscaras digitais determina a distância ao longo da qual o feixe se mantém aproximadamente estável (Durnin, 1987; Durnin; Miceli J. J.; Eberly, 1987; Gori, 1987; McGloin; Dholakia, 2005; McLeod, 1954; Vasara; Turunen; Friberg, 1989).

Para o feixe de Mathieu, a preservação da forma está associada à separabilidade da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas elípticas. Os perfis transversais são descritos por funções de Mathieu radiais e angulares, gerando padrões com anéis elípticos que mantêm invariância de forma ao longo de z . No domínio espectral, o suporte distribui-se em estruturas elípticas análogas ao anel de Bessel, sendo controlado por parâmetros de elipticidade e ordem. A versão truncada (por exemplo, Mathieu-Gauss) delimita um intervalo finito de quase não difração (Gutiérrez-Vega, J. C.; Iturbe-Castillo; Chávez-Cerda, 2000; Gutiérrez-Vega, J. C.; Bandres, M. A., 2003; Efremidis et al., 2019a).

Em síntese, o feixe de Airy preserva sua forma mediante uma cáustica parabólica com deslocamento lateral dos máximos, o Bessel mediante interferência cônica com simetria axial, e o Mathieu mediante separabilidade elíptica herdada do sistema de coordenadas. A seleção entre estes feixes depende do suporte espectral desejado, da janela de propagação requerida e do método de geração disponível (Durnin; Miceli J. J.; Eberly, 1987; Gori, 1987; Gutiérrez-Vega, J. C.; Iturbe-Castillo; Chávez-Cerda, 2000; Zhang, Y. et al., 2017).

4 EXPERIMENTO

Este capítulo apresenta o arranjo experimental, os alinhamentos e os procedimentos de medida usados em dois estudos: a persistência do emaranhamento sob modulação do feixe com perfil do tipo Airy e a auto-cicatrização do emaranhamento diante de obstruções parciais no caminho do fóton signal. Seguimos as convenções dos Capítulos 2 e 3: $\mathbf{r} = (x, y)$ e $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ para posição e momento transversos (em 1D, x e k_x), quadraturas adimensionais X e P definidas a partir de x_- e p_+ como em (29), e a descrição de propagação/Fourier de §3.2, em particular a relação de Fraunhofer na (58). A geração do perfil Airy por máscara de fase no SLM segue §3.7.

No primeiro experimento, aplicamos a modulação no braço do signal e medimos coincidências condicionais em posição e em momento, com a modulação ligada e desligada, para verificar a preservação do emaranhamento. Num segundo, inserimos obstruções parciais controladas no mesmo braço modulado para testar a "auto-cicatrização" e observar como isso se reflete nas coincidências e nos quantificadores de correlação. Em ambas as partes, mantemos as mesmas escalas, mapeamentos e critérios de análise dos capítulos anteriores.

4.1 VISÃO GERAL DO EXPERIMENTO

O experimento utiliza uma fonte de SPDC bombeada por um laser contínuo de diodo quase monocromático operando em torno de 405 nm. Após a geração no cristal, o bombeio residual é removido por filtros de rejeição, enquanto os fótons signal e idler degenerados são selecionados mediante filtros passa-banda centrados em 810 nm imediatamente antes das SPADs. A configuração adotada separa espacialmente os dois braços de detecção, preservando assim as anticorrelações de momento transversal que serão exploradas nas medidas condicionais. Mantêm-se as convenções de variáveis estabelecidas nos capítulos anteriores, onde (x, y) e (q_x, q_y) representam as coordenadas transversais de posição e momento, respectivamente, com a relação de Fraunhofer e o mapeamento entre coordenadas no plano de Fourier e vetores de onda conforme definidos na Seção 3.2 e na Equação (58).

O braço do signal incorpora um modulador espacial de luz (SLM) em configuração reflexiva. Em seu estado inativo, o dispositivo atua como um espelho convencional, preservando o perfil gaussiano original do feixe. Quando ativado, o SLM aplica uma máscara programada que implementa a modulação de fase necessária para gerar o perfil do tipo Airy no plano de Fourier. Para isolar seletivamente a primeira ordem de difração, utiliza-

se uma abertura espacial posicionada no plano de Fourier correspondente (suprimido da Figura 5), garantindo que apenas a componente modulada contribua para as medidas de coincidência. Um espelho de comutação no mesmo braço permite alternar rapidamente entre as condições com e sem modulação, mantendo idêntico o caminho óptico efetivo em ambas as configurações. Adicionalmente, um bloqueador transladável pode ser inserido no caminho do signal para realizar obstruções parciais controladas durante as medidas de auto-cicatrização (*self-healing*).

Ambos os braços do experimento utilizam conjuntos de lentes intercambiáveis que permitem imagear o plano do cristal ou realizar sua transformada de Fourier diretamente nos detectores. No signal, lentes dedicadas formam a imagem do cristal no SLM e em um espelho de referência, enquanto outro par realiza a transformada de Fourier do plano do SLM sobre um plano intermediário onde se encontra a abertura de seleção de ordem. No idler, um conjunto análogo permite medir tanto distribuições de posição quanto de momento. Em todas as geometrias, o detector D2 é mantido fixo na vizinhança do máximo de coincidências e o detector D1 é varrido ao longo do eixo vertical da mesa óptica com passo conhecido. As taxas de contagem de fótons únicos e de coincidências são registradas simultaneamente com janelas temporais fixas por ponto de varredura, permitindo a extração das distribuições condicionais e de seus parâmetros de ajuste.

A Figura 5 mostra um esquema da configuração experimental. Um laser de diodo contínuo oscilando a 405 nm bombeia um cristal de BBO, cortado para casamento de fase do tipo I. Seu espectro angular é moldado pela lente L1 para otimizar as correlações espaciais nos planos de detecção. A lente L2 (L3) é usada para imagear a face do cristal no plano do SLM (M2). O SLM está configurado para aplicar uma máscara de fase que realiza uma modulação de fase cúbica em função do eixo transversal vertical no campo *signal*. A difração dessa máscara cúbica dá origem a um feixe de Airy no campo distante. Quando o SLM não está aplicando a máscara cúbica, ele é programado para atuar como um espelho e refletir o feixe incidente. L4 (L5) implementa a transformada óptica de Fourier do plano do SLM (M2) no plano M1 (M3). No caminho do *signal*, inserimos um bloqueador de intensidade (IB) que intercepta e bloqueia parcial ou completamente o feixe ocioso. A lente L6 (L7) imageia o plano de Fourier no plano de detecção do SPCM D1 (D2). As coincidências entre os fótons do *signal* e do *idler* detectados pelos SPCM D1 e SPCM D2 são registradas pela caixa de coincidências (CB). Os dados são salvos em um computador.

O arranjo óptico permite operar cada braço em duas configurações complementares: formação de imagem do plano do cristal no detector e leitura no plano de Fourier desse mesmo plano. No braço do signal, a imagem do cristal é projetada inicialmente sobre o

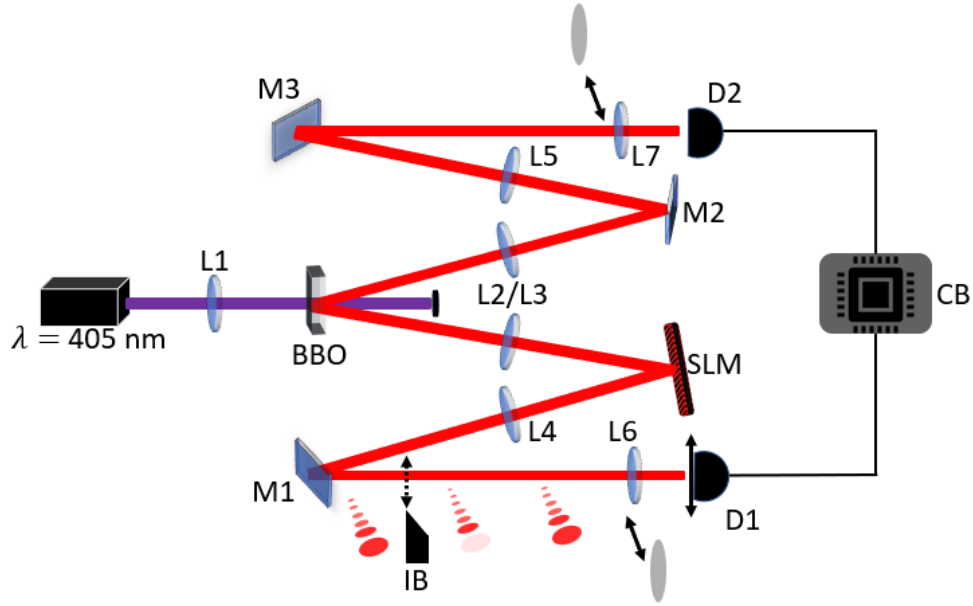


Figura 5 – Esquema do arranjo experimental.

modulador espacial de luz (SLM), garantindo que a modulação seja aplicada em um plano opticamente conjugado ao cristal. Após o SLM, forma-se o plano de Fourier onde uma abertura de diâmetro ajustável isola seletivamente a primeira ordem de difração, correspondente à componente modulada. Um segundo estágio óptico mapeia então, conforme a configuração desejada, o plano de Fourier ou o plano imagem sobre o detector do sinal. No braço do idler, que não possui modulador, um conjunto equivalente de lentes permite alternar entre as geometrias de imagem e Fourier, assegurando simetria nas escalas para as medidas condicionais.

Para a operação em imagem, utilizamos pares de lentes em configuração telescópica, com magnificação geométrica $M = -f_2/f_1$. O plano do cristal é posicionado no plano objeto da primeira lente, e o plano conjugado é formado no detector com a magnificação desejada. Esta configuração é empregada tanto para ajustar a imagem do cristal no SLM quanto para formar diretamente a imagem no detector durante as medidas de distribuição espacial. A magnificação efetiva adotada nas medidas coincide com aquela utilizada nos cálculos do Capítulo 2, de modo que um deslocamento Δx_{est} do estágio de varredura corresponde a um deslocamento $x = M \cdot \Delta x_{\text{est}}$ no plano do cristal.

Para a operação em Fourier, posicionamos o detector no plano focal de uma lente de distância focal f , de modo que a coordenada transversal x_f no plano do detector corresponda ao componente angular k_x do campo, conforme a relação de Fraunhofer estabelecida:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda f} x_f,$$

equivalente a $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda f)\mathbf{r}_f$ em duas dimensões. No braço do sinal, a leitura no plano

de Fourier é realizada após o SLM e a seleção da primeira ordem, de forma que o padrão medido represente a transformada de Fourier da modulação aplicada ao feixe. Quando é necessário manter a escala angular invariante a reposicionamentos longitudinais, empregamos um arranjo $4f$ no qual o plano do SLM é mapeado em um plano de Fourier intermediário e, subsequentemente, em um segundo plano de Fourier no detector, preservando o fator de escala $2\pi/(\lambda f)$.

A posição do plano de Fourier que contém a abertura de seleção é determinada pelo foco da lente posicionada imediatamente após o SLM. A abertura é centralizada na primeira ordem de difração e calibrada para rejeitar a ordem zero e as ordens superiores, minimizando contaminações sem comprometer o espectro útil. O plano selecionado é então reimageado no detector do sinal para medidas de distribuição espacial, ou relido no plano de Fourier para medidas de distribuição angular. O braço do idler segue a mesma lógica, com a escolha entre imagem e Fourier baseada nos mesmos critérios, mantendo o detector D2 fixo na região de máxima coincidência durante as varreduras do sinal.

Para assegurar a consistência entre o formalismo teórico e as medidas experimentais, o mapeamento de escalas é verificado em duas etapas. Inicialmente, com o SLM configurado como espelho plano, confirmamos a anticorrelação $q_s \approx -q_i$ no plano de Fourier e a coincidência dos planos conjugados no modo imagem, ajustando as distâncias lente-objeto e lente-imagem até a sobreposição do máximo de coincidências. Posteriormente, com a modulação ativada e a primeira ordem selecionada, recalibramos o centro do padrão no plano de Fourier e validamos que o fator $(2\pi/\lambda f)$ reproduz a escala angular prevista pela análise do Capítulo 2.

4.2 GERAÇÃO DO FEIXE DE AIRY POR MÁSCARA DE FASE NO SLM

A máscara empregada no experimento é unidimensional no domínio angular k_x , combinando fase cúbica com apodização gaussiana e um termo linear para controle de posicionamento. Utilizamos a variável adimensional $k \equiv k_x/k_A$, onde k_A define a escala espacial característica. A transmissão alvo no plano de Fourier do sinal é dada por

$$T_A(k) = \exp(-ak^2) \exp\left[\frac{i}{3}(k^3 - 3a^2k)\right], \quad (83)$$

sendo $a > 0$ o parâmetro de apodização (truncamento). O fator global $\exp(a^3/3)$, por ser uma constante de ganho, é omitido por não afetar a distribuição de fase.

Para deslocar espacialmente o padrão por $+x_0$ no plano de detecção, considerando nossa convenção de transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x) = \int G(k_x)e^{ik_x x} dk_x$, multiplicamos

o espectro por $\exp(-ik_x x_0)$. Assim, na variável física k_x , a transmissão assume a forma

$$T(k_x) = \exp \left[-a \left(\frac{k_x}{k_A} \right)^2 \right] \exp \left\{ i \left[\frac{k_x^3}{3k_A^3} - a^2 \left(\frac{k_x}{k_A} \right) \right] \right\} \exp(-ik_x x_0). \quad (84)$$

Uma vez que o SLM opera exclusivamente em modulação de fase, implementamos $T(k_x)$ mediante holografia off-axis para síntese de campo complexo. A estratégia consiste em exibir apenas a fase correspondente e recuperar a amplitude e fase alvo na primeira ordem de difração, que é isolada por uma abertura posicionada no plano de Fourier imediatamente após o SLM. A fase programada no painel é

$$\phi_{\text{SLM}}(x_p) = \text{wrap} \left\{ \frac{k_x(x_p)^3}{3k_A^3} - a^2 \frac{k_x(x_p)}{k_A} - k_x(x_p)x_0 + 2\pi f_0 x_p \right\}, \quad (85)$$

onde x_p denota a coordenada do painel, f_0 é a frequência espacial da portadora responsável pela separação da primeira ordem, e $k_x(x_p) = \alpha x_p$ representa o mapeamento linear (previamente calibrado) entre a posição do pixel e a frequência espacial no plano de Fourier. A abertura, centrada na primeira ordem, rejeita a ordem zero e as ordens superiores, assegurando a preservação da banda útil definida pelo perfil gaussiano $\exp[-a(k_x/k_A)^2]$. No plano de detecção em Fourier com distância focal f , a coordenada x_f relaciona-se a k_x por $k_x = (2\pi/\lambda f)x_f$, permitindo que x_0 posicione diretamente o lóbulo principal dentro do campo de visão.

Dessa maneira, temos que o termo cúbico $\propto k_x^3$ gera o perfil tipo Airy após a transformada de Fourier, o termo linear $-a^2(k_x/k_A)$ é inerente à versão apodizada da solução, e a fase $-k_x x_0$ implementa o deslocamento espacial controlado. O campo reconstruído na primeira ordem reproduz fielmente $T(k_x)$ (dentro dos limites da resposta instrumental), e sua transformada inversa resulta no perfil $|\text{Ai}(\cdot)|^2$ observado nas coincidências condicionais

Devemos ressaltar que, no mesmo arranjo, incorporamos um parâmetro Z que implementa uma propagação efetiva no braço do sinal como fase quadrática no domínio angular. Adotando a convenção $\mathcal{F}^{-1}\{G\}(x) = \int G(k_x) e^{ik_x x} dk_x$, a evolução livre por uma distância Z corresponde ao fator de Fresnel $\exp[-i(Z/2k_0)k_x^2]$, com $k_0 = 2\pi/\lambda$. Assim, estendemos a transmissão alvo para

$$T_Z(k_x) = T(k_x) \exp \left[-i \frac{Z}{2k_0} k_x^2 \right], \quad (86)$$

preservando a geração do Airy pelo termo cúbico e permitindo controlar, via Z , o deslocamento parabólico do lóbulo principal no plano de detecção. Em variáveis adimensionais,

$$T_Z(k) = T_A(k) \exp[-i\beta_Z k^2], \quad \beta_Z \equiv \frac{Z k_A^2}{2k_0}. \quad (87)$$

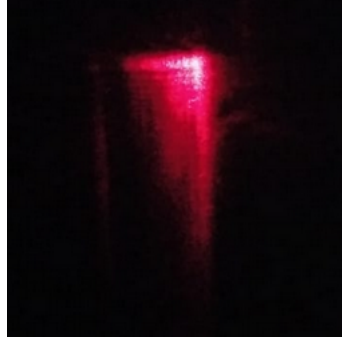


Figura 6 – Perfil de intensidade de um feixe 2D gerado no laboratório. Produção do autor.

Na implementação de fase no SLM, o acréscimo é direto na máscara programada:

$$\phi_{\text{SLM}}(x_p, Z) = \text{wrap} \left\{ \frac{k_x(x_p)^3}{3k_A^3} - a^2 \frac{k_x(x_p)}{k_A} - k_x(x_p)x_0 - \frac{Z}{2k_0} k_x(x_p)^2 + 2\pi f_0 x_p \right\}, \quad (88)$$

onde $k_x(x_p) = \alpha x_p$ é o mapeamento calibrado painel-frequência. Nas medições a seguir, utilizaremos $\phi_{\text{SLM}}(x_p, Z)$ para gerar o feixe de Airy e varrer Z , de modo que o termo quadrático realize a propagação efetiva e, conseqüentemente, desloque controladamente o pico observado nas coincidências.

A título de exemplo, a figura 6 mostra o perfil de intensidade de um feixe bidimensional gerado no laboratório. Para o experimento e detecção, foi usado o feixe unidimensional, o feixe 2d é usado apenas para exemplo e figura pois é mais aparente na câmera seu perfil Airy.

4.3 DETECÇÃO DOS FÓTONS GÊMEOS

A detecção é realizada mediante detectores de fóton único baseados em diodos de avalanche (SPADs), posicionados nos planos definidos pelas configurações de imagem e de Fourier. Mantemos a convenção estabelecida anteriormente: o detector do sinal (D1) executa varreduras transversais durante as medidas condicionais, enquanto o detector do idler (D2) permanece fixo na região de máxima coincidência. Previamente a cada varredura, um alinhamento fino reposiciona D2 no pico de coincidências, inicialmente com o SLM atuando como espelho plano e, subsequentemente, com a máscara ativada e a primeira ordem selecionada, garantindo assim que a referência de coincidência seja independente da modulação aplicada.

As contagens de fótons únicos em cada canal, denotadas por S_s e S_i , juntamente com as coincidências C , são adquiridas por um sistema eletrônico dedicado utilizando uma janela temporal fixa τ . O tempo de integração por ponto de varredura mantém-se constante, registrando-se para cada posição a tripla (S_s, S_i, C) . As coincidências acidentais

são estimadas pelo produto das taxas de contagem simples,

$$C_{\text{acc}} \simeq S_s S_i \tau,$$

e subtraídas de C quando necessário, resultando na coincidência líquida $C_{\text{real}} = C - C_{\text{acc}}$. Embora em regimes de baixo fluxo e janelas temporais estreitas C_{acc} permaneça reduzido, a correção é sistematicamente aplicada para uniformizar as séries experimentais e permitir comparações consistentes entre condições com e sem modulação. Efeitos de tempo morto e afterpulsing são monitorados mediante verificação da linearidade de S_s e S_i em função da potência de bombeio e pela análise da estabilidade do nível de fundo fora do pico de coincidências. A eletrônica de coincidências é sincronizada a partir dos pulsos TTL gerados pelos detectores, com atrasos fixos ajustados por meio de um canal de retardos programáveis

As medidas condicionais são realizadas com o detector do idler (D2) fixo na posição de máxima coincidência, enquanto o detector do sinal (D1) é varrido transversalmente ao longo de um único eixo, com incrementos conhecidos Δx_{est} . Em cada ponto da varredura, registram-se as contagens de fótons únicos S_s e S_i (correspondentes aos detectores D1 e D2, respectivamente) e as coincidências C , utilizando uma janela temporal fixa τ e um tempo de integração constante por ponto. As coincidências acidentais são estimadas por $C_{\text{acc}} \simeq S_s S_i \tau$ e subtraídas ponto a ponto, resultando em $C_{\text{real}} = C - C_{\text{acc}}$. Para atenuar flutuações lentas de potência do laser, cada varredura inclui pontos de referência intercalados nas proximidades do pico de coincidência. Na análise subsequente, os perfis são normalizados pela média desses pontos de referência.

Duas geometrias de detecção são empregadas. Na geometria de imagem, um telescópio projeta o plano do cristal no detector D1 com uma magnificação M . O deslocamento físico do estágio Δx_{est} é convertido na coordenada do plano conjugado por $x = \Delta x_{\text{est}}/M$ (respeitando a convenção de montagem). O perfil condicional em posição é obtido pela série $C_{\text{real}}(x)$ ao longo da varredura. Na geometria de Fourier, o detector D1 é posicionado no plano focal de uma lente com distância focal efetiva f , de modo que a coordenada transversal x_f no detector corresponde ao componente angular k_x através da relação

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda f} x_f.$$

O perfil condicional em momento é então dado por $C_{\text{real}}(k_x)$, onde $x_f = \Delta x_{\text{est}}$ é a coordenada medida no plano do detector.

Os perfis condicionais são normalizados para representar uma distribuição de probabilidade discreta por meio de

$$P_n = \frac{C_{\text{real},n}}{\sum_m C_{\text{real},m}},$$

onde o índice n percorre todos os pontos da varredura. As incertezas estatísticas são calculadas assumindo estatística Poissoniana para as contagens, com o desvio padrão para cada ponto dado por

$$\sigma_{C_{\text{real}}} \approx \sqrt{C + C_{\text{acc}}},$$

sendo esta incerteza propagada para P_n . Para extrair as larguras condicionais, cada perfil é ajustado por uma função Gaussiana na região do pico,

$$G(u) = A \exp \left[-\frac{(u - u_0)^2}{2\sigma^2} \right] + B,$$

onde u representa x na geometria de imagem ou k_x na geometria de Fourier, o ajuste é ponderado pelas incertezas $\sigma_{C_{\text{real}}}$. A largura σ_x em posição é obtida do ajuste a $C_{\text{real}}(x)$, a largura σ_k em momento é obtida do ajuste a $C_{\text{real}}(k_x)$. Quando necessário, a largura em k_x também é expressa como uma largura em posição no plano de Fourier, utilizando a relação $x_f = (\lambda f / 2\pi) k_x$.

Com a modulação do tipo Airy aplicada no braço do sinal e a primeira ordem selecionada no plano de Fourier, a leitura em momento reproduz o padrão característico do feixe modulado. O mesmo protocolo é mantido com a modulação desativada para fornecer uma referência. O conjunto de parâmetros Δx_{est} , tempo de integração, janela temporal τ , magnificação M e distância focal f é mantido constante entre repetições e entre as condições com e sem modulação, permitindo uma comparação direta das larguras condicionais. As varreduras realizadas nas medidas de obstrução do sinal para estudar o efeito de auto-cicatrização (*self-healing*) seguem o mesmo procedimento, sendo detalhadas na Seção 4.6.

4.4 EQUAÇÃO TEÓRICA PARA AS COINCIDÊNCIAS APÓS MODULAÇÃO AIRY

Partimos da descrição da amplitude bifotônica no domínio angular,

$$\Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \alpha_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \phi_L(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i),$$

onde α_p representa o envelope angular do bombeio e ϕ_L a função de casamento de fase do cristal. A modulação é aplicada no braço do sinal por um SLM que implementa uma máscara unidimensional ao longo do eixo x no domínio angular k_x . No plano de detecção em configuração de Fraunhofer, a amplitude de coincidência é dada por (Arruda et al., 2018)

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \iint d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) T(\mathbf{q}_s) e^{i\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{K}_s} e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{K}_i}, \quad \mathbf{K}_j = \frac{2\pi}{\lambda f_j} \mathbf{r}_j, \quad (89)$$

sendo f_j a distância focal efetiva do sistema de leitura no braço j .

No regime de bombeio colimado e considerando a forte anticorrelação transversal $\mathbf{q}_s \simeq -\mathbf{q}_i$ característica da SPDC, a expressão se simplifica para

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \propto \int d^2\mathbf{q} T(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_i)}, \quad C(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = |\mathcal{A}|^2, \quad (90)$$

o que demonstra que o padrão de coincidências corresponde ao módulo quadrado da transformada inversa da máscara, avaliada na diferença $\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_i$ e convolvida com a resposta finita do par bifotônico e do aparato experimental.

A máscara unidimensional empregada no eixo x combina fase cúbica com apodização gaussiana e um termo linear para controle de posicionamento. Definindo a variável adimensional $k \equiv k_x/k_A$, onde k_A estabelece a escala angular característica, a transmissão é expressa por

$$T(k_x) = \exp\left[-a \left(\frac{k_x}{k_A}\right)^2\right] \exp\left\{i \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k_x}{k_A}\right)^3 - a^2 \left(\frac{k_x}{k_A}\right)\right]\right\} \exp(-ik_x x_0), \quad (91)$$

com $a > 0$ determinando o grau de apodização e x_0 controlando o deslocamento espacial. O fator global $\exp(a^3/3)$, por ser uma constante multiplicativa, é omitido por não afetar a distribuição de intensidade.

Introduzindo a variável de diferença em momento transversal

$$\Delta k_x \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x_s}{f_s} - \frac{x_i}{f_i} \right),$$

a transformada inversa unidimensional de (91) resulta em

$$\mathcal{A}_x(x_s, x_i) \propto k_A \exp[a\xi] \text{Ai}(\xi), \quad \xi \equiv \frac{\Delta k_x}{k_A} - k_A x_0, \quad (92)$$

onde Ai denota a função de Airy. Dessa forma, a coincidência condicional com $x_i = x_i^{(0)}$ fixo e x_s variado é dada por

$$C_{\text{cond}}(x_s | x_i^{(0)}) \propto \left| \mathcal{A}_x(x_s, x_i^{(0)}) \right|^2 * \mathcal{I}_{\text{eff}} \propto k_A^2 \exp[2a\xi] \text{Ai}^2(\xi) * \mathcal{I}_{\text{eff}}, \quad (93)$$

onde $\mathcal{I}_{\text{eff}}$ representa a convolução com a resposta instrumental combinada (determinada por aberturas, fendas e tamanho de pixel) e pelo alargamento finito associado a α_p e ϕ_L . A variável adimensional ξ incorpora a escala característica k_A , o mapeamento Δk_x imposto por λ e f_j , e o deslocamento x_0 programado.

Quando a detecção é realizada em geometria de imagem em um dos braços, o mapeamento correspondente é substituído por $x = \Delta x_{\text{est}}/M$ no eixo relevante, onde M é a magnificação da imagem, preservando a forma funcional da expressão e ajustando apropriadamente a definição de Δk_x para refletir o plano conjugado. Nos resultados experimentais, C_{cond} é normalizado por $\sum_n C_{\text{cond},n}$, eliminando a influência de fatores

multiplicativos globais como k_A^2 e $\exp(a^3/3)$ nas comparações entre curvas. A dependência em x_0 é verificada experimentalmente pela translação controlada do máximo do padrão ao variar o termo linear da máscara, conforme estabelecido no procedimento de calibração do SLM.

4.5 QUANTIFICADORES DE NÃO SEPARABILIDADE E DE CORRELAÇÃO

A não separabilidade é testada pela desigualdade de Mancini–Giovanrealti–Vitali–Tombesi (MGVT), na forma normalizada discutida no Capítulo 2:

$$\langle \Delta^2 X \rangle \langle \Delta^2 P \rangle \leq 1,$$

em que $X \propto x_-$ e $P \propto p_+$, com a normalização definida por $x_0 p_0 = \hbar/2$ (eq. (29)). Para acompanhamento fenomenológico, exploramos também o Fedorov ratio em regime gaussiano efetivo, definido como a razão entre a variância de singles e a variância de coincidências na geometria correspondente, reconhecendo suas limitações na presença de estados não-gaussianos fortemente modulados em fase e intensidade.

4.6 CONFIGURAÇÃO DE OBSTRUÇÃO E AUTO-CICATRIZAÇÃO NO SIGNAL

Para investigar a auto-cicatrização no emaranhamento quântico, introduzimos uma obstrução controlada no braço do signal após a modulação do SLM e seleção da primeira ordem. A obstrução consiste em uma lâmina opaca de borda retilínea montada em um suporte com micrometro de translação transversal, posicionada a uma distância z_{sh} após o plano de Fourier do SLM. Nesta configuração, o feixe de Airy unidimensional exibe um lóbulo principal bem definido acompanhado por lóbulos laterais menos intensos. A lâmina é deslocada para interceptar progressivamente o lóbulo principal sem bloquear completamente os lóbulos adjacentes, estabelecendo assim diferentes condições de obstrução para estudo da propagação.

A posição do máximo do lóbulo principal no plano de obstrução, $x_{\text{lp}}(z_{\text{sh}})$, é determinada previamente através de varredura rápida do detector D1 no modo imagem. O posicionamento da lâmina é parametrizado por x_{blk} em relação a esta referência. O grau de obstrução é quantificado pelo parâmetro adimensional $\eta \in [0, 1]$, correspondente à fração de potência do lóbulo principal interceptada, estimada pela integração do perfil de intensidade de referência. Experimentalmente, utilizamos uma série de condições $\eta \approx \{0, 0.25, 0.5, 0.75, \gtrsim 0.9\}$ obtida variando x_{blk} em incrementos fixos Δx_{blk} .

Após a obstrução, o campo modulado propaga-se livremente até o plano de detecção para as medidas de coincidência. Mantemos o detector D2 (idler) fixo na posição de

máxima coincidência enquanto varremos o detector D1 (signal) em uma configuração que nos permite acessar o campo distante (plano de Fourier). Esta escolha é essencial, pois a geometria de imageamento do plano do cristal não permitiria observar o fenômeno de auto-cicatrização, que se manifesta precisamente durante a propagação do feixe de Airy até o campo distante.

Para cada valor de η , registramos as taxas de contagem simples e as curvas de coincidência condicional $C_{\text{cond}}(x_s|x_i^{(0)})$ usando os mesmos parâmetros temporais da configuração sem obstrução. A comparação das larguras condicionais em posição e momento, juntamente com os quantificadores de correlação estabelecidos, permite avaliar a preservação do emaranhamento e a recuperação das correlações após propagação - característica fundamental da auto-cicatrização. O alinhamento é verificado garantindo paralelismo da borda da lâmina com o eixo y e ausência de interceptação com ordens residuais, mantendo a abertura de seleção fixa em todas as medidas.

5 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados experimentais obtidos com a modulação aplicada no braço do signal, abordando tanto a observação da aceleração tipo Airy e seus efeitos nas correlações de coincidência e na inseparabilidade do estado de fótons gêmeos, publicados em (Pimenta *et al.*, 2023)¹. Quanto a verificação experimental do fenômeno de auto-cicatrização sob condições de obstrução parcial, este último ainda com resultados preliminares e com manuscrito em construção.

Os protocolos experimentais seguem a descrição detalhada no Capítulo 4, enquanto a análise teórica fundamenta-se nos modelos desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3. Adotamos a convenção de coordenadas $\mathbf{r} = (x, y)$, com varreduras realizadas ao longo de x_s no braço do signal enquanto mantemos $x_i = x_i^{(0)}$ fixo no braço do idler quando indicado. A relação de conversão $k_x = (2\pi/\lambda f)x_f$ é utilizada para a análise nos planos de Fourier, conforme estabelecido na Seção 2.4 e na Equação (79). A máscara de fase cúbica empregada corresponde à definição formal apresentada em (88).

5.1 EXPERIMENTO I: MODULAÇÃO AIRY NO *SIGNAL*

Aplicamos a máscara cúbica de fase no *signal* conforme o modelo de §3.6 e (88), utilizando a forma de transmitância associada ao perfil do feixe de Airy em (91). As medidas foram feitas em dois planos de análise: primeiro diretamente no plano imagem do cristal e na respectiva transformada de Fourier e, em seguida, após propagação livre adicional de aproximadamente 10 cm, repetindo a mesma dupla de medidas (imagem e Fourier do plano propagado). Em todos os casos, as variâncias condicionais em posição e em momento foram extraídas de cortes $C(x_s | x_i^{(0)})$ segundo os procedimentos experimentais de §4.3, e os quantificadores seguem §4.5 e as definições formais do Cap. 2, em particular o teste de Mancini–Giovannetti–Vitali–Tombesi (MGVT) dado por (29). Antes de aplicar as modulações, realizamos medidas com o SLM atuando como um espelho, de modo a termos uma referência para o teste MGVT. Tais medidas resultaram em $\Delta^2 P \cdot \Delta^2 X = 0,1 \pm 0,01$, violando com boa margem a desigualdade

No primeiro conjunto, posicionamos a detecção para registrar o plano imagem do cristal no *signal*, obtendo os mapas de coincidência $C(x_s, x_i)$ e os cortes condicionais $C(x_s | x_i^{(0)})$, dos quais extraímos a variância condicional em posição $\Delta^2 X$. Em seguida, medimos o plano de Fourier correspondente ao mesmo plano imagem, a partir do qual extraímos a variância condicional em momento $\Delta^2 P$. A conexão entre as coordenadas de

¹ Vale destacar que, embora o manuscrito original refira-se ocasionalmente à modulação no braço do idler, a implementação experimental aqui descrita adota consistentemente a modulação no braço do signal. Esta escolha não altera as conclusões físicas, uma vez que o estado EPR exhibe simetria sob a troca $\text{signal} \leftrightarrow \text{idler}$ no regime de propagação linear.

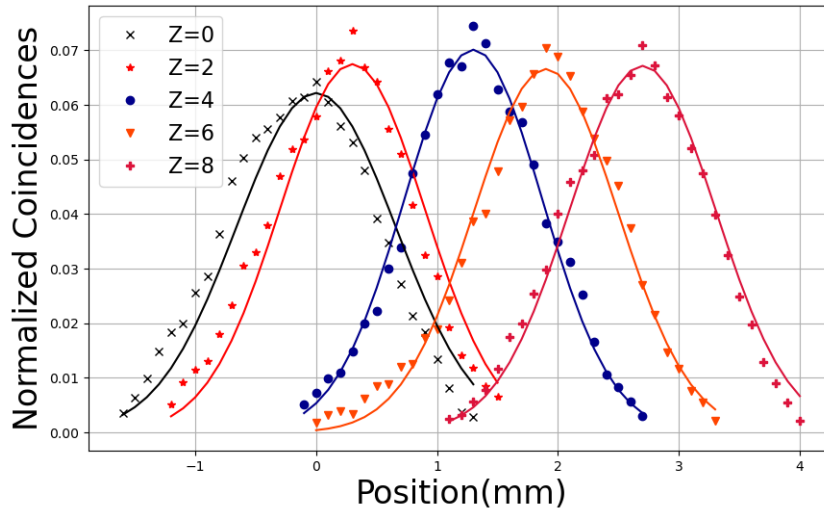


Figura 7 – Gráfico de coincidências normalizadas em função do deslocamento vertical do detector intermediário e variando a distância de propagação (Z). As linhas sólidas são ajustes de funções gaussianas.

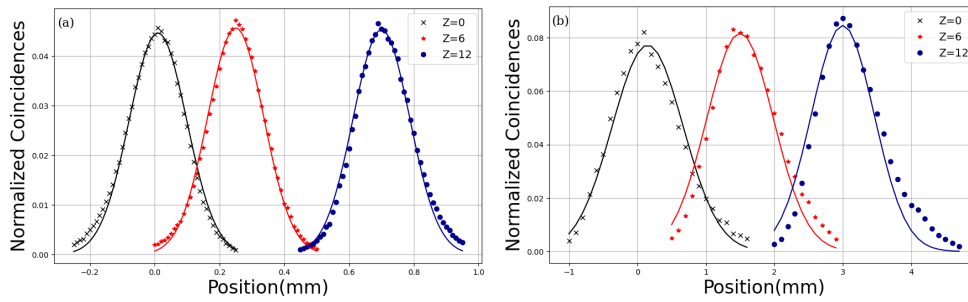


Figura 8 – Gráfico de coincidências normalizadas em função do deslocamento vertical do detector intermediário e variando a distância de propagação (Z). As linhas sólidas são adequadas às funções gaussianas. (a) Gráficos para medições de correlação posição-posição. (b) Gráficos para medições de correlação momento-momento.

detecção e as variáveis de onda segue §3.2 e (58), e a escala transversal relevante para o perfil Airy é dada por (69). A figura 7 contém um gráfico de contagens de coincidências normalizadas, que descrevem as distribuições de momento para diferentes valores do parâmetro Z aplicado ao SLM que gera o feixe de Airy. Pode-se ver que os picos de intensidade são deslocados quando Z aumenta, o que garante a modulação do tipo Airy no perfil do feixe signal.

Os perfis de coincidência observados apresentam desvios em relação ao perfil teórico ideal da função de Airy, conforme previsto pela Eq. (88). Esses desvios decorrem principalmente de duas limitações experimentais. Em primeiro lugar, a fonte de SPDC não gera um estado EPR ideal com correlações do tipo delta, resultando na convolução do perfil de Airy com uma função gaussiana que melhor descreve a extensão finita das correlações

Tabela 1 – Product of variances

Z	$\Delta^2 P \cdot \Delta^2 X$
0	0.24 ± 0.01
2	0.22 ± 0.01
4	0.21 ± 0.01
6	0.25 ± 0.01
8	0.22 ± 0.01

no estado biphotônico real. Em segundo lugar, a resolução espacial finita do sistema de detecção introduz um efeito de suavização que atenua as oscilações características da função de Airy.

É importante destacar que essa redução na visibilidade do padrão de Airy não invalida a testemunha de emaranhamento empregada, uma vez que tais efeitos experimentais tendem apenas a deteriorar o sinal medido e aumentar as variâncias observadas. Consequentemente, enquanto a perda de visibilidade poderia levar a um falso não-violação da desigualdade de separabilidade, a observação de uma violação dessa desigualdade mantém-se como indicativo confiável da presença de emaranhamento no estado quântico.

Ao modular o feixe do signal para exibir um perfil do tipo Airy, avaliamos a testemunha de emaranhamento, cujos resultados são apresentados na Tabela 1 para diferentes valores do parâmetro de propagação Z . Nota-se que, embora o produto $\Delta^2 P \cdot \Delta^2 X$ tenha superado o valor correspondente à propagação livre sem modulação em todos os casos, a desigualdade de separabilidade ainda é violada. O aumento observado em $\Delta^2 P$ é consistente com o alargamento do perfil transversal induzido pela modulação Airy no domínio espacial. Apesar deste efeito, o estado permaneceu emaranhado em todas as configurações experimentais investigadas.

Adicionalmente, observamos que a variação do parâmetro de propagação Z não afeta significativamente a variância no domínio do momento (campo distante). Este comportamento é compreendido considerando que mesmo versões truncadas de pacotes de onda do tipo Airy preservam características não difrativas, mantendo assim a estabilidade do perfil espectral durante a propagação.

Realizamos adicionalmente uma medição do campo com modulação de Airy em regime de propagação livre, complementando a análise anterior restrita ao plano do cristal. Nesta configuração, implementamos o imageamento e a transformada óptica de Fourier de um plano localizado a 10 cm após o SLM no braço do idler e a 10 cm após o espelho M1 no braço do signal. Os resultados, apresentados na Fig. 8, confirmam que o estado mantém seu caráter não separável. O gráfico superior exibe as correlações de posição, enquanto

o inferior demonstra as anticorrelações de momento, com a variação do parâmetro Z evidenciando o deslocamento transversal característico dos feixes de Airy. A Tabela 2 consolida os valores das variâncias do produto, atestando a violação da desigualdade de inseparabilidade em todas as condições investigadas.

Tabela 2 – Product of variances

Z	$\Delta^2 P \cdot \Delta^2 X$
0	0.39 ± 0.02
6	0.33 ± 0.01
12	0.35 ± 0.01

Os resultados nos dois planos evidenciam a preservação da não separabilidade segundo MGVT, com eventuais diferenças quantitativas atribuíveis ao alargamento efetivo na propagação e às assinaturas de aceleração no *signal*.

5.2 EXPERIMENTO II: AUTO CICATRIZAÇÃO DO FEIXE DE AIRY NO *SIGNAL* — ROBUSTEZ A OBSTRUÇÕES E IMPACTO NAS COINCIDÊNCIAS E NO EMARANHAMENTO

A autocicatrização é uma propriedade característica de feixes não difrativos, na qual o perfil do feixe se reconstrói após obstruções parciais ao longo de sua propagação. No caso do feixe de Airy, esse fenômeno é sustentado pela estrutura espectral e de fase que também possibilita sua aceleração transversal (Balazs, 1979; Siviloglou, G. A. *et al.*, 2007a; Broky *et al.*, 2008; Efremidis *et al.*, 2019b). Para investigar como essa propriedade se manifesta no regime de coincidências de pares SPDC e em quantificadores de emaranhamento espacial, repetimos o protocolo do Experimento I, aplicando a mesma máscara cúbica ao *signal* e introduzindo uma obstrução graduável imediatamente após o plano de imagem do cristal, controlada por um parâmetro de inserção b (em mm). Mantivemos as mesmas janelas espaciais e temporais de aquisição do Experimento I (Seção 5.1) e comparamos duas condições: sem modulação no *signal* e com fase Airy no *signal*.

No plano de imagem, a obstrução suprime parte do lóbulo dominante e induz assimetria nos mapas condicionais. Após a propagação livre, a distribuição modulada por Airy reconstrói o pico correlacionado através da autocicatrização, enquanto o caso sem modulação sofre uma degradação monotônica do contraste de coincidências. Essa tendência torna-se evidente ao quantificarmos o emaranhamento por meio de dois diagnósticos complementares. O primeiro é o quociente de Fedorov R_F , definido como a razão entre as larguras marginal e condicional nos planos conjugados (Walborn, S. P. *et al.*, 2007, 2010; Just *et al.*, 2013; Fedorov, M. V.; Mernova; Sliporod, 2022). Na condição sem modulação,

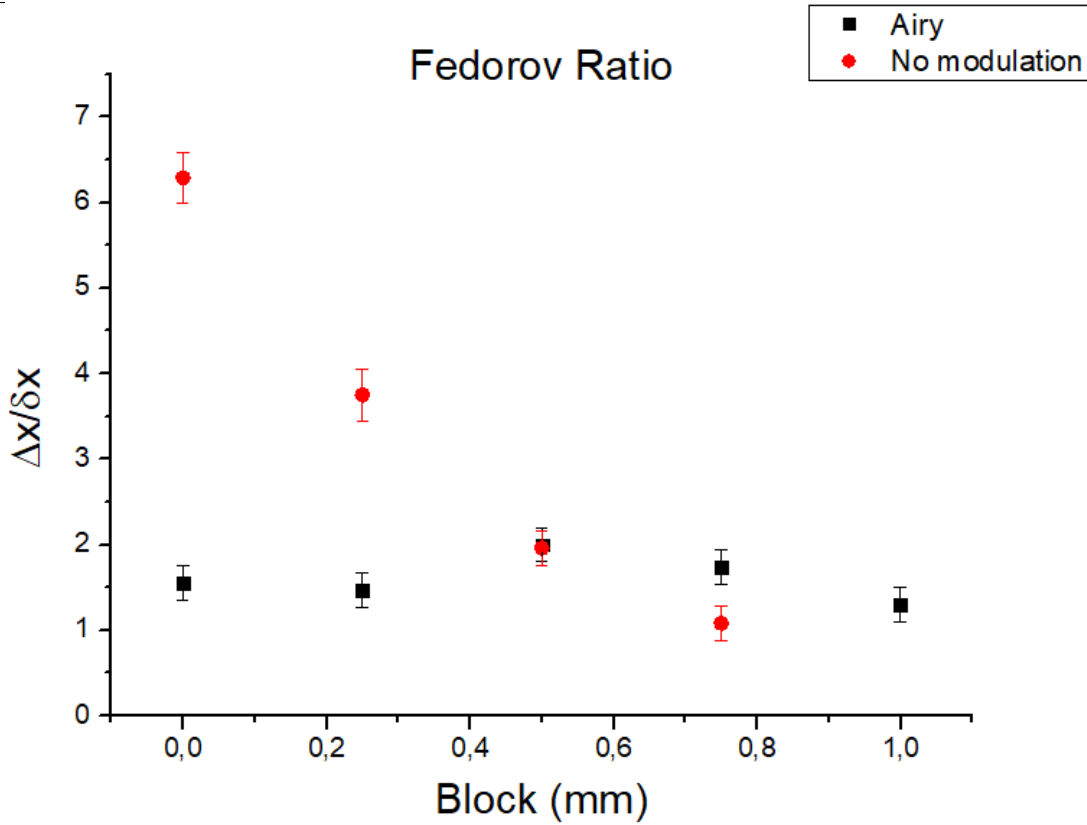


Figura 9 — R_F em função do comprimento de inserção da obstrução b para ,fase Airy e ,sem modulação no *signal*.

R_F decresce com b , aproximando-se da unidade (por exemplo, $R_F = 1,08 \pm 0,17$ para $b = 0,75$ mm), sinalizando quase desemaranhamento. Em contraste, com fase Airy no *signal*, o parâmetro permanece sistematicamente acima da unidade ao longo de toda a varredura (por exemplo, $R_F = 1,74 \pm 0,20$ para $b = 0,75$ mm), evidenciando a robustez das correlações bipartidas sob obstrução local.

Como segundo parâmetro, avaliamos novamente o produto de variâncias adimensional do tipo-MGVT, $\Delta^2(x_s - x_i) \Delta^2(q_s + q_i)$, na forma normalizada em 1 usada neste capítulo (Mancini et al., 2002; Walborn, S. P. et al., 2010). Em todas as condições investigadas, o produto permanece significativamente abaixo da unidade, certificando a inseparabilidade mesmo com obstrução; contudo, a condição com fase Airy mantém essa violação praticamente inalterada com o aumento de b , enquanto a condição sem modulação exibe variações mais significativas, mesmo que ainda muito abaixo de 1.

Em conjunto, os resultados consolidam que a modulação cúbica no *signal* não apenas governa deslocamentos e aceleração (Experimento I), como também confere ,resiliência a obstruções locais, preservando quantificadores de emaranhamento úteis para aplicações de informação e imagem quântica (Walborn, S. P. et al., 2010; Efremidis et al., 2019b; Pimenta et al., 2023).

Tabela 3 – Quociente de Fedorov R_F em função de b no *signal*, comparando, fase Airy e ,sem modulação.

b (mm)	fase Airy	sem modulação
0.00	1.55 ± 0.19	6.29 ± 0.35
0.25	1.47 ± 0.19	3.75 ± 0.28
0.50	2.00 ± 0.22	1.96 ± 0.22
0.75	1.74 ± 0.20	1.08 ± 0.17
1.00	1.30 ± 0.18	—

Tabela 4 – Produto de variâncias MGV T ,fase Airy no *signal*.

b (mm)	$\Delta^2 P \cdot \Delta^2 X$
0.00	0.28 ± 0.01
0.25	0.33 ± 0.01
0.50	0.27 ± 0.01
0.75	0.20 ± 0.01
1.00	0.30 ± 0.01

Tabela 5 – Produto de variâncias MGV T ,sem modulação no *signal*.

b (mm)	$\Delta^2 P \cdot \Delta^2 X$
0.00	0.05 ± 0.01
0.25	0.04 ± 0.01
0.50	0.07 ± 0.01
0.75	0.09 ± 0.01

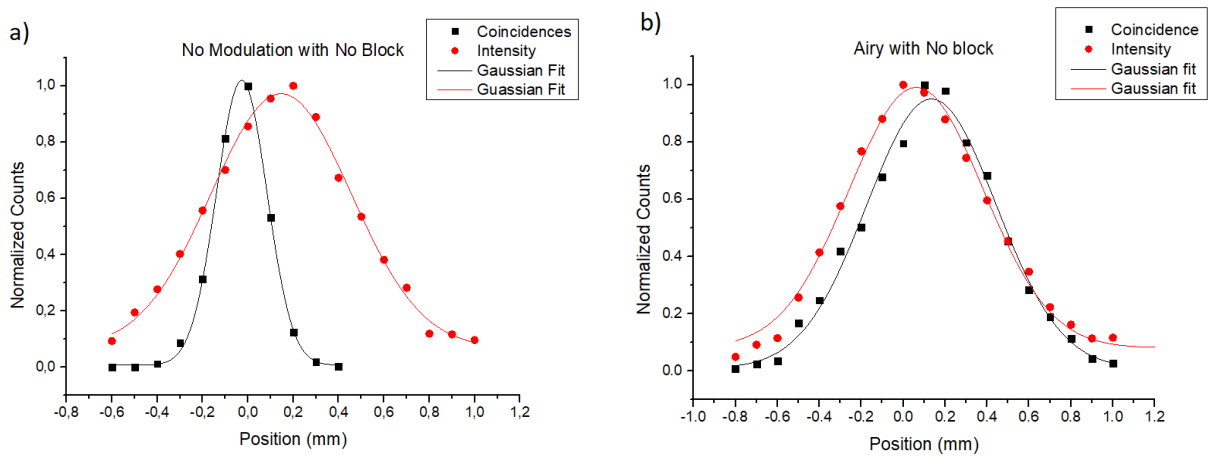


Figura 10 – Perfis de intensidade do *signal* e mapas condicionados de coincidências para $b = 0$: (a) sem modulação, (b) com fase Airy.

6 CONCLUSÃO

Berry e Balázs (Balazs, 1979) estudaram pacotes de onda não dispersivos na forma de pacotes de onda de Airy. Eles afirmam que a aceleração do pacote de Airy não viola o teorema de Ehrenfest (Hu *et al.*, 2012), pois a aceleração está relacionada à intensidade ou distribuição de probabilidade, e não à amplitude do campo ou à função de onda. Os autores também enfatizam que este comportamento é exclusivo dos pacotes de Airy. Inspirados por este trabalho, interpretamos nosso experimento como o fóton *signal* preparado em um pacote de onda de Airy acelerado, simulando o efeito de uma força gravitacional atuando sobre uma partícula, caracterizada como tal justamente porque seu pacote de onda não sofre dispersão. Portanto, esperamos que nossos resultados possam contribuir para um avanço da compreensão dos efeitos da propagação em um espaço-tempo curvo sobre o emaranhamento quântico entre duas partículas, além de inspirar novos experimentos baseados na mesma analogia. Uma vez que experimentos deste tipo em espaços-tempo curvos reais ainda representam um grande desafio prático, acreditamos que nossa abordagem analógica possa oferecer uma alternativa útil.

Vale ressaltar que, ao longo deste trabalho, a modulação pelo SLM e as varreduras foram executadas no braço do *signal*, em cuja frente de onda foi implementada a fase cúbica com apodização e o termo linear de controle de posição. Essa implementação, além de reproduzir a trajetória curvilínea típica do feixe de Airy, possibilitou traduzir diretamente nas medidas de coincidência o deslocamento lateral induzido pelo parâmetro Z da máscara, em consonância com a interpretação de pacote acelerado proposta por Berry e Balazs (Balazs, 1979) e com a literatura moderna sobre feixes de Airy (Siviloglou, Georgios A; Christodoulides, Demetrios N, 2007; Broky *et al.*, 2008; Hu *et al.*, 2012).

Os resultados do Experimento I demonstraram que a modulação de Airy no *signal* transfere para as correlações espaciais bipartidas uma assimetria controlável e um deslocamento do pico de coincidências consistente com o termo linear da máscara. As medidas, realizadas tanto no plano de imagem do cristal quanto no plano de Fourier, revelaram a correspondência entre as variâncias condicionais de posição e momento e o perfil imposto no domínio angular. Mesmo após uma propagação livre de alguns centímetros, as violações das desigualdades de inseparabilidade mantiveram-se estatisticamente robustas, evidenciando que a transformação unitária efetiva não destrói as correlações não locais oriundas do processo SPDC, mas apenas as cisalha no espaço de fase, conforme antecipado pelas análises de correlações transversais em SPDC (Monken; Ribeiro; Pádúa, 1998b; Walborn, Stephen P *et al.*, 2010).

No Experimento II, investigamos a autocatratização do feixe de Airy no *signal* e seu

impacto nas coincidências e no emaranhamento. A reconstituição do lóbulo principal após uma obstrução parcial, observada em distâncias compatíveis com a zona de reconstrução típica, manifestou-se pela recuperação do pico de coincidência e pela preservação das assinaturas de emaranhamento dentro das incertezas experimentais. Essas observações estão alinhadas com o mecanismo de interferência interna que confere aos feixes de Airy suas propriedades não difrativas e autorrestauradoras (Siviloglou, Georgios A; Christodoulides, Demetrios N, 2007; Broky *et al.*, 2008), e sugerem que a "rigidez" do pacote, entendida aqui como a manutenção do perfil estatístico relevante para as correlações bipartidas, pode ser explorada para a distribuição de emaranhamento em canais com obstruções parciais ou em meios perturbados.

Do ponto de vista conceitual, nossos resultados demonstram que deformações determinísticas e controladas aplicadas a apenas um dos feixes podem ser mapeadas de maneira previsível para as variáveis condicionais que compõem os critérios usuais de inseparabilidade. O parâmetro Z , incorporado à máscara de fase como controle de posição no plano de Fourier, atuou como um controle experimental direto para investigar a relação entre deslocamento médio e largura condicional, corroborando a consistência entre a descrição espectral do feixe de Airy e as correlações $C(x_s, x_i)$ e $C(k_s, k_i)$ medidas experimentalmente (Monken; Ribeiro; Pádua, 1998b; Walborn, Stephen P *et al.*, 2010). Em um contexto mais amplo da óptica de luz estruturada, nossos resultados reforçam a possibilidade de utilizar perfis acelerados como elementos funcionais para conferir robustez e direcionamento à informação quântica em cenários experimentalmente realistas (Forbes; Oliveira; Dennis, Mark R, 2021a).

As principais limitações identificadas decorrem do truncamento finito imposto pelo parâmetro de apodização, da discretização espacial do SLM e de perdas introduzidas pela obstrução e pela coleta. Tais fatores podem reduzir a visibilidade das franjas e atenuar as violações das desigualdades, sobretudo quando o lóbulo principal é significativamente suprimido. Ainda assim, a persistência das correlações em regimes moderados de perda e a recuperação parcial após a zona de autocicatrização sustentam a interpretação de que o recurso não local sobreviverá sempre que a informação de fase global for preservada no feixe modulado.

Em síntese, demonstramos que a modulação Airy em um único feixe dos pares de fótons espacialmente emaranhados permite tanto manipular trajetórias e picos de coincidência de maneira previsível quanto preservar, em condições amplas, as assinaturas de não separabilidade, mesmo diante de bloqueios locais. Essa combinação de controlabilidade e resiliência reforça a utilidade de feixes não difrativos e, no caso do Airy, acelerados

como ferramentas para investigar análogos de gravitação e para viabilizar protocolos de informação quântica em cenários fora do laboratório ideal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARRIZÓN, Víctor. Implementation of Fourier array illuminators using pixelated SLM: efficiency limitations. **Optics & Laser Technology**, v. 31, n. 4, p. 299–306, 1999.

ARRIZÓN, Víctor; RUIZ, Ulises; CARRADA, Rosibel; GONZÁLEZ, Luis A. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. **J. Opt. Soc. Am. A**, Optica Publishing Group, v. 24, n. 11, p. 3500–3507, nov. 2007.

ARRIZÓN, Víctor; RUIZ, Ulises; CARRADA, Rosibel; GONZÁLEZ, Luis A. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 24, n. 11, p. 3500–3507, 2007.

ARRIZÓN, Víctor; RUIZ, Ulises; CARRADA, Rodolfo; GUTIÉRREZ-VEGA, Julio C. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 24, n. 11, p. 3500–3507, 2007.

ARRUDA, MFZ; SOARES, WC; WALBORN, SP; TASCA, DS; KANAAN, A; MEDEIROS DE ARAÚJO, R; SOUTO RIBEIRO, PH. Klyshko's advanced-wave picture in stimulated parametric down-conversion with a spatially structured pump beam. **Physical Review A**, APS, v. 98, n. 2, p. 023850, 2018.

BALAZS, M. V. Berry; N. L. Nonspreading wave packets. **American Journal of Physics**, AIP Publishing, v. 47, n. 3, p. 264–267, mar. 1979.

BANDRES, Miguel A.; GUTIÉRREZ-VEGA, Julio C. Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems. **Optics Express**, v. 15, n. 25, p. 16719–16728, 2007.

BARNES, Thomas H.; EIJU, Tomoaki; MATSUDA, Kiyofumi; OYAMA, Naotake. Phase-only modulation using a twisted nematic liquid crystal television. **Applied Optics**, v. 28, n. 22, p. 4845–4852, 1989.

BECKER, Wolfgang. **Advanced Time-Correlated Single Photon Counting Techniques**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005.

BENNINK, Ryan S.; LIU, Yun; EARL, D. Duncan; GRICE, Warren P. Spatial distinguishability of photons produced by spontaneous parametric down-conversion with a focused pump. **Physical Review A**, v. 74, p. 023802, 2006.

BERRY, M. V.; UPSTILL, C. Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns . In: WOLF, E. (ed.). **Progress in Optics**. [S.l.]: Elsevier, 1980. v. 18. p. 257–346.

BIRNBAUM, D.; DAVIS, A.; LEE, W. M.; BLANCHE, J.-L.; PEYGHAMBARIAN, N.; NORWOOD, R. A. Design of High-Efficiency Computer-Generated Holograms for Phase-Only SLMs. **Applied Sciences**, v. 10, n. 6, p. 1960, 2020.

BOLDUC, Eliot; BENT, Nicolas; SANTAMATO, Enrico; KARIMI, Ebrahim; BOYD, Robert W. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram. **Optics Letters**, v. 38, n. 18, p. 3546–3549, 2013.

BOLDUC, Eliot; BENT, Nicolas; SANTAMATO, Enrico; KARIMI, Ebrahim; BOYD, Robert W. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram. **Optics Letters**, v. 38, n. 18, p. 3546–3549, 2013.

BOYD, R. W. **Nonlinear Optics**. 4th ed. [S.l.]: Academic Press, 2020.

BOYD, Robert W; GAETA, Alexander L; GIESE, Enno. Nonlinear optics . In: SPRINGER Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics. [S.l.]: Springer, 2008. p. 1097–1110.

BOYD, Robert W; GEHR, Russell J; FISCHER, George L; SIPE, JE. Nonlinear optical properties of nanocomposite materials. **Pure and Applied Optics: Journal of the European Optical Society Part A**, IOP Publishing, v. 5, n. 5, p. 505, 1996.

BROKY, John; SIVILOGLOU, Georgios A; DOGARIU, Aristide; CHRISTODOULIDES, Demetrios N. Self-healing properties of optical Airy beams. **Optics express**, Optica Publishing Group, v. 16, n. 17, p. 12880–12891, 2008.

BULLER, G. S.; COLLINS, R. J. Single-photon generation and detection. **Measurement Science and Technology**, v. 21, n. 1, p. 012002, 2010.

CARRASCO, Silvia; TORRES, Juan P.; TORNER, Lluís; SERGIENKO, Alexander V.; SALEH, Bahaa E. A.; TEICH, Malvin C. Spatial-to-spectral mapping in spontaneous parametric down-conversion. **Physical Review A**, v. 70, n. 4, p. 043817, 2004.

CIBULA, Matthew A.; MCINTYRE, David H. General algorithm to optimize the diffraction efficiency of a phase-type SLM. **Optics Letters**, v. 38, n. 15, p. 2767–2769, 2013.

COLLETT, Edward. **Field Guide to Polarization**. [S.l.]: SPIE Press, 2005. FG05. (SPIE Field Guides). ISBN 9780819458681.

COLLINGS, Neil; CROSSLAND, W. A.; AYLIFFE, P. J.; VASS, D. G.; UNDERWOOD, I. Evolutionary development of advanced liquid crystal spatial light modulators. **Applied Optics**, v. 28, n. 22, p. 4740–4747, 1989.

COVA, S.; GHIONI, M.; LACAITA, A.; SAMORI, C.; ZAPPA, F. Avalanche photodiodes and quenching circuits for single-photon detection. **Applied Optics**, v. 35, n. 12, p. 1956–1976, 1996.

DAI, Yuanyuan; ANTONELLO, Jacopo; BOOTH, Martin J. Calibration of a phase-only spatial light modulator for both phase and retardance modulation. **Optics Express**, v. 27, n. 13, p. 17912–17926, 2019.

DAMACENO, Maria Gabriela; MUCHERINO, Antonio;
MEDEIROS DE ARAÚJO, Renné C. M.; SOUTO RIBEIRO, Paulo H.;
RUBIANO DA SILVA, Nara. Experimental Investigation of Optical Processing With Spatial Light Modulation. **arXiv**, 2025. eprint: 2507.03821 (physics.optics).

DAUTET, H.; DESCHAMPS, P.; DION, B.; MACGREGOR, A. D.; MACSWEEN, D.; MCINTYRE, R. J.; TROTTIER, C.; WEBB, P. P. Photon counting techniques with silicon avalanche photodiodes. **Applied Optics**, v. 32, n. 21, p. 3894–3900, 1993.

DAVIS, J. A.; COTTRELL, D. M.; CAMPOS, J.; YZUEL, M. J.; MORENO, I. Encoding amplitude information onto phase-only filters. **Applied Optics**, v. 38, n. 23, p. 5004–5013, 1999.

DAVIS, Jeffrey A.; COTTRELL, Don M.; CAMPOS, Juan; YZUEL, Maria J.;
MORENO, Ignacio. Encoding amplitude information onto phase-only filters. **Applied Optics**, v. 38, n. 23, p. 5004–5013, 1999.

DEFIENNE, Hugo; GIGAN, Sylvain. Spatially entangled photon-pair generation using a partial spatially coherent pump beam. **Physical Review A**, APS, v. 99, n. 5, p. 053831, 2019.

DENG, D.; LI, H. Propagation properties of Airy–Gaussian beams. **Applied Physics B**, v. 106, p. 677–681, 2012.

DI LORENZO PIRES, Henrique; COPPENS, F. M. G. J.; EXTER, Martin P. van. Type-I spontaneous parametric down-conversion with a strongly focused pump. **Physical Review A**, v. 83, p. 033837, 2011.

DURNIN, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 4, n. 4, p. 651–654, 1987.

DURNIN, J.; MICELI J. J., Jr.; EBERLY, J. H. Diffraction-Free Beams. **Physical Review Letters**, v. 58, n. 15, p. 1499–1501, 1987.

EFREMIDIS, Nikolaos K.; CHEN, Zhigang; SEGEV, Mordechai; CHRISTODOULIDES, Demetrios N. Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances. **Optica**, v. 6, n. 5, p. 686–701, 2019.

EFREMIDIS, Nikolaos K.; CHEN, Zhigang; SEGEV, Mordechai; CHRISTODOULIDES, Demetrios N. Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances. **Optica**, Optica Publishing Group, v. 6, n. 5, p. 686–701, maio 2019.

EFRON, Uzi (ed.). **Spatial Light Modulator Technology: Materials, Devices, and Applications**. New York: Marcel Dekker, 1994. ISBN 0824791088.

EISAMAN, M. D.; FAN, J.; MIGDALL, A.; POLYAKOV, S. V. Invited Review Article: Single-photon sources and detectors. **Review of Scientific Instruments**, v. 82, n. 7, p. 071101, 2011.

ENGSTRÖM, David; PERSSON, Martin; BENGTSSON, Jörgen; GOKSÖR, Mattias. Calibration of spatial light modulators suffering from spatially varying phase response. **Optics Express**, v. 21, n. 13, p. 16086–16103, 2013.

FEDOROV, M. V.; MERNOVA, S. S.; SLIPOROD, K. V. Spontaneous parametric down-conversion: Revisiting the parameters of transverse entanglement outside the near zone. **Physical Review A**, v. 105, n. 5, p. 053709, 2022.

FEDOROV, MV; MIKHAILOVA, Yu M; VOLKOV, PA. Gaussian modelling and Schmidt modes of SPDC biphoton states. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, IOP Publishing, v. 42, n. 17, p. 175503, 2009.

FONSECA, E. J. S.; SOUTO RIBEIRO, P. H.; PÁDUA, S.; MONKEN, C. H. Quantum interference by a nonlocal double slit. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 60, p. 1530–1533, 2 ago. 1999.

FORBES, Andrew; DUDLEY, Angela; MCLAREN, Melanie. Creation and detection of optical modes with spatial light modulators. **Advances in Optics and Photonics**, v. 8, n. 2, p. 200–227, 2016.

FORBES, Andrew; OLIVEIRA, Michael de; DENNIS, Mark R. Structured light. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group UK London, v. 15, n. 4, p. 253–262, 2021.

FORBES, Andrew; OLIVEIRA, Michael de; DENNIS, Mark R. Structured light. **Nature Photonics**, v. 15, p. 253–262, 2021.

GHOSH, R.; MANDEL, L. Observation of Nonclassical Effects in the Interference of Two Photons. **Physical Review Letters**, v. 59, n. 17, p. 1903–1905, 1987.

GLAUBER, Roy J. The Quantum Theory of Optical Coherence. **Physical Review**, v. 130, n. 6, p. 2529–2539, 1963.

GOEPPERT-MAYER, Maria. Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen. **Annalen der Physik**, v. 9, n. 3, p. 273–294, 1931.

GOLDSTEIN, Dennis H. **Polarized Light**. 3. ed. [S.l.]: CRC Press, 2010. ISBN 9781439830406.

GOODMAN, Joseph W. **Introduction to Fourier Optics**. 3. ed. [S.l.]: Roberts & Company, 2005. ISBN 9780974707723.

GOODMAN, Joseph W. **Introduction to Fourier Optics**. 4. ed. New York: W. H. Freeman, 2017. ISBN 978-1-319-11916-4.

GORI, F. Bessel-Gauss beams. **Optics Communications**, v. 64, n. 6, p. 491–495, 1987.

GREENBERGER, Daniel M. Comment on "Nonspreading wave packets". **American Journal of Physics**, AIP Publishing, v. 48, n. 3, p. 256–256, 1980.

GREENFIELD, Eitan; SEGEV, Mordechai; WALASIK, William; RAZ, Oren. Accelerating Airy Beams in Space. **Physical Review Letters**, v. 106, p. 213902, 2011.

GRYNBERG, Gilbert; ASPECT, Alain; FABRE, Claude. **Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light**. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.

GUTIÉRREZ-VEGA, J. C.; BANDRES, M. A. Mathematical properties of radial Mathieu functions: visualization and applications. **American Journal of Physics**, v. 71, n. 3, p. 233–242, 2003.

GUTIÉRREZ-VEGA, J. C.; ITURBE-CASTILLO, M. D.; CHÁVEZ-CERDA, S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu and parabolic beams. **Optics Letters**, v. 25, n. 20, p. 1493–1495, 2000.

HADFIELD, Robert H. Single-photon detectors for optical quantum information applications. **Nature Photonics**, v. 3, n. 12, p. 696–705, 2009.

HAMAMATSU PHOTONICS. **LCOS-SLM Applications and Features**. [S.l.], 2025.

Accessed 2025-10-25. Disponível em:

https://lcos-slm.hamamatsu.com/content/dam/hamamatsu-photonics/sites/documents/99_SALES_LIBRARY/lpd/application_note_LCOS_E.pdf.

HARRIS, S. E.; OSHMAN, M. K.; BYER, R. L. Observation of Tunable Optical Parametric Fluorescence. **Physical Review Letters**, v. 18, n. 18, p. 732–734, 1967.

HENGVELD, Simon B.; RUBIANO DA SILVA, Nara; GONÇALVES, Douglas S.; SOUTO RIBEIRO, Paulo H.; MUCHERINO, Antonio. An optical processor for matrix-by-vector multiplication: an application to the distance geometry problem in 1D. **Journal of Optics**, v. 24, n. 1, p. 015701, 2022.

HOWELL, John C; BENNINK, Ryan S; BENTLEY, Sean J; BOYD, Robert W. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using momentum-and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. **Physical review letters**, APS, v. 92, n. 21, p. 210403, 2004.

HOWELL, John C.; BENNINK, Ryan S.; BENTLEY, Sean J.; BOYD, R. W. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox Using Momentum- and Position-Entangled Photons from Spontaneous Parametric Down Conversion. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 92, p. 210403, 21 maio 2004.

HU, Yi; SIVILOGLOU, Georgios A; ZHANG, Peng; EFREMIDIS, Nikolaos K; CHRISTODOULIDES, Demetrios N; CHEN, Zhigang. Self-accelerating Airy beams: generation, control, and applications. **Nonlinear photonics and novel optical phenomena**, Springer, p. 1–46, 2012.

JESACHER, Alexander; BERNET, Stefan; RITSCH-MARTE, Monika. Broadband suppression of the zero diffraction order of an SLM using its extended phase modulation range. **Optics Express**, v. 22, n. 14, p. 17590–17599, 2014.

JOOBEUR, Adel; SALEH, Bahaa EA; TEICH, Malvin C. Spatiotemporal coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion. **Physical Review A**, APS, v. 50, n. 4, p. 3349, 1994.

JUST, Felix; CAVANNA, Andrea; CHEKHOVA, Maria V.; LEUCHS, Gerd. Transverse Entanglement of Biphotons. **arXiv**, v. 1301, p. 7193, 2013. arXiv: 1301.7193 [quant-ph].

KADLIMATTI, Ravi; PARIMI, Patanjali V. Millimeter-wave nondiffracting circular Airy OAM beams. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, IEEE, v. 67, n. 1, p. 260–269, 2018.

KAMINER, I.; SEGEV, M.; CHRISTODOULIDES, D. N. Self-Accelerating and Nondiffracting Optical Beams: The Role of the Nonparaxial Regime. **Physical Review Letters**, v. 108, p. 163901, 2012.

KELLER, Timothy E.; RUBIN, Morton H. Theory of two-photon entanglement for spontaneous parametric down-conversion driven by a narrow pump pulse. **Physical Review A**, v. 56, n. 3, p. 1534–1541, 1997.

KLYSHKO, D. N. **Photons and Nonlinear Optics**. Boca Raton: CRC Press, 1988. ISBN 2881246699.

KNOLL, Glenn F. **Radiation Detection and Measurement**. 4. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2010. ISBN 978-0-470-13148-0.

KONFORTI, N.; MAROM, E.; WU, Shin-Tson. Phase-only modulation with twisted nematic liquid-crystal spatial light modulators. **Optics Letters**, v. 13, n. 3, p. 251–253, 1988.

KWIAT, P. G.; MATTLE, K.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A.; SERGIENKO, A. V.; SHIH, Y. New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 24, p. 4337–4341, 1995.

LAZAREV, Gleb; HERMERSCHMIDT, Andrey; KRÜGER, Stefan; OSTEN, Stefan. Beyond the display: phase-only liquid crystal on silicon devices and their applications. **Optics Express**, v. 27, n. 11, p. 16206–16229, 2019.

LEE, Jong-Chan; KIM, Yoon-Ho. Spatial and spectral properties of entangled photons from spontaneous parametric down-conversion with a focused pump. **Optics Communications**, v. 366, p. 442–450, 2016.

LEE, Minchol; KOO, Donghoon; KIM, Jeongmin. Simple and fast calibration method for phase-only spatial light modulators. **Optics Letters**, v. 48, n. 1, p. 5–8, 2023.

LEE, Wai-Hon. Binary computer-generated holograms. **Applied Optics**, v. 18, n. 21, p. 3661–3669, 1979.

LI, Rui; WANG, Qiong-Hua; CHEN, Chuanliang; PENG, Jinghua. Progress in Phase Calibration for Liquid Crystal Spatial Light Modulators. **Applied Sciences**, v. 9, n. 10, p. 2012, 2019.

LI, Shi-Qiang; XU, Xuewu; MARUTHIYODAN VEETIL, Rasna; VALUCKAS, Vytautas; PANIAGUA-DOMÍNGUEZ, Ramón; KUZNETSOV, Arseniy I. Phase-only transmissive spatial light modulator based on tunable dielectric metasurface. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 364, n. 6445, p. 1087–1090, 2019.

LIU, Hua-Kuang; CHAO, Tien-Hsin. Liquid crystal television spatial light modulators. **Applied Optics**, v. 28, n. 22, p. 4772–4780, 1989.

LIU, Hua-Kuang; DAVIS, Jeffrey A.; LILLY, Roger A. Optical-data-processing properties of a liquid-crystal television spatial light modulator. **Optics Letters**, v. 10, n. 12, p. 635–637, 1985.

MAGDE, Douglas; MAHR, Herbert. Study in Ammonium Dihydrogen Phosphate of Spontaneous Parametric Interaction Tunable from 4400 to 16 000 Å. **Physical Review Letters**, v. 18, n. 21, p. 905–907, 1967.

MANCINI, Stefano; GIOVANNETTI, Vittorio; VITALI, David; TOMBESI, Paolo. Entangling Macroscopic Oscillators Exploiting Radiation Pressure. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 88, p. 120401, 12 mar. 2002.

MANDEL, Leonard; WOLF, Emil. **Optical Coherence and Quantum Optics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN 978-0521417112.

MCGLOIN, D.; DHOLAKIA, K. Bessel beams: diffraction in a new light. **Contemporary Physics**, v. 46, n. 1, p. 15–28, 2005.

MCLEOD, J. H. The axicon: A new type of optical element. **Journal of the Optical Society of America**, v. 44, n. 8, p. 592–597, 1954.

MENDOZA-YERO, O.; MÍNGUEZ-VEGA, G.; LANCIS, J. Encoding complex fields by using a phase-only optical element. **Optics Letters**, v. 39, n. 7, p. 1740–1743, 2014.

MENDOZA-YERO, Omar; MOLES-CASES, Verónica; TURPIN, Alex; TAJAHUERCE, Enrique; LANCIS, Jesús. Encoding complex fields by using a phase-only optical element. **Optics Letters**, v. 39, n. 7, p. 1740–1743, 2014.

MOK, Fai; DIEP, Joseph; LIU, Hua-Kuang; PSALTIS, Demetri. Real-time computer-generated hologram by means of liquid-crystal television spatial light modulator. **Optics Letters**, v. 11, n. 11, p. 748–750, 1986.

MOLINA-TERRIZA, Gabriel; TORRES, Juan P.; TORNER, Lluís. Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 1, p. 013601, 2002.

MONKEN, C. H.; RIBEIRO, P. H. Souto; PÁDUA, S. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 57, p. 3123–3126, 4 abr. 1998.

MONKEN, C. H.; RIBEIRO, P. H. Souto; PÁDUA, S. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. **Physical Review A**, v. 57, n. 4, p. 3123–3126, 1998.

NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS. **Airy and Related Functions, §9.5 Integral Representations**. Visited 2025-10-25. 2024. Disponível em: <https://dlmf.nist.gov/9.5>.

NÓBREGA, K. Z.; DARTORA, C. A.; ZAMBONI-RACHED, M. Depth of Field of Finite Energy Airy Shaped Waves. **arXiv**, 2013. eprint: 1308.0766 (physics.optics).

NOVITSKY, Denis V.; NOVITSKY, Andrey V. Nonparaxial Airy beams: revisiting the acceleration mechanism. **New Journal of Physics**, v. 13, p. 123018, 2011.

PALIMA, Darwin; DARIA, Vincent Ricardo. Holographic projection of arbitrary light patterns with a suppressed zero-order beam. **Applied Optics**, v. 46, n. 20, p. 4197–4201, 2007.

PALIMA, Darwin; DARIA, Vincent Ricardo Mancao. Holographic projection of arbitrary light patterns with a suppressed zero-order beam. **Applied Optics**, v. 46, n. 20, p. 4197–4201, 2007.

PEZZANITI, J. L.; CHIPMAN, Russell A. Phase-only modulation of a twisted nematic liquid-crystal TV by use of the eigenpolarization states. **Optics Letters**, v. 18, n. 18, p. 1567–1569, 1993. Apresenta curvas de operação (fase versus nível de cinza) usando estados de eigenpolarização para um LCTV comercial.

PI, Dongsheng; LI, Lei; TIAN, Xinjie; JIA, Jia; CHEN, Linsen; LI, Xiong. Review of computer-generated hologram algorithms for near-eye displays. **Light: Advanced Manufacturing**, v. 3, n. 3, p. 1–26, 2022.

PIMENTA, RC; SANTOS, GH dos; BARRETO, AB; CELERI, LC; RIBEIRO, PH. Photonic entanglement with accelerated light. **arXiv preprint arXiv:2308.01764**, 2023.

PINNELL, Jonathan; NAPE, Isaac; SEPHTON, Bereneice; COX, Mitchell A.; RODRÍGUEZ-FAJARDO, Valeria; FORBES, Andrew. Modal analysis of structured light with spatial light modulators: a practical tutorial. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 37, n. 11, p. c146–c160, 2020.

PRECIADO, Miguel A.; MURIEL, Miguel A. Bandlimited Airy Pulses for Invariant Propagation in Single-Mode Fibers. **Journal of Lightwave Technology**, v. 30, n. 23, p. 3660–3666, 2012.

QIAN, Xuanyu; JIANG, Wei; ELSHARABASY, Ahmed; DEEN, M. Jamal. Modeling for Single-Photon Avalanche Diodes: State-of-the-Art and Research Challenges. **Sensors**, v. 23, n. 7, p. 3412, 2023.

RANGARAJAN, Radhika; GOGGIN, Michael E.; KWIAT, Paul G. Optimizing type-I polarization-entangled photons. **Optics Express**, v. 17, n. 21, p. 18920–18933, 2009.

REICHELT, Stephan. Spatially resolved phase-response calibration of liquid-crystal-based spatial light modulators. **Applied Optics**, v. 52, n. 12, p. 2610–2618, 2013.

ROSALES-GUZMÁN, Carmelo; FORBES, Andrew. **How to Shape Light with Spatial Light Modulators**. [S.l.]: SPIE Press, 2017. (SPIE Spotlight).

ROSALES-GUZMÁN, Carmelo; FORBES, Andrew. **Structured Light with Spatial Light Modulators**. 2. ed. Bellingham, WA: SPIE Press, 2024. (SPIE Spotlight, SL74). ISBN 9781510674875.

ROSALES-GUZMÁN, Carmelo; FORBES, Andrew. **Structured Light with Spatial Light Modulators**. 2. ed. [S.l.]: SPIE Press, 2024.

RUBIN, Morton H. Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion. **Physical Review A**, v. 54, n. 6, p. 5349–5360, 1996.

SALEH, Bahaa E. A.; TEICH, Malvin C. **Fundamentals of Photonics**. 3. ed. Hoboken: Wiley, 2019. ISBN 978-1-119-50687-4.

SALEH, Bahaa E. A.; TEICH, Malvin Carl. **Fundamentals of Photonics**. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2019. ISBN 9781119506874.

- SALEH, Bahaa EA; TEICH, Malvin Carl. **Fundamentals of photonics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019.
- SANZ, Ángel S.; MARTÍNEZ-HERRERO, Rosario. Exploring the dynamics of finite-energy Airy beams: a trajectory analysis perspective. **Optics Express**, v. 32, n. 4, p. 5592–5606, fev. 2024.
- SCHNARS, Ulf; JÜPTNER, Werner. **Digital Holography**. Berlin: Springer, 2005. ISBN 978-3-540-25011-6.
- SCHNEELOCH, James; HOWELL, John C. Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone. **Journal of Optics**, IOP Publishing, v. 18, n. 5, p. 053501, 2016.
- SCHNEELOCH, James; HOWELL, John C. Introduction to the Transverse Spatial Correlations in Spontaneous Parametric Down-Conversion through the Biphoton Birth Zone. **Journal of Optics**, v. 18, n. 5, p. 053501, 2016.
- SIVILOGLOU, G. A.; BROKY, J.; DOGARIU, A.; CHRISTODOULIDES, D. N. Observation of Accelerating Airy Beams. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 99, p. 213901, 21 nov. 2007.
- SIVILOGLOU, G. A.; BROKY, J.; DOGARIU, A.; CHRISTODOULIDES, D. N. Observation of Accelerating Airy Beams. **Physical Review Letters**, v. 99, n. 21, p. 213901, nov. 2007.
- SIVILOGLOU, G. A.; CHRISTODOULIDES, D. N. Accelerating finite energy Airy beams. **Optics Letters**, v. 32, n. 8, p. 979–981, abr. 2007.
- SIVILOGLOU, Georgios A; CHRISTODOULIDES, Demetrios N. Accelerating finite energy Airy beams. **Optics letters**, Optica Publishing Group, v. 32, n. 8, p. 979–981, 2007.
- SIVILOGLOU, Georgios A.; BROKY, John; DOGARIU, Aristide; CHRISTODOULIDES, Demetrios N. Ballistic dynamics of Airy beams. **Optics Letters**, v. 33, n. 3, p. 207–209, 2008.
- SRIVASTAV, Vatshal; VALENCIA, Natalia Herrera; LEEDUMRONGWATTHANAKUN, Saroch; MCCUTCHEON, Will; MALIK, Mehul. Characterizing and tailoring spatial correlations in multimode parametric down-conversion. **Physical Review Applied**, APS, v. 18, n. 5, p. 054006, 2022.

STRAUPE, S. S.; IVANOV, D. P.; KALINKIN, A. A.; BOBROV, I. B.; KULIK, S. P. Angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion. **Physical Review A**, v. 83, n. 6, p. 060302, 2011.

TANG, Bin; BIAN, Lirong. Finite-energy Airy–Lorentz–Gaussian beam and its paraxial propagation. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 36, n. 10, p. 1624–1630, 2019.

TENG, Long; PIVNENKO, Mike; ROBERTSON, Brian; ZHANG, Rong; CHU, Daping. A compensation method for the full phase retardance nonuniformity in phase-only liquid crystal on silicon spatial light modulators. **Optics Express**, v. 22, n. 21, p. 26392–26402, 2014.

TORRES, JP; ALEXANDRESCU, A; TORNER, Lluís. Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states. **Physical Review A**, APS, v. 68, n. 5, p. 050301, 2003.

TORRES, Juan P.; ALEXANDRESCU, Adrian; TORNER, Lluís. Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states. **Physical Review A**, v. 68, n. 5, p. 050301, 2003.

TORRES, Juan P.; MOLINA-TERRIZA, Gabriel; TORNER, Lluís. The spatial shape of entangled photon states generated in non-collinear, walking parametric downconversion. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, v. 7, n. 9, p. 235–239, ago. 2005.

VASARA, A.; TURUNEN, J.; FRIBERG, A. T. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. **Journal of the Optical Society of America A**, v. 6, n. 11, p. 1748–1754, 1989.

VOELZ, David G. **Computational Fourier Optics: A MATLAB Tutorial**. Bellingham, WA: SPIE, 2011. ISBN 978-0819482044.

WALBORN, S. P.; MONKEN, C. H. Transverse spatial entanglement in parametric down-conversion. **Physical Review A**, v. 76, n. 6, p. 062305, 2007.

WALBORN, S. P.; MONKEN, C. H.; PÁDUA, S.; RIBEIRO, P. H. Souto. Spatial correlations in parametric down-conversion. **Physics Reports**, v. 495, n. 4–5, p. 87–139, 2010.

WALBORN, S. P.; PÁDUA, S.; MONKEN, C. H. Conservation and entanglement of Hermite–Gaussian modes in parametric down-conversion. **Physical Review A**, v. 71, n. 5, p. 053812, 2005.

- WALBORN, S. P.; RIBEIRO, P. H. Souto; DAVIDOVICH, L.; MINTERT, F.; BUCHLEITNER, A. Experimental determination of entanglement by a projective measurement. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 75, p. 032338, 3 mar. 2007.
- WALBORN, SP; DE OLIVEIRA, AN; THEBALDI, RS; MONKEN, CH. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion. **Physical Review A**, APS, v. 69, n. 2, p. 023811, 2004.
- WALBORN, Stephen P; MONKEN, CH; PÁDUA, S; RIBEIRO, PH Souto. Spatial correlations in parametric down-conversion. **Physics Reports**, Elsevier, v. 495, n. 4-5, p. 87–139, 2010.
- WANG, Lijun. **Investigation of induced coherence with and without induced emission**. 1992. Ph.D. thesis – University of Rochester, Rochester, NY, USA. Advisor: Leonard Mandel.
- WU, Shin-Tson; YANG, Deng-Ke. **Reflective Liquid Crystal Displays**. [S.l.]: Wiley, 2001. ISBN 9780471496113.
- YANG, Deng-Ke; WU, Shin-Tson. **Fundamentals of Liquid Crystal Devices**. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2014. ISBN 9781118752005.
- YANG, Yuanqing; YANG, Haining; CHU, Daping. A review of liquid crystal spatial light modulators: devices and applications. **Opto-Electronic Science**, v. 2, p. 230026, 2023.
- YEH, Pochi; GU, Claire. **Optics of Liquid Crystal Displays**. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 2009. ISBN 9780470181768.
- ZAMBONI-RACHED, Michel; NÓBREGA, K. Z.; DARTORA, César A. Analytic description of Airy-type beams when truncated by finite apertures. **Optics Express**, v. 20, n. 18, p. 19972–19977, ago. 2012.
- ZHANG, Yiqi; ZHONG, Hua; BELIĆ, Milivoj R; ZHANG, Yanpeng. Guided self-accelerating Airy beams—a mini-review. **Applied Sciences**, MDPI, v. 7, n. 4, p. 341, 2017.
- ZHANG, Zichen; YOU, Zheng; CHU, Daping. Fundamentals of phase-only liquid crystal on silicon (LCOS) devices. **Light: Science & Applications**, v. 3, e213, 2014.

Apêndices

APÊNDICE A – INTERCÂMBIO DOUTORADO-SANDUÍCHE E PARTICIPAÇÃO NO COMPUTADOR QUÂNTICO EM ÓRBITA

Este apêndice registra o período de intercâmbio doutorado-sanduíche junto ao grupo do Prof. Philip Walther na Universität Wien e a etapa de integração realizada na Alemanha. O objetivo é documentar as atividades desenvolvidas, o escopo técnico do projeto de computador quântico fotônico em órbita e as conexões com os capítulos desta tese.

PANORAMA E OBJETIVOS

O intercâmbio teve duração de cinco meses em Viena com foco em estudo teórico, simulações e suporte técnico de laboratório. Em seguida ocorreu um mês na Alemanha dedicado à montagem e verificação do modelo de voo do experimento fotônico. O objetivo geral foi contribuir para o desenvolvimento e a integração de um *payload* fotônico reconfigurável voltado a processamento de dados a bordo de satélite com ênfase em eficiência energética e operação confiável.

ATIVIDADES EM VIENA

As atividades em Viena combinaram três frentes. A primeira foi a construção e execução de simulações em `Python` para explorar parâmetros do circuito fotônico integrado, prever respostas e orientar decisões de bancada. A segunda foi o suporte contínuo no laboratório, com depuração de eletrônica associada a detectores de fóton único, verificação de temporização e testes com *time-tagger*. A terceira foi a documentação de configurações e rotinas, útil para a etapa de integração. O trabalho priorizou alinhamento entre modelo e restrições reais do *payload*, com ciclos curtos de validação experimental que reduziram incertezas de perdas, alinhamento e janelas de coincidência.

ATIVIDADES NA ALEMANHA

A etapa na Alemanha ocorreu em sala limpa com foco na montagem do modelo de voo. As ações principais foram a integração de óptica e eletrônica, o preparo e o roteamento de fibras, testes funcionais dos SPADs, calibração de coincidências com *time-tagger* e registros de procedimentos para repetibilidade. O trabalho foi coordenado com as equipes responsáveis pela fonte de pares de fótons, pelo chip fotônico reconfigurável e pelo computador de bordo. A prioridade foi entregar uma montagem robusta e verificável dentro de cronograma apertado.

DESCRIÇÃO TÉCNICA DO EXPERIMENTO EM ÓRBITA

O experimento realiza processamento fotônico a bordo, e foi construído e formulado em colaboração com outras instituições como a DLR (Alemanha) e Politecnico Milano (Itália). Uma fonte baseada em pares de fótons alimenta um circuito fotônico integrado reconfigurável que implementa operações interferométricas. As saídas são medidas por detectores de fóton único e o *time-tagger* registra coincidências. Um computador embarcado processa os dados e envia resultados ao solo. O conceito busca reduzir o volume de telemetria por meio de classificação e pós-processamento locais, o que se alinha a perfis de missão que exigem baixo consumo de energia e restrições severas de massa e volume. A figura 11 fornece um esquema visual da proposta do experimento. A arquitetura favorece modularidade, tolerância a vibração e variações térmicas e rotinas simples de verificação de saúde dos sistemas antes da aquisição de dados.

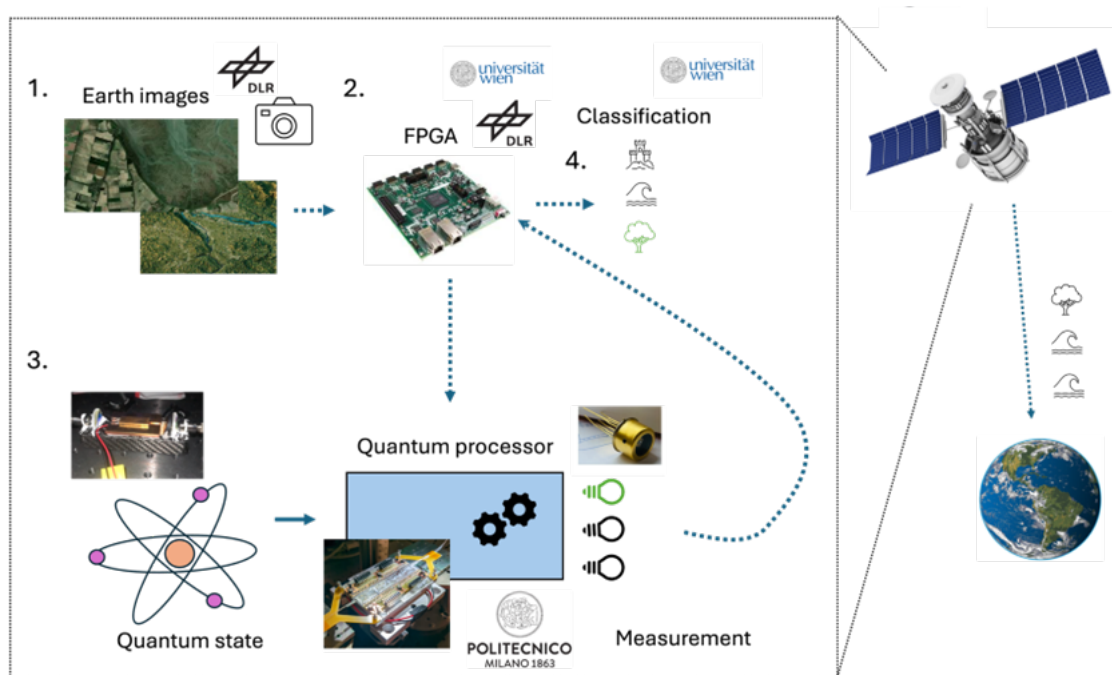


Figura 11 – Esquema geral do protocolo da máquina quântica: o esquema proposto do computador quântico consiste em uma câmera instalada na carga útil que fotografa a Terra. Em seguida, os valores de pixel são codificados na operação de um processador quântico. Esse processador recebe um estado quântico de dois fótons, que é medido na saída. Com base nas estatísticas dessas medições, a imagem é classificada como pertencente a uma classe, por exemplo vegetação, mar ou cidade. Por fim, o resultado da classificação é comunicado à estação em solo. Para cada componente do experimento, foi inserido o logotipo do grupo responsável por sua realização.

RESULTADOS E ESTADO ATUAL

Após integração e qualificação, o modelo de voo foi lançado e estabeleceu comunicação em órbita. O projeto vem sendo apresentado como uma demonstração pioneira de computação quântica no espaço com foco em processamento na borda e eficiência energética. O experimento abre caminho para estudos de robustez de hardware quântico em ambiente espacial e para aplicações de classificação e análise a bordo.

COMPETÊNCIAS DESENVOLVIDAS

O período do intercâmbio consolidou competências diretamente empregadas nesta tese. Em fotônica integrada, houve prática com redes reconfiguráveis de interferômetros e controle térmico de fase. Em detecção, houve aprofundamento do encadeamento SPAD, eletrônica de leitura e coincidências cronometradas. Em integração de sistemas, destacou-se documentação objetiva, padronização de procedimentos e checagens de consistência que reduzem retrabalho. Também se reforçou a visão de compromisso entre requisitos de sistema e escolhas de óptica, eletrônica e software.

APÊNDICE B – PHOTONIC ENTANGLEMENT WITH ACCELERATED LIGHT

Este apêndice apresenta o artigo *Photonic entanglement with accelerated light*, utilizado diretamente no desenvolvimento desta tese. O trabalho investiga o efeito da aceleração óptica (feixes do tipo Airy gerados via SLM) sobre o emaranhamento espacial bipartite de pares de fótons produzidos por SPDC, combinando medidas nas imagens e nos planos de Fourier e avaliando a não separabilidade por meio de testemunhas de variância. Os resultados mostram que a aceleração impressa em um dos braços não degrada significativamente o emaranhamento observado. O artigo é fruto direto do trabalho de doutorado, incluindo concepção experimental, análise teórica e coleta de dados realizados ao longo do projeto.

Artigo em texto integral:

Photonic entanglement with accelerated light

R. C. Souza Pimenta¹, G. H. dos Santos¹, A. B. Barreto^{1,2}, L. C. Céleri³, and P. H. Souto Ribeiro¹

¹Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, CEP 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus Caxias do Sul*, RS, Brazil

³QPequi Group, Institute of Physics, Federal University of Goiás, 74690-900, Goiânia, GO, Brazil

Accelerated light has been demonstrated with laser light and diffraction. Within the diffracting field it is possible to identify a portion that carries most of the density beam energy, which propagates in a curved trajectory as it would have been accelerated by a gravitational field for instance. Here, we analyze the effects of this kind of acceleration over the entanglement between twin beams produced in spontaneous parametric down-conversion. Our results show that this type of acceleration does not affect entanglement significantly. The optical scheme introduced can be useful in the understanding of processes in the boundary between gravitation and quantum physics.

1 Introduction

Optical systems have been of primary relevance in the discovery and understanding of quantum entanglement and its applications to quantum information, from Bell's inequality [1, 2, 3] to applied quantum technology [4, 5, 6]. An important part of these contributions has become possible thanks to the nonlinear optical process known as spontaneous parametric down-conversion (SPDC) [7]. In this process, one pump photon is converted into a pair of photons called signal and idler. They can be prepared in entangled states related to a few different degrees of freedom like polarization, time bins, orbital angular momentum and transverse spatial degrees of freedom [8]. Due to energy and momentum conservation in the down-conversion process, signal and idler photons are generated practically at the same position inside a nonlinear optical medium and are emitted in anti-correlated directions, which results in a naturally entangled state for the transverse spatial degrees of freedom [9].

One way of demonstrating that signal and idler photons are non-separable with respect to the transverse spatial position and momentum is through the violation of inequalities that are based on the vari-

ances of conditional measurements of these quantities [10, 11]. This kind of test is sufficient but not necessary for proving entanglement, thus representing an entanglement witness. There have been several experimental realizations of such tests demonstrating that signal and idler photons are actually non-separable [12]. Here we are interested in the same kind of non-separability test, but when light is accelerated. Such a scenario is interesting in many contexts, but especially in order to simulate the effects of the equivalence principle on light or even flat spacetime phenomena, like the Unruh effect [13].

Experimentally, we create an Airy beam using a spatial light modulator that applies a specific diffraction mask to a Gaussian beam, converting it into an Airy beam [14, 15]. The Airy beams are called accelerated, even though they do not violate Ehrenfest's theorem or the conservation of transverse electromagnetic momentum. The Airy-acceleration effect has to do with the intensity structure, as explained in Ref. [15]. Therefore, we experimentally test an entanglement witness for transverse spatial entanglement, when the idler photon is Airy-accelerated. We show that signal and idler photons are still entangled. We provide a quantum optical theoretical description and present a discussion on the possible utilization of this experimental scheme to study gravitation effects on quantum entanglement.

2 Theory

We would like to test the effect of Airy-acceleration on entanglement in a configuration as simple as possible. Let us consider a down-conversion photon pair source and the down-converted beams are called signal and idler arbitrarily. The signal beam propagates freely to a single photon avalanche diode (SPAD), while the idler one is Airy-accelerated by means of a spatial light modulator (SLM) diffraction mask and is also detected by a SPAD. Signal and idler photons are detected in coincidence and the conditional transverse spatial distributions of position and momentum are measured by means of imaging and Fourier transforming optical schemes. From these measurements, the conditional variances are obtained and used to perform non-separability tests.

G. H. dos Santos: fisica.gu@gmail.com

A. B. Barreto: adriano.barreto@caxias.ifrs.edu.br

L. C. Céleri: lucas@qpequi.com

P. H. Souto Ribeiro: p.h.s.ribeiro@ufsc.br

APÊNDICE C – PARTIAL COHERENCE AND COHERENCE LENGTH IN STIMULATED PARAMETRIC DOWN CONVERSION

Este apêndice registra o artigo *Partial Coherence and Coherence Length in Stimulated Parametric Down-Conversion* (Phys. Rev. Applied **20**, 024007, 2023), produzido com participação do autor enquanto recebia bolsa de doutorado. O trabalho analisa teoricamente e demonstra experimentalmente como a emissão estimulada em SPDC afeta a coerência espacial do feixe idler, introduzindo uma definição operacional de comprimento de coerência- ε a partir da visibilidade de interferência em função da separação transversal. Mostra-se que o campo idler resulta de uma combinação ponderada de contribuições espontânea e estimulada, podendo não se enquadrar em um único feixe do tipo Gaussian–Schell, o que torna necessário caracterizar a coerência em termos da aplicação-alvo. O artigo não integra o escopo temático central desta tese, mas é aqui anexado para fins de registro da produção científica desenvolvida no período da bolsa.

Texto integral do artigo:

Partial Coherence and Coherence Length in Stimulated Parametric Down-Conversion

G.H. dos Santos^{1,*}, R.C. Souza Pimenta¹, R.M. Gomes,² S.P. Walborn,^{3,4,†} and P.H. Souto Ribeiro^{1,‡}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, CEP 88040-900, Florianópolis, Santa Catarina, Brazil*

²*Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, CEP 74690-900, Goiânia, Goiás, Brazil*

³*Departamento de Física, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile*

⁴*Millennium Institute for Research in Optics, Universidad de Concepción, 160-C Concepción, Chile*



(Received 5 April 2023; revised 28 June 2023; accepted 21 July 2023; published 3 August 2023)

In parametric down-conversion, a nonlinear crystal is pumped by a laser and spontaneous emission takes place in signal and idler modes according to the phase-matching conditions. A seed laser can stimulate the emission in the signal beam if there is mode overlap between them. This also enhances the emission in the idler beam, affecting its coherence properties. While the degree of coherence of the idler field as a function of the seed power has already been studied, the transverse coherence length has not yet been properly investigated. The transverse coherence length is a key parameter of optical beams that determines the beam divergence, for example. Here, we present a theoretical and experimental investigation of the transverse coherence length in stimulated down-conversion. In addition, we make a connection between stimulated down-conversion and partially coherent sources like the Gaussian-Schell model beams, and show that in general the idler field cannot be described with this model.

DOI: [10.1103/PhysRevApplied.20.024007](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.20.024007)

I. INTRODUCTION

The coherence of a light field is a fundamental property that affects all degrees of freedom. In several circumstances it is possible to treat temporal coherence and transverse spatial coherence as independent properties, and here we focus on the spatial coherence. Most natural light sources are spatially incoherent in the source, but becomes partially coherent with propagation [1]. Therefore, partial coherence is a relevant issue in most applications of natural light. A particularly relevant case of partially coherent light is the so-called Gaussian-Schell model beam (GSM) [2,3], which finds applications in imaging, optical communication, light scattering, nonlinear optics, and others [4–11].

On the other hand, laser fields are nearly perfectly coherent. In this case the light can be described by deterministic electric field functions, while the partially coherent ones require other mathematical tools that include stochastic fluctuations, as in the GSM model. We analyze here a different kind of partially coherent light source: stimulated parametric down-conversion (StimPDC). In this nonlinear

process, spontaneously emitted light is mixed with stimulated emission in the so-called idler mode. The degree of coherence of the light emitted depends on the stimulating power [12] and so it is expected that the coherence properties will also depend on this parameter. We present here a theoretical and experimental investigation of the coherence length of the light produced in StimPDC. This coherence property has not yet been investigated previously.

The main motivation for this study is concerned with applications of partially coherent light. While GSM and TGSM beams are suited to most of the applications mentioned above, they are not easily prepared in the laboratory, having control of the key parameters like the transverse coherence length. The present investigation contributes to the search for alternative methods for preparing partially coherent beams with controlled parameters. In addition, we compare the StimPDC partially coherent beam with GSM beams, showing that in some cases they are equivalent. Therefore, StimPDC light is presented as a reliable source of partially coherent light.

II. THEORY

The mutual coherence of the idler field in StimPDC with a coherent seed beam was studied in Ref. [12], where it was

*fisica.gu@gmail.com

†swalborn@udec.cl

‡p.h.s.ribeiro@ufsc.br

APÊNDICE D – REVISITING SEMICONDUCTOR BULK HAMILTONIANS USING QUANTUM COMPUTERS

Este apêndice registra o artigo *Revisiting semiconductor bulk hamiltonians using quantum computers* (Physica Scripta **98**, 045804, 2023). O estudo aplica computadores quânticos NISQ, via método variacional SSVQE, a Hamiltonianos $k \cdot p$ de semicondutores para obter estruturas de bandas e, a partir dos autovetores otimizados, estimar probabilidades de transição (absorção). São discutidos o impacto da profundidade do ansatz, do otimizador e da decomposição em matrizes de Pauli nos tempos de execução e na precisão, com comparação a diagonalização clássica. O trabalho não integra o escopo temático da tese, mas é aqui anexado por ter sido produzido durante o período de vigência da bolsa de doutorado do autor.

Texto integral do artigo:



PAPER

Revisiting semiconductor bulk hamiltonians using quantum computers

Raphael César de Souza Pimenta¹ and Anibal Thiago Bezerra² ¹ Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Roberto Sampaio Gonzaga s/n, Florianópolis-SC, Brazil² Departamento de Física, Universidade Federal de Alfenas, Jovino Fernandes Sales 2600, Alfenas-MG, BrazilE-mail: anibal.bezerra@unifal-mg.edu.br**Keywords:** semiconductors, quantum computers, NISQ, k.p MethodSupplementary material for this article is available [online](#)

RECEIVED

6 October 2022

REVISED

24 January 2023

ACCEPTED FOR PUBLICATION

21 February 2023

PUBLISHED

2 March 2023

Abstract

With the advent of near-term quantum computers, it is now possible to simulate solid-state properties using quantum algorithms. By an adequate description of the system's Hamiltonian, variational methods enable to fetch of the band structure and other fundamental properties as transition probabilities. Here, we describe semiconductor structures of the III-V family using k·p Hamiltonians and obtain their band structures using a state vector solver, a probabilistic simulator, and a real noisy-device simulator. The resulting band structures are in good agreement with those obtained by direct diagonalization of the Hamiltonian. The simulation times depend on the optimizer, circuit depth, and simulator used. Finally, with the optimized eigenstates, we convey the inter-band absorption probability, demonstrating the possibility of analyzing the fundamental properties of crystalline systems using quantum computers.

1. Introduction

Over the last few decades, materials science has developed with help of digital simulations on supercomputers. Such developments have enabled several new applications by manipulating the structure, composition, and atomic arrangement, of a broad range of materials [1]. We observe a paradigm change when the scientific community started primarily simulating the material's response, predicting the desired behaviors, and subsequently moving to the laboratory to produce new devices with outstanding properties [1]. The screening of material and structural properties is highly bound to the balance between the systems we can simulate and the computational time invested in the modeling [2]. However, there are known limits to the extent that digital simulations can reach. The complexity of the simulation increases exponentially with the number of constituents of the system, and with the quantum correlations between electrons and nuclei [3]. Hence, approximations should be employed in the models to ease the complexity. The density functional theory (DFT) is an example of success in the materials science area still albeit at the expense of time-consuming simulations [1]. The rate at which computational power is increased appears insufficient to meet the demands of simulating new systems with desired properties [2]. As a result, the question is whether there are viable alternatives to burden the barriers imposed by the limited computational power available to perform the simulations.

Quantum computers appeared as a powerful tool to tackle complicated computational problems [3, 4]. By performing computation using quantum states and their superposition, quantum computers are being employed to scale down the complexity of non-polynomial-hard problems, such as the decomposition of big numbers [5], obtaining optimized routes [6], and coloring graphs [7]. Today's quantum computers are known as Noise Intermediate Scale Quantum computers (NISQ) [8], where the development of algorithms generally involves programming at the gate level, with gates subject to depolarization [9]. Although a plethora of algorithms have been proposed to scale down the complexity of computational problems using NISQ devices, for those problems related to solid state physics, the quantum advantage of quantum computers is still a promise [10], with a few exceptions, such as for two-dimensional out-of-equilibrium dynamics [3]. Besides developing