

Fernando Holanda Sartori

O Teorema de Serre-Swan

Florianópolis

2025

Fernando Holanda Sartori

O Teorema de Serre-Swan

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemática
Departamento de Matemática
Bacharelado em Matemática

Orientador: Prof. Fernando de Lacerda Mortari

Florianópolis

2025

FERNANDO HOLANDA SARTORI
O Teorema de Serre-Swan

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2025.

Prof. Felipe Lopes Castro
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Fernando de Lacerda Mortari
(Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Eliezer Batista
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Natã Machado
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis
2025

Dedico este trabalho à minha família. Em especial, à Ana Luiza e minha tia Silvia.

Agradecimentos

Agradeço, principalmente, aos meus pais pelo companheirismo e confiança em mim. Agradeço à minha tia Silvia pela paciência e apoio incondicional.

Agradeço aos meus amigos de graduação, tio Sérgio, Bruno, Vitor, Marco, Haymon e aos Gabrieis pela ajuda e por trazerem leveza mesmo nos momentos difíceis. Agradeço ao meu orientador Fernando Mortari pelo aprendizado e muitas horas dedicadas.

Por fim, agradeço à Ana Luiza por tudo.

Resumo

O teorema de Serre-Swan estabelece que, dado um espaço topológico X compacto e Hausdorff, a categoria dos fibrados vetoriais reais com espaço base X é equivalente à categoria dos $C(X)$ -módulos projetivos e finitamente gerados, em que $C(X)$ é o anel de funções contínuas de X para \mathbb{R} . O objetivo do trabalho é demonstrar tal teorema aos leitores com familiaridade com os conceitos de Álgebra Linear e Topologia. Para estruturar a demonstração do teorema, faz-se necessária a introdução a conceitos básicos a respeito das teorias de fibrados vetoriais, R -módulos e Categorias.

Palavras-chave: Teorema de Serre-Swan. Fibrados Vetoriais. Módulos projetivos. Equivalência de Categorias.

Abstract

The Serre-Swan Theorem states that, given a compact Hausdorff topological space X , the category of real vector bundles with base space X is equivalent to the category of finitely generated projective $C(X)$ -modules, where $C(X)$ is the ring of continuous functions from X to \mathbb{R} . The aim of this work is to prove the aforementioned theorem to readers familiar with the concepts of Linear Algebra and Topology. To structure the proof of the theorem, it is necessary to introduce basic concepts regarding the theories of vector bundles, R -modules, and Categories.

Keywords: Serre-Swan Theorem. Vector Bundles. Projective Modules. Equivalence of Categories.

Sumário

	INTRODUÇÃO	8
1	PRELIMINARES	9
1.1	Categorias	9
1.2	Alguns resultados topológicos	13
1.2.1	O espaço das matrizes	17
1.3	R-módulos	18
2	FIBRADOS VETORIAIS	22
2.1	Introdução	22
2.1.1	Seções	25
2.1.2	Imagem e kernel de morfismos	36
2.2	Subfibrado vetorial como somando direto	42
2.3	Extensão de seções locais a globais	45
3	UMA PONTE ENTRE A TOPOLOGIA E A ÁLGEBRA	48
3.1	O funtor Γ	48
3.2	Γ é plenamente fiel	51
3.3	$\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$-módulo projetivo e finitamente gerado	56
3.4	Γ é essencialmente sobrejetor	60
	REFERÊNCIAS	63

INTRODUÇÃO

Na matemática, muitas vezes, procuramos pontes entre objetos de naturezas distintas a fim de estudar certos objetos sob uma outra perspectiva que torne esse estudo mais tratável. Essas pontes podem ser entendidas como funtores entre categorias.

Em 1955, Jean-Pierre Serre demonstrou um resultado fundamental na geometria algébrica, estabelecendo uma equivalência entre a categoria dos fibrados vetoriais algébricos sobre uma variedade afim e a categoria dos módulos projetivos e finitamente gerados sobre o seu anel de coordenadas. Posteriormente, em 1962, Richard Swan transportou essa ideia para o contexto da topologia geral, resultando no teorema de Serre-Swan.

O objetivo deste trabalho é demonstrar o teorema de Serre-Swan. O teorema diz que existe uma ponte entre a categoria dos fibrados vetoriais sobre um espaço topológico compacto e Hausdorff e a categoria dos módulos projetivos finitamente gerados sobre o anel de funções contínuas desse espaço para \mathbb{R} que estabelece uma equivalência categórica. Ou seja, estas duas categorias são equivalentes.

Desta forma, obtemos uma ferramenta poderosa que nos possibilita traduzir espaços topológicos compactos e Hausdorff para uma linguagem de R -módulos. Em essência, o teorema traduz um objeto topológico para uma estrutura puramente algébrica. Essa abordagem permite que propriedades topológicas, que podem ser difíceis de verificar diretamente, sejam transformadas em invariantes algébricos, que, por sua vez, podem ser mais acessíveis de serem verificados.

No primeiro capítulo, apresentaremos as preliminares necessárias a respeito de categorias e R -módulos, além de enunciarmos alguns resultados topológicos que serão usados no decorrer do texto.

No segundo capítulo, introduziremos a categoria dos fibrados vetoriais, com ênfase em seções locais e globais de um fibrado vetorial. Posteriormente, mostraremos como essas seções são o elemento-chave que capta e traduz a estrutura geométrica do fibrado para a linguagem algébrica.

No terceiro capítulo, é que começaremos, de fato, a estabelecer o teorema. Apresentaremos o funtor Γ que leva um fibrado vetorial ao módulo de seções globais deste fibrado. Com base no artigo (SWAN, 1962), mostraremos que o funtor Γ , quando tem seu contradomínio restringido aos módulos projetivos e finitamente gerados, é dotado de certas propriedades (ser plenamente fiel e essencialmente sobrejetor) que o fazem estabelecer a equivalência categórica.

1 Preliminares

Para a compreensão integral desta monografia, pressupomos que o leitor tenha familiaridade com os conceitos fundamentais de álgebra linear e topologia. Adicionalmente, são utilizadas noções elementares de teoria de grupos e anéis. Como referência para estes pré-requisitos, sugerimos as seguintes obras: (BOLDRINI; PEREIRA; SESMA, 2003) para Álgebra Linear, (WILLARD, 2004) para Topologia e (TULCEA; TULCEA, 1994) para a teoria de grupos e anéis. Neste texto o zero não é um número natural.

1.1 Categorias

Nesta seção, introduziremos os conceitos elementares da teoria de categorias, abordando um teorema clássico que usaremos na conclusão do texto. Ao leitor interessado, sugerimos como referência (LEINSTER, 2014).

Definição 1.1.1. *Uma categoria \mathcal{C} consiste de:*

- *Objetos. Denotados por letras maiúsculas;*
- *Morfismos. Denotados por letras minúsculas;*
- *Para cada morfismo f de \mathcal{C} , há um objeto X de \mathcal{C} chamado de domínio de f e outro Y chamado de contradomínio de f , e denotamos por $f : X \longrightarrow Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$;*
- *Lei de Composição: Para quaisquer morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$, existe um morfismo $g \circ f : X \longrightarrow Z$, chamado de composição de g e f , satisfazendo:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

para quaisquer morfismos f, g e h cujas composições acima estão bem definidas;

- *Identidade: Para cada objeto X existe um morfismo $\text{Id}_X : X \longrightarrow X$ chamado de identidade que satisfaz*

$$f \circ \text{Id}_X = f \quad \text{e} \quad \text{Id}_X \circ g = g$$

para quaisquer morfismos f e g cujas composições acima estão bem definidas.

Para um objeto X de uma categoria \mathcal{C} , denotaremos $X \in \mathcal{C}$. Além disso, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ denotaremos por $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a coleção de todos os morfismos de X para Y , e denotaremos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para um morfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Definição 1.1.2. Dados objetos X e Y de uma categoria \mathcal{C} , dizemos que um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo quando existe um morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Denotamos $f^{-1} := g$ e $g^{-1} := f$.

Definição 1.1.3. Dados objetos X e Y de uma categoria \mathcal{C} , dizemos que X é isomorfo a Y quando existe um isomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, e denotamos por $X \cong Y$.

Observação 1.1.4. \cong como definido acima é uma relação de equivalência.

Definição 1.1.5. Uma subcategoria \mathcal{D} de uma categoria \mathcal{C} é uma categoria tal que todos os objetos e morfismos de \mathcal{D} são também objetos e morfismos de \mathcal{C} . Além disso, os morfismos identidade e a lei composição de \mathcal{D} são os mesmos de \mathcal{C} .

Definição 1.1.6. Dadas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} , um funtor (covariante) \mathcal{F} de \mathcal{C} para \mathcal{D} consiste de:

- Um objeto $\mathcal{F}(X) \in \mathcal{D}$ para cada objeto $X \in \mathcal{C}$;
- Um morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ de \mathcal{D} para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{C} .

Satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)}$, para todo objeto X de \mathcal{C} ;
- $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, para quaisquer morfismos componíveis de \mathcal{C} .

Denotamos $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, e dizemos que \mathcal{C} é o domínio e \mathcal{D} é o contradomínio do funtor \mathcal{F} .

Proposição 1.1.7. Sejam $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor, e X e Y objetos de \mathcal{C} tais que $X \cong Y$. Então, $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$.

Exemplo 1.1.8. Dada uma categoria \mathcal{C} , definimos o funtor $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ (identidade) por $\text{Id}_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $\text{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$, para todo objeto X e morfismo f de \mathcal{C} .

Exemplo 1.1.9. Dados funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$, a composição de \mathcal{G} com \mathcal{F} é o funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ definido pela aplicação sucessiva de \mathcal{F} e \mathcal{G} .

Definição 1.1.10. Dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, dizemos que \mathcal{F} é essencialmente sobrejetor quando para todo objeto Y de \mathcal{D} , existe um objeto X de \mathcal{C} tal que $\mathcal{F}(X) \cong Y$.

Definição 1.1.11. Dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, dizemos que \mathcal{F} é plenamente fiel quando para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, \mathcal{F} estabelece uma bijeção entre $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$.

Definição 1.1.12. Dados funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, uma transformação natural $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é uma coleção de morfismos

$$\{\phi_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$$

em \mathcal{D} tal que para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e morfismo $f : X \longrightarrow Y$ o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\phi_X} & \mathcal{G}(X) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\phi_Y} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

isto é,

$$\mathcal{G}(f) \circ \phi_X = \phi_Y \circ \mathcal{F}(f).$$

Definição 1.1.13. Dados funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, dizemos que uma transformação natural $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um isomorfismo natural quando o morfismo $\phi_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ é um isomorfismo em \mathcal{D} , para todo $X \in \mathcal{C}$.

Definição 1.1.14. Dados funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, dizemos que \mathcal{F} é equivalente a \mathcal{G} quando existe um isomorfismo natural $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, e denotamos $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$.

Observação 1.1.15. \approx como definido acima é uma relação de equivalência.

Definição 1.1.16. Dadas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} , dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes quando existem funtores

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \quad \text{e} \quad \mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

tais que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{e} \quad \mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \text{Id}_{\mathcal{C}}.$$

Teorema 1.1.17. Se $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é um funtor essencialmente sobrejetor e plenamente fiel, então \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes.

Demonstração. Defina $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ nos objetos como segue: para cada $Y \in \mathcal{D}$, $\mathcal{G}(Y) := X$, para algum $X \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(X) \cong Y$, que existe pois \mathcal{F} é essencialmente sobrejetor, e denote o isomorfismo por $\phi_Y : Y \longrightarrow \mathcal{F}(X)$.

Seja $f : Y \longrightarrow Y'$ um morfismo de \mathcal{D} , $X = \mathcal{G}(Y)$ e $X' = \mathcal{G}(Y')$. Assim, $\phi_{Y'} \circ f \circ \phi_Y^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X'))$. Como \mathcal{F} é plenamente fiel, existe um único $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ tal que $\mathcal{F}(f') = \phi_{Y'} \circ f \circ \phi_Y^{-1}$. Defina \mathcal{G} nos morfismos por $\mathcal{G}(f) = f'$. Mostraremos que \mathcal{G} é funtor.

Claramente, $\mathcal{G}(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}(Y), \mathcal{G}(Y'))$. Além disso,

$$\mathcal{F}(\text{Id}'_Y) = \phi_Y \circ \text{Id}_Y \circ \phi_Y^{-1} = \text{Id}_Y.$$

Como \mathcal{F} é bijetor em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G}(Y), \mathcal{G}(Y))$ e \mathcal{F} preserva composição, temos que $\text{Id}'_Y = \text{Id}_{\mathcal{G}(Y)}$. Portanto, $\mathcal{G}(\text{Id}_Y) = \text{Id}'_Y = \text{Id}_{\mathcal{G}(Y)}$.

Para morfismos $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ e $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y', Y'')$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((g \circ f)') &= \phi_{Y''} \circ g \circ f \circ \phi_Y^{-1} \\ &= \phi_{Y''} \circ g \circ \phi_{Y'}^{-1} \circ \phi_{Y'} \circ f \circ \phi_Y^{-1} \\ &= \mathcal{F}(g') \circ \mathcal{F}(f') \\ &= \mathcal{F}(g' \circ f'), \end{aligned}$$

e como \mathcal{F} é plenamente fiel, temos que $(g \circ f)' = g' \circ f'$, ou seja, $\mathcal{G}(g \circ f) = \mathcal{G}(g) \circ \mathcal{G}(f)$. Portanto, \mathcal{G} é funtor.

Note que, para qualquer $Y \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(Y) = \mathcal{F}(X) \cong Y = \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y).$$

Defina $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \in \mathcal{D}}$. Assim, se mostrarmos que ϕ é uma transformação natural, ou seja, que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(Y) & \xrightarrow{\phi_Y} & \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y) \\ (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(f) \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}(f) \\ (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(Y') & \xrightarrow{\phi_{Y'}} & \text{Id}_{\mathcal{D}}(Y') \end{array}$$

para todo $Y, Y' \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$, teremos que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \text{Id}_{\mathcal{D}}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f') &= \phi_{Y'}^{-1} \circ f \circ \phi_Y \\ \implies \phi_{Y'} \circ \mathcal{F}(f') &= f \circ \phi_Y \\ \implies \phi_{Y'} \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(f) &= f \circ \phi_Y, \end{aligned}$$

mostrando que ϕ é uma transformação natural. Então, $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \text{Id}_{\mathcal{D}}$. Agora, mostraremos que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \text{Id}_{\mathcal{C}}$.

Note que $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(X)) = X'$, para algum $X' \in \mathcal{C}$, e existe o isomorfismo citado anteriormente $\phi_{\mathcal{F}(X)} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X')$. Como \mathcal{F} é plenamente fiel existem únicos ψ_X e $\psi'_{X'}$ tais que $\mathcal{F}(\psi_X) = \phi_{\mathcal{F}(X)}$ e $\mathcal{F}(\psi'_{X'}) = \phi_{\mathcal{F}(X)}^{-1}$. Assim,

$$\mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)} = \phi_{\mathcal{F}(X)}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{F}(\psi'_{X'}) \circ \mathcal{F}(\psi_X) = \mathcal{F}(\psi'_{X'} \circ \psi_X).$$

E por \mathcal{F} ser plenamente fiel, $\psi'_{X'} \circ \psi_X = \text{Id}_X$. Analogamente, $\psi_X \circ \psi'_{X'} = \text{Id}_{X'}$, e $\psi'_{X'}$ é isomorfismo.

Defina $\psi = \{\psi_{X'}\}_{X \in \mathcal{C}}$. Mostraremos que ψ é uma transformação natural, ou seja, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\psi_{X'}} & \text{Id}_{\mathcal{C}}(X) \\ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(f) \downarrow & & \downarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}(f) \\ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(Y) & \xrightarrow{\psi_{Y'}} & \text{Id}_{\mathcal{C}}(Y) \end{array}$$

ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi_{X'}} & X \\ (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(f) \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\psi_{Y'}} & Y \end{array}$$

Note que pela forma que definimos a ação de \mathcal{G} nos morfismos temos que $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$ é o único morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))) &= \phi_{\mathcal{F}(Y)} \circ \mathcal{F}(f) \circ \phi_{\mathcal{F}(X)}^{-1} \\ &= \mathcal{F}(\psi_Y) \circ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\psi_X)^{-1} \\ &= \mathcal{F}(\psi_Y) \circ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\psi_X^{-1}) \\ &= \mathcal{F}(\psi_{Y'}^{-1}) \circ \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\psi_{X'}) \\ &= \mathcal{F}(\psi_{Y'}^{-1} \circ f \circ \psi_{X'}). \end{aligned}$$

E como \mathcal{F} é plenamente fiel, \mathcal{F} é injetora em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, então $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = \psi_{Y'}^{-1} \circ f \circ \psi_{X'}$. Assim, $\psi_{Y'} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f \circ \psi_{X'}$ e o diagrama comuta. Então, $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \text{Id}_{\mathcal{C}}$. Portanto, \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes. ■

Este Teorema será fundamental nesta monografia. Posteriormente, construiremos um funtor essencialmente sobrejetor e plenamente fiel da categoria dos fibrados vetoriais reais sobre um X compacto e Hausdorff para os $C(X)$ -módulos projetivos e finitamente gerados. Ou seja, concluiremos que essas duas categorias são equivalentes.

1.2 Alguns resultados topológicos

Os objetivos deste capítulo são: estabelecer que os teoremas que veremos mais adiante, que usam como hipótese que X é normal, valem para quando X é compacto e Hausdorff, apresentar resultados topológicos que serão usados mais adiante e introduzir o espaço métrico das matrizes (que será útil posteriormente). Ao leitor interessado no assunto, fica como referência (WILLARD, 2004).

Seja X um espaço topológico, para cada $F \subseteq X$, os símbolos U_F, V_F e W_F denotam abertos que contém F . Caso $F = \{x\}$, $U_x := U_{\{x\}}$. Além disso, $C(X)$ denota o anel de funções contínuas de X para \mathbb{R} .

Definição 1.2.1. *Uma cobertura aberta (fechada) C de um espaço topológico X é uma coleção de abertos (fechados) cuja união é igual a X . Dizemos que C cobre X .*

Definição 1.2.2. *Uma subcobertura C' de uma cobertura aberta C de um espaço topológico X é um subconjunto de C tal que C' cobre X .*

Definição 1.2.3. Dizemos que um espaço topológico X é compacto quando toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.

Definição 1.2.4. Um espaço topológico X é dito Hausdorff quando para quaisquer $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem U_x e U_y tais que

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Definição 1.2.5. Um espaço topológico X é dito regular quando para quaisquer $F \subseteq X$ fechado e $y \in X$ tal que $y \notin F$, existem U_y e U_F tais que

$$U_y \cap U_F = \emptyset.$$

Definição 1.2.6. Um espaço topológico X é dito normal quando para quaisquer fechados disjuntos $F, G \subseteq X$, existem U_F e U_G tais que

$$U_F \cap U_G = \emptyset.$$

Definição 1.2.7. Seja \mathcal{C} uma família de subconjuntos de X . Dizemos que \mathcal{C} é localmente finita se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U_x de x que intersecta apenas uma quantidade finita de elementos de \mathcal{C} .

Proposição 1.2.8. Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma família localmente finita, então $\overline{\bigcup_{i \in I} U_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$.

Demonstração. Sabemos que $\bigcup_{i \in I} \overline{U_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$. Agora, mostraremos a outra inclusão. Seja $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$, então para qualquer U_x , temos que $U_x \cap \bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset$. Como $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma família localmente finita, existe V_x que intersecta apenas um número finito de U_i 's. Além disso, como $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$, qualquer W_x intersecta pelo menos um número finito de U_i 's. , ou seja, qualquer vizinhança de x intersecta U_1, \dots, U_n . Então, $x \in \overline{U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n} = \overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_n} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{U_i}$. ■

Proposição 1.2.9. Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff. Então, X é normal.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que X é regular, para então, com esse resultado, mostrar que X é normal.

Seja $F \subseteq X$ fechado e $y \in X$ tal que $y \notin F$. Como X é Hausdorff, para qualquer $x \in F$ existe U_x tal que $y \notin \overline{U_x}$, logo, $y \notin \bigcup_{x \in F} \overline{U_x}$. Além disso, temos que $C = \{\{U_x\}_{x \in F}, X - F\}$ cobre X . Como X é compacto, tomando uma subcobertura finita de C de C , temos que C' é localmente finita.

Seja $C'' = \{U_x \in C' : U_x \cap F \neq \emptyset\}$. Obviamente, $F \subseteq \bigcup_{U_x \in C''} U_x$. Assim, $\bigcup_{U_x \in C''} \overline{U_x} \subseteq \bigcup_{x \in F} \overline{U_x}$ e $y \notin \bigcup_{U_x \in C''} \overline{U_x}$. Pela Proposição 1.2.8, $y \notin \bigcup_{U_x \in C''} \overline{U_x} = \overline{\bigcup_{U_x \in C''} U_x}$. Portanto, existe U_y tal que $U_y \cap \bigcup_{U_x \in C''} U_x = \emptyset$, ou seja, X é regular.

Sejam $F, G \subseteq X$ fechados disjuntos. Como X é regular, para qualquer $y \in G$, existem U_y, U_F disjuntos. Assim, $F \subseteq X - (\bigcup_{y \in G} \overline{U_y})$, em que cada U_y satisfaz a propriedade citada. Seja $C = \{\{U_y\}_{y \in G}, X - G\}$ cobertura aberta de X . Como X é compacto, tome uma subcobertura finita C' de C . Seja $C'' = \{U_y \in C' : U_y \cap G \neq \emptyset\}$, que cobre G . Assim, $\bigcup_{U_y \in C''} \overline{U_y} \subseteq \bigcup_{y \in G} \overline{U_y}$ e, pela Proposição 1.2.8, $\bigcup_{U_y \in C''} \overline{U_y} = \overline{\bigcup_{U_y \in C''} U_y}$, temos que $\overline{\bigcup_{U_y \in C''} U_y} \subseteq \bigcup_{y \in G} \overline{U_y}$, daí $F \subseteq X - (\overline{\bigcup_{U_y \in C''} U_y})$. Portanto, existe U_F tal que $U_F \cap \bigcup_{U_y \in C''} U_y = \emptyset$. Logo, X é normal. ■

Definição 1.2.10. *Sejam $\{Y_i\}_{i \in I}$ espaços topológicos, com I finito. Definimos o espaço produto $\prod_{i \in I} Y_i$ com a menor topologia que faz com que as funções de projeção nos espaços coordenados sejam contínuas.*

Proposição 1.2.11. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y$ funções. Então, a função $(f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \prod_{i=1}^n Y$, dada por $(f_1, \dots, f_n)(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, é contínua se, e somente se, cada f_i é contínua.*

Definição 1.2.12. *Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de um espaço topológico X . Um conjunto de funções contínuas $\{\phi_i : X \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ é chamado partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$ quando para qualquer $x \in X$:*

- Apenas um número finito de $\phi_i(x)$ são não nulas,
- $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$,
- Para todo $i \in I$, o suporte $\text{supp} \phi_i := \overline{\{x \in X : \phi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i$.

Lema 1.2.13 (Lema de Urysohn). *Se X é normal e $A, B \subseteq X$ são fechados disjuntos, então existe*

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

contínua, tal que

$$f|_A = 0 \quad \text{e} \quad f|_B = 1.$$

Proposição 1.2.14. *Seja X um espaço topológico Compacto e Hausdorff e $\{U_i\}_i$ uma cobertura aberta finita de X . Então, existe uma cobertura aberta $\{V_i\}_i$ de X , tal que para cada i , $\overline{V_i} \subseteq U_i$.*

Proposição 1.2.15. *Toda cobertura aberta finita de um espaço topológico compacto e Hausdorff possui uma partição da unidade subordinada a ela.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}_i^n$ uma cobertura aberta finita de um espaço topológico compacto e Hausdorff X . Pela Proposição 1.2.14, existe uma cobertura aberta $\{V_i\}_i$ de X tal que $\overline{V_i} \subseteq U_i$, para cada i . Como X é normal e $\overline{V_i}$ e $X - U_i$ são fechados disjuntos, existe W_i aberto tal que $\overline{V_i} \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$. Assim, $\{W_i\}_i$ é uma cobertura aberta de X . Pelo Lema de Urysohn, existe $\psi_i : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $\psi|_{\overline{V_i}} = 1$ e $\psi|_{X - W_i} = 0$. Então, $\text{supp}\psi_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$.

Defina $\phi_i : X \rightarrow [0, 1]$ por $\phi_i = \frac{\psi_i}{\sum_{j=1}^n \psi_j}$, para todo $i = 1, \dots, n$. Para cada $x \in X$, existe V_i tal que $x \in V_i$, ou seja, $\psi_i(x) = 1$ e $\sum_{j=1}^n \psi_j(x) > 0$. Assim, ϕ_i está bem definida. Mostremos que $\{\phi_i\}_i$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_i$.

Cada ϕ_i é contínua por ser composição de contínuas. Claramente, um número finito de $\phi_i(x)$ são não nulas. Além disso, para qualquer $x \in X$,

$$\sum_i \phi_i(x) = \sum_i \left(\frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^n \psi_j(x)} \right) = \frac{\sum_i \psi_i(x)}{\sum_{j=1}^n \psi_j(x)} = 1.$$

Para cada i , $\text{supp}\phi_i = \text{supp}\psi_i \subseteq U_i$. Portanto, $\{\phi_i\}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_i$. ■

Proposição 1.2.16. *Seja X compacto e Hausdorff, $\{\phi_i\}_i$ uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta finita $\{U_i\}_i$ de X , e para cada i , seja $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ nula fora de U_i e contínua em U_i . Então,*

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = \sum_i \phi_i(x) f_i(x)$$

é contínua.

Demonstração. Primeiro, mostremos que a função $(\phi_i f_i)(x) = \phi_i(x) f_i(x)$ é contínua. Sabemos que f_i e ϕ_i são contínuas em U_i . Assim, $\phi_i f_i$ é contínua em U_i . Nos resta mostrar que também será contínua em $X - U_i$.

Seja $x \in X - U_i$ e $\epsilon > 0$. Como $X - \text{supp}\phi_i$ é aberto, existe $U_x \subseteq X - \text{supp}\phi_i$. Assim, para qualquer $y \in U_x$,

$$|\phi_i(y) f_i(y) - \phi_i(x) f_i(x)| = |\phi_i(y) f_i(y) - 0| = |0 \cdot f_i(y)| = 0 < \epsilon.$$

Então, $\phi_i f_i$ é contínua em $X - U_i$. Portanto, $\phi_i f_i$ é contínua.

Como f é soma de contínuas, temos que f é contínua. ■

Teorema 1.2.17 (Teorema da colagem de funções contínuas versão fechados). *Sejam X e Y espaços topológicos, A_1 e A_2 fechados de X tais que $A_1 \cup A_2 = X$. Se*

$$f_1 : A_1 \longrightarrow Y \quad e \quad f_2 : A_2 \longrightarrow Y$$

são contínuas, tais que $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$, então

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f(x) := f_i(x) \quad \text{para } x \in A_i$$

é contínua.

Observação 1.2.18. *A classe de todos os espaços topológicos forma uma categoria, usualmente denotada por **Top**. Nesta categoria os objetos são os próprios espaços topológicos, os morfismos são as funções contínuas e os isomorfismos são chamados de homeomorfismos.*

1.2.1 O espaço das matrizes

Agora, introduziremos o espaço vetorial normado das matrizes de tamanho $m \times n$ de coeficientes reais, denotado por $M_{m,n}(\mathbb{R})$. As proposições a seguir serão fundamentais na Seção 2.1.

Definiremos a norma usual em $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sua *Norma de Frobenius*, denotada por $\|A\|_F$, é definida como:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Assim, $M_{m,n}(\mathbb{R})$ é um espaço topológico com a topologia induzida pela norma de Frobenius.

Proposição 1.2.19. *Sejam X um espaço topológico e $a_{ij} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções. Então, a função $A : X \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ dada por $A(y) = [a_{ij}(y)]_{ij}$ é contínua se, e somente se, cada a_{ij} é contínua.*

Proposição 1.2.20. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função determinante, definida em $M_n(\mathbb{R})$, é contínua.*

Definição 1.2.21. *Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, por matriz adjunta clássica de A entende-se a matriz $\text{adj}(A) \in M_n(\mathbb{R})$ dada pela transposta da matriz dos cofatores de A , isto é,*

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{1,1} & \tilde{A}_{2,1} & \cdots & \tilde{A}_{n,1} \\ \tilde{A}_{1,2} & \tilde{A}_{2,2} & \cdots & \tilde{A}_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{1,n} & \tilde{A}_{2,n} & \cdots & \tilde{A}_{n,n} \end{pmatrix},$$

em que $\tilde{A}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ e $A_{i,j}$ é obtida removendo a i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Proposição 1.2.22. Para qualquer $A \in M_n(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, se A é invertível então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Proposição 1.2.23. A função $\text{adj}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, dada por $A \mapsto \text{adj}(A)$, é contínua.

Proposição 1.2.24. Seja X um espaço topológico e $A: X \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ uma função contínua, em que $GL(n, \mathbb{R})$ representa as matrizes $n \times n$ de coeficientes reais e invertíveis. Então, $A^{-1}: X \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ dada por $A^{-1}(y)$ é contínua.

Demonstração. Pela Proposição 1.2.22, $A^{-1}(y) = \frac{1}{\det(A(y))} \text{adj}(A(y))$, e pelas Proposições 1.2.20 e 1.2.23, temos que $A^{-1}(y)$ é contínua. ■

Proposição 1.2.25. Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, a função que leva uma matriz de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ em sua transposta é contínua.

Proposição 1.2.26. Para quaisquer $m, n, k \in \mathbb{N}$, o produto de matrizes, que atua em $M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,k}(\mathbb{R})$, é uma função contínua.

Proposição 1.2.27. Toda função que extrai de uma matriz em $M_{m,n}(\mathbb{R})$ uma submatriz de linhas e colunas pré-fixadas é contínua.

Proposição 1.2.28. A função $\text{posto}: M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{N}$, dada pelo posto de uma matriz em $M_{m,n}(\mathbb{R})$, é semicontínua inferiormente, isto é, para qualquer $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, existe U_A tal que para qualquer $B \in U_A$, $\text{posto}(B) \geq \text{posto}(A)$.

Demonstração. Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tal que $\text{posto}(A) = k$. Então, existe uma submatriz A' de A de tamanho $k \times k$ com $\det(A') \neq 0$.

Pelas Proposições 1.2.20 e 1.2.27, a função determinante e a função que extrai a submatriz correspondente são contínuas. Assim, existe uma vizinhança de A onde o determinante da submatriz correspondente permanece não nulo. Ou seja, o posto de qualquer matriz nessa vizinhança é pelo menos k . Então, para qualquer matriz B nessa vizinhança, $\text{posto}(B) \geq k = \text{posto}(A)$. Portanto, a função posto é semicontínua inferiormente. ■

1.3 R -módulos

Nesta seção, faremos uma breve introdução à teoria de R -módulos. Ao leitor interessado no assunto, sugerimos como referência (MILIES, 1972).

Definição 1.3.1. *Seja R um anel com unidade. Um R -módulo (unital) à esquerda M consiste em um grupo abeliano $(M, +)$ e uma operação*

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M,$$

satisfazendo, para quaisquer $m, n \in M$ e $r, s \in R$, as seguintes propriedades:

$$r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n,$$

$$(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m,$$

$$(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m),$$

$$1_R \cdot m = m.$$

A definição de R -módulo à direita é análoga. A partir de agora, consideraremos apenas R -módulos à esquerda.

Definição 1.3.2. *Dados R -módulos M e N , um R -morfismo $f : M \longrightarrow N$ é uma função tal que, para quaisquer $m, n \in M$ e $r \in R$,*

$$f(m + n) = f(m) + f(n), \quad e \quad f(r \cdot m) = r \cdot f(m).$$

Seja R um anel, ${}_R\mathcal{M}$ é a categoria dos R -módulos com os morfismos definidos acima. E, assim como na categoria dos grupos, anéis e espaços vetoriais, basta que um morfismo seja bijetor para estabelecer um isomorfismo.

Definição 1.3.3. *Dado R -módulo M , um subconjunto $N \neq \emptyset$ de M é um submódulo de M quando para quaisquer $m, n \in N$ e $r \in R$, $m + n \in N$ e $rn \in N$.*

Proposição 1.3.4. *Seja M um R -módulo e I um ideal de R . Então, IM , definido por combinações lineares de elementos de M com coeficientes em I , é um submódulo de M .*

Definição 1.3.5. *Dado N um submódulo de um R -módulo M , definimos o módulo quociente M/N como o conjunto dos conjuntos da forma*

$$m + N := \{m + n : n \in N\}, \quad m \in M,$$

com as operações definidas por

$$(m + N) + (n + N) := (m + n) + N, \quad m, n \in M$$

e

$$r(m + N) := rm + N, \quad r \in R.$$

Denotamos $\bar{m} := m + N$. Note que a projeção canônica

$$\pi : M \longrightarrow M/N, \quad \pi(m) := \bar{m},$$

é um R -morfismo.

Definição 1.3.6. Dado R -módulo M e $S \subseteq M$, dizemos que S é linearmente independente (L.I.) se, para quaisquer $s_1, \dots, s_n \in S$ e $r_1, \dots, r_n \in R$, a igualdade

$$r_1 s_1 + \dots + r_n s_n = 0_M$$

implica que $r_1 = \dots = r_n = 0_R$.

Definição 1.3.7. Um R -módulo M é dito livre quando existe um subconjunto $S \subseteq M$ linearmente independente que gera M , ou seja, para qualquer $m \in M$, existem $r_1, \dots, r_n \in R$ e $s_1, \dots, s_n \in S$ tais que

$$m = r_1 s_1 + \dots + r_n s_n.$$

Definição 1.3.8. Dizemos que um R -módulo M é finitamente gerado quando existem $m_1, \dots, m_n \in M$ tais que para qualquer $m \in M$ existem $r_1, \dots, r_n \in R$ tais que

$$m = r_1 m_1 + \dots + r_n m_n.$$

Definição 1.3.9. Dados R -módulos M e N . Definimos sua soma direta (externa) pelo R -módulo $M \oplus N$, constituído por $M \times N$ com as operações definidas componente a componente. Além disso, dizemos que M e N (e os R -módulos isomorfos a eles) são somando diretos de $M \oplus N$.

Definição 1.3.10. Dizemos que um R -módulo P é projetivo se existe um R -módulo livre F e um R -módulo K tais que $F \cong P \oplus K$.

Note que os R -módulos projetivos e finitamente gerados formam uma subcategoria de ${}_R\mathcal{M}$.

Proposição 1.3.11. Os R -módulos $R^n := \bigoplus_1^n R$, em que $n \in \mathbb{N}$, são livres, projetivos e finitamente gerados.

Proposição 1.3.12. Isomorfismo de R -módulos preserva projetividade, geração finita e a propriedade de ser livre.

Proposição 1.3.13. Todo somando direto de R -módulo projetivo finitamente gerado é projetivo e finitamente gerado.

Proposição 1.3.14. Se P é um R -módulo projetivo e finitamente gerado (n geradores), então P é somando direto de R^n .

Proposição 1.3.15. Seja N um somando direto de um R -módulo M . Então, existe um R -morfismo idempotente $\phi : M \rightarrow M$ tal que

$$\text{im } \phi \cong N.$$

Teorema 1.3.16 (Teorema do isomorfismo). *Seja $f : M \rightarrow N$ um R -morfismo. Então, existe um único R -isomorfismo $\phi : M/\ker f \rightarrow \text{im } f$ tal que o diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \text{im } f \\ \downarrow \pi & \nearrow \phi & \\ M/\ker f & & \end{array}$$

Em particular, $M/\ker f \cong \text{im } f$.

Proposição 1.3.17. *Sejam $f : M \rightarrow N$ um R -morfismo e Q um submódulo de M contido em $\ker f$. Então, existe um único R -morfismo \tilde{f} tal que o diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{f} & \\ M/Q & & \end{array}$$

2 Fibrados vetoriais

2.1 Introdução

O objetivo desta seção é introduzir a categoria dos fibrados vetoriais, com foco em seções e morfismos, e apresentar resultados que serão utilizados frequentemente no decorrer desta monografia. Ao leitor interessado na Teoria de Fibrados, sugerimos como referência (LEE, 2013). A fim de facilitar as notações, denotaremos π_1 e π_2 como as projeções na primeira e segunda entrada, respectivamente, independente do domínio.

Definição 2.1.1. *Um fibrado vetorial real sobre um espaço topológico consiste de um espaço topológico ξ , chamado espaço total, um espaço topológico X , chamado de espaço base, e uma função contínua sobrejetora*

$$\pi : \xi \longrightarrow X,$$

chamada de projeção, tais que:

- Para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} , o qual chamaremos de fibra sobre x , e denotaremos por F_x ou $F_x(\xi)$.
- Para qualquer $x \in X$, existem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, U_x e um homeomorfismo

$$\phi : \pi^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times \mathbb{R}^n,$$

chamado de trivialização local em x (ou sobre U_x), tal que para cada $y \in U_x$, a restrição $\phi|_{F_y}$ é um isomorfismo entre a fibra F_y e $\{y\} \times \mathbb{R}^n$. Além disso, $\pi = \pi_1 \circ \phi$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\phi} & U_x \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U_x & & \end{array}$$

Observação 2.1.2. *Note que pela definição acima, a dimensão das fibras de um fibrado vetorial é localmente constante, ou seja, quando X é conexo, a dimensão das fibras é constante.*

Adotaremos, por conveniência, algumas simplificações. Escreveremos apenas fibrado vetorial e denotaremos cada fibrado por seu espaço total. Salvo menção em contrário, X denotará sempre o espaço base, e π ou π_ξ (com relação ao fibrado ξ) denotarão sempre a projeção.

Exemplo 2.1.3. $\zeta = X \times \mathbb{R}^n$ com a projeção $\pi(x, v) = x$ é um fibrado vetorial sobre X , chamado de fibrado vetorial trivial.

Exemplo 2.1.4. O fibrado tangente tem uma variedade diferenciável M como espaço base, a união dos espaços tangentes $\bigcup_{x \in M} T_x M$ como espaço total, e a projeção dada por $\pi(v) = x$, em que $v \in T_x M$.

Exemplo 2.1.5. A faixa de Mobius tem \mathbb{S}^1 como espaço base, espaço total dado por $([0, 1] \times \mathbb{R}) / \sim$ com a seguinte relação de equivalência: $(0, v) \sim (1, -v)$, para todo $v \in \mathbb{R}$. A projeção é dada por $\pi(t, v) = f(t)$, em que f é o homeomorfismo entre $[0, 1] / \sim$, com $0 \sim 1$, e \mathbb{S}^1 .

Definição 2.1.6. Dados ξ e η fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base X , um morfismo f de ξ para η é uma função contínua $f : \xi \rightarrow \eta$ tal que $\pi_\eta \circ f = \pi_\xi$, e para cada $x \in X$, a restrição $f|_{F_x(\xi)} : F_x(\xi) \rightarrow F_x(\eta)$ é uma transformação linear.

Desta forma, podemos estabelecer a categoria dos fibrados vetoriais sobre X . Em que os objetos são os fibrados vetoriais sobre X , e os morfismos são os morfismos definidos acima.

Proposição 2.1.7. Seja $\phi : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$ uma trivialização local de um fibrado vetorial ξ em x . Então, para qualquer $V_x \subseteq U_x$, $\psi : \pi^{-1}(V_x) \rightarrow V_x \times \mathbb{R}^n$, em que $\psi = \phi|_{\pi^{-1}(V_x)}$, é uma trivialização local em x .

Demonstração. Precisamos verificar que ψ satisfaz todas as propriedades de uma trivialização local de ξ em x .

Como $\psi = \phi|_{\pi^{-1}(V_x)}$, temos que $\pi_1 \circ \psi = \pi_1 \circ \phi|_{\pi^{-1}(V_x)} = \pi$. Agora, mostraremos que $\psi : \pi^{-1}(V_x) \rightarrow V_x \times \mathbb{R}^n$ está bem definida. Seja $v \in \pi^{-1}(V_x)$, então $\pi(v) \in V_x$. E como $\pi_1 \circ \psi(v) = \pi_1 \circ \phi(v) = \pi(v)$, temos que $\psi(v) \in V_x \times \mathbb{R}^n$, e ψ está bem definida.

Seja $(y, v) \in V_x \times \mathbb{R}^n \subseteq U_x \times \mathbb{R}^n$. Assim, $(y, v) \in U_x \times \mathbb{R}^n$. Visto que ϕ é uma bijeção (e, portanto, sobrejetora), existe um único $w \in \pi^{-1}(U_x)$ tal que $\phi(w) = (y, v)$. Para este w , temos que $\pi(w) = \pi_1(\phi(w)) = \pi_1(y, v) = y$. Como $y \in V_x$, segue que $w \in \pi^{-1}(V_x)$. Logo, w pertence ao domínio de ψ e $\psi(w) = \phi(w) = (y, v)$. Portanto, ψ é sobrejetora.

Como ψ é a restrição de um homeomorfismo, ψ é um homeomorfismo. Finalmente, para qualquer $y \in V_x$, $\psi|_{F_y} = \phi|_{F_y}$ é um isomorfismo linear.

Concluimos que ψ é uma trivialização local sobre V_x . ■

Proposição 2.1.8. Seja $f : \xi \rightarrow \eta$ um morfismo de fibrados vetoriais tal que f é um isomorfismo linear em cada fibra. Então, f é um isomorfismo.

Demonstração. Sabemos que a função inversa f^{-1} é um isomorfismo em cada fibra. Assim, só nos resta mostrar que f^{-1} é contínua.

Seja $v \in \eta$ tal que $\pi_\eta(v) = x$. Sabemos que existem vizinhanças de x que satisfazem a trivialização local com relação a ξ e η . Seja U_x a intersecção de ambas as vizinhanças. Assim, pela Proposição 2.1.7, existem trivializações locais de ambos os fibrados sobre U_x . Mostraremos que f^{-1} é contínua em $\pi_\eta^{-1}(U_x)$.

Seja $\phi : \pi_\xi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$ e $\psi : \pi_\eta^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$ as trivializações citadas (os naturais são os mesmos pois f é isomorfismo nas fibras). Assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_\xi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{f} & \pi_\eta^{-1}(U_x) \\ \phi^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi \\ U_x \times \mathbb{R}^n & & U_x \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Como em cada fibra, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ é uma transformação linear, podemos definir a função $y \mapsto M(y)$, em que $M(y)$ é a matriz que representa $\psi \circ f \circ \phi$ em $\{y\} \times \mathbb{R}^n$ com relação às bases canônicas. Assim, temos que $\psi(f(\phi^{-1}(y, u))) = (y, M(y) \cdot u)$.

Seja e_j um vetor da base canônica de \mathbb{R}^n . Note que $y \mapsto \psi(f(\phi^{-1}(y, e_j))) = \psi(f(\phi^{-1}(\iota_j(y))))$ é contínua, em que $\iota_j(y) = (y, e_j)$. Além disso, $\psi(f(\phi^{-1}(y, e_j))) = (y, M(y) \cdot e_j)$ e pela Proposição 1.2.11, $M(y) \cdot e_j$ é contínua. Note que $M(y) \cdot e_j$ é a j -ésima coluna de $M(y)$ e novamente pela Proposição 1.2.11, cada $M_{ij}(y)$ é contínua. Pela Proposição 1.2.19, $y \mapsto M(y)$ é contínua.

Como f é um isomorfismo nas fibras, temos que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ será um isomorfismo nas fibras. Então, $M(y)$ é inversível e pela Proposição 1.2.24, $y \mapsto M^{-1}(y)$ é contínua. Assim, como $\phi(f^{-1}(\psi^{-1}(y, u))) = (y, M^{-1}(y) \cdot u)$, temos que $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ é contínua. Então, $\phi^{-1} \circ \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi = f^{-1}$ é contínua em $\pi_\eta^{-1}(U_x)$. Logo, f^{-1} é contínua.

Portanto, f é um isomorfismo de fibrados vetoriais. ■

Definição 2.1.9. Um subfibrado vetorial η de um fibrado vetorial ξ é um subconjunto $\eta \subseteq \xi$ que com a restrição da projeção $\pi|_\eta$ é um fibrado vetorial sobre o mesmo espaço base.

Observação 2.1.10. A restrição de um morfismo de fibrados vetoriais a um subfibrado é também um morfismo de fibrados vetoriais.

Definição 2.1.11. Dado um morfismo entre fibrados vetoriais $f : \xi \rightarrow \eta$, o núcleo (kernel) de f é o conjunto de elementos de ξ que são levados por f no vetor nulo de sua respectiva fibra. Denotaremos tal conjunto por $\ker f$.

Proposição 2.1.12. Um morfismo de fibrados vetoriais $f : \xi \rightarrow \eta$ é injetor se, e somente se, f restrita a cada fibra de ξ é injetora.

Demonstração. Suponha que f é injetora. Para cada $x \in X$, f restrita a $F_x(\xi)$ é injetora, pois é restrição de uma função injetora.

Considere π_ξ e π_η as projeções de ξ e η , respectivamente. Suponha que para cada $x \in X$, $f|_{F_x(\xi)}$ é injetora. Sejam $u, v \in \xi$ tais que $f(u) = f(v)$. Então,

$$\pi_\xi(u) = \pi_\eta(f(u)) = \pi_\eta(f(v)) = \pi_\xi(v).$$

Assim, u e v estão na mesma fibra de ξ . E, como f restrita a esta fibra é injetora, segue que $u = v$. Portanto, f é injetora. ■

2.1.1 Seções

Agora, apresentaremos o conceito de seção de um fibrado vetorial. Na prática, uma seção consiste em escolher localmente um vetor de cada fibra de forma contínua.

Definição 2.1.13. *Dado um fibrado vetorial ξ e $Y \subseteq X$, uma seção s de ξ sobre Y é uma função contínua $s : Y \rightarrow \xi$ que leva cada elemento de Y em sua respectiva fibra, ou seja, $\pi \circ s = \text{Id}_Y$.*

Dizemos que s é uma seção global caso seja definida sobre X . E, caso s seja uma seção sobre um aberto, dizemos que s é uma seção local.

Proposição 2.1.14. *Seja $\zeta = X \times \mathbb{R}^n$ um fibrado vetorial trivial. Então, qualquer seção de ζ sobre $Y \subseteq X$ é da forma $(\text{Id}_Y, f_1, \dots, f_n)$, em que cada $f_i \in C(Y)$.*

Demonstração. Seja s uma seção de ζ sobre $Y \subseteq X$. Para qualquer $x \in Y$, temos que

$$s(x) = (y, a_1, \dots, a_n) \in X \times \mathbb{R}^n, \text{ para algum } y \in X.$$

Assim, $x = \pi(s(x)) = \pi(y, a_1, \dots, a_n) = y$. Ou seja, $y = x$ e s é da forma

$$(\text{Id}_Y, f_1, \dots, f_n),$$

em que cada f_i é uma função de Y para \mathbb{R} . Como s é contínua, pela Proposição 1.2.11, temos que $f_1, \dots, f_n \in C(X)$, e o resultado segue. ■

Exemplo 2.1.15. *Para toda seção global s da faixa de Mobius, existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $s(x) = 0_{F_x}$.*

Exemplo 2.1.16. *Seja M uma variedade diferenciável. Todo campo vetorial $X : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x M$ é uma seção do fibrado tangente de M .*

Como vemos em Álgebra Linear, é possível construir bases em espaços de dimensão finita. Na próxima proposição, faremos o mesmo localmente para as fibras de um fibrado vetorial, garantindo que as bases escolhidas variem continuamente ao longo de uma vizinhança de um ponto do espaço base.

Proposição 2.1.17. *Seja ξ um fibrado vetorial, $x \in X$ e U_x que garanta a trivialização local em x . Então, existem seções s_1, \dots, s_n de ξ sobre U_x tais que para qualquer $y \in U_x$, $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ é uma base para F_y . Tal conjunto de seções $\{s_1, \dots, s_n\}$ é chamado de uma base local de ξ sobre U_x .*

Demonstração. Seja $\phi : \pi^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$, uma trivialização local de ξ em x .

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Definimos as aplicações

$$s_i : U_x \longrightarrow \pi^{-1}(U_x), \quad s_i(y) = \phi^{-1}(y, e_i).$$

Primeiro, mostremos que s_1, \dots, s_n são seções de ξ sobre U_x .

Cada s_i é contínua, pois é a composição de funções contínuas (a inclusão $y \mapsto (y, e_i)$ e ϕ^{-1}). Além disso, como $(y, e_i) \in \{y\} \times \mathbb{R}^n$ e ϕ^{-1} estabelece um isomorfismo entre $\{y\} \times \mathbb{R}^n$ e F_y , temos que $\phi^{-1}(y, e_i) \in F_y$. Logo,

$$\pi(s_i(y)) = \pi(\phi^{-1}(y, e_i)) = y.$$

Portanto, s_1, \dots, s_n são seções de ξ sobre U_x . Agora, mostremos que para cada $y \in U_x$, $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ é uma base de F_y . Fixemos um $y \in U_x$. Seja $v \in F_y$. Como $\phi|_{F_y}$ é um isomorfismo entre F_y e $\{y\} \times \mathbb{R}^n$, existe um único $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(v) = (y, w)$, ou seja, $v = \phi^{-1}(y, w)$. Como $\{e_i\}$ é uma base de \mathbb{R}^n , podemos escrever $w = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ para escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pela linearidade da bijeção $\phi|_{F_y}^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow F_y$, temos:

$$\begin{aligned} v &= \phi^{-1}(y, w) \\ &= \phi^{-1}\left(y, \sum_{i=1}^n a_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \phi^{-1}(y, e_i) = \sum_{i=1}^n a_i s_i(y). \end{aligned}$$

Logo, $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ gera o espaço F_y . Para a independência linear, sejam $a_1, \dots, a_n \in$

\mathbb{R} e suponha que $\sum_{i=1}^n a_i s_i(y) = 0_{F_y}$. Assim,

$$\begin{aligned} 0_{F_y} &= \sum_{i=1}^n a_i s_i(y) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \phi^{-1}(y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \phi^{-1}(y, a_i e_i) \\ &= \phi^{-1} \left(y, \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) \\ &= \phi|_{F_y}^{-1} \left(y, \sum_{i=1}^n a_i e_i \right). \end{aligned}$$

E como $\phi|_{F_y}^{-1}$ é injetora,

$$\left(y, \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = (y, 0_{\mathbb{R}^n}).$$

Isso implica que $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de \mathbb{R}^n , seus vetores são linearmente independentes, e portanto, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Assim, $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ é um conjunto linearmente independente e, como também gera F_y , é uma base para F_y . ■

Agora, iremos trabalhar o conceito de soma direta em fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base, que será útil para mostrarmos que combinações lineares de seções são seções, em que os coeficientes são funções contínuas do espaço base para os reais.

Definição 2.1.18. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre X . A soma direta $\xi \oplus \eta$ é definida por*

$$\xi \oplus \eta = \{(e_1, e_2) \in \xi \times \eta : \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2)\},$$

em que $\xi \oplus \eta$ é equipado com a topologia induzida pela topologia produto de $\xi \times \eta$. A projeção é dada por

$$\pi : \xi \oplus \eta \longrightarrow X, \quad \pi(e_1, e_2) = \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2).$$

Proposição 2.1.19. *$\xi \oplus \eta$ é um fibrado vetorial sobre X .*

Demonstração. Note que $\pi = \pi_\xi \circ \pi_1$. Assim, π é contínua e sobrejetora, pois é a composição de contínuas e sobrejetoras. Além disso, para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned} F_x(\xi \oplus \eta) &= \pi^{-1}(x) \\ &= \{(e_1, e_2) \in \xi \oplus \eta : \pi(e_1, e_2) = x\} \\ &= \{(e_1, e_2) \in \xi \times \eta : \pi_\xi(e_1) = \pi_\eta(e_2) = x\} \\ &= \{e_1 \in \xi : \pi_\xi(e_1) = x\} \times \{e_2 \in \eta : \pi_\eta(e_2) = x\} \\ &= F_x(\xi) \oplus F_x(\eta). \end{aligned}$$

Como $F_x(\xi)$ e $F_x(\eta)$ são espaços vetoriais de dimensão finita sobre \mathbb{R} , seu produto $F_x(\xi \oplus \eta)$ também é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} .

Sejam $x \in X$, e V_x, W_x os abertos que garantem as trivializações locais para ξ e η , respectivamente. Tome $U_x = V_x \cap W_x$. Pela Proposição 2.1.7, podemos obter trivializações locais ϕ_ξ e ϕ_η sobre U_x de ξ e η , respectivamente.

Para qualquer $u = (e_1, e_2) \in \pi^{-1}(U_x)$, existe um $y \in U_x$ tal que $e_1 \in F_y(\xi)$ e $e_2 \in F_y(\eta)$. Usando as trivializações locais, podemos escrever

$$e_1 = \phi_\xi^{-1}(y, v) \quad \text{e} \quad e_2 = \phi_\eta^{-1}(y, w),$$

para únicos $v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$. Assim, $u = (\phi_\xi^{-1}(y, v), \phi_\eta^{-1}(y, w))$.

Definimos a trivialização local em x por $\phi : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, em que

$$\phi(u) = \phi(e_1, e_2) = \phi(\phi_\xi^{-1}(y, v), \phi_\eta^{-1}(y, w)) = (y, (v, w)).$$

Assim, $\phi = (\pi_1 \circ \phi_\xi \circ \pi_1, (\pi_2 \circ \phi_\xi \circ \pi_1, \pi_2 \circ \phi_\eta \circ \pi_2))$.

Verifiquemos que ϕ satisfaz as condições de trivialização local em x . A comutatividade $\pi_1 \circ \phi = \pi$ é satisfeita, pois para $u = (\phi_\xi^{-1}(y, v), \phi_\eta^{-1}(y, w))$, temos que

$$\pi_1(\phi(u)) = \pi_1(y, (v, w)) = y = \pi_\xi(\phi_\xi^{-1}(y, v)) = \pi(u).$$

Ou seja, $\pi_1 \circ \phi = \pi$.

Mostremos que ϕ é bijetora.

- **Sobrejetividade:** Para qualquer $(y, (v, w)) \in U_x \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$,

$$(\phi_\xi^{-1}(y, v), \phi_\eta^{-1}(y, w)) \in F_y(\xi) \oplus F_y(\eta) \subseteq \pi^{-1}(U_x)$$

e é levado por ϕ em $(y, (v, w))$.

- **Injetividade:** Suponha que $\phi(\phi_\xi^{-1}(y, v), \phi_\eta^{-1}(y, w)) = \phi(\phi_\xi^{-1}(y', v'), \phi_\eta^{-1}(y', w'))$. Então, $(y, (v, w)) = (y', (v', w'))$, o que implica $y = y', v = v'$ e $w = w'$. Disso segue que

$$(\phi_\xi^{-1}(y, v), \phi_\eta^{-1}(y, w)) = (\phi_\xi^{-1}(y', v'), \phi_\eta^{-1}(y', w')).$$

Portanto, ϕ é bijetora. Note que

$$\phi^{-1} = (\phi_\xi^{-1} \circ (\pi_1, \pi_1 \circ \pi_2), \phi_\eta^{-1} \circ (\pi_1, \pi_2 \circ \pi_2)).$$

Ou seja, ϕ e ϕ^{-1} tem suas componentes contínuas, e pela Proposição 1.2.11, ϕ e ϕ^{-1} são contínuas. Portanto, ϕ é um homeomorfismo.

Finalmente, para qualquer $y \in U_x$,

$$\phi|_{F_y(\xi \oplus \eta)} = (y, (\pi_2 \circ \phi_\xi|_{F_y(\xi)} \circ \pi_1, \pi_2 \circ \phi_\eta|_{F_y(\eta)} \circ \pi_2)).$$

Como $\pi_2 \circ \phi_\xi|_{F_y(\xi)}$ é isomorfismo linear entre $F_y(\xi)$ e \mathbb{R}^n e $\pi_2 \circ \phi_\eta|_{F_y(\eta)}$ é isomorfismo entre $F_y(\eta)$ e \mathbb{R}^m , temos que $(\pi_2 \circ \phi_\xi|_{F_y(\xi)} \circ \pi_1, \pi_2 \circ \phi_\eta|_{F_y(\eta)} \circ \pi_2)$ é isomorfismo entre $F_y(\xi) \times F_y(\eta) = F_y(\xi \oplus \eta)$ e \mathbb{R}^{n+m} . Assim, $\phi|_{F_y(\xi \oplus \eta)}$ é isomorfismo entre $F_y(\xi \oplus \eta)$ e $\{y\} \times \mathbb{R}^{n+m}$. ■

Proposição 2.1.20. *Seja ξ um fibrado vetorial. As operações $+ : \xi \oplus \xi \rightarrow \xi$ dada pela soma em cada fibra, e $\cdot : \mathbb{R} \times \xi \rightarrow \xi$ dada pela ação de \mathbb{R} em cada fibra são contínuas.*

Demonstração. Considere π e π_ξ as projeções dos fibrados $\xi \oplus \xi$ e ξ , respectivamente. Primeiro, mostraremos que $+$ é contínua. Seja $(v, w) \in \xi \oplus \xi$, $x = \pi(v, w)$ e ϕ uma trivialização local de ξ sobre algum U_x . Para provar que $+$ é contínua em (v, w) , mostraremos que $+$ é contínua em $\pi^{-1}(U_x)$.

Como vimos na Proposição 2.1.19, a trivialização local ϕ de ξ sobre U_x induz uma trivialização de $\xi \oplus \xi$ sobre U_x :

$$\Phi : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

definida por $\Phi(v, w) = (\pi_\xi(v), \pi_2(\phi(v)), \pi_2(\phi(w)))$.

Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{+} & \pi_\xi^{-1}(U_x) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \phi \\ U_x \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{+_{\text{loc}}} & U_x \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

em que $+_{\text{loc}} = \phi \circ + \circ \Phi^{-1}$. Seja $(y, (v, w)) \in U_x \times (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} +_{\text{loc}}(y, (v, w)) &= (\phi \circ + \circ \Phi^{-1})(y, (v, w)) \\ &= \phi(+(\Phi^{-1}(y, (v, w)))) \\ &= \phi(+(\phi^{-1}(y, v), \phi^{-1}(y, w))) \\ &= \phi(\phi^{-1}(y, v) + \phi^{-1}(y, w)) \\ &= \phi(\phi^{-1}(y, v)) + \phi(\phi^{-1}(y, w)) \\ &= (y, v) + (y, w) \\ &= (y, (v + w)). \end{aligned}$$

Assim, $+_{\text{loc}}(y, (v, w)) = (y, v + w)$. Ou seja, $+_{\text{loc}} = (\pi_1, \pi_1 \circ \pi_2 + \pi_2 \circ \pi_2)$. Como a soma vetorial em \mathbb{R}^n é contínua, temos que $+_{\text{loc}}$ é contínua.

Como $+_{\text{loc}} = \phi \circ + \circ \Phi^{-1}$, temos que $+ = \phi^{-1} \circ +_{\text{loc}} \circ \Phi$ é composição de contínuas, e portanto, contínua.

Assim, $+$ é contínua em uma vizinhança aberta de um ponto arbitrário de seu domínio. Portanto, $+$ é contínua contínua.

Agora, mostraremos que \cdot é contínua. Seja $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \xi$, $x = \pi(v)$ e ϕ uma trivialização local de ξ sobre algum U_x . Para provar que a aplicação \cdot é contínua em x , mostraremos que ela é contínua em $\pi^{-1}(U_x)$.

Consideremos a restrição $\cdot|_{\mathbb{R} \times \pi^{-1}(U_x)}$ e o diagrama comutativo correspondente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \pi^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\cdot} & \pi^{-1}(U_x) \\ \downarrow \text{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{R} \times (U_x \times \mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\cdot_{\text{loc}}} & U_x \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

em que $\cdot_{\text{loc}} = \phi \circ \cdot \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \phi)^{-1}$. Seja $(\lambda, (y, v)) \in \mathbb{R} \times U_x \times \mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned} \cdot_{\text{loc}}(\lambda, (y, v)) &= \phi \circ \cdot \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi)^{-1}(\lambda, (y, v)) \\ &= \phi(\cdot((\text{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi)^{-1}(\lambda, (y, v)))) \\ &= \phi(\cdot((\text{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi^{-1})(\lambda, (y, v)))) \\ &= \phi(\cdot(\text{Id}_{\mathbb{R}}(\lambda), \phi^{-1}(y, v))) \\ &= \phi(\cdot(\lambda, \phi^{-1}(y, v))) \\ &= \phi(\lambda \phi^{-1}(y, v)) \\ &= \lambda \phi(\phi^{-1}(y, v)) \\ &= \lambda(y, v) \\ &= (y, \lambda v). \end{aligned}$$

Assim,

$$\cdot_{\text{loc}}(\lambda, (y, v)) = (y, \lambda v).$$

Ou seja, $\cdot_{\text{loc}} = (\pi_1 \circ \pi_2, \pi_1 \cdot (\pi_2 \circ \pi_2))$, e como a multiplicação por escalar de \mathbb{R} em \mathbb{R}^n é contínua, temos que \cdot_{loc} é contínua. Como $\cdot = \phi^{-1} \circ \cdot_{\text{loc}} \circ \text{Id}_{\mathbb{R}} \times \phi$, temos que \cdot é composição de contínuas, e portanto, contínua.

Assim, \cdot é contínua em uma vizinhança aberta de um ponto arbitrário de seu domínio. Portanto, \cdot é contínua. ■

Proposição 2.1.21. *Sejam s_1, \dots, s_n seções locais de um fibrado vetorial sobre U_x , e sejam $a_1, \dots, a_n : U_x \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ também é uma seção sobre U_x , em que as operações são feitas ponto a ponto.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que cada $a_i s_i$ é seção de sobre U_x . Para qualquer $y \in U_x$,

$$(a_i s_i)(y) = a_i(y) s_i(y) \in F_y.$$

Assim,

$$\pi((a_i s_i)(y)) = y.$$

Então, $\pi \circ a_i s_i = \text{Id}_{U_x}$.

Note que $(a_i s_i)(y) = a_i(y) s_i(y) = \cdot(a_i(y), s_i(y)) = \cdot((a_i, s_i)(y))$, ou seja, $a_i s_i = \cdot \circ (a_i, s_i)$. E como a_i e s_i são contínuas, (a_i, s_i) é contínua, e pela Proposição 2.1.20, \cdot é contínua. Assim, $a_i s_i$ é composição contínuas, ou seja, contínua. Portanto, cada $a_i s_i$ é seção sobre U_x .

Para qualquer $y \in U_x$, $s(y) = \sum_{i=1}^n (a_i s_i)(y) = \sum_{i=1}^n a_i(y) s_i(y) \in F_y$. Então, $s(y) \in F_y$. Assim, $\pi(s(y)) = y$, e $\pi \circ s = \text{Id}_{U_x}$.

Agora, mostraremos que a soma de seções é contínua. Sejam t e t' seções de ξ sobre U_x . Assim, para qualquer $y \in U_x$,

$$\begin{aligned} (t + t')(y) &= t(y) + t'(y) \\ &= +(t(y), t'(y)) \\ &= +((t, t')(y)). \end{aligned}$$

Então, $t + t' = + \circ (t, t')$, ou seja, $t + t'$ é contínua. De forma análoga, podemos mostrar que toda soma finita de seções é contínua, e como s é uma soma finita de seções, temos que s é contínua. Portanto, s é seção de ξ sobre U_x . ■

Agora, apresentaremos alguns resultados que serão de grande importância na próxima subseção, quando trabalharemos com morfismos entre fibrados vetoriais.

Proposição 2.1.22. *Seja $\{s_1, \dots, s_n\}$ uma base local de um fibrado vetorial ξ sobre U_x , em que U_x é um aberto da trivialização local em x . Então, qualquer seção s de ξ sobre U_x pode ser escrita de forma única como $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$, em que $a_i \in C(U_x)$.*

Demonstração. A prova se divide em dois casos.

Caso 1: A base local é a base da Proposição 2.1.17.

Neste caso, chamaremos $\{s_1, \dots, s_n\}$ de *base local canônica*. Assim, $s_i(y) = \phi^{-1}(y, e_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Seja s uma seção sobre U_x . Para qualquer $y \in U_x$, $s(y) \in F_y$. Como $\{s_i(y)\}_{i=1}^n$ é uma base para F_y , existem únicos $a_i(y) \in \mathbb{R}$ tais que $s(y) = \sum_{i=1}^n a_i(y) s_i(y)$. Isso define as funções $a_i : U_x \rightarrow \mathbb{R}$. Resta mostrar que cada a_i é contínua.

Considere a composição $\pi_2 \circ \phi \circ s : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que π_2 é a projeção na segunda entrada. Essa função é contínua pois é a composição de contínuas. Mostraremos que $\pi_2 \circ \phi \circ s = (a_1, \dots, a_n)$, em que $(a_1, \dots, a_n)(y) = (a_1(y), \dots, a_n(y))$. Para qualquer $y \in U_x$,

$$\begin{aligned}
 (\pi_2 \circ \phi \circ s)(y) &= \pi_2(\phi(s(y))) = \pi_2\left(\phi\left(\sum_{i=1}^n a_i(y)s_i(y)\right)\right) \\
 &= \pi_2\left(\sum_{i=1}^n a_i(y)\phi(s_i(y))\right) \quad (\text{pois } \phi \text{ é linear nas fibras}) \\
 &= \pi_2\left(\sum_{i=1}^n a_i(y)\phi(\phi^{-1}(y, e_i))\right) \\
 &= \pi_2\left(\sum_{i=1}^n a_i(y)(y, e_i)\right) \\
 &= \pi_2(y, (a_1(y), \dots, a_n(y))) \\
 &= (a_1(y), \dots, a_n(y)) \\
 &= (a_1, \dots, a_n)(y).
 \end{aligned}$$

Assim, $\pi_2 \circ \phi \circ s = (a_1, \dots, a_n)$. Pela Proposição 1.2.11, cada a_i é contínua.

Caso 2: A base local é uma base qualquer.

Neste caso, denotaremos a base canônica por $\{s'_j\}$. Analogamente ao caso 1, $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ e nos resta mostrar que cada a_i é contínua. Cada s_i é, por si só, uma seção sobre U_x . Pelo caso 1, podemos expressar cada s_i na base local canônica $\{s'_j\}$ da trivialização

$$s_i(y) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(y)s'_j(y).$$

Pelo resultado que acabamos de provar, cada b_{ij} é contínua em U_x . Segue que:

$$\begin{aligned}
 s(y) &= \sum_{i=1}^n a_i(y)s_i(y) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i(y)\left(\sum_{j=1}^n b_{ij}(y)s'_j(y)\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i(y)b_{ij}(y)\right)s'_j(y).
 \end{aligned}$$

Seja $c_j(y) = \sum_{i=1}^n a_i(y)b_{ij}(y)$. Então, $s(y) = \sum_{j=1}^n c_j(y)s'_j(y)$. Novamente, como s é seção e $\{s'_j\}$ é a base canônica, o caso 1 nos garante que cada c_j é contínua.

Assim, temos um sistema de equações lineares para as funções $a_i(y)$. Em forma matricial, $A(y) = [a_1(y) \dots a_n(y)]$, $C(y) = [c_1(y) \dots c_n(y)]$ são matrizes linha e $B(y)$ é a matriz $n \times n$ com entradas $B(y) = [b_{ij}(y)]_{ij}$, a relação é:

$$C(y) = A(y)B(y).$$

Note que pela Proposição 1.2.19, $y \mapsto B(y)$ e $y \mapsto C(y)$ são contínuas. Mostraremos que $y \mapsto A(y)$ também é contínua. A matriz $B(y)$ é a matriz de mudança de base da base $\{s_i(y)\}$ para a base $\{s'_j(y)\}$ em F_y . Como ambas são bases, a matriz $B(y)$ é invertível e pela Proposição 1.2.24, $B^{-1}(y)$ é contínua. Assim,

$$A(y) = C(y)B(y)^{-1}.$$

Pela Proposição 1.2.26, $A(y)$ é contínua. E pela Proposição 1.2.19, cada a_i é contínua.

Portanto, mostramos que $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$, em que $a_i \in C(U_x)$. ■

Proposição 2.1.23. *Sejam $\{s_1, \dots, s_n\}$ uma base local de um fibrado vetorial ξ sobre U e $x \in U$. Então, existem U_x e funções $a_i : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $u = \sum a_i(u)s_i(\pi(u))$, para todo $u \in \pi^{-1}(U_x)$.*

Demonstração. Seja U_x a intersecção de U com uma vizinhança de trivialização local em x . Pela Proposição 2.1.7, seja Φ uma trivialização local sobre U_x .

Para qualquer $u \in \pi^{-1}(U_x)$, existem $a_i \in \mathbb{R}$ tais que $u = \sum a_i s_i(\pi(u))$. Assim, estão definidas as funções $a_i : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow \mathbb{R}$. Nos resta mostrar que cada a_i é contínua.

Note que qualquer $w \in U_x \times \mathbb{R}^n$ é da forma $(\pi_1(w), b_1, \dots, b_n)$. Denote por $p_i : U_x \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua $w \mapsto b_i$.

Sejam y_i as funções de coordenadas induzidas pela trivialização local Φ . Ou seja, $y_i = p_i \circ \Phi$ e cada y_i é contínua. Como $\{\Phi(s_i(y))\}_i$ é uma base de $\{y\} \times \mathbb{R}^n$, temos que

$$\Phi(s_i(y)) = (y, A_{1i}(y), \dots, A_{ni}(y))$$

em que a matriz $A(y) = (A_{ij}(y))_{ij}$ é invertível e contínua (como vimos na Proposição

2.1.22). Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \Phi \left(\sum_i a_i(v) s_i(\pi(v)) \right) \\
&= \sum_i a_i(v) \Phi(s_i(\pi(v))) \\
&= \sum_i a_i(v) (\pi(v), A_{1i}(\pi(v)), \dots, A_{ni}(\pi(v))) \\
&= \sum_i (\pi(v), a_i(v) A_{1i}(\pi(v)), \dots, a_i(v) A_{ni}(\pi(v))) \\
&= \left(\pi(v), \sum_i (a_i(v) A_{1i}(\pi(v)), \dots, a_i(v) A_{ni}(\pi(v))) \right) \\
&= (\pi(v), (a_1(v), \dots, a_n(v)) \cdot A(\pi(v))^T).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\Phi(v) = (\pi(v), y_1(v), \dots, y_n(v)).$$

Ou seja,

$$(y_1(v), \dots, y_n(v))^T = A(\pi(v)) \cdot (a_1(v), \dots, a_n(v))^T.$$

Como $\{s_i(\pi(v))\}$ é uma base, a matriz $A(\pi(v))$ é invertível. Assim, os coeficientes $a_i(v)$ são dados por:

$$(a_1(v), \dots, a_n(v))^T = A(\pi(v))^{-1} \cdot (y_1(v), \dots, y_n(v))^T.$$

Pela Proposição 1.2.24, cada coordenada de $A(\pi(v))^{-1}$ é contínua. Então, cada a_i é soma e produto de contínuas. Portanto, cada a_i é contínua. ■

Como vimos anteriormente, podemos usar uma trivialização local para induzir uma base local. Agora, mostraremos uma espécie de recíproca.

Proposição 2.1.24. *Toda base local de um fibrado vetorial sobre U induz uma trivialização local em qualquer $x \in U$.*

Demonstração. Seja $x \in U$. Pela Proposição 2.1.23, existem $U_x \subseteq U$ e $a_i : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $v = \sum a_i(v) s_i(\pi(v))$, para todo $v \in \pi^{-1}(U_x)$.

Defina a função

$$\phi : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}^n$$

por $\phi(v) = \phi(\sum a_i(v) s_i(\pi(v))) = (\pi(v), a_1(v), \dots, a_n(v))$. Pela Proposição 1.2.11, ϕ é contínua. Claramente, ϕ é bijetora, $\pi_1 \circ \phi = \pi$ e ϕ é isomorfismo nas fibras.

Note que qualquer $v \in U_x \times \mathbb{R}^n$ é da forma $(\pi_1(v), b_1, \dots, b_n)$. Denote por p_i a função contínua $v \mapsto b_i$. Assim,

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(\pi(v), p_1(v), \dots, p_n(v)) = \sum p_i(v) s_i(\pi(v)),$$

e pela Proposição 2.1.20, ϕ^{-1} é contínua. Portanto, ϕ é uma trivialização local sobre U_x induzida pela base local $\{s_1, \dots, s_n\}$. ■

Lema 2.1.25. *Sejam t_1, \dots, t_k seções locais de um fibrado vetorial ξ sobre U qualquer. Se $t_1(x), \dots, t_k(x)$ são linearmente independentes (L.I.) para algum $x \in U$, então existe $W_x \subseteq U$ tal que $t_1(y), \dots, t_k(y)$ são L.I., para todo $y \in W_x$.*

Demonstração. Seja V_x um aberto que garante a trivialização local de ξ em x . Pela Proposição 2.1.7, existe uma trivialização local sobre $V_x \cap U$, e pela Proposição 2.1.17, existe uma base local $\{s_1, \dots, s_n\}$ de ξ sobre $V_x \cap U$. Assim, pela Proposição 2.1.22, existem únicas $a_{ij} : V_x \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que

$$t_i(y) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(y) s_j(y), \quad \text{para } i = 1, \dots, k.$$

para todo $y \in V_x \cap U$. Podemos organizar esses coeficientes em uma matriz $A(y) = (a_{ij}(y))$ de tamanho $k \times n$. As linhas de $A(y)$ contêm as coordenadas dos vetores $t_i(y)$ na base ordenada $\{s_j(y)\}$.

Por hipótese, $t_1(x), \dots, t_k(x)$ são L.I. Isso implica que seus vetores de coordenadas, que são as linhas da matriz $A(x)$, também são L.I. em \mathbb{R}^n . Portanto, a matriz $A(x)$ tem posto k . Como o posto de $A(x)$ é k , existe ao menos uma submatriz $K(x)$ de tamanho $k \times k$ em $A(x)$ que é não singular, ou seja, $\det(K(x)) \neq 0$.

Considere a função $d : V_x \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(y) = \det(K(y))$, em que $K(y)$ é a submatriz de $A(y)$ que é formada exatamente pelas mesmas colunas que formaram $K(x)$. A função d é contínua, pois as funções a_{ij} e \det são contínuas. Como $d(x) = \det(K(x)) \neq 0$ e d é contínua, existe $W_x \subseteq V_x \cap U$ tal que $d \neq 0$ em W_x .

Para qualquer $y \in W_x$, o fato de $\det(K(y)) \neq 0$ garante que a matriz de coeficientes $A(y)$ tem posto pelo menos k . E como $A(y)$ tem k linhas, o posto de $A(y)$ é menor ou igual a k , ou seja, o posto de $A(y)$ é k .

Isso significa que as k linhas de $A(y)$ são L.I. em \mathbb{R}^n . Assim, os vetores de coordenadas das seções $t_1(y), \dots, t_k(y)$ na base local $\{s_1(y), \dots, s_k(y)\}$ são L.I. E como vetores são L.I. se, e somente se, o conjunto de seus vetores de coordenadas (em relação a qualquer base) for L.I., temos que $t_1(y), \dots, t_k(y)$ são L.I. ■

Proposição 2.1.26. *Seja $f : \xi \rightarrow \eta$ um morfismo entre fibrados vetoriais e s uma seção de ξ sobre $Y \subseteq X$. Então, $f \circ s$ é uma seção de η sobre Y .*

Demonstração. Claramente, a imagem de $f \circ s$ pertence a η . A função $f \circ s$ é contínua, pois é composição de funções contínuas. Além disso, para $x \in Y$,

$$\begin{aligned} (\pi_\eta \circ (f \circ s))(x) &= ((\pi_\eta \circ f) \circ s)(x) \\ &= (\pi_\xi \circ s)(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Portanto, $f \circ s$ é uma seção de η sobre Y . ■

2.1.2 Imagem e kernel de morfismos

Nem sempre a imagem e o kernel de morfismos de fibrados vetoriais são fibrados vetoriais. Por exemplo, considere o fibrado $[0, 1] \times \mathbb{R}$ com a projeção na primeira entrada e o morfismo $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = (x, xy)$. Note que $\ker f|_{F_0} = \mathbb{R}$ e $\ker f|_{F_x} = \{0\}$, para $x > 0$. Ou seja, a dimensão das fibras não é localmente constante e $\ker f$ não é fibrado vetorial. Da mesma forma $\text{im } f$ não é fibrado vetorial.

O objetivo desta subseção é mostrar que se a dimensão das fibras da imagem ou do kernel de um morfismo entre fibrados vetoriais é localmente constante, então a imagem e o kernel também serão fibrados vetoriais. E, mostrar que se um morfismo é idempotente, também temos que a imagem e o kernel são fibrados vetoriais.

Proposição 2.1.27. *Seja $f : \xi \rightarrow \eta$ um morfismo. São equivalentes:*

1. $\text{im } f$ é subfibrado vetorial de η .
2. $\ker f$ é subfibrado vetorial de ξ .
3. A dimensão das fibras de $\text{im } f$ é localmente constante.
4. A dimensão das fibras de $\ker f$ é localmente constante.

Demonstração. As implicações $1 \implies 3$ e $2 \implies 4$ são imediatas da definição de fibrado vetorial, que exige que a dimensão das fibras seja localmente constante.

$3 \implies 4$: Suponha que a dimensão das fibras de $\text{im } f$ seja localmente constante. Ou seja, a função $n_{\text{im } f} : X \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $n_{\text{im } f}(x) = \dim(\text{im } f|_{F_x})$, é localmente constante.

Pelo teorema do núcleo e da imagem, para cada $x \in X$, a restrição de f à fibra $F_x(\xi)$ nos dá:

$$\dim(F_x(\xi)) = \dim(\ker f|_{F_x(\xi)}) + \dim(\text{im } f|_{F_x(\xi)}),$$

reorganizando os termos, obtemos:

$$\dim(\ker f|_{F_x(\xi)}) = \dim(F_x(\xi)) - \dim(\text{im } f|_{F_x(\xi)}).$$

A função $x \mapsto \dim(F_x(\xi))$ é localmente constante, pois ξ é um fibrado vetorial. Como a função $n_{\ker f}(x) = \dim(\ker f|_{F_x(\xi)})$ é a diferença de duas funções localmente constantes, ela também é localmente constante.

4 \implies 3: A demonstração é análoga a 3 \implies 4.

3 \implies 1: Segue da definição de morfismo entre fibrados vetoriais que a restrição $\pi_\eta|_{\text{im } f}$ é contínua e sobrejetora e $(\pi_\eta|_{\text{im } f})^{-1}(x)$ é espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} . Nos resta mostrar que $\text{im } f$ admite trivializações locais. Para isso, construiremos primeiro funções que vão ser bases locais de $\text{im } f$.

Seja $x \in X$. Por hipótese, existe V_x onde $\dim(F_y(\text{im } f)) = k$ para todo $y \in V_x$. Pela Proposição 2.1.17, podemos tomar s_1, \dots, s_m como uma base local de ξ sobre uma vizinhança aberta de x contida em V_x . Assim, $f(s_1(x)), \dots, f(s_m(x))$ geram a fibra $\text{im } f|_{F_x}$. Como $\dim(\text{im}(f|_{F_x})) = k$, podemos reordenar as seções de modo que $\{f(s_1(x)), \dots, f(s_k(x))\}$ seja uma base para $\text{im } f|_{F_x}$.

Como $f(s_1(x)), \dots, f(s_k(x))$ são L.I., pelo Lema 2.1.25, as seções correspondentes $f \circ s_1, \dots, f \circ s_k$ são L.I. em algum W_x . Para qualquer $y \in V_x \cap W_x$, $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y))\}$ formam um conjunto de k vetores L.I. dentro de um espaço de dimensão k . Portanto, eles formam uma base para $F_y(\text{im } f)$, para todo $y \in V_x \cap W_x$. Com isso, $\{f \circ s_1, \dots, f \circ s_k\}$ é uma base local de $\text{im } f$ sobre $V_x \cap W_x$.

Sabemos que existe uma base local $\{r_1, \dots, r_n\}$ de η sobre um U_x . Seja $U = U_x \cap (V_x \cap W_x)$. Assim, para qualquer $y \in U$, temos que $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y))\}$ é base de um subespaço de $F_y(\eta)$. Assim, podemos reordenar as seções de forma que $\{f(s_1(y)), \dots, f(s_k(y)), r_{k+1}(y), \dots, r_n(y)\}$ seja uma base de $F_y(\eta)$. Portanto, $\{f \circ s_1, \dots, f \circ s_k, r_{k+1}, \dots, r_n\}$ é uma base local de η sobre U .

Considere V a vizinhança de x e a_i as funções da Proposição 2.1.23 com relação a base local $\{f \circ s_1, \dots, f \circ s_k, r_{k+1}, \dots, r_n\}$. Pela Proposição 2.1.24, existe uma trivialização local $\phi : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n$ induzida pela base local $\{f \circ s_1, \dots, f \circ s_k, r_{k+1}, \dots, r_n\}$ dada por

$$\phi(u) = \phi\left(\sum_1^k a_i(u)f(s_i(\pi(u))) + \sum_{k+1}^n a_i(u)r_i(\pi(u))\right) = (\pi(u), a_1(u), \dots, a_n(u)).$$

Claramente, a restrição de ϕ a $\text{im } f$ composta pela projeção de $V \times \mathbb{R}^n$ em $V \times \mathbb{R}^k$ é uma trivialização local de $\text{im } f$ em x . Portanto, $\text{im } f$ é subfibrado vetorial de ξ .

4 \implies 2 : Novamente, é claro que só nos resta construir a trivialização local. Seja $x \in X$, suponha que a dimensão das fibras de $\ker f$ seja k em algum V_x . Por 2.1.17, seja $\{s_1, \dots, s_m\}$ base local de ξ em uma vizinhança aberta de x contida em V_x . Sabemos que existe uma $\{s'_1(x), \dots, s'_k(x)\}$ base de $\ker f|_{F_x}$, em que cada $s'_i(x)$ é uma combinação linear de $s_1(x), \dots, s_m(x)$. Assim, $s'_1(x), \dots, s'_k(x)$ são L.I. e considerando cada s'_i como a

seção dada por essa combinação linear (com coeficientes constantes em cada fibra), pelo Lema 2.1.25, existe W_x tal que $s'_1(y), \dots, s'_k(y)$ são L.I em W_x .

Tomando $U_x = V_x \cap W_x$, temos que $s'_1(y), \dots, s'_k(y)$ são L.I em U_x e a dimensão de $\ker f|_{F_y}$ é k em U_x , ou seja, s'_1, \dots, s'_k é base local de $\ker f$ sobre U_x . Como vimos em $3 \implies 1$, é possível construir uma trivialização local de $\ker f$ em x . Ou seja, $\ker f$ é subfibrado vetorial de ξ .

$3 \implies 2$: Nosso objetivo novamente será criar uma base local para $\ker f$. Suponha que a dimensão de $\operatorname{im} f$ seja localmente constante. Pela implicação $3 \implies 1$, $\operatorname{im} f$ é um fibrado vetorial. Seja U_x uma vizinhança de trivialização local de ξ e $\operatorname{im} f$ em x (a existência de tal vizinhança é garantida tomando a intersecção de vizinhanças de trivializações de ambos os fibrados), com base local $\{s_1, \dots, s_m\}$ para ξ e $\{f \circ s_1, \dots, f \circ s_k\}$ para $\operatorname{im} f$. Para cada $i > k$, $f \circ s_i$ é seção de $\operatorname{im} f$ sobre U_x , pela Proposição 2.1.22, existem $a_{ij} \in C(U_x)$ tais que

$$f(s_i(y)) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f(s_j(y)).$$

Para cada $i > k$, defina uma nova seção s'_i de ξ sobre U_x :

$$s'_i(y) = s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y),$$

em que os a_{ij} 's são os citados anteriormente.

Mostraremos que $\{s'_{k+1}, \dots, s'_m\}$ forma uma base local para $\ker f$ sobre U_x .

1. Cada s'_i está em $\ker f$.

$$\begin{aligned} f(s'_i(y)) &= f\left(s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y)\right) \\ &= f(s_i(y)) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f(s_j(y)) \\ &= \left(\sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f(s_j(y))\right) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) f(s_j(y)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, s'_i é uma seção de $\ker f$ sobre U_x .

2. As seções $\{s'_{k+1}, \dots, s'_m\}$ são linearmente independentes.

Suponha que $\sum_{i=k+1}^n b_i s'_i(y) = 0$, em que $b_i \in \mathbb{R}$, para cada $i = k+1, \dots, m$. Substituindo a definição de s'_i , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=k+1}^m b_i \left(s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^m b_i s_i(y) + \sum_{i=k+1}^m b_i \left(- \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^m b_i s_i(y) - \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=k+1}^m b_i a_{ij}(y) \right) s_j(y). \end{aligned}$$

Como $\{s_1(y), \dots, s_m(y)\}$ é uma base para $F_y(\xi)$ e, em particular L.I., todos os coeficientes devem ser nulos. Em particular, $b_{k+1} = \dots = b_m = 0$.

3. As seções $\{s'_{k+1}, \dots, s'_m\}$ geram $\ker f$.

Seja $v \in F_y(\ker f)$. Como $v \in F_y(\xi)$, podemos escrever $v = \sum_{i=1}^m c_i s_i(y)$. Aplicando f , temos que

$$\begin{aligned} 0 &= f(v) \\ &= \sum_{i=1}^m c_i f(s_i(y)) \\ &= \sum_{j=1}^k \left(c_j + \sum_{i=k+1}^m c_i a_{ij}(y) \right) f(s_j(y)). \end{aligned}$$

Como $\{f(s_j(y))\}$ é L.I., os coeficientes são nulos: $c_j = - \sum_{i=k+1}^m c_i a_{ij}(y)$ para $j = 1, \dots, k$. Substituindo c_j de volta na expressão para v :

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^k \left(- \sum_{i=k+1}^m c_i a_{ij}(y) \right) s_j(y) + \sum_{i=k+1}^m c_i s_i(y) \\ &= \sum_{i=k+1}^m c_i \left(- \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) + \sum_{i=k+1}^m c_i s_i(y) \\ &= \sum_{i=k+1}^m c_i \left(s_i(y) - \sum_{j=1}^k a_{ij}(y) s_j(y) \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^m c_i s'_i(y). \end{aligned}$$

Portanto, $\{s'_{k+1}, \dots, s'_m\}$ é uma base local para $\ker f$ sobre U_x . Isso nos permite construir uma trivialização local em x , provando que $\ker f$ é um subfibrado vetorial de ξ . ■

Proposição 2.1.28. *Seja $f : \xi \rightarrow \xi$ um morfismo idempotente, então $\text{im } f$ e $\text{ker } f$ são subfibrados vetoriais de ξ .*

Demonstração. Mostraremos que a dimensão das fibras de $\text{im } f$ é localmente constante.

Seja $x \in X$. Existe uma base local $\{s_1, \dots, s_n\}$ de ξ sobre algum U'_x . Para cada $y \in U'_x$, seja $M(y)$ a matriz que representa a transformação linear $f|_{F_y}$ com relação à base ordenada $(s_1(y), \dots, s_n(y))$, tanto no domínio quanto no contradomínio. A j -ésima coluna de $M(y)$ é formada pelas coordenadas do vetor resultante de f aplicada ao j -ésimo vetor da base $(s_i(y))_i$, ou seja, as coordenadas de $f(s_j(y))$ na base ordenada $(s_i(y))_i$.

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, sejam $c_{1j}, \dots, c_{nj} : U'_x \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas da expansão de $f(s_j(y))$ na base ordenada $(s_i(y))_i$, para todo $y \in U'_x$. Ou seja, $f \circ s_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} s_i$, e pela Proposição 2.1.21, $f \circ s_j$ é seção de ξ sobre U'_x . Assim, pela Proposição 2.1.22, as funções c_{1j}, \dots, c_{nj} são únicas e contínuas. Portanto, para cada $y \in U'_x$, as colunas de $M(y)$ são compostas de funções contínuas, e pela Proposição 1.2.19, a função $y \mapsto M(y)$ é contínua em U'_x .

Pela Proposição 1.2.28, a função posto é semicontínua inferiormente. Então, $y \mapsto \text{posto}(M(y))$ é semicontínua inferiormente. Como $\dim(\text{im } f|_{F_y}) = \text{posto}(M(y))$, temos que $y \mapsto \dim(\text{im } f|_{F_y})$ é semicontínua inferiormente. Ou seja, existe $U_x \subseteq U'_x$ tal que para todo $y \in U_x$,

$$\dim(\text{im } f|_{F_y}) \geq \dim(\text{im } f|_{F_x}).$$

Agora, defina o morfismo $g = \text{Id} - f : \xi \rightarrow \xi$ dado por $g(v) = v - f(v)$. Note que $\pi(g(v)) = \pi(v - f(v)) = \pi(v)$, pois $v - f(v) \in F_{\pi(v)}$. Além disso,

$$\begin{aligned} g(v) &= v - f(v) \\ &= +(v, -f(v)) \\ &= +(v, -1 \cdot f(v)) \\ &= +(v, \cdot(-1, f(v))), \end{aligned}$$

ou seja, g é composição de contínuas. E em cada fibra $g|_{F_x} = \text{Id}|_{F_x} - f|_{F_x}$, ou seja, $g|_{F_x}$ é transformação linear. Portanto, g é morfismo de fibrados vetoriais.

Verifiquemos que g é idempotente. Seja $v \in \xi$,

$$\begin{aligned}
 g(g(v)) &= g((\text{Id} - f)(v)) \\
 &= g(v - f(v)) \\
 &= (\text{Id} - f)(v - f(v)) \\
 &= v - f(v) - (f(v - f(v))) \\
 &= v - f(v) - (f(v) - f(f(v))) \\
 &= v - f(v) - (f(v) - f(v)) \\
 &= v - f(v) - f(v) + f(v) \\
 &= v - f(v) \\
 &= g(v).
 \end{aligned}$$

Ou seja, $g \circ g = g$, e g é idempotente. Então, para qualquer $y \in X$, $f|_{F_y}$ e $g|_{F_y}$ são projeções, e temos as decomposições em soma direta

$$F_y = \ker(f|_{F_y}) \oplus \text{im}(f|_{F_y}) \quad \text{e} \quad F_y = \ker(g|_{F_y}) \oplus \text{im}(g|_{F_y}),$$

o que nos dá

$$\dim F_y = \dim \ker(f|_{F_y}) + \dim \text{im}(f|_{F_y}) \quad \text{e} \quad \dim F_y = \dim \ker(g|_{F_y}) + \dim \text{im}(g|_{F_y}).$$

Note que

$$\begin{aligned}
 \ker f|_{F_y} &= \{v \in F_y : f(v) = 0\} \\
 &= \{v \in F_y : (\text{Id} - g)(v) = 0\} \\
 &= \{v \in F_y : v - g(v) = 0\} \\
 &= \{v \in F_y : v = g(v)\} \\
 &= \text{im } g|_{F_y}, \quad \text{pois } g|_{F_y} \text{ é projeção.}
 \end{aligned}$$

Assim, $\ker f|_{F_y} = \text{im } g|_{F_y}$. Analogamente, $\ker g|_{F_y} = \text{im } f|_{F_y}$. Isso nos dá a relação fundamental:

$$\dim(F_y) = \dim(\text{im } f|_{F_y}) + \dim(\text{im } g|_{F_y}).$$

Como ξ é um fibrado vetorial, a dimensão de suas fibras é localmente constante, ou seja, existe V_x onde $\dim(F_y) = n$, para todo $y \in V_x$.

Pelo mesmo argumento de semicontinuidade aplicado a g , existe W_x onde $\dim(\text{im } g|_{F_y}) \geq \dim(\text{im } g|_{F_x})$, para todo $y \in W_x$.

Considere $U = U_x \cap V_x \cap W_x$. Assim, todas as condições citadas são válidas em U . Temos então que para qualquer $y \in U$,

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{im} f|_{F_y}) &= \dim(F_y) - \dim(\operatorname{im} g|_{F_y}) \\ &= n - \dim(\operatorname{im} f|_{F_y}) \\ &\leq n - \dim(\operatorname{im} g|_{F_x}) \\ &= \dim(F_x) - \dim(\operatorname{im} g|_{F_x}) \\ &= \dim(\operatorname{im} f|_{F_x}) \\ &\leq \dim(\operatorname{im} f|_{F_y}). \end{aligned}$$

Ou seja, $\dim(\operatorname{im} f|_{F_y}) = \dim(\operatorname{im} f|_{F_x})$, para todo $y \in U$.

Isso mostra que a função $y \mapsto \dim(\operatorname{im} f|_{F_y})$ é localmente constante, então a dimensão das fibras de $\operatorname{im} f$ é localmente constante. Pela Proposição 2.1.27, $\operatorname{im} f$ e $\ker f$ são subfibrados vetoriais de ξ . ■

2.2 Subfibrado vetorial como somando direto

Sabemos que se V é um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, ele pode ser decomposto em $V = W \oplus W^\perp$, para qualquer subespaço W de V . Assim, $V \cong W \times W^\perp$.

O objetivo desta seção é mostrar que se X é compacto, é possível construir um produto interno no fibrado vetorial, de forma que, usando o resultado do parágrafo anterior, todo subfibrado vetorial η de um fibrado vetorial ξ é somando direto do fibrado vetorial original, isto é, $\xi \cong \eta \oplus \zeta$, para algum subfibrado vetorial ζ de ξ .

Definição 2.2.1. *Um produto interno em um fibrado vetorial ξ é uma função contínua*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \xi \oplus \xi \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para cada $x \in X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrita a $F_x(\xi \oplus \xi) = F_x(\xi) \times F_x(\xi)$ é um produto interno em $F_x(\xi)$.

Proposição 2.2.2. *Se X é compacto e Hausdorff, então qualquer fibrado vetorial sobre X possui um produto interno.*

Demonstração. Seja ξ um fibrado vetorial sobre X e $x \in X$. Primeiro, mostraremos que é possível construir um produto interno em $\pi^{-1}(U_x)$, em que U_x é o aberto de uma trivialização local ϕ de ξ em x . Defina

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_x} : \pi^{-1}(U_x) \oplus \pi^{-1}(U_x) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\langle u, v \rangle_{U_x} := \langle \pi_2(\phi(u)), \pi_2(\phi(v)) \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

em que n é o natural da trivialização local ϕ . Note que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_x} = \langle \pi_2 \circ \phi \circ \pi_1, \pi_2 \circ \phi \circ \pi_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Assim, como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ é contínua, temos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_x}$ é composição de contínuas, e portanto, contínua.

Para quaisquer $y \in U_x$, $u, v, w \in F_y(\xi)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle u, u \rangle_{U_x} = \langle \pi_2(\phi(u)), \pi_2(\phi(u)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_{U_x} = 0 &\iff \langle \pi_2(\phi(u)), \pi_2(\phi(u)) \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \\ &\iff \pi_2(\phi(u)) = 0 \\ &\iff \phi(u) = 0_{\{y\} \times \mathbb{R}^n} \\ &\iff u = 0, \end{aligned}$$

$$\langle u, v \rangle_{U_x} = \langle \pi_2(\phi(u)), \pi_2(\phi(v)) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \pi_2(\phi(v)), \pi_2(\phi(u)) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, v \rangle_{U_x},$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda u + v, w \rangle_{U_x} &= \langle \pi_2(\phi(\lambda u + v)), \pi_2(\phi(w)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle \pi_2(\lambda \phi(u) + \phi(v)), \pi_2(\phi(w)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle \lambda \pi_2(\phi(u)) + \pi_2(\phi(v)), \pi_2(\phi(w)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \lambda \langle \pi_2(\phi(u)), \pi_2(\phi(w)) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \pi_2(\phi(v)), \pi_2(\phi(w)) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \lambda \langle u, w \rangle_{U_x} + \langle v, w \rangle_{U_x}. \end{aligned}$$

Então, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_x}$ restrita a $F_y(\xi \oplus \xi)$ é um produto interno em $F_y(\xi)$. Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_x}$ é um produto interno em $\pi^{-1}(U_x)$.

Seja $\{U_x\}_{x \in X}$ uma família de abertos de trivializações locais em cada $x \in X$. Como X é compacto, existe uma subcobertura $\{U_x\}_{x \in Y}$ de $\{U_x\}_{x \in X}$, em que Y é um subconjunto finito de X . Pela Proposição 1.2.15, existe uma partição da unidade $\{\psi_x\}_{x \in Y}$, subordinada à cobertura $\{U_x\}_{x \in Y}$.

Defina a função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \xi \oplus \xi \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\langle u, v \rangle := \sum_{x \in Y} \psi_x(\pi(u, v)) \langle u, v \rangle_{U_x}.$$

e caso $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_x}$ não esteja definida em (u, v) , ou seja, $\pi(u, v) \notin U_x$, defina $\langle u, v \rangle_{U_x} := 0$. Pela Proposição 1.2.16, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua.

Além disso, em cada fibra de ξ , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é combinação linear de coeficientes não-negativos de produtos internos, ou seja, um produto interno. Portanto, temos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em ξ . ■

Proposição 2.2.3. *Se X é compacto e Hausdorff, então qualquer subfibrado vetorial de ξ é somando direto de ξ .*

Demonstração. Seja η um subfibrado vetorial de ξ . Como X é compacto, pela Proposição 2.2.2, existe um produto interno em ξ . Assim, podemos construir a função $\text{proj}_\eta : \xi \rightarrow \xi$, dada pela projeção ortogonal de ξ em η em cada fibra. Mostraremos que proj_η é morfismo de fibrados vetoriais.

Seja $x \in X$, pela proposição 2.1.17, $\{s_1, \dots, s_n\}$ formam base local de η sobre algum U_x . Mostraremos que proj_η é contínua em $\pi^{-1}(U_x)$, em que π é a projeção de ξ . Graças ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e usando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt da mesma forma em todas as fibras, para qualquer $y \in U_x$, temos que $\{s_1(y), \dots, s_n(y)\}$ pode ser ortonormalizada a $\{e_1(y), \dots, e_n(y)\}$. Cada e_i é contínua pois $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínua e pela Proposição 2.1.20. Como a projeção ortogonal independe da escolha da base ortonormal, temos que para qualquer $v \in \pi^{-1}(U_x)$,

$$\text{proj}_\eta(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i(\pi(v)) \rangle e_i(\pi(v)).$$

E, novamente pela Proposição 2.1.20, segue que proj_η é contínua em $\pi^{-1}(U_x)$. Assim, proj_η é contínua. Portanto, proj_η é morfismo de fibrados vetoriais.

Para cada $x \in X$, $\text{proj}_\eta|_{F_x(\xi)}$ é uma projeção ortogonal, então é idempotente. Assim, proj_η é um morfismo idempotente. Pela Proposição 2.1.28, $\ker \text{proj}_\eta$ é subfibrado vetorial de ξ . Usaremos a seguinte notação

$$\eta^\perp := \ker \text{proj}_\eta.$$

Note que η^\perp é o fibrado vetorial constituído dos complementos ortogonais de cada fibra $F_x(\eta)$. Ou seja, $F_x(\eta^\perp) = F_x(\eta)^\perp$. Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, temos que

$$F_x(\xi) = F_x(\eta) \oplus F_x(\eta)^\perp = F_x(\eta) \oplus F_x(\eta^\perp).$$

Assim, para qualquer $v \in \xi$, existe uma representação única $v = k + k'$, em que $k \in \eta$ e $k' \in \eta^\perp$.

Defina o morfismo

$$\Phi : \xi \rightarrow \eta \oplus \eta^\perp$$

por

$$\Phi(v) = \Phi(k + k') = (k, k').$$

Φ é isomorfismo em cada fibra. Além disso, Φ preserva projeção, pois v, k e k' estão na mesma fibra. Note que

$$\Phi(v) = (k, k') = (\text{proj}_\eta(v), \text{proj}_{\eta^\perp}(v)),$$

ou seja, $\Phi = (\text{proj}_\eta, \text{proj}_{\eta^\perp})$, e como suas componentes são contínuas, temos que Φ é contínua.

Pela Proposição 2.1.8, segue que Φ é isomorfismo e $\xi \cong \eta \oplus \eta^\perp$. Portanto, η é somando direto de ξ . ■

2.3 Extensão de seções locais a globais

Esta seção tem como objetivo mostrar que, se X é compacto e Hausdorff, obtemos dois resultados: para qualquer ponto no espaço total de um fibrado vetorial sobre X , existe uma seção global que passa por ele, e para todo $x \in X$, existem seções globais desse fibrado que formam uma base local sobre uma vizinhança de x .

Proposição 2.3.1. *A função (zero) definida por $s(x) = 0_{F_x}$ é seção global de qualquer fibrado vetorial.*

Demonstração. Seja ξ um fibrado vetorial. Primeiramente,

$$\pi(s(x)) = \pi(0_{F_x}) = x,$$

ou seja, $\pi \circ s = \text{Id}_X$.

Agora, mostraremos que s é contínua. Seja $x \in X$, n o natural e U_x um aberto de uma trivialização local ϕ em x . Para qualquer $y \in U_x$,

$$s(y) = 0_{F_y} = \phi^{-1}(y, 0) = \phi^{-1}(\iota(y)),$$

em que ι é a inclusão $y \mapsto (y, 0_{\mathbb{R}^n})$. Assim, $s = \phi^{-1} \circ \iota$, e s é contínua em U_x . Logo, s é contínua e é uma seção global de ξ . ■

Lema 2.3.2. *Se X é compacto e Hausdorff, para qualquer seção local de um fibrado vetorial ξ definida em uma vizinhança de um ponto $x \in X$, existe uma seção global de forma que ambas coincidem em uma vizinhança de x .*

Demonstração. Seja $x \in X$, e s uma seção de ξ sobre algum U_x . Sabemos que $X - U_x$ é fechado, e como é Hausdorff, $\{x\}$ é fechado. Assim, como X é normal, existem V_{X-U_x} e V_x tais que $V_{X-U_x} \cap V_x = \emptyset$. Assim, $(X - U_x) \cap \overline{V_x} = \emptyset$. Ou seja, $\overline{V_x} \subseteq U_x$.

Repetindo este mesmo processo, existe $W_x \subseteq V_x$ com $\overline{W_x} \subseteq V_x$, ou seja,

$$(X - V_x) \cap \overline{W_x} = \emptyset.$$

Então, $X - V_x$ e $\overline{W_x}$ são fechados disjuntos. Pelo Lema 1.2.13 (Lema de Urysohn), existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua, tal que

$$f|_{\overline{W_x}} = 1 \quad \text{e} \quad f|_{X-V_x} = 0.$$

Agora, usando o Teorema 1.2.17 (da colagem de funções contínuas versão fechados), construiremos uma seção global que coincida com s em uma vizinhança de x . Primeiro, defina as seguintes funções

$$g : X - V_x \longrightarrow \xi, \text{ em que } g(y) = 0_{F_y}$$

(que pela Proposição 2.3.1 é contínua), e

$$h : \overline{V_x} \longrightarrow \xi, \text{ em que } h(y) = f(y)s(y),$$

e como f e s são contínuas, pela Proposição 2.1.20, h é contínua.

Agora, mostremos que g e h coincidem em $\overline{V_x} \cap (X - V_x)$. Para qualquer $y \in \overline{V_x} \cap (X - V_x)$, temos que

$$h(y) = f|_{X-V_x}(y)s(y) = 0s(y) = 0_{F_y} = g(y),$$

ou seja, $h|_{\overline{V_x} \cap (X - V_x)} = g|_{\overline{V_x} \cap (X - V_x)}$. Assim, como $\overline{V_x} \cup (X - V_x)$ cobre X , pelo Teorema da colagem de funções contínuas versão fechados, a função definida por

$$s' : X \longrightarrow \xi \quad \text{em que} \quad s'(y) := \begin{cases} g(y), & y \in X - V_x \\ h(y), & y \in \overline{V_x} \end{cases}$$

é contínua.

Mostremos que s' é seção. Para qualquer $y \in X$, caso $s'(y) = h(y)$, temos que $s'(y) = f(y)s(y)$, e como $f(y) \in \mathbb{R}$, segue que $f(y)s(y) \in F_y$. Então,

$$\pi \circ s'(y) = \pi(f(y)s(y)) = y.$$

Caso $s'(y) = 0_{F_y}$, $\pi(s'(y)) = \pi(0_{F_y}) = y$. Ou seja, $\pi \circ s' = \text{Id}_X$, e s' é seção.

Mostraremos que s e s' coincidem em W_x . Se $y \in W_x \subseteq \overline{V_x}$, então $s'(y) = h(y)$, e como $W_x \subseteq \overline{W_x}$, segue que

$$s'(y) = h(y) = f(y)s(y) = f|_{\overline{W_x}}(y)s(y) = 1s(y) = s(y).$$

Assim, $s'|_{W_x} = s|_{W_x}$.

Portanto, s' é uma seção global de ξ e coincide com s em uma vizinhança de x . ■

Corolário 2.3.3. *Seja ξ um fibrado vetorial sobre um X compacto e Hausdorff. Então, para qualquer $x \in X$, existem s_1, \dots, s_n seções globais de ξ que formam base local em x .*

Demonstração. Seja $x \in X$. Pela Proposição 2.1.17, existem U_x e seções s'_1, \dots, s'_n de ξ sobre U_x que formam uma base local sobre U_x .

Pelo Lema 2.3.2, existem seções globais s_1, \dots, s_n e vizinhanças $V_1, \dots, V_n \subseteq U_x$ de x tais que

$$s'_i|_{V_i} = s_i|_{V_i}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$s'_i|_{\bigcap_{i=1}^n V_i} = s_i|_{\bigcap_{i=1}^n V_i}, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Logo, s_1, \dots, s_n são seções globais que formam uma base local sobre $\bigcap_{i=1}^n V_i$. ■

Corolário 2.3.4. *Seja ξ um fibrado vetorial sobre um X compacto e Hausdorff e $v \in \xi$. Então, existe uma seção global s de ξ tal que $s(\pi(v)) = v$.*

Demonstração. Seja $v \in \xi$. Pelo Corolário 2.3.3, existem seções globais s_1, \dots, s_n de ξ que formam base local sobre alguma vizinhança de $\pi(v)$. Assim, existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1 s_1(\pi(v)) + \dots + a_n s_n(\pi(v)).$$

Pela Proposição 2.1.21, $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$ é seção global de ξ e $s(\pi(v)) = v$. ■

3 Uma ponte entre a Topologia e a Álgebra

3.1 O funtor Γ

Sabemos que, dado um espaço topológico X , $C(X)$ com as operações dadas ponto a ponto é um anel, com unidade dada pela função $1_{C(X)}(x) = 1$, para todo $x \in X$.

Agora, introduziremos um funtor Γ que, pelo Teorema 1.1.17, será utilizado para concluir a equivalência entre a categoria dos fibrados vetoriais sobre um X compacto Hausdorff e a categoria dos $C(X)$ -módulos projetivos e finitamente gerados. O objetivo desta seção será mostrar que o funtor está bem definido. Primeiro, definiremos a ação de Γ nos objetos.

Seja ξ um fibrado vetorial sobre X , definimos $\Gamma(\xi)$ como o conjunto de todas as seções globais de ξ . Posteriormente, mostraremos que $\Gamma(\xi)$ será um $C(X)$ -módulo com as seguintes operações: para quaisquer $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$ e $a \in C(X)$,

- $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$,
- $(as_1)(x) = a(x)s_1(x)$,

para todo $x \in X$.

Proposição 3.1.1. *Seja ξ um fibrado vetorial. Então, $\Gamma(\xi)$ é um grupo abeliano.*

Demonstração. **Associatividade:** sejam $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(\xi)$.

$$\begin{aligned} ((s_1 + s_2) + s_3)(x) &= (s_1 + s_2)(x) + s_3(x) \\ &= s_1(x) + s_2(x) + s_3(x) \\ &= s_1(x) + (s_2 + s_3)(x) \\ &= (s_1 + (s_2 + s_3))(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Elemento neutro: definiremos o elemento neutro e como a seção zero. Assim, para qualquer $s \in \Gamma(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned} (s + e)(x) &= s(x) + e(x) \\ &= s(x) + 0_{F_x} = s(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Inverso: para cada $s \in \Gamma(\xi)$, o inverso de s , denotado por $-s$, é a seção $(-s)(x) := -s(x)$, para todo $x \in X$. Assim,

$$\begin{aligned}(s + (-s))(x) &= s(x) + (-s)(x) \\ &= s(x) + (-s(x)) \\ &= 0 = e(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Portanto, $\Gamma(\xi)$ é um grupo. Agora, mostraremos que é abeliano. Para quaisquer $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned}(s_1 + s_2)(x) &= s_1(x) + s_2(x) \\ &= s_2(x) + s_1(x) \\ &= (s_2 + s_1)(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Logo, $\Gamma(\xi)$ é um grupo abeliano. ■

Proposição 3.1.2. *Seja ξ um fibrado vetorial. Então, $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo.*

Demonstração. Sabemos que $\Gamma(\xi)$ é um grupo abeliano. Verifiquemos as propriedades de R -módulo.

Distributividade: Sejam $a, b \in C(X)$ e $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$.

$$\begin{aligned}((a + b)s_1)(x) &= (a + b)(x)s_1(x) \\ &= (a(x) + b(x))s_1(x) \\ &= a(x)s_1(x) + b(x)s_1(x) \\ &= (as_1)(x) + (bs_1)(x) \\ &= (as_1 + bs_1)(x),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(a(s_1 + s_2))(x) &= a(x)(s_1 + s_2)(x) \\ &= a(x)(s_1(x) + s_2(x)) \\ &= a(x)s_1(x) + a(x)s_2(x) \\ &= (as_1)(x) + (as_2)(x) \\ &= (as_1 + as_2)(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Associatividade: Para quaisquer $a, b \in C(X)$ e $s \in \Gamma(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned} ((ab)s)(x) &= (ab)(x)s(x) \\ &= a(x)b(x)s(x) \\ &= a(x)(bs)(x) \\ &= (a(bs))(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Ação da unidade: Para qualquer $s \in \Gamma(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned} (1_{C(X)}s)(x) &= 1_{C(X)}(x)s(x) \\ &= 1s(x) \\ &= s(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Portanto, $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo. ■

Agora, definiremos a ação de Γ nos morfismos. Seja $f : \xi \rightarrow \eta$ um morfismo de fibrados vetoriais, defina

$$\Gamma(f) : \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\eta), \quad \text{em que} \quad \Gamma(f)(s) = f \circ s.$$

Proposição 3.1.3. *Seja $f : \xi \rightarrow \eta$ um morfismo de fibrados vetoriais. Então, $\Gamma(f)$ é um $C(X)$ -morfismo de $\Gamma(\xi)$ para $\Gamma(\eta)$.*

Demonstração. Seja $s \in \Gamma(\xi)$. Pela Proposição 2.1.26, $f \circ s$ é seção global de η , ou seja, $\Gamma(f)(s) \in \Gamma(\eta)$ e $\Gamma(f)$ está bem definida. Agora, mostremos que $\Gamma(f)$ é um $C(X)$ -morfismo.

Sejam $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$. Para qualquer $x \in X$, temos que

$$\Gamma(f)(s_1 + s_2)(x) = f \circ (s_1 + s_2)(x) = f(s_1(x) + s_2(x)).$$

Como $s_1(x), s_2(x) \in F_x(\xi)$ e $f|_{F_x(\xi)}$ é transformação linear, segue que

$$\begin{aligned} f(s_1(x) + s_2(x)) &= f(s_1(x)) + f(s_2(x)) \\ &= \Gamma(f)(s_1)(x) + \Gamma(f)(s_2)(x) \\ &= (\Gamma(f)(s_1) + \Gamma(f)(s_2))(x). \end{aligned}$$

Logo, $\Gamma(f)(s_1 + s_2) = \Gamma(f)(s_1) + \Gamma(f)(s_2)$.

Sejam $a \in C(X)$ e $s \in \Gamma(\xi)$. Para qualquer $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(f)(as)(x) &= f((as)(x)) \\ &= f(a(x)s(x)). \end{aligned}$$

Como $a(x)s(x) \in F_x(\xi)$ e $f|_{F_x(\xi)}$ é transformação linear, segue que

$$\begin{aligned} f(a(x)s(x)) &= a(x)f(s(x)) \\ &= a(x)\Gamma(f)(s)(x) \\ &= (a\Gamma(f)(s))(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(f)(as) = a\Gamma(f)(s).$$

Logo, $\Gamma(f)$ é um morfismo de $C(X)$ -módulos. ■

Proposição 3.1.4. Γ é um funtor da categoria dos fibrados vetoriais sobre X para a categoria dos $C(X)$ -módulos.

Demonstração. Mostraremos que Γ satisfaz as propriedades functoriais.

Sejam $f : \xi \rightarrow \eta$ um morfismo de fibrados vetoriais e $s \in \Gamma(\xi)$.

$$\Gamma(\text{Id}_\xi)(s) = \text{Id}_\xi \circ s = s = \text{Id}_{\Gamma(\xi)}(s).$$

Portanto, $\Gamma(\text{Id}_\xi) = \text{Id}_{\Gamma(\xi)}$.

Sejam $f : \xi \rightarrow \eta$ e $g : \eta \rightarrow \zeta$ morfismos de fibrados vetoriais e $s \in \Gamma(\xi)$.

$$\begin{aligned} \Gamma(g \circ f)(s) &= (g \circ f) \circ s \\ &= g \circ (f \circ s) \\ &= g \circ \Gamma(f)(s) \\ &= \Gamma(g)(\Gamma(f)(s)) \\ &= (\Gamma(g) \circ \Gamma(f))(s). \end{aligned}$$

Logo, $\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$.

Portanto, Γ é um funtor da categoria dos fibrados vetoriais sobre X para a categoria dos $C(X)$ -módulos. ■

3.2 Γ é plenamente fiel

Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff. Esta seção é dedicada a mostrarmos que Γ definido nos fibrados vetoriais sobre X é um funtor plenamente fiel.

Dado um espaço topológico X , verifica-se que, para cada $x \in X$, $I_x := \{a \in C(X) : a(x) = 0\}$ é um ideal de $C(X)$. Assim, para qualquer fibrado vetorial ξ sobre X , pela Proposição 1.3.4, $I_x\Gamma(\xi)$ é um submódulo de $\Gamma(\xi)$. Assim, o quociente $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo.

O próximo resultado será de fundamental importância no decorrer desta seção.

Lema 3.2.1. *Seja ξ um fibrado vetorial sobre um X compacto e Hausdorff, $x \in X$ e $s \in \Gamma(\xi)$. Então, $s \in I_x\Gamma(\xi)$ se, e somente se, $s(x) = 0_{F_x}$.*

Demonstração. Suponha que $s \in I_x\Gamma(\xi)$. Então, $s = \sum_{i=1}^n a_i s_i$, em que para cada i , $a_i \in I_x$ e $s_i \in \Gamma(\xi)$. Assim,

$$s(x) = \sum a_i(x)s_i(x) = \sum 0s_i(x) = 0_{F_x}.$$

Portanto, $s(x) = 0_{F_x}$.

Agora, suponha que $s(x) = 0_{F_x}$. Mostraremos que s é uma combinação I_x linear de elementos de $\Gamma(\xi)$. Pelo Corolário 2.3.3, sejam $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\xi)$ que formam uma base local em algum W_x . Pela Proposição 2.1.22, $s = \sum_{i=1}^n b_i s_i$ em W_x , em que $b_i \in C(W_x)$.

Note que para cada $i = 1, \dots, n$, (Id_{W_x}, b_i) é seção do fibrado trivial $\zeta = X \times \mathbb{R}$ sobre W_x . Assim, pelo Lema 2.3.2, existe $c_i \in \Gamma(\zeta)$ tal que $(\text{Id}_{W_x}, b_i) = c_i$ em alguma vizinhança $U_i \subseteq W_x$ de x . Pela Proposição 2.1.14, cada c_i é da forma (Id_X, a_i) , em que $a_i \in C(X)$. Tomando $U_x = \bigcap_{i=1}^n U_i$, temos que $(\text{Id}_{W_x}, b_i) = c_i = (\text{Id}_X, a_i)$ em U_x . Então,

$$b_i = a_i \text{ em } U_x, \text{ para } i = 1, \dots, n. \text{ Assim, } s = \sum_{i=1}^n a_i s_i \text{ em } U_x.$$

Note que como $s_1(x), \dots, s_n(x)$ são L.I. e $\sum b_i(x)s_i(x) = s(x) = 0$, segue que $b_i(x) = a_i(x) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $a_i \in I_x$.

Considere a seção $s' \in \Gamma(\xi)$, dada por $s' = s - \sum a_i s_i$. Note que para qualquer $y \in U_x$,

$$s'(y) = s(y) - \sum a_i(y)s_i(y) = \sum a_i(y)s_i(y) - \sum a_i(y)s_i(y) = 0.$$

Como X é normal, existe V_x tal que $\overline{V_x} \subseteq U_x$. Pelo Lema 1.2.13 (de Urysohn), existe $a \in C(X)$ tal que $a(x) = 0$ e $a|_{X-V_x} = 1$. Como $a(x) = a_i(x) = 0$ e estão definidas em X , temos que $a, a_i \in I_x$. Assim, mostraremos que $s = as' + \sum a_i s_i$, e concluiremos o desejado.

Em U_x ,

$$as' + \sum a_i s_i = a0 + \sum a_i s_i = \sum a_i s_i = s.$$

Como $V_x \subseteq U_x$, temos que $X - U_x \subseteq X - V_x$. Assim, em $X - U_x$,

$$as' + \sum a_i s_i = a|_{X-V_x} s' + \sum a_i s_i = s' + \sum a_i s_i = s - \sum a_i s_i + \sum a_i s_i = s.$$

Então, $s = as' + \sum_{i=1}^n a_i s_i$. Portanto, $s \in I_x\Gamma(\xi)$. ■

Proposição 3.2.2. *Sejam ξ um fibrado vetorial sobre um X compacto e Hausdorff e $x \in X$. Então, F_x com a operação $(fv) := f(x)v$, e $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ são $C(X)$ -módulos isomorfos.*

Demonstração. Como I_x é um ideal de $C(X)$, pela Proposição 1.3.4, $I_x\Gamma(\xi)$ é submódulo de $\Gamma(\xi)$. Portanto, o quociente $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo.

Agora, verifiquemos que F_x é um $C(X)$ -módulo. F_x é um espaço vetorial, em particular, um grupo abeliano. Agora, verifiquemos as propriedades de R -módulo. Sejam $f, g \in C(X)$ e $v, w \in F_x$. Para qualquer $x \in X$, temos que

- $(f + g)v = (f + g)(x)v = (f(x) + g(x))v = f(x)v + g(x)v = fv + gv$.
- $f(v + w) = f(x)(v + w) = f(x)v + f(x)w = fv + fw$.
- $(fg)v = (fg)(x)v = f(x)g(x)v = f(x)(g(x)v) = f(gv)$.
- $1_{C(X)}v = 1_{C(X)}(x)v = 1v = v$.

Portanto, F_x é de fato um $C(X)$ -módulo.

Agora, mostraremos que F_x e $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ são isomorfos. Para isso, usaremos o Teorema do isomorfismo. Defina

$$\phi_x : \Gamma(\xi) \longrightarrow F_x \quad \text{por} \quad \phi_x(s) = s(x).$$

Claramente, ϕ_x é um $C(X)$ -morfismo.

Pelo Corolário 2.3.4, para qualquer $v \in F_x$, existe $s \in \Gamma(\xi)$ tal que $s(x) = v$, ou seja, ϕ_x é sobrejetor e $\text{im } \phi_x = F_x$. Note que $s \in \ker \phi_x$ se, e somente se $s(x) = 0_{F_x}$. Assim, pelo Lema 3.2.1, $s \in \ker \phi_x$ se, e somente se, $s \in I_x\Gamma(\xi)$. Ou seja, $\ker \phi_x = I_x\Gamma(\xi)$. Então, pelo Teorema 1.3.16 (do isomorfismo), $\Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$ é isomorfo a F_x . ■

Até o fim desta seção, considere $\phi_x : \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \longrightarrow F_x(\xi)$ e $\psi_x : \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta) \longrightarrow F_x(\eta)$ os isomorfismos acima em relação aos fibrados vetoriais ξ e η , respectivamente.

Proposição 3.2.3. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre um X compacto e Hausdorff, $x \in X$ e $G : \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)$ um $C(X)$ -morfismo. Então, existem $C(X)$ -morfismos G_x e g_x tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\xi) & \xrightarrow{G} & \Gamma(\eta) \\ p_\xi \downarrow & & \downarrow p_\eta \\ \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) & \xrightarrow{G_x} & \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta) \\ \phi_x^{-1} \uparrow & & \downarrow \psi_x \\ F_x(\xi) & \xrightarrow{g_x} & F_x(\eta) \end{array}$$

em que p_ξ e p_η são as projeções no quociente com relação a $\Gamma(\xi)$ e $\Gamma(\eta)$, respectivamente.

Demonstração. Mostraremos a existência de G_x . Considere o $C(X)$ -morfismo

$$p_\eta \circ G : \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta).$$

Mostremos que $I_x\Gamma(\xi) \subseteq \ker p_\eta \circ G$.

Seja $s \in I_x\Gamma(\xi)$. Então, $s = \sum_i^n a_i s_i$, em que $a_i \in I_x$ e $s_i \in \Gamma(\xi)$. Assim,

$$\begin{aligned} G(s)(x) &= G\left(\sum a_i s_i\right)(x) \\ &= \left(\sum a_i G(s_i)\right)(x) \\ &= \sum a_i(x)G(s_i)(x) \\ &= \sum 0G(s_i)(x) \\ &= 0_{F_x}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.2.1, $G(s) \in I_x\Gamma(\eta)$. Ou seja, $p_\eta(G(s)) = \bar{0}$ e $s \in \ker p_\eta \circ G$. Portanto, $I_x\Gamma(\xi)$ está contido em $\ker p_\eta \circ G$.

Assim, pela Proposição 1.3.17, existe um $C(X)$ -morfismo $G_x : \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta)$ tal que $p_\eta \circ G = G_x \circ p_\xi$. Ou seja, o diagrama superior comuta.

Por fim, defina $g_x = \psi_x \circ G_x \circ \phi_x^{-1}$, e o diagrama comuta. ■

Até o fim desta seção, considere as notações $p_\xi : \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\xi)/I_x\Gamma(\xi)$, $p_\eta : \Gamma(\eta) \longrightarrow \Gamma(\eta)/I_x\Gamma(\eta)$, G_x e g_x como os $C(X)$ -morfismos acima.

Teorema 3.2.4. *Sejam ξ e η fibrados vetoriais sobre um X compacto e Hausdorff e $G : \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\eta)$ um $C(X)$ -morfismo. Então, existe um único morfismo $g : \xi \longrightarrow \eta$ tal que $G = \Gamma(g)$, isto é, Γ é plenamente fiel.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos a existência de g .

Defina

$$g : \xi \longrightarrow \eta \quad \text{por} \quad g(v) = g_{\pi_\xi(v)}(v) \in F_{\pi_\xi(v)}(\eta).$$

Assim, para quaisquer $x \in X$ e $s \in \Gamma(\xi)$, temos que

$$\begin{aligned} g(s(x)) &= g_x(s(x)) \\ &= \psi_x(G_x(\phi_x^{-1}(s(x)))) \\ &= \psi_x(G_x(p_\xi(s))) \\ &= \psi_x(p_\eta(G(s))) \\ &= G(s)(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $g(s(x)) = G(s)(x)$.

Mostremos que g é morfismo de fibrados vetoriais. Para qualquer $v \in \xi$, pelo Corolário 2.3.4, existe $s \in \Gamma(\xi)$ tal que $s(\pi_\xi(v)) = v$. Assim,

$$\begin{aligned}\pi_\eta(g(v)) &= \pi_\eta(g(s(\pi_\xi(v)))) \\ &= \pi_\eta(G(s)(\pi_\xi(v))) \\ &= \pi_\xi(v).\end{aligned}$$

Então, $\pi_\eta \circ g = \pi_\xi$.

Mostremos que g é linear em cada fibra. Sejam $v, v' \in F_x(\xi)$. Assim, $v+v' \in F_x(\xi)$ e

$$g(v+v') = g_x(v+v') = g_x(v) + g_x(v') = g(v) + g(v').$$

Seja $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \xi$. Considere $k' : X \rightarrow \mathbb{R}$, a função constante $k'(x) = k$. Assim,

$$\begin{aligned}g(kv) &= g_{\pi_\xi(v)}(kv) \\ &= g_{\pi_\xi(v)}(k'(\pi(v))v) \\ &= g_{\pi_\xi(v)}(k'v) \\ &= k'g_{\pi_\xi(v)}(v) \\ &= k'(\pi_\xi(v))g_{\pi(v)}(v) \\ &= kg_{\pi_\xi(v)}(v).\end{aligned}$$

Portanto, g é linear nas fibras.

Por fim, mostraremos a continuidade de g . Seja $v \in \xi$ tal que $\pi_\xi(v) = x$. Pela Proposição 2.3.3, seja $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \Gamma(\xi)$ que forma uma base local de ξ sobre uma vizinhança de x . Pela Proposição 2.1.23, existem U_x e funções $a_i : \pi_\xi^{-1}(U_x) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $u = \sum a_i(u)s_i(\pi_\xi(u))$. Mostraremos que g é contínua em $\pi_\xi^{-1}(U_x)$.

Seja $u \in \pi_\xi^{-1}(U_x)$. Assim,

$$\begin{aligned}g(u) &= g\left(\sum a_i(u)s_i(\pi_\xi(u))\right) \\ &= \sum a_i(u)g(s_i(\pi_\xi(u))) \\ &= \sum a_i(u)G(s_i)(\pi_\xi(u)) \\ &= \sum a_i(u) \cdot (G(s_i) \circ \pi_\xi)(u) \\ &= \sum (a_i \cdot (G(s_i) \circ \pi_\xi))(u).\end{aligned}$$

Ou seja, $g = \sum a_i \cdot (G(s_i) \circ \pi_\xi)$ em $\pi_\xi^{-1}(U_x)$. Então, g é composição de contínuas, logo, contínua em $\pi_\xi^{-1}(U_x)$. Então, g é contínua. Segue que, g é morfismo de fibrados vetoriais.

Para quaisquer $s \in \Gamma(\xi)$ e $x \in X$, temos que

$$\Gamma(g)(s)(x) = g(s(x)) = G(s)(x).$$

Então, $\Gamma(g)(s) = G(s)$. E, portanto, $\Gamma(g) = G$.

Agora, mostraremos a unicidade de g . Suponha que $g, h : \xi \rightarrow \eta$ são morfismos de fibrados vetoriais que satisfazem $\Gamma(g) = \Gamma(h) = G$. Para qualquer $v \in \xi$, pelo Corolário 2.3.4, existe $s \in \Gamma(\xi)$ tal que $s(\pi(v)) = v$. Assim,

$$g(v) = g(s(\pi(v))) = \Gamma(g)(s)(\pi(v)) = \Gamma(h)(s)(\pi(v)) = h(s(\pi(v))) = h(v).$$

Então, $g = h$ e temos a unicidade. ■

3.3 $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo projetivo e finitamente gerado

Esta seção é dedicada a mostrar que se X é compacto e Hausdorff e ξ é um fibrado vetorial sobre X , então $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo projetivo e finitamente gerado.

Proposição 3.3.1. *Seja $\zeta = X \times \mathbb{R}^n$ o fibrado vetorial. Então, $\Gamma(\zeta)$ é isomorfo a $C(X)^n$.*

Demonstração. Seja $s \in \Gamma(\zeta)$. Pela Proposição 2.1.14, $s = (\text{Id}_X, f_1, \dots, f_n)$, em que cada $f_i \in C(X)$.

Defina o $C(X)$ -morfismo

$$\phi : \Gamma(\zeta) \rightarrow C(X)^n \quad \text{em que} \quad \phi(s) = \phi(\text{Id}_X, f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_n).$$

É claro que ϕ é bijetora. Mostraremos que ϕ é $C(X)$ -morfismo.

Sejam $s = (\text{Id}_X, f_1, \dots, f_n)$, $s' = (\text{Id}_X, f'_1, \dots, f'_n) \in \Gamma(\zeta)$.

$$\begin{aligned} \phi(s + s') &= \phi(\text{Id}_X, f_1 + f'_1, \dots, f_n + f'_n) \\ &= (f_1 + f'_1, \dots, f_n + f'_n) \\ &= (f_1, \dots, f_n) + (f'_1, \dots, f'_n) \\ &= \phi(s) + \phi(s'). \end{aligned}$$

Para qualquer $f \in C(X)$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(fs) &= \phi(\text{Id}_X, ff_1, \dots, ff_n) \\ &= (ff_1, \dots, ff_n) \\ &= f(f_1, \dots, f_n) \\ &= f\phi(s). \end{aligned}$$

Logo, $\Gamma(\zeta) \cong C(X)^n$. ■

Proposição 3.3.2. *Seja ζ um fibrado vetorial trivial. Então, $\Gamma(\zeta)$ é projetivo, finitamente gerado e livre.*

Demonstração. Pela Proposição 1.3.11, $C(X)^n$ é um módulo projetivo e finitamente gerado. Pela Proposição 3.3.1, $\Gamma(\zeta) \cong C(X)^n$. Assim, pela Proposição 1.3.12, segue que $\Gamma(\zeta)$ também é projetivo, finitamente gerado e livre. ■

Lema 3.3.3. *Para qualquer fibrado vetorial ξ sobre X compacto e Hausdorff, existe um morfismo de fibrados vetoriais sobrejetor $f : \zeta \longrightarrow \xi$, para algum fibrado vetorial trivial ζ .*

Demonstração. Para cada $x \in X$, pelo Corolário 2.3.3, considere U_x a vizinhança e $S_x = \{s_1, \dots, s_n\}$ as seções globais que formam uma base local de ξ sobre U_x . Assim, $\{U_x\}_{x \in X}$ é uma cobertura aberta de X compacto. Ou seja, existe uma subcobertura $\{U_x\}_{x \in I}$ de $\{U_x\}_{x \in X}$, em que I é um subconjunto finito de X . Como I é finito, enumeraremos as seções de $\bigcup_{x \in I} S_x$ como s_1, \dots, s_k .

Seja ζ o fibrado trivial $X \times \mathbb{R}^k$. Mostraremos que existe um morfismo sobrejetor $f : \zeta \longrightarrow \xi$. Para isso, primeiro construiremos um $C(X)$ -morfismo de $\Gamma(\zeta)$ para $\Gamma(\xi)$.

Pela Proposição 1.3.11, $C(X)^k$ é livre. E, pela Proposição 3.3.1, $\Gamma(\zeta) \cong C(X)^k$. Assim, pela Proposição 1.3.12, $\Gamma(\zeta)$ é livre e qualquer base tem k elementos. Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de $\Gamma(\zeta)$. Para qualquer $s \in \Gamma(\zeta)$, existem $a_1, \dots, a_k \in C(X)$ tal que $s = \sum_{i=1}^k a_i e_i$. Defina

$$G : \Gamma(\zeta) \longrightarrow \Gamma(\xi) \quad \text{por} \quad G \left(\sum_{i=1}^k a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i s_i.$$

É rotina verificar que G é um $C(X)$ -morfismo sobrejetor. Pelo Teorema 3.2.4, existe um morfismo de fibrados vetoriais $f : \zeta \longrightarrow \xi$ tal que $\Gamma(f) = G$.

Como para qualquer $y \in X$, $S_y \subseteq \bigcup_{x \in I} S_x = \{s_1, \dots, s_k\}$, as seções s_1, \dots, s_k aplicadas em y geram $F_y(\xi)$. Então, $\{s_1, \dots, s_k\}$ gera todas as fibras de ξ . Assim, para qualquer $v \in \xi$, existem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{i=1}^k a_i s_i(\pi(v))$. Para cada i , considere

a função constante $b_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $b_i(x) = a_i$. Assim,

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{i=1}^k a_i s_i(\pi(v)) \\
 &= \sum_{i=1}^k b_i(\pi(v)) s_i(\pi(v)) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^k b_i s_i \right) (\pi(v)) \\
 &= G \left(\sum_{i=1}^k b_i e_i \right) (\pi(v)) \\
 &= \Gamma(f) \left(\sum_{i=1}^k b_i e_i \right) (\pi(v)) \\
 &= \left(f \circ \sum_{i=1}^k b_i e_i \right) (\pi(v)) \\
 &= f \left(\sum_{i=1}^k b_i(\pi(v)) e_i(\pi(v)) \right) = f \left(\sum_{i=1}^k a_i e_i(\pi(v)) \right).
 \end{aligned}$$

E, como $\sum_{i=1}^k a_i e_i(\pi(v)) \in \zeta$, segue que f é sobrejetora. ■

Corolário 3.3.4. *Qualquer fibrado vetorial ξ sobre um X compacto e Hausdorff é somando direto de algum fibrado trivial.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.3, existe um fibrado trivial ζ e um morfismo sobrejetor $f : \zeta \rightarrow \xi$. Como $\text{im } f = \xi$, pela Proposição 2.1.27, $\ker f$ é um subfibrado de ζ . Pela Proposição 2.2.3, podemos decompor ζ em

$$\zeta \cong \ker f \oplus (\ker f)^\perp.$$

Para concluir a prova, mostraremos que $(\ker f)^\perp \cong \xi$.

Seja $\psi : \ker f \oplus (\ker f)^\perp \rightarrow \zeta$ o isomorfismo natural mostrado em 2.2.3 e $\pi_{(\ker f)^\perp} : \ker f \oplus (\ker f)^\perp \rightarrow (\ker f)^\perp$ o morfismo da projeção canônica.

Considere $\phi = f \circ \psi \circ \iota_{(\ker f)^\perp} : (\ker f)^\perp \rightarrow \xi$. ϕ é morfismo por ser composição de morfismos. Mostraremos que ϕ é um isomorfismo. Note que para qualquer $v \in (\ker f)^\perp$,

$$\phi(v) = f(\psi(\iota_{(\ker f)^\perp}(v))) = f(\psi(0, v)) = f(0 + v) = f(v).$$

ϕ é sobrejetora: Seja $u \in \xi$. Como f é sobrejetora, existe $v \in \zeta$ tal que $f(v) = u$. Podemos decompor v de forma única como $v = k + k'$, em que $k \in \ker f$ e $k' \in (\ker f)^\perp$. Então,

$$u = f(v) = f(k + k') = 0 + f(k') = f(k') = \phi(k')$$

Portanto, ϕ é sobrejetora.

ϕ é injetora: pela Proposição 2.1.12, basta mostrarmos que ϕ restrita a cada fibra é injetora. Seja $v \in (\ker f)^\perp$ tal que $\phi(v) = 0$. Assim, $f|_{F_\pi(v)}(v) = 0$, então $f(v) = 0$ e $v \in F_{\pi(v)}(\ker f)$. Assim,

$$v \in F_{\pi(v)}((\ker f)^\perp) \cap F_{\pi(v)}(\ker f) = \{0\}.$$

Então, $v = 0$ e ϕ restrita a cada fibra é injetora. Portanto, ϕ é injetora.

Assim, ϕ é um isomorfismo em cada fibra. Pela Proposição 2.1.8, ϕ é um isomorfismo e $(\ker f)^\perp \cong \xi$. Logo, $\zeta \cong \ker f \oplus \xi$. ■

Lema 3.3.5. Γ é um funtor aditivo, isto é, para quaisquer fibrados vetoriais ξ e η , temos que $\Gamma(\xi \oplus \eta) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$.

Demonstração. Sejam ξ e η fibrados vetoriais, π a projeção de $\xi \oplus \eta$ e $s \in \Gamma(\xi \oplus \eta)$. Considere $\pi_1 : \xi \oplus \eta \rightarrow \xi$ e $\pi_2 : \xi \oplus \eta \rightarrow \eta$ as projeções em cada entrada. É rotina verificar que π_1 e π_2 são morfismos de fibrados vetoriais e que $\pi_1 \circ s \in \Gamma(\xi)$ e $\pi_2 \circ s \in \Gamma(\eta)$. Note que para qualquer $x \in X$,

$$(\pi_1 \circ s, \pi_2 \circ s)(x) = (\pi_1(s(x)), \pi_2(s(x))) = s(x).$$

Ou seja, $s = (\pi_1 \circ s, \pi_2 \circ s) \in \Gamma(\xi) \times \Gamma(\eta) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$, e temos que $\Gamma(\xi \oplus \eta) \subseteq \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$.

Seja $(s_1, s_2) \in \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$. Considere as inclusões canônicas $\iota_\xi : \xi \rightarrow \xi \oplus \eta$ e $\iota_\eta : \eta \rightarrow \xi \oplus \eta$, dadas por $\iota_\xi(v) = (v, 0_{\pi(v)})$ e $\iota_\eta(v) = (0_{\pi(v)}, v)$. Novamente, é rotina verificar que ι_ξ e ι_η são morfismos de fibrados vetoriais e que $\iota_\xi \circ s_1, \iota_\eta \circ s_2 \in \Gamma(\xi \oplus \eta)$. Note que para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned} (\iota_\xi \circ s_1 + \iota_\eta \circ s_2)(x) &= \iota_\xi(s_1(x)) + \iota_\eta(s_2(x)) \\ &= (s_1(x), 0_{\pi(s_1(x))}) + (0_{\pi(s_2(x))}, s_2(x)) \\ &= (s_1(x), s_2(x)) \\ &= (s_1, s_2)(x). \end{aligned}$$

Ou seja, $(s_1, s_2) = \iota_\xi \circ s_1 + \iota_\eta \circ s_2 \in \Gamma(\xi \oplus \eta)$. Portanto, $\Gamma(\xi \oplus \eta) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$, e Γ é um funtor aditivo. ■

Teorema 3.3.6. *Seja ξ um fibrado vetorial sobre um X compacto Hausdorff. Então, $\Gamma(\xi)$ é um $C(X)$ -módulo projetivo finitamente gerado.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.3.4, temos que $\zeta \cong \eta \oplus \xi$, para algum fibrado vetorial trivial ζ , e algum subfibrado vetorial η de ζ . Assim, pela Proposição 1.1.7,

$$\Gamma(\zeta) \cong \Gamma(\eta \oplus \xi).$$

E, pelo Lema 3.3.5, temos que $\Gamma(\xi \oplus \eta) = \Gamma(\xi) \oplus \Gamma(\eta)$. Ou seja,

$$\Gamma(\zeta) \cong \Gamma(\eta) \oplus \Gamma(\xi).$$

Além disso, pela Proposição 3.3.2, $\Gamma(\zeta)$ é um $C(X)$ -módulo projetivo finitamente gerado.

Portanto, pela Proposição 1.3.13, $\Gamma(\xi)$ também é um $C(X)$ -módulo projetivo finitamente gerado. ■

3.4 Γ é essencialmente sobrejetor

Esta seção é dedicada a mostrar que se X é compacto e Hausdorff, então Γ , com o contradomínio restrito aos $C(X)$ -módulos projetivos finitamente gerados, é essencialmente sobrejetor.

Proposição 3.4.1. *Se $f : \xi \rightarrow \xi$ é morfismo idempotente de fibrados vetoriais, então $\text{im } \Gamma(f) = \Gamma(\text{im } f)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.28, $\text{im } f$ é subfibrado de ξ , ou seja, $\Gamma(\text{im } f)$ está bem definido.

Primeiro, mostraremos que $\text{im } \Gamma(f) \subseteq \Gamma(\text{im } f)$. Seja $s \in \text{im } \Gamma(f)$. Então, existe $s' \in \Gamma(\xi)$ tal que $\Gamma(f)(s') = s$, ou seja, $f \circ s' = s$, e pela Proposição 2.1.26, s é seção global de ξ . Como para qualquer $x \in X$, $s(x) = f(s'(x)) \in \text{im } f$, s é seção global de $\text{im } f$, ou seja, $s \in \Gamma(\text{im } f)$. Logo, $\text{im } \Gamma(f) \subseteq \Gamma(\text{im } f)$.

Agora, seja $s \in \Gamma(\text{im } f)$. Como $\text{im } f \subseteq \xi$, $s \in \Gamma(\xi)$. Mostremos que $\Gamma(f)(s) = s$, ou seja, $s \in \text{im } \Gamma(f)$, o que nos dá a inclusão oposta. Seja $x \in X$. Como $s(x) \in \text{im } f$, existe $v \in \xi$ tal que $f(v) = s(x)$. Como f é idempotente, temos que

$$(\Gamma(f)(s))(x) = (f \circ s)(x) = f(s(x)) = f(f(v)) = f(v) = s(x).$$

Assim, $\Gamma(f)(s) = s$. Então, $s \in \text{im } \Gamma(f)$. Logo, $\Gamma(\text{im } f) = \text{im } \Gamma(f)$. ■

Proposição 3.4.2. *Seja $f : \xi \rightarrow \xi$ um morfismo entre fibrados vetoriais sobre um X compacto e Hausdorff. Se $\Gamma(f)$ é idempotente, então f é idempotente.*

Demonstração. Para qualquer $v \in \xi$, como visto no Corolário 2.3.4, existe $s \in \Gamma(\xi)$ tal

que $s(\pi(v)) = v$. Assim,

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(s(\pi(v))) \\
 &= (f \circ s)(\pi(v)) \\
 &= (\Gamma(f)(s))(\pi(v)) \\
 &= (\Gamma(f)(\Gamma(f)(s)))(\pi(v)) \quad (\Gamma(f) \text{ idempotente}) \\
 &= (\Gamma(f)(f \circ s))(\pi(v)) \\
 &= (f \circ (f \circ s))(\pi(v)) \\
 &= f(f(s(\pi(v)))) \\
 &= f(f(v)) \\
 &= f^2(v).
 \end{aligned}$$

Portanto, $f = f^2$. Ou seja, f é idempotente. ■

Teorema 3.4.3. *Seja X compacto e Hausdorff, e P um $C(X)$ -módulo projetivo e finitamente gerado. Então, existe um fibrado vetorial ξ sobre X tal que $P \cong \Gamma(\xi)$, isto é, Γ com a contradomínio restringido aos $C(X)$ -módulos projetivos e finitamente gerados é essencialmente sobrejetor.*

Demonstração. Seja P um $C(X)$ -módulo projetivo e finitamente gerado, com n geradores. Pela Proposição 1.3.14, P é somando direto de $C(X)^n$. Pela Proposição 1.3.15, existe um $C(X)$ -morfismo idempotente

$$h : C(X)^n \longrightarrow C(X)^n$$

tal que $\text{im } h \cong P$.

Pela Proposição 3.3.1, existe um isomorfismo $\phi : C(X)^n \longrightarrow \Gamma(\zeta)$, em que ζ é o fibrado vetorial trivial $X \times \mathbb{R}^n$. Então, existe um $C(X)$ -morfismo idempotente

$$\phi \circ h \circ \phi^{-1} = g : \Gamma(\zeta) \longrightarrow \Gamma(\zeta)$$

tal que $\text{im } g \cong \text{im } h \cong P$. Pelo Teorema 3.2.4, existe um único morfismo de fibrados vetoriais

$$f : \zeta \longrightarrow \zeta$$

tal que $\Gamma(f) = g$. Assim, $\text{im } \Gamma(f) = \text{im } g \cong P$.

Como g é idempotente, $\Gamma(f)$ é idempotente. Pela Proposição 3.4.2, f também é idempotente. Pela Proposição 2.1.28, $\text{im } f$ é fibrado vetorial sobre X .

Portanto, pela Proposição 3.4.1,

$$\Gamma(\text{im } f) = \text{im } \Gamma(f) \cong P,$$

como desejado. ■

Conclusão: O Teorema 3.2.4 mostra que Γ é plenamente fiel. O Teorema 3.3.6 mostra que Γ pode ter o contradomínio restringido aos $C(X)$ -módulos projetivos finitamente gerados. O Teorema 3.4.3 mostra que Γ , quando tem seu contradomínio restringido, é essencialmente sobrejetor.

Assim, pelo Teorema 1.1.17, o funtor Γ estabelece uma equivalência entre a categoria dos fibrados vetoriais sobre um X compacto e Hausdorff e a categoria dos $C(X)$ -módulos projetivos finitamente gerados.

Referências

- BOLDRINI, J. R. G.; PEREIRA, S. do L.; SESMA, N. V. *Álgebra Linear*. 6. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2013. v. 218. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218).
- LEINSTER, T. *Basic Category Theory*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014. v. 143. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 143).
- MILIES, C. P. *Anéis e Módulos*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1972.
- SWAN, R. G. Vector bundles and projective modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 105, n. 2, p. 264–277, 1962.
- TULCEA, C. I.; TULCEA, A. I. *Álgebra Moderna: Volume 1*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1994.
- WILLARD, S. *General Topology*. 1. ed. Mineola, NY: Reprint of the 1970 edition, 2004.