



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Otávio Falbo Egami

**Análise Magnetoelástica de Um Indutor Trifásico de Núcleo Ferromagnético
Usando MEF-3D**

Florianópolis
2025

Otávio Falbo Egami

**Análise Magnetoelástica de Um Indutor Trifásico de Núcleo Ferromagnético
Usando MEF-3D**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica; da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Laurent Didier Bernard, Dr.
Coorientador: Prof. Mauricio V. Ferreira da Luz, Dr.

Florianópolis

2025

Egami, Otávio Falbo

Análise Magnetoelástica de Um Indutor Trifásico de Núcleo Ferromagnético Usando MEF-3D / Otávio Falbo Egami ; orientador, Laurent Didier Bernard, coorientador, Mauricio Valencia Ferreira da Luz, 2025.

74 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. indutor trifásico. 3. magnetoelástica. 4. método de elementos finitos tridimensional. 5. magnetostrição. I. Bernard, Laurent Didier. II. da Luz, Mauricio Valencia Ferreira. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Otávio Falo Egami

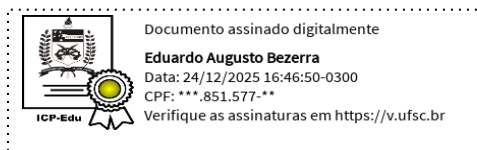
Análise Magnetoelástica de Um Indutor Trifásico de Núcleo Ferromagnético Usando MEF-3D

O presente trabalho, em nível de Mestrado, foi avaliado e aprovado em 07 de outubro de 2025 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

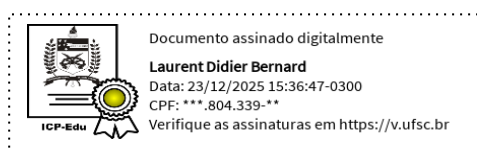
Prof. Tiago Bandeira Marchesan, Dr.
Universidade Federal de Santa Maria

Prof. Walter Pereira Carpes Júnior, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

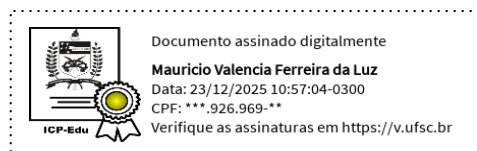
Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.



Prof. Eduardo Augusto Bezerra, Ph.D.
Coordenador em Exercício do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UFSC
PORTARIA N.º 173/2025/GR, DE 27 DE JANEIRO DE 2025



Prof. Laurent Didier Bernard, Dr.
Orientador



Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, Dr.
Coorientador

Florianópolis, 2025.

Dedico este trabalho aos meus pais,
à minha família e aos meus amigos, que sempre
estiveram presentes ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família por sempre me incentivar a buscar conhecimento e a seguir os caminhos da vida com sabedoria e respeito. Em especial, agradeço aos meus pais, Cláudia e Sérgio, que sempre me apoiaram com muito amor e dedicação. Ao meu irmão, Gustavo, que nunca me faltou e esteve sempre presente. Agradeço, ainda, a todos que confiaram na minha capacidade de trilhar o meu próprio caminho.

Registro meu agradecimento ao meu orientador, Prof. Laurent Didier Bernard, que me acompanhou durante o mestrado e na finalização da dissertação, e ao meu coorientador, Prof. Mauricio Valencia Ferreira da Luz, que me acompanhou ao longo desta jornada acadêmica, desde a graduação até o término do mestrado, sempre com muita paciência e dedicação.

Agradeço à CAPES e à Whirlpool Corporation pelo apoio financeiro concedido durante a realização do mestrado.

RESUMO

Um indutor trifásico de núcleo magnético é um componente elétrico de potência que opera em sistemas trifásicos, utilizando o núcleo ferromagnético para concentrar o fluxo, aumentar a indutância e melhorar a eficiência. É aplicado em filtros de harmônicos, reatores limitadores de corrente, indutores de suavização em conversores eletrônicos de potência e dispositivos de redução de ruído e vibração em máquinas elétricas. Indutores com entreferros distribuídos podem apresentar vibrações excessivas durante a operação. Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma metodologia para a simulação magnetoelástica de um indutor trifásico de núcleo ferromagnético, empregando o método de elementos finitos em três dimensões (MEF-3D), considerando como fontes de vibração as forças de magnetostrição dos materiais magnéticos (aço Fe-Si e aço carbono) bem como as forças resultantes do tensor de Maxwell nos entreferros. O modelo 3D do indutor foi desenvolvido no software Gmsh para a criação da geometria, e as formulações foram implementadas no software GetDP. A formulação acoplada magnetoelástica permite analisar as forças atuantes no núcleo e nas partes estruturais do dispositivo, abrangendo desde o estudo de malha e a análise de truncamento até a consideração de uma camada infinita envolvendo o indutor. Os resultados evidenciam a importância de incluir a magnetostrição na análise vibracional da estrutura, e a metodologia proposta pode servir de base para pesquisas futuras e para o avanço da investigação de equipamentos magnéticos, tais como indutores trifásicos.

Palavras-chave: indutor trifásico; núcleo ferromagnético; magnetoelástica; método de elementos finitos tridimensional; magnetostrição; tensor de Maxwell.

ABSTRACT

A three-phase magnetic core inductor is a power electrical component that operates in three-phase systems, employing a ferromagnetic core to concentrate the magnetic flux, enhance the inductance, and improve efficiency. Such devices are commonly applied in harmonic filters, current-limiting reactors, smoothing inductors in power electronics converters, and noise- and vibration-reduction systems in electrical machines. Inductors with distributed air gaps may exhibit excessive vibration during operation. This work presents the development of a methodology for the magnetoelastic simulation of a three-phase ferromagnetic core inductor based on the three-dimensional finite element method (3D-FEM), in which the primary vibration sources are considered to be the magnetostrictive forces in magnetic materials (Fe-Si steel and carbon steel) and the resultant force derived from the Maxwell stress tensor acting in the air gaps. The 3D model of the inductor was developed in Gmsh for geometry generation, and the formulations were implemented in GetDP. The coupled magnetoelastic formulation enables the analysis of the forces acting on the core and the structural parts of the device, encompassing mesh refinement studies and the consideration of an infinite layer surrounding the inductor. The results highlight the significance of including magnetostriction in the structural vibration analysis, and the proposed methodology can serve as a foundation for future research and for advancing the investigation of magnetic devices such as three-phase inductors.

Keywords: three-phase inductor; ferromagnetic core; magnetoelastic; three-dimensional finite element method; magnetostriction; Maxwell tensor.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Montagem básica de uma perna de um indutor com entreferros, adaptado de [25].	22
Figura 2 – Curva da magnetostrição paralela, adaptado de [22].	24
Figura 3 – Curva da magnetostrição anisotrópica e sob efeito de tensão mecânica, adaptado de [28].	25
Figura 4 – Curva da magnetostrição anisotrópica, adaptado de [29].	25
Figura 5 – Estrutura de um problema magnetostático genérico, adaptado de [4].	31
Figura 6 – Comportamento do campo magnético e da indução magnética na interface Γ , adaptado de [4].	32
Figura 7 – Condições de contorno típicas para problemas elásticos [20].	41
Figura 8 – Linha definindo a condição de contorno de simetria, adaptado de [20].	42
Figura 9 – Exemplo de um material composto genérico [20].	42
Figura 10 – Curva B-H das partes estruturais e do núcleo, do fabricante.	47
Figura 11 – Curva B-H e a permeabilidade relativa de cada material, do fabricante.	48
Figura 12 – Descrição das estruturas do indutor trifásico.	49
Figura 13 – Condição de contorno de fixação.	50
Figura 14 – Condição de contorno de simetria.	50
Figura 15 – Ponto 1 para obtenção de dados.	52
Figura 16 – (a) Indutância versus a malha e (b) deslocamento no ponto 1.	54
Figura 17 – (a) Malha 1, (b) malha 2, (c) malha 3, e (d) malha 4.	54
Figura 18 – (a) Malha 5, (b) malha 6, (c) malha 7 e (d) malha 8.	55
Figura 19 – Indutância em função da corrente de entrada, com a bobina central energizada.	57
Figura 20 – Indutância em função da corrente de entrada, com todas as bobinas energizadas.	57
Figura 21 – Erro calculado em comparação da simulação e experimental, com todas bobinas energizadas.	58
Figura 22 – Modos naturais de deformação do indutor trifásico, mostrados os 6 primeiros modos da Tabela 4.	59

Figura 23 – Fluxo para simulação multifísica com acoplamento fraco.....	60
Figura 24 – Distribuição do módulo da indução magnética no núcleo, em $[T]$	61
Figura 25 – Zoom da distribuição da indução magnética no núcleo, em $[T]$.	61
Figura 26 – Distribuição das forças na superfície do núcleo do tensor de Maxwell, em $[N/m^2]$	62
Figura 27 – Distribuição da norma da força de magnetostricção na superfície do núcleo, em $[N/m^2]$	62
Figura 28 – Pontos de obtenção de dados na simulação para análise de deslocamento pela frequência.....	63
Figura 29 – Magnitude e componentes do deslocamento no ponto 1, sem magnetostricção e somente com tensor de Maxwell.....	64
Figura 30 – Magnitude e componentes do deslocamento no ponto 2, sem magnetostricção e somente com tensor de Maxwell.....	64
Figura 31 – Magnitude e componentes do deslocamento no ponto 3, sem magnetostricção e somente com tensor de Maxwell.....	65
Figura 32 – Distribuição em condições nominais do deslocamento resultante com somente o tensor de Maxwell.	65
Figura 33 – Deslocamento pela frequência no ponto 1, com magnetostricção e com tensor de Maxwell.....	67
Figura 34 – Deslocamento pela frequência no ponto 2, com magnetostricção e com tensor de Maxwell.....	67
Figura 35 – Deslocamento pela frequência no ponto 3, com magnetostricção e com tensor de Maxwell.....	68
Figura 36 – Deslocamento vertical em função da frequência no ponto 1, somente com o tensor de Maxwell, com o tensor de Maxwell e a magnetostricção e a diferença entre os dois casos.....	69
Figura 37 – Deslocamento vertical em função da frequência no ponto 2, somente com o tensor de Maxwell, com o tensor de Maxwell e a magnetostricção e a diferença entre os dois casos.....	69
Figura 38 – Deslocamento vertical em função da frequência no ponto 3, somente com o tensor de Maxwell, com o tensor de Maxwell e a magnetostricção e a diferença entre os dois casos.....	70

Figura 39 – Principal forma modal, excitada pela magnetostricção e tensor de Maxwell, em 2283,83 [Hz].....	71
Figura 40 – Distribuição em condições nominais do deslocamento no dispositivo, em m	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros elétricos e mecânicos dos materiais.....	49
Tabela 2 – Estudo de malha.....	53
Tabela 3 – Estudo de malha, continuação.....	53
Tabela 4 – Frequências naturais da estrutura do indutor.	58

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos alfanuméricos:

$\vec{B}$	Indução magnética
$\vec{H}$	Campo magnético
$\vec{D}$	Indução elétrica
$\vec{E}$	Campo elétrico
$\vec{B}_r$	Indução magnética remanente
$\vec{T}$	Tensor de Maxwell
$\vec{f}$	Força externa
$\vec{A}$	Potencial vetor magnético
$\vec{J}$	Densidade superficial de corrente elétrica
$\vec{J}_l$	Densidade linear de corrente elétrica
$\vec{n}$	Vetor normal
$\vec{u}$	Vetor deslocamento
N	Número de espiras
L	Indutância da bobina
E	Módulo de Young
P	Coefficiente de Poisson
t	Tempo
G	Módulo de cisalhamento do material (ou segundo parâmetro de Lamé)
C	Tensor de rigidez de quarta ordem
P_r	Matriz de rotação em 3D

Símbolos gregos:

ρ	Densidade volumétrica de carga elétrica
μ	Permeabilidade magnética
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
μ_0	Permeabilidade magnética do ar
$\mu(\vec{H})$	Permeabilidade magnética não linear
ν	Relutividade magnética
ε	Permissividade elétrica
σ	Condutividade elétrica
Ω	Domínio de cálculo usado no MEF
Γ	Fronteira do domínio de cálculo usada no MEF
Γ_B	Fronteira com componente normal do fluxo magnético zero
Γ_{m0}	Fronteira entre o material magnético e o domínio de ar
Γ_H	Fronteira com componente tangencial definida
ϕ	Fluxo magnético
Ψ	Fluxo magnético concatenado
η	Tensor de deformação total
η_e	Tensor de deformação elástica

η_{μ}	Tensor de deformação magnetostrictiva
λ	Primeiro parâmetro de Lamé
$\lambda_{\parallel}$	Tensão ao longo da direção tangencial
$\lambda_{\perp}$	Tensão ao longo da direção normal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	19
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	CONCEITOS GERAIS	21
2.2	MATERIAIS MAGNÉTICOS.....	23
2.3	MAGNETOSTRIÇÃO	23
2.4	ELEMENTOS FINITOS.....	26
2.5	FORMULAÇÕES	26
2.6	INDUTORES	27
3	EQUAÇÕES DE MAXWELL.....	29
3.1	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	30
3.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	31
3.2.1	Refração dos campos magnéticos	32
3.3	FORMA INTEGRAL	33
3.4	MAGNETOSTÁTICA.....	34
3.5	FORMA FORTE DA MAGNETOSTÁTICA	35
3.6	FORMA FRACA DA MAGNETOSTÁTICA.....	36
4	EQUAÇÕES ELÁSTICAS EM TERMOS DO DESLOCAMENTO	38
4.1	FORMA FORTE DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA.....	38
4.2	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	41
4.3	MAGNETOSTRIÇÃO	42
4.4	FORMA FRACA DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA.....	43
5	SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM 3D	46
5.1	METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO COM MEF.....	46
5.2	MATERIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO	48
5.3	DOMÍNIO INFINITO DE AR	51
5.4	ESTUDO DE MALHA.....	52
5.5	ANÁLISE DA SATURAÇÃO DO NÚCLEO	56
5.6	ANÁLISE ESTRUTURAL	58
5.7	IMPLEMENTAÇÃO MULTIFÍSICA.....	59
5.7.1	Resultados da magnetostática	60

5.7.2	Resposta em frequência do deslocamento	63
5.7.2.1	<i>Considerando somente o tensor de Maxwell</i>	<i>63</i>
5.7.2.2	<i>Considerando o tensor de Maxwell e a magnetostricção.....</i>	<i>66</i>
6	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

O indutor é um dispositivo fundamental na engenharia elétrica e eletrônica, desempenhando um papel essencial em diversas aplicações industriais, incluindo sistemas de potência, eletrônica de potência, telecomunicações e circuitos magnéticos. Seu funcionamento baseia-se na capacidade de armazenar energia no campo magnético, influenciando diretamente a eficiência e a confiabilidade dos equipamentos elétricos e magnéticos.

A necessidade de projetar dispositivos de forma otimizada torna imprescindível a utilização de métodos computacionais avançados, capazes de prever o comportamento do dispositivo antes da fabricação. Entre esses métodos, o método de elementos finitos (MEF) destaca-se como uma ferramenta indispensável para simular com precisão os fenômenos magnéticos e suas interações com efeitos mecânicos, como as forças de magnetostrição e as forças calculadas pelo tensor de Maxwell, que atuam no núcleo, bem como a força de Laplace, que atua nas bobinas.

A aplicação do MEF possibilita a análise de geometrias complexas, materiais não lineares e simulações multifísicas, permitindo ajustes precisos no projeto para minimizar perdas, vibrações e ruídos indesejados. Este trabalho realiza a modelagem multifísica do acoplamento magnetoelástico de um indutor trifásico, aspecto crucial para compreender a interação entre as propriedades magnéticas e mecânicas do equipamento. Essa abordagem reduz a necessidade de prototipagem excessiva, pois a determinação das forças atuantes no indutor é essencial para o dimensionamento adequado dos componentes mecânicos. A avaliação dessas forças fornece informações importantes para a escolha de materiais e do tipo de espaçador mais adequado, contribuindo para a integridade estrutural e prevenindo deformações excessivas nos componentes.

Dessa forma, este trabalho apresenta um estudo detalhado da formulação magnetoelástica e da implementação numérica para a análise de indutores, evidenciando a importância do MEF em três dimensões (MEF-3D) no projeto desses dispositivos e garantindo a qualidade e o desempenho esperados.

A metodologia proposta orienta o desenvolvimento deste estudo, visando promover avanços em simulações multifísicas, com ênfase em sistemas magnetoelásticos aplicados a indutores trifásicos. Os resultados obtidos a partir dessas simulações contribuem para o aprimoramento da modelagem de dispositivos essenciais à manutenção da qualidade da energia elétrica. A compreensão dos efeitos

das forças magnéticas sobre a vibração dos equipamentos possibilita a otimização da geometria, a avaliação do impacto de diferentes materiais e a melhoria do desempenho estrutural e funcional dos sistemas estudados.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal deste trabalho é realizar uma análise magnetoelástica de um indutor trifásico de núcleo ferromagnético por meio do MEF-3D. O acoplamento multifísico será realizado de forma fraca, na qual, inicialmente, resolve-se o problema magnetostático para calcular as forças de magnetostrição atuantes no núcleo e as forças obtidas a partir do tensor de Maxwell nas superfícies do núcleo situadas nos entreferros. Essas forças serão então utilizadas como fontes no problema elástico, que será resolvido no domínio da frequência. As forças de Laplace atuantes nas bobinas do indutor não serão consideradas neste trabalho.

Para alcançar os objetivos deste trabalho, utilizam-se dois softwares livres da Universidade de Liège, Bélgica: o pré- e o pós-processamento são realizados com o software Gmsh [23], e o solver utilizado é o software GetDP [24].

A escolha desses softwares livres deve-se ao fato de possibilitarem acesso completo às formulações matemáticas, bem como à definição das variáveis e dos parâmetros do problema estudado.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- (a) Entender, estudar e implementar simulações magnetoelásticas em indutores trifásicos de núcleo ferromagnético;
- (b) Desenvolver e descrever a metodologia para simulações multifísicas em softwares de código aberto;
- (c) Contribuir para a compreensão da formulação magnetoelástica e das implementações em software de código aberto, promovendo o desenvolvimento acadêmico a partir de um algoritmo parametrizado de um indutor trifásico.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este capítulo apresenta uma introdução ao tema desenvolvido nesta dissertação. No capítulo 2, é realizada a revisão bibliográfica, enquanto o capítulo 3 aborda a fundamentação teórica relativa à parte magnética, ao passo que o capítulo

4 trata da fundamentação teórica referente à parte elástica. O capítulo 5 detalha a implementação do indutor trifásico, bem como os resultados obtidos. Por fim, o capítulo 6 apresenta as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo aborda os fundamentos físicos e os modelos matemáticos que sustentam os estudos desenvolvidos nesta dissertação. São apresentados os princípios do eletromagnetismo, o método dos elementos finitos, os efeitos da magnetostrição, os aspectos da análise estrutural, as formulações adotadas e o acoplamento magnetoelástico. Por fim, são descritos o dispositivo analisado e suas principais aplicações.

2.1 CONCEITOS GERAIS

Os indutores têm como principal função armazenar energia em seu campo magnético. Quando a corrente elétrica que atravessa o indutor varia, surge uma tensão induzida que se opõe a essa variação, conforme a lei de Faraday–Lenz. Como consequência, o indutor tende a manter o fluxo magnético praticamente constante, retardando variações bruscas na corrente.

O reator shunt, por exemplo, é um componente que contribui para a estabilidade e a eficiência dos sistemas de transmissão. Em sistemas de alta tensão (AT), é comum o uso de linhas de transmissão de grande extensão, as quais apresentam uma capacitância parasita. Essa capacitância pode ser significativa em linhas longas e provocar o aumento da tensão ao longo do percurso, resultando em sobretensão na extremidade da linha. Esse fenômeno, conhecido como efeito Ferranti [26], pode causar danos aos equipamentos conectados à rede, além de aumentar as perdas por efeito Joule.

O reator é um indutor projetado para aplicações em potência, normalmente dimensionado para suportar correntes e tensões mais elevadas. Seu núcleo é dividido em discos, e o entreferro é preenchido por materiais isolantes, conforme ilustrado na Figura 1.

A desvantagem dos indutores com entreferro é a tendência à produção de ruído decorrente da vibração, que ocorre no dobro da frequência da rede, a qual é causada pelas forças atuantes no dispositivo, tais como as forças de magnetostrição atuantes no núcleo e as forças resultantes do tensor de Maxwell nas superfícies do núcleo localizadas nos entreferros. A força de Laplace atuante nas bobinas também contribui para a vibração, porém não é analisada neste trabalho.

A magnetostrição é o fenômeno pelo qual certos materiais magnéticos sofrem deformações mecânicas sob a influência de um campo magnético. Essa propriedade

é particularmente relevante em aplicações como reatores e transformadores, nas quais podem ser geradas vibrações e ruídos indesejáveis. O estudo da magnetostricção e de seus impactos é essencial para o projeto de dispositivos eficientes e silenciosos [1]–[2].

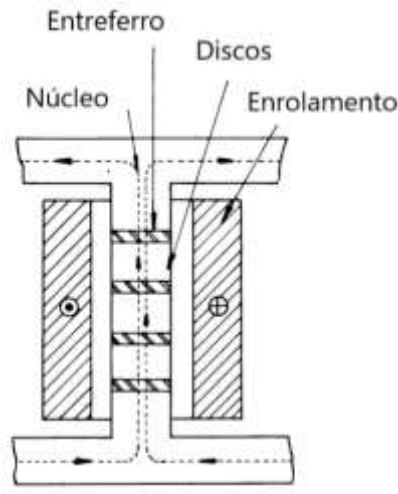


Figura 1 – Montagem básica de uma perna de um indutor com entreferros, adaptado de [25].

A formulação matemática dos problemas que envolvem magnetostricção e vibração frequentemente se baseia nas equações de Maxwell, aplicadas a sistemas sujeitos a forças geradas pelo campo magnético, as quais podem gerar deformações mecânicas. A combinação dessas forças com os efeitos mecânicos é essencial para representar adequadamente a interação completa em sistemas como transformadores e indutores. Nas referências [3] e [4], destaca-se a importância de utilizar o método dos elementos finitos para resolver equações diferenciais em domínios tridimensionais complexos, especialmente na presença de materiais não lineares.

Existem duas estratégias para resolver problemas multifísicos, nos quais diferentes fenômenos físicos interagem, como os domínios mecânico e magnético estudados neste trabalho. Dentre essas abordagens, o acoplamento forte caracteriza-se pela resolução simultânea das equações governantes dos campos físicos, configurando uma abordagem mais complexa do ponto de vista computacional.

Por outro lado, o acoplamento fraco resolve as equações de cada domínio físico separadamente, com trocas iterativas de dados para modelar as interações entre os campos. Essa abordagem tende a ser menos precisa do que o acoplamento forte,

porém apresenta menor custo computacional, o que possibilita sua aplicação em geometrias complexas.

2.2 MATERIAIS MAGNÉTICOS

Os materiais ferromagnéticos desempenham um papel fundamental em dispositivos magnéticos devido à sua capacidade de concentrar o fluxo magnético. Os núcleos ferromagnéticos dos indutores são responsáveis por essa concentração e, geralmente, são produzidos em chapas laminadas, com o objetivo de reduzir as perdas por correntes induzidas. Uma característica inerente a esses materiais é a não linearidade da curva $B-H$, a qual impacta significativamente as respostas: estática, dinâmica e vibracional do sistema.

Além disso, diferentes materiais magnéticos apresentam graus variados de magnetostrição. Por exemplo, em [5] os autores sugerem que a escolha do material pode impactar significativamente a amplitude das vibrações. Materiais isotrópicos e anisotrópicos apresentam respostas diferentes quando submetidos ao mesmo campo magnético, o que pode influenciar a intensidade do ruído acústico gerado por transformadores e reatores [6].

A mudança nos tipos de materiais magnéticos e os impactos resultantes são analisados em [7], o qual demonstra como a anisotropia magnética pode influenciar tanto as vibrações quanto as perdas por magnetostrição em transformadores trifásicos. Essa análise é relevante para a seleção de materiais e para o projeto de dispositivos com desempenho otimizado em aplicações de alta potência.

2.3 MAGNETOSTRIÇÃO

O termo magnetostrição, neste trabalho, engloba diversos fenômenos magnetoelásticos complexos. Ele descreve a deformação de um material ferromagnético submetido a um campo magnético externo, resultando em expansão ou contração ao longo da direção do campo aplicado. Em campos magnéticos de baixa amplitude, ocorre uma transformação isocórica, na qual não há variação de volume; isto é, a deformação na direção do campo (magnetostrição longitudinal) está associada à deformação perpendicular ao campo (magnetostrição transversal). Observa-se que se trata de um fenômeno multifísico, no qual há acoplamento entre o comportamento mecânico e os fenômenos magnéticos.

O estudo da magnetostricção é essencial para compreender as vibrações geradas em dispositivos magnéticos. Em [8], os autores analisam como as forças magnetostritivas podem comprometer o desempenho de motores e transformadores, em razão da deformação cíclica das lâminas de aço sob a ação de campos magnéticos alternados. Esse fenômeno também pode conduzir a falhas mecânicas decorrentes da fadiga estrutural [1], [9].

Na pesquisa apresentada em [10], os autores investigam a interação entre as vibrações magnetostritivas e o tensor de Maxwell em reatores alimentados por inversores, demonstrando que a ação combinada dessas forças amplifica significativamente as vibrações, sobretudo em sistemas com entreferros distribuídos. A análise tridimensional foi realizada por meio da aplicação de forças nodais equivalentes, que representam a magnetostricção, ressaltando a relevância dos entreferros no comportamento dinâmico da estrutura.

Em [22], os autores analisam o efeito da ressonância associada à magnetostricção e às forças geradas pelo tensor de Maxwell em um indutor bidimensional (2D). Uma análise de sensibilidade é conduzida para verificar o impacto da variação geométrica no desempenho do indutor. Apresenta-se uma curva de magnetostricção longitudinal, conforme ilustrada na Figura 2.

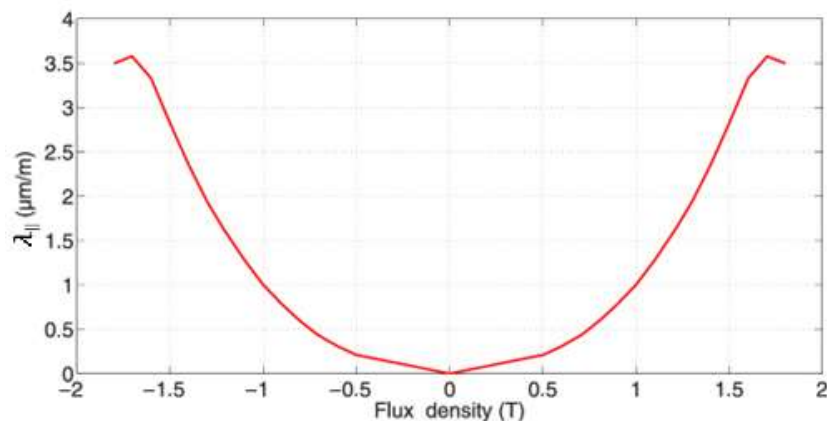


Figura 2 – Curva da magnetostricção paralela, adaptado de [22].

O estudo apresentado em [28] demonstra que o modelo de acoplamento fraco é adequado para descrever corretamente deformações inferiores a $250 \mu m/m$. Além disso, esse estudo realiza uma análise comparativa entre a magnetostricção isotrópica e a anisotrópica, aplicadas a materiais com grãos não orientados e orientados, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3. As linhas contínuas representam a curva de magnetostricção isotrópica em função do estresse tensorial, enquanto as

curvas tracejadas descrevem o comportamento anisotrópico, decomposto na direção de laminação das chapas e na direção transversal.

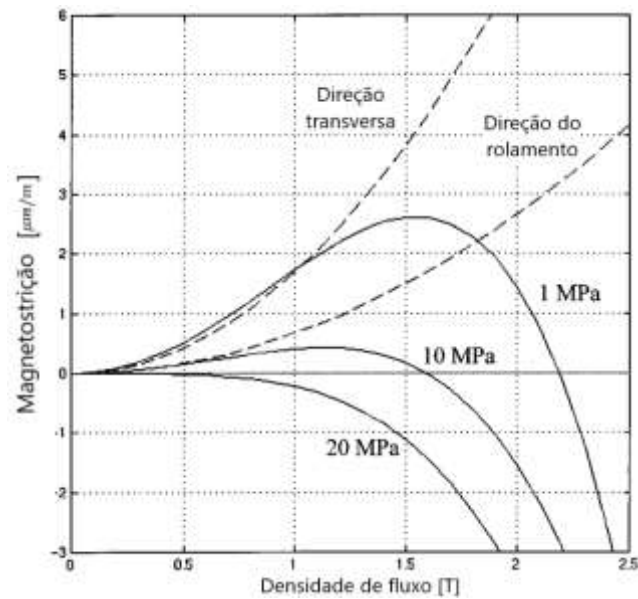


Figura 3 – Curva da magnetostrição anisotrópica e sob efeito de tensão mecânica, adaptado de [28].

O trabalho [29] apresenta melhorias em modelos aplicados a reatores shunt de ultra alta tensão (UHV). O estudo propõe o uso de formulações tridimensionais, considerando a anisotropia da magnetostrição em aços siliciosos laminados de grãos não orientados (GNO). A Figura 4 apresenta as curvas de magnetostrição nas direções de laminação (ou rolamento) e transversal.

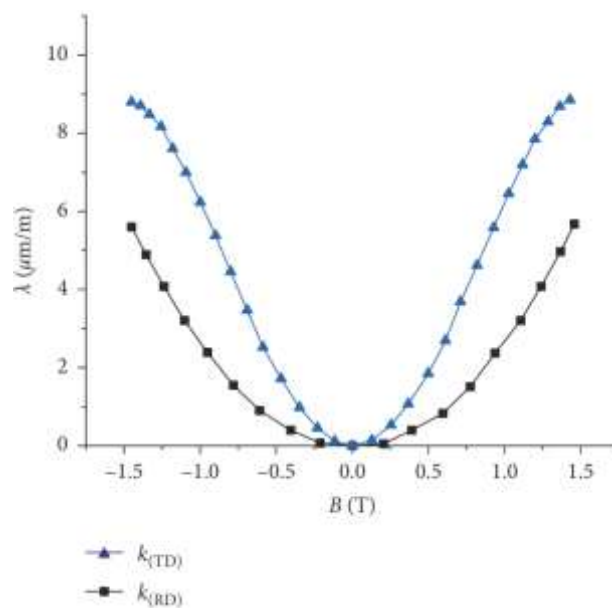


Figura 4 – Curva da magnetostrição anisotrópica, adaptado de [29].

2.4 ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) é uma das ferramentas mais utilizadas na análise de problemas magnéticos e mecânicos, devido à sua capacidade de lidar com geometrias complexas e materiais não lineares. Em [11], são introduzidas as formas de Whitney, uma classe de funções de base essencial para garantir as condições de continuidade dos campos magnéticos através dos elementos da malha. Essas funções são especialmente relevantes na análise de dispositivos tridimensionais.

Além disso, em [4], são destacadas as vantagens da utilização de formulações baseadas em diferentes potenciais escalares e vetoriais, as quais simplificam a modelagem e a implementação computacional. Essa abordagem é amplamente aplicada na simulação de sistemas magnéticos acoplados, permitindo prever a distribuição do campo e o comportamento mecânico dos materiais [12].

O MEF é capaz de realizar a modelagem multifísica, como no caso do presente estudo, no qual é abordado o acoplamento magnetoelástico. Em [13], o método é aplicado para analisar indutores acoplados, demonstrando como o acoplamento magnético pode influenciar a resposta dinâmica e a estabilidade dos circuitos.

2.5 FORMULAÇÕES

O artigo [14] apresenta um modelo numérico para a análise magnetomecânica de problemas envolvendo materiais magnetostrictivos. É realizada uma comparação entre o acoplamento forte e o acoplamento fraco, na qual se verifica a variação da permeabilidade em função do esforço mecânico (tensão). Um estudo de caso bidimensional, considerando um material ferromagnético envolto por uma bobina, mostra que o acoplamento fraco tende a produzir maiores deformações em comparação ao acoplamento forte.

O artigo [15] propõe uma formulação para prever o comportamento magnetostrictivo em materiais ferromagnéticos. O trabalho analisa as curvas de magnetização e de permeabilidade em função do esforço mecânico, para diferentes valores de indução magnética. O método do trabalho virtual, associado ao acoplamento fraco, é aplicado a um motor de ímã permanente bidimensional. Os resultados indicam que a inclusão do efeito magnetostrictivo aumenta em mais de 50% os valores obtidos, em relação ao modelo puramente magnético.

A referência [16] investiga três configurações distintas das leis constitutivas: (i) parâmetros magnéticos e elásticos lineares; (ii) não linearidade apenas no modelo magnético; e (iii) não linearidade simultânea nos domínios magnético e elástico, incluindo a magnetostrição na formulação mecânica. A análise estática é conduzida em termos do potencial vetor magnético e do deslocamento mecânico. O estudo de caso em uma chapa bidimensional demonstra que a formulação acoplada altera de forma significativa o cálculo das forças resultantes.

Por fim, a tese [8] investiga de que maneira o acoplamento magnetoelástico afeta as vibrações e os efeitos sonoros em máquinas elétricas, além de apresentar metodologias para a realização de medições experimentais de magnetostrição.

2.6 INDUTORES

Os indutores são componentes essenciais em uma ampla gama de dispositivos elétricos, como transformadores e reatores, nos quais desempenham funções críticas na regulação do fluxo magnético e no armazenamento de energia. Transformadores trifásicos são amplamente utilizados em sistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica, enquanto os reatores são empregados para limitar a corrente e suavizar as variações de tensão. Esses dispositivos apresentam uma diversidade de aplicações e configurações, sendo cada um projetado para atender a demandas específicas. A escolha adequada do tipo e do material do núcleo, bem como a consideração dos efeitos da magnetostrição, é fundamental para garantir a eficiência e a durabilidade desses dispositivos.

Os termos indutores, *chokes*, reatores e filtros são frequentemente empregados como sinônimos. Fundamentalmente, tratam-se do mesmo tipo de componente, mas com características magnéticas distintas e otimizados para operarem de maneira diferente. Todos se referem a um único tipo de componente: o indutor, que é um elemento passivo de dois terminais. Os *chokes* são um tipo de indutor destinado a bloquear a corrente alternada em um circuito, limitando a taxa de variação dentro de uma faixa de frequência específica, enquanto permitem a passagem de corrente contínua. Já o reator, é um tipo de indutor que introduz uma reatância indutiva no sistema. Devido ao aumento da impedância com a frequência, os reatores são eficazes na supressão de ruídos de alta frequência. Normalmente, são utilizados para limitar as correntes de chaveamento e as correntes de falta. Reatores alimentados por inversores são especialmente vulneráveis à magnetostrição, apresentando vibrações

significativas que podem ser mitigadas por meio de otimizações geométricas, ajustes no entreferro e análise do material utilizado. Outra aplicação é a de indutores acoplados magneticamente, que são empregados em circuitos para reduzir interferências eletromagnéticas.

A referência [17] apresenta um estudo magnético e eletrostático de um indutor trifásico com núcleo tipo EI. O projeto do indutor trifásico é realizado tanto de forma analítica quanto numérica antes da produção do protótipo; após a fabricação, a eficiência do equipamento é analisada experimentalmente.

Por fim, a referência [27] realiza uma análise paramétrica de reatores para avaliar o impacto da carga nos valores de indutância. Os resultados dessa análise fornecem informações sobre a estabilidade da indutância, as perdas e a conformidade dos reatores com as normas apresentadas no artigo. As simulações foram realizadas no domínio do tempo, considerando a não linearidade do núcleo, e foi verificado o impacto das perdas ao considerar dois tipos de materiais: um com grãos orientados (GO) e outro com grãos não orientados (GNO).

3 EQUAÇÕES DE MAXWELL

Este capítulo apresenta as equações de Maxwell, as leis constitutivas que regem o comportamento dos materiais e as condições de contorno. A partir desses conceitos, são apresentadas as formulações matemáticas do problema magnetostático, tanto em sua forma forte quanto em sua forma fraca.

Nas equações de (3-1) a (3-4), são apresentadas as equações de Maxwell em meios contínuos. Essas equações descrevem as leis físicas que regem o comportamento dos campos elétrico e magnético.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3-2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3-4)$$

onde $\vec{H}$ é o campo magnético, em $[A/m]$; $\vec{J}$ é a densidade superficial de corrente de condução, em $[A/m^2]$; $\partial \vec{D} / \partial t$ é a densidade superficial de corrente de deslocamento, em $[A/m^2]$; $\vec{E}$ é o campo elétrico, em $[V/m]$; $\vec{B}$ é a indução magnética, em $[T]$; e ρ é a densidade volumétrica de carga elétrica, em $[C/m^3]$.

A equação (3-1) é conhecida como Lei de Ampère–Maxwell; a equação (3-2), como lei de conservação do fluxo magnético; a equação (3-3), como Lei de Faraday; e a equação (3-4), como lei de Gauss.

A equação da continuidade elétrica é derivada a partir da aplicação do operador divergente à equação (3-1) e de sua substituição na equação (3-4), resultando na equação (3-5).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-5)$$

Em baixas frequências, a densidade superficial de corrente de condução possui magnitude muito maior do que a densidade superficial de corrente de deslocamento, resultando nas equações (3-6) a (3-9). Essa forma é conhecida como quase-estática [21].

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (3-6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3-7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3-9)$$

Aplicando o operador divergente à equação da lei de Ampère (3-6) em regime quase-estático, obtém-se a equação da continuidade de corrente (3-10).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3-10)$$

Esta equação implica a conservação do fluxo da densidade de corrente, ou seja, a soma das correntes que entram em um volume é igual à soma das correntes que saem. Trata-se da versão local (diferencial) da Lei de Kirchhoff das correntes.

3.1 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações (3-11) a (3-13) constituem um conjunto de leis necessárias para descrever a relação entre os campos e as propriedades físicas dos materiais.

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (3-11)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (3-12)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3-13)$$

onde μ é a permeabilidade magnética, em $[H/m]$; ε é a permissividade elétrica, em $[F/m]$; σ é a condutividade elétrica, em $[S/m]$; e $\vec{B}_r$ é a indução magnética remanente, em $[T]$, usada para representar os ímãs permanentes.

As relações constitutivas apresentadas em (3-11) a (3-13) descrevem meios isotrópicos; isto é, considera-se que o material possui as mesmas propriedades em todo o seu domínio, independentemente da orientação do campo em relação ao material. Para uma descrição mais realista, é necessária a introdução de tensores a fim de representar a variação desses parâmetros em diferentes direções. No caso dos campos elétrico e magnético, esses parâmetros são representados por tensores de segunda ordem. Geralmente, as relações constitutivas são não lineares; isto é, a permeabilidade depende do campo magnético, enquanto a condutividade e a permissividade dependem do campo elétrico, conforme descrito em (3-14) a (3-16). As relações constitutivas também podem variar conforme a direção de aplicação do campo sobre o material, fenômeno conhecido como anisotropia. Nesse caso, essas relações assumem forma tensorial, conforme apresentado em (3-17).

$$\vec{B}(\vec{H}) = \mu(\vec{H}) \vec{H} \quad (3-14)$$

$$\vec{J}(\vec{E}) = \sigma(\vec{E}) \vec{E} \quad (3-15)$$

$$\vec{D}(\vec{E}) = \varepsilon(\vec{E}) \vec{E} \quad (3-16)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

3.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são cruciais para garantir a precisão e a unicidade das soluções em simulações pelo MEF, uma vez que definem o comportamento dos campos nos limites do domínio analisado.

Para uma representação física adequada, devem ser aplicadas condições de contorno apropriadas na fronteira do domínio, as quais asseguram a unicidade da solução das equações diferenciais parciais e estão associadas às componentes tangenciais e normais dos campos envolvidos.

A Figura 5 apresenta o domínio considerado para um problema magnetostático, em que Ω representa a região total de estudo, delimitada pela superfície Γ .

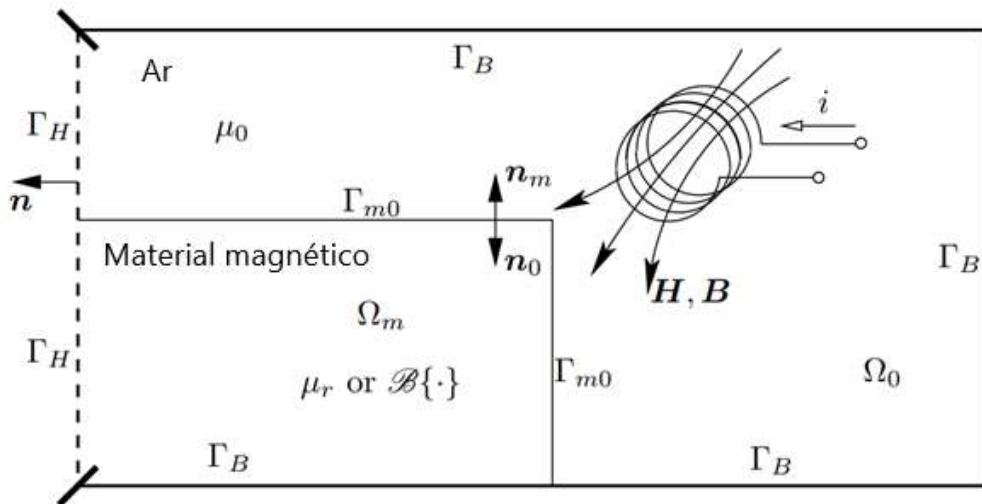


Figura 5 – Estrutura de um problema magnetostático genérico, adaptado de [4].

As equações de Maxwell são válidas na região $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_m$. Essa região é limitada pelas fronteiras Γ_H e Γ_B , nas quais se define $\partial\Omega = \Gamma_H \cup \Gamma_B$. Na superfície Γ_H , a componente tangencial do campo magnético pode ser definida para representar um plano de simetria ou uma corrente superficial conhecida. Já a superfície Γ_B é usualmente uma superfície fechada ou um plano de simetria, na qual a componente

normal do fluxo magnético tende a zero. A interface Γ_{m_0} representa a interface entre o material magnético e o domínio de ar.

A descrição matemática das condições de contorno e outros detalhes é apresentada na Seção 3.2.1.

3.2.1 Refração dos campos magnéticos

A Figura 6 descreve uma interface Γ que separa dois domínios, Ω_1 e Ω_2 , constituídos por materiais distintos, isto é, com diferentes valores de permeabilidade, sendo o vetor normal unitário orientado para fora do domínio Ω_1 .

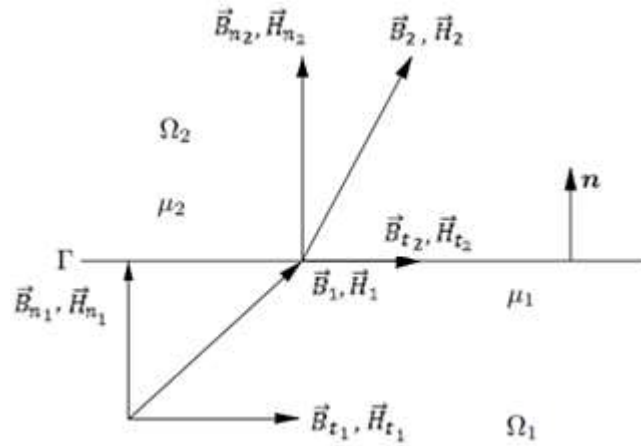


Figura 6 – Comportamento do campo magnético e da indução magnética na interface Γ , adaptado de [4].

Essas condições de contorno, derivadas diretamente das equações de Maxwell, desempenham um papel essencial na modelagem numérica pelo MEF, pois definem como os campos se comportam nas fronteiras entre elementos ou domínios com diferentes materiais. No contexto do MEF, elas determinam como as equações locais de cada elemento se conectam, garantindo a coerência física da solução global.

A primeira condição, expressa pela equação (3-18),

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_l \quad (3-18)$$

define que a descontinuidade tangencial do campo magnético $\vec{H}$ é igual à densidade linear de corrente $\vec{j}_l$ na interface. No MEF, isso significa que, se existir uma densidade linear de corrente aplicada sobre uma fronteira, o campo magnético é forçado a se ajustar tangencialmente a essa superfície. Em termos de implementação, essa condição é aplicada como uma condição de contorno de Neumann ou como uma

condição natural na formulação variacional, representando o fluxo de corrente que atravessa a superfície entre dois elementos.

Caso $\vec{j}_l$ seja nulo, a componente tangencial do campo magnético é contínua, como em (3-19).

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (3-19)$$

No MEF, essa continuidade implica que os graus de liberdade associados às arestas dos elementos vizinhos compartilhem o mesmo valor de campo, garantindo que o potencial vetor magnético ($\vec{A}$) produza um campo sem descontinuidades artificiais. Em outras palavras, essa condição de contorno força o campo a se manter paralelo à superfície, impedindo a criação de correntes fictícias entre os elementos adjacentes.

Na interface entre dois materiais magnéticos, a componente normal da indução magnética deve ser contínua; obtém-se, assim, a equação (3-20).

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (3-20)$$

No contexto numérico, isso significa que o fluxo magnético que entra em uma superfície é igual ao que sai, assegurando a conservação do fluxo magnético entre os elementos do modelo. No MEF, essa continuidade é automaticamente satisfeita pela formulação quando o vetor potencial magnético ($\vec{A}$) é corretamente interpolado em elementos de aresta. Assim, o campo magnético resultante ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) mantém o fluxo contínuo através das interfaces dos elementos.

3.3 FORMA INTEGRAL

A forma integral das equações de Maxwell é apresentada de (3-21) a (3-24). As equações (3-22) e (3-24) resultam da integração, no volume Ω , das equações (3-4) e (3-2), respectivamente. As integrais de superfície fechada $\Gamma(\Omega)$ são obtidas por meio do Teorema da Divergência. As equações (3-21) e (3-23) são aplicadas em superfícies do domínio Γ . As integrais de linha, tomadas ao longo do contorno fechado $\partial\Gamma$ das superfícies, provêm do uso do Teorema de Stokes, no qual Γ_f representa uma superfície com fluxo de corrente elétrica e Γ_D representa uma superfície com fluxo elétrico. As notações $\vec{n}$ e $\vec{l}$ representam o vetor normal às superfícies e o vetor tangente às linhas de integração, respectivamente. A equação (3-25) é a forma

integral da equação de continuidade elétrica, que provém de (3-5) após a integração volumétrica e a aplicação do Teorema da Divergência [18]-[19].

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_J} \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (3-21)$$

$$\oint_{\Gamma(\Omega)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3-22)$$

$$\oint_{\partial\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\Gamma_B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (3-23)$$

$$\oint_{\Gamma(\Omega)} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \rho dV \quad (3-24)$$

$$\oint_{\Gamma(\Omega)} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3-25)$$

3.4 MAGNETOSTÁTICA

O problema da magnetostática é regido pelas equações de Maxwell e por uma equação constitutiva. Para esse tipo de problema, não é considerada a variação temporal de nenhum dos campos, isto é, $\partial/\partial t = 0$, conforme expresso em (3-26)–(3-28).

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (3-26)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3-27)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3-28)$$

A permeabilidade magnética (μ) varia de acordo com a curva B–H do aço, tanto no núcleo quanto nas partes estruturais, e permanece constante nos demais materiais.

As condições de contorno em magnetostática, em um domínio Ω com fronteira $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$, são dadas por (3-29) e (3-30).

$$\vec{n} \times \vec{H}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (3-29)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (3-30)$$

sendo $\vec{n}$ o vetor normal à superfície.

O cálculo da indutância é realizado a partir do fluxo concatenado Ψ e da corrente I , conforme expresso em (3-31).

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \phi}{I} \quad (3-31)$$

sendo N o número de espiras e ϕ o fluxo magnético $[Wb]$.

O fluxo magnético ϕ , por sua vez, é calculado pela equação (3-32).

$$\phi = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3-32)$$

O tensor de Maxwell, em coordenadas cartesianas, é dado por (3-33).

$$\vec{T} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2} B^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2} B^2 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

Integrando o divergente do tensor de Maxwell no volume Ω , resulta (3-34). Ao aplicar o teorema da divergência nesta equação, obtém-se (3-35), na qual é realizada a integral de superfície fechada que engloba o volume $\Gamma(\Omega)$.

$$\vec{f}_{Maxwell} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} d\Omega \quad (3-34)$$

$$\vec{f}_{Maxwell} = \oint_{\Gamma(\Omega)} \vec{T} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3-35)$$

3.5 FORMA FORTE DA MAGNETOSTÁTICA

Neste trabalho é utilizada a formulação em potencial vetorial magnético $\vec{A}$ para a magnetostática. A partir da equação (3-27), pode-se definir (3-36).

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3-36)$$

Substituindo-se (3-32) em (3-28) e, em seguida, em (3-26), obtém-se (3-37) conhecida como a forma forte da magnetostática.

$$\vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{j} \quad (3-37)$$

sendo ν a relutividade magnética (inverso da permeabilidade magnética μ , isto é, $\nu = 1/\mu$). Como a permeabilidade varia de acordo com a curva B–H do aço elétrico do

núcleo e das partes estruturais do indutor, a relutividade magnética também sofre variação.

As condições de contorno passam a ser definidas em função do potencial vetor magnético $\vec{A}$, conforme apresentado em (3-38) e (3-39), correspondentes, respectivamente, às condições de Neumann e de Dirichlet.

$$\left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_{\Gamma_h} = 0 \quad (3-38)$$

$$A|_{\Gamma_b} = cte \quad (3-39)$$

A formulação em potencial vetor magnético em 3D exige a aplicação de uma condição de calibre. No software GetDP, a condição $\vec{A} \cdot \vec{w}_o = 0$ é usada como condição natural no espaço de elementos de aresta, onde $\vec{w}_o$ é um campo vetorial cujas linhas de campo não são fechadas e podem ligar quaisquer pares de pontos do domínio. Sua implementação consiste em anular a circulação de $\vec{A}$ ao longo de todas as arestas de uma árvore definida na região de cálculo [21].

3.6 FORMA FRACA DA MAGNETOSTÁTICA

Integrando-se no domínio Ω e multiplicando-se ambos os lados da equação (3-37) por uma função vetorial teste $\vec{w}$, obtém-se (3-40).

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{w} \, d\Omega \quad (3-40)$$

Utilizando-se, então, a fórmula de Green do tipo rot-rot no lado esquerdo da equação (3-40) e considerando a condição (3-29), obtém-se (3-41).

$$\int_{\Omega} (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{w}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_b} [\vec{n} \times (\nu \vec{\nabla} \times \vec{A})] \cdot \vec{w} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{w} \, d\Omega \quad (3-41)$$

A equação (3-41) é conhecida como a forma fraca da magnetostática. A partir dessa equação, pode-se aplicar o método dos elementos finitos, em conjunto com o método de Galerkin, para transformá-la em um sistema matricial, cuja solução fornece o potencial vetor magnético.

Como a variável de interesse é o potencial vetor magnético, que pertence a um espaço funcional com continuidade tangencial entre os elementos e cujas rotações

esaciais aparecem explicitamente na formulação, a discretização é realizada por meio de elementos de aresta. Esses elementos permitem a interpolação adequada do potencial vetor magnético ao longo das arestas da malha, garantindo a continuidade tangencial do campo, conforme exigido pela formulação magnetostática.

Para considerar as curvas B–H dos aços do núcleo e das regiões estruturais, o problema magnético torna-se não linear, uma vez que a permeabilidade magnética (e, por sua vez, a relutividade magnética) depende do nível de excitação do material. Nessa situação, o sistema de equações resultante também é não linear, exigindo a aplicação de um processo iterativo de linearização e solução, executado até que os critérios de convergência previamente estabelecidos sejam atendidos.

O método de Newton–Raphson é o procedimento padrão adotado pelo GetDP [23] para a solução de problemas não lineares, consistindo na linearização do sistema em torno de uma estimativa inicial e no refinamento iterativo da solução até a convergência. Em cada iteração, resolve-se um sistema linear associado à matriz jacobiana do problema.

4 EQUAÇÕES ELÁSTICAS EM TERMOS DO DESLOCAMENTO

Este capítulo apresenta a obtenção da equação de equilíbrio em termos do deslocamento, juntamente com as respectivas condições de contorno associadas, bem como a forma forte e a forma fraca da formulação estática.

Neste trabalho, considera-se o uso da teoria das pequenas deformações, que assume que as deformações nos materiais são suficientemente pequenas para que as equações de equilíbrio e as relações constitutivas possam ser linearizadas.

Para caracterizar e compreender a formulação elástica, é necessário entender os parâmetros que definem o comportamento elástico dos materiais. O módulo de Young E descreve a rigidez de um material, representando a relação entre a tensão axial aplicada e a deformação resultante na mesma direção, indicando a resistência do material ao alongamento ou ao encurtamento. Já o coeficiente de Poisson ν descreve a relação entre a deformação transversal e a deformação axial, isto é, quantifica a tendência do material de contrair ou expandir perpendicularmente à direção da força aplicada.

Ao levar esses parâmetros ao limite, se ν tende a zero, isso sugere que o material não apresenta deformação lateral quando submetido a uma carga axial, enquanto valores próximos de 0,5 indicam que o material é praticamente incompressível, isto é, o volume é mantido constante durante a deformação. Por sua vez, quando E tende a zero, obtêm-se materiais extremamente flexíveis.

4.1 FORMA FORTE DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA

Considera-se a relação do deslocamento (4-1) e o tensor de deformação (4-2), a equação de equilíbrio e a lei de Hooke (4-4)-(4-10), que define a lei constitutiva na notação de Einstein e na forma matricial, respectivamente, sendo obtida a forma forte (4-14) em termos do deslocamento e dos parâmetros de Lamé λ e G [20]. Essas constantes elásticas caracterizam o comportamento de materiais elásticos isotrópicos em resposta a tensões e deformações.

Utiliza-se a notação de Einstein na equação (4-4), o que implica a existência de um somatório sobre os índices repetidos. Na equação (4-5), o operador traço “Tr()” representa o somatório dos termos diagonais.

$$\vec{u} = [x', y', z']^T \quad (4-1)$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{\nabla}\vec{u}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\right) & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial y}\right) & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (4-4)$$

$$\epsilon_{kk} = Tr(\epsilon) \quad (4-5)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1+P}{E} \tau_{ij} - \frac{P}{E} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (4-6)$$

onde, δ é o delta de Kronecker e η é a deformação, em (4-4), e τ_{kk} é a tensão, conforme (4-6). O δ_{ij} é um símbolo matemático usado para indicar a igualdade entre índices de forma mais compacta e é definido conforme (4-7). Resumidamente, δ_{ij} possui a função de resultar em 1 quando os índices são iguais.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4-7)$$

Como o momento é definido como a massa m multiplicada pela velocidade $\vec{v}$, a equação (4-8) representa a segunda lei de Newton para sistemas com conservação de massa.

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4-8)$$

A partir de (4-8) e considerando os conceitos do tensor de tensões, bem como a conservação do momento linear e angular, pode-se derivar a equação geral do movimento elástico (4-9).

$$\vec{\nabla} \cdot \tau + \vec{f} = \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (4-9)$$

onde ρ_m é a densidade volumétrica, em $[kg/m^3]$; τ é o tensor de tensões ou estresse, em $[Pa]$; e $\vec{f}$ é a força aplicada, em $[N]$.

O comportamento de materiais elásticos é descrito pela Lei de Hooke, que relaciona o tensor de tensões τ ao tensor de deformações η através do tensor de rigidez C , definido em (4-10) na forma tensorial.

$$\tau = \mathcal{C} : \eta \quad (4-10)$$

O tensor de deformação é definido em termos do gradiente simétrico do deslocamento, como mostrado em (4-11).

$$\eta = \vec{\nabla}_s \vec{u} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \vec{u}^T) \quad (4-11)$$

A dedução da formulação elástica em deslocamento trata das deformações elásticas em um corpo sujeito a tensões. Quando acoplada à magnetostrição, que é a deformação gerada por campos magnéticos, a equação de equilíbrio mecânico precisa incorporar esses efeitos.

Para materiais isotrópicos, nos quais os parâmetros elásticos (módulo de Young e coeficiente de Poisson) não dependem da direção da força aplicada, define-se o módulo de cisalhamento do material (ou segundo parâmetro de Lamé), conforme dado em (4-12).

Em (4-13) define-se o primeiro parâmetro de Lamé λ , ao substituir (4-4) em (4-8) e (4-2) para expressar em função do deslocamento, obtém-se a equação de Navier–Cauchy para elasticidade (4-14), que corresponde à forma forte da equação linear elástica.

$$G = \frac{E}{2(1+P)} \quad (4-12)$$

$$\lambda = \frac{E P}{(1+P)(1-2P)} \quad (4-13)$$

$$(\lambda + G) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + G \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{f} = \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (4-14)$$

onde ρ_m é a densidade volumétrica do material, em $[kg/m^3]$.

Em (4-14) são mostradas as relações entre os tensores de tensão, deformação e deslocamento, bem como as condições de contorno, as quais serão detalhadas na próxima seção. A forma matricial da equação constitutiva elástica, baseada na Lei de Hooke, para materiais isotrópicos, é apresentada sem considerar o efeito da dilatação térmica.

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+P)(1-2P)} \begin{bmatrix} 1-P & P & P & 0 & 0 & 0 \\ P & 1-P & P & 0 & 0 & 0 \\ P & P & 1-P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2P}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2P}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2P}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \\ \eta_{xy} \\ \eta_{yz} \\ \eta_{zx} \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Nota-se que se trata de um tensor de quarta ordem, que possui 81 componentes. No entanto, ao considerar todas as simetrias da física do problema e as leis conservações dos momentos, é possível descrever o problema com apenas 21 componentes.

4.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Os tipos comuns de condições de contorno para a formulação elástica normalmente incluem especificações de como o corpo está sendo suportado ou carregado com forças. Isso significa, matematicamente, que serão especificados deslocamentos prescritos ou trações aplicadas em regiões específicas do domínio.

A Figura 7 apresenta uma visão geral de três casos típicos. Da esquerda para a direita, observa-se o caso com a aplicação de uma condição de contorno que inclui a tração na superfície S , a qual delimita a região R . A segunda figura apresenta a aplicação de uma condição que especifica o deslocamento em S . Por fim, é mostrada uma condição mista, que considera uma tração específica em S_t e um deslocamento em S_u .

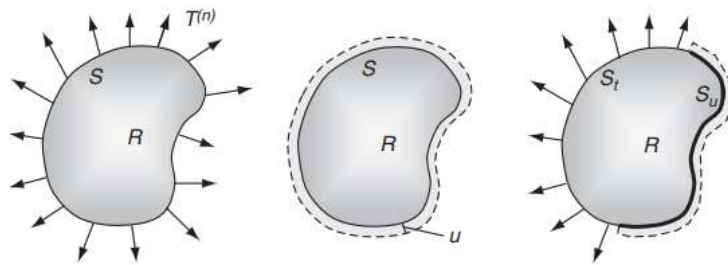


Figura 7 – Condições de contorno típicas para problemas elásticos [20].

Outro tipo de condição de contorno envolve superfícies que representam planos de simetria, conforme ilustrado na Figura 8, onde é considerado um deslocamento normal e uma tração tangencial nula. Essa condição de contorno é fundamental, pois reduz o custo computacional e simplifica a modelagem geométrica.

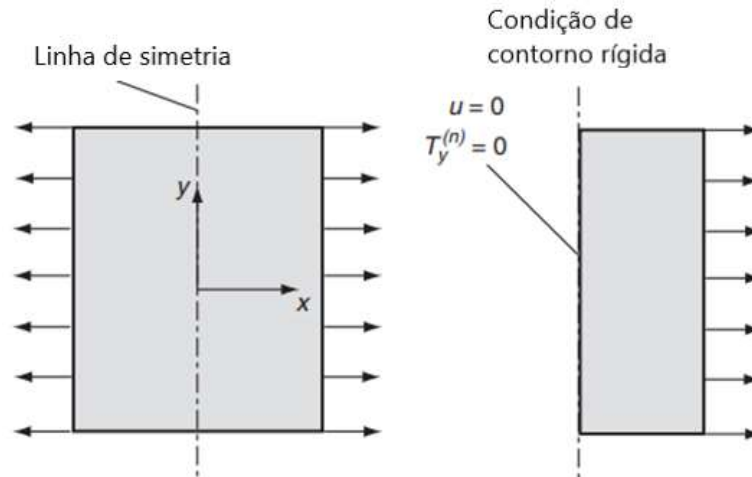


Figura 8 – Linha definindo a condição de contorno de simetria, adaptado de [20].

Outro tipo de condição de contorno ocorre quando um corpo é composto por dois ou mais materiais. Para esse tipo de problema, pode-se aplicar uma condição de contorno na interface entre os materiais — denominada “interface perfeitamente ligada” — em que tanto os deslocamentos quanto as trações são contínuos. Também pode ser considerada a condição de “interface deslizante”, na qual é prescrita a continuidade das componentes normais do deslocamento e da tração, anulando a componente tangencial da tração e permitindo descontinuidade na componente tangencial do deslocamento, como mostrado na Figura 9 [20].

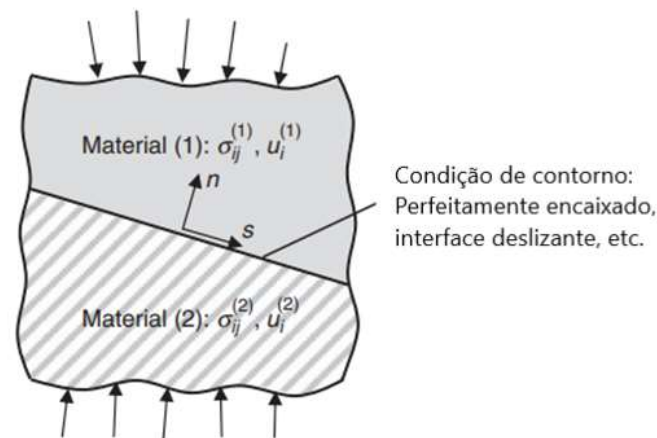


Figura 9 – Exemplo de um material composto genérico [20].

4.3 MAGNETOSTRIÇÃO

A magnetostricção é uma deformação inelástica que depende do campo magnético aplicado. Neste trabalho, a deformação total é a soma da deformação elástica η_e com a deformação gerada pela magnetostricção η_μ , como mostra (4-16).

$$\eta = \eta_e + \eta_\mu \quad (4-16)$$

O tensor da magnetostricção (4-17) é dado em relação às componentes tangencial e normal. Os coeficientes magnetostrictivos $\lambda_{\parallel}$ e $\lambda_{\perp}$ representam as tensões ao longo das direções tangencial e normal, respectivamente, em relação à linha de campo local.

$$\eta_\mu^{local} = \begin{bmatrix} \lambda_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\perp} \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

onde $\lambda_{\parallel}$ é a deformação magnetostrictiva na direção paralela ao campo magnético e $\lambda_{\perp}$ é a deformação transversal ao campo, sendo esta aproximada, como mostra (4-18).

$$\lambda_{\perp} = -\frac{\lambda_{\parallel}}{2} \quad (4-18)$$

A deformação devido à magnetostricção (η_μ) deve ser alinhada à direção do campo magnético no sistema global de coordenadas, conforme mostrado em (4-19).

$$\eta_\mu = P_r \eta_\mu^{local} P_r^T \quad (4-19)$$

onde P_r é a matriz de rotação em 3D, descrita em (4-20) e P_r^T é a matriz transposta correspondente.

$$P_r = \begin{bmatrix} \frac{B_x}{\|B\|} & -\frac{B_y}{\|B\|} & \frac{B_z}{\|B\|} \\ \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} & \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} & 0 \\ -\frac{B_x B_z}{\|B\| \sqrt{B_x^2 + B_y^2}} & -\frac{B_y B_z}{\|B\| \sqrt{B_x^2 + B_y^2}} & \frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{\|B\|} \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

onde $\|B\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ é o módulo da indução magnética, em [T].

4.4 FORMA FRACA DA FORMULAÇÃO ELÁSTICA

Para obter a forma fraca da formulação elástica, integra-se sobre o domínio Ω e multiplica-se a equação (4-9) pela função teste $\vec{w}$, obtendo (4-21).

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \tau + \vec{f}) \cdot \vec{w} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \vec{w} d\Omega \quad (4-21)$$

Ao aplicar o teorema de Green ao primeiro termo do lado esquerdo, obtém-se (4-22).

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \tau) \cdot \vec{w} d\Omega = \int_{\Gamma} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \vec{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla}_s \vec{w} : \tau d\Omega \quad (4-22)$$

onde, $\vec{\nabla}_s \vec{w}$ é o gradiente simétrico da função teste $\vec{w}$, Γ é a fronteira do domínio Ω e $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície.

Substituindo a equação (4-16) em (4-10), obtém-se (4-23).

$$\tau = C : \eta_e = C : (\vec{\nabla}_s \vec{u} - \eta_\mu) \quad (4-23)$$

Ao substituir o tensor de tensões e considerar a ausência de tração forçada ($\vec{f} = 0$) no domínio de cálculo, obtém-se a equação (4-24), sendo $T_{Maxwell}$ o tensor de Maxwell, relacionado às forças externas, conforme definido pela equação (3-35).

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}_s \vec{w} : [C : (\vec{\nabla}_s \vec{u} - \eta_\mu)] d\Omega + \int_{\Omega} T_{Maxwell} : \vec{\nabla}_s \vec{w} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{w} \cdot \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} d\Omega \quad (4-24)$$

onde C é o tensor de rigidez de quarta ordem, e η_μ é o tensor de deformação magnetostriativa.

O tensor de rigidez C é um tensor de quarta ordem que contém 81 componentes, podendo ser simplificado ao se considerar as simetrias do problema e as leis de conservação, resultando em apenas 21 componentes independentes. Neste trabalho, considera-se o estudo de materiais isotrópicos, desprezando-se o efeito da dilatação térmica.

A equação (4-24) representa a forma fraca do problema elástico dinâmico com acoplamento magnetoelástico, na qual são consideradas as contribuições da elasticidade linear, da magnetostrição e das forças magnéticas descritas pelo tensor de Maxwell, bem como os efeitos inerciais da estrutura.

No regime harmônico, a equação (4-24) é convertida na equação (4-25), em que a derivada temporal de segunda ordem é substituída por sua representação no domínio da frequência, por meio da transformada de Fourier: $\partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -\omega^2 \vec{u}$.

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}_s \vec{w} : [C : (\vec{\nabla}_s \vec{u} - \eta_{\mu})] d\Omega + \int_{\Omega} T_{Maxwell} : \vec{\nabla}_s \vec{w} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{w} \cdot \vec{u} \rho_m \omega^2 d\Omega \quad (4-25)$$

Com a forma fraca da equação (4-25), pode-se aplicar o método dos elementos finitos, em conjunto com o método de Galerkin, para transformar essa equação em um sistema matricial, cuja solução fornece o campo de deslocamentos. Como a variável de interesse é o deslocamento mecânico, tratado como um campo vetorial contínuo no domínio, e suas derivadas espaciais aparecem explicitamente na formulação, a discretização pode ser realizada de forma adequada por meio de elementos nodais. Esses elementos permitem a interpolação direta do campo de deslocamentos nos nós da malha, assegurando a continuidade do campo exigida pela formulação elástica.

Com o objetivo de analisar as frequências e os modos de ressonância, realiza-se a análise modal. Essa análise baseia-se no cálculo de autovalores e autovetores associados a um sistema vibratório, permitindo compreender as características dinâmicas da estrutura e determinar suas frequências naturais de vibração. Os autovalores correspondem às frequências naturais do sistema, enquanto os autovetores representam os modos de vibração associados, descrevendo a forma e a distribuição dos deslocamentos ao longo da estrutura em cada frequência natural [18].

Neste estudo, é utilizado o método direto MUMPS para a resolução dos sistemas lineares provenientes do método de Newton–Raphson, enquanto o próprio método de Newton–Raphson é empregado para a solução dos problemas não lineares. Para as análises no domínio do tempo, a integração temporal é realizada por meio do método de Euler implícito, devido à sua robustez e estabilidade numérica em problemas multifísicos acoplados.

5 SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EM 3D

Este capítulo apresenta o procedimento de simulação do indutor trifásico de núcleo ferromagnético utilizado neste trabalho, bem como os resultados das simulações magnetostática, elástica e magnetoelástica.

A simulação de indutores com efeitos multifísicos, incluindo fenômenos magnéticos e mecânicos, requer uma abordagem acoplada capaz de capturar a interação entre os campos magnéticos e as deformações mecânicas. O MEF é amplamente utilizado para resolver esse tipo de problema, especialmente em sistemas que exigem alta precisão e apresentam geometria complexa.

Para todas as simulações descritas neste capítulo, são considerados casos que incluem a não linearidade dos materiais ferromagnéticos, tanto do núcleo quanto das partes estruturais.

5.1 METODOLOGIA PARA SIMULAÇÃO COM MEF

O processo de simulação numérica, utilizando o MEF-3D, segue as seguintes etapas:

- (a) **Criação da geometria:** Inicia-se a construção da geometria utilizando o software livre Gmsh. Após a verificação das simetrias, realiza-se a construção em duas dimensões, com posterior extrusão da superfície para obter o volume desejado, facilitando as seleções no Gmsh. Como a geometria é realizada integralmente no Gmsh, sem importações de CAD, a compreensão das seleções e a verificação das simetrias são fundamentais para o processo;
- (b) **Criação da malha:** Concomitantemente à construção da geometria, realiza-se a verificação da malha, garantindo que o trabalho realizado na geometria produza resultados precisos. Deve-se analisar a qualidade da malha em regiões de interesse, como os entreferros e o núcleo;
- (c) **Definição das propriedades dos materiais:** As propriedades físicas dos materiais são essenciais para a realização de simulações por MEF. Como o trabalho aborda o acoplamento magnetoelástico, são necessárias propriedades magnéticas e mecânicas. Essas propriedades impactam significativamente os resultados, influenciando as forças geradas no indutor e o comportamento magnético e mecânico do componente;
- (d) **Condições de contorno:** A definição das condições de contorno inclui a fronteira externa do ar, os terminais nos condutores, que determinam a direção

da densidade de corrente nos enrolamentos da bobina, bem como superfícies com deslocamento nulo em todas as direções, representando regiões fixadas. Tais condições são impostas para garantir a obtenção da solução do conjunto de equações do estudo de caso;

- (e) **Resolução e pós-processamento:** Após a solução do problema, avaliam-se os resultados para compreender o comportamento físico do sistema. Nesse ponto, verifica-se a necessidade de refinamento da malha para casos específicos. A análise dos valores de indutância, da distribuição dos campos e dos deslocamentos é realizada para confirmar o comportamento esperado em determinadas regiões.

O objetivo deste capítulo é avaliar o impacto, em ambas as formulações, das considerações geométricas estruturais na resposta mecânica, bem como o efeito da não-linearidade magnética dos materiais. A Figura 10 apresenta as curvas B–H consideradas para as partes estruturais e para o núcleo.

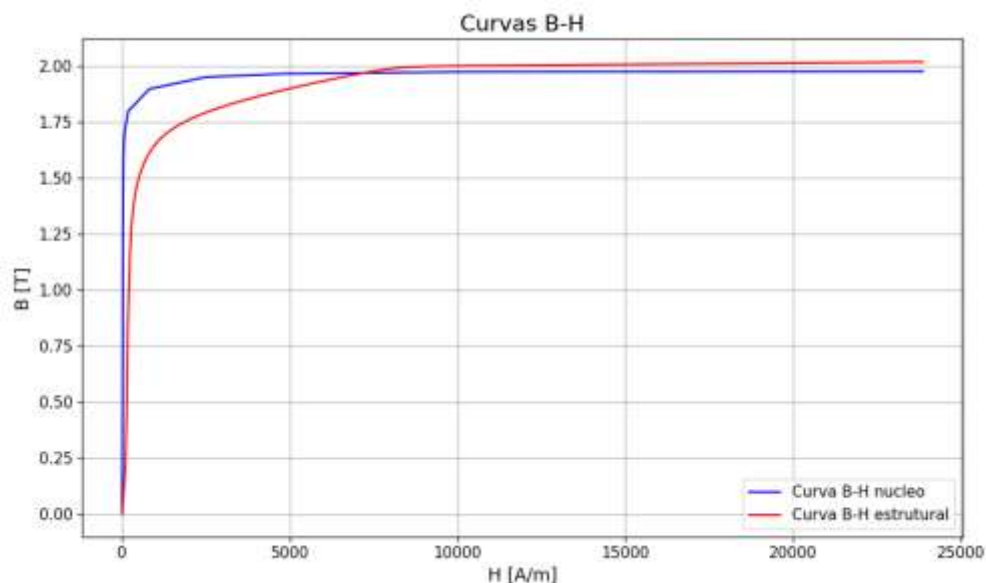


Figura 10 – Curva B-H das partes estruturais e do núcleo, do fabricante.

A Figura 11 apresenta as curvas não lineares e a variação da permeabilidade em função do campo magnético, em escala semi-logarítmica, tanto para o núcleo quanto para as partes estruturais. Observa-se que a permeabilidade do material do núcleo apresenta valores significativamente maiores do que a das partes estruturais, como esperado.

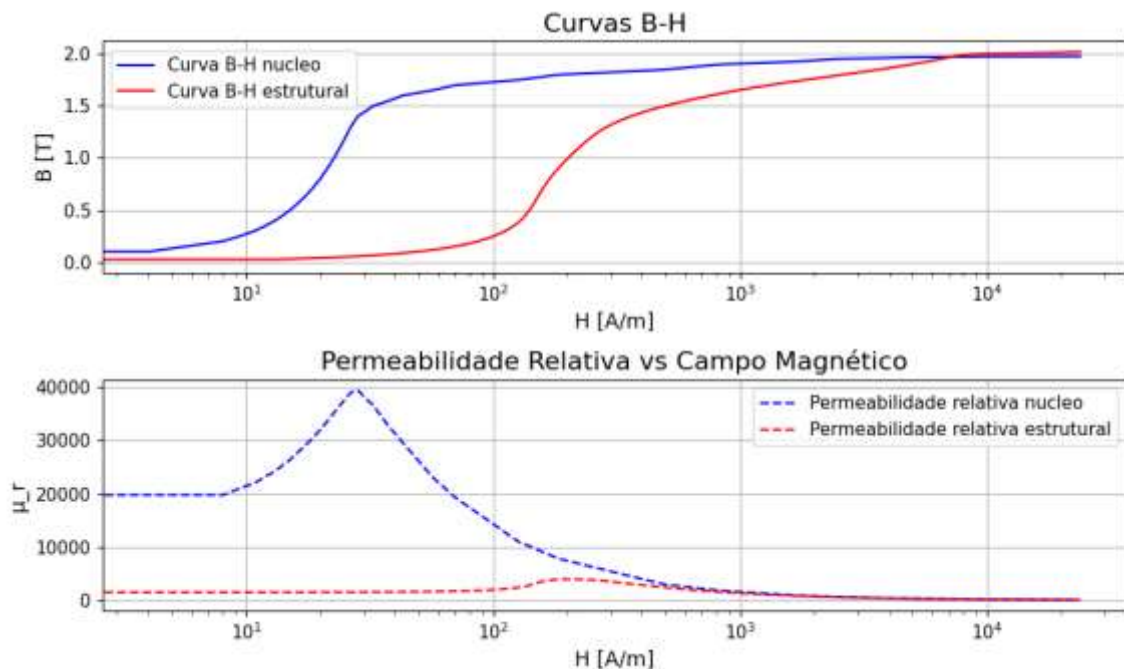


Figura 11 – Curva B–H e a permeabilidade relativa de cada material, do fabricante.

Neste trabalho, considera-se a metade do dispositivo, devido à sua simetria. A geometria pode ser observada na Figura 12. Os dados geométricos foram omitidos por se tratar de um equipamento destinado à comercialização, e apenas as imagens criadas pelo autor são apresentadas. Ressalta-se que não foi considerado um quarto da geometria, pois, em indutores trifásicos, podem existir diferenças nos valores dos espaçamentos do entreferro entre os blocos e os jugos, o que inviabiliza essa simplificação.

As verificações são realizadas no âmbito do acoplamento magnetoelástico, considerando a simulação magnética em regime estático e a simulação elástica em regime harmônico. Essa escolha torna esta etapa mais eficiente e possibilita a obtenção de parâmetros magnéticos e mecânicos relevantes para a análise.

5.2 MATERIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

A Figura 12 apresenta em detalhes a descrição das estruturas do indutor. Os parâmetros utilizados nas simulações magnética e mecânica estão descritos na Tabela 1. A condutividade elétrica do núcleo e do entreferro não foi considerada nas simulações magnéticas e, de forma análoga, os dados mecânicos do cobre não foram considerados na simulação mecânica; portanto, esses parâmetros não são apresentados na Tabela 1.

Os dados geométricos do indutor trifásico não podem ser divulgados por questão de sigilo. Uma escala é apresentada ao lado do núcleo com o objetivo de fornecer uma referência aproximada de tamanho.

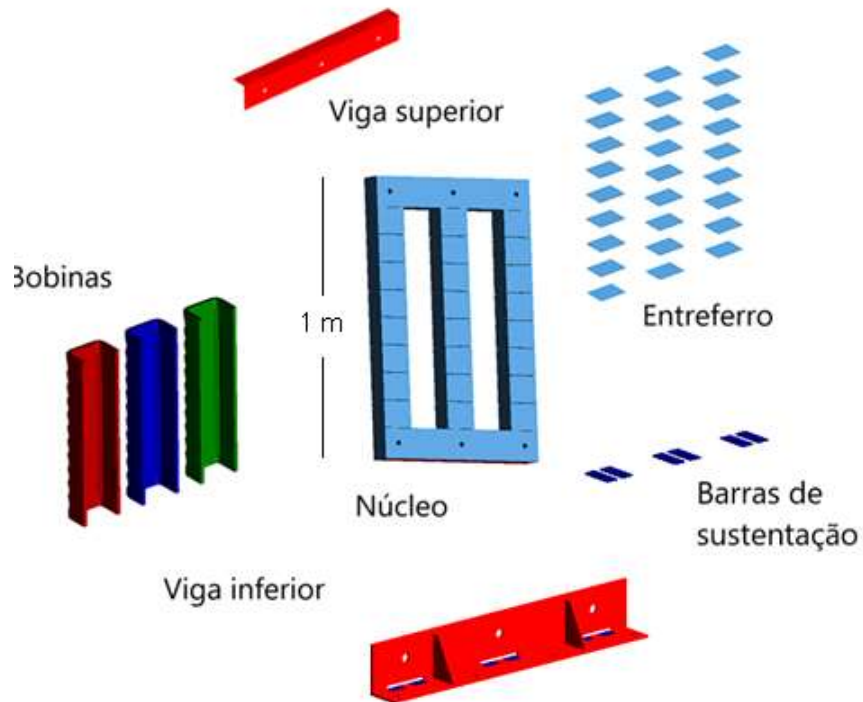


Figura 12 – Descrição das estruturas do indutor trifásico.

Tabela 1 – Parâmetros elétricos e mecânicos dos materiais.

Material	Densidade [kg/m^3]	Coefficiente de Poisson	Módulo de Young [GPa]	Permeabilidade relativa
Aço Fe-Si	7700	0,30	220	<i>Curva BH</i>
Cobre	—	—	—	1
Aço carbono ASTM	7850	0,30	200	<i>Curva BH</i>
Vetronit EGS 102 [22]	1850	0,30	15	1

A Figura 13 apresenta a superfície sobre a qual é aplicada a condição de contorno de fixação, considerando que o dispositivo possui parafusos de fixação na parte inferior. Essa condição de contorno estabelece deslocamento nulo em todas as direções.

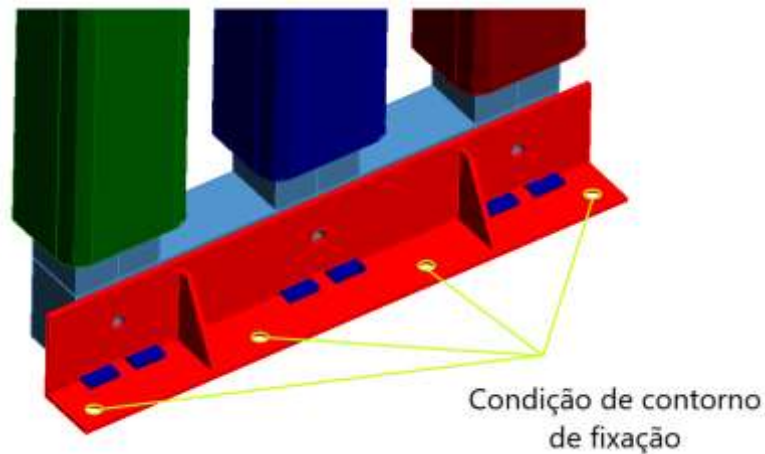


Figura 13 – Condição de contorno de fixação.

A Figura 14 apresenta a região na qual se aplica a condição de contorno de simetria. Para a análise mecânica, isso implica considerar deslocamento nulo na direção normal. Para a análise magnética, a componente normal da indução magnética é nula no plano de simetria.

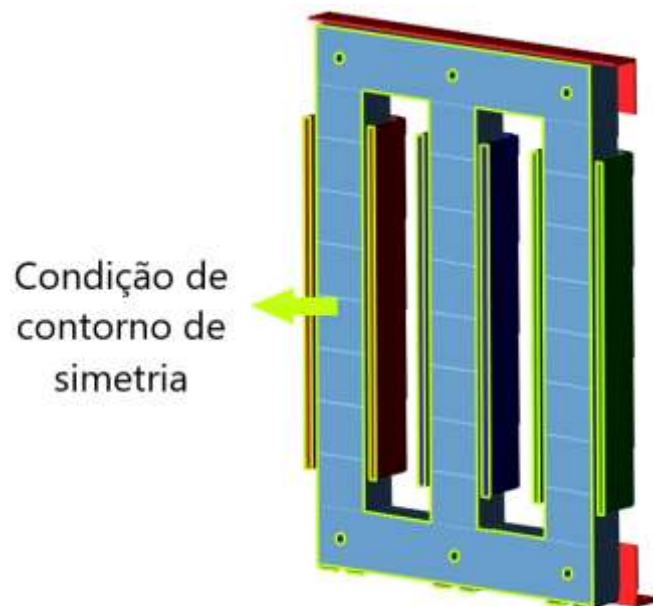


Figura 14 – Condição de contorno de simetria.

Em simulações elásticas com múltiplos corpos, formados por materiais que podem se deformar de maneira distinta, a interface é delimitada [18]. Como todos os componentes do indutor são fixados entre si por parafusos, considera-se que os corpos estão “colados”, ou seja, que o deslocamento é contínuo na interface.

5.3 DOMÍNIO INFINITO DE AR

Nas simulações realizadas pelo MEF, o domínio computacional deve ser necessariamente truncado, pois a representação de um espaço infinito não é matematicamente viável. Dessa forma, estudou-se o erro de truncamento e seu impacto nos cálculos da indutância e do deslocamento. Para mitigar esse erro, avaliou-se a implementação do domínio de ar infinito (também denominado região com elementos infinitos).

Antes da implementação do domínio infinito, foram realizadas simulações com um domínio de ar finito, limitado por uma casca esférica, sem o uso do domínio infinito. O erro observado nos cálculos de indutância e no deslocamento mostrou-se significativo, com variações dependentes da distância da fronteira em relação ao dispositivo. A variação da indutância apresentou saturação a partir de um certo raio, indicando que o erro converge lentamente com o aumento do tamanho do domínio de ar.

Para contornar esse problema, adotou-se uma abordagem baseada na modificação da Jacobiana, especificamente na região de ar externa que circunda o dispositivo. A Jacobiana corresponde ao determinante da matriz que relaciona as coordenadas de referência (elemento padrão) às coordenadas reais do espaço físico, sendo responsável por adaptar o processo de integração numérica às deformações geométricas e ao tamanho dos elementos da malha.

Ao modificar a Jacobiana, introduz-se uma transformação de coordenadas na região externa de ar. Essa transformação comprime um domínio idealmente infinito em uma região finita do modelo, permitindo que os campos decaíssem conforme esperado fisicamente — mesmo que a fronteira do domínio esteja geometricamente próxima ao dispositivo. A malha nessa região permanece composta por elementos convencionais, porém o processo de integração é ajustado para refletir a nova métrica imposta pela transformação.

Esse procedimento altera exclusivamente a forma como a integração é realizada na formulação fraca do problema, sem a necessidade de modificar as funções de forma, a topologia da malha ou as próprias equações diferenciais. Em outras palavras, a estrutura do problema permanece inalterada, mas o modelo passa a interpretar a região como representativa de um espaço aberto.

Do ponto de vista físico, o campo magnético pode agora decair de forma mais natural à medida que se afasta da região ativa, minimizando reflexões artificiais nos

contornos. Do ponto de vista numérico, observa-se uma melhora significativa na convergência das soluções e na precisão de grandezas globais, como a indutância, mesmo com domínios de ar consideravelmente mais compactos. Isso é especialmente relevante em dispositivos com múltiplos entreferros ou topologias abertas, onde os efeitos de truncamento são mais pronunciados.

5.4 ESTUDO DE MALHA

Neste capítulo, tem-se como objetivo encontrar o equilíbrio entre a precisão e o custo computacional. A análise é iniciada com uma malha mais esparsa em todos os domínios, seguida pelo refinamento dos graus de liberdade, aumentando-se o refinamento em regiões específicas. Foram realizadas simulações magnetoelásticas no regime estático para a obtenção dos resultados, considerando-se a curva de magnetostrição da Figura 4, obtida em [29].

O deslocamento é avaliado no ponto 1, mostrado na Figura 15, localizado na superfície superior do núcleo. A indutância analisada é obtida considerando-se a bobina central alimentada com corrente nominal, mantendo as bobinas laterais sem correntes. O deslocamento, por sua vez, é calculado considerando todas as bobinas energizadas, defasadas em 120° entre si.

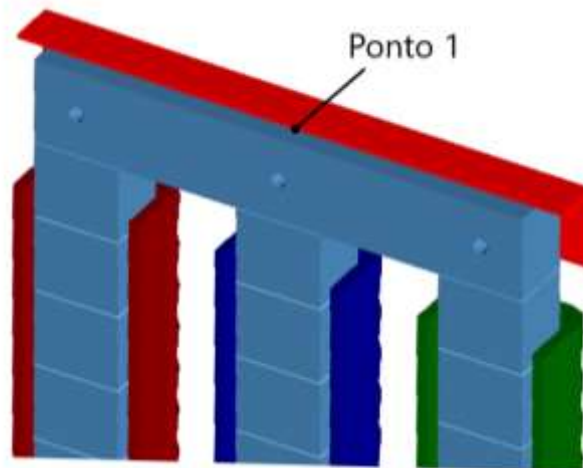


Figura 15 – Ponto 1 para obtenção de dados.

A estratégia adotada para verificar o impacto da malha nos cálculos consiste em iniciar com uma malha mais esparsa e avançar progressivamente para uma mais refinada. Em seguida, considera-se o domínio infinito de ar associado à malha mais

refinada e se reduz a complexidade do modelo, com o objetivo de diminuir o custo computacional.

Foram realizadas duas simulações: uma voltada à obtenção da indutância, considerando a aplicação de corrente apenas na bobina central, e outra destinada à obtenção do deslocamento no ponto 1, com correntes trifásicas aplicadas às três bobinas, em amplitudes correspondentes a cada fase. A Tabela 2 e a Tabela 3 apresentam os parâmetros das malhas utilizadas nessas simulações.

Tabela 2 – Estudo de malha.

Parâmetro	Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4
Quantidade de tetraedros	14536	40198	85517	316119
Tempo de simulação magnetostático [s]	2,771	4,707	7,042	204,145
Tempo de simulação magnetoelástica [s]	175,21	181,34	215,68	6410,29
Domínio infinito	<i>Não</i>	<i>Não</i>	<i>Não</i>	<i>Não</i>
Indutância [mH]	0,4238	0,4296	0,4340	0,4601
Deslocamento resultante [μm]	0,497	0,504	0,505	0,643

Tabela 3 – Estudo de malha, continuação.

Parâmetro	Malha 5	Malha 6	Malha 7	Malha 8
Quantidade de tetraedros	315252	369933	386762	406641
Tempo de simulação magnetostático [s]	179,01	252,156	296,67	321,09
Tempo de simulação magnetoelástica [s]	6402,52	6525,74	6553,13	6567,46
Domínio infinito	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>
Indutância [mH]	0,4608	0,4691	0,4696	0,4697
Deslocamento resultante [μm]	0,640	0,661	0,660	0,659

Pode-se notar, na Figura 16, a convergência dos resultados a partir da Malha 6. A partir desse ponto, o aumento do número de elementos não provoca variações significativas nos parâmetros de controle, resultando apenas no aumento do tempo de simulação, o que indica um refinamento desnecessário. Dessa forma, a Malha 6 é selecionada para o estudo de caso.

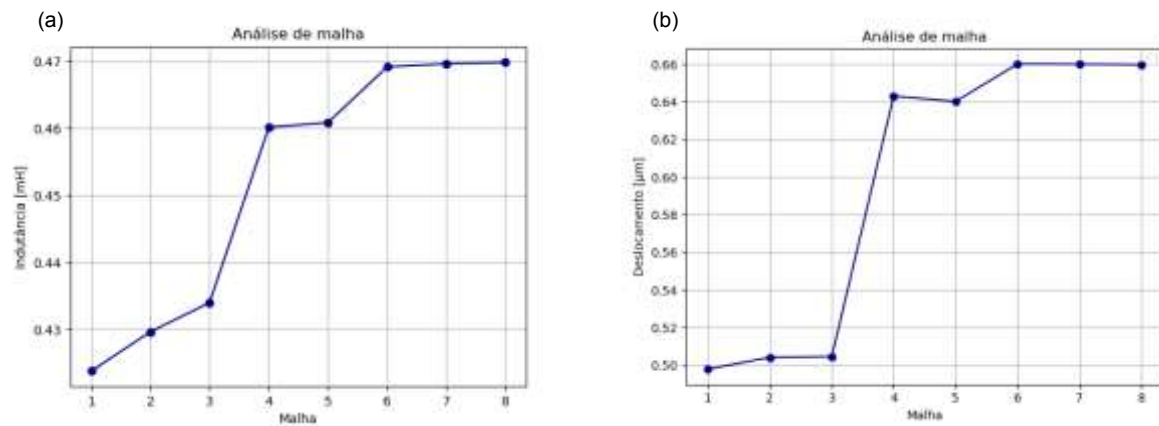


Figura 16 – (a) Indutância versus a malha e (b) deslocamento no ponto 1.

Para as malhas que não utilizam o domínio infinito de ar, o raio do domínio de cálculo é de 0,90 [m], conforme ilustrado na Figura 17. Para as malhas que incluem o domínio infinito de ar, o raio é reduzido para 0,70 [m] na camada mais interna, e se estende de 0,90 [m], a partir dessa camada, até o limite da camada infinita de ar.

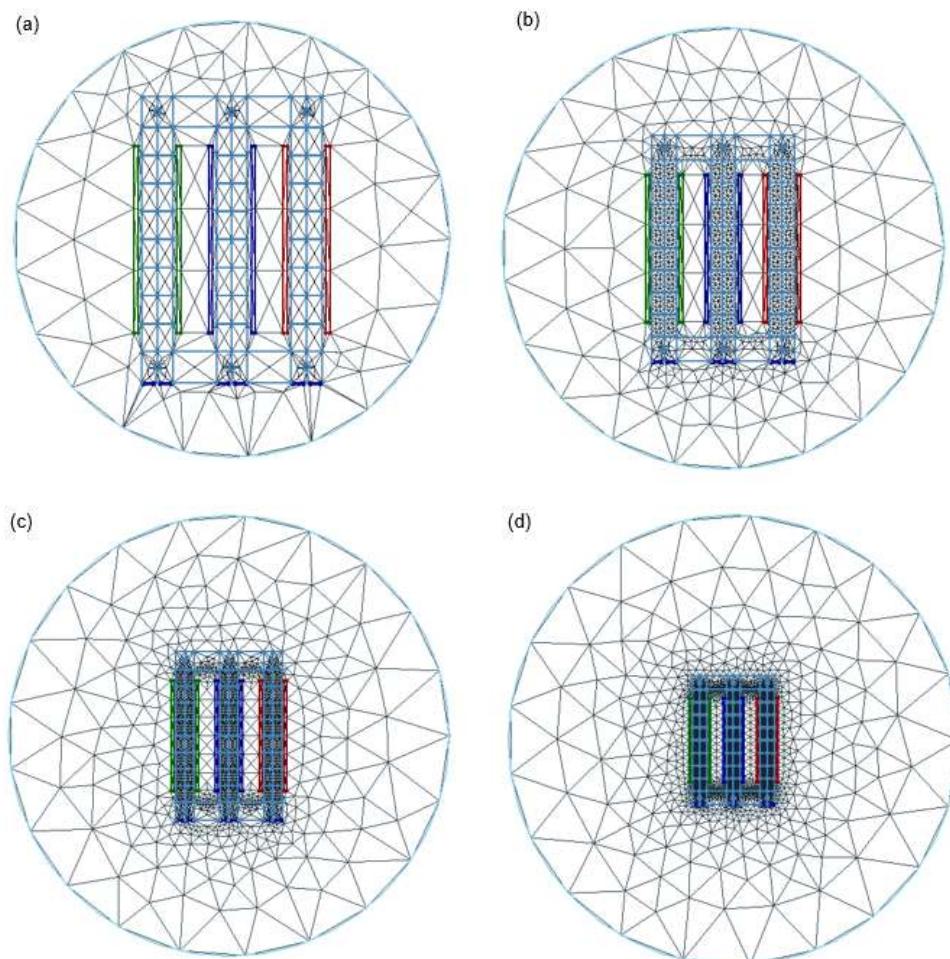


Figura 17 – (a) Malha 1, (b) malha 2, (c) malha 3, e (d) malha 4.

Para facilitar a visualização das malhas, apresenta-se o corte do dispositivo no plano XY, na Figura 17 e na Figura 18, correspondentes a cada caso de malha analisado.

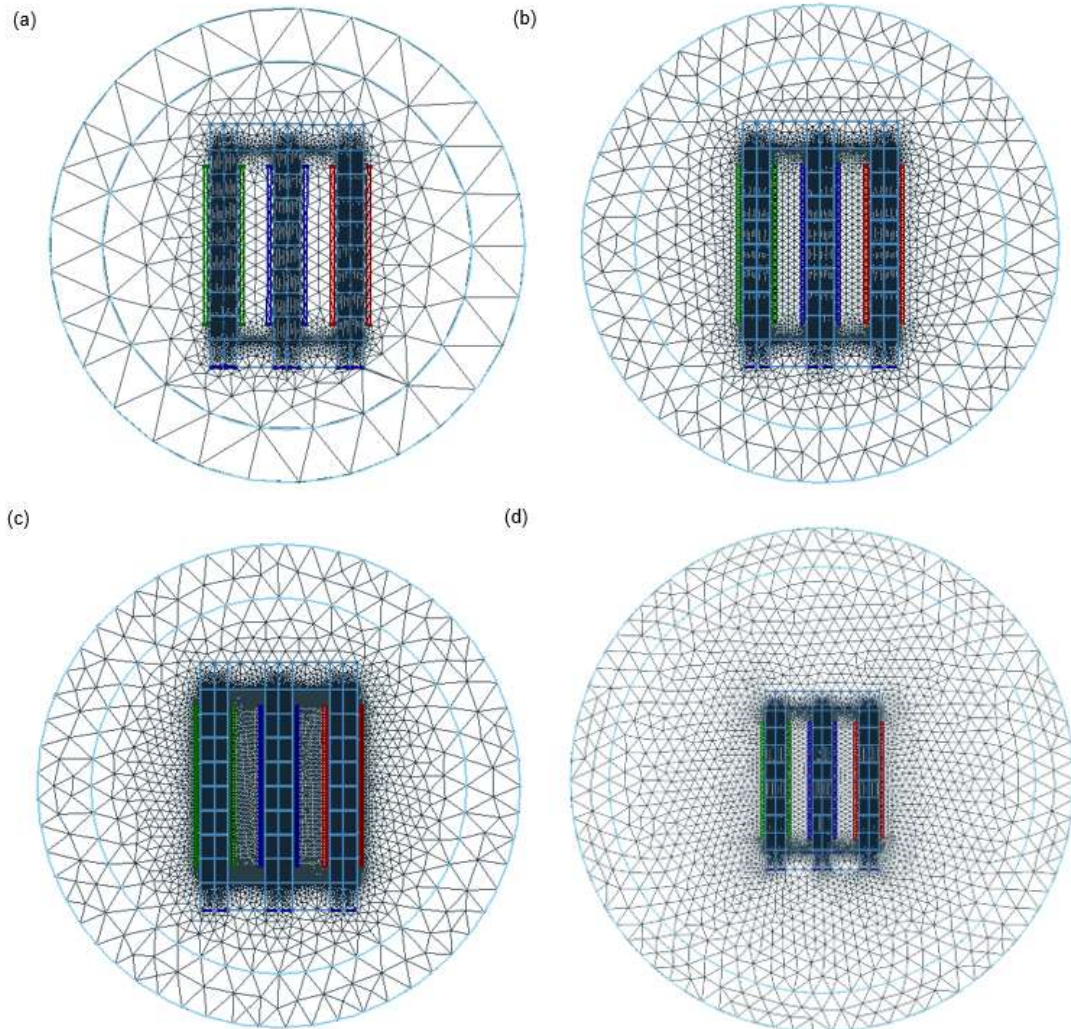


Figura 18 – (a) Malha 5, (b) malha 6, (c) malha 7 e (d) malha 8.

A análise da Tabela 2 e da Tabela 3 evidencia a evolução dos parâmetros de uma formulação magnetoelástica resolvida por meio do MEF-3D. Observa-se que a Malha 1, com 14536 tetraedros, apresenta tempo de simulação na magnetostática de 2771 [s] e indutância de 0,4238 [mH], indicando baixa precisão inicial. A Malha 2, com 40198 tetraedros, apresenta uma ligeira melhora na indutância, alcançando 0,4296 [mH], porém com aumento do tempo de simulação para 4707 [s], o que sugere ganhos marginais associados a um custo computacional crescente.

Nas malhas intermediárias, a Malha 3, com 85517 tetraedros, atinge uma indutância de 0,4340 [mH] e tempo de simulação de 7042 [s], mostrando um avanço

significativo. A Malha 4, com 316119 tetraedros, estabiliza a indutância em 0,4601 [mH] e reduz o deslocamento para 0,643 [μ m], beneficiando-se da introdução do domínio infinito, que minimiza o erro de truncamento. A Malha 5, com 315252 tetraedros, mantém a indutância em 0,4608 [mH] e apresenta tempo de 17901 [s], enquanto a Malha 6, com 369933 tetraedros, alcança uma indutância de 0,4691 [mH] e tempo de simulação de 252156 [s].

Nas malhas mais refinadas, a Malha 7, com 386762 tetraedros, apresenta uma indutância de 0,4696 [mH] e tempo de 296671 [s], enquanto a Malha 8, com 406641 tetraedros, atinge 0,4697 [mH] com tempo de 321094 [s]. A diferença entre a Malha 6 e Malha 8 é inferior a 0,5 [%], indicando a convergência dos resultados. O domínio infinito, introduzido a partir da Malha 4, reduz significativamente o erro de truncamento, permitindo maior concentração de elementos na área de interesse com menor custo computacional.

Diante disso, a Malha 6 foi selecionada como a configuração final após o estudo de convergência (ver as Tabela 2 Tabela 3), por apresentar o melhor compromisso entre custo computacional e precisão dos resultados.

5.5 ANÁLISE DA SATURAÇÃO DO NÚCLEO

Observa-se que este dispositivo é importante para a contenção de picos de corrente de curto-circuito. Para que essa função seja adequadamente desempenhada, é fundamental que o dispositivo mantenha sua indutância nominal em uma ampla faixa de amplitude da corrente de excitação. Assim, realiza-se uma análise da saturação do núcleo.

Mantém-se a geometria completa, incluindo as partes estruturais, bem como as condições de contorno apresentadas na Seção 3.2.1. Dessa forma, iniciam-se os testes na faixa de 0,45 [p.u.] a 2,7 [p.u.], com passos de 0,5 [p.u.], considerando a não linearidade do núcleo e das demais partes estruturais. A bobina central é excitada, e analisa-se o valor da indutância própria a cada passo, conforme apresentado na Figura 19.

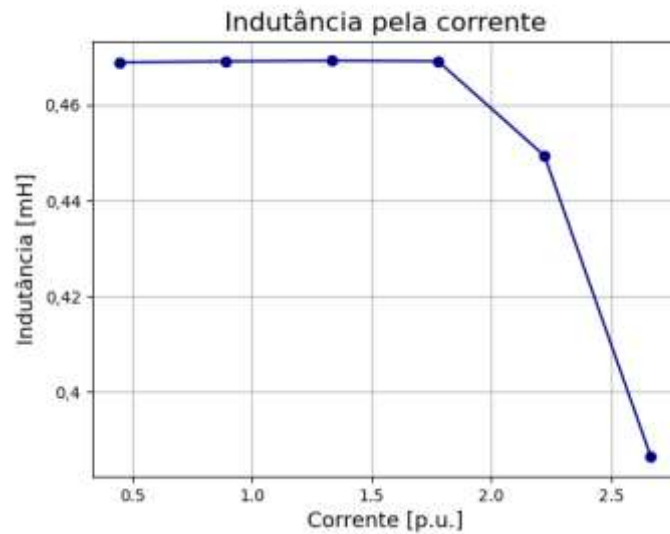


Figura 19 – Indutância em função da corrente de entrada, com a bobina central energizada.

Calcula-se a indutância por meio do fluxo magnético no interior da bobina. Na Figura 19, nota-se o efeito da saturação do núcleo à medida que a corrente aumenta, atingindo um valor limite de corrente de 1,78 [p.u.]. Esse ensaio é realizado com a energização apenas da bobina central, mantendo as demais em circuito aberto.

A Figura 20 apresenta a comparação da indutância calculada pelo MEF-3D e a indutância medida em um ensaio no qual as três bobinas são energizadas.

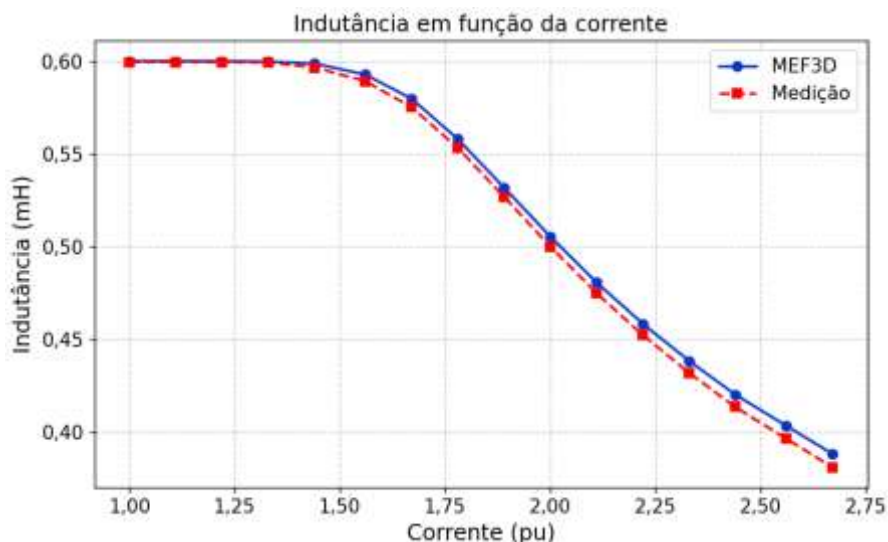


Figura 20 – Indutância em função da corrente de entrada, com todas as bobinas energizadas.

O erro entre a simulação e a medição é mostrado na Figura 21. Nota-se que o erro percentual tende a aumentar com o incremento da corrente. Apesar do erro máximo ser relativamente baixo (1,85 [%]), ele provavelmente decorre do fato de que

a curva B–H do aço foi caracterizada em um quadro de Epstein, no qual o comportamento do campo magnético e da indução magnética difere daquele observado no mesmo aço empregado no indutor.

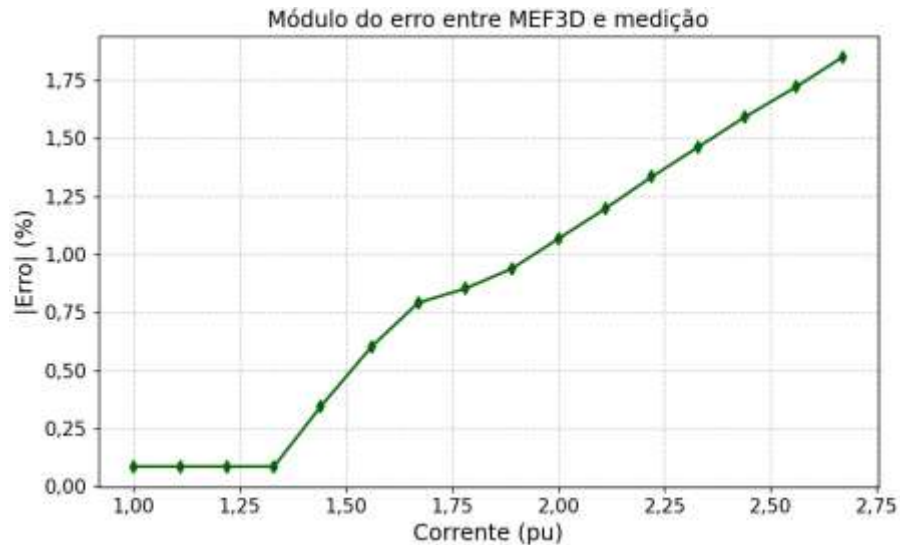


Figura 21 – Erro calculado em comparação da simulação e experimental, com todas bobinas energizadas.

5.6 ANÁLISE ESTRUTURAL

A análise modal é fundamental para avaliar a resposta mecânica do indutor frente a excitações magnéticas, como pulsos de corrente e oscilações de rede. Essas excitações podem induzir vibrações que, se estiverem em ressonância com os modos naturais da estrutura, podem provocar à fadiga mecânica e ao ruído acústico excessivo.

Os resultados da análise modal realizada são apresentados na Tabela 4, que mostra os dez primeiros modos de vibração natural, ou seja, as frequências naturais de ressonância.

Tabela 4 – Frequências naturais da estrutura do indutor.

Modo	Frequência [Hz]	Modo	Frequência [Hz]
1	86,52	11	2182,91
2	288,75	12	2283,83
3	533,44	13	2455,64
4	622,32	14	2671,11
5	648,51	15	2982,98
6	771,80	16	3369,09
7	1152,57	17	3778,29
8	1400,80	18	3907,89
9	1689,88	19	4138,75
10	1906,26	20	4460,11

Alguns modos naturais da estrutura são mostrados na Figura 22, em ordem crescente, de (a) a (f), conforme apresentado na Tabela 4.

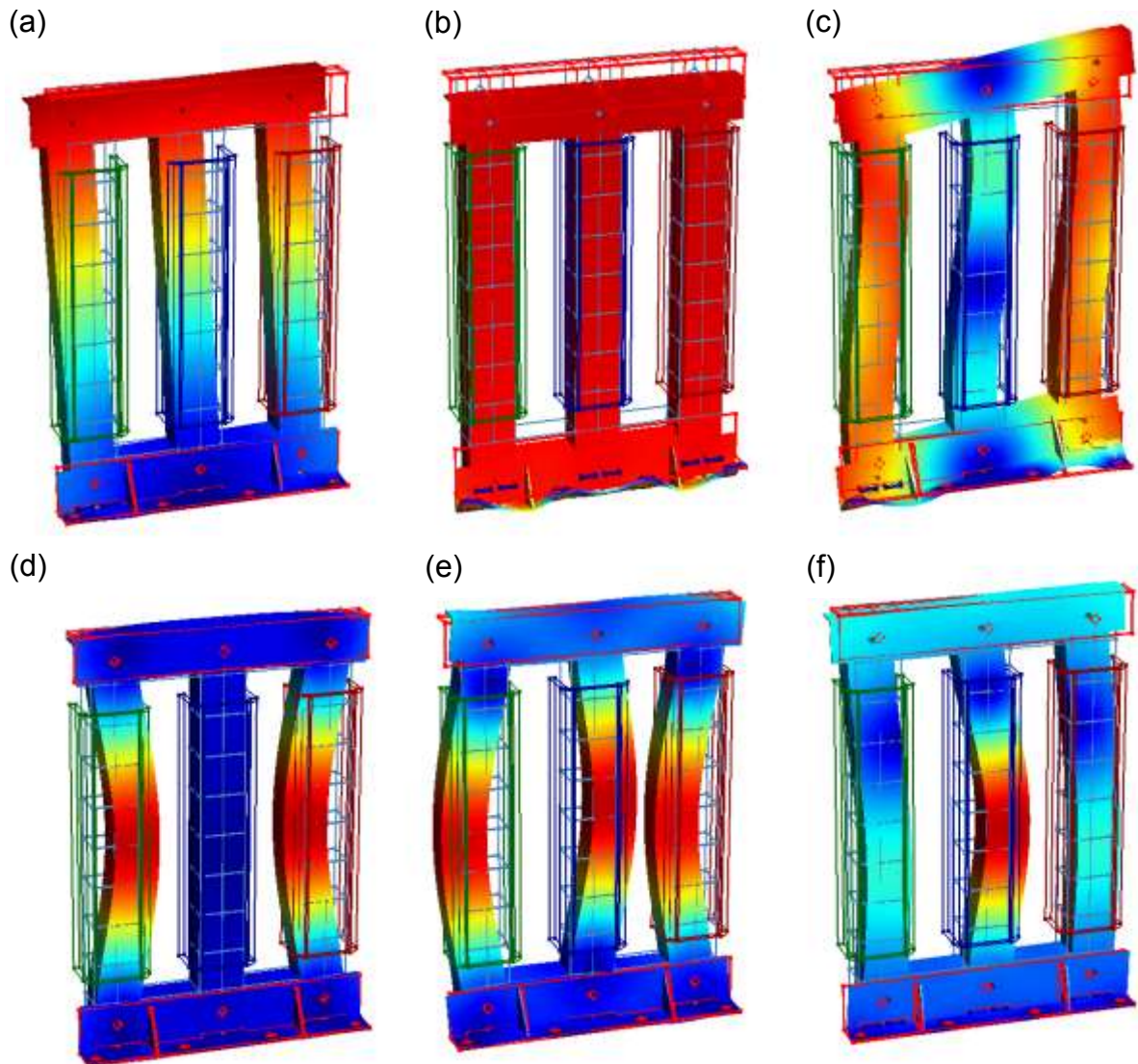


Figura 22 – Modos naturais de deformação do indutor trifásico, mostrados os 6 primeiros modos da Tabela 4.

5.7 IMPLEMENTAÇÃO MULTIFÍSICA

Existem duas formas de realizar a simulação multifísica: acoplamento fraco e acoplamento forte. O acoplamento forte representa uma aproximação mais realista, na qual cada domínio físico influencia o outro. Ou seja, a partir da simulação magnética e do cálculo das forças, ocorre uma deformação no dispositivo, que altera o caminho magnético, modificando, por sua vez, o cálculo das forças, até atingir a

convergência. No acoplamento fraco, não se considera a variação geométrica, mas a interação magnetoelástica é mantida.

As deformações decorrentes do tensor de Maxwell e do efeito de magnetostricção são pequenas em relação ao tamanho dos entreferros, e as tensões geradas podem ser consideradas desprezíveis. Assim, pode-se afirmar que o efeito de magnetostricção inversa não se manifesta de forma significativa.

Além disso, para a obtenção do acoplamento forte, é necessário implementar inicialmente o acoplamento fraco, que apresenta menor custo computacional e maior estabilidade numérica.

Neste trabalho, adotou-se o acoplamento fraco, e o fluxograma da simulação é apresentado na Figura 23.



Figura 23 – Fluxo para simulação multifísica com acoplamento fraco.

Neste trabalho, as simulações são realizadas no regime harmônico, com frequência nominal de 60 [Hz] e corrente nominal de 1 [p.u.], utilizando as curvas B-H definidas na Figura 11. Todas as simulações consideram a não linearidade do núcleo e das partes estruturais e são realizadas utilizando a Malha 6, detalhada na Tabela 3.

5.7.1 Resultados da magnetostática

Nesta seção, apresentam-se as distribuições de grandezas de interesse obtidas com a resolução do problema magnetostático. Nas Figura 24 e Figura 25, observa-se a distribuição da indução magnética no interior do núcleo em condição nominal, bem como a distribuição da sua magnitude. Nota-se uma maior concentração

da indução magnética na perna central, o que se deve ao fato de a corrente na bobina central estar em condição nominal, enquanto as correntes nas bobinas laterais encontram-se defasadas e equilibradas. Consequentemente, espera-se que o tensor de Maxwell e o efeito da magnetostricção apresentem maior intensidade na perna central do núcleo.

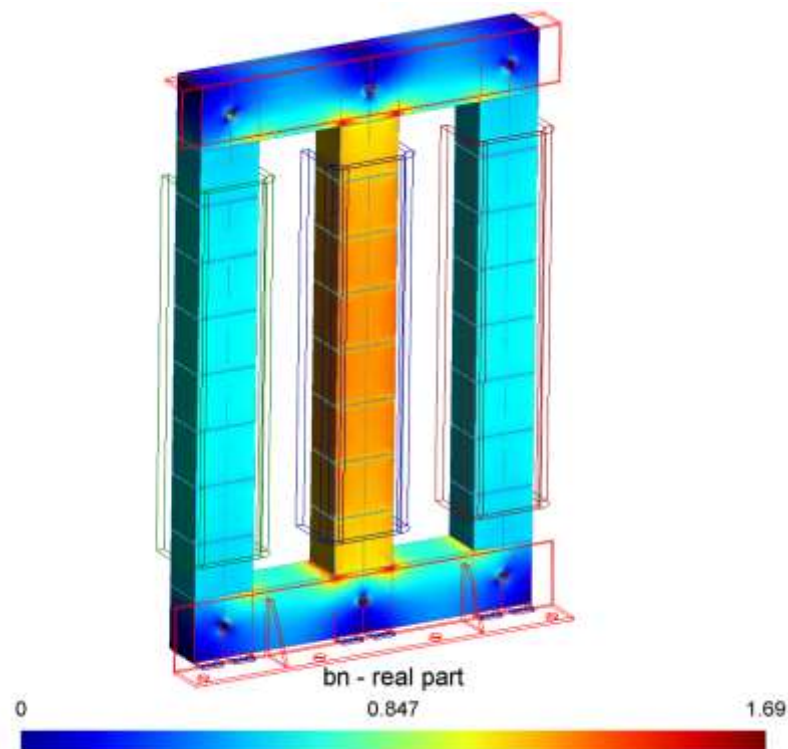


Figura 24 – Distribuição do módulo da indução magnética no núcleo, em $[T]$.

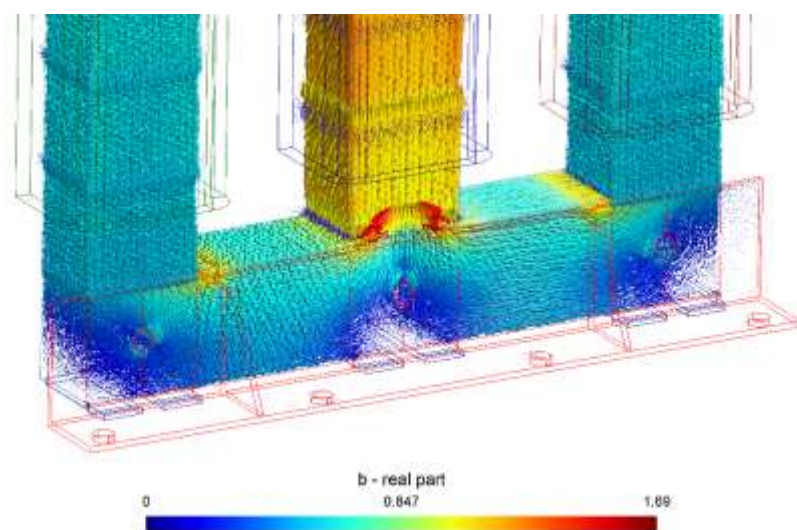


Figura 25 – Zoom da distribuição da indução magnética no núcleo, em $[T]$.

A Figura 26 mostra a distribuição dos vetores de força associados ao tensor de Maxwell, concentrados nas superfícies dos entreferros, enquanto a Figura 27 apresenta a distribuição da norma da força de magnetostricção na superfície do núcleo.

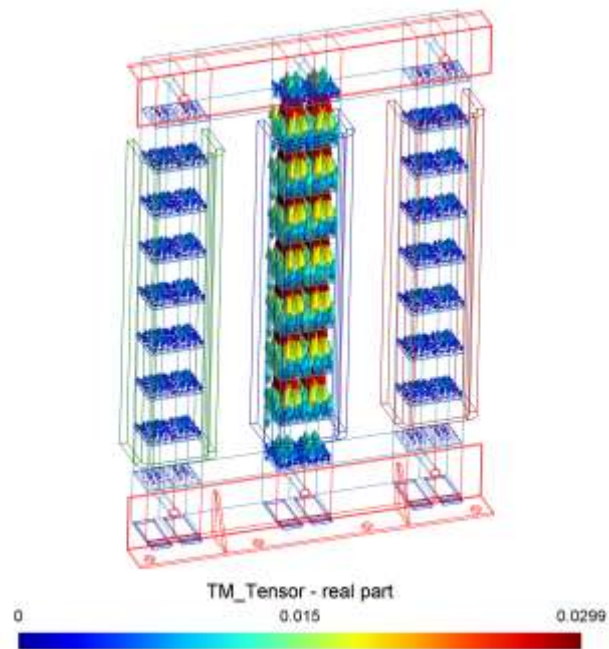


Figura 26 – Distribuição das forças na superfície do núcleo do tensor de Maxwell, em $[N/m^2]$.

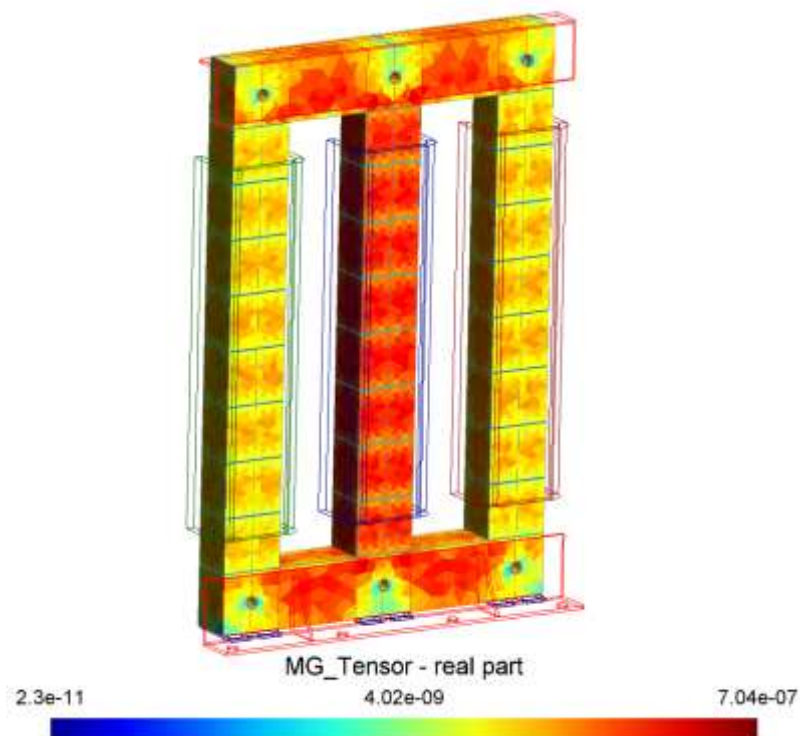


Figura 27 – Distribuição da norma da força de magnetostricção na superfície do núcleo, em $[N/m^2]$.

5.7.2 Resposta em frequência do deslocamento

5.7.2.1 Considerando somente o tensor de Maxwell

Neste item, realiza-se uma análise da resposta em frequência do deslocamento, considerando apenas o efeito das forças originadas pelo tensor de Maxwell. O núcleo é modelado com permeabilidade relativa não-linear e isotrópica.

O objetivo é obter a curva de frequência do deslocamento nos pontos mostrados na Figura 28. Essa curva é útil para o processo de desenvolvimento do dispositivo, pois permite identificar ressonâncias que podem amplificar as vibrações, o que pode afetar a durabilidade e a eficiência.

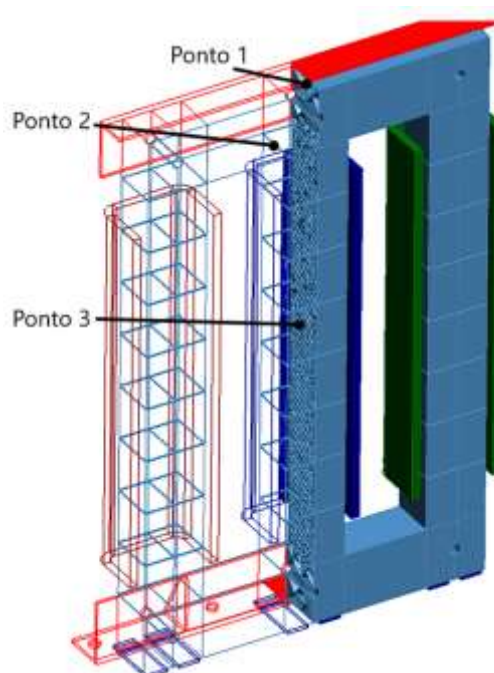


Figura 28 – Pontos de obtenção de dados na simulação para análise de deslocamento pela frequência.

A parte magnética é simulada em regime estático, enquanto a parte elástica é analisada no domínio da frequência, utilizando o tensor de Maxwell como fonte de excitação para a simulação elástica. Nos pontos analisados, obtêm-se os deslocamentos decorrentes das forças magnéticas no regime estático, bem como os deslocamentos no regime de frequência, permitindo determinar a resposta modal excitada pela componente magnética.

As Figura 29 a Figura 31 apresentam, respectivamente, a magnitude e as componentes do deslocamento nos pontos 1, 2 e 3, considerando apenas o tensor de Maxwell, sem magnetostrição.

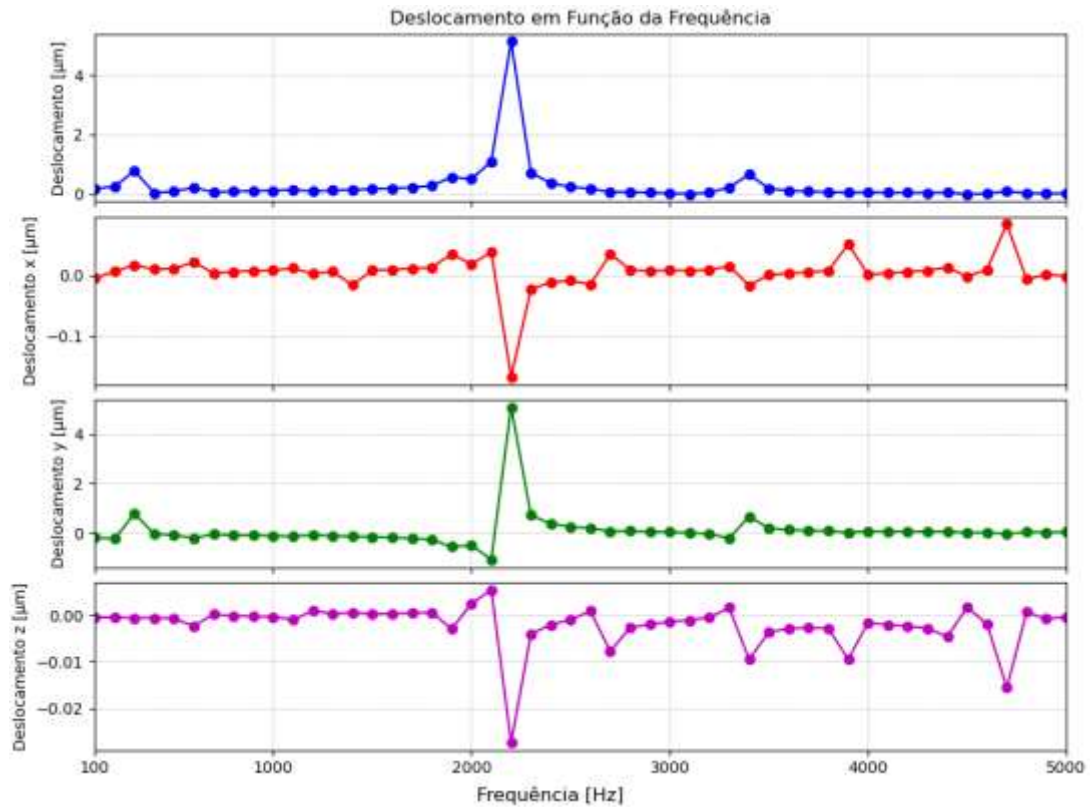


Figura 29 – Magnitude e componentes do deslocamento no ponto 1, sem magnetostricção e somente com tensor de Maxwell.

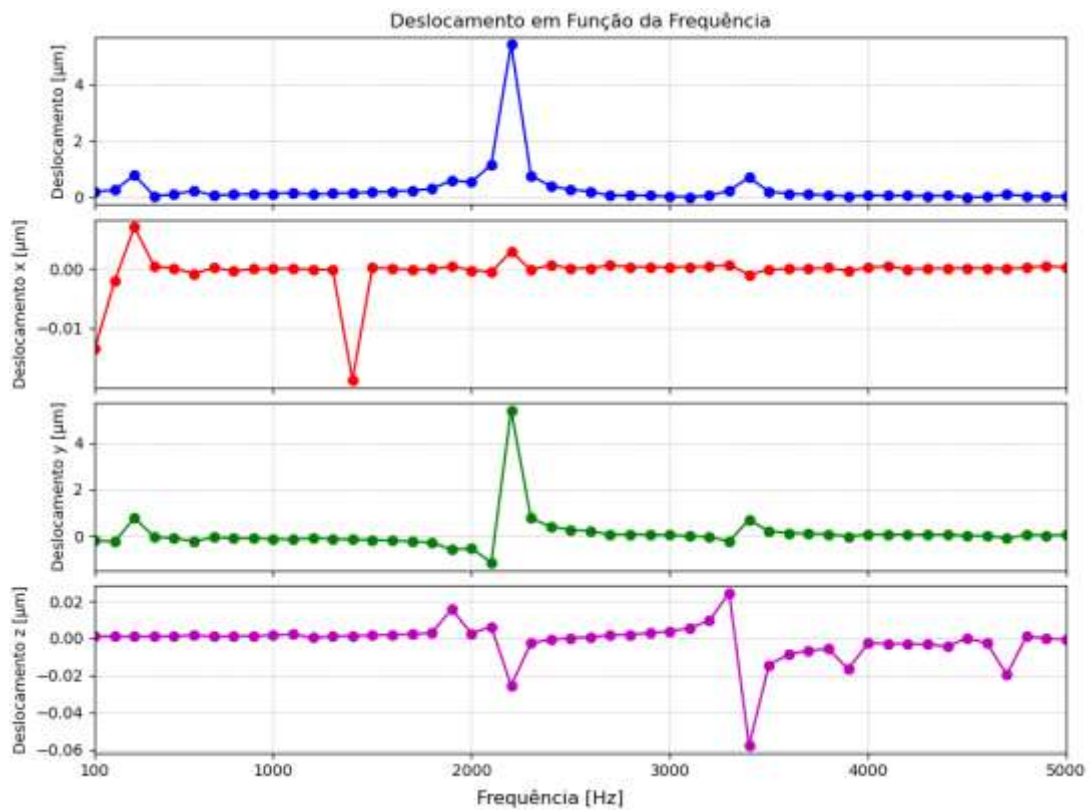


Figura 30 – Magnitude e componentes do deslocamento no ponto 2, sem magnetostricção e somente com tensor de Maxwell.

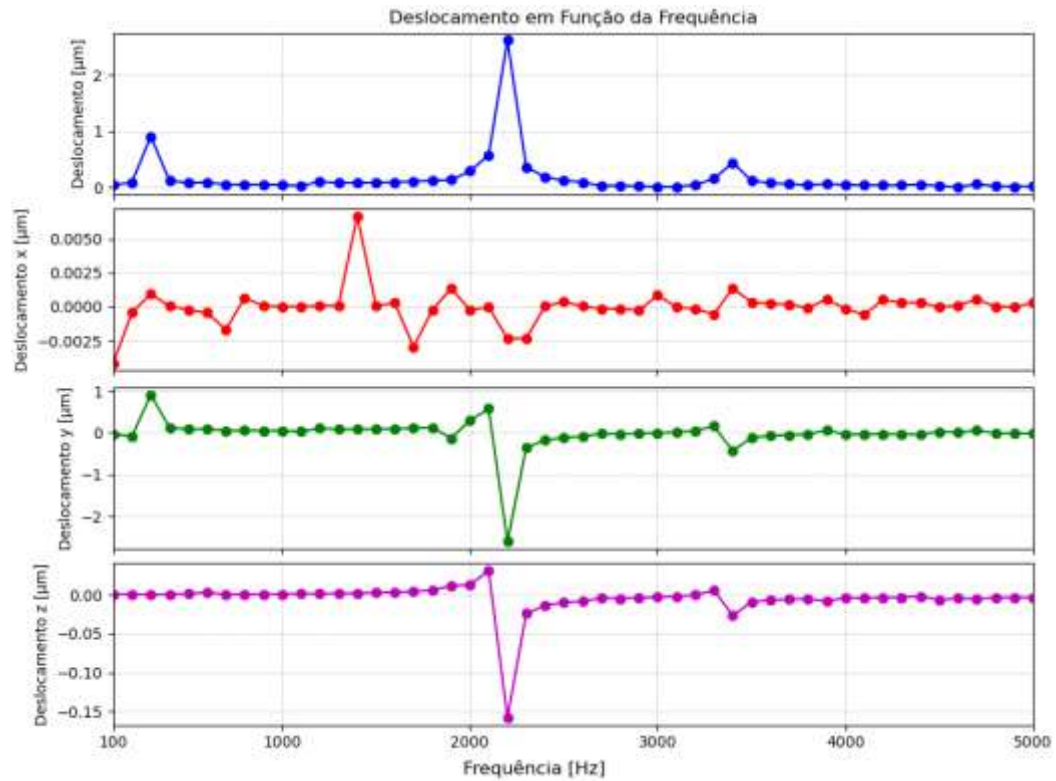


Figura 31 – Magnitude e componentes do deslocamento no ponto 3, sem magnetostrrição e somente com tensor de Maxwell.

Como parâmetro de identificação, considera-se apenas o modo no qual o deslocamento apresentou o valor máximo de magnitude. Na Figura 32, pode-se observar o deslocamento resultante no núcleo em condições nominais, considerando-se somente o tensor de Maxwell. O valor máximo de deslocamento é de 0,19 [μm].

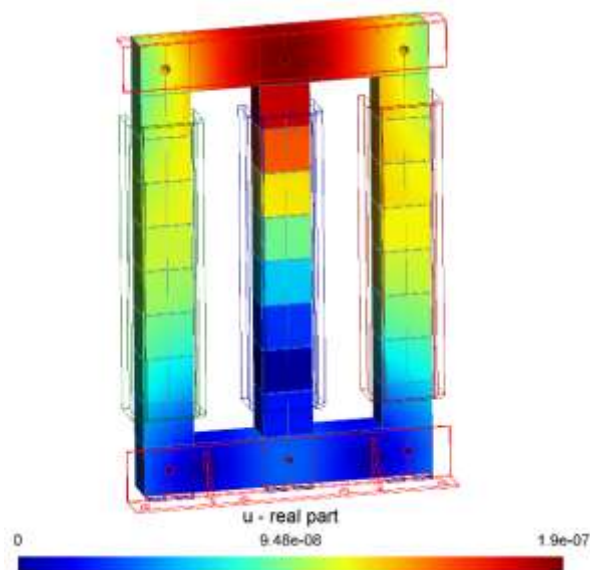


Figura 32 – Distribuição em condições nominais do deslocamento resultante com somente o tensor de Maxwell.

5.7.2.2 *Considerando o tensor de Maxwell e a magnetostricção*

Neste item, realiza-se uma análise da resposta em frequência do deslocamento, considerando o efeito das forças geradas pelo tensor de Maxwell e pela magnetostricção. O núcleo é modelado com permeabilidade relativa não-linear e isotrópica, com a curva de magnetostricção também isotrópica, apresentada na Figura 2.

A magnetostricção é fundamental em simulações magnetoelásticas com formulação de deslocamento para análises modais e de vibração, pois representa a deformação mecânica gerada por campos magnéticos em materiais ferromagnéticos. Essa propriedade influencia diretamente a resposta dinâmica de dispositivos magnéticos, como motores e transformadores, alterando suas frequências naturais e modos de vibração. Negligenciá-la pode causar erros significativos nas previsões de deslocamento, tensões e vibrações, comprometendo a precisão do projeto e a durabilidade do dispositivo. Em análises modais, sua consideração é essencial para capturar o acoplamento entre os campos magnéticos e mecânicos, garantindo que os modelos reflitam o comportamento real do sistema sob excitação magnética.

As forças de magnetostricção e do tensor de Maxwell apresentam comportamentos distintos, mas complementares, em dispositivos magnéticos. As forças de magnetostricção surgem da deformação do material devido à reorientação dos domínios magnéticos, atuando de forma isotrópica ou anisotrópica, dependendo do material, com direções alinhadas ao campo magnético. Já o tensor de Maxwell descreve as forças magnéticas resultantes da indução magnética, predominando em entreferros, onde as forças são perpendiculares às superfícies, atuando no sentido de reduzir o entreferro. Em simulações, ambas as forças impactam significativamente a dinâmica do dispositivo, especialmente em entreferros, onde a força de Maxwell é dominante, podendo amplificar vibrações e ruídos se não for modelada adequadamente. A integração precisa dessas forças nas simulações garante projetos mais robustos e eficientes.

Nota-se, nas Figura 29 a Figura 31, que, sem a consideração da magnetostricção, o deslocamento nos pontos de ressonância apresenta diferenças significativas em relação ao caso magnetoelástico completo, mostrado nas Figura 33 a Figura 35. Para evidenciar essa discrepância, destaca-se a análise da componente vertical (eixo y), na qual o deslocamento se mostra mais significativo, permitindo uma avaliação qualitativa mais precisa dos efeitos analisados.

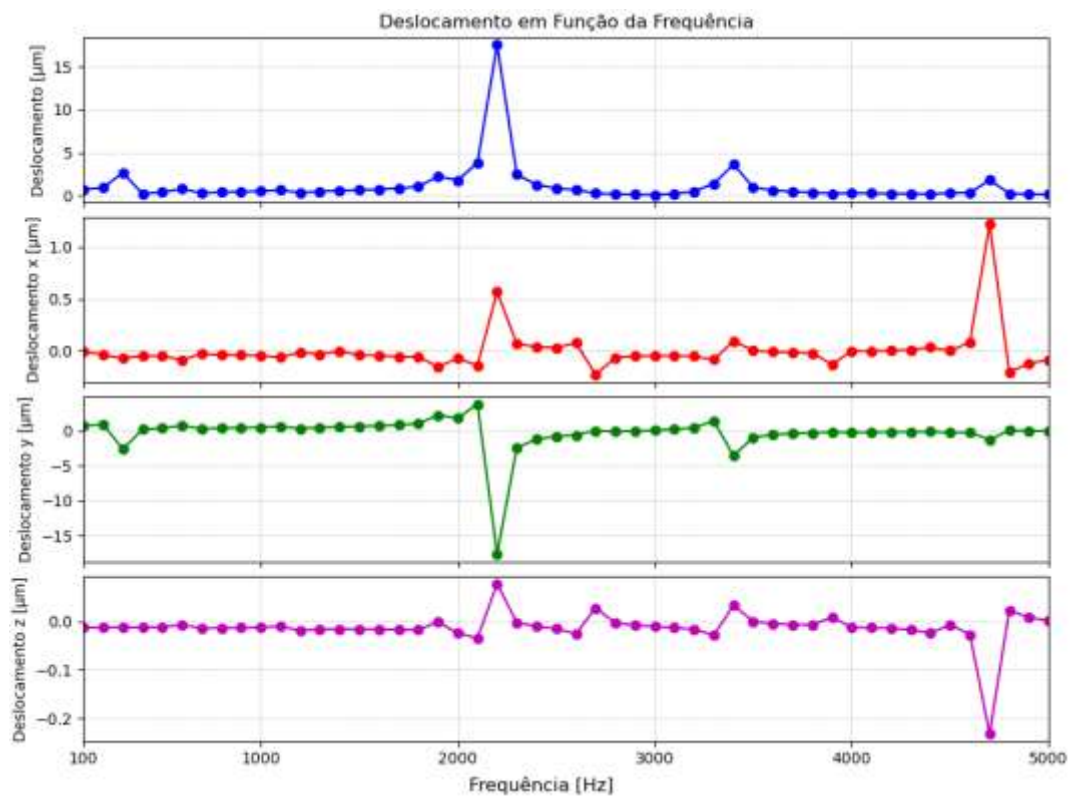
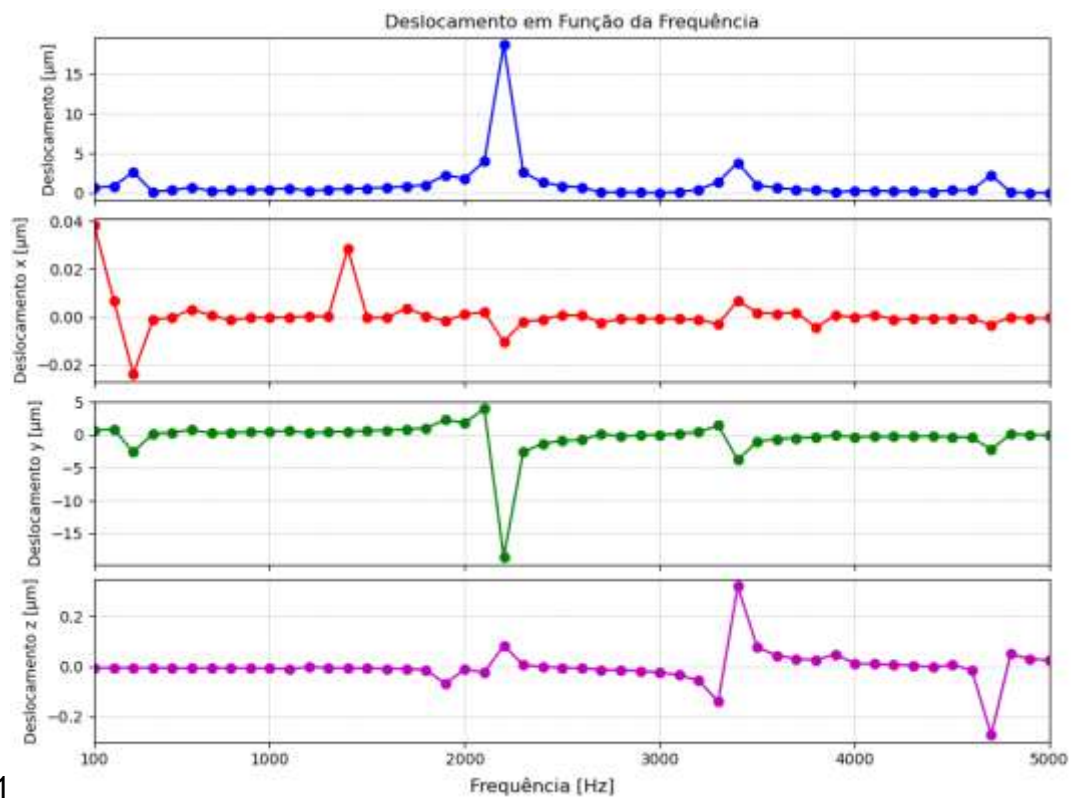


Figura 33 – Deslocamento pela frequência no ponto 1, com magnetostrrição e com tensor de Maxwell.



1

Figura 34 – Deslocamento pela frequência no ponto 2, com magnetostrrição e com tensor de Maxwell.

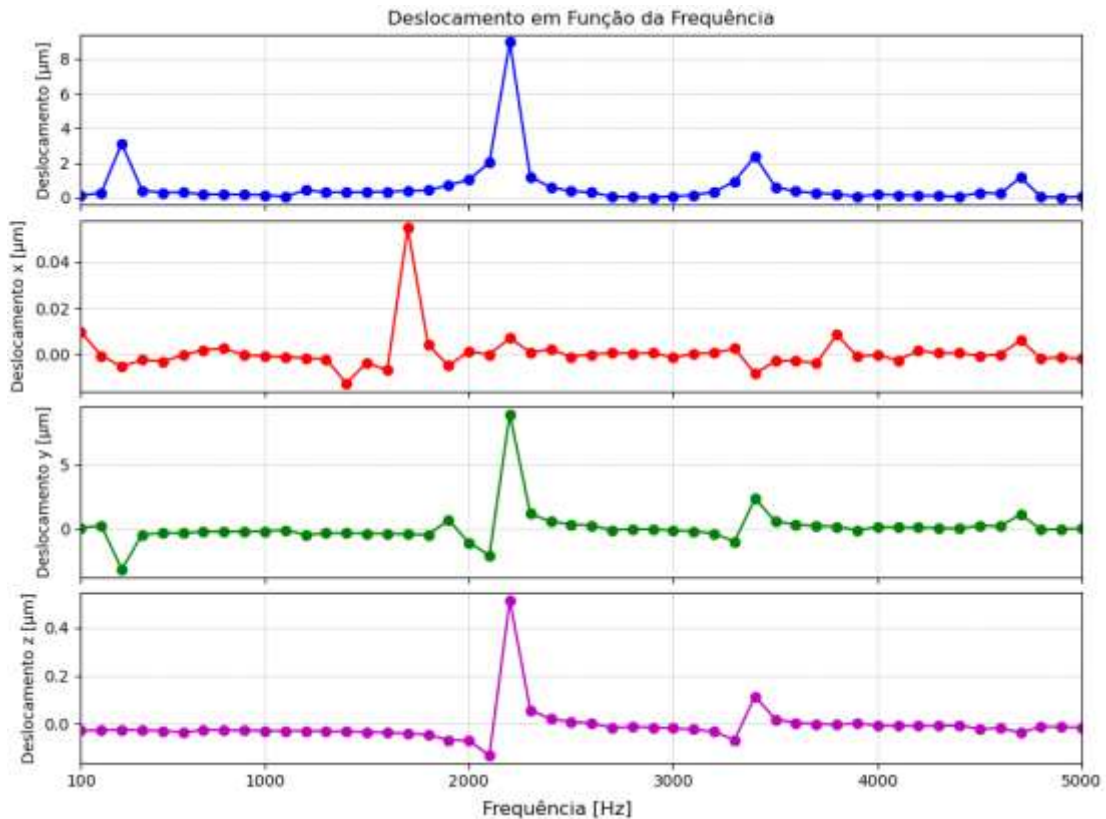


Figura 35 – Deslocamento pela frequência no ponto 3, com magnetostricção e com tensor de Maxwell.

Com isso, percebe-se a importância de considerar a magnetostricção para estudos de dispositivos magnéticos voltados à análise do deslocamento em função da frequência. Isso pode ser observado nas Figura 36 a Figura 38, nas quais é feita a comparação nos pontos de interesse, analisando-se apenas o deslocamento vertical (componente Y).

Nota-se que a consideração da magnetostricção é essencial para a modelagem magnetoelástica. Com a mesma malha, os pontos de ressonância apresentam diferenças consideráveis; além disso, a direção do deslocamento também se alterada, devido à diferente natureza dos fenômenos da magnetostricção e do tensor de Maxwell.

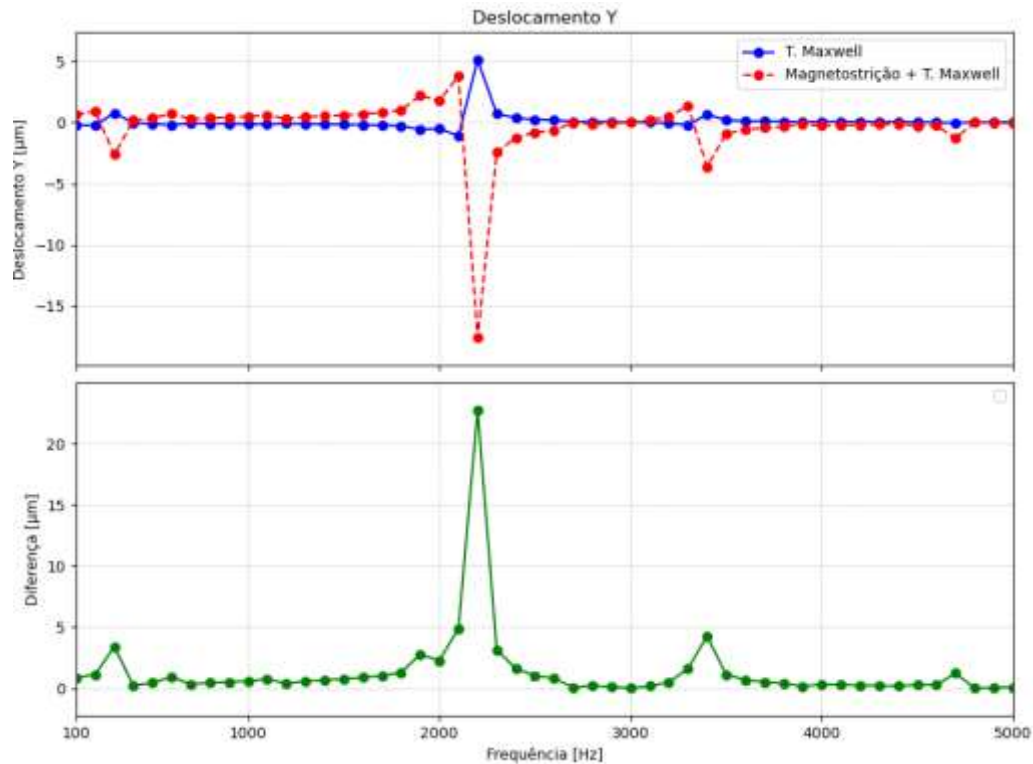


Figura 36 – Deslocamento vertical em função da frequência no ponto 1, somente com o tensor de Maxwell, com o tensor de Maxwell e a magnetostricção e a diferença entre os dois casos.

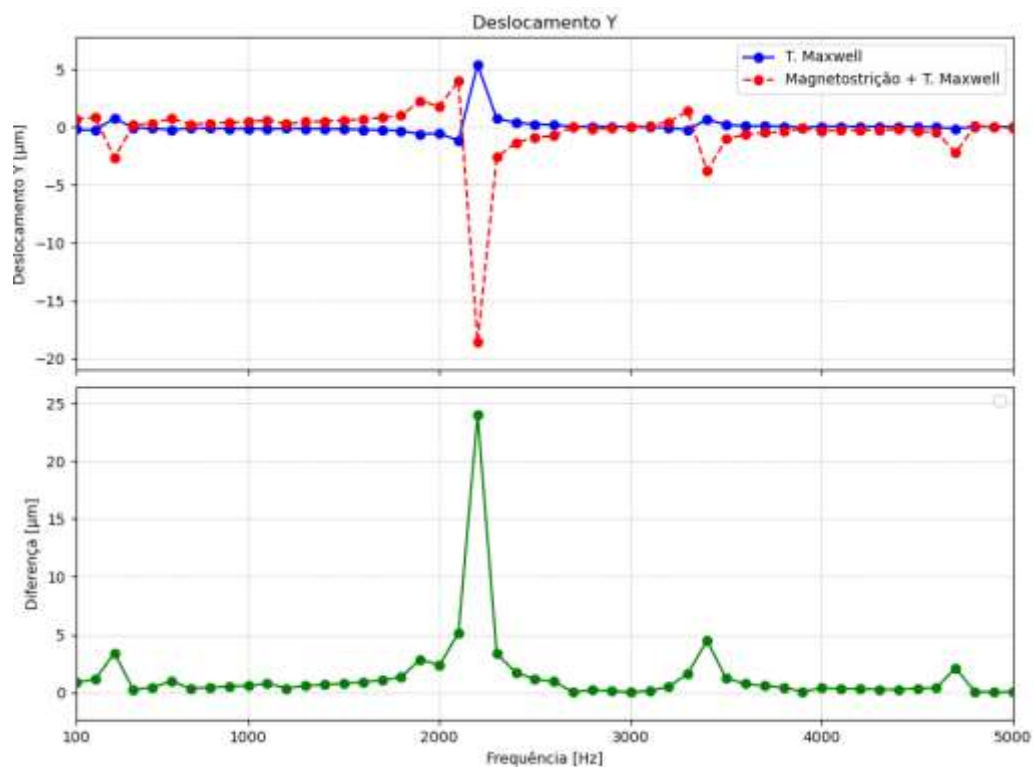


Figura 37 – Deslocamento vertical em função da frequência no ponto 2, somente com o tensor de Maxwell, com o tensor de Maxwell e a magnetostricção e a diferença entre os dois casos.

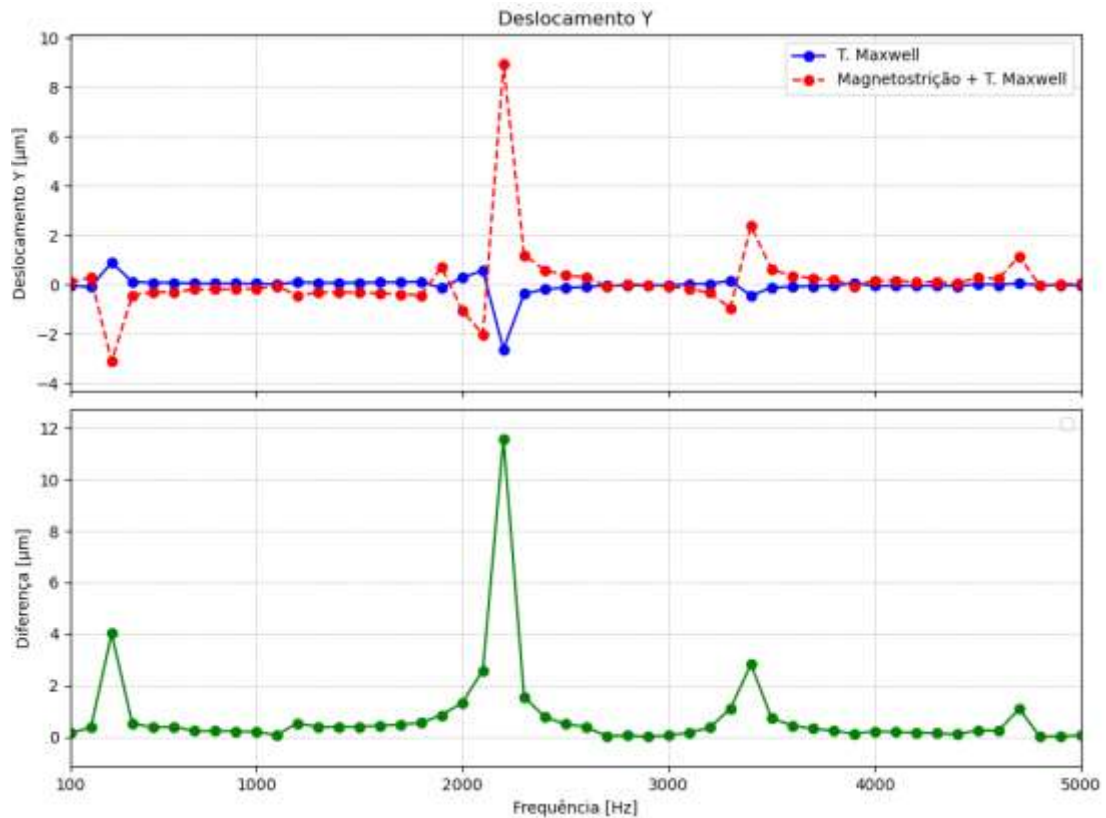


Figura 38 – Deslocamento vertical em função da frequência no ponto 3, somente com o tensor de Maxwell, com o tensor de Maxwell e a magnetostricção e a diferença entre os dois casos.

Os pontos 1 e 2 apresentam deslocamentos verticais bastante semelhantes devido à sua proximidade espacial. Ainda assim, ambos são analisados pela relevância dessa componente para a caracterização do comportamento dinâmico.

Os picos da resposta em frequência são identificados como modos particulares da análise modal, conforme mostrado na Figura 39. Com isso, nota-se que o tensor de Maxwell e a magnetostricção interagem com as frequências ressonantes do dispositivo, embora nem todos os modos sejam excitados por esses fenômenos [22].

Na Figura 40, pode-se observar a distribuição dos deslocamentos resultantes no núcleo para o caso completo (tensor de Maxwell e magnetostricção). Nota-se que o maior deslocamento ocorre na região da perna central, devido à concentração da indução magnética nessa área, resultando em deslocamentos mais elevados. O valor máximo de deslocamento é de $0,719 \text{ } [\mu\text{m}]$.

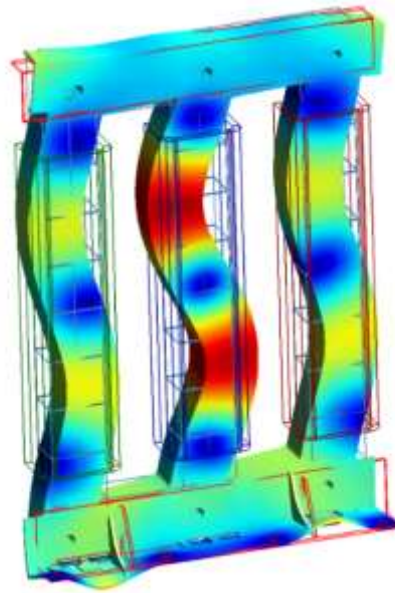


Figura 39 – Principal forma modal, excitada pela magnetostricção e tensor de Maxwell, em $2283,83 [Hz]$.

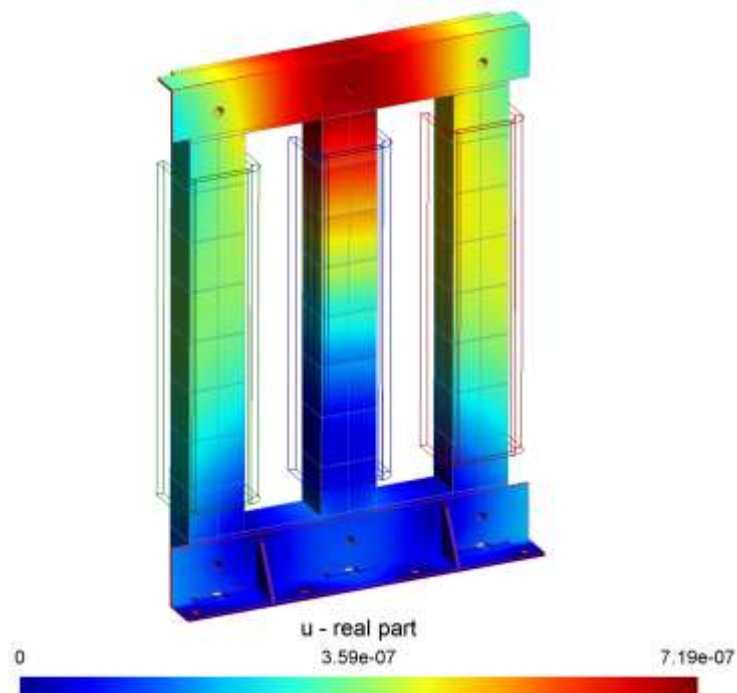


Figura 40 – Distribuição em condições nominais do deslocamento no dispositivo, em $[m]$.

6 CONCLUSÃO

A partir da metodologia e das análises realizadas nesta dissertação, foi possível compreender de forma mais aprofundada o comportamento do indutor trifásico em estudo. Nota-se que o método dos elementos finitos apresenta capacidade de modelar e caracterizar o dispositivo, possibilitando o cálculo das forças de magnetostricção no núcleo e nas partes estruturais, bem como das forças associadas ao tensor de Maxwell nos entreferros, além da avaliação do deslocamento final decorrente dessas forças. Observou-se que, em regime de funcionamento nominal, existe a possibilidade de excitação de frequências naturais específicas do equipamento, o que torna esse tipo de análise fundamental para a prototipagem de dispositivos de alto valor agregado. Verifica-se também que não existe uma regra geral para prever quais modos podem ser excitados pela magnetostricção e pelo tensor de Maxwell, pois isso depende fortemente da geometria, dos materiais e da disposição dos componentes.

Conclui-se que a magnetostricção exerce um papel determinante na resposta dinâmica da estrutura, visto que, ao ser incluída no modelo, altera significativamente os deslocamentos ressonantes e modifica a distribuição das tensões internas, demonstrando que sua consideração é essencial para previsões realistas em dispositivos magnéticos.

Assim, em dispositivos como o indutor trifásico, a simulação tridimensional voltada à análise magnetoelástica e à verificação da resposta em frequência sob operação nominal, bem como à análise dos deslocamentos, mostram-se cruciais, uma vez que tais efeitos podem aumentar consideravelmente o ruído acústico e até danificar o equipamento, dependendo da proximidade com as frequências naturais de ressonância.

Como propostas para trabalhos futuros, sugere-se a verificação e validação experimental do modelo multifísico desenvolvido, de modo a garantir que as formulações adotadas sejam suficientes para representar o comportamento do indutor trifásico. As características dos materiais empregados também devem ser validadas experimentalmente, visto que alguns materiais apresentam magnetostricção anisotrópica, além da não linearidade do núcleo ferromagnético. Outro aspecto relevante é a consideração das forças de Laplace nas bobinas do indutor, com o objetivo de avaliar sua contribuição para a vibração do equipamento. Por fim, a análise do impacto do acoplamento forte nos parâmetros de interesse constitui outro ponto promissor a ser explorado.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Marks, S. Vitolina, “Modelling of magnetostriction of transformer magnetic core for vibration analysis”, Open Physics, 2017.
- [2] M. Liu, O. Hubert, X. Mininger, F. Bouillault e L. Bernard, “Homogenized magnetoelastic behavior model for the computation of strain due to magnetostriction in transformers”, IEEE Transactions on Magnetics, 2020.
- [3] P. Dular, J. F. Remacle, F. Henrotte, A. Genon, W. Legros, “Magnetostatic and magnetodynamic mixed formulations compared with conventional formulations”, IEEE Transactions on Magnetics, 1997.
- [4] M. Kuczmann, “Potential formulations in magnetics applying the finite element method”, Lecture notes – Laboratory of Electromagnetic Fields, University Gyor, 2009.
- [5] J. Hilgert, L. Vandeveld e J. Melkebeek, “Comparison of magnetostriction models for use in calculations of vibrations in magnetic cores”, IEEE Transactions on Magnetics, 2008.
- [6] P. Witczak e K. Majer, “The influence of magnetic anisotropy on magnetostriction forces and vibration in three-phase three-limp transformers”, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2016.
- [7] P. Witczak, “Magnetostriction force spectrum in power transformer”, International Conference on Electrical Machines (ICEM), 2014, Berlim, Germany.
- [8] A. Belahcen, “Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines”, tese de doutorado, Helsinki University of Technology, 2004.
- [9] K. Delaere, W. Heylen, R. Belmans e K. Hameyer, “Comparison of induction machine stator vibration spectra induced by reluctance forces and magnetostriction”, IEEE Transactions on Magnetics, 2002.
- [10] Y. Gao, K. Muramatsu, K. Shida, K. Fujiwara, S. Fukuchi e T. Takahata, “Loss calculation of reactor connected to inverter power supply taking account of eddy currents in laminated steel core”, IEEE Transactions on Magnetics, 2009.
- [11] A. Bossavit, “Whitney forms: A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism”, IEE Proceedings A Physical Science Measurement and Instrumentation Management and Education Reviews, 1988.
- [12] M. Liu, O. Hubert, X. Mininger, F. Bouillault, L. Bernard e T. Waeckerlé, “Reduction of power transformer core noise generation due to magnetostriction induced deformations using using fully coupled finite element modeling optimization procedure”, IEEE Transactions on Magnetics, 2017.
- [13] J. Xu, A. Lakhsasi, Z. Yao e V. Rajagopalan, “Analysis by FEM of a coupled inductor circuit used as current injection interface”, 5th IEEE Workshop on Computers in Power Electronics, 1996.
- [14] M. Besbes, Z. Ren e A. Razek, “Finite element analysis of magneto-mechanical coupled phenomena in magnetostrictive materials”, IEEE Transactions on Magnetics, 1996.
- [15] O. A. Mohammed, T. Calvert e R. McConnell, “Coupled magnetoelastic finite element formulation including anisotropic reluctivity tensor and magnetostriction effects for machinery applications”, IEEE Transactions on Magnetics, 2001.
- [16] M. Besbes, Z. Ren e A. Razek, “A generalized finite element model of magnetostriction phenomena”, IEEE Transactions on Magnetics, 2001.

- [17] J. A. de S. Cruvinel, "Os elementos finitos na solução de problemas eletrostáticos e eletromagnéticos em engenharia elétrica", Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, 2022.
- [18] M. Invitti, "Modelagem numérica magnetoelástica de uma eletrobomba com motor síncrono monofásico de ímã permanente", dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2023.
- [19] G. Meunier, "The finite element method for electromagnetic modeling", Wiley, 2008.
- [20] M. Sadd, "Elasticity: Theory and Applications", Academic Press, 2009.
- [21] M. V. Ferreira da Luz, "Desenvolvimento de um software para cálculo de campos eletromagnéticos 3D utilizando elementos de aresta, levando em conta o movimento e o circuito de alimentação", tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.
- [22] M. Rossi, J. L. Besnerais, "Vibration reduction of inductors under magnetostrictive and Maxwell forces excitation", IEEE Transactions on Magnetics, 2015.
- [23] C. Geuzaine, J. F. Remacle, "A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities". International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009.
- [24] P. Dular e C. Geuzaine, "GetDP: A general environment for the treatment of discrete problems", <http://geuz.org/getdp/>, 1997."
- [25] R. Feinberg, "Modern power transformer practice", The Macmillan Press, 1979.
- [26] T. Minh e H. Duc, "Finite element modeling of shunt reactor used in high voltage power systems". Engineering, Technology & Applied Science Research, 2021.
- [27] Y. Özüpak, "Designing a reactor for use in high voltage power system and performing experimental and simulation analysis". Journal of engineering research, 2022.
- [28] K. Delaere, W. Heylen, "Local magnetostriction forces for finite element analysis". IEEE Transactions on Magnetics, 2000.
- [29] F. Lu, J. Guo, L. Niu, J. Gent, Y. Pan, "A new 3D method for reactor core vibration based on silicon steel lamination rules and application in UHV shunt reactors". Mathematical Problems in Engineering, 2019.