UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS DO BAIRRO DA TRINDADE
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Arthur Holtrup Bianchini

EQUIVALÊNCIA DE MORITA FORTE DE C*-ÁLGEBRAS

Florianópolis, Santa Catarina – Brasil
2025

Arthur Holtrup Bianchini

EQUIVALÊNCIA DE MORITA FORTE DE C*-ÁLGEBRAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Bacharel em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss

Florianópolis, Santa Catarina – Brasil
2025

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.
Arquivo compilado às 07:56h do dia 8 de dezembro de 2025.

Arthur Holtrup Bianchini
Equivalência de Morita Forte de C*-Álgebras / Arthur Holtrup Bianchini; Orientador, Prof. Dr. Alcides Buss -- Florianópolis, Santa Catarina -- Brasil, 27 de novembro de 2025.
112 p.

Trabalho de Conclusão de Curso -- Universidade Federal de Santa Catarina, MTM -- Departamento de Matemática, CFM -- Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Equivalência de Morita, 2. Módulos de Hilbert, 3. Álgebras de Operadores, I. Prof. Dr. Alcides Buss II. Programa de Graduação em Matemática III. Equivalência de Morita Forte de C*-Álgebras

CDU 02:141:005.7

Arthur Holtrup Bianchini

EQUIVALÊNCIA DE MORITA FORTE DE C*-ÁLGEBRAS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharel em Matemática, e foi aprovado em sua forma final pelo Programa de Graduação em Matemática do MTM – Departamento de Matemática, CFM – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, Santa Catarina – Brasil, 27 de novembro de 2025.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 19/12/2025 10:28:26-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Coordenador do Programa de Graduação em Matemática

Banca Examinadora:

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
ALCIDES BUSS
Data: 08/12/2025 11:48:32-0300
CPF: ***.253.139-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Alcides Buss
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Eliezer Batista
Data: 08/12/2025 11:35:22-0300
CPF: ***.541.288-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Eliezer Batista
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 08/12/2025 17:06:20-0300
CPF: ***.173.280-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Dedicado à Morgan.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados à minha família, por todo apoio.

Agradecimentos especiais são direcionados ao meu orientador, por toda confiança, à banca examinadora, pela disponibilidade, a todos os meus professores, por todo conhecimento, e ao meu amigo, por toda paciência.

"A matemática não conhece raças nem fronteiras geográficas;
para a matemática, o mundo cultural é um só país."
(HILBERT, David)

RESUMO

Neste trabalho, a teoria da equivalência de Morita forte para C*-álgebras é exposta sistematicamente. O trabalho parte de conceitos de álgebra, como a teoria de módulos e categorias, e avança até resultados da teoria de álgebras de operadores. A investigação é estruturada em três partes. A Parte I estabelece os fundamentos algébricos, revisando a teoria dos módulos sobre anéis, introduzindo conceitos da teoria das categorias e apresentando a equivalência de Morita clássica. A Parte II transita para a análise, construindo a teoria dos C*-módulos de Hilbert, operadores adjuntáveis e "compactos", o produto tensorial interior e culminando na demonstração do Teorema da Estabilização de Kasparov. A Parte III foca no tema central, definindo a equivalência de Morita e provando que esta constitui uma relação de equivalência. O resultado principal é a demonstração do Teorema de Brown-Green-Rieffel, que estabelece a equivalência entre a equivalência de Morita forte e o isomorfismo estável para C*-álgebras σ-unitais.

Palavras-chaves: Equivalência de Morita. Módulos de Hilbert. Álgebras de Operadores.

ABSTRACT

In this work, the theory of strong Morita equivalence for C*-algebras is systematically exposed. The work begins with concepts from algebra, such as module and category theory, and advances to results in operator algebra theory. The investigation is structured in three parts. Part I establishes the algebraic foundations, reviewing the theory of modules over rings, introducing concepts from category theory, and presenting classical Morita equivalence. Part II transitions to analysis, constructing the theory of Hilbert C*-modules, adjointable and "compact" operators, the interior tensor product, and culminating in the proof of Kasparov's Stabilization Theorem. Part III focuses on the central theme, defining strong Morita equivalence and proving that it constitutes an equivalence relation. The main result is the proof of the Brown-Green-Rieffel Theorem, which establishes the equivalence between strong Morita equivalence and stable isomorphism for σ-unital C*-algebras.

Keywords: Morita Equivalence. Hilbert Modules. Operator Algebras.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é, partindo de um conhecimento de álgebra linear, cálculo, grupos e anéis, expor a teoria necessária para entender a equivalência de Morita forte de C*-álgebras. Resultados de análise funcional e de álgebras de operadores serão apresentados sem demonstração no Apêndice A, mas com as devidas referências, para tornar o texto mais acessível a leitores que não tiveram contato com essas teorias, que podem tratar os resultados temporariamente como "caixas pretas". Esta decisão também serve para tornar o texto mais conciso e focado no tema principal.

Na matemática, podemos definir relações de equivalência que particionam conjuntos em subconjuntos disjuntos. No contexto da álgebra, a estrutura interna de um anel não comutativo R pode ser abstrata. Porém, sua ação num módulo (geralmente entendida como uma função $R \times X \to X$, X um R-módulo qualquer) pode ser muito mais concreta. Com base nessa perspectiva, Kiiti Morita (森田紀一) (MORITA, 1958) propôs uma relação de equivalência entre anéis que observa apenas as categorias dos seus módulos. Tal equivalência é denominada equivalência de Morita, em sua homenagem.

A equivalência de Morita é mais fraca que um isomorfismo de anéis; anéis que não são isomorfos podem ser Morita equivalentes. Um exemplo clássico é um anel comutativo e com unidade R e o anel de matrizes $n \times n$ com entradas em R, $M_n(R)$, que são Morita equivalentes, mas claramente não isomorfos (um lado é comutativo, o outro não) para $n > 1$.

Irving Kaplansky (KAPLANSKY, 1953) conceituou a teoria básica de C*-módulos de Hilbert, um objeto com uma estrutura rica. Kaplansky desenvolveu a teoria apenas para C*-álgebras unitais e comutativas, mas já havia notado que essas hipóteses não eram necessárias. William L. Paschke (PASCHKE, 1973) desenvolveu a teoria de C*-módulos de Hilbert sobre C*-álgebras quaisquer, permitindo que Marc A. Rieffel (RIEFFEL, 1974) desenvolvesse uma teoria de uma equivalência de Morita mais forte do que a de anéis para C*-álgebras. Tais adaptações foram propostas pois a estrutura adicional de C*-álgebras não era capturada tão bem pela equivalência de Morita para anéis quaisquer. Um resultado notório de Brown, Green e Rieffel (BROWN; GREEN; RIEFFEL, 1977) estabeleceu uma definição equivalente de quando duas C*-álgebras σ-unitais são fortemente Morita equivalentes. A demonstração de tal teorema no trabalho atual depende criticamente de um teorema de Gennadii G. Kasparov (Геннадий Георгиевич Каспаров) (KASPAROV, 1980).

Na primeira parte desenvolveremos as teorias básicas de módulos, categorias e a equivalência de Morita clássica. Na segunda parte estudaremos os C*-módulos de Hilbert, o produto tensorial interior e o Teorema da Estabilização de Kasparov. Finalmente, na terceira parte, veremos a equivalência de Morita forte de C*-álgebras e o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

O Apêndice T, sobre produtos tensoriais de espaços de Hilbert e de C*-álgebras pode ser lido logo depois do fim do Capítulo 1, porém só terá utilidade a partir do Capítulo 5.

Parte I

Equivalência de Morita

1 TEORIA DOS MÓDULOS

1.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é definir a estrutura algébrica dos módulos. Nas seções 1.2 a 1.6, nós discutimos a base teórica dos módulos necessária para podermos falar sobre módulos de Hilbert na segunda parte, enquanto nas seções 1.7 e 1.8 apresentamos a teoria essencial do produto tensorial "algébrico", que servirá para construir o produto tensorial "interior" de módulos de Hilbert.

Começaremos revisando brevemente algumas noções básicas. Um ***grupo abeliano*** G é um conjunto juntamente com uma operação $+ : G \times G \to G$ que é associativa e comutativa, que possui um elemento neutro, e em que todo elemento possui um elemento inverso. Um ***anel*** R é um grupo abeliano equipado com uma operação $\cdot : R \times R \to R$ que é associativa, e tal que para $r, s, t \in R$ quaisquer, $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$ e $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$. Note que não consideraremos anéis como tendo unidade, pois queremos que uma C*-álgebra[1] não unital seja um anel. Se por acaso tiver unidade, chamaremos de anel com unidade.

1.2 MÓDULOS E BIMÓDULOS

Conhecemos também da álgebra linear os espaços vetoriais, que possuem uma soma e uma multiplicação por escalar. Os escalares de um espaço vetorial são retirados de anéis especiais denominados corpos, dos quais $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ fazem parte. O conceito a seguir estende os escalares de um corpo, para um anel qualquer.

Definição 1.1 (Módulos)**.** Seja R um anel. Um ***módulo à esquerda*** sobre R é um grupo abeliano M munido de uma operação de multiplicação por elementos de R em M, denotada por $r \cdot m$, para todo $r \in R$ e $m \in M$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$, para todo $r \in R$ e $m, n \in M$;
2. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$, para todo $r, s \in R$ e $m \in M$;
3. $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$, para todo $r, s \in R$ e $m \in M$;

Denotamos um módulo à esquerda sobre R por ${}_R M$. Caso o anel do módulo tenha unidade e $1_R \cdot m = m$, para todo $m \in M$, chamamos o módulo de ***unital***. Analogamente, um ***módulo à direita*** sobre R é um grupo abeliano M munido de uma operação de multiplicação por elementos de R em M, denotada por $m \cdot r$, para todo $r \in R$ e $m \in M$, que satisfaz as seguintes propriedades:

[1] Neste trabalho, usaremos constantemente C*-álgebras. Caso o leitor não esteja familiarizado com elas, o leitor está convidado a consultar o Apêndice A para uma breve revisão do assunto ou o trabalho de Ferreira (FERREIRA, 2024) para uma visão mais aprofundada.

1. $m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$, para todo $r, s \in R$ e $m \in M$;
2. $(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$, para todo $r \in R$ e $m, n \in M$;
3. $m \cdot (rs) = (m \cdot r) \cdot s$, para todo $r, s \in R$ e $m \in M$;

Denotamos um módulo à direita sobre R por M_R.

Nesta seção, trabalharemos principalmente com módulos à esquerda sobre um anel R, que serão chamados simplesmente de módulos, porém, quase todas as definições e resultados podem ser adaptados para módulos à direita sobre R. Além disso, eventualmente chamaremos "módulos sobre R" simplesmente de R-módulos.

Exemplo 1.2. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo F. Então V é um módulo sobre F. Em particular, se A é uma C*-álgebra, então A é um módulo sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.3. Seja A uma C*-álgebra. A é um anel, pois a operação de adição satisfaz os axiomas de grupo abeliano e a operação de multiplicação entre elementos de A é fechada, associativa e distributiva em relação à adição. Portanto, A também é um módulo sobre si mesmo.

Para um anel R, não há nada que impeça um módulo à esquerda sobre R de ser um módulo à direita sobre um outro anel S diferente de R e vice-versa. De fato, tal situação é central para a equivalência de Morita entre anéis, pois pode ser definida pela existência de um R-S-bimódulo e um S-R-bimódulo.

Definição 1.4 (Bimódulos)**.** Um R-S-***bimódulo*** ${}_RM_S$ é um módulo à esquerda sobre um anel R e à direita sobre um anel S que satisfaz a seguinte propriedade, para todo $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$:

$$r \cdot (m \cdot s) = (r \cdot m) \cdot s.$$

Exemplo 1.5. Seja $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$. Então $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ é um módulo à direita sobre $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ e um módulo à esquerda sobre $M_{m \times m}(\mathbb{C})$. Além disso, $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ é um bimódulo sobre $M_{m \times m}(\mathbb{C})$ e $M_{n \times n}(\mathbb{C})$, pois a multiplicação de matrizes é associativa e distributiva em relação à adição. Note que $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, e $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ e $M_{m \times m}(\mathbb{C})$ são C*-álgebras.

Note que se R é anel comutativo e se ${}_RM$ é R-módulo à esquerda, existe uma construção natural em que M_R é R-módulo à direita [2], ou seja, temos o R-R-bimódulo ${}_RM_R$, e vice-versa.

Um fato interessante é que todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo, de forma que os módulos são não apenas uma generalização dos espaços vetoriais, mas também dos grupos abelianos.

[2] Definimos a ação à direita por $m \cdot r := r \cdot m$ para $r \in R, m \in M$.

Exemplo 1.6. Seja G um grupo abeliano. Definimos a multiplicação por inteiros para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $g \in G$ como

$$n \cdot g := \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{n \text{ vezes}} & \text{se } n > 0, \\ 0_G & \text{se } n = 0, \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \cdots + (-g)}_{|n| \text{ vezes}} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Esta operação satisfaz as propriedades de módulo utilizando indução nas propriedades do grupo abeliano, portanto ${}_{\mathbb{Z}}G$ é um $\mathbb{Z}$-módulo.

1.3 SUBMÓDULOS

Agora vamos definir os submódulos, o que nos permitirá falar sobre a estrutura de certos subconjuntos de um módulo.

Definição 1.7 (Submódulos)**.** Seja ${}_RM$ um módulo à esquerda sobre um anel R. Um subconjunto $N \subseteq M$ é um ***submódulo*** de ${}_RM$ se N é um subgrupo de M e, para todo $r \in R$ e $n \in N$, temos $r \cdot n \in N$.

Exemplo 1.8. Seja ${}_RM$ um módulo à esquerda sobre um anel R. Então $\{0\}$ e M são submódulos de ${}_RM$, chamados de ***submódulos triviais***.

1.4 HOMOMORFISMOS DE MÓDULOS

Como é de praxe em álgebra abstrata, definimos a seguir os homomorfismos de módulos, que são funções que preservam a estrutura dos módulos.

Definição 1.9 (Homomorfismos de módulos)**.** Sejam ${}_RM$ e ${}_RN$ módulos à esquerda sobre um anel R. Um ***homomorfismo de módulos*** de ${}_RM$ em ${}_RN$ é uma função $f : {}_RM \to {}_RN$ que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $r \in R$ e $m, n \in {}_RM$:

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$;
2. $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$.

Também chamaremos homomorfismos de módulos de "R-morfismos", no futuro.

Exemplo 1.10. Sejam ${}_RM$ e ${}_RN$ módulos à esquerda sobre um anel R, e $f : {}_RM \to {}_RN$ um homomorfismo de módulos. Então o subconjunto

$$\ker f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

é um submódulo de ${}_RM$, chamado de ***núcleo*** de f. De fato, dado $m, n \in \ker f$, temos

$$\begin{aligned} f(m+n) &= f(m) + f(n) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $m + n \in \ker f$. Além disso, para qualquer $r \in R$ e $m \in \ker f$, temos

$$\begin{aligned} f(r \cdot m) &= r \cdot f(m) \\ &= r \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $r \cdot m \in \ker f$.

Exemplo 1.11. Sejam ${}_RM$ e ${}_RN$ módulos à esquerda sobre um anel R, e $f : {}_RM \to {}_RN$ um homomorfismo de módulos. Então o subconjunto

$$\operatorname{im} f = \{f(m) \mid m \in M\}$$

é um submódulo de ${}_RN$, chamado de ***imagem*** de f. De fato, para qualquer $r \in R$ e $n, n' \in \operatorname{im} f$, existem $m, m' \in M$ tais que $n = f(m)$ e $n' = f(m')$. Então

$$\begin{aligned} n + n' &= f(m) + f(m') \\ &= f(m + m') \\ &\in \operatorname{im} f, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} r \cdot n &= r \cdot f(m) \\ &= f(r \cdot m) \\ &\in \operatorname{im} f. \end{aligned}$$

Proposição 1.12. *Sejam ${}_RM$ e ${}_RN$ módulos à esquerda sobre um anel R e $f : {}_RM \to {}_RN$ um homomorfismo de módulos. Então $\ker f = \{0\}$ se, e somente se, f é injetiva.*

Demonstração. Se $\ker f = \{0\}$, então para $m, n \in M$, $f(m) = f(n)$ implica $f(m - n) = 0$, ou seja, $m - n \in \ker f = \{0\}$, o que implica $m = n$. Por outro lado, se f é injetiva, seja $m \in \ker f$. Então $f(m) = f(0) = 0$ implica $m = 0$, pois f é injetiva.

Q.E.D.

Exemplo 1.13. Seja ${}_RM$ um módulo à esquerda sobre um anel R e ${}_RN$ um submódulo de ${}_RM$. Então a função $\iota : N \to M$ dada por $\iota(n) = n$ é um homomorfismo de módulos de ${}_RN$ em ${}_RM$, e é chamada de ***inclusão canônica***. A inclusão canônica é injetiva: se $n \in \ker \iota$, então $\iota(n) = 0$, ou seja, $n = 0$.

1.5 MÓDULOS QUOCIENTES

Relembramos que, para um grupo abeliano G e um subgrupo normal $H \subseteq G$, o grupo quociente G/H é o conjunto de classes laterais à esquerda de H em G, munido da operação:

$$\begin{aligned} + : G/H \times G/H &\to G/H \\ (g+H, g'+H) &\mapsto g+g'+H. \end{aligned}$$

Todo subgrupo de um grupo abeliano é normal, então se considerarmos apenas a estrutura de grupo abeliano de um módulo à esquerda ${}_RM$ sobre R com submódulo ${}_RN$, podemos definir o módulo quociente ${}_RM/N$ definindo uma ação de R em ${}_RM/N$.

Proposição 1.14. *Seja ${}_RM$ um módulo à esquerda sobre um anel R e ${}_RN$ um submódulo de ${}_RM$. Então a ação*

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M/N &\to M/N \\ (r, m+N) &\mapsto r \cdot m + N \end{aligned}$$

*é bem-definida e torna ${}_RM/N$ um módulo à esquerda sobre R, chamado de R-**módulo quociente** de ${}_RM$ por ${}_RN$.*

Demonstração. Primeiramente, devemos mostrar que a ação está bem-definida. Dados $m+N, n+N \in {}_RM/N$ com $m+N = n+N$, temos $m-n \in N$. Como N é um submódulo, para $r \in R$ temos $r \cdot (m-n) \in N$, ou seja, $r \cdot m - r \cdot n \in N$. Portanto, $r \cdot m + N = r \cdot n + N$.

Agora verificamos as propriedades de módulo:

1. Para $r \in R$ e $m+N, n+N \in {}_RM/N$, temos:

$$\begin{aligned} r \cdot ((m+N)+(n+N)) &= r \cdot ((m+n)+N) \\ &= r \cdot (m+n) + N \\ &= (r \cdot m + r \cdot n) + N \\ &= (r \cdot m + N) + (r \cdot n + N) \\ &= r \cdot (m+N) + r \cdot (n+N). \end{aligned}$$

2. Para $r, s \in R$ e $m+N \in {}_RM/N$, temos:

$$\begin{aligned} (r+s) \cdot (m+N) &= (r+s) \cdot m + N \\ &= (r \cdot m + s \cdot m) + N \\ &= (r \cdot m + N) + (s \cdot m + N) \\ &= r \cdot (m+N) + s \cdot (m+N). \end{aligned}$$

3. Para $r, s \in R$ e $m + N \in {}_RM/N$, temos:

$$\begin{aligned} r \cdot (s \cdot (m + N)) &= r \cdot (s \cdot m + N) \\ &= r \cdot (s \cdot m) + N \\ &= (r \cdot s) \cdot m + N \\ &= (r \cdot s) \cdot (m + N). \end{aligned}$$

Portanto, ${}_RM/N$ é um módulo à esquerda sobre R.

Q.E.D.

Exemplo 1.15. Seja ${}_RM$ um módulo à esquerda sobre um anel R e ${}_RN$ um submódulo de ${}_RM$. Então a função $\pi : {}_RM \to {}_RM/N$ dada por $\pi(m) = m + N$ é um homomorfismo de módulos de ${}_RM$ em ${}_RM/N$, e é chamada de ***projeção canônica***. A projeção canônica é sobrejetiva: para qualquer $m + N \in {}_RM/N$, temos $\pi(m) = m + N$.

O seguinte teorema será utilizado numa demonstração desta parte do trabalho (mais especificamente, na do Teorema 1.31).

Teorema 1.16 (Teorema da Fatoração)**.** *Sejam ${}_RM$ e ${}_RN$ módulos à esquerda sobre R e $f : M \to N$ um R-morfismo. Então, existe um único isomorfismo $\bar{f} : M/\ker f \to \operatorname{im} f$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi$, em que $\pi : M \to M/\ker f$ é a projeção canônica. Em particular, $M/\ker f \cong \operatorname{im} f$. O diagrama a seguir comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \operatorname{im} f \\ M/\ker f \arrow[ur, "\cong", "\exists!\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Definimos a aplicação $\bar{f} : M/\ker f \to \operatorname{im} f$ por $\bar{f}(m + \ker f) = f(m)$. Primeiramente, mostramos que $\bar{f}$ está bem definida. De fato, se $m_1 + \ker f = m_2 + \ker f$, então $m_1 - m_2 \in \ker f$. Isso significa que $f(m_1 - m_2) = 0$. Como f é um homomorfismo, temos $f(m_1) - f(m_2) = 0$, o que implica $f(m_1) = f(m_2)$. Portanto, $\bar{f}(m_1 + \ker f) = \bar{f}(m_2 + \ker f)$. Agora verificamos que $\bar{f}$ é um homomorfismo de módulos. Sejam $m_1, m_2 \in M$ e $r \in R$.

$$\begin{aligned} \bar{f}((m_1 + \ker f) + (m_2 + \ker f)) &= \bar{f}((m_1 + m_2) + \ker f) \\ &= f(m_1 + m_2) \\ &= f(m_1) + f(m_2) \\ &= \bar{f}(m_1 + \ker f) + \bar{f}(m_2 + \ker f). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \bar{f}(r(m_1 + \ker f)) &= \bar{f}(rm_1 + \ker f) \\ &= f(rm_1) \\ &= rf(m_1) \\ &= r\bar{f}(m_1 + \ker f). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\bar{f}$ é injetivo. Suponha que $\bar{f}(m + \ker f) = 0$. Então $f(m) = 0$, o que significa que $m \in \ker f$. Portanto, $m + \ker f$ é a classe do zero em $M/\ker f$. Assim, $\ker \bar{f} = \{0\}$, e $\bar{f}$ é injetivo. Para mostrar que $\bar{f}$ é sobrejetivo, seja $y \in \operatorname{im} f$. Por definição, existe $m \in M$ tal que $f(m) = y$. Então

$$\begin{aligned}\bar{f}(m + \ker f) &= f(m)\\ &= y.\end{aligned}$$

Logo, $\bar{f}$ é sobrejetivo. Como $\bar{f}$ é um homomorfismo bijetivo, é um isomorfismo. A condição $f = \bar{f} \circ \pi$ segue diretamente da definição: para todo $m \in M$,

$$\begin{aligned}(\bar{f} \circ \pi)(m) &= \bar{f}(\pi(m))\\ &= \bar{f}(m + \ker f)\\ &= f(m).\end{aligned}$$

Finalmente, mostramos a unicidade de $\bar{f}$. Seja $g : M/\ker f \to \operatorname{im} f$ outro homomorfismo tal que $f = g \circ \pi$. Então, para qualquer $m \in M$, temos

$$\begin{aligned}g(m + \ker f) &= g(\pi(m))\\ &= (g \circ \pi)(m)\\ &= f(m)\\ &= \bar{f}(m + \ker f).\end{aligned}$$

Como todo elemento de $M/\ker f$ é da forma $m + \ker f$ para algum $m \in M$, concluímos que $g = \bar{f}$.

Q.E.D.

1.6 PRODUTO CARTESIANO E SOMA DIRETA

A fim de criar exemplos de novos módulos, e, no futuro, de módulos de Hilbert, iremos introduzir estruturas que relacionam módulos entre si.

Definição 1.17 (Produto Cartesiano)**.** Seja $(M_i)_{i\in I}$ uma família de R-módulos. O ***produto cartesiano*** desta família é o conjunto

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i \text{ para todo } i \in I\}$$

munido das operações de adição e multiplicação por escalar definidas coordenada a coordenada:

$$\begin{aligned}(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} &= (m_i + n_i)_{i\in I},\\ r \cdot (m_i)_{i\in I} &= (r \cdot m_i)_{i\in I},\end{aligned}$$

para todo $r \in R$ e $(m_i)_{i\in I}, (n_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$.

Proposição 1.18. *O produto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i$ é um R-módulo à esquerda.*

Demonstração. As propriedades de módulo seguem diretamente das operações coordenada a coordenada. Sejam $(m_i)_{i\in I}, (n_i)_{i\in I}, (p_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ e $r, s \in R$. Verificamos:

1. Para a distributividade de r sobre a adição:

$$\begin{aligned} r\cdot((m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I}) &= r\cdot(m_i+n_i)_{i\in I} \\ &= (r\cdot(m_i+n_i))_{i\in I} \\ &= (r\cdot m_i + r\cdot n_i)_{i\in I} \\ &= (r\cdot m_i)_{i\in I} + (r\cdot n_i)_{i\in I} \\ &= r\cdot(m_i)_{i\in I} + r\cdot(n_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

2. Para a distributividade sobre $r+s$:

$$\begin{aligned} (r+s)\cdot(m_i)_{i\in I} &= ((r+s)\cdot m_i)_{i\in I} \\ &= (r\cdot m_i + s\cdot m_i)_{i\in I} \\ &= (r\cdot m_i)_{i\in I} + (s\cdot m_i)_{i\in I} \\ &= r\cdot(m_i)_{i\in I} + s\cdot(m_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

3. Para a compatibilidade

$$\begin{aligned} r\cdot(s\cdot(m_i)_{i\in I}) &= r\cdot(s\cdot m_i)_{i\in I} \\ &= (r\cdot(s\cdot m_i))_{i\in I} \\ &= ((rs)\cdot m_i)_{i\in I} \\ &= (rs)\cdot(m_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Portanto, $\prod_{i\in I} M_i$ é um R-módulo à esquerda.

Q.E.D.

Para cada $j \in I$, definimos a ***projeção na j-ésima coordenada*** como a função $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ dada por

$$\pi_j((m_i)_{i\in I}) := m_j.$$

Esta função é um R-morfismo sobrejetivo. De fato, sejam $r \in R$ e $(m_i), (n_i) \in \prod M_i$:

1. $\pi_j((m_i)+(n_i)) = \pi_j((m_i+n_i)) = m_j + n_j = \pi_j((m_i)) + \pi_j((n_i))$.

2. $\pi_j(r\cdot(m_i)) = \pi_j((r\cdot m_i)) = r\cdot m_j = r\cdot \pi_j((m_i))$.

Ainda mais, seja $m_j \in M_j$ um elemento arbitrário. Precisamos construir um $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ tal que $\pi_j(x) = m_j$. Defina $x_i \in M_i$ como:

$$x_i = \begin{cases} m_j & \text{se } i = j, \\ 0_i & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

em que 0_i é o elemento neutro do módulo M_i. Como $x_i \in M_i$ para todo $i \in I$, temos $x \in \prod M_i$. Por definição, $\pi_j(x) = x_j = m_j$. Logo, π_j é sobrejetiva.

Definição 1.19 (Soma Direta)**.** Seja $({}_R M_i)_{i\in I}$ uma família de R-módulos. A ***soma direta*** desta família é o subconjunto do produto cartesiano definido por

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0 \text{ exceto para uma quantidade finita de índices } i \in I\}.$$

Proposição 1.20. *A soma direta $\bigoplus_{i\in I} M_i$ é um submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$.*

Demonstração. Sejam $(m_i)_{i\in I}, (n_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$. Existem conjuntos finitos $J, J' \subseteq I$ tais que $m_i = 0$ para $i \notin J$ e $n_i = 0$ para $i \notin J'$. Então $(m_i + n_i)_{i\in I}$ satisfaz $m_i + n_i = 0$ para todo $i \notin J \cup J'$. Como $J \cup J'$ é finito, temos $(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$. Seja $r \in R$. Para $i \notin J$, temos $r \cdot m_i = r \cdot 0 = 0$. Logo $r \cdot (m_i)_{i\in I} = (r \cdot m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$.

Q.E.D.

Para cada $j \in I$, a ***inclusão canônica*** é a função $\iota_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ definida por

$$\iota_j(x) := (m_i)_{i\in I}, \text{ em que } m_j = x \text{ e } m_i = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Esta função é um R-morfismo injetivo. De fato, sejam $r \in R$ e $x, y \in M_j$.

1. $\iota_j(x + y)$ é o elemento com $(x + y)$ na posição j e 0 nas demais. $\iota_j(x) + \iota_j(y)$ é a soma de (elemento com x em j) + (elemento com y em j), que é $(x + y)$ em j e 0 nas demais. Logo, $\iota_j(x + y) = \iota_j(x) + \iota_j(y)$.

2. $\iota_j(r \cdot x)$ é o elemento com $(r \cdot x)$ em j. $r \cdot \iota_j(x)$ é r vezes (elemento com x em j), que é $(r \cdot x)$ em j e 0 nas demais. Logo, $\iota_j(r \cdot x) = r \cdot \iota_j(x)$.

Ainda mais, se $x \in \ker \iota_j$, então $\iota_j(x) = 0_{\bigoplus}$. Isto significa que o elemento (m_i) é 0 em todas as coordenadas. Em particular, $m_j = x = 0$. Portanto, $\ker \iota_j = \{0\}$ e ι_j é injetiva.

Observe que se o conjunto de índices I é finito, digamos $|I| = n$, então $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$. Isso ocorre pois a condição de "suporte finito" é trivialmente satisfeita. Qualquer elemento $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ possui, no máximo, n coordenadas. Portanto, todo elemento no produto cartesiano já satisfaz a condição para pertencer à soma direta, e a restrição não impõe nenhuma condição adicional.

1.7 MÓDULOS LIVRES

Embora nosso objetivo principal, C*-álgebras, sejam anéis que podem não ter unidade, esta seção é fundamental para a construção rigorosa do produto tensorial $M \odot_R N$, que depende crucialmente da existência de um $\mathbb{Z}$-módulo livre. Como $\mathbb{Z}$ é um anel com unidade, nesta seção assumiremos que o anel R possui unidade 1_R e que os módulos são unitais ($1_R \cdot m = m$).

A noção de base é fundamental em álgebra linear para espaços vetoriais. Infelizmente, a noção de base não se generaliza para um módulo qualquer.

Definição 1.21 (Combinação Linear e Independência Linear)**.** Seja ${}_RM$ um R-módulo e $B \subseteq M$ um subconjunto não vazio.

1. Um elemento $m \in M$ é uma ***combinação linear*** de elementos de B se existem $b_1, \ldots, b_n \in B$ e $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que $m = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$.

2. O conjunto B é dito ***linearmente independente*** se, para quaisquer elementos distintos $b_1, \ldots, b_n \in B$, a equação $\sum_{i=1}^{n} r_i b_i = 0$ implica que $r_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

3. Se B gera ${}_RM$ (ou seja, todo elemento de ${}_RM$ é uma combinação linear finita de elementos de B) e é linearmente independente, então B é chamado de ***base*** de ${}_RM$.

Definição 1.22 (Módulo Livre)**.** Um R-módulo ${}_RM$ é dito ser um ***módulo livre*** se ele possui uma base.

Exemplo 1.23. Todo espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-módulo livre.

Exemplo 1.24. Nem todo módulo é livre. Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para $n > 1$. Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}_n$ é linearmente dependente. De fato, para qualquer $[k] \in \mathbb{Z}_n$ com $[k] \neq [0]$, temos $n \cdot [k] = [nk] = [0]$. Como $n \in \mathbb{Z}$ é um escalar não nulo, o conjunto $\{[k]\}$ é linearmente dependente. Portanto, nenhum subconjunto não-vazio e linearmente independente gera $\mathbb{Z}_n$. Logo, $\mathbb{Z}_n$ não possui base e não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre.

Teorema 1.25 (Unicidade da Representação)**.** *Seja ${}_RM$ um R-módulo livre com base B. Então, todo elemento $m \in M$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear finita de elementos de B.*

Demonstração. Seja B uma base para M. Por definição de base, o conjunto B gera M. Portanto, para qualquer $m \in M$, existem elementos $b_1, \ldots, b_n \in B$ (distintos) e $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que

$$m = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i.$$

Resta provar a unicidade desta representação. Suponha que m tenha uma outra representação com elementos $b'_1, \ldots, b'_k \in B$ (distintos) e $s_1, \ldots, s_k \in R$:

$$m = \sum_{j=1}^{k} s_j b'_j.$$

Igualando as duas expressões para m, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i b_i = \sum_{j=1}^{k} s_j b'_j,$$

o que nos leva a

$$\sum_{i=1}^{n} r_i b_i - \sum_{j=1}^{k} s_j b'_j = 0.$$

Seja $\{c_1, \ldots, c_p\}$ o conjunto união dos elementos de base utilizados nas duas representações, ou seja, $\{c_1, \ldots, c_p\} = \{b_1, \ldots, b_n\} \cup \{b'_1, \ldots, b'_k\}$, em que os c_l são distintos. Podemos reescrever a equação acima como uma única combinação linear:

$$\sum_{l=1}^{p} \alpha_l c_l = 0,$$

em que, para cada $l \in \{1, \ldots, p\}$, o coeficiente α_l é definido como:

1. $\alpha_l = r_i$ se $c_l = b_i$ para algum i e $c_l \notin \{b'_1, \ldots, b'_k\}$;
2. $\alpha_l = -s_j$ se $c_l = b'_j$ para algum j e $c_l \notin \{b_1, \ldots, b_n\}$;
3. $\alpha_l = r_i - s_j$ se $c_l = b_i = b'_j$ para alguns i e j.

Como B é uma base e $c_1, \ldots, c_p \in B$ são distintos, eles são linearmente independentes. Portanto, $\sum_{l=1}^{p} \alpha_l c_l = 0$ implica que $\alpha_l = 0$ para todo $l = 1, \ldots, p$. Analisamos agora as consequências de $\alpha_l = 0$ para cada l:

1. Se $c_l = b_i$ para algum i e $c_l \notin \{b'_1, \ldots, b'_k\}$, então $\alpha_l = r_i = 0$.
2. Se $c_l = b'_j$ para algum j e $c_l \notin \{b_1, \ldots, b_n\}$, então $\alpha_l = -s_j = 0$, logo $s_j = 0$.
3. Se $c_l = b_i = b'_j$ para alguns i e j, então $\alpha_l = r_i - s_j = 0$, logo $r_i = s_j$.

Dos dois primeiros casos, concluímos que qualquer elemento de base que aparece em apenas uma das representações tem coeficiente zero. Portanto, podemos eliminar tais termos das somas, e os conjuntos $\{b_i \mid r_i \neq 0\}$ e $\{b'_j \mid s_j \neq 0\}$ são idênticos. Do terceiro caso, para cada elemento de base que aparece em ambas as representações, os coeficientes coincidem. Portanto, após eliminar termos com coeficiente zero, as duas representações são idênticas: temos o mesmo conjunto de elementos de base com os mesmos coeficientes. Logo, a representação de m como combinação linear finita de elementos da base B é única.

Q.E.D.

Definição 1.26. Dado um conjunto B, o R-módulo livre com base B, denotado por $F(B)$, é definido como a soma direta de cópias de R, indexadas por B:

$$F(B) := \bigoplus_{b \in B} R_b, \quad \text{em que } R_b = R \text{ para todo } b \in B.$$

Teorema 1.27 (Propriedade Universal dos Módulos Livres)**.** *Seja R um anel, B um conjunto e ${}_RF(B)$ o R-módulo livre com base B. Seja $\iota : B \to {}_RF(B)$ a função definida em $b \in B$ por $\iota(b) = e_b$ em que e_b é o elemento de $\oplus_b R_b$ cujas componentes são 1_R na posição correspondente a b e 0_R em todas as outras posições. Para qualquer R-módulo ${}_RM$ e qualquer função $f : B \to {}_RM$, existe um único homomorfismo de R-módulos $\phi : {}_RF(B) \to {}_RM$ tal que $\phi \circ \iota = f$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & M \\ F(B) \arrow[ur, "\exists!\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $v \in {}_RF(B)$. Como B é uma base para ${}_RF(B)$, pelo teorema de unicidade da representação, v pode ser escrito unicamente como $v = \sum_{k=1}^{n} r_k b_k$ para $b_1, \ldots, b_n \in B$ distintos e $r_k \in R$ (com $r_k \neq 0$). Definimos a aplicação $\phi : {}_RF(B) \to {}_RM$ por

$$\phi(v) = \phi\left(\sum_{k=1}^{n} r_k b_k\right) := \sum_{k=1}^{n} r_k f(b_k).$$

Esta aplicação está bem definida pela unicidade da representação de v como combinação linear de elementos da base B. Vamos verificar que ϕ é um homomorfismo de R-módulos. Sejam $v, w \in {}_RF(B)$ e $r \in R$. Escrevemos $v = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$ e $w = \sum_{j=1}^{m} s_j c_j$, em que $b_i, c_j \in B$ são distintos dentro de cada soma. Seja $\{d_1, \ldots, d_p\} = \{b_1, \ldots, b_n\} \cup \{c_1, \ldots, c_m\}$ o conjunto união (com elementos distintos). Podemos reescrever:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{l=1}^{p} \alpha_l d_l, \\ w &= \sum_{l=1}^{p} \beta_l d_l, \end{aligned}$$

em que α_l (respectivamente β_l) é o coeficiente de d_l em v (respectivamente em w), ou zero se d_l não aparece na representação. Então:

$$\begin{aligned} \phi(v + w) &= \phi\left(\sum_{l=1}^{p} (\alpha_l + \beta_l) d_l\right) \\ &= \sum_{l=1}^{p} (\alpha_l + \beta_l) f(d_l) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \alpha_l f(d_l) + \sum_{l=1}^{p} \beta_l f(d_l) \\ &= \phi(v) + \phi(w). \end{aligned}$$

Para a multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} \phi(rv) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} (r r_i) b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (r r_i) f(b_i) \\ &= r \sum_{i=1}^{n} r_i f(b_i) \\ &= r\phi(v). \end{aligned}$$

Para um $b \in B$, a inclusão é $\iota(b) = b$ (visto como um elemento de ${}_RF(B)$, ou seja, $b = 1_R \cdot b$).

Então,

$$\begin{aligned}\phi(\iota(b)) &= \phi(1_R \cdot b)\\ &= 1_R \cdot f(b)\\ &= f(b),\end{aligned}$$

mostrando que $\phi \circ \iota = f$. A unicidade de ϕ segue do fato de que qualquer homomorfismo de módulos é completamente determinado por sua ação nos elementos da base: se $\psi : {}_RF(B) \to {}_RM$ é outro homomorfismo tal que $\psi \circ \iota = f$, então para qualquer $b \in B$, $\psi(\iota(b)) = f(b) = \phi(\iota(b))$, ou seja, $\psi(b) = \phi(b)$ como elementos de ${}_RF(B)$. Como os elementos de B geram ${}_RF(B)$ e ψ é homomorfismo, qualquer elemento $v = \sum_{k=1}^{n} r_k b_k$ é aplicado da mesma forma:

$$\begin{aligned}\psi(v) &= \psi\left(\sum_{k=1}^{n} r_k b_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} r_k \psi(b_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} r_k \phi(b_k)\\ &= \phi(v).\end{aligned}$$

Portanto, $\psi = \phi$.

Q.E.D.

1.8 PRODUTO TENSORIAL ALGÉBRICO

Definição 1.28. Seja M_R um R-módulo à direita e ${}_RN$ um R módulo à esquerda. Dado um $\mathbb{Z}$-módulo $A_{\mathbb{Z}}$ uma função $f : M_R \times {}_RN \to A_{\mathbb{Z}}$ é dita ser ***balanceada*** se para quaisquer $m_0, m_1 \in M_R$, $n_0, n_1 \in {}_RN$ e $\lambda \in R$, temos:

$$\begin{aligned}f(m_0 + m_1, n_0) &= f(m_0, n_0) + f(m_1, n_0),\\ f(m_0, n_0 + n_1) &= f(m_0, n_0) + f(m_0, n_1),\\ f(m_0\lambda, n_0) &= f(m_0, \lambda n_0).\end{aligned}$$

Definição 1.29 (Produto Tensorial Algébrico)**.** Sejam M_R um R-módulo à direita e ${}_RN$ um R módulo à esquerda. Um ***produto tensorial de módulos ou produto tensorial algébrico*** de M_R e ${}_RN$ é um $\mathbb{Z}$-módulo $T_{\mathbb{Z}}$ e uma função balanceada $f : M_R \times {}_RN \to T_{\mathbb{Z}}$ de forma que para todo $\mathbb{Z}$-módulo $G_{\mathbb{Z}}$ e toda função balanceada $g : M_R \times {}_RN \to G_{\mathbb{Z}}$ existe um único $\mathbb{Z}$-morfismo $h : T_{\mathbb{Z}} \to G_{\mathbb{Z}}$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_R \times {}_RN \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & G_{\mathbb{Z}} \\ T_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.30 (Unicidade)**.** *Seja* $(T_{\mathbb{Z}}, f)$ *um produto tensorial de* R*-módulos* M_R *e* ${}_RN$*. Então* $(T'_{\mathbb{Z}}, f')$ *também é um produto tensorial de* M_R *e* ${}_RN$ *se, e somente se, existe um* $\mathbb{Z}$*-isomorfismo* $k : T_{\mathbb{Z}} \to T'_{\mathbb{Z}}$ *tal que* $k \circ f = f'$*.*

Demonstração. Suponha que $(T'_{\mathbb{Z}}, f')$ também seja um produto tensorial de M_R e ${}_RN$. Como $(T_{\mathbb{Z}}, f)$ é um produto tensorial e $f' : M_R \times {}_RN \to T'_{\mathbb{Z}}$ é uma função balanceada, a propriedade universal do produto tensorial garante a existência de um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $k : T_{\mathbb{Z}} \to T'_{\mathbb{Z}}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M_R \times {}_RN \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & T'_{\mathbb{Z}} \\ & T_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "\exists! k"'] & \end{tikzcd}$$

Isto é, $k \circ f = f'$. Da mesma forma, como $(T'_{\mathbb{Z}}, f')$ é um produto tensorial e $f : M_R \times {}_RN \to T_{\mathbb{Z}}$ é uma função balanceada, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $k' : T'_{\mathbb{Z}} \to T_{\mathbb{Z}}$ tal que $k' \circ f' = f$. Agora, vamos compor esses homomorfismos. Considere a composição $k' \circ k : T_{\mathbb{Z}} \to T_{\mathbb{Z}}$. Temos:

$$\begin{aligned} (k' \circ k) \circ f &= k' \circ (k \circ f) \\ &= k' \circ f' \\ &= f. \end{aligned}$$

Assim, o homomorfismo $k' \circ k$ faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} M_R \times {}_RN \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & T_{\mathbb{Z}} \\ & T_{\mathbb{Z}} \arrow[ur, "k' \circ k"'] & \end{tikzcd}$$

No entanto, o homomorfismo identidade $\mathrm{id}_{T_{\mathbb{Z}}} : T_{\mathbb{Z}} \to T_{\mathbb{Z}}$ também satisfaz $\mathrm{id}_{T_{\mathbb{Z}}} \circ f = f$. Pela unicidade garantida pela propriedade universal de $(T_{\mathbb{Z}}, f)$, o homomorfismo que satisfaz essa condição é único. Portanto, devemos ter

$$k' \circ k = \mathrm{id}_{T_{\mathbb{Z}}}.$$

Um argumento análogo se aplica à composição $k \circ k' : T'_{\mathbb{Z}} \to T'_{\mathbb{Z}}$. Temos:

$$\begin{aligned} (k \circ k') \circ f' &= k \circ (k' \circ f') \\ &= k \circ f \\ &= f'. \end{aligned}$$

Considerando o homomorfismo identidade $\mathrm{id}_{T'_{\mathbb{Z}}} : T'_{\mathbb{Z}} \to T'_{\mathbb{Z}}$, que também satisfaz $\mathrm{id}_{T'_{\mathbb{Z}}} \circ f' = f'$, a unicidade garantida pela propriedade universal de $(T'_{\mathbb{Z}}, f')$ implica que

$$k \circ k' = \mathrm{id}_{T'_{\mathbb{Z}}}.$$

Como k e k' são inversos um do outro, k é um isomorfismo. Agora, suponha que exista um $\mathbb{Z}$-isomorfismo $k : T_\mathbb{Z} \to T'_\mathbb{Z}$ tal que $k \circ f = f'$. Devemos mostrar que $(T'_\mathbb{Z}, f')$ é um produto tensorial. Seja $G_\mathbb{Z}$ um $\mathbb{Z}$-módulo qualquer e $g : M_R \times {}_RN \to G_\mathbb{Z}$ uma função balanceada qualquer. Como $(T_\mathbb{Z}, f)$ é um produto tensorial, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $h : T_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$ tal que $h \circ f = g$. Nosso objetivo é encontrar um único homomorfismo $h' : T'_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$ tal que $h' \circ f' = g$. Defina $h' := h \circ k^{-1} : T'_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$. Este é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos bem definido, pois h e k^{-1} o são. Vamos verificar se ele satisfaz a condição desejada:

$$\begin{aligned} h' \circ f' &= (h \circ k^{-1}) \circ f' \\ &= h \circ (k^{-1} \circ f'). \end{aligned}$$

Da nossa hipótese, $k \circ f = f'$. Aplicando k^{-1} pela esquerda, obtemos $f = k^{-1} \circ f'$. Substituindo isso na equação acima, temos:

$$h' \circ f' = h \circ f.$$

Pela definição de h, sabemos que $h \circ f = g$. Portanto, $h' \circ f' = g$, o que mostra a existência do homomorfismo h'. Para provar a unicidade, suponha que exista outro homomorfismo $h'' : T'_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$ tal que $h'' \circ f' = g$. Considere o homomorfismo $h'' \circ k : T_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$. Temos:

$$\begin{aligned} (h'' \circ k) \circ f &= h'' \circ (k \circ f) \\ &= h'' \circ f' \\ &= g. \end{aligned}$$

Tanto $h : T_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$ quanto $h'' \circ k : T_\mathbb{Z} \to G_\mathbb{Z}$ são homomorfismos que, quando compostos com f, resultam em g. Pela unicidade do homomorfismo garantida pela propriedade universal de $(T_\mathbb{Z}, f)$, devemos ter

$$h'' \circ k = h.$$

Aplicando k^{-1} pela direita, obtemos $h'' = h \circ k^{-1}$. Mas esta era exatamente a nossa definição de h'. Portanto, $h'' = h'$, e o homomorfismo é único. Concluímos que $(T'_\mathbb{Z}, f')$ satisfaz a propriedade universal e, portanto, é um produto tensorial de M_R e ${}_RN$.

Q.E.D.

Teorema 1.31 (Existência)**.** *Dados M_R um R-módulo à direita e ${}_RN$ um R módulo à esquerda, existe um produto tensorial desses dois módulos, denotado por $(M \odot_R N, \odot)$*[3]*.*

Demonstração. Seja ${}_\mathbb{Z}F$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre tendo o produto cartesiano $M_R \times {}_RN$ como base. Os elementos de ${}_\mathbb{Z}F$ são combinações lineares finitas de elementos de $M_R \times {}_RN$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Um elemento de ${}_\mathbb{Z}F$ tem a forma $\sum_{i=1}^k n_i(m_i, y_i)$, em que $n_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in M_R$ e $y_i \in {}_RN$.

[3] A notação $\odot$ ao invés da mais usual $\otimes$ se deve ao grande número de produtos tensoriais diferentes no trabalho. Como regra, $\odot$ significa um produto tensorial algébrico, e $\otimes$ um produto tensorial analítico.

Denotaremos um elemento da base $(m, y) \in M_R \times {}_RN$ por $[m, y]$. Assim, todo elemento de ${}_{\mathbb{Z}}F$ pode ser escrito de forma única como $\sum_{i=1}^{k} n_i[m_i, y_i]$. Agora, considere o submódulo ${}_{\mathbb{Z}}H$ de ${}_{\mathbb{Z}}F$ gerado por todos os elementos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&[m + m', y] - [m, y] - [m', y],\\
&[m, y + y'] - [m, y] - [m, y'],\\
&[m\alpha, y] - [m, \alpha y],
\end{aligned}$$

em que $m, m' \in M_R$, $y, y' \in {}_RN$ e $\alpha \in R$. Definimos $M \odot_R N$ de M_R e ${}_RN$ sobre R como o $\mathbb{Z}$-módulo quociente

$$M \odot_R N := {}_{\mathbb{Z}}F/H.$$

A imagem de um gerador $[m, y]$ no módulo quociente é denotada por $m \odot y$. Ou seja,

$$m \odot y := [m, y] + H.$$

Vamos provar que $(M \odot_R N, \odot)$ satisfaz a propriedade universal do produto tensorial. Primeiro, a aplicação $\odot : M_R \times {}_RN \to M \odot_R N$ dada por $(m, y) \mapsto m \odot y$ é balanceada. Prova de que $(m + m') \odot y = m \odot y + m' \odot y$:

$$\begin{aligned}
(m + m') \odot y - m \odot y - m' \odot y &= ([m + m', y] + H) - ([m, y] + H) - ([m', y] + H)\\
&= ([m + m', y] - [m, y] - [m', y]) + H.
\end{aligned}$$

Como $[m + m', y] - [m, y] - [m', y]$ é um dos geradores de ${}_{\mathbb{Z}}H$, este elemento é a classe do zero em ${}_{\mathbb{Z}}F/H$. Portanto, a igualdade é válida. Prova de que $m \odot (y + y') = m \odot y + m \odot y'$:

$$\begin{aligned}
m \odot (y + y') - m \odot y - m \odot y' &= ([m, y + y'] + H) - ([m, y] + H) - ([m, y'] + H)\\
&= ([m, y + y'] - [m, y] - [m, y']) + H.
\end{aligned}$$

Como $[m, y + y'] - [m, y] - [m, y']$ é um dos geradores de ${}_{\mathbb{Z}}H$, este elemento é a classe do zero em ${}_{\mathbb{Z}}F/H$. Portanto, a igualdade é válida. Prova de que $(m\alpha) \odot y = m \odot (\alpha y)$:

$$\begin{aligned}
(m\alpha) \odot y - m \odot (\alpha y) &= ([m\alpha, y] + H) - ([m, \alpha y] + H)\\
&= ([m\alpha, y] - [m, \alpha y]) + H.
\end{aligned}$$

Como $[m\alpha, y] - [m, \alpha y]$ é um dos geradores de ${}_{\mathbb{Z}}H$, este elemento é a classe do zero em ${}_{\mathbb{Z}}F/H$. Portanto, a igualdade é válida. Agora, seja ${}_{\mathbb{Z}}G$ um $\mathbb{Z}$-módulo qualquer e seja $g : M_R \times {}_RN \to {}_{\mathbb{Z}}G$ uma aplicação balanceada. Queremos construir um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\phi : M \odot_R N \to {}_{\mathbb{Z}}G$ tal que $\phi \circ \odot = g$. Pela propriedade universal dos módulos livres (Teorema 1.27), como $M_R \times {}_RN$ é base de ${}_{\mathbb{Z}}F$, a aplicação g pode ser estendida de forma única a um homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\tilde{g} : {}_{\mathbb{Z}}F \to {}_{\mathbb{Z}}G$ tal que $\tilde{g}([m, y]) = g(m, y)$ para todo $(m, y) \in M_R \times {}_RN$. Ou seja, o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M_R \times {}_R N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"] & {}_{\mathbb{Z}}G \\ {}_{\mathbb{Z}}F \arrow[ur, "\exists! \tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

em que ι é a inclusão da base. Agora, como g é balanceada, o homomorfismo $\tilde{g}$ se anula em todos os geradores de ${}_{\mathbb{Z}}H$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \tilde{g}([m+m',y]-[m,y]-[m',y]) &= \tilde{g}([m+m',y])-\tilde{g}([m,y])-\tilde{g}([m',y]) \\ &= g(m+m',y)-g(m,y)-g(m',y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois g é aditiva no primeiro argumento. Para o segundo tipo de gerador:

$$\begin{aligned} \tilde{g}([m,y+y']-[m,y]-[m,y']) &= \tilde{g}([m,y+y'])-\tilde{g}([m,y])-\tilde{g}([m,y']) \\ &= g(m,y+y')-g(m,y)-g(m,y') \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois g é aditiva no segundo argumento. Finalmente, para o terceiro tipo de gerador:

$$\begin{aligned} \tilde{g}([m\alpha,y]-[m,\alpha y]) &= \tilde{g}([m\alpha,y])-\tilde{g}([m,\alpha y]) \\ &= g(m\alpha,y)-g(m,\alpha y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois g satisfaz a propriedade de balanceamento. Como $\tilde{g}$ é um homomorfismo, ele se anula em todo o submódulo ${}_{\mathbb{Z}}H$, ou seja, ${}_{\mathbb{Z}}H \subseteq \ker(\tilde{g})$. Pelo Teorema 1.16, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\phi : {}_{\mathbb{Z}}F/H \to {}_{\mathbb{Z}}G$ tal que $\tilde{g} = \phi \circ \pi$, em que $\pi : {}_{\mathbb{Z}}F \to {}_{\mathbb{Z}}F/H$ é a projeção canônica.

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathbb{Z}}F \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\pi"] & {}_{\mathbb{Z}}G \\ {}_{\mathbb{Z}}F/H \arrow[ur, "\exists! \phi"'] & \end{tikzcd}$$

Juntando tudo, para qualquer $(m,y) \in M_R \times {}_R N$, temos:

$$\begin{aligned} \phi(m \odot y) &= \phi(\pi([m,y])) \\ &= (\phi \circ \pi)([m,y]) \\ &= \tilde{g}([m,y]) \\ &= g(m,y). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\phi \circ \odot = g$. A unicidade de ϕ segue da unicidade de $\tilde{g}$ e do fato de que os elementos $m \odot y$ geram $M \odot_R N$. Portanto, $(M \odot_R N, \odot)$ é o produto tensorial de M_R e ${}_R N$ sobre R.

Q.E.D.

Para identificar qual produto tensorial estamos nos referindo, um produto tensorial de espaços vetoriais será denotado por $V \odot W$, sem o subíndice $\mathbb{C}$ quando não houver ambiguidade.

Proposição 1.32. *No produto tensorial $M \odot_R N$, os* **tensores puros (ou elementares)** *satisfazem as seguintes identidades para todos $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$:*

1. $$0 \odot n = 0 \text{ e } m \odot 0 = 0.$$

2. $$(m + m') \odot n = m \odot n + m' \odot n,$$
$$m \odot (n + n') = m \odot n + m \odot n'.$$

3. $$(m \cdot r) \odot n = m \odot (r \cdot n).$$

4. $$(-m) \odot n = -(m \odot n) = m \odot (-n).$$

Demonstração. Estas propriedades são consequências diretas da construção do produto tensorial como o quociente F/H (Teorema 1.31).

1. As propriedades 2. e 3. são exatamente as relações que definem o submódulo H. Por exemplo, a igualdade $(m + m') \odot n = m \odot n + m' \odot n$ é equivalente a dizer que o elemento $[m + m', n] - [m, n] - [m', n]$ pertence a H, o que é verdadeiro por definição.

2. Para mostrar que $0 \odot n = 0$, usamos a distributividade com $m = 0$ e $m' = 0$:
$$0 \odot n = (0 + 0) \odot n = 0 \odot n + 0 \odot n.$$
Subtraindo $0 \odot n$ de ambos os lados (no grupo abeliano $M \odot_R N$), obtemos $0 = 0 \odot n$. O argumento para $m \odot 0 = 0$ é análogo.

3. Para os inversos aditivos, observamos que:
$$0 = 0 \odot n = (m + (-m)) \odot n = m \odot n + (-m) \odot n.$$
Logo, $(-m) \odot n$ é o inverso aditivo de $m \odot n$.

Q.E.D.

Exemplo 1.33. Em $\mathbb{Z}_2 \odot_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$, todo elemento é nulo. De fato, podemos escrever $1 = 3 - 2$.

Então, para qualquer $x \odot y$:

$$\begin{aligned} x \odot y &= x \cdot 1 \odot y \\ &= x \cdot (3-2) \odot y \\ &= x \cdot 3 \odot y - x \cdot 2 \odot y \\ &= x \odot 3y - 2x \odot y \\ &= x \odot 0 - 0 \odot y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{Z}_2 \odot_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 \cong \{0\}$.

Exemplo 1.34. Em $\mathbb{Q} \odot_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$, os tensores puros se comportam como o produto usual. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \odot \frac{9}{4} &= \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) \odot \frac{9}{4} \\ &= \frac{1}{3} \odot \left(2 \cdot \frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{1}{3} \odot \frac{9}{2} \\ &= 1 \odot (\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}) \\ &= 1 \odot \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Proposição 1.35. *Sejam M_R, M'_R módulos à direita e $_RN,_R N'$ módulos à esquerda. Se $f : M_R \to M'_R$ e $g : {}_RN \to {}_RN'$ são homomorfismos de R-módulos, então existe um único homomorfismo de grupos abelianos*

$$f \odot g : M \odot_R N \to M' \odot_R N'$$

tal que $(f \odot g)(m \odot n) = f(m) \odot g(n)$ para todo $m \in M, n \in N$.

Demonstração. Defina a função $h : M \times N \to M' \odot_R N'$ por $h(m,n) = f(m) \odot g(n)$. Vamos verificar se h é balanceada. Para aditividade:

$$\begin{aligned} h(m_1 + m_2, n) &= f(m_1 + m_2) \odot g(n) \\ &= (f(m_1) + f(m_2)) \odot g(n) \\ &= f(m_1) \odot g(n) + f(m_2) \odot g(n) \\ &= h(m_1, n) + h(m_2, n). \end{aligned}$$

Analogamente para a segunda variável. Para o balanceamento por R, seja $r \in R$:

$$\begin{aligned} h(mr, n) &= f(mr) \odot g(n) \\ &= (f(m)r) \odot g(n) \\ &= f(m) \odot (rg(n)) \\ &= f(m) \odot g(rn) \\ &= h(m, rn). \end{aligned}$$

Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo $f \odot g$ tal que o diagrama comuta, o que garante a propriedade desejada. **Q.E.D.**

Até agora, construímos o produto tensorial $M \odot_R N$ de um módulo à direita M_R e um módulo à esquerda $_RN$ como um $\mathbb{Z}$-módulo (grupo abeliano). No entanto, quando os módulos envolvidos possuem estruturas adicionais de bimódulos, o produto tensorial herda naturalmente uma estrutura de bimódulo compatível.

Proposição 1.36. *Sejam A, R e B anéis. Se M é um (A, R)-bimódulo ($_AM_R$) e N é um (R, B)-bimódulo ($_RN_B$), então o produto tensorial $M \odot_R N$ admite uma estrutura de (A, B)-bimódulo ($_A(M \odot_R N)_B$), com as ações definidas por:*

$$\begin{aligned} a \cdot (m \odot n) &:= (a \cdot m) \odot n, \quad \textit{para todo } a \in A, m \in M, n \in N, \\ (m \odot n) \cdot b &:= m \odot (n \cdot b), \quad \textit{para todo } m \in M, n \in N, b \in B. \end{aligned}$$

Demonstração. Precisamos mostrar que essas ações estão bem-definidas e satisfazem os axiomas de bimódulo. Fixado $a \in A$, definimos a função $f_a : M \times N \to M \odot_R N$ por $f_a(m, n) = (a \cdot m) \odot n$. Esta função é balanceada:

1.

$$\begin{aligned} f_a(m + m', n) &= (a \cdot (m + m')) \odot n \\ &= (a \cdot m + a \cdot m') \odot n \\ &= (a \cdot m) \odot n + (a \cdot m') \odot n \\ &= f_a(m, n) + f_a(m', n). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f_a(m, n + n') &= (a \cdot m) \odot (n + n') \\ &= (a \cdot m) \odot n + (a \cdot m) \odot n' \\ &= f_a(m, n) + f_a(m, n'). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f_a(m \cdot r, n) &= (a \cdot (m \cdot r)) \odot n \\ &= ((a \cdot m) \cdot r) \odot n \\ &= (a \cdot m) \odot (r \cdot n) \\ &= f_a(m, r \cdot n). \end{aligned}$$

Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\phi_a : M \odot_R N \to M \odot_R N$ tal que $\phi_a(m \odot n) = (a \cdot m) \odot n$. Definimos então $a \cdot (m \odot n) := \phi_a(m \odot n) = (a \cdot m) \odot n$. De forma análoga, para $b \in B$ fixado, a função $g_b : M \times N \to M \odot_R N$

dada por $g_b(m,n) = m \odot (n \cdot b)$ é balanceada. A verificação é similar à anterior, usando que N é um (R,B)-bimódulo. Pela propriedade universal, obtemos um único homomorfismo $\psi_b : M \odot_R N \to M \odot_R N$ tal que $(m \odot n) \cdot b := \psi_b(m \odot n) = m \odot (n \cdot b)$. Precisamos verificar que $M \odot_R N$ com essas ações é um (A,B)-bimódulo. Como $M \odot_R N$ é gerado por elementos da forma $m \odot n$, basta verificar os axiomas nesses geradores:

1.
$$\begin{aligned}(a+a') \cdot (m \odot n) &= ((a+a') \cdot m) \odot n \\ &= (a \cdot m + a' \cdot m) \odot n \\ &= (a \cdot m) \odot n + (a' \cdot m) \odot n \\ &= a \cdot (m \odot n) + a' \cdot (m \odot n).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(m \odot n) \cdot (b+b') &= m \odot (n \cdot (b+b')) \\ &= m \odot (n \cdot b + n \cdot b') \\ &= m \odot (n \cdot b) + m \odot (n \cdot b') \\ &= (m \odot n) \cdot b + (m \odot n) \cdot b'.\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}(a \cdot a') \cdot (m \odot n) &= ((a \cdot a') \cdot m) \odot n \\ &= (a \cdot (a' \cdot m)) \odot n \\ &= a \cdot ((a' \cdot m) \odot n) \\ &= a \cdot (a' \cdot (m \odot n)).\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(m \odot n) \cdot (b \cdot b') &= m \odot (n \cdot (b \cdot b')) \\ &= m \odot ((n \cdot b) \cdot b') \\ &= (m \odot (n \cdot b)) \cdot b' \\ &= ((m \odot n) \cdot b) \cdot b'.\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}a \cdot ((m \odot n) \cdot b) &= a \cdot (m \odot (n \cdot b)) \\ &= (a \cdot m) \odot (n \cdot b) \\ &= ((a \cdot m) \odot n) \cdot b \\ &= (a \cdot (m \odot n)) \cdot b.\end{aligned}$$

Portanto, $M \odot_R N$ é um (A,B)-bimódulo com as ações definidas acima.

Q.E.D.

2 TEORIA DAS CATEGORIAS

2.1 CATEGORIAS

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos da teoria das categorias necessários para entender a equivalência de Morita entre anéis. Ao longo do primeiro capítulo, utilizamos implicitamente ideias categóricas ao definir produtos (produtos cartesianos) e coprodutos (somas diretas) de módulos, por exemplo. Neste capítulo, formalizaremos essa teoria, o que nos permitirá enunciar com precisão conceitos fundamentais como funtores, transformações naturais e equivalências de categorias.

Definição 2.1 (Categorias)**.** Uma ***categoria localmente pequena*** ou somente ***categoria***[1] $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Uma classe $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ de ***objetos***;

2. Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, um conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de ***morfismos*** de A para B;

3. Para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, um morfismo $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado de ***identidade*** de A;

4. Para objetos $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, uma função $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, chamada de ***composição***, que satisfaz as seguintes propriedades:

   a) *Associatividade:* Para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, temos $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

   b) *Identidade:* Para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, temos $f \circ \mathrm{id}_A = f$ e $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

Note que nas definições de objetos, utilizamos a palavra *classe* ao invés de *conjunto*. Isso é necessário para definir categorias em sua maior generalidade, para evitar paradoxos, como o paradoxo de Russell, que diz que "um conjunto de todos os conjuntos" não existe. No entanto, abusaremos da notação e trataremos $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ como conjunto.

Exemplo 2.2. A categoria $\mathbf{Set}$ consiste de:

1. A classe $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ de todos os conjuntos;

2. Para cada par de conjuntos A, B, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ de todas as funções de A para B;

3. Para cada conjunto A, a função identidade $\mathrm{id}_A : A \to A$ dada por $\mathrm{id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$;

[1] Chamamos só de "categoria" neste trabalho para encurtar a escrita, mas nem toda categoria é localmente pequena.

4. Para cada tripla de conjuntos A, B, C, a composição de funções.

Exemplo 2.3. A categoria $\mathbf{Grp}$ consiste de:

1. A classe $\mathrm{Obj}(\mathbf{Grp})$ de todos os grupos;
2. Para cada par de grupos G, H, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ de todos os homomorfismos de grupos de G para H;
3. Para cada grupo G, o homomorfismo de grupos $\mathrm{id}_G : G \to G$ dado por $\mathrm{id}_G(g) = g$;
4. Para cada tripla de grupos G, H, K, a composição de homomorfismos de grupos.

Exemplo 2.4. A categoria $\mathbf{Ab}$ consiste de:

1. A classe $\mathrm{Obj}(\mathbf{Ab})$ de todos os grupos abelianos;
2. Para cada par de grupos abelianos A, B, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, B)$ de todos os homomorfismos de grupos de A para B;
3. Para cada grupo abeliano A, o homomorfismo de grupos $\mathrm{id}_A : A \to A$;
4. Para cada tripla de grupos abelianos A, B, C, a composição de homomorfismos.

Exemplo 2.5. A categoria $\mathbf{Rng}$ consiste de:

1. A classe $\mathrm{Obj}(\mathbf{Rng})$ de todos os anéis;
2. Para cada par de anéis R, S, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rng}}(R, S)$ de todos os homomorfismos de anéis de R para S;
3. Para cada anel R, o homomorfismo de anéis $\mathrm{id}_R : R \to R$ dado por $\mathrm{id}_R(r) = r$ para todo $r \in R$;
4. Para cada tripla de anéis R, S, T, a composição de homomorfismos de anéis.

Exemplo 2.6. A categoria R-$\mathbf{Mod}$ consiste de:

1. A classe $\mathrm{Obj}(R\text{-}\mathbf{Mod})$ de todos os módulos à esquerda sobre um anel R;
2. Para cada par de módulos à esquerda ${}_RM$, ${}_RN$, o conjunto $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}({}_RM, {}_RN)$ de todos os homomorfismos de módulos de ${}_RM$ para ${}_RN$;
3. Para cada módulo à esquerda ${}_RM$, o homomorfismo de módulos $\mathrm{id}_M : {}_RM \to {}_RM$ dado por $\mathrm{id}_M(m) = m$ para todo $m \in M$;
4. Para cada tripla de módulos à esquerda ${}_RM$, ${}_RN$, ${}_RP$, a composição de homomorfismos de módulos.

Exemplo 2.7. A categoria C*-$\mathbf{Alg}$ consiste de:

1. A classe $\mathrm{Obj}(\text{C*-}\mathbf{Alg})$ de todas as C*-álgebras;
2. Para cada par de C*-álgebras A, B, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\text{C*-}\mathbf{Alg}}(A, B)$ de todos os $*$-homomorfismos de C*-álgebras de A para B;
3. Para cada C*-álgebra A, o $*$-homomorfismo de C*-álgebras $\mathrm{id}_A : A \to A$ dado por $\mathrm{id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$;
4. Para cada tripla de C*-álgebras A, B, C, a composição de $*$-homomorfismos de C*-álgebras.

Proposição 2.8. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Então para todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, id_A é único.*

Demonstração. Sejam id_A e id'_A identidades de A. Então $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}'_A = \mathrm{id}'_A$.

Q.E.D.

2.2 SUBCATEGORIAS

Definição 2.9 (Subcategoria)**.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma ***subcategoria*** de $\mathcal{C}$ se:

1. $\mathrm{Obj}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$;
2. Para todo par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;
3. Para todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, temos $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, A)$;
4. Para todo par de objetos $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, temos $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, C)$.

Exemplo 2.10. A categoria $\mathbf{Ring}$ é uma subcategoria de $\mathbf{Rng}$.

1. $\mathrm{Obj}(\mathbf{Ring})$ é a classe de todos os anéis com unidade.
2. Para $R, S \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Ring})$, o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, S)$ é o conjunto de todos os homomorfismos de anéis unitais, ou seja, homomorfismos de anéis $f : R \to S$ que satisfazem $f(1_R) = 1_S$.

Note que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, S)$ é um subconjunto de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rng}}(R, S)$, mas não é igual (pois $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rng}}$ não exige a preservação da unidade).

2.3 MONOMORFISMOS, EPIMORFISMOS E ISOMORFISMOS

Definição 2.11 (Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos)**.** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um:

1. ***monomorfismo*** se, para todo objeto C e morfismos $g, h : C \to A$, temos $f \circ g = f \circ h$

implica $g = h$;

2. ***epimorfismo*** se, para todo objeto C e morfismos $g, h : B \to C$, temos $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$;

3. ***isomorfismo*** se existe um morfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Dizemos que dois objetos A, B em $\mathcal{C}$ são ***isomorfos*** se existe um isomorfismo $f : A \to B$, e escrevemos $A \cong B$.

2.4 FUNTORES E TRANSFORMAÇÕES NATURAIS

Definição 2.12 (Funtores)**.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um ***funtor covariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função que associa a cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ um objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ e a cada morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ em $\mathcal{D}$, de forma que:

1. Para todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, temos $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;

2. Para todo par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$, temos $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Um ***funtor contravariante*** assume as mesmas propriedades, mas com a composição de morfismos trocada: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Essencialmente, funtores são aplicações entre categorias que preservam as estruturas dos objetos e morfismos, mantendo a identidade e a composição.

Exemplo 2.13. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O ***funtor identidade*** $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é dado por $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ para todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo morfismo f em $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.14 (Funtor de Esquecimento)**.** Um exemplo canônico é o funtor que "esquece" parte da estrutura algébrica de um objeto. Considere o funtor $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, denominado ***funtor de esquecimento***.

1. Para um grupo $(G, \cdot)$, definimos $U(G) = G$, ou seja, U leva o grupo no seu conjunto subjacente de elementos, esquecendo a operação de grupo.

2. Para um homomorfismo de grupos $\phi : G \to H$, definimos $U(\phi) = \phi$, vendo agora ϕ apenas como uma função entre conjuntos.

Como homomorfismos de grupos são, por definição, funções que preservam a operação, a composição de funções e a função identidade são preservadas.

Exemplo 2.15 (Funtor Módulo Livre)**.** Fixe um anel R. Podemos construir um funtor $F : \mathbf{Set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ que cria a estrutura de módulo a partir de um conjunto, utilizando a teoria exposta na Seção 1.7.

1. Para cada conjunto $B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, definimos $F(B)$ como o R-módulo livre com base B (Definição 1.29), ou seja, $F(B) = \bigoplus_{b \in B} R$.

2. Para cada função $f : B \to C$ entre conjuntos, utilizamos a Propriedade Universal dos Módulos Livres (Teorema 1.27). A função composta $\iota_C \circ f : B \to F(C)$ induz um único homomorfismo de R-módulos $\bar{f} : F(B) \to F(C)$. Definimos então $F(f) := \bar{f}$.

A preservação da identidade e da composição decorre da unicidade garantida pela propriedade universal.

Exemplo 2.16 (Funtor Produto Tensorial)**.** Sejam R e S anéis e ${}_SQ_R$ um (S, R)-bimódulo fixado. O funtor produto tensorial $F : R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ é definido por $F(-) = Q \odot_R (-)$:

1. Para cada R-módulo à esquerda ${}_RM$, define-se $F({}_RM) = Q \odot_R M$, que é um S-módulo à esquerda (pois Q é um (S, R)-bimódulo e M é um R-módulo, logo $Q \odot_R M$ herda a estrutura de S-módulo à esquerda).

2. Para cada homomorfismo de R-módulos $f : {}_RM \to {}_RN$, define-se o homomorfismo de S-módulos

$$F(f) = \mathrm{id}_Q \odot f : Q \odot_R M \to Q \odot_R N$$

dado por $F(f)(q \odot m) = q \odot f(m)$ para todo $q \in Q$ e $m \in M$.

Para definir rigorosamente o homomorfismo $F(f) = \mathrm{id}_Q \odot f$, devemos usar a Propriedade Universal do produto tensorial (Teorema 1.31). Considere a aplicação $h : Q \times M \to Q \odot_R N$ definida por:

$$h(q, m) := q \odot f(m)$$

Devemos mostrar que h é R-balanceada para invocar a Propriedade Universal de $Q \odot_R M$.

1. $$\begin{aligned} h(q + q', m) &= (q + q') \odot f(m) \\ &= q \odot f(m) + q' \odot f(m) \\ &= h(q, m) + h(q', m). \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} h(q, m + m') &= q \odot f(m + m') \\ &= q \odot (f(m) + f(m')) \\ &= q \odot f(m) + q \odot f(m') \\ &= h(q, m) + h(q, m'). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} h(q \cdot r, m) &= (q \cdot r) \odot f(m) \\ &= q \odot (r \cdot f(m)) \\ &= q \odot f(r \cdot m) \\ &= h(q, r \cdot m) \end{aligned}$$

Como h é R-balanceada, pela Propriedade Universal de $Q \odot_R M$, existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $F(f) : Q \odot_R M \to Q \odot_R N$ tal que $F(f)(q \odot m) = h(q, m) = q \odot f(m)$. Isto prova que $F(f)$ está bem-definido. Verificamos que F é um funtor:

1. Para $\mathrm{id}_M : M \to M$,

$$\begin{aligned} F(\mathrm{id}_M)(q \odot m) &= q \odot \mathrm{id}_M(m) \\ &= q \odot m, \end{aligned}$$

   logo $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{Q \odot_R M}$.

2. Para $f : M \to N$ e $g : N \to P$,

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(q \odot m) &= q \odot (g \circ f)(m) \\ &= q \odot g(f(m)) \\ &= F(g)(q \odot f(m)) \\ &= F(g)(F(f)(q \odot m)) \\ &= (F(g) \circ F(f))(q \odot m). \end{aligned}$$

Definição 2.17 (Transformações Naturais)**.** Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma ***transformação natural*** $\eta : F \to G$ é uma família de morfismos $\eta_A : F(A) \to G(A)$ em $\mathcal{D}$, um para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, de forma que para todo morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Um ***isomorfismo natural*** é uma transformação natural $\eta : F \to G$ em que cada η_A é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.

Exemplo 2.18 (Abelianização de Grupos)**.** Seja $\mathbf{Grp}$ a categoria dos grupos e $\mathbf{Ab}$ a categoria dos grupos abelianos. Considere o funtor identidade $I : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ e o funtor composto $U \circ (\cdot)^{ab}$, em que $(\cdot)^{ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ é o funtor de abelianização que envia G para $G^{ab} = G/[G, G]$, e $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ é a inclusão. Para cada grupo G, a projeção canônica $\pi_G : G \to G^{ab}$ define uma transformação natural $\pi : I \to U \circ (\cdot)^{ab}$. Para qualquer homomorfismo $\phi : G \to H$, o diagrama comuta pela propriedade universal do quociente:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_G} & G^{ab} \\ \phi\Big\downarrow & & \Big\downarrow\phi^{ab} \\ H & \xrightarrow{\pi_H} & H^{ab} \end{array}$$

Exemplo 2.19. Seja $\mathbf{Vect}_K$ a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo K. Considere o funtor identidade $\mathrm{id}_{\mathbf{Vect}_K}$ e o funtor dual duplo $(\cdot)^{**} : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$. Para cada espaço vetorial V, existe uma aplicação linear injetiva canônica $\psi_V : V \to V^{**}$ definida por $\psi_V(v)(f) = f(v)$ para todo $v \in V$ e $f \in V^*$. A família ψ é uma transformação natural (e, neste caso, um isomorfismo natural) entre a identidade e o funtor dual duplo. Para qualquer transformação linear $T : V \to W$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi_V} & V^{**} \\ T\Big\downarrow & & \Big\downarrow T^{**} \\ W & \xrightarrow{\psi_W} & W^{**} \end{array}$$

Exemplo 2.20. Fixe um anel comutativo R. Considere a categoria R-$\mathbf{Mod}$. Podemos definir dois funtores $F, G : R\text{-}\mathbf{Mod} \times R\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ dados por $F(M,N) = M \odot_R N$ e $G(M,N) = N \odot_R M$. Para cada par de módulos (M,N), existe um isomorfismo canônico $\tau_{M,N} : M \odot_R N \to N \odot_R M$ definido nos geradores por $\tau_{M,N}(m \odot n) = n \odot m$. Esta família de isomorfismos constitui uma transformação natural (na verdade, um isomorfismo natural), expressando a simetria do produto tensorial algébrico.

Podemos dizer agora quando duas categorias são equivalentes:

Definição 2.21 (Categorias Equivalentes)**.** Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ***equivalentes*** se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\epsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$. Denotamos isso por $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Com isso, estamos preparados para a equivalência de Morita.

2.5 EQUIVALÊNCIA DE MORITA DE ANÉIS

Nesta seção, assumiremos que todos os anéis possuem unidades. Até agora, expusemos a teoria de módulos e introduzimos conceitos básicos de teoria das categorias. Finalmente conectaremos essas duas áreas através da equivalência de Morita como motivação para estudarmos a equivalência de Morita forte no final do trabalho. Existem duas formulações equivalentes de equivalência de Morita de nosso interesse. Neste trabalho, não provaremos que as duas formulações são equivalentes.

Definição 2.22 (Equivalência de Morita)**.** Dois anéis R e S são ditos ***Morita equivalentes***, denotado por $R \sim_{\text{も}} S$[2]., se as categorias de módulos à esquerda R-$\mathbf{Mod}$ e S-$\mathbf{Mod}$ são equivalentes.

[2] O símbolo "も" é o caractere hiragana japonês que se lê "mo", usado aqui brevemente em homenagem à Kiiti Morita (森田紀一). A notação usual é $R \sim_M S$.

Proposição 2.23. *Sejam R e S anéis. Se existem bimódulos ${}_SQ_R$ e ${}_RP_S$, e isomorfismos de bimódulos equilibrados*

$$\epsilon : Q \otimes_R P \to S \quad \text{e} \quad \eta : P \otimes_S Q \to R,$$

então os funtores

$$F : R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}, \quad F(M) = Q \otimes_R M$$

e

$$G : S\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}, \quad G(N) = P \otimes_S N$$

estabelecem uma equivalência de categorias.

Demonstração. Observe primeiramente que F está bem definido: como ${}_SQ_R$ é um bimódulo, $Q \otimes_R M$ herda uma estrutura de S-módulo à esquerda via $s \cdot (q \otimes m) = (sq) \otimes m$. O mesmo vale para G. Para provar a equivalência, construímos isomorfismos naturais. Seja M um R-módulo. Temos:

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(M) &= P \otimes_S (Q \otimes_R M) \\
&\cong (P \otimes_S Q) \otimes_R M \\
&\xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}_M} R \otimes_R M \\
&\cong M.
\end{aligned}$$

A composição destas funções define o isomorfismo natural $\alpha_M : (G \circ F)(M) \to M$. A construção de $\beta : F \circ G \to \mathrm{id}_{S\text{-}\mathbf{Mod}}$ é análoga.

Q.E.D.

A segunda formulação, mais construtiva, caracteriza a equivalência de Morita através da existência de certos bimódulos.

Definição 2.24 (Contexto de Morita)**.** Um ***contexto de Morita*** entre anéis R e S consiste de:

1. Um (R, S)-bimódulo ${}_RP_S$;
2. Um (S, R)-bimódulo ${}_SQ_R$;
3. Dois homomorfismos de bimódulos

   $$\tau : P \odot_S Q \to R \quad \text{e} \quad \sigma : Q \odot_R P \to S$$

   tais que:

   a) $\tau(p \odot q) \cdot p' = p \cdot \sigma(q \odot p')$ para todos $p, p' \in P$ e $q \in Q$;
   b) $\sigma(q \odot p) \cdot q' = q \cdot \tau(p \odot q')$ para todos $q, q' \in Q$ e $p \in P$.

O contexto é chamado de ***contexto de Morita exato*** se τ e σ são isomorfismos[3].

Exemplo 2.25. Todo anel R com unidade é Morita equivalente ao anel de matrizes $M_n(R)$ para qualquer $n \geq 1$. De fato, considere os bimódulos:

$$P = R^n = \{(r_1, \ldots, r_n) : r_i \in R\} \quad \text{como } R\text{-}M_n(R)\text{-bimódulo},$$

$$Q = M_{n\times 1}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} : r_i \in R \right\} \quad \text{como } M_n(R)\text{-}R\text{-bimódulo.}$$

A ação à esquerda de R sobre P é componente a componente, e a ação à direita de $M_n(R)$ sobre P é dada pela multiplicação matriz-vetor linha usual. Analogamente, a ação à esquerda de $M_n(R)$ sobre Q é a multiplicação matriz-coluna usual, e a ação à direita de R sobre Q é componente a componente. Definimos os homomorfismos:

$$\tau : P \odot_{M_n(R)} Q \to R$$
$$(r_1, \ldots, r_n) \odot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} r_i s_i,$$
$$\sigma : Q \odot_R P \to M_n(R)$$
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \odot (s_1, \ldots, s_n) \mapsto \begin{pmatrix} r_1 s_1 & \cdots & r_1 s_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n s_1 & \cdots & r_n s_n \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que τ e σ são homomorfismos de bimódulos. A aditividade é imediata pelas propriedades da multiplicação matricial. Para a compatibilidade com os escalares, sejam $r \in R$, $M \in M_n(R)$, $p \in P$ e $q \in Q$. Para τ, temos:

$$\begin{aligned} \tau(r \cdot p \odot q) &= \tau((rp_1, \ldots, rp_n) \odot q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (rp_i) q_i \\ &= r \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \\ &= r \cdot \tau(p \odot q). \end{aligned}$$

E analogamente,

$$\begin{aligned} \tau(p \odot q \cdot r) &= \tau(p \odot (q_1 r, \ldots, q_n r)^T) \\ &= \sum p_i (q_i r) \\ &= (\sum p_i q_i) r \\ &= \tau(p \odot q) \cdot r. \end{aligned}$$

[3] Normalmente, pede-se apenas que sejam epimorfismos, porém pode-se demonstrar que se forem epimorfismos, serão automaticamente isomorfismos.

Para σ, note que a ação de R comuta com as entradas da matriz:

$$\begin{aligned}\sigma(q \odot p \cdot M) &= q(pM)\\ &= (qp)M\\ &= \sigma(q \odot p) \cdot M.\end{aligned}$$

Agora verificamos as condições de associatividade do contexto de Morita.

1. Para a primeira condição $\tau(p \odot q) \cdot p' = p \cdot \sigma(q \odot p')$, sejam $p, p' \in P$ e $q \in Q$. O lado esquerdo é escalar multiplicando vetor:

$$\tau(p \odot q) \cdot p' = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k q_k\right)(p'_1, \dots, p'_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k q_k p'_1, \dots, \sum_{k=1}^{n} p_k q_k p'_n\right).$$

   O lado direito é vetor multiplicando matriz ($1 \times n$ por $n \times n$):

$$\begin{aligned}p \cdot \sigma(q \odot p') &= (p_1, \dots, p_n)\begin{pmatrix} q_1 p'_1 & \cdots & q_1 p'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n p'_1 & \cdots & q_n p'_n\end{pmatrix}\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k (q_k p'_1), \dots, \sum_{k=1}^{n} p_k (q_k p'_n)\right).\end{aligned}$$

   Pela associatividade de R, as expressões são idênticas.

2. Para a segunda condição $\sigma(q \odot p) \cdot q' = q \cdot \tau(p \odot q')$, sejam $q, q' \in Q$ e $p \in P$. O lado esquerdo é matriz multiplicando vetor ($n \times n$ por $n \times 1$):

$$\begin{aligned}\sigma(q \odot p) \cdot q' &= \begin{pmatrix} q_1 p_1 & \cdots & q_1 p_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n p_1 & \cdots & q_n p_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q'_1 \\ \vdots \\ q'_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} (q_1 p_k) q'_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} (q_n p_k) q'_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \sum_{k=1}^{n} p_k q'_k \\ \vdots \\ q_n \sum_{k=1}^{n} p_k q'_k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   O lado direito é vetor multiplicando escalar:

$$q \cdot \tau(p \odot q') = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n\end{pmatrix}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k q'_k\right) = \begin{pmatrix} q_1 (\sum_{k=1}^{n} p_k q'_k) \\ \vdots \\ q_n (\sum_{k=1}^{n} p_k q'_k)\end{pmatrix}.$$

   Novamente, as expressões coincidem.

Por fim, a sobrejetividade. Para τ, dado $r \in R$, escolhendo $p = (r, 0, \dots, 0)$ e $q = (1, 0, \dots, 0)^T$, temos $\tau(p \odot q) = r \cdot 1 = r$. Para σ, dado qualquer elemento da base canônica de matrizes $E_{ij} \in M_n(R)$ (que possui 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais), tome

$q = e_i$ (vetor coluna com 1 na posição i) e $p = e_j^T$ (vetor linha com 1 na posição j). Então $\sigma(e_i \odot e_j^T) = e_i e_j^T = E_{ij}$. Como σ é linear, gera todo $M_n(R)$. Como os anéis possuem unidade, a sobrejetividade dos homomorfismos no contexto de Morita implica que são isomorfismos.

A teoria de equivalência de Morita para anéis fornece o modelo algébrico para a equivalência de Morita forte entre C*-álgebras, que será exposta na última parte deste trabalho. Porém, antes disso, temos que falar sobre C*-módulos de Hilbert, que farão um papel similar aos módulos sobre anéis na equivalência de Morita forte de C*-álgebras.

REFERÊNCIAS DA PARTE I

As referências principais utilizadas para a teoria desta parte do trabalho foram:

1. (BLYTH, 1990)
2. (JACOBSON, 2012)

Parte II

Módulos de Hilbert

3 MÓDULOS DE HILBERT

3.1 DEFINIÇÃO

Seja A um C*-álgebra. Um ***módulo com produto interno sobre a C*-álgebra*** A é um módulo à direita E_A sobre A e um espaço vetorial sobre os complexos munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_A \times E_A \to A$ que satisfaz para $x, y, z \in E_A$ e $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
3. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
4. $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$;
5. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

Na primeira parte, usamos módulos à esquerda, apesar que lidaremos apenas com módulos à direita a partir de agora. Isso foi feito de propósito, para que a mudança de direção deixe claro que o produto interno será ***conjugado-linear na primeira variável***, ao contrário do que é esperado (ser linear na primeira), ou seja, para $x, y \in E_A$ e $a \in A$:

$$\langle xa, y \rangle = a^* \langle x, y \rangle.$$

Gostaríamos de adicionar uma norma a esta estrutura, para poder fazer um completamento. Para isso, vamos provar uma versão do Teorema de Cauchy-Schwarz, que necessita de um lema primeiro.

Lema 3.1. *Seja A uma C*-álgebra e $a \in A$. Então para todo elemento positivo $c \in A$ temos:*

$$a^*ca \leq ||c||a^*a.$$

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que A é unital. De fato, se A não for unital, considere sua unitização A^+ (Teorema A.6). A é um ideal fechado de A^+. Os elementos $a, c \in A$ são também elementos de A^+. Como c é positivo em A, seu espectro $\sigma_A(c) \subseteq [0, \infty)$. O espectro em A^+ é $\sigma_{A^+}(c) = \sigma_A(c) \cup \{0\}$, que também está contido em $[0, \infty)$. Assim, c é positivo em A^+. Além disso, a norma de c é a mesma em A e A^+ (pois $||c|| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(c)\}$).

Como A^+ é unital e $c \in A^+$ é positivo, pelo cálculo funcional contínuo (Teorema A.17), temos $\sigma(c) \subseteq [0, ||c||]$. Isso implica que o elemento $(||c|| \cdot 1 - c)$ é positivo, ou seja, $c \leq ||c|| \cdot 1$. Multiplicando por a^* à esquerda e por a à direita, obtemos a desigualdade em A^+:

$$\begin{aligned} a^*ca &\leq a^*(||c|| \cdot 1)a \\ &= ||c||a^*a. \end{aligned}$$

Como $a, c \in A$ e A é um ideal, os elementos a^*ca e a^*a pertencem ambos a A. A desigualdade $||c||a^*a - a^*ca \geq 0$ é, portanto, uma relação entre elementos de A.

Q.E.D.

Teorema 3.2 ("Cauchy-Schwarz")**.** *Se E_A é um módulo com produto interno sobre uma C*-álgebra A, então para todo $x, y \in E_A$ temos*

$$\langle x, y\rangle^*\langle x, y\rangle \leq ||\langle x, x\rangle||\langle y, y\rangle.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in E_A$. Se $x = 0$ ou $y = 0$, a desigualdade é trivial. Caso contrário, defina $\lambda = ||\langle x, x\rangle||^{-\frac{1}{2}}$ e $x' = \lambda x$. Assim, podemos assumir sem perda de generalidade que $||\langle x, x\rangle|| = 1$. Defina $a := \langle x, y\rangle \in A$. Então

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle xa - y, xa - y\rangle \\
&= \langle xa, xa\rangle - \langle xa, y\rangle - \langle y, xa\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= a^*\langle x, x\rangle a - a^*\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle a + \langle y, y\rangle \\
&\leq a^*a - a^*\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle a + \langle y, y\rangle \\
&= a^*a - a^*a - a^*a + \langle y, y\rangle \\
&= -a^*a + \langle y, y\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle x, y\rangle^*\langle x, y\rangle \leq ||\langle x, x\rangle||\langle y, y\rangle$.

Q.E.D.

Proposição 3.3. *Para todo $x \in E_A$, definimos a norma de x como $||x|| := \sqrt{||\langle x, x\rangle||}$. Com a norma definida, E_A é um espaço normado.*

Demonstração. Sejam $x, y \in E_A$, $a \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$. O fato que $||x|| = 0$ se, e somente se, $x = 0$ segue diretamente da definição do produto interno, assim como a não-negatividade da norma. Para provar a homogeneidade da multiplicação por escalar, note que:

$$\begin{aligned}
||\alpha x||^2 &= ||\langle \alpha x, \alpha x\rangle|| \\
&= ||\overline{\alpha}\alpha\langle x, x\rangle|| \\
&= |\alpha|^2||\langle x, x\rangle|| \\
&= |\alpha|^2||x||^2.
\end{aligned}$$

Conclui-se que $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$. Para a compatibilidade com a ação à direita, temos:

$$\begin{aligned}
||xa||^2 &= ||\langle xa, xa\rangle|| \\
&= ||a^*\langle x, x\rangle a|| \\
&\leq ||a^*|| \cdot ||\langle x, x\rangle|| \cdot ||a|| \\
&= ||a||^2 \cdot ||x||^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $||xa|| \leq ||x|| \cdot ||a||$. Isso nos diz também que o produto interno é contínuo, o que usaremos mais para frente. Por fim, a desigualdade triangular. Temos:

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= ||\langle x+y, x+y\rangle|| \\ &= ||\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle|| \\ &\leq ||\langle x,x\rangle|| + ||\langle x,y\rangle|| + ||\langle y,x\rangle|| + ||\langle y,y\rangle|| \\ &= ||x||^2 + 2||\langle x,y\rangle|| + ||y||^2.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2 (Cauchy-Schwarz), temos

$$\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle \leq ||\langle x,x\rangle||\langle y,y\rangle,$$

o que implica

$$\begin{aligned}||\langle x,y\rangle||^2 &= ||\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle|| \\ &\leq ||(||\langle x,x\rangle||)\langle y,y\rangle|| \\ &= ||\langle x,x\rangle|| \cdot ||\langle y,y\rangle|| \\ &= ||x||^2||y||^2.\end{aligned}$$

Logo, $||\langle x,y\rangle|| \leq ||x|| \cdot ||y||$. Substituindo acima,

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2.\end{aligned}$$

Portanto, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Q.E.D.

Um módulo com produto interno sobre uma C*-álgebra A é chamado de A-***módulo de Hilbert*** se é completo com respeito à norma induzida pelo produto interno. Em seguida, damos diversos exemplos, tanto concretos como abstratos.

3.2 EXEMPLOS

Exemplo 3.4. Seja A uma C*-álgebra. Então A é um A-módulo de Hilbert com o produto interno dado por $\langle a,b\rangle := a^*b$.

Demonstração. Vejamos que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ satisfaz as propriedades de um produto interno, pois já sabemos que uma C*-álgebra é um módulo sobre si mesmo com a ação à direita sendo a multiplicação usual de elementos de uma C*-álgebra. Sejam $a,b,c \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $\langle a,a\rangle = a^*a \geq 0$. Além disso, $\langle a,a\rangle = 0$ se, e somente se, $a^*a = 0$. Isso implica $||a^*a|| = 0$. Pela identidade C*, $||a||^2 = ||a^*a|| = 0$, o que implica $||a|| = 0$, e portanto $a = 0$.

2. $\langle a, b\rangle = a^*b$. Por outro lado, $\langle b, a\rangle^* = (b^*a)^* = a^*(b^*)^* = a^*b$.

3. $\langle a, b + c\rangle = a^*(b + c) = a^*b + a^*c = \langle a, b\rangle + \langle a, c\rangle$.

4. $\langle a, bc\rangle = a^*(bc) = (a^*b)c = \langle a, b\rangle c$.

5. $\langle a, \alpha b\rangle = a^*(\alpha b) = \alpha(a^*b) = \alpha\langle a, b\rangle$.

Portanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno sobre A. Resta verificar a completude. A norma induzida por este produto interno é:

$$||a||_{E_A} = \sqrt{||\langle a, a\rangle||} = \sqrt{||a^*a||}.$$

Pela identidade C*, $||a^*a|| = ||a||^2$. Logo, $||a||_{E_A} = \sqrt{||a||^2} = ||a||$. A norma induzida é precisamente a norma da C*-álgebra A. Como A é uma C*-álgebra, ela é por definição uma álgebra de Banach, sendo assim um espaço de Banach e, portanto, completa com respeito à sua norma. Logo, A é um A-módulo de Hilbert.

Q.E.D.

Exemplo 3.5. Seja A uma C*-álgebra e $I \trianglelefteq A$ um ideal fechado à direita. Então I é um A-módulo de Hilbert com a ação de A (multiplicação à direita) e o produto interno herdado de A:

$$\langle x, y\rangle := x^*y \quad \text{para } x, y \in I.$$

Demonstração. Devemos verificar os axiomas. Primeiro, I é um módulo à direita sobre A por definição de ideal à direita. O produto $\langle x, y\rangle = x^*y$ leva $I \times I$ em A. Sejam $x, y, z \in I$, $a \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $\langle x, x\rangle = x^*x$. Como $x \in A$, $x^*x \geq 0$. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x^*x = 0$. Pela identidade C*, $||x||^2 = ||x^*x|| = 0$, o que implica $x = 0$.

2. $\langle x, y\rangle^* = (x^*y)^* = y^*(x^*)^* = y^*x = \langle y, x\rangle$.

3. $\langle x, y + z\rangle = x^*(y + z) = x^*y + x^*z = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

4. $\langle x, ya\rangle = x^*(ya) = (x^*y)a = \langle x, y\rangle a$.

5. $\langle x, \alpha y\rangle = x^*(\alpha y) = \alpha(x^*y) = \alpha\langle x, y\rangle$.

Finalmente, I deve ser completo com a norma induzida. A norma induzida é:

$$\begin{aligned} ||x||_I &= \sqrt{||\langle x, x\rangle||_A} \\ &= \sqrt{||x^*x||_A}. \end{aligned}$$

Pela identidade C*, $||x^*x||_A = ||x||_A^2$. Portanto, $||x||_I = \sqrt{||x||_A^2} = ||x||_A$. A norma do módulo é simplesmente a norma da C*-álgebra A restrita ao subespaço I. A é uma C*-álgebra, logo é um espaço de Banach. Por hipótese, I é um ideal fechado. Um subespaço fechado de um espaço completo é completo. Portanto, I é um A-módulo de Hilbert.

Q.E.D.

Exemplo 3.6. Seja $A = \mathbb{C}$, a C*-álgebra dos números complexos. Um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert E é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Se $A = \mathbb{C}$, a ação do módulo à direita $E \times \mathbb{C} \to E$ é apenas a multiplicação escalar usual. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \to \mathbb{C}$ deve satisfazer:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^* = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
4. $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$ (para $a \in \mathbb{C}$). Isso é $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

A norma induzida é:

$$\begin{aligned} ||x||_E &= \sqrt{||\langle x, x \rangle||_{\mathbb{C}}} \\ &= \sqrt{|\langle x, x \rangle|} \\ &= \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

Esta é exatamente a definição de um espaço com produto interno. Se E é completo com respeito a esta norma, é um espaço de Hilbert.

Q.E.D.

Exemplo 3.7. Sejam A uma C*-álgebra, $n, m \in \mathbb{N}$, e $M_m(A)$ a C*-álgebra das matrizes $m \times m$ sobre A. Seja $E = M_{n,m}(A)$ o espaço das matrizes $n \times m$ sobre A. E é um $M_m(A)$-módulo de Hilbert à direita.

Demonstração. A ação do módulo $E \times M_m(A) \to E$ é a multiplicação de matrizes usual $(x \cdot a)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_{ik} a_{kj}$. O produto interno com valores em $M_m(A)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to M_m(A)$, é definido por:

$$\langle x, y \rangle := x^* y$$

em que $x^* \in M_{m,n}(A)$ é a matriz adjunta (transposta e adjunta em cada entrada). O produto $x^* y$ é da forma $(m \times n) \times (n \times m)$, resultando em uma matriz $m \times m$, como esperado.

1. $\langle x, x \rangle = x^* x$. Este é um elemento positivo na C*-álgebra $M_m(A)$. Se $x^* x = 0$, então $x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle^* = (x^* y)^* = y^* (x^*)^* = y^* x = \langle y, x \rangle$.
3. $\langle x, y + z \rangle = x^* (y + z) = x^* y + x^* z = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
4. $\langle x, ya \rangle = x^* (ya) = (x^* y) a = \langle x, y \rangle a$.

A norma induzida é:

$$\begin{aligned} ||x||_E &= \sqrt{||\langle x, x\rangle||_{M_m(A)}} \\ &= \sqrt{||x^*x||_{M_m(A)}} \end{aligned}$$

Pela identidade C*, $||x^*x|| = ||x||^2$. $M_{n,m}(A)$ é isomorfo a A^{nm} e, portanto, é completo, pois A é completo.

Q.E.D.

Exemplo 3.8. Seja A uma C*-álgebra e $\{E_i\}_{i\in I}$ um conjunto finito de A-módulos de Hilbert. Então

$$\prod_{i\in I} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$$

é um A-módulo de Hilbert.

Demonstração. Que $\prod_{i\in I} E_i$ é um módulo sobre o anel A segue do fato que cada E_i é um módulo sobre A, e que $\prod_{i\in I} E_i$ é um espaço vetorial complexo segue do fato que cada E_i é um espaço vetorial complexo. Portanto, só nos falta equipar $\prod_{i\in I} E_i$ com um produto interno com valores em A e mostrar que o espaço é completo em relação a norma induzida. Sejam $x = (x_i)_{i\in I}$ e $y = (y_i)_{i\in I}$, elementos em $\prod_{i\in I} E_i$. Definimos $\langle x, y\rangle := \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_i$. Se trata de uma soma finita de elementos de A, então essa definição faz sentido.

1. $\langle x, x\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle_i \geq 0$, pois é uma soma de elementos positivos. Além disso, $\langle x, x\rangle = 0$ se, e somente se, $\sum_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle_i = 0$. Seja $a_i = \langle x_i, x_i\rangle_i \geq 0$ e $c = \sum a_j \geq 0$. Então $c - a_i = \sum_{j\neq i} a_j \geq 0$, o que implica $a_i \leq c$. Se $c = 0$, então $a_i \leq 0$. Temos $a_i = 0$ para todo i. Pela definição de módulo de Hilbert, $\langle x_i, x_i\rangle_i = 0$ implica $x_i = 0$ para todo $i \in I$. Portanto, $x = 0$.

2. $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_i = \sum_{i\in I}\langle y_i, x_i\rangle_i^* = \left(\sum_{i\in I}\langle y_i, x_i\rangle_i\right)^* = \langle y, x\rangle^*$.

3. $\langle x, y + z\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i + z_i\rangle_i = \sum_{i\in I}(\langle x_i, y_i\rangle_i + \langle x_i, z_i\rangle_i) = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_i + \sum_{i\in I}\langle x_i, z_i\rangle_i = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

4. $\langle x, ya\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i a\rangle_i = \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_i a = \left(\sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_i\right) a = \langle x, y\rangle a$.

5. $\langle x, \alpha y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x_i, \alpha y_i\rangle_i = \sum_{i\in I} \alpha\langle x_i, y_i\rangle_i = \alpha \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle_i = \alpha\langle x, y\rangle$.

Portanto, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno. Para mostrar a completude, seja $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\prod_{i\in I} E_i$. Então dado $\epsilon > 0$, para cada $i \in I$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $u_i \geq N_i$ faz

$$||x_i^{(u)} - y_i|| < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}}$$

Considerando que $E = E_1 \times \ldots \times E_k$. Seja $u > \max\{N_1, \ldots, N_k\}$. Então

$$\begin{aligned} ||x^{(u)} - y||^2 &= ||\sum_{l=1}^{k} \langle x_l^{(u)} - y_l, x_l^{(u)} - y_l \rangle|| \\ &= \sum_{l=1}^{k} ||x_l^{(u)} - y_l||^2 \\ &= \sum_{l=1}^{k} \frac{\epsilon^2}{k} \\ &= \epsilon^2 \end{aligned}$$

Portanto, $||x^{(u)} - y|| < \epsilon$.

Q.E.D.

Dado um subconjunto de um A-módulo de Hilbert, definimos um A-***submódulo de Hilbert*** da maneira esperada: o subconjunto deve ser fechado em todas as operações do A-módulo de Hilbert, além de ser fechado. Da mesma forma, ***homomorfismos de módulos de Hilbert*** são funções que preservam toda a estrutura de módulos de Hilbert: soma, multiplicação por escalar e ação numa C*-álgebras.

4 OPERADORES EM MÓDULOS DE HILBERT

4.1 OPERADORES ADJUNTÁVEIS

Seja E_A um módulo de Hilbert sobre uma C*-álgebra A. Se F_A é um A-submódulo de Hilbert de E_A, definimos

$$F_A^{\perp} = \{y \in E_A \,|\, \forall x \in F_A,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Proposição 4.1. *$F_A^{\perp}$ é um A-submódulo fechado de Hilbert de E_A.*

Demonstração. De fato, se $x, y \in F_A^{\perp}$, $z \in F_A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, e $a \in A$, então

$$\begin{aligned}\langle z, \alpha x + ya\rangle &= \langle z, \alpha x\rangle + \langle z, ya\rangle \\ &= \alpha\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle a \\ &= \alpha \cdot 0 + 0 \cdot a \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $\alpha x + ya \in F_A^{\perp}$, e portanto $F_A^{\perp}$ é um A-submódulo. Para ver que $F_A^{\perp}$ é fechado, note que para cada $x \in F_A$, o conjunto

$$\ker\langle x, \cdot\rangle = \{y \in E_A : \langle x, y\rangle = 0\}$$

é fechado, pois é a pré-imagem do conjunto fechado $\{0\}$ pela função contínua $y \mapsto \langle x, y\rangle$. Como

$$F_A^{\perp} = \bigcap_{x \in F_A} \ker\langle x, \cdot\rangle,$$

segue que $F_A^{\perp}$ é a intersecção de conjuntos fechados, e portanto é fechado.

Q.E.D.

Porém, não é necessariamente verdade que $F_A^{\perp\perp} = F_A$, como acontece em espaços de Hilbert. Isto está interligado com o fato de que em todo espaço de Hilbert, todo operador possui um adjunto, ou seja, para $T : H \to H$ operador no espaço de Hilbert H, existe um operador $T^* : E \to E$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

para $x, y \in H$.

Exemplo 4.2. Seja $A = C_0(\mathbb{R})$ a C*-álgebra das funções contínuas que se anulam no infinito, e considere o A-módulo de Hilbert padrão $E_A = A$ com produto interno $\langle f, g\rangle = f^* g$. Seja $F_A = \{f \in A : f(0) = 0\}$, que é um A-submódulo fechado. Afirmamos que $F_A^{\perp} = \{0\}$. De fato, seja $g \in F_A^{\perp}$. Isso significa que $\langle f, g\rangle = \overline{f} g = 0$ para todo $f \in F_A$. Suponha que existe $t_0 \neq 0$ tal que $g(t_0) \neq 0$. Como $t_0 \neq 0$, podemos construir (usando o Lema de Urysohn ou uma construção explícita) uma função $f \in C_0(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ (logo $f \in F_A$) e $f(t_0) = 1$.

Para esta f, temos

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle(t_0) &= \overline{f(t_0)}g(t_0)\\ &= \overline{1}\cdot g(t_0)\\ &= g(t_0)\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Isso contradiz $\overline{f}g = 0$. Portanto, $g(t) = 0$ para todo $t \neq 0$. Como $g \in C_0(\mathbb{R})$, g é contínua em 0. Assim,

$$\begin{aligned}g(0) &= \lim_{t\to 0} g(t)\\ &= \lim_{t\to 0} 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclui-se que $g(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $g = 0$. Portanto, $F_A^{\perp} = \{0\}$. Assim,

$$\begin{aligned}F_A^{\perp\perp} &= \{0\}^{\perp}\\ &= E_A\\ &\neq F_A.\end{aligned}$$

Este contraexemplo mostra que nem todo operador de um módulo de Hilbert tem um adjunto. Por isso, definimos para E_A e F_A módulos de Hilbert sobre uma C*-álgebra A as ***funções adjuntáveis*** $\mathcal{L}_A(E, F)$ como sendo todas as funções $T : E_A \to F_A$ tais que exista uma outra função $T^* : F_A \to E_A$ de forma que para todo $x \in E_A$ e todo $y \in F_A$,

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Proposição 4.3. *Se tal função T^* existe, ela é única.*

Demonstração. Suponha que existam $S, Q : F_A \to E_A$ tais que

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \langle x, Sy\rangle\\ &= \langle x, Qy\rangle\end{aligned}$$

para todos $x \in E_A$ e $y \in F_A$. Então

$$\begin{aligned}\langle x, Sy\rangle - \langle x, Qy\rangle &= \langle x, Sy - Qy\rangle\\ &= 0\end{aligned}$$

para todo $x \in E_A$. Como o produto interno é não-degenerado, necessariamente $Sy - Qy = 0$, o que nos diz que $Sy = Qy$ para todo $y \in F_A$, e assim $S = Q$.

Q.E.D.

Proposição 4.4. *Toda função adjuntável $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$ é linear sobre A e sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Dados $x, x' \in E_A$, $y \in F_A$, $a \in A$, e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle T(x + x'a), y \rangle &= \langle x + x'a, T^* y \rangle \\
&= \langle x, T^* y \rangle + a^* \langle x', T^* y \rangle \\
&= \langle Tx, y \rangle + a^* \langle Tx', y \rangle \\
&= \langle Tx, y \rangle + \langle Tx'a, y \rangle \\
&= \langle Tx + Tx'a, y \rangle.
\end{aligned}$$

Como o produto interno é não-degenerado, $T(x + x'a) = Tx + Tx'a$. Similarmente,

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha x), y \rangle &= \langle \alpha x, T^* y \rangle \\
&= \overline{\alpha} \langle x, T^* y \rangle \\
&= \overline{\alpha} \langle Tx, y \rangle \\
&= \langle \alpha Tx, y \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

Q.E.D.

Proposição 4.5. *Toda função adjuntável $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$ é limitada.*

Demonstração. Usaremos o teorema do gráfico fechado (Teorema A.13). Suponha que exista uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to x$ em E_A tal que $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \to y$ em F_A. Então para todo $z \in F_A$, e lembrando que o produto interno sobre A é contínuo,

$$\begin{aligned}
\langle Tx, z \rangle &= \langle x, T^* z \rangle \\
&= \left\langle \lim_{n \to \infty} x_n, T^* z \right\rangle \\
&= \lim_{n \to \infty} \langle x_n, T^* z \rangle \\
&= \lim_{n \to \infty} \langle Tx_n, z \rangle \\
&= \left\langle \lim_{n \to \infty} Tx_n, z \right\rangle \\
&= \langle y, z \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $y = Tx$, e pelo Teorema A.13, a função é limitada.

Q.E.D.

Denotamos em particular $\mathcal{L}_A(E, E)$ por $\mathcal{L}_A(E)$, cujos elementos são chamados de ***operadores adjuntáveis***. Este último conjunto, por ser de operadores lineares e limitados em um espaço de Banach (todo A-módulo de Hilbert é, em particular, um espaço de Banach), é uma álgebra de Banach (Teorema A.12).

Proposição 4.6. *Com a operação * dada pela adjunção do operador, $\mathcal{L}_A(E)$ é uma C*-álgebra.*

Demonstração. Precisamos verificar as propriedades que definem uma C*-álgebra. Para $T, S \in \mathcal{L}_A(E)$, $a \in \mathbb{C}$, e $x, y \in E_A$, temos:

(i)

$$\begin{aligned}
\langle(\alpha T + S)x, y\rangle &= \langle \alpha Tx + Sx, y\rangle \\
&= \langle \alpha Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x, T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle \\
&= \langle x, \overline{\alpha}T^*y\rangle + \langle x, S^*y\rangle \\
&= \langle x, \overline{\alpha}T^*y + S^*y\rangle \\
&= \langle x, (\overline{\alpha}T^* + S^*)y\rangle.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle TSx, y\rangle &= \langle Sx, T^*y\rangle \\
&= \langle x, S^*T^*y\rangle.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle (T^*)^*x, y\rangle &= \langle y, (T^*)^*x\rangle^* \\
&= \langle T^*y, x\rangle^* \\
&= \langle x, T^*y\rangle \\
&= \langle Tx, y\rangle.
\end{aligned}$$

(iv) Primeiro, provamos $||T||^2 \leq ||T^*T||$. Usando a desigualdade $||\langle u, v\rangle|| \leq ||u|| \cdot ||v||$ (que foi provada durante a demonstração da desigualdade triangular), temos:

$$\begin{aligned}
||T||^2 &= \sup_{||x||=1} ||Tx||^2 \\
&= \sup_{||x||=1} ||\langle Tx, Tx\rangle|| \\
&= \sup_{||x||=1} ||\langle x, T^*Tx\rangle|| \\
&\leq \sup_{||x||=1} (||x|| \cdot ||T^*Tx||) \\
&= \sup_{||x||=1} ||T^*Tx|| \\
&= ||T^*T||.
\end{aligned}$$

Agora, provamos a desigualdade oposta, $||T^*T|| \leq ||T||^2$. Para isso, primeiro mostramos que $||T^*|| = ||T||$. Para todo $x \in E_A$:

$$\begin{aligned} ||T^*x||^2 &= ||\langle T^*x, T^*x\rangle|| \\ &= ||\langle x, TT^*x\rangle|| \\ &\leq ||x|| \cdot ||TT^*x|| \\ &\leq ||x|| \cdot ||T|| \cdot ||T^*x||. \end{aligned}$$

Se $||T^*x|| \neq 0$, podemos dividir por $||T^*x||$, obtendo $||T^*x|| \leq ||T|| \cdot ||x||$. Se $||T^*x|| = 0$, a desigualdade também é válida. Como isso vale para todo x, temos $||T^*|| \leq ||T||$. Substituindo T por T^*, obtemos $||(T^*)^*|| \leq ||T^*||$, ou seja, $||T|| \leq ||T^*||$. Logo, $||T^*|| = ||T||$. Finalmente, usando a propriedade da norma de álgebra de Banach:

$$\begin{aligned} ||T^*T|| &\leq ||T^*|| \cdot ||T|| \\ &= ||T|| \cdot ||T|| \\ &= ||T||^2. \end{aligned}$$

Combinando as duas desigualdades, concluímos que $||T^*T|| = ||T||^2$.

Como os operadores são limitados, é uma *-álgebra de Banach completa.

Q.E.D.

Definição 4.7. Sejam E_A e F_A módulos de Hilbert sobre uma C*-álgebra A. Um operador $U \in \mathcal{L}_A(E, F)$ é chamado de ***unitário*** se é bijetor e preserva o produto interno. Ou seja, U é unitário se satisfizer:

$$U^*U = \mathrm{id}_E \quad \text{e} \quad UU^* = \mathrm{id}_F$$

em que id_E e id_F são os operadores identidade em E_A e F_A, respectivamente. Se existe um operador unitário entre E_A e F_A, dizemos que os módulos de Hilbert são ***isomorfos***, e denotamos por $E_A \cong F_A$.

Novamente, diferente do que ocorre em espaços de Hilbert, um submódulo fechado de um módulo de Hilbert não é necessariamente ortogonalmente complementado.

Definição 4.8. Seja E_A um módulo de Hilbert e F um submódulo fechado de E_A. Dizemos que F é ***complementado*** se $E_A = F \oplus F^\perp$.

Se F é complementado, então para cada $z \in E_A$ podemos escrever de forma única $z = x + y$ com $x \in F$ e $y \in F^\perp$. A equação $P(z) = x$ define uma aplicação linear $P : E_A \to E_A$ idempotente ($P^2 = P$) cuja imagem é F e cujo núcleo é $F^\perp$. De fato,

$$\begin{aligned} P(P(z)) &= P(x) \\ &= x \end{aligned}$$

pois $x = x + 0$ e $0 \in F_A^\perp$. A imagem de P é exatamente F, pois como $P(f) = f$ para todo $f \in F$, temos $F \subseteq \mathrm{im}(P)$. O núcleo de P é $F^\perp$. De fato, $P(z) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Como $z = x + y$, isso ocorre se, e somente se, $z = y$, o que significa $z \in F^\perp$.

Em espaços de Hilbert, a existência de complementos ortogonais está ligada à existência de projeções ortogonais. O mesmo ocorre em módulos de Hilbert, desde que trabalhemos com operadores adjuntáveis.

Definição 4.9. Um operador $P \in \mathcal{L}_A(E)$ é dito uma ***projeção*** se $P = P^*$ e $P = P^2$.

Proposição 4.10. *Seja $P \in \mathcal{L}_A(E)$ uma projeção. Então a imagem de P, $\mathrm{im}(P)$, é um submódulo complementado de E_A. Além disso, $\mathrm{im}(P)^\perp = \ker(P) = \mathrm{im}(1 - P)$.*

Demonstração. Como P é um operador adjuntável e limitado, $\mathrm{im}(P)$ é fechado (pois P é idempotente, $\mathrm{im}(P) = \ker(1 - P)$). Para $z \in E_A$, podemos escrever $z = Pz + (1 - P)z$. Temos $Pz \in \mathrm{im}(P)$. Seja $x \in \mathrm{im}(P)$, então $Px = x$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle x, (1 - P)z \rangle &= \langle Px, (1 - P)z \rangle \\
&= \langle x, P^*(1 - P)z \rangle \\
&= \langle x, (P - P^2)z \rangle \quad (\text{pois } P = P^*) \\
&= \langle x, 0 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $(1 - P)z \in \mathrm{im}(P)^\perp$. Assim, $E_A = \mathrm{im}(P) + \mathrm{im}(P)^\perp$. A unicidade da decomposição segue do fato que $\mathrm{im}(P) \cap \mathrm{im}(P)^\perp = \{0\}$. Portanto, $\mathrm{im}(P)$ é complementado. **Q.E.D.**

Este resultado justifica a decomposição ortogonal de elementos projetados. O próximo resultado caracteriza isometrias adjuntáveis através de suas imagens.

Proposição 4.11. *Sejam E_A e F_A módulos de Hilbert e $W : E_A \to F_A$ uma aplicação A-linear. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *W é uma isometria e $\mathrm{im}(W)$ é um submódulo complementado de F_A;*

2. *$W \in \mathcal{L}_A(E, F)$ e $W^*W = \mathrm{id}_E$.*

Demonstração. Se $W^*W = \mathrm{id}_E$, então para todo $x \in E_A$:

$$\begin{aligned}
\langle Wx, Wx \rangle &= \langle x, W^*Wx \rangle \\
&= \langle x, x \rangle,
\end{aligned}$$

logo W é isométrico. Considere $P = WW^* \in \mathcal{L}_A(F)$. Temos

$$\begin{aligned}
P^* &= (WW^*)^* \\
&= WW^* \\
&= P
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P^2 &= WW^*WW^* \\ &= W(W^*W)W^* \\ &= W(1)W^* \\ &= P. \end{aligned}$$

Logo, P é uma projeção em F_A. Afirmamos que $\mathrm{im}(P) = \mathrm{im}(W)$. Como $\mathrm{im}(WW^*) \subseteq \mathrm{im}(W)$. Por outro lado, para $y = Wx$, temos

$$\begin{aligned} Py &= WW^*Wx \\ &= Wx \\ &= y, \end{aligned}$$

logo $\mathrm{im}(W) \subseteq \mathrm{im}(P)$. Pela proposição anterior, $\mathrm{im}(W)$ é complementado.

Se $\mathrm{im}(W)$ é complementado, existe uma projeção $P \in \mathcal{L}_A(F)$ tal que $\mathrm{im}(P) = \mathrm{im}(W)$. Como W é uma isometria sobrejetora de E_A em $\mathrm{im}(W)$, existe uma inversa $W^{-1} : \mathrm{im}(W) \to E_A$. Defina $V : F_A \to E_A$ por $V(y) = W^{-1}(Py)$. Verificamos agora que V é o adjunto de W. Sejam $x \in E_A$ e $y \in F_A$. Como W é uma isometria, preserva o produto interno, portanto:

$$\begin{aligned} \langle x, Vy \rangle_E &= \langle Wx, WVy \rangle_F \\ &= \langle Wx, W(W^{-1}(Py)) \rangle_F \\ &= \langle Wx, Py \rangle_F. \end{aligned}$$

logo $W \in \mathcal{L}_A(E, F)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \langle Wx, Wx \rangle \\ &= \langle x, W^*Wx \rangle \end{aligned}$$

implica $W^*W = \mathrm{id}_E$. **Q.E.D.**

Operadores adjuntáveis entre módulos de Hilbert nem sempre admitem decomposição polar devido à falta de complementação de submódulos. No entanto, se as imagens do operador e de seu adjunto forem densas, podemos estabelecer um isomorfismo (unitário).

Proposição 4.12. *Sejam E_A, F_A módulos de Hilbert e suponha que existe $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$ tal que T e T^* possuem imagem densa. Então E_A e F_A são unitariamente equivalentes.*

Demonstração. Como $\mathrm{im}(T^*)$ é denso, $\ker(T) = \mathrm{im}(T^*)^\perp = \{0\}$, logo T é injetivo. De forma análoga, T^* é injetivo. Considere $|T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{L}_A(E)$. Sabemos que em C*-álgebras, $\overline{\mathrm{im}(|T|)} = (\ker(|T|))^\perp$. Como $\ker(|T|) = \ker(T)$ e, como vimos, $\ker(T) = \{0\}$ (pois T^* tem imagem densa), segue que $\overline{\mathrm{im}(|T|)} = \{0\}^\perp = E_A$. Portanto, $|T|$ tem imagem densa. Defina a aplicação $U : \mathrm{im}(|T|) \to \mathrm{im}(T)$ por $U(|T|x) = Tx$. Note que:

$$\begin{aligned}\langle U(|T|x), U(|T|y)\rangle &= \langle Tx, Ty\rangle \\ &= \langle x, T^*Ty\rangle \\ &= \langle x, |T|^2 y\rangle \\ &= \langle |T|x, |T|y\rangle.\end{aligned}$$

Assim, U é uma isometria bem definida. Como $\mathrm{im}(|T|)$ é denso em E_A e $\mathrm{im}(T)$ é denso em F_A, e E_A e F_A são completos, a aplicação U estende-se unicamente por continuidade para uma isometria A-linear $\overline{U} : E_A \to F_A$.

Q.E.D.

4.2 OPERADORES "COMPACTOS"

Para E_A e F_A módulos de Hilbert sobre uma C*-álgebra A, considere para $x \in E_A$ e $y \in F_A$ as funções

$$\begin{aligned}\langle y| : F_A &\to A \\ z &\mapsto \langle y, z\rangle\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}|x\rangle : A &\to E_A \\ a &\mapsto xa\end{aligned}$$

em que xa denota a ação à direita de a em x. Agora, considere a função composta das duas:

$$\begin{aligned}|x\rangle\langle y| : F_A &\to E_A \\ z &\mapsto x\langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Proposição 4.13. *A função $|x\rangle\langle y|$ é adjuntável, com adjunto dado por*

$$\begin{aligned}|y\rangle\langle x| : E_A &\to F_A \\ w &\mapsto y\langle x, w\rangle.\end{aligned}$$

Demonstração. Para $z \in F_A$ e $w \in E_A$, temos

$$\begin{aligned}\langle (|x\rangle\langle y|)(z), w\rangle &= \langle x\langle y, z\rangle, w\rangle \\ &= \langle y, z\rangle^*\langle x, w\rangle \\ &= \langle z, y\rangle\langle x, w\rangle \\ &= \langle z, y\langle x, w\rangle\rangle \\ &= \langle z, (|y\rangle\langle x|)(w)\rangle.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Essas funções satisfazem as seguintes propriedades, para $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$:

(a) $(\langle x| \circ |y\rangle)(a) = \langle x, y\rangle a$ para todo $a \in A$, em que $|y\rangle : A \to E_A$ e $\langle x| : E_A \to A$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}(\langle x| \circ |y\rangle)(a) &= \langle x| (ya) \\ &= \langle x, ya\rangle \\ &= \langle x, y\rangle a.\end{aligned}$$

Q.E.D.

(b) $(T \circ |x\rangle)(a) = |Tx\rangle (a)$ para todo $a \in A$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}(T \circ |x\rangle)(a) &= T(xa) \\ &= (Tx)a \\ &= |Tx\rangle (a).\end{aligned}$$

Q.E.D.

(c) $(\langle x| \circ T^*)(z) = \langle Tx| (z)$ para todo $z \in F_A$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}(\langle x| \circ T^*)(z) &= \langle x, T^* z\rangle \\ &= \langle Tx, z\rangle \\ &= \langle Tx| (z).\end{aligned}$$

Q.E.D.

(d) $|x\rangle \langle y| \circ |u\rangle \langle v| = |x\langle y, u\rangle\rangle \langle v|$, para $|u\rangle : A \to G_A$ e $\langle y| : G_A \to A$ para um A-módulo de Hilbert intermediário G_A.

Demonstração. Para $z \in F_A$, temos

$$\begin{aligned}(|x\rangle \langle y| \circ |u\rangle \langle v|)(z) &= (|x\rangle \langle y|)(u\langle v, z\rangle) \\ &= x\langle y, u\langle v, z\rangle\rangle \\ &= x\langle y, u\rangle\langle v, z\rangle \\ &= (x\langle y, u\rangle)\langle v, z\rangle \\ &= (|x\langle y, u\rangle\rangle \langle v|)(z).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Agora, considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{K}_A(F, E) = \overline{\operatorname{span}}\{|x\rangle \langle y| \mid x \in E_A, y \in F_A\}.$$

Proposição 4.14. *O conjunto* $\mathcal{K}_A(E) := \mathcal{K}_A(E, E)$ *é uma C*-subálgebra de* $\mathcal{L}_A(E)$.

Demonstração. Primeiro, note que $\operatorname{span}\{|x\rangle\langle y| \mid x, y \in E_A\}$ é fechado sob adjunto, pois $(|x\rangle\langle y|)^* = |y\rangle\langle x|$. Para ver que é fechado sob produto, observe que pela propriedade (d),

$$|x\rangle\langle y| \circ |u\rangle\langle v| = |x\langle y, u\rangle\rangle\langle v|,$$

que também pertence ao span. Como o span é fechado sob combinações lineares por definição, temos $\operatorname{span}\{|x\rangle\langle y| \mid x, y \in E_A\}$ uma *-subálgebra de $\mathcal{L}_A(E)$. Tomando o fecho, obtemos que $\mathcal{K}_A(E)$ é uma C*-subálgebra de $\mathcal{L}_A(E)$.

Chamamos $\mathcal{K}_A(E)$ de C*-álgebra dos operadores "compactos". Colocamos compactos entre aspas pois quando vistos como operadores de um espaço de Banach, eles não são necessariamente compactos.

Exemplo 4.15. Considere $A = C([0, 1])$ e o A-módulo de Hilbert $E_A = A$ com produto interno $\langle f, g\rangle = f^*g$. O operador identidade $\mathrm{id} : A \to A$ pertence a $\mathcal{K}_A(A)$, mas não é compacto como operador de Banach. De fato, como A é unital, seja $1 \in A$ a função constante igual a 1. O operador $|1\rangle\langle 1|$ é dado por:

$$\begin{aligned}(|1\rangle\langle 1|)(f) &= 1 \cdot \langle 1, f\rangle \\ &= 1 \cdot (1^* f) \\ &= 1 \cdot (\bar{1} f) \\ &= 1 \cdot f \\ &= f = \mathrm{id}(f)\end{aligned}$$

para todo $f \in A$. Como $\mathrm{id} = |1\rangle\langle 1|$, o operador identidade pertence ao span dos geradores e, portanto, $\mathrm{id} \in \mathcal{K}_A(A)$. Porém, quando visto como operador no espaço de Banach $C([0, 1])$ com a norma do supremo, o operador identidade não é compacto, pois a bola unitária de $C([0, 1])$ não é compacta.

Q.E.D.

5 PRODUTO TENSORIAL INTERIOR

O produto tensorial de C*-álgebras sempre será o espacial (ver Apêndice T).

5.1 LEMAS SOBRE POSITIVIDADE

A fim de poder construir o produto tensorial interior, precisaremos de alguns lemas:

Lema 5.1. *Seja E um A-módulo de Hilbert e $T \in \mathcal{L}_A(E)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) T é elemento positivo de $\mathcal{L}_A(E)$;

(ii) $\langle x, Tx\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Suponha que T é positivo, então $T = S^*S$ para algum $S \in \mathcal{L}_A(E)$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle x, Tx\rangle &= \langle x, S^*Sx\rangle \\ &= \langle Sx, Sx\rangle \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Suponha que $\langle x, Tx\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$. Primeiro, afirmamos que T é auto-adjunto. De fato, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}\langle x, Tx\rangle &= \langle x, Tx\rangle^* \\ &= \langle Tx, x\rangle \\ &= \langle x, T^*x\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $\langle x, (T - T^*)x\rangle = 0$ para todo $x \in E$, então $(T - T^*)x = 0$ para todo $x \in E$. Logo $T = T^*$. Como T é auto-adjunto em $\mathcal{L}_A(E)$, pelo cálculo funcional contínuo (Teorema A.17) existem operadores positivos $T_+, T_- \in \mathcal{L}_A(E)$ tais que $T = T_+ - T_-$ e $T_+T_- = 0$. Afirmamos que $T_- = 0$. Para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}\langle x, T_-TT_-x\rangle &= \langle T_-x, TT_-x\rangle \\ &= \langle T_-x, (T_+ - T_-)T_-x\rangle \\ &= \langle T_-x, T_+T_-x\rangle - \langle T_-x, T_-^2x\rangle \\ &= 0 - \langle T_-x, T_-^2x\rangle \\ &= -\langle x, T_-^3x\rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $y = T_{-}x$ na hipótese $\langle y, Ty\rangle \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle T_{-}x, TT_{-}x\rangle &\geq 0\\
\langle x, T_{-}TT_{-}x\rangle &\geq 0\\
-\langle x, T_{-}^3 x\rangle &\geq 0\\
\langle x, T_{-}^3 x\rangle &\leq 0.
\end{aligned}$$

Como T_{-} é positivo, T_{-}^3 também é positivo, e portanto $\langle x, T_{-}^3 x\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$. Combinando com a desigualdade acima, concluímos que $\langle x, T_{-}^3 x\rangle = 0$ para todo $x \in E$. por propriedades de elementos positivos em C*-álgebras, $T_{-}^n = 0$ para algum $n \geq 1$ implica $T_{-} = 0$ (Teorema A.17). Portanto, $T = T_{+} - T_{-} = T_{+}$ é positivo.

Q.E.D.

Lema 5.2. *Para E_A, F_A A-módulos de Hilbert, $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$ e $x \in E_A$, então vale:*

$$\langle Tx, Tx\rangle \leq ||T||^2 \langle x, x\rangle.$$

Demonstração. O operador $S = ||T||^2 \cdot \mathrm{id}_E - T^*T \in \mathcal{L}_A(E)$ é positivo, pois seu espectro está contido em $[0, \infty)$ pela identidade C* ($||T||^2 = ||T^*T||$). De fato, para qualquer $\mu \in \sigma(T^*T)$, temos $0 \leq \mu \leq ||T^*T|| = ||T||^2$, logo $0 \leq ||T||^2 - \mu$, e assim $\sigma(S) \subseteq [0, \infty)$. Pelo Lema 5.1, $S \geq 0$ implica $\langle x, Sx\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$. Portanto,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x, Sx\rangle\\
&= \langle x, (||T||^2 \cdot \mathrm{id}_E - T^*T)x\rangle\\
&= ||T||^2\langle x, x\rangle - \langle x, T^*Tx\rangle\\
&= ||T||^2\langle x, x\rangle - \langle Tx, Tx\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $\langle Tx, Tx\rangle \leq ||T||^2\langle x, x\rangle$.

Q.E.D.

Lema 5.3. *Seja E_A um A-módulo de Hilbert. Se $(x_i)_{i=1}^n \in E_A$, então*

$$\begin{aligned}
&X := (\langle x_i, x_j\rangle)_{ij} \in M_n(A)\\
&X \geq 0,
\end{aligned}$$

e se $T \in \mathcal{L}_A(E)$,

$$\begin{aligned}
&W := (\langle Tx_i, Tx_j\rangle)_{ij} \in M_n(A)\\
&W \leq ||T||^2(\langle x_i, x_j\rangle)_{ij}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Identifique $M_n(A)$ com $\mathcal{K}_A(A^n)$. Assim, para $a = (a_i)_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned}\langle a, Xa\rangle &= \sum_i a_i^* \left(\sum_j \langle x_i, x_j\rangle a_j\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i^* \langle x_i, x_j\rangle a_j \\ &= \sum_{i,j} \langle x_i a_i, x_j a_j\rangle \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Logo, $X \geq 0$ pelo Lema 5.1. Similarmente, devido ao Lema 5.2,

$$\begin{aligned}\langle a, Wa\rangle &= \sum_{i,j} a_i^* \langle Tx_i, Tx_j\rangle a_j \\ &= \sum_{i,j} \langle Tx_i a_i, Tx_j a_j\rangle \\ &\leq ||T||^2 \sum_{i,j} \langle x_i a_i, x_j a_j\rangle \\ &= ||T||^2 \langle a, Xa\rangle.\end{aligned}$$

Então:

$$\langle a, (||T||^2 X - W)a\rangle \geq 0,$$

portanto $W \leq ||T||^2 X$ pelo Lema 5.1.

Q.E.D.

5.2 CONSTRUÇÃO DO PRODUTO TENSORIAL

Sejam A e B C*-álgebras, e sejam E_A um A-módulo de Hilbert e F_B um B-módulo de Hilbert. Se $\varphi : A \to \mathcal{L}_B(F)$ é um *-homomorfismo (Definição A.5), podemos enxergar F como um A-módulo à esquerda A_F, com a ação dada por

$$\begin{aligned}\cdot : A \times F &\to F \\ (a, y) &\mapsto \varphi(a)y\end{aligned}$$

De fato, para $\alpha, \beta \in A$ e $x, y \in F$,

1. $\alpha \cdot (x + y) = \varphi(\alpha)(x + y) = \varphi(\alpha)x + \varphi(\alpha)y = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

2. $(\alpha + \beta) \cdot x = (\varphi(\alpha + \beta))x = (\varphi(\alpha) + \varphi(\beta))x = \varphi(\alpha)x + \varphi(\beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

3. $(\alpha\beta) \cdot x = \varphi(\alpha\beta)x = \alpha(\varphi(\beta)x) = \alpha(\beta \cdot x)$.

Com isso, $E \odot_A F$ será um B-módulo à direita.

Teorema 5.4. *Se A e B são C*-álgebras, e E_A é um A-módulo de Hilbert e F_B um B-módulo* *de Hilbert, e se $\varphi : A \to \mathcal{L}_B(F)$ é um *-homomorfismo, então $E \odot_A F$ como descrito acima é um B-módulo à direita, com o produto interno definido em tensores elementares por:*

$$\langle x_1 \odot y_1, x_2 \odot y_2 \rangle := \langle y_1, \varphi(\langle x_1, x_2 \rangle) y_2 \rangle$$

Demonstração. A forma definida acima é claramente conjugado-linear na primeira entrada, e pela linearidade de φ, é linear na segunda variável. Com isso, podemos afirmar que a forma se estende linearmente a partir dos tensores elementares para uma forma sesquilinear para elementos quaisquer do produto tensorial. Para mostrar a positividade, tome $z = \sum_{i=1}^n x_i \odot y_i \in E \odot_A F$. Então:

$$\begin{aligned}
\langle z, z \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \odot y_i, \sum_{j=1}^n x_j \odot y_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \odot y_i, x_j \odot y_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle y_i, \varphi(\langle x_i, x_j \rangle) y_j \rangle.
\end{aligned}$$

Para conectar isso com a notação matricial, defina $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F^n$ e $X = (\langle x_i, x_j \rangle)_{ij} \in M_n(A)$. Precisamos mostrar que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle y_i, \varphi(\langle x_i, x_j \rangle) y_j \rangle = \langle y, \varphi^{(n)}(X) y \rangle,$$

em que $\varphi^{(n)} : M_n(A) \to M_n(\mathcal{L}_B(F))$ é a extensão matricial de φ definida por $\varphi^{(n)}((a_{ij})) = (\varphi(a_{ij}))$.

De fato, identificando $M_n(\mathcal{L}_B(F))$ com $\mathcal{L}_B(F^n)$, $\varphi^{(n)}(X)$ age em $y \in F^n$ por

$$(\varphi^{(n)}(X) y)_i = \sum_{j=1}^n \varphi(X_{ij}) y_j = \sum_{j=1}^n \varphi(\langle x_i, x_j \rangle) y_j.$$

Portanto, usando o produto interno em F^n dado por $\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y_i, z_i \rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle y, \varphi^{(n)}(X) y \rangle &= \sum_{i=1}^n \left\langle y_i, (\varphi^{(n)}(X) y)_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle y_i, \sum_{j=1}^n \varphi(\langle x_i, x_j \rangle) y_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle y_i, \varphi(\langle x_i, x_j \rangle) y_j \rangle.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.3, $X = (\langle x_i, x_j \rangle)_{ij} \geq 0$ em $M_n(A)$. Como φ é completamente positivo (Teorema A.20), temos $\varphi^{(n)}(X) \geq 0$ em $M_n(\mathcal{L}_B(F)) \cong \mathcal{L}_B(F^n)$. Logo, $\langle y, \varphi^{(n)}(X) y \rangle \geq 0$ em B, o que implica $\langle z, z \rangle \geq 0$. Obtemos o desejado.

Q.E.D.

O completamento deste produto tensorial é o ***produto tensorial interior*** e será denotado por $E \otimes_\varphi F$. No caso particular em que E e F são módulos de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, denotamos o produto tensorial completado por $E \otimes F$.

Lema 5.5. *Sejam $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ e B C*-álgebras, com $A_n \subseteq A_{n+1}$ C*-subálgebras. Se $\phi_n : A_n \to B$ são $*$-homomorfismos tais que $\phi_{n+1}|_{A_n} = \phi_n$, então existe um único $*$-homomorfismo $\phi : A \to B$ tal que $\phi|_{A_n} = \phi_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, se cada ϕ_n é injetivo, ϕ também é, e se $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} \operatorname{im} \phi_n} = B$, este ϕ é sobrejetivo.*

Demonstração. Observe que $A_\infty := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é $*$-subálgebra densa de A. Então defina $\phi_\infty : A_\infty \to B$ por $\phi_\infty(a) := \phi_n(a)$, se $a \in A_n$. Com isso, ϕ_∞ é um $*$-homomorfismo contrativo, logo existe único $*$-homomorfismo $\phi : A \to B$ que estende os ϕ_n's. Se cada ϕ_n for injetivo, então são isométricos, assim para $a \in A$:

$$\begin{aligned} ||\phi(a)|| &= ||\phi_n(a)|| \\ &= ||a|| \end{aligned}$$

ou seja, ϕ é isométrico. Além disso, se $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} \operatorname{im} \phi_n} = B$, ϕ é sobrejetora pois $\operatorname{im} \phi \supseteq \operatorname{im} \phi_n$.

Q.E.D.

5.3 O MÓDULO DE HILBERT PADRÃO

Um A-módulo de Hilbert é dito enumeravelmente gerado se existe um conjunto gerador dele que é enumerável. Se H é um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita, então o A-módulo de Hilbert $H_A := H \otimes A$ é dito o A-módulo de Hilbert padrão.

Existem formas equivalentes de se pensar no módulo de Hilbert padrão. A primeira é como definimos.

Alternativamente, se identificarmos $H \cong \ell^2(\mathbb{N})$ com a base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então H_A pode ser identificado com o espaço das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* a_n$ converge em A, com produto interno

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n.$$

Para ver que essas descrições são equivalentes, considere a função

$$\begin{aligned} &\Phi : H \odot A \to \ell^2(\mathbb{N}, A) \\ &\sum_{i=1}^{k} h_i \otimes a_i \mapsto \left(\sum_{i=1}^{k} \langle e_n, h_i \rangle a_i \right)_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

em que $\ell^2(\mathbb{N}, A) = \{(a_n) : \sum a_n^* a_n \text{ converge em } A\}$. Para ver que Φ preserva o produto interno, sejam $x = \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes a_i$ e $y = \sum_{j=1}^{m} h'_j \otimes b_j$ elementos em $H \odot A$. Então

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \langle e_n, h_i \rangle a_i \right)^* \left(\sum_{j=1}^{m} \langle e_n, h'_j \rangle b_j \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^* \overline{\langle e_n, h_i \rangle} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \langle e_n, h'_j \rangle b_j \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} a_i^* \overline{\langle e_n, h_i \rangle} \langle e_n, h'_j \rangle b_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} a_i^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle e_n, h_i \rangle} \langle e_n, h'_j \rangle \right) b_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} a_i^* \langle h_i, h'_j \rangle_H b_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i^* \left(\sum_{j=1}^{m} \langle h_i, h'_j \rangle_H b_j \right) \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{k} h_i \otimes a_i, \sum_{j=1}^{m} h'_j \otimes b_j \right\rangle \\
&= \langle x, y \rangle,
\end{aligned}
$$

em que usamos o Teorema A.15, que diz que $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\langle e_n, h_i \rangle} \langle e_n, h'_j \rangle = \langle h_i, h'_j \rangle_H$. Como Φ preserva o produto interno e $H \odot A$ é denso em $H \otimes A$, a função Φ se estende a um isomorfismo isométrico entre os completamentos, estabelecendo a equivalência.

5.4 UM ISOMORFISMO IMPORTANTE

Teorema 5.6. *Seja E um B-módulo de Hilbert enumeravelmente gerado e H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita (um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert). Então $\mathcal{K}_B(E \otimes H) \cong \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H)$.*

Demonstração. Podemos considerar que $H \cong \ell^2(\mathbb{N})$, pois H é de dimensão infinita e separável. Seja $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $\{e_k\}_{k\in}$ é a base ortonormal canônica de H. Por construção, cada H_n é um subespaço de Hilbert de dimensão finita de H, e temos $H = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} H_n}$.

Existe uma imersão natural de $\mathcal{K}(H_n)$ em $\mathcal{K}(H)$. Considere a seguinte função:

$$
\begin{aligned}
\phi_n : \mathcal{K}(H_n) &\to \mathcal{K}(H) \\
T &\mapsto T',
\end{aligned}
$$

em que T' age da seguinte forma em $\xi + \eta \in H = H_n \oplus H_n^{\perp}$:

$$
T'(\xi + \eta) = T(\xi).
$$

Temos que ϕ_n é um *-homomorfismo isométrico (injetivo). Verificamos que a imagem está nos compactos observando os geradores. Para $\xi, \eta \in H_n$ e $\zeta \in H_n$, temos:

$$\phi_n(|\xi\rangle\langle\eta|)(\zeta) = \xi\langle\eta, \zeta\rangle_H.$$

Ou seja, $\phi_n(|\xi\rangle\langle\eta|)$ é o operador $|\xi\rangle\langle\eta|$ em H (onde consideramos ξ, η como vetores em H via inclusão). Como esses operadores estão em $\mathcal{K}(H)$, a imagem está contida em $\mathcal{K}(H)$.

Mostraremos agora que $\mathcal{K}(H) = \overline{\cup_{n=1}^{\infty}\phi_n(\mathcal{K}(H_n))}$. Seja $P_n : H \to H_n \subset H$ a projeção ortogonal sobre H_n. A sequência $\{P_n\}$ converge fortemente para o operador identidade 1_H, pois para $x \in H$ temos $P_n x \to x$ em norma. Para qualquer $T \in \mathcal{K}(H)$, a sequência $T_n = P_n T P_n$ pode ser identificada com elementos de $\phi_n(\mathcal{K}(H_n))$. Como T é um operador compacto ($T \in \mathcal{K}(H)$), a imagem da bola unitária fechada $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ é um conjunto compacto. Seja $K_B = \overline{T(B_H)}$ esse conjunto compacto. Se uma sequência de operadores converge fortemente para a identidade ($P_n \to 1_H$), então a convergência é uniforme em subconjuntos compactos. Portanto:

$$\begin{aligned}
\|P_n T - T\| &= \sup_{x \in B_H} \|P_n T x - T x\| \\
&= \sup_{x \in B_H} \|(P_n - 1_H) T x\| \\
&\leq \sup_{k \in K} \|(P_n - 1_H) k\| \to 0.
\end{aligned}$$

Além disso, utilizando as propriedades da norma C* e da adjunção, e lembrando que $P_n = P_n^*$ e que se T é compacto, seu adjunto T^* também é compacto:

$$\begin{aligned}
\|TP_n - T\| &= \|(TP_n - T)^*\| \\
&= \|P_n^* T^* - T^*\| \\
&= \|P_n T^* - T^*\|.
\end{aligned}$$

Aplicando o primeiro resultado ao operador compacto T^*, temos $\|P_n T^* - T^*\| \to 0$. Consequentemente, $\|TP_n - T\| \to 0$.

$$\begin{aligned}
\|T_n - T\| &= \|P_n T P_n - T\| \\
&\leq \|P_n T P_n - P_n T\| + \|P_n T - T\| \\
&\leq \|P_n\| \|TP_n - T\| + \|P_n T - T\| \to 0.
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{K}(H_n)$ é denso em $\mathcal{K}(H)$.

Iremos construir o isomorfismo desejado definindo-o numa subálgebra densa e estendendo-o por continuidade. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $H_n \cong \mathbb{C}^n$ e $E_n = E \otimes H_n \cong E^n$ (soma direta de n cópias), temos *-isomorfismos:

1. $\mathcal{K}(H_n) \cong \mathcal{K}(\mathbb{C}^n) \cong M_n(\mathbb{C})$.

2. $\mathcal{K}_B(E_n) \cong \mathcal{K}_B(E^n) \cong M_n(\mathcal{K}_B(E))$.

Consideremos o produto tensorial espacial de C*-álgebras $\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n)$. Usando o isomorfismo 1.,

$$\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n) \cong \mathcal{K}_B(E) \otimes M_n(\mathbb{C}).$$

Sabemos que $C \otimes M_n(\mathbb{C}) \cong M_n(C)$ para qualquer C*-álgebra C. Portanto,

$$\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n) \cong M_n(\mathcal{K}_B(E)).$$

Combinando com o isomorfismo 2., obtemos para cada n um *-isomorfismo

$$\Psi_n : \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}_B(E_n) = \mathcal{K}_B(E \otimes H_n).$$

Concretamente, este isomorfismo é determinado pela ação em tensores elementares: $\Psi_n(T \otimes S)$ age em $E \otimes H_n$ como o operador que mapeia $x \otimes h$ em $T(x) \otimes S(h)$, para $x \in E, h \in H_n$.

Agora, consideramos as inclusões. A inclusão $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$ induz um *-homomorfismo injetivo $k_n : \mathcal{K}(H_n) \to \mathcal{K}(H_{n+1})$ (identificando T com $T \oplus 0$). Isto induz $\mathrm{id} \otimes k_n : \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n) \to \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_{n+1})$. Similarmente, a inclusão $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ induz $j_n : \mathcal{K}_B(E_n) \to \mathcal{K}_B(E_{n+1})$.

O seguinte diagrama comuta para todo n:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n) & \xrightarrow[\cong]{\Psi_n} & \mathcal{K}_B(E_n) \\
{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes k_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_n} \\
\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_{n+1}) & \xrightarrow[\cong]{\Psi_{n+1}} & \mathcal{K}_B(E_{n+1})
\end{array}$$

Para verificar a comutatividade do diagrama, basta confirmar a igualdade nos geradores da álgebra. Sejam $T \in \mathcal{K}_B(E)$ e $S = |\xi\rangle \langle\eta| \in \mathcal{K}(H_n)$, com $\xi, \eta \in H_n$.

Vamos analisar o caminho inferior do diagrama. A imersão $k_n(S)$ é o operador em H_{n+1} que age como S em H_n e como zero em $H_n^\perp$. Assim, o operador $\Psi_{n+1} \circ (\mathrm{id} \otimes k_n)(T \otimes S)$ age num tensor elementar $x \otimes h \in E \otimes H_{n+1}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left[\Psi_{n+1}(T \otimes k_n(S))\right](x \otimes h) &= T(x) \otimes k_n(S)(h) \\
&= \begin{cases} T(x) \otimes S(h) & \text{se } h \in H_n, \\ 0 & \text{se } h \perp H_n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Agora, analisamos o caminho superior. Primeiro, aplicamos Ψ_n, obtendo o operador $\Psi_n(T \otimes S)$ que age em $E \otimes H_n$ por $x \otimes h \mapsto T(x) \otimes S(h)$. Em seguida, aplicamos a imersão j_n. Por definição, j_n estende um operador em $E \otimes H_n$ para $E \otimes H_{n+1}$ definindo-o como zero no complemento ortogonal $(E \otimes H_n)^\perp \cong E \otimes H_n^\perp$. Portanto, para $x \otimes h \in E \otimes H_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\left[j_n(\Psi_n(T \otimes S))\right](x \otimes h) &= \begin{cases} (\Psi_n(T \otimes S))(x \otimes h) & \text{se } x \otimes h \in E \otimes H_n, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} T(x) \otimes S(h) & \text{se } h \in H_n, \\ 0 & \text{se } h \perp H_n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, concluímos que $j_n \circ \Psi_n = \Psi_{n+1} \circ (\mathrm{id} \otimes k_n)$ nos geradores e, por linearidade e continuidade, o diagrama comuta.

Seja $\mathcal{A} = \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H)$ e $\mathcal{B} = \mathcal{K}_B(E \otimes H)$. Definimos as subálgebras $\mathcal{A}_n = \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n)$ e $\mathcal{B}_n = \mathcal{K}_B(E_n)$.

Temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H) \\
&= \mathcal{K}_B(E) \otimes \left(\overline{\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}(H_n)}\right) \\
&= \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \left(\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H_n)\right)} \\
&= \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $E \otimes H \cong \overline{\cup E_n}$. Os operadores compactos em $E \otimes H$ são o fecho da união dos operadores compactos nos subespaços E_n. Logo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \mathcal{K}_B(E \otimes H) \\
&= \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_B(E_n)} \\
&= \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.5, como os isomorfismos Ψ_n são compatíveis com as inclusões, eles induzem um único *-homomorfismo $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Como cada Ψ_n é isométrico, Ψ é uma isometria em uma subálgebra densa, logo estende-se a uma isometria em $\mathcal{A}$. Além disso, a imagem de Ψ contém $\cup \mathcal{B}_n$, que é denso em $\mathcal{B}$. Como a imagem de um *-homomorfismo é fechada (e Ψ é isométrico), Ψ é sobrejetivo.

Portanto, Ψ é um *-isomorfismo entre $\mathcal{K}_B(E) \otimes \mathcal{K}(H)$ e $\mathcal{K}_B(E \otimes H)$.

Q.E.D.

6 ESTABILIZAÇÃO

6.1 LEMAS TÉCNICOS

Antes de chegar no teorema principal desta seção, precisaremos de dois lemas.

Lema 6.1. *Dado $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$, T^*F e T^*TE possuem o mesmo fecho.*

Demonstração. Primeiro, iremos provar que $\overline{T^*TE} \subseteq \overline{T^*F}$. Seja $T^*Te \in T^*TE$ com $e \in E_A$. Defina $f = Te \in F_A$. Então $T^*Te = T^*f \in T^*F$, o que mostra que $T^*TE \subseteq T^*F$. Tomando o fecho, obtemos $\overline{T^*TE} \subseteq \overline{T^*F}$.

Agora, iremos provar a inclusão $\overline{T^*F} \subseteq \overline{T^*TE}$. Para isso, é suficiente mostrar que $T^*F \subseteq \overline{T^*TE}$. Seja $y \in T^*F$. Então, $y = T^*f$ para algum $f \in F_A$. Como F_A é um módulo de Hilbert, podemos decompor f ortogonalmente como $f = f_\parallel + f_\perp$, em que $f_\parallel \in \overline{\mathrm{im}(T)}$ e $f_\perp \in (\overline{\mathrm{im}(T)})^\perp$. Aplicando T^*, temos $y = T^*(f_\parallel + f_\perp) = T^*f_\parallel + T^*f_\perp$. Analisamos cada termo:

(i) Como $f_\parallel \in \overline{\mathrm{im}(T)}$, existe uma sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E_A tal que $Te_n \to f_\parallel$. Pela continuidade de T^*, temos $T^*(Te_n) \to T^*f_\parallel$. Como $T^*Te_n \in T^*TE$ para todo n, segue que $T^*f_\parallel \in \overline{T^*TE}$.

(ii) Vamos mostrar que $T^*f_\perp = 0$. Como $f_\perp \in (\overline{\mathrm{im}(T)})^\perp$, temos $\langle f_\perp, Te\rangle_F = 0$ para todo $e \in E_A$. Pela definição do adjunto, para todo $e \in E_A$:

$$\begin{aligned} \langle T^*f_\perp, e\rangle_E &= \langle f_\perp, Te\rangle_F \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $T^*f_\perp$ é ortogonal a E_A, então $T^*f_\perp = 0$.

Portanto, $y = T^*f_\parallel + 0 = T^*f_\parallel \in \overline{T^*TE}$. Como y foi arbitrário, mostramos $T^*F \subseteq \overline{T^*TE}$. Tomando o fecho, concluímos que $\overline{T^*F} \subseteq \overline{T^*TE}$. Juntando as duas inclusões, temos $\overline{T^*TE} = \overline{T^*F}$.

Q.E.D.

Lema 6.2. *Se E_A e F_A são A-módulos de Hilbert e há um elemento $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$ tal que T e T^* têm imagem densa, então $E_A \cong F_A$.*

Demonstração. Como T e T^* têm imagem densa, T^*T também tem, de forma que $|T| = \sqrt{T^*T}$ tem imagem densa (Teorema A.17). Defina para $x \in E_A$:

$$\begin{aligned} U : \mathrm{im}(T) &\to \mathrm{im}(|T|) \\ Tx &\mapsto |T|x \end{aligned}$$

Assim, para $x, y \in E_A$:

$$\begin{aligned}\langle U(Tx), U(Ty)\rangle &= \langle |T|x, |T|y\rangle \\ &= \langle \sqrt{T^*T}x, \sqrt{T^*T}y\rangle \\ &= \langle x, \sqrt{T^*T}^* \sqrt{T^*T}y\rangle \\ &= \langle x, \sqrt{T^*T}\sqrt{T^*T}y\rangle \\ &= \langle x, T^*Ty\rangle \\ &= \langle Tx, Ty\rangle.\end{aligned}$$

Em outras palavras, U é uma isometria. Pela densidade das imagens dos operadores T e $|T|$, U se estende a um unitário (isomorfismo) de F_A à E_A.

Q.E.D.

6.2 O TEOREMA DE KASPAROV

Teorema 6.3 (da Estabilização de Kasparov)**.** *Se A é uma C*-álgebra e E_A é um A-módulo de Hilbert enumeravelmente gerado, então $E \oplus H_A \cong H_A$.*

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que A é unital. De fato, se A não for unital, considere sua unitização $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ com a estrutura usual de C*-álgebra. Todo A-módulo de Hilbert E_A pode ser visto canonicamente como um A^+-módulo de Hilbert pela extensão da ação: para $e \in E$, $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$e \cdot (a + \lambda \cdot 1) = ea + \lambda e.$$

O produto interno permanece o mesmo, e a completude é preservada. Além disso, $\overline{EA} = E$ como A-módulos, pois E é gerado por elementos de E e a ação de A é densa. Se provarmos o teorema para A^+, o resultado para A segue por restrição, pois o isomorfismo construído respeita a estrutura de A-módulo. Portanto, assumimos que A é unital.

Como E_A é enumeravelmente gerado, existe um conjunto enumerável $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \subseteq E$ tal que

$$E = \overline{\mathrm{span}}\{x_n a : n \in \mathbb{N}, a \in A\}.$$

Construa uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores unitários em E_A da seguinte forma: para cada $k \in \mathbb{N}$, se $x_k \neq 0$, inclua o vetor normalizado $\tilde{y}_k = \frac{x_k}{||x_k||}$ infinitas vezes na sequência. Especificamente, organize a sequência de modo que cada gerador não-nulo apareça infinitas vezes:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots = \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_3, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_4, \ldots$$

Esta construção garante que para cada n, existem infinitos índices m tais que $y_m = y_n$. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita com base ortonormal $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Defina

$$e_n = \epsilon_n \otimes 1 \in H \otimes A = H_A.$$

Como A é unital e $\overline{\text{span}}\{1\} = A$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gera H_A densamente:

$$H_A = \overline{\text{span}}\{e_n a : n \in \mathbb{N}, a \in A\}.$$

Definimos o operador $T \in \mathcal{L}_A(H_A, E \oplus H_A)$ por

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(2^{-n} \left|y_n\right\rangle \left\langle e_n\right| \oplus 4^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\Big).$$

É bem definido pela definição dos operadores "compactos". Mais explicitamente, para $h \in H_A$,

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n \langle e_n, h\rangle \oplus \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} e_n \langle e_n, h\rangle.$$

A série converge em norma pois

$$\begin{aligned}
||T|| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(2^{-n}||y_n|| \cdot ||e_n|| + 4^{-n}||e_n||^2\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 4^{-n}) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$Te_n = 2^{-n} y_n \oplus 4^{-n} e_n.$$

Para mostrar que $\text{im}(T)$ é densa em $E \oplus H_A$, basta mostrar que cada gerador está no fecho da imagem. Primeiro, consideremos $y_n \oplus 0 \in E \oplus H_A$ para algum n. Como y_n aparece infinitas vezes na sequência, existem índices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ tais que $y_{m_i} = y_n$ para todo i. Considere a sequência

$$\begin{aligned}
T(2^{m_i} e_{m_i}) &= 2^{m_i} \cdot 2^{-m_i} y_{m_i} \oplus 2^{m_i} \cdot 4^{-m_i} e_{m_i} \\
&= y_n \oplus 2^{-m_i} e_{m_i}.
\end{aligned}$$

Quando $i \to \infty$, temos $m_i \to \infty$ (pela construção da sequência), logo $2^{-m_i} \to 0$. Portanto,

$$T(2^{m_i} e_{m_i}) \to y_n \oplus 0$$

em norma. Como elementos na forma $y_n \oplus 0$ geram E densamente (pois os y_n cobrem os geradores de E), segue que

$$E \oplus \{0\} \subseteq \overline{\text{im}(T)}.$$

Agora, consideremos $0 \oplus e_n \in E \oplus H_A$. Temos

$$\begin{aligned}
T(4^n e_n) &= 4^n \cdot 2^{-n} y_n \oplus 4^n \cdot 4^{-n} e_n \\
&= 2^n y_n \oplus e_n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \oplus e_n = T(4^n e_n) - 2^n (y_n \oplus 0).$$

Como $y_n \oplus 0 \in \overline{\mathrm{im}(T)}$ pelo argumento anterior, e $T(4^n e_n) \in \mathrm{im}(T)$, segue que $0 \oplus e_n \in \overline{\mathrm{im}(T)}$. Como os e_n geram H_A densamente, temos

$$\{0\} \oplus H_A \subseteq \overline{\mathrm{im}(T)}.$$

Portanto,

$$E \oplus H_A = \overline{(E \oplus \{0\}) + (\{0\} \oplus H_A)} \subseteq \overline{\mathrm{im}(T)},$$

o que mostra que $\mathrm{im}(T)$ é densa.

O adjunto de T é dado por

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle y_n\right| \oplus 4^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\right).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} \left|y_n\right\rangle \left\langle e_n\right| \oplus 4^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\right)\right)^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} \left|y_n\right\rangle \left\langle e_n\right| \oplus 4^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\right)^* \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} \left|y_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\right) \oplus \left(4^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\right)^* \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|e_n\right\rangle \left\langle y_n\right| 2^{-n} \oplus \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right| 4^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle y_n\right| \oplus 4^{-n} \left|e_n\right\rangle \left\langle e_n\right|\end{aligned}$$

Mais explicitamente, para $(x, h) \in E \oplus H_A$,

$$T^*(x \oplus h) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \left(2^{-n}\langle y_n, x\rangle + 4^{-n}\langle e_n, h\rangle\right).$$

Para qualquer n,

$$\begin{aligned}T^*(0 \oplus 4^n e_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k \left(2^{-k}\langle y_k, 0\rangle + 4^{-k}\langle e_k, 4^n e_n\rangle\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k \cdot 4^{-k} \cdot 4^n \langle e_k, e_n\rangle \\ &= e_n \cdot 4^{-n} \cdot 4^n \\ &= e_n.\end{aligned}$$

Como os e_n geram H_A densamente, segue que $\mathrm{im}(T^*)$ é densa em H_A.

Pelo Lema 6.2, como $T \in \mathcal{L}_A(H_A, E \oplus H_A)$ tem imagem densa, e T^* tem imagem densa, concluímos que

$$E \oplus H_A \cong H_A.$$

Q.E.D.

REFERÊNCIAS DA PARTE II

As referências principais utilizadas para a teoria desta parte do trabalho foram:

1. (LANCE, 1995)

2. (WEGGE-OLSEN, 1993)

Parte III

Equivalência de Morita Forte

7 EQUIVALÊNCIA DE MORITA FORTE

7.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

A fim de mostrarmos o Teorema de Brown-Green-Rieffel no final desta parte, começamos com algumas definições.

Definição 7.1. Sejam A e B C*-álgebras, E_A um A-módulo de Hilbert e $K = \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

1. A C*-álgebra $K \otimes A$ é dita a ***estabilização*** de A.
2. A é dita ***estável*** se $A \cong K \otimes A$.
3. A e B são ditas ***estavelmente isomorfas*** se suas estabilizações forem isomorfas, ou seja $K \otimes A \cong K \otimes B$.
4. Um A-módulo de Hilbert E_A é dito ***cheio*** se $\overline{\langle E, E \rangle_A} = A$, em que

$$\langle E, E \rangle_A := \operatorname{span}\{\langle x, y \rangle_A : x, y \in E_A\}$$

7.2 LEMAS TÉCNICOS

Os seguintes lemas têm como função principal serem utilizados para demonstrar que a equivalência de Morita forte é uma relação de equivalência e para demonstrar o teorema de Brown-Green-Rieffel.

Lema 7.2. *Seja E_A um A-módulo de Hilbert e seja*

$$S = \{c \in A : ||c|| \leq 1,\, c = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, x_i \rangle_A,\, k \geq 1,\, x_1, \ldots, x_k \in E_A\}$$

Então

1. *Dados $y_1, \ldots, y_n \in E_A$ e $\epsilon > 0$, então existe $c \in S$ com*

$$||(1 - c)\sqrt{\langle y_i, y_i \rangle_A}|| < \epsilon$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

2. *Se E_A é cheio, $a \in A$ e $\epsilon > 0$ então existe $c \in S$ com*

$$||(1 - c)a|| < \epsilon.$$

Demonstração. Para provar o item 1., sem perda de generalidade, considere E_A como um A^+-módulo de Hilbert, em que A^+ é a unitização de A. Seja então

$$x_i = y_i(\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}}$$

para $i = 1, \ldots, n$, e seja também

$$c = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
c &= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle y_i(\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}}, y_i(\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}} \rangle \\
&= (\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, y_i \rangle (\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Como os elementos $(\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}}$ e $\sum_{i=1}^{n} \langle y_i, y_i \rangle$ são positivos, eles comutam entre si. Assim:

$$\begin{aligned}
c &= (\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}} (\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, y_i \rangle \\
&= (\epsilon^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle y_j, y_j \rangle)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, y_i \rangle.
\end{aligned}$$

Defina $a := \sum_j \langle y_j, y_j \rangle$, logo

$$c = (\epsilon^2 + a)^{-1} a$$

Como $a \geq 0$, $\sigma(a) \subset [0, \infty)$. A função $f(t) = t/(\epsilon^2 + t)$ mapeia $[0, \infty)$ para $[0, 1)$. Pelo cálculo funcional contínuo, $\sigma(c) \subset [0, 1)$, o que implica $||c|| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(c)\} \leq 1$. Assim, $c \in S$. Similarmente, para a função

$$\begin{aligned}
g : \sigma(a) &\to \mathbb{R} \\
t &\mapsto \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + t}
\end{aligned}$$

temos que f é contínua e $0 \leq f(t) \leq 1$ para todo $t \in \sigma(a)$. Pelo cálculo funcional contínuo,

$$\begin{aligned}
1 - c &= 1 - (\epsilon^2 + a)^{-1} a \\
&= \frac{\epsilon^2 + a - a}{\epsilon^2 + a} \\
&= \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + a} \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Logo $\|1 - c\| \leq 1$. Considere o elemento $(1 - c)a(1 - c)$:

$$\begin{aligned}
(1 - c)a(1 - c) &= \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + a} \right) a \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + a} \right) \\
&= \epsilon^4 a (\epsilon^2 + a)^{-2}
\end{aligned}$$

Seja $h(t) = \frac{\epsilon^4 t}{(\epsilon^2+t)^2}$. Por cálculo diferencial, a função $h(t)$ atinge seu valor máximo em $t = \epsilon^2$, em que

$$\begin{aligned} h(\epsilon^2) &= \frac{\epsilon^4 \cdot \epsilon^2}{(\epsilon^2+\epsilon^2)^2} \\ &= \frac{\epsilon^6}{4\epsilon^4} \\ &= \frac{\epsilon^2}{4}. \end{aligned}$$

Pelo cálculo funcional contínuo, como $\sigma(a) \subset [0, \infty)$, temos:

$$\begin{aligned} ||(1-c)a(1-c)|| &= ||h(a)|| \\ &= \sup_{t\in\sigma(a)} h(t) \\ &\leq \frac{\epsilon^2}{4} \end{aligned}$$

Agora, para cada i fixo, temos

$$\begin{aligned} b_i &= \langle y_i, y_i \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como a soma é maior do que suas partes, $0 \leq b_i \leq a$. Como a função $x \mapsto (1-c)x(1-c)$ é positiva, ela preserva a ordem:

$$0 \leq (1-c)b_i(1-c) \leq (1-c)a(1-c)$$

Seja $b_i = \langle y_i, y_i \rangle_A$ e defina $X_i := (1-c)\sqrt{b_i}$. O elemento X_i pertence à C*-álgebra A (pois $1-c \in A$ e $\sqrt{b_i} \in A$). Temos:

$$\begin{aligned} ||X_i||^2 &= ||X_i X_i^*|| \\ &= || \left((1-c)\sqrt{b_i}\right) \left((1-c)\sqrt{b_i}\right)^* || \\ &= ||(1-c)\sqrt{b_i}\sqrt{b_i}(1-c)^*|| \\ &= ||(1-c)\sqrt{b_i}\sqrt{b_i}(1-c)|| \\ &= ||(1-c)b_i(1-c)|| \\ &= ||(1-c)\langle y_i, y_i \rangle_A (1-c)|| \end{aligned}$$

Como já estabelecemos que $||(1-c)\langle y_i, y_i \rangle_A (1-c)|| \leq \frac{\epsilon^2}{4}$, concluímos que:

$$||X_i||^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4}$$

Lembrando que $X_i = (1-c)\sqrt{\langle y_i, y_i \rangle_A}$, extraímos a raiz quadrada:

$$||(1-c)\sqrt{\langle y_i, y_i \rangle_A}|| \leq \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Para provar o item 2., seja $a \in A$ e $\epsilon > 0$. Como E_A é cheio, $A = \overline{\langle E, E\rangle_A}$, em que $\langle E, E\rangle_A = \mathrm{span}\{\langle x, y\rangle_A : x, y \in E_A\}$. Pela identidade de polarização (SUNDER, 1997, p. 39), todo elemento do span também pode ser escrito como um span de elementos positivos (termos da forma $\langle y, y\rangle$). Portanto, o ideal $\langle E, E\rangle_A$ também é igual a $\mathrm{span}\{\langle y, y\rangle_A : y \in E_A\}$. Assim, pela definição de densidade, podemos encontrar uma combinação linear $a' \in \langle E, E\rangle_A$ da forma:

$$a' = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle y_j, y_j\rangle_A$$

com $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e $y_j \in E_A$ tal que

$$||a - a'|| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, aplicamos o 1. ao conjunto finito de vetores $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Seja $M = \max\{1, \max_j\{|\lambda_j| \cdot ||y_j||\}\}$. Escolhemos um $\epsilon' > 0$ tal que $\epsilon' < \frac{\epsilon}{2mM}$. Então existe $c \in S$ tal que

$$||(1-c)\sqrt{\langle y_j, y_j\rangle_A}|| < \epsilon'$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Agora, estimamos o termo $||(1-c)a'||$:

$$\begin{aligned} ||(1-c)a'|| &= ||(1-c)\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle y_j, y_j\rangle_A|| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \cdot ||(1-c)\langle y_j, y_j\rangle_A|| \end{aligned}$$

Usamos a submultiplicatividade da norma no termo $\langle y_j, y_j\rangle_A = \sqrt{\langle y_j, y_j\rangle_A} \cdot \sqrt{\langle y_j, y_j\rangle_A}$:

$$\begin{aligned} ||(1-c)\langle y_j, y_j\rangle_A|| &\leq ||(1-c)\sqrt{\langle y_j, y_j\rangle_A}|| \cdot ||\sqrt{\langle y_j, y_j\rangle_A}|| \\ &< \epsilon' \cdot ||y_j|| \end{aligned}$$

Substituindo isso na soma:

$$\begin{aligned} ||(1-c)a'|| &< \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j| \cdot (\epsilon' \cdot ||y_j||) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} (\epsilon' \cdot M) \\ &= m \cdot \epsilon' \cdot M \\ &< m \cdot \left(\frac{\epsilon}{2mM}\right) \cdot M \\ &= \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $||(1-c)a'|| < \epsilon/2$. Finalmente, usamos a desigualdade triangular para estimar $||(1-c)a||$:

$$\begin{aligned} ||(1-c)a|| &= ||(1-c)(a-a') + (1-c)a'|| \\ &\leq ||(1-c)(a-a')|| + ||(1-c)a'|| \\ &\leq ||1-c|| \cdot ||a-a'|| + ||(1-c)a'|| \\ &\leq 1 \cdot \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Um elemento positivo h de uma C*-álgebra A é dito ***estritamente positivo*** se para todo estado ρ de A, $\rho(h) > 0$.

Lema 7.3. *Um elemento positivo h de uma C*-álgebra A é estritamente positivo se e somente se $\overline{hA} = A$.*

Demonstração. Seja ρ um estado de A. Supondo por absurdo que $A = \overline{hA}$, e que $\rho(h) = 0$, para $a \in A$:

$$\begin{aligned}
|\rho(ha)|^2 &= |\rho(\sqrt{h}\sqrt{h}a)|^2 \\
&\leq \rho((\sqrt{h})^*\sqrt{h})\rho((\sqrt{h}a)^*(\sqrt{h}a)) \\
&= \rho(h)\rho((\sqrt{h}a)^*(\sqrt{h}a)) \\
&= 0 \cdot \rho((\sqrt{h}a)^*(\sqrt{h}a)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para funcionais lineares positivos. Desta forma, $\rho \to 0$ em $\overline{hA}$. Mas como $A = \overline{hA}$, o estado seria nulo. Absurdo, então $\rho(h) > 0$ para qualquer estado de A. Agora suponha $A \neq \overline{hA}$. Por um resultado encontrado em (KADISON; RINGROSE, 1986, p. 732), existe um estado ρ de A que se anula em $\overline{hA}$. Seja (e_i) uma unidade aproximada de A. Como $he_i \in hA \subseteq \overline{hA}$, temos $\rho(he_i) = 0$, para todo i, logo $\rho(h) = 0$ pois $\rho(he_i) \to \rho(h)$.

Q.E.D.

Lema 7.4. *Seja A uma C*-álgebra σ-unital (Definição A.11), então existe um elemento estritamente positivo em A.*

Demonstração. Seja (e_i) uma unidade aproximada enumerável de A que é positiva e contrativa, e seja $h := \sum_i 2^{-i}e_i$. Seja ϕ um funcional linear positivo em A tal que $\phi(h) = 0$. Pela linearidade e continuidade de ϕ, temos:

$$\begin{aligned}
\phi(h) &= \phi\left(\sum_i 2^{-i}e_i\right) \\
&= \sum_i 2^{-i}\phi(e_i)
\end{aligned}$$

Como ϕ é positivo e $e_i \geq 0$, temos $\phi(e_i) \geq 0$ para todo i. Dado que $2^{-i} > 0$, a soma de termos não negativos $\sum_i 2^{-i}\phi(e_i)$ só pode ser zero se cada termo for zero. Logo, $\phi(e_i) = 0$ para todo i.

Agora, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para funcionais lineares positivos. Para qualquer $a \in A$,:

$$|\phi(e_i a)|^2 \leq \phi(e_i^* e_i)\phi(a^* a)$$

Como ϕ é positivo, ele preserva a ordem:

$$0 \leq \phi(e_i^2) \leq \phi(e_i) = 0$$

Isso força $\phi(e_i^2) = 0$. Substituindo na desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\phi(e_i a)|^2 \leq 0 \cdot \phi(a^* a) = 0$$

Portanto, $\phi(e_i a) = 0$ para todo i.

Finalmente, como (e_i) é uma unidade aproximada, $e_i a \to a$ em norma para todo $a \in A$. Pela continuidade de ϕ:

$$\begin{aligned}
\phi(a) &= \phi(\lim_{i\to\infty} e_i a) \\
&= \lim_{i\to\infty} \phi(e_i a) \\
&= \lim_{i\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como $a \in A$ foi arbitrário, $\phi = 0$. Assim, h é estritamente positivo.

Q.E.D.

Lema 7.5. *Se A é uma C*-álgebra σ-unital e E_A é um A-módulo de Hilbert cheio, então existe uma sequência (x_n) em E_A tal que $\sum\langle x_n, x_n\rangle$ converge estritamente para 1 em $M(A)$ (Definição A.22).*

Demonstração. Como A é σ-unital, ela possui um elemento estritamente positivo $h \in A_+$, e o ideal $\overline{hA}$ é o próprio A. Construiremos indutivamente uma sequência $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ em S satisfazendo as seguintes duas condições para todo $n \geq 1$:

(a) $s_n := \sum_{j=1}^{n} c_j \leq 1$.

(b) $\|(1 - s_n)h\| < 2^{-n}$.

Começamos com o caso base ($n = 1$): Como E_A é cheio e $h \in A$, podemos aplicar o Lema 7.2.2 com $\epsilon = 1/2$. Existe $c_1 \in S$ tal que:

$$\|(1 - c_1)h\| < 1/2$$

Como $c_1 \in S$, $\|c_1\| \leq 1$ e $c_1 \geq 0$, o que implica $c_1 \leq 1$. As condições (a) e (b) valem para $n = 1$. Agora, o passo indutivo. Suponha que $c_1, \ldots, c_n \in S$ tenham sido escolhidos satisfazendo (a) e (b). Seja $s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j$. Pela condição (a), $s_n \leq 1$, então $1 - s_n \geq 0$. Podemos definir o elemento $a_n \in A$ como:

$$a_n := (1 - s_n)^{1/2} h$$

Novamente, pelo Lema 7.2.2 (pois E_A é cheio), existe um elemento $d \in S$ tal que:

$$\|(1 - d)a_n\| < 2^{-n-1}$$

Substituindo a_n:

$$\left\|(1-d)(1-s_n)^{1/2}h\right\| < 2^{-n-1}$$

Agora, definimos o próximo termo da nossa sequência:

$$c_{n+1} := (1-s_n)^{1/2}d(1-s_n)^{1/2}$$

Devemos verificar se c_{n+1} e $s_{n+1} = s_n + c_{n+1}$ satisfazem as condições. Se $d = \sum\langle z_i, z_i\rangle$ e $b = (1-s_n)^{1/2}$, então $c_{n+1} = b^*db = \sum\langle z_i b, z_i b\rangle$. Como $b \in A^+$ (pois A é ideal em $M(A)$), $z_i b \in E_A$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|c_{n+1}\| &\leq \|b\|^2 \|d\| \\
&\leq 1 \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, $c_{n+1} \in S$. Para provar a condição (a), como $d \in S$, temos $d \leq 1$. A aplicação $x \mapsto b^*xb$ é positiva, então:

$$c_{n+1} \leq (1-s_n)^{1/2}(1)(1-s_n)^{1/2} = 1 - s_n$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n + c_{n+1} \\
&\leq s_n + (1-s_n) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Para provar a condição (b): Calculamos a norma:

$$\begin{aligned}
\|(1-s_{n+1})h\| &= \|(1-(s_n+c_{n+1}))h\| \\
&= \left\|((1-s_n) - (1-s_n)^{1/2}d(1-s_n)^{1/2})h\right\| \\
&= \left\|(1-s_n)^{1/2}(1-d)(1-s_n)^{1/2}h\right\| \\
&\leq \left\|(1-s_n)^{1/2}\right\| \cdot \left\|(1-d)(1-s_n)^{1/2}h\right\| \\
&\leq 1 \cdot \left(2^{-n-1}\right) \\
&< 2^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

A construção indutiva está completa. A série $s = \sum_{j=1}^{\infty} c_j$ consiste de elementos positivos e a soma parcial s_n é crescente e limitada por 1, logo converge estritamente para um elemento $s \in M(A)$.

A condição (b), $\|(1-s_n)h\| < 2^{-n}$, implica que $\lim_{n\to\infty}(1-s_n)h = 0$, ou seja, $s_n h \to h$. Portanto, $sh = h$.

Como h é estritamente positivo, o ideal $\overline{hA}$ é A. Para qualquer $a \in A$, $a = \lim(ha_k)$ para alguma sequência (a_k) em A.

$$sa = s(\lim ha_k) = \lim(sha_k) = \lim(ha_k) = a$$

Da mesma forma, $as = a$. Isso prova que $s_n \to 1$ estritamente em $M(A)$.

Como cada $c_j \in S$ é uma soma finita de produtos internos da forma $\langle x, x\rangle$, a soma total $s = \sum c_j$ pode ser reindexada como $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, x_k\rangle$, que converge estritamente para 1.

Q.E.D.

Lema 7.6. *Seja A uma C*-álgebra σ-unital, E_A um A-módulo de Hilbert cheio e H um espaço de Hilbert separável. Então:*

1. *Existe um A-módulo de Hilbert F tal que $H \otimes E \cong A \oplus F$;*

2. *Se E_A é enumeravelmente gerado, $H \otimes E \cong H_A$.*

Demonstração. Vamos provar o item 1. Como H é separável, existe uma base ortonormal enumerável $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ para H. Pelo Lema anterior, como E_A é cheio e A é σ-unital, existe uma sequência (x_n) em E_A tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n\rangle$$

converge estritamente para 1 em $M(A)$.

Considere o elemento $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes x_n \in H \otimes E_A$. Para verificar que esta série converge, observe que para qualquer $a \in A$,

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes x_n, \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes x_n \right\rangle a = \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x_n\rangle a \to a$$

quando $N \to \infty$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n\rangle$ converge estritamente para 1. Assim, ξ é bem definido e satisfaz $\langle \xi, \xi\rangle = 1$ em $M(A)$.

Defina a aplicação A-linear

$$\begin{aligned} \Phi : A &\to H \otimes E_A \\ a &\mapsto \xi \cdot a = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes x_n a. \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma isometria, pois para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(a), \Phi(a)\rangle &= \langle \xi \cdot a, \xi \cdot a\rangle \\ &= a^* \langle \xi, \xi\rangle a \\ &= a^* \cdot 1 \cdot a \\ &= a^* a \\ &= \langle a, a\rangle. \end{aligned}$$

Definimos o candidato a adjunto $\Phi^* : H \otimes E_A \to A$ em elementos da forma $e_m \otimes y$:

$$\Phi^*(e_m \otimes y) := \langle x_m, y\rangle_A$$

e estendemos por linearidade e continuidade. (A convergência de $\sum \langle x_n, x_n\rangle$ garante que Φ^* é bem definido e limitado).

Verificamos a adjuntabilidade:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(a), e_m \otimes y\rangle_{H\otimes E} &= \left\langle \sum_n e_n \otimes x_n a, e_m \otimes y \right\rangle \\
&= \sum_n \langle e_n, e_m\rangle_{\mathbb{C}} \cdot \langle x_n a, y\rangle_A \\
&= 1 \cdot \langle x_m a, y\rangle_A = \langle x_m, y\rangle_A a \\
&= \Phi^*(e_m \otimes y) \cdot a \\
&= \langle \Phi^*(e_m \otimes y), a\rangle_A
\end{aligned}$$

Isso demonstra que Φ é adjuntável. Além disso,

$$\begin{aligned}
\Phi^*\Phi(a) &= \Phi^*(\sum_n e_n \otimes x_n a) \\
&= \sum_n \Phi^*(e_n \otimes x_n a) \\
&= \sum_n \langle x_n, x_n a\rangle \\
&= \left(\sum_n \langle x_n, x_n\rangle\right) a
\end{aligned}$$

Como $\sum\langle x_n, x_n\rangle \to 1$ estritamente em $M(A)$, temos $\Phi^*\Phi = 1_A$. Então, seja $F = (\Phi(A))^\perp$ o complemento ortogonal da imagem de Φ em $H \otimes E_A$. Temos uma decomposição ortogonal

$$H \otimes E_A \cong \Phi(A) \oplus F \cong A \oplus F$$

como A-módulos de Hilbert.

Agora, provaremos o item 2. Este resultado segue por uma sequência de equivalências unitárias do item 1. e do Teorema de Estabilização de Kasparov (Teorema 6.3). Assumimos que E_A é enumeravelmente gerado.

$$\begin{aligned}
H \otimes E &\approx (H \otimes H) \otimes E \\
&\approx H \otimes (H \otimes E) \\
&\approx H \otimes (A \oplus F) \\
&\approx (H \otimes A) \oplus (H \otimes F) \\
&= H_A \oplus (H \otimes F) \\
&\approx H_A
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 7.7. *Sejam E_A um A-módulo de Hilbert, F_B um B-módulo de Hilbert e $\Phi : A \to \mathcal{L}_B(F)$ um *-homomorfismo. Para cada $x \in E$, definimos a aplicação $L_x : F \to E \otimes_\Phi F$ por $L_x(y) = x \otimes y$. Então $L_x \in \mathcal{L}_B(F, E \otimes_\Phi F)$, com adjunto dado por:*

$$L_x^*(u \otimes v) = \Phi(\langle x, u\rangle_A)v, \quad (u \in E, v \in F).$$

Além disso, $\|L_x\| \leq \|x\|$.

Demonstração. A limitação de L_x segue da definição da norma no produto tensorial interior. Para verificar a adjunção, sejam $y \in F$ e $u \otimes v \in E \otimes_\Phi F$. Temos:

$$\begin{aligned}\langle L_x(y), u \otimes v\rangle_{E\otimes F} &= \langle x \otimes y, u \otimes v\rangle \\ &= \langle y, \Phi(\langle x, u\rangle_A)v\rangle_B \\ &= \langle y, L_x^*(u \otimes v)\rangle_B.\end{aligned}$$

Pela densidade dos tensores elementares e continuidade, a fórmula vale para todo o espaço.

Q.E.D.

Proposição 7.8. *Nas condições do lema anterior, suponha que Φ mapeie A em $\mathcal{K}_B(F)$. Seja $\Phi_* : \mathcal{L}_A(E) \to \mathcal{L}_B(E \otimes_\Phi F)$ o homomorfismo induzido ($\Phi_*(T) = T \otimes 1$). Então:*

1. *$\Phi_*(\mathcal{K}_A(E)) \subseteq \mathcal{K}_B(E \otimes_\Phi F)$.*
2. *Se $\Phi(A) = \mathcal{K}_B(F)$, então a restrição de Φ_* induz um isomorfismo de $\mathcal{K}_A(E)$ em $\mathcal{K}_B(E \otimes_\Phi F)$.*

Demonstração. Utilizando os operadores L_x do Lema 7.7, observamos que para $x, y \in E$ e $a \in A$:

$$\begin{aligned}\Phi_*(|xa\rangle\langle y|)(u \otimes v) &= |xa\rangle\langle y|(u) \otimes v \\ &= (xa\langle y, u\rangle_A) \otimes v \\ &= x \otimes \Phi(a\langle y, u\rangle_A)v \\ &= x \otimes \Phi(a)\Phi(\langle y, u\rangle_A)v \\ &= L_x\Phi(a)L_y^*(u \otimes v).\end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_*(|xa\rangle\langle y|) = L_x\Phi(a)L_y^*$. Como $\Phi(a) \in \mathcal{K}_B(F)$ e $\mathcal{K}_B$ é um ideal em $\mathcal{L}_B$, e sabendo que L_x e L_y^* são limitados, o produto $L_x\Phi(a)L_y^*$ é um operador compacto em $E \otimes_\Phi F$. Como $\mathcal{K}_A(E)$ é gerado por elementos da forma $|xa\rangle\langle y|$, conclui-se que $\Phi_*(\mathcal{K}_A(E)) \subseteq \mathcal{K}_B(E \otimes_\Phi F)$.

Para a sobrejetividade: se Φ cobre $\mathcal{K}_B(F)$, então para quaisquer $z, w \in F$, existe $a \in A$ uma sequência tal que $\Phi(a) \approx |z\rangle\langle w|$. Substituindo na fórmula acima:

$$L_x |z\rangle\langle w| L_y^* = |x \otimes z\rangle\langle y \otimes w|.$$

Isso mostra que os operadores "compactos" no produto tensorial estão na imagem de Φ_*. Sendo Φ_* uma isometria, ela é um isomorfismo.

Q.E.D.

Proposição 7.9. *Sejam E_A, F_A módulos de Hilbert. Considere a C*-álgebra $B = \mathcal{K}_A(E)$ e o espaço $G = \mathcal{K}_A(E, F)$. Então G é um B-módulo de Hilbert (com ação à direita por composição e produto interno $\langle S, T\rangle_B = S^*T$). Se E_A é cheio, então $\mathcal{K}_B(G) \cong \mathcal{K}_A(F)$.*

Demonstração. Definimos a aplicação $\Psi : \mathcal{L}_A(F) \to \mathcal{L}_B(G)$ pela multiplicação à esquerda: $\Psi(T)(S) = TS$ para $S \in G$. Ψ é um *-homomorfismo por definição.

Se $\Psi(T) = 0$, então $T\,|z\rangle\,\langle x| = 0$ para todos $z \in F, x \in E$. Isso implica $Tz\langle x, x'\rangle_A = 0$ para quaisquer z, x, x'. Como E é cheio, o ideal gerado por $\langle x, x'\rangle$ é denso em A, logo $TzA = 0 \implies Tz = 0$. Portanto $T = 0$.

Considere o operador $|S\rangle\,\langle R| \in \mathcal{K}_B(G)$, em que $S = |z\rangle\,\langle x|$ e $R = |w\rangle\,\langle y|$ com $z, w \in F$ e $x, y \in E$. Calculamos a ação desse operador em $Q \in G$:

$$\begin{aligned}(|S\rangle\,\langle R|)(Q) &= S\langle R, Q\rangle_B = S(R^*Q)\\ &= |z\rangle\,\langle x|\,(|w\rangle\,\langle y|)^*Q\\ &= |z\rangle\,\langle x|\,|y\rangle\,\langle w|\,Q\\ &= |z\langle x, y\rangle_A\rangle\,\langle w|\,(Q)\\ &= \Psi(|z\langle x, y\rangle_A\rangle\,\langle w|)(Q).\end{aligned}$$

Ou seja, Ψ mapeia o operador $|u\rangle\,\langle w| \in \mathcal{K}_A(F)$ (em que $u = z\langle x, y\rangle$) no operador $|S\rangle\,\langle R| \in \mathcal{K}_B(G)$. Se E é cheio, elementos da forma $z\langle x, y\rangle$ geram F densamente. Logo, a imagem de $\mathcal{K}_A(F)$ por Ψ cobre os geradores de $\mathcal{K}_B(G)$.

Q.E.D.

Lema 7.10. *Se E é um A-módulo de Hilbert enumeravelmente gerado, então E é unitariamente equivalente a um submódulo ortogonalmente complementado de H_A. Isto é, $E \cong F \subseteq H_A$ em que $H_A = F \oplus F^\perp$ e $F^\perp \cong H_A$.*

Demonstração. Pelo Teorema 6.3, temos $E \oplus H_A \cong H_A$. Seja $U : E \oplus H_A \to H_A$ o isomorfismo unitário. Identificamos E com o submódulo $E \oplus \{0\}$ de $E \oplus H_A$. Defina $F = U(E \oplus \{0\})$. Como U é unitário, F é fechado e isomorfo a E. O complemento ortogonal de $E \oplus \{0\}$ em $E \oplus H_A$ é $\{0\} \oplus H_A$, que é isomorfo a H_A. Como U preserva complementos ortogonais, $F^\perp = U(\{0\} \oplus H_A)$ é isomorfo a H_A. Portanto, $H_A = F \oplus F^\perp$ com $F^\perp \cong H_A$.

Q.E.D.

Proposição 7.11. *Seja E_A um módulo de Hilbert. E_A é enumeravelmente gerado se, e somente se, a C*-álgebra $\mathcal{K}_A(E)$ é σ-unital.*

Demonstração. Suponha que E seja enumeravelmente gerado. Pelo Lema 7.10, podemos identificar E com um submódulo complementado de H_A. Seja $P \in \mathcal{L}_A(H_A)$ a projeção de H_A sobre E. Sabemos que H_A possui um conjunto gerador enumerável $\{e_n\}$. O elemento $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,|e_n\rangle\,\langle e_n|$ é estritamente positivo em $\mathcal{K}_A(H_A)$ (veja a prova do Lema 7.4). Como $\mathcal{K}_A(H_A)$ possui um elemento estritamente positivo, ela é σ-unital. Seja (u_n) uma unidade aproximada enumerável para $\mathcal{K}_A(H_A)$. Identificamos $\mathcal{K}_A(E)$ com o canto $P\mathcal{K}_A(H_A)P$. De fato, para $x, y \in E$, temos $|x\rangle\,\langle y| = |Px\rangle\,\langle Py| = P\,|x\rangle\,\langle y|\,P$. Defina $v_n = Pu_nP$. Para qualquer $K \in \mathcal{K}_A(E)$, temos $K = PK = KP$. Assim:

$$\begin{aligned} \|v_n K - K\| &= \|Pu_n PK - PK\| \\ &= \|P(u_n K - K)\| \\ &\leq \|P\|\|u_n K - K\| \\ &= \|u_n K - K\| \to 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{K}_A(E)$ é σ-unital.

Suponha que $\mathcal{K}_A(E)$ seja σ-unital. Então ela possui uma unidade aproximada enumerável $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por definição de $\mathcal{K}_A(E)$, para cada n, podemos encontrar um operador $T_n = \sum_{i=1}^{k_n} |x_{n,i}\rangle \langle y_{n,i}|$ tal que

$$\|T_n - v_n\| < \frac{1}{n}.$$

Considere o conjunto enumerável $S = \{x_{n,i} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n\} \cup \{y_{n,i} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n\}$. Seja F o submódulo fechado gerado por S. Para qualquer $z \in E$ e $\epsilon > 0$, como $v_n z \to z$, existe n tal que $\|v_n z - z\| < \epsilon/2$ e $\|T_n z - v_n z\| < \epsilon/2$. Então $\|T_n z - z\| < \epsilon$. Mas $T_n z = \sum_i x_{n,i}\langle y_{n,i}, z\rangle \in F$, pois $x_{n,i} \in S \subseteq F$. Como ϵ é arbitrário, $z \in F$. Logo $E = F$, e E é enumeravelmente gerado.

Q.E.D.

7.3 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 7.12 (Equivalência de Morita Forte)**.** Duas C*-álgebras A e B são ***fortemente Morita equivalentes***, (ou Morita-Rieffel equivalentes), denotado por $A \sim_{MR} B$, se existe um A-módulo de Hilbert cheio E_A tal que $B \cong \mathcal{K}_A(E)$.

Proposição 7.13. *A equivalência de Morita forte é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Para qualquer C*-álgebra A, considere o A-módulo de Hilbert padrão $E_A = A$. O produto interno é dado por $\langle a, b\rangle = a^*b$, cuja imagem gera A, logo A é cheio como A-módulo de Hilbert. Sabemos que $\mathcal{K}_A(A) \cong A$ (via a identificação de $|a\rangle \langle b|$ com a multiplicação à esquerda por ab^*, pois $(|a\rangle \langle b|)(c) = a\langle b, c\rangle = a(b^*c)$). Portanto, $A \sim_{MR} A$.

Suponha $A \sim_{MR} B$. Então existe um A-módulo de Hilbert cheio E_A tal que $B \cong \mathcal{K}_A(E)$. Defina $G = \mathcal{K}_A(E, A)$. Pela Proposição 7.9, G torna-se um módulo de Hilbert sobre a C*-álgebra $B' = \mathcal{K}_A(E)$ (que é isomorfa a B). A ação de B' em G é dada pela composição à direita, e o produto interno em G com valores em B' é definido por $\langle S, T\rangle_{B'} = S^*T$. A mesma proposição garante que $\mathcal{K}_{B'}(G) \cong \mathcal{K}_A(A) \cong A$.

Resta mostrar que G é cheio como B'-módulo. Os elementos de G incluem os operadores da forma $|a\rangle \langle x| : E \to A$ (em que $a \in A, x \in E$) definidos por $(|a\rangle \langle x|)(y) = a\langle x, y\rangle_A$. O produto interno em G satisfaz:

$$\begin{aligned}\langle |a\rangle \langle x| \,, |b\rangle \langle y|\rangle_{B'} &= (|a\rangle \langle x|)^*(|b\rangle \langle y|) \\ &= (|x\rangle \langle a|)(|b\rangle \langle y|) \\ &= |x\langle a, b\rangle_A\rangle \langle y| \\ &= |xa^*b\rangle \langle y| \,.\end{aligned}$$

Se tomarmos a e b em uma unidade aproximada de A, vemos que o fecho do span linear desses produtos internos contém todos os elementos da forma $|x'\rangle \langle y|$, em que $x' \in E\langle A, A\rangle_A = EA = E$. Como E é um módulo de Hilbert, $\mathcal{K}_A(E)$ é gerado (como C*-álgebra) pelos operadores $|x\rangle \langle y|$. Portanto, $\langle G, G\rangle_{B'} = \mathcal{K}_A(E) \cong B$, o que implica que G é cheio. Concluímos que $B \cong \mathcal{K}_A(E) \implies A \cong \mathcal{K}_B(G)$, logo $B \sim_{MR} A$.

Suponha $A \sim_{MR} B$ e $B \sim_{MR} C$. Então existem:

1. Um A-módulo cheio E tal que $\Phi : B \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}_A(E)$;

2. Um B-módulo cheio F tal que $C \cong \mathcal{K}_B(F)$.

Podemos ver Φ como um *-homomorfismo $\Phi : B \to \mathcal{L}_A(E)$ c uja imagem é $\mathcal{K}_A(E)$. Construímos o produto tensorial interior $Z = F \otimes_\Phi E$. Pelas propriedades do produto tensorial, Z é um A-módulo de Hilbert.

Precisamos verificar que Z é cheio. O produto interno em Z é dado por aproximações de somas de:

$$\langle y_1 \otimes x_1, y_2 \otimes x_2\rangle_A = \langle x_1, \Phi(\langle y_1, y_2\rangle_B)x_2\rangle_A.$$

Como F é cheio, os elementos $\langle y_1, y_2\rangle_B$ geram B. Como Φ é um isomorfismo sobre os compactos, $\Phi(\langle y_1, y_2\rangle_B)$ gera $\mathcal{K}_A(E)$. Como E é um módulo de Hilbert, $\mathcal{K}_A(E)E$ é denso em E, e como E é cheio, produtos internos de elementos de E geram A. Portanto, $\langle Z, Z\rangle_A$ é denso em A, ou seja, Z é cheio.

Finalmente, pela Proposição 7.8, como Φ mapeia B sobrejetivamente em $\mathcal{K}_A(E)$, o homomorfismo induzido $\Phi_* : \mathcal{K}_B(F) \to \mathcal{K}_A(F \otimes_\Phi E)$ é um isomorfismo. Como $C \cong \mathcal{K}_B(F)$ e $\mathcal{K}_B(F) \cong \mathcal{K}_A(Z)$, temos $C \cong \mathcal{K}_A(Z)$. Logo $A \sim_{MR} C$.

Q.E.D.

Dada uma C*-álgebra A e uma projeção $p \in A$, a álgebra de canto associada a p é a subálgebra definida por:

$$pAp = \{pap : a \in A\} \subseteq A.$$

Um exemplo clássico ocorre na álgebra de matrizes. Considere $A = M_2(\mathbb{C})$, a álgebra das matrizes 2×2 com entradas complexas. Seja p a projeção sobre o primeiro vetor da base canônica:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para um elemento genérico $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, o elemento correspondente na álgebra de canto pAp é:

$$\begin{aligned} pXp &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que o resultado retém apenas a entrada do "canto" superior esquerdo (daí o nome canto). A álgebra resultante pAp consiste em todas as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que é isomorfa ao corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Exemplo 7.14. Seja B uma C*-álgebra e $p \in B$ uma projeção (ou seja, $p^2 = p = p^*$). Se a projeção for ***cheia***, isto é, se o ideal bilateral fechado gerado por ela for toda a álgebra ($\overline{BpB} = B$), então $pBp \sim_{MR} B$.

Demonstração. Considere o subespaço fechado $E = pB$. Podemos estruturar E como um B-módulo de Hilbert à direita com as operações herdadas de B: A ação à direita é dada pelo produto em B: para $pb \in E$ e $b' \in B$, definimos $(pb) \cdot b' := pbb' \in E$. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : E \times E \to B$ é definido por $\langle x, y \rangle_B := x^* y$. Para $x = pb$ e $y = pb'$, temos:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_B &= (pb)^*(pb') \\ &= b^* p^* p b' \\ &= b^* p b'. \end{aligned}$$

A positividade segue de $\langle x, x \rangle_B = x^* x \geq 0$.

O módulo é cheio, pois o ideal gerado pelos produtos internos é:

$$\overline{\text{span}}\{\langle x, y \rangle_B : x, y \in E\} = \overline{\text{span}}\{b^* p b' : b, b' \in B\} = \overline{BpB}.$$

Como p é uma projeção cheia, $\overline{BpB} = B$.

Resta mostrar que $\mathcal{K}_B(E) \cong pBp$. Os operadores "compactos" são gerados pelos operadores $|x\rangle \langle y|$, com $x, y \in E$. Lembramos que a ação de tal operador num elemento $z \in E$ é dada por $|x\rangle \langle y| (z) = x\langle y, z \rangle_B$. Sejam $x = pa$ e $y = pb$ elementos de E. Então:

$$\begin{aligned} |x\rangle \langle y| (z) &= x(y^* z) \\ &= pa((pb)^* z) \\ &= pa(b^* p z) \\ &= (pab^* p) z. \end{aligned}$$

Observe que o elemento $k = xy^* = pab^*p$ pertence à álgebra de canto pBp. A equação acima mostra que o operador $|x\rangle\langle y|$ age em $E = pB$ exatamente como a multiplicação à esquerda pelo elemento $xy^* \in pBp$.

Definimos o homomorfismo $\Phi : \mathcal{K}_B(E) \to pBp$ que leva o gerador $|x\rangle\langle y|$ em xy^*. Esta aplicação é um *-isomorfismo, por ser a multiplicação à esquerda. Como E é um B-módulo de Hilbert cheio e $\mathcal{K}_B(E) \cong pBp$, concluímos que $pBp \sim_{MR} B$.

Q.E.D.

Exemplo 7.15. A C*-álgebra $M_n(\mathbb{C})$ é fortemente Morita equivalente a $\mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $A = \mathbb{C}$ e $B = M_n(\mathbb{C})$. Considere o espaço vetorial $E = \mathbb{C}^n$. Tornamos E um módulo de Hilbert à direita sobre $M_n(\mathbb{C})$ com a multiplicação matricial usual:

$$v \cdot T = vT, \quad \text{para } v \in \mathbb{C}^n, T \in M_n(\mathbb{C}).$$

O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : E \times E \to M_n(\mathbb{C})$ é definido por:

$$\langle v, w \rangle_B := v^* w$$

em que v^* denota o vetor coluna. O resultado é uma matriz $n \times n$. Explicitamente, a entrada (i, j) da matriz $\langle v, w \rangle_B$ é $\overline{v_i} w_j$.

O módulo é cheio pois o span das matrizes da forma v^*w gera todo $M_n(\mathbb{C})$, basta tomar vetores da base canônica.

Agora, analisamos a álgebra dos operadores $\mathcal{K}_B(E)$. Os geradores são da forma $|v\rangle\langle w|$ para $v, w \in \mathbb{C}^n$. A ação em um vetor $u \in E$ é:

$$|v\rangle\langle w|(u) = v \cdot \langle w, u \rangle_B = v(w^*u).$$

Note que w^*u é uma multiplicação de matrizes ($n \times 1$ por $1 \times n$) resultando numa matriz. Porém, pela associatividade da álgebra de matrizes, $v(w^*u) = (vw^*)u$. O termo $\lambda = vw^*$ é o produto escalar usual de vetores em $\mathbb{C}^n$ (resultado 1×1, um escalar em $\mathbb{C}$). Ou seja, o operador $|v\rangle\langle w|$ age como a multiplicação pelo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Isso estabelece um isomorfismo $\mathcal{K}_{M_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}$.

Sendo $\mathbb{C}^n$ um $M_n(\mathbb{C})$-módulo cheio com compactos isomorfos a $\mathbb{C}$, temos $\mathbb{C} \sim_{MR} M_n(\mathbb{C})$.

Q.E.D.

7.4 O TEOREMA DE BROWN-GREEN-RIEFFEL

"Now for the punch line:" (LANCE, 1995, p.74)

Teorema 7.16 (Brown-Green-Rieffel)**.** *Duas C*-álgebras σ-unitais são estavelmente isomorfas se e somente se são fortemente Morita equivalentes.*

Demonstração. Observe primeiro que para A C*-álgebra qualquer,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_A(H_A) &= \mathcal{K}_A(H \otimes A) \\ &\cong \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(H) \otimes \mathcal{K}_A(A) \\ &= K \otimes A\end{aligned}$$

então $A \sim_{MR} K \otimes A$. Se A e B são estavelmente isomorfas, então

$$\begin{aligned}A &\sim_{MR} K \otimes A \\ &\sim_{MR} K \otimes B \\ &\sim_{MR} B\end{aligned}$$

Portanto $A \sim_{MR} B$ por ser relação de equivalência. Para a recíproca, suponha $A \sim_{MR} B$, portanto $B \cong \mathcal{K}_A(E)$ em que E_A é um A-módulo de Hilbert cheio. Como A e B são σ-unitais, $B \cong \mathcal{K}_A(E)$ é σ-unital. Pela Proposição 7.11, isso implica que E_A é enumeravelmente gerado. Concluímos que

$$\begin{aligned}K \otimes B &\cong \mathcal{K}_A(H \otimes E) \\ &\cong \mathcal{K}_A(H_A) \\ &\cong K \otimes A.\end{aligned}$$

Q.E.D.

7.5 OBSERVAÇÕES FINAIS

Encerramos destacando que a noção de equivalência de Morita forte também pode ser formulada através de bimódulos.

Definição 7.17 (Bimódulo de Equivalência)**.** Sejam A e B C*-álgebras. Um $A-B$-***bimódulo de equivalência*** é um espaço vetorial complexo E equipado com:

1. Uma estrutura de A-módulo à esquerda e B-módulo à direita tal que as ações são compatíveis, isto é, $(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b)$ para quaisquer $a \in A, b \in B, x \in X$;

2. Um produto interno à esquerda com valores em A, denotado por ${}_A\langle \cdot, \cdot \rangle$, e um produto interno à direita com valores em B, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$, satisfazendo:

   (a) E é um A-módulo de Hilbert à esquerda cheio com respeito a ${}_A\langle \cdot, \cdot \rangle$;

   (b) E é um B-módulo de Hilbert à direita cheio com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$;

3. Para quaisquer $x, y, z \in E$, vale a condição de compatibilidade::

$$ {}_A\langle x, y \rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z \rangle_B.$$

Nestas condições, dizemos que E implementa uma equivalência de Morita forte entre A e B.

No caso unital, a equivalência de Morita forte coincide com a formulação clássica da equivalência de Morita para anéis (BEER, 1982). Por outro lado, quando A é comutativa, a literatura sugere que a equivalência se simplificam ainda mais. Podemos ver no trabalho de Beer (BEER, 1982) que a equivalência de Morita relaciona-se com a estrutura do espectro, e que as condições necessárias reduzem-se a um isomorfismo entre as duas C*-álgebras.

REFERÊNCIAS DA PARTE III

As referências principais utilizadas para a teoria desta parte do trabalho foram:

1. (LANCE, 1995)
2. (KADISON; RINGROSE, 1986)
3. (SUNDER, 1997)
4. (PEDERSEN, 2018)

CONCLUSÃO

Neste trabalho, expusemos de forma sistemática a teoria da equivalência de Morita forte para C*-álgebras, partindo dos conceitos fundamentais de módulos sobre anéis até o Teorema de Brown-Green-Rieffel.

Na Parte I, estabelecemos as bases algébricas necessárias, expondo a teoria de módulos sobre anéis, introduzindo conceitos básicos de teoria de categorias, e apresentando a noção clássica de equivalência de Morita para anéis. A utilidade da equivalência de Morita é vista pelo exemplo de que um anel com unidade R é equivalente ao anel de matrizes $M_n(R)$.

Na Parte II, discutimos a teoria dos C*-módulos de Hilbert, uma generalização do conceito de espaços de Hilbert e de C*-álgebras, que incorpora estruturas analíticas além das puramente algébricas dos módulos sobre um anel. Mostramos também a teoria dos operadores adjuntáveis e "compactos" em módulos de Hilbert, culminando com a construção do produto tensorial interior e a demonstração do Teorema da Estabilização de Kasparov.

Na Parte III, a equivalência de Morita através de módulos de Hilbert cheios. Provamos que esta relação é de fato uma relação de equivalência. O resultado principal, o Teorema de Brown-Green-Rieffel, estabelece a equivalência entre duas noções: C*-álgebras σ-unitais são estavelmente isomorfas se, e somente se, são fortemente Morita equivalentes.

Direções futuras para estudo incluem o uso da teoria para fibrados de Fell, as álgebras de Cuntz-Pimsner e o estudo do grupo de Picard de C*-álgebras.

Assim, aprofundamos nossa visão sobre a conexão entre álgebra de operadores e a teoria de anéis, utilizando fundamentos algébricos e a estrutura analítica dos C*-módulos de Hilbert.

REFERÊNCIAS

BEER, Walter. On Morita equivalence of nuclear C*-algebras. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 26, n. 3, p. 249–267, 1982. ISSN 0022-4049. DOI: https://doi.org/10.1016/0022-4049(82)90109-8. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404982901098>. Citado na p. 95.

BLYTH, T.S. **Module Theory: An Approach to Linear Algebra**. [S.l.]: Clarendon Press, 1990. (Oxford science publications). ISBN 9780198533894. Citado na p. 45.

BROWN, Lawrence G.; GREEN, Philip P.; RIEFFEL, Marc A. Stable Isomorphism and Strong Morita Equivalence of C*-Algebras. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 71, n. 2, p. 349–363, 1977. ISSN 0030-8730. Citado na p. 11.

BROWN, Nathanial P.; OZAWA, Narutaka. **C*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2008. v. 88. (Graduate Studies in Mathematics). ISBN 978-0821843819. Citado na p. 112.

FERREIRA, Raphael P. **Introdução ao Estudo de C*-Álgebras**. Florianópolis, Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina, 2024. Citado na p. 13.

JACOBSON, N. **Basic Algebra II: Second Edition**. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics). ISBN 9780486135212. Citado na p. 45.

KADISON, Richard V; RINGROSE, John R. **Fundamentals of the theory of operator algebras. Volume II: Advanced theory**. [S.l.]: Academic press New York, 1986. v. 25. Citado nas pp. 83, 96.

KAPLANSKY, Irving. Modules Over Operator Algebras. **American Journal of Mathematics**, The Johns Hopkins University Press, v. 75, n. 4, p. 839–858, 1953. ISSN 00029327, 10806377. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2372552>. Acesso em: 13 dez. 2024. Citado na p. 11.

KASPAROV, Gennadi G. Hilbert C*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu. **Journal of Operator Theory**, Theta Foundation, v. 4, n. 1, p. 133–150, 1980. Citado na p. 11.

LANCE, E Christopher. **Hilbert C*-modules: a toolkit for operator algebraists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. v. 210. Citado nas pp. 77, 93, 96.

MORITA, Kiiti. Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with Minimum Condition. **Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A**, Editorial Committee of Tsukuba Journal of Mathematics, v. 6, n. 150, p. 83–142, 1958. ISSN 03713539. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/43698445>. Acesso em: 13 dez. 2024. Citado na p. 11.

MURPHY, Gerard J. **C*-Algebras and Operator Theory**. Boston: Academic Press, 1990. ISBN 978-0125113601. Citado nas pp. 102–104, 112.

PASCHKE, William L. Inner Product Modules Over B*-Algebras. **Transactions of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 182, p. 443–468, 1973. ISSN 00029947. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1996542>. Acesso em: 13 dez. 2024. Citado na p. 11.

PAULSEN, Vern. **Completely bounded maps and operator algebras**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. v. 78. Citado na p. 104.

PEDERSEN, G. K. **C*-algebras and their automorphism groups**. [S.l.]: Academic press, 2018. Citado na p. 96.

RIEFFEL, Marc A. Induced Representations of C*-Algebras. **Advances in Mathematics**, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 176–257, 1974. Citado na p. 11.

SUNDER, Viakalathur S. **Functional analysis: spectral theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1997. Citado nas pp. 82, 96, 103.

WEGGE-OLSEN, Niels Erik. **K-theory and C*-algebras: a friendly approach**. [S.l.]: Oxford university press, 1993. Citado na p. 77.

Apêndices

APÊNDICE A – ANÁLISE FUNCIONAL E C*-ÁLGEBRAS

Definição A.1 (Espaço de Banach)**.** Um espaço vetorial B junto com uma função $||\cdot||:B\to\mathbb{R}$ denominada ***norma*** que satisfaz:

1. $||x||\geq 0$ para todo $x\in B$ e $||x||=0$ se e somente se $x=0$;
2. $||\alpha x||=|\alpha|||x||$ para todo $x\in B$ e $\alpha\in\mathbb{C}$;
3. $||x+y||\leq ||x||+||y||$ para todo $x,y\in B$.

é denominado ***espaço normado***. Se B é completo com respeito à norma, então B é denominado ***espaço de Banach***.

Definição A.2 (Espaço de Hilbert)**.** Um espaço vetorial H junto com uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle:H\times H\to\mathbb{C}$ denominada ***produto interno*** que satisfaz, para todo $x,y,z\in H$ e $\alpha\in\mathbb{C}$:

1. $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;
2. $\langle x,x\rangle\geq 0$ e $\langle x,x\rangle=0$ se e somente se $x=0$;
3. $\langle x,\alpha y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$;
4. $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

é denominado ***espaço com produto interno***. Podemos induzir uma norma em H definindo $||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. Se H é completo com respeito à essa norma, então H é chamado de ***espaço de Hilbert***.

Definição A.3 (Álgebra de Banach)**.** Uma álgebra A sobre $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ equipado com uma operação binária $A\times A\to A$ que satisfaz, para todo $x,y,z\in A$ e $\alpha\in\mathbb{C}$:

1. $(x+y)z=xz+yz$ e $z(x+y)=zx+zy$ para todo $x,y,z\in A$;
2. $(\alpha x)y=x(\alpha y)=\alpha(xy)$ para todo $x,y\in A$ e $\alpha\in\mathbb{C}$;
3. $(xy)z=x(yz)$ para todo $x,y,z\in A$.

Se A é um espaço de Banach com respeito a uma norma $||\cdot||$ tal que $||xy||\leq||x||\cdot||y||$ para todo $x,y\in A$, então A é denominado ***álgebra de Banach***.

Definição A.4 (C*-Álgebra)**.** Uma álgebra de Banach A sobre $\mathbb{C}$ é denominada ***C*-álgebra*** se existe uma operação unária $*:A\to A$ tal que para todo $x,y\in A$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$:

1. $(x^*)^*=x$;
2. $(\alpha x+\beta y)^*=\overline{\alpha}x^*+\overline{\beta}y^*$;
3. $(xy)^*=y^*x^*$;

4. $||x^*x|| = ||x||^2$.

Definição A.5 (*-Homomorfismo e Ideal)**.** Sejam A e B C*-álgebras. Uma aplicação linear $\phi : A \to B$ é um ***-homomorfismo*** se $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ e $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x, y \in A$. Um subconjunto $I \subseteq A$ é um ***ideal*** de A se for um subespaço vetorial e, para todo $x \in I$ e $a \in A$, $ax \in I$ e $xa \in I$. Se $I^* = I$, dizemos que é um ***-ideal***. Em uma C*-álgebra, todo ideal fechado é automaticamente um *-ideal.

Teorema A.6 (Unitização de uma C*-álgebra)**.** *Seja A uma C*-álgebra não-unital. Considere o espaço vetorial $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ com o produto e a involução definidos por:*

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$
$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$$

para $a, b \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Existe uma norma em A^+ que a torna uma C-álgebra unital, contendo A como um ideal fechado. Esta construção é chamada de* **unitização** *de A (MURPHY, 1990, p. 12).*

Definição A.7 (Espectro)**.** Seja A uma álgebra de Banach unital com unidade 1. Para $x \in A$, o ***espectro*** de x é o conjunto

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (\lambda 1 - x) \text{ não é invertível em } A\}.$$

Se A não é unital, o espectro de x é definido como o espectro de x em sua unitização A^+. O espectro de um elemento $x \in A$ é sempre um subconjunto compacto e não-vazio de $\mathbb{C}$.

Definição A.8 (Elemento Positivo)**.** Seja A uma C*-álgebra. Um elemento $x \in A$ é denominado ***positivo*** se x é auto-adjunto ($x = x^*$) e seu espectro $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$. Denotamos o conjunto de elementos positivos por A_+. Um elemento x é positivo se, e somente se, existe $y \in A$ tal que $x = y^*y$.

Definição A.9 (Positividade Completa)**.** Sejam A e B C*-álgebras e $\phi : A \to B$ uma aplicação linear. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a aplicação $\phi^{(n)} : M_n(A) \to M_n(B)$ por

$$\phi^{(n)}((a_{ij})) = (\phi(a_{ij})).$$

A aplicação ϕ é dita:

1. n-***positiva*** se $\phi^{(n)}$ leva elementos positivos de $M_n(A)$ em elementos positivos de $M_n(B)$;

2. ***completamente positiva*** se ϕ é n-positiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que 1-positividade é simplesmente positividade, i.e., $\phi(A_+) \subseteq B_+$.

Definição A.10 (Funcional Linear Positivo e Estado)**.** Seja A uma C*-álgebra. Um funcional linear $\phi : A \to \mathbb{C}$ é dito ***positivo*** se $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in A_+$. Um ***estado*** em A é um funcional linear positivo ϕ tal que $||\phi|| = 1$. Se A é unital, $||\phi|| = 1$ é equivalente a $\phi(1) = 1$.

Definição A.11 (Unidade Aproximada e σ-unital)**.** Seja A uma C*-álgebra. Uma ***unidade aproximada*** para A é uma rede $(e_i)_{i\in I}$ de elementos positivos em A tal que $||e_i|| \leq 1$ para todo $i \in I$ e

$$\lim_i ||xe_i - x|| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_i ||e_i x - x|| = 0$$

para todo $x \in A$. Toda C*-álgebra possui uma unidade aproximada. Se a C*-álgebra admite uma unidade aproximada que é uma sequência ao invés de apenas uma rede, ela é dita ***σ-unital***.

Teorema A.12 (Operadores Lineares Limitados em Espaços de Banach)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach. O conjunto de todos os operadores lineares e limitados de X para Y, denotado por $\mathcal{B}(X, Y)$, é um espaço de Banach com a norma de operador. Em particular, se $X = Y$, $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ é uma álgebra de Banach unital (MURPHY, 1990, p. 3, p. 20).*

Teorema A.13 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. T é limitado (e, portanto, contínuo) se, e somente se, o seu gráfico $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ é um subespaço fechado de $X \times Y$ (SUNDER, 1997, p. 26).*

Teorema A.14 (Teorema da Aplicação Aberta e da Aplicação Inversa)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ um operador sobrejetor. Então, T é uma aplicação aberta (leva conjuntos abertos de X em conjuntos abertos de Y). Como corolário (Teorema da Aplicação Inversa), se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é uma bijeção, então o operador inverso T^{-1} é também limitado, i.e., $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ (SUNDER, 1997, pp. 23-24).*

Teorema A.15 (Identidade de Parseval)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $\{e_n\}_{n\in I}$ uma base ortonormal para H. Então, para quaisquer $x, y \in H$, temos a* **Identidade de Parseval***:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in I} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle.$$

Em particular, $||x||^2 = \sum_{n\in I} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (SUNDER, 1997, p. 48).

Teorema A.16 (Gelfand-Naimark para C*-álgebras comutativas)**.** *Seja A uma C*-álgebra comutativa. Então, existe um espaço de Hausdorff localmente compacto Ω tal que A é isometricamente *-isomorfa à álgebra $C_0(\Omega)$ das funções contínuas em Ω que se anulam no infinito. Se A for unital, Ω é compacto (SUNDER, 1997, p. 107).*

Teorema A.17 (Cálculo Funcional Contínuo)**.** *Seja A uma C*-álgebra e $x \in A$ um elemento normal (i.e., $x^*x = xx^*$). Então, para toda função contínua $f \in C(\sigma(x))$, em que $\sigma(x)$ é o espectro de x, existe um único elemento $f(x) \in A$ tal que a função $\Phi : C(\sigma(x)) \to A$ dado por $f \mapsto f(x)$ é um *-isomorfismo isométrico sobre a C*-subálgebra de A gerada por x e 1 (se A for unital). Em particular:*

1. *Se x é auto-adjunto ($x = x^*$), então x pode ser escrito como a diferença de dois elementos positivos, $x = x_+ - x_-$, em que $x_+ x_- = 0$.*

2. *Um elemento auto-adjunto x é positivo se, e somente se, seu espectro $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$.*

3. *Para um elemento positivo q, $q^n = 0$ para algum $n \geq 1$ implica que $q = 0$.*[1]

(MURPHY, 1990, P. 43-46)

Teorema A.18 (Construção Gelfand-Naimark-Segal)**.** *Seja A uma C*-álgebra e ϕ um estado em A. Então, existe um espaço de Hilbert H_ϕ, uma representação (um *-homomorfismo) $\pi_\phi : A \to \mathcal{B}(H_\phi)$, e um vetor cíclico $\xi_\phi \in H_\phi$ (i.e., $\pi_\phi(A)\xi_\phi$ é denso em H_ϕ) tal que*

$$\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle$$

para todo $x \in A$. A tripla $(H_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$ é única a menos de equivalência unital (MURPHY, 1990, pp. 93-94).

Teorema A.19 (Gelfand-Naimark para C*-álgebras gerais)**.** *Toda C*-álgebra A é isometricamente *-isomorfa a uma C*-subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ para algum espaço de Hilbert H. (Este teorema é uma consequência da construção GNS, tomando a soma direta das representações associadas a todos os estados de A) (MURPHY, 1990, p. 94).*

Teorema A.20 (Positividade Completa de *-Homomorfismos)**.** *Seja $\phi : A \to B$ um *-homomorfismo entre C*-álgebras. Então ϕ é completamente positivo (PAULSEN, 2002, p. 28).*

Definição A.21 (Ideal Essencial)**.** Seja B uma C*-álgebra e $A \subseteq B$ um ideal. Dizemos que A é um ***ideal essencial*** em B se, para qualquer $b \in B$, $b \neq 0$, temos $bA \neq \{0\}$ e $Ab \neq \{0\}$..

Definição A.22 (Álgebra de Multiplicadores)**.** Seja A uma C*-álgebra. A ***álgebra de multiplicadores*** de A, denotada por $M(A)$, é caracterizada (de forma única a menos de *-isomorfismo) como a C*-álgebra unital que contém A como um ideal essencial e que é "maximal"com essa propriedade. Enquanto a unitização A^+ (Teorema A.6) é a menor C*-álgebra unital contendo A como um ideal, $M(A)$ é a maior. (Formalmente, $M(A)$ é isomorfa à álgebra dos centralizadores duplos de A) (MURPHY, 1990, pp. 38-41).

[1] O item 3. é um corolário do CFC e do item 2. Seja q positivo. Pelo item 2., $\sigma(q) \subseteq [0, \infty)$. Se $q^n = 0$, então $\sigma(q^n) = \{0\}$. Pelo isomorfismo Φ do teorema, $\sigma(q^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(q)\} = \{0\}$. Como $\lambda \in [0, \infty)$, isso força $\sigma(q) = \{0\}$. Pela isometria do CFC, $\|q\| = \sup_{\lambda \in \sigma(q)} |\lambda| = 0$, implicando $q = 0$.

APÊNDICE T – PRODUTOS TENSORIAIS ANALÍTICOS

Se $(H_0, \langle\cdot,\cdot\rangle_0)$ e $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ são espaços de Hilbert, seu produto tensorial algébrico $H_0 \odot H_1$ é um espaço vetorial. Podemos equipá-lo com uma única forma sesquilinear $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que satisfaz

$$\langle x_1 \odot y_1, x_2 \odot y_2\rangle := \langle x_1, x_2\rangle_0 \langle y_1, y_2\rangle_1$$

para $x_1, x_2 \in H_0, y_1, y_2 \in H_1$. Para elementos gerais $\xi = \sum_i x_i \odot y_i$ e $\eta = \sum_j v_j \odot w_j$, esta forma é estendida por sesquilinearidade:

$$\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i, v_j\rangle_0 \langle y_i, w_j\rangle_1.$$

Para verificar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno, precisamos provar a positividade. Seja $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \odot y_i \in H_0 \odot H_1$. Seja $\{e_k\}_{k\in K}$ uma base ortonormal para H_0. Podemos reescrever cada $x_i = \sum_k \langle e_k, x_i\rangle_0 e_k$. Substituindo e reagrupando (usando a bilinearidade de $\odot$):

$$\xi = \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \langle e_k, x_i\rangle_0 e_k \right) \odot y_i = \sum_k e_k \odot \left(\sum_{i=1}^n \langle e_k, x_i\rangle_0 y_i \right).$$

Definindo $h_k := \sum_{i=1}^n \langle e_k, x_i\rangle_0 y_i \in H_1$, ξ pode ser escrito como $\xi = \sum_k e_k \odot h_k$, em que $\{e_k\}$ é um conjunto ortonormal. Agora, calculamos $\langle \xi, \xi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \sum_k e_k \odot h_k, \sum_j e_j \odot h_j\rangle &= \sum_{k,j} \langle e_k, e_j\rangle_0 \langle h_k, h_j\rangle_1 \\
&= \sum_{k,j} \delta_{kj} \langle h_k, h_j\rangle_1 \\
&= \sum_k \langle h_k, h_k\rangle_1 = \sum_k ||h_k||_1^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, $\langle \xi, \xi\rangle = 0$ se e somente se $h_k = 0$ para todo k, o que implica $\xi = 0$. Assim, $H_0 \odot H_1$ é um espaço com produto interno. Afirmamos que seu completamento pela norma induzida é o ***produto tensorial de espaços de Hilbert*** de H_0 e H_1, que é um espaço de Hilbert, e é denotado por $H_0 \hat{\otimes} H_1$.

Sejam A e B duas C*-álgebras. O produto tensorial algébrico $A \odot B$ é um espaço vetorial complexo. O nosso objetivo nesta seção é equipar este espaço com uma estrutura de C*-álgebra. Para isso, precisamos definir uma multiplicação, uma involução e, crucialmente, uma C*-norma. Primeiro, definimos as operações que tornam $A \odot B$ uma *-álgebra.

Definição T.1 (Multiplicação em $A \odot B$)**.** Para quaisquer tensores elementares $(a_1 \odot b_1)$ e $(a_2 \odot b_2)$ em $A \odot B$, definimos o seu produto como:

$$(a_1 \odot b_1)(a_2 \odot b_2) := (a_1 a_2) \odot (b_1 b_2).$$

Esta operação é estendida por linearidade para todos os elementos de $A \odot B$.

Proposição T.2. *Com a multiplicação definida acima, $A \odot B$ torna-se uma álgebra associativa.*

Demonstração. Para que $A \odot B$ seja uma álgebra, a multiplicação deve ser associativa e distributiva em relação à adição. A definição da multiplicação em tensores elementares é estendida para elementos arbitrários de $A \odot B$ por linearidade. Elementos arbitrários $x, y, z \in A \odot B$ são somas finitas de tensores elementares:

$$x = \sum_i a_i \odot b_i, \quad y = \sum_j c_j \odot d_j, \quad z = \sum_k e_k \odot f_k.$$

A multiplicação estendida por bilinearidade é, então,

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_i a_i \odot b_i\right)\left(\sum_j c_j \odot d_j\right) \\ &= \sum_{i,j} (a_i \odot b_i)(c_j \odot d_j) \\ &= \sum_{i,j} (a_i c_j) \odot (b_i d_j). \end{aligned}$$

Vamos verificar que $(xy)z = x(yz)$.

$$\begin{aligned} (xy)z &= \left(\sum_{i,j} (a_i c_j) \odot (b_i d_j)\right)\left(\sum_k e_k \odot f_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} ((a_i c_j) \odot (b_i d_j))(e_k \odot f_k) \\ &= \sum_{i,j,k} ((a_i c_j) e_k) \odot ((b_i d_j) f_k). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x(yz) &= \left(\sum_i a_i \odot b_i\right)\left(\sum_{j,k} (c_j e_k) \odot (d_j f_k)\right) \\ &= \sum_{i,j,k} (a_i \odot b_i)((c_j e_k) \odot (d_j f_k)) \\ &= \sum_{i,j,k} (a_i (c_j e_k)) \odot (b_i (d_j f_k)). \end{aligned}$$

Como a multiplicação nas C*-álgebras A e B é associativa, temos $(a_i c_j) e_k = a_i (c_j e_k)$ e $(b_i d_j) f_k = b_i (d_j f_k)$. Portanto, a multiplicação em $A \odot B$ é associativa. Vamos verificar que $x(y+z) = xy + xz$. A distributividade à direita, $(x+y)z = xz + yz$, é análoga. A propriedade segue da extensão bilinear da multiplicação:

$$\begin{aligned} x(y+z) &= \left(\sum_i a_i \odot b_i\right)\left(\sum_j c_j \odot d_j + \sum_k e_k \odot f_k\right) \\ &= \sum_{i,j} (a_i c_j) \odot (b_i d_j) + \sum_{i,k} (a_i e_k) \odot (b_i f_k) \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

Portanto, $A \odot B$ com a multiplicação definida é uma álgebra associativa.

Q.E.D.

Definição T.3 (Involução em $A \odot B$)**.** Para um tensor elementar $a \odot b \in A \odot B$, definimos a involução como:

$$(a \odot b)^* := a^* \odot b^*.$$

Esta operação é estendida por **linearidade conjugada** a todos os elementos de $A \odot B$. Para um elemento geral $x = \sum_i a_i \odot b_i$, a sua involução é:

$$x^* := \sum_i a_i^* \odot b_i^*.$$

Proposição T.4. *Com a involução e a multiplicação definidas acima, $A \odot B$ é uma *-álgebra.*

Demonstração. Devemos verificar que a involução satisfaz as três propriedades de uma *-álgebra: $(x^*)^* = x$, $(xy)^* = y^*x^*$ e $(\alpha x + \beta y)^* = \overline{\alpha}x^* + \overline{\beta}y^*$. Seja $x = \sum_i a_i \odot b_i$.

$$\begin{aligned}
(x^*)^* &= \left(\sum_i a_i^* \odot b_i^*\right)^* \\
&= \sum_i (a_i^* \odot b_i^*)^* \\
&= \sum_i (a_i^*)^* \odot (b_i^*)^* \\
&= \sum_i a_i \odot b_i \\
&= x.
\end{aligned}$$

Sejam $x = \sum_i a_i \odot b_i$, $y = \sum_j c_j \odot d_j$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(\alpha x + \beta y)^* &= \left(\alpha \sum_i a_i \odot b_i + \beta \sum_j c_j \odot d_j\right)^* \\
&= \left(\sum_i (\alpha a_i) \odot b_i + \sum_j (\beta c_j) \odot d_j\right)^* \\
&= \sum_i ((\alpha a_i) \odot b_i)^* + \sum_j ((\beta c_j) \odot d_j)^* \\
&= \sum_i (\alpha a_i)^* \odot b_i^* + \sum_j (\beta c_j)^* \odot d_j^* \\
&= \sum_i \overline{\alpha} a_i^* \odot b_i^* + \sum_j \overline{\beta} c_j^* \odot d_j^* \\
&= \overline{\alpha}\left(\sum_i a_i^* \odot b_i^*\right) + \overline{\beta}\left(\sum_j c_j^* \odot d_j^*\right) \\
&= \overline{\alpha}x^* + \overline{\beta}y^*.
\end{aligned}$$

É suficiente verificar para tensores elementares e estender por linearidade. Sejam $x = a \odot b$ e $y = c \odot d$.

$$\begin{aligned}
(xy)^* &= ((ac) \odot (bd))^* \\
&= (ac)^* \odot (bd)^* \\
&= (c^*a^*) \odot (d^*b^*).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
y^*x^* &= (c^* \odot d^*)(a^* \odot b^*) \\
&= (c^*a^*) \odot (d^*b^*).
\end{aligned}
$$

A igualdade se estende para somas finitas por linearidade. Concluímos que $A \odot B$ é uma *-álgebra.

Q.E.D.

A parte mais sutil é a definição de uma norma em $A \odot B$ que satisfaça $||x^*x|| = ||x||^2$. Existem, em geral, várias normas possíveis. Apresentaremos aqui a ***norma espacial*** (ou norma mínima). A construção depende da representação de C*-álgebras como operadores em espaços de Hilbert. Pelo teorema de Gelfand-Naimark (Teorema A.18), toda C*-álgebra A admite uma representação fiel $\pi_A : A \to \mathcal{B}(H_A)$ em um espaço de Hilbert H_A. Sejam $\pi_A : A \to \mathcal{B}(H_A)$ e $\pi_B : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$ representações fiéis de A e B, respectivamente. Podemos então definir a representação π de $A \odot B$ no espaço de Hilbert $H_A \hat{\otimes} H_B$.

Definição T.5 (Representação Tensorial)**.** A ***representação tensorial*** $\pi : A \odot B \to \mathcal{B}(H_A \hat{\otimes} H_B)$ é definida em tensores elementares da seguinte forma:

$$
\pi(a \odot b)(\xi \hat{\otimes} \eta) := (\pi_A(a)\xi) \hat{\otimes} (\pi_B(b)\eta)
$$

para todo $a \in A, b \in B, \xi \in H_A, \eta \in H_B$. Essa definição é estendida linearmente para todos os elementos de $A \odot B$.

Proposição T.6. *A representação tensorial π é um *-homomorfismo fiel.*

Demonstração. Considere a aplicação $\phi : A \times B \to \mathcal{B}(H_A \hat{\otimes} H_B)$ definida por $\phi(a, b) = \pi_A(a) \otimes \pi_B(b)$, em que $\pi_A(a) \otimes \pi_B(b)$ é o operador em $H_A \hat{\otimes} H_B$ tal que $(\pi_A(a) \otimes \pi_B(b))(\xi \hat{\otimes} \eta) = (\pi_A(a)\xi) \hat{\otimes} (\pi_B(b)\eta)$. Esta aplicação é bilinear, pois π_A e π_B são lineares e a construção do operador tensorial é bilinear. Pela propriedade universal de $A \odot B$, existe uma única aplicação linear $\pi : A \odot B \to \mathcal{B}(H_A \hat{\otimes} H_B)$ tal que $\pi(a \odot b) = \phi(a, b)$ para todo $a \in A, b \in B$. Isso diz que a representação está bem definida e é um homomorfismo de álgebras.

Para provar a fidelidade, seja $x = \sum_{i=1}^n a_i \odot b_i \in A \odot B$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o conjunto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ seja linearmente independente em B. Suponha que $\pi(x) = 0$. Pela linearidade de π:

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &= \sum_{i=1}^n \pi(a_i \odot b_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_A(a_i) \otimes \pi_B(b_i) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Como a representação $\pi_B : B \to \mathcal{B}(H_B)$ é fiel, o conjunto $\{\pi_B(b_1), \ldots, \pi_B(b_n)\}$ também é linearmente independente em $\mathcal{B}(H_B)$. Para um conjunto de operadores linearmente independentes, existem vetores $\{\eta_j\}_{j=1}^n, \{\eta'_j\}_{j=1}^n \subseteq H_B$ tais que a matriz M com entradas $M_{ji} = \langle \pi_B(b_i)\eta_j, \eta'_j\rangle_B$ é inversível. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, aplicamos o funcional $(\mathrm{id}\otimes\omega_{\eta_j,\eta'_j})$ à equação $\pi(x) = 0$, em que $\omega_{\eta,\eta'}(T) = \langle T\eta, \eta'\rangle$. Obtemos um sistema de equações em $\mathcal{B}(H_A)$:

$$\sum_{i=1}^n \omega_{\eta_j,\eta'_j}(\pi_B(b_i))\pi_A(a_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^n \langle \pi_B(b_i)\eta_j, \eta'_j\rangle_B \pi_A(a_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^n M_{ji}\pi_A(a_i) = 0.$$

Como a matriz de coeficientes M é inversível, a única solução para este sistema homogêneo é a trivial, ou seja, $\pi_A(a_i) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Finalmente, como π_A também é uma representação fiel, $\pi_A(a_i) = 0$ implica que $a_i = 0$ para todo i. Portanto, $x = \sum_{i=1}^n 0 \odot b_i = 0$. Logo, π é fiel.

Q.E.D.

Com esta representação, podemos definir a norma de um elemento em $A \odot B$ como a sua norma de operador correspondente.

Definição T.7 (Norma Espacial)**.** Para um elemento $x \in A \odot B$, a ***norma espacial***, denotada por $||\cdot||_{min}$, é definida como:

$$||x||_{min} := ||\pi(x)||_{\mathcal{B}(H_A\hat{\otimes}H_B)}.$$

Proposição T.8. *A norma espacial como definida acima é de fato uma norma no espaço* $A \odot B$.

Demonstração. Devemos verificar as três propriedades de uma norma para $x, y \in A \odot B$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. A norma de um operador é sempre não negativa, então $||x||_{min} = ||\pi(x)|| \geq 0$. Se $||x||_{min} = 0$, então $||\pi(x)|| = 0$, o que implica que $\pi(x)$ é o operador nulo. Como a representação π é fiel (pela proposição anterior), $\pi(x) = 0$ implica $x = 0$. Reciprocamente, se $x = 0$, então por linearidade $\pi(x) = \pi(0) = 0$, e portanto $||\pi(0)|| = 0$, o que significa $||0||_{min} = 0$.

2. Verificamos a homogeneidade:

$$\begin{aligned} ||\alpha x||_{min} &= ||\pi(\alpha x)|| \\ &= ||\alpha\pi(x)|| \\ &= |\alpha| \cdot ||\pi(x)|| \\ &= |\alpha| \cdot ||x||_{min} \end{aligned}$$

3. E a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} ||x+y||_{min} &= ||\pi(x+y)|| \\ &= ||\pi(x)+\pi(y)|| \\ &\leq ||\pi(x)||+||\pi(y)|| \\ &= ||x||_{min}+||y||_{min} \end{aligned}$$

Como as três propriedades são satisfeitas, $||\cdot||_{min}$ é uma norma em $A \odot B$.

Q.E.D.

Além disso, ela é uma C*-norma.

Teorema T.9. *A norma espacial $||\cdot||_{min}$ em $A \odot B$ é uma norma de C*-álgebra, ou seja, satisfaz $||x^*x||_{min} = ||x||_{min}^2$ para todo $x \in A \odot B$.*

Demonstração. Seja $x \in A \odot B$. Queremos mostrar que $||x^*x||_{min} = ||x||_{min}^2$. Pela definição da norma espacial, temos:

$$||x^*x||_{min} = ||\pi(x^*x)||_{\mathcal{B}(H_A\hat{\otimes}H_B)}.$$

Como π é um homomorfismo de álgebras, $\pi(x^*x) = \pi(x^*)\pi(x)$. Pode-se verificar que π também é um *-homomorfismo, ou seja, $\pi(x^*) = \pi(x)^*$. Portanto,

$$\pi(x^*x) = \pi(x)^*\pi(x).$$

Substituindo de volta na equação da norma:

$$||x^*x||_{min} = ||\pi(x)^*\pi(x)||_{\mathcal{B}(H_A\hat{\otimes}H_B)}.$$

O espaço $\mathcal{B}(H_A\hat{\otimes}H_B)$ é uma C*-álgebra. Para qualquer elemento T em uma C*-álgebra, a identidade $||T^*T|| = ||T||^2$ é válida. Aplicando isso ao operador $T = \pi(x)$, obtemos:

$$||\pi(x)^*\pi(x)||_{\mathcal{B}(H_A\hat{\otimes}H_B)} = ||\pi(x)||_{\mathcal{B}(H_A\hat{\otimes}H_B)}^2.$$

Finalmente, usando a definição da norma espacial novamente ($||x||_{min} = ||\pi(x)||$), chegamos a:

$$||x^*x||_{min} = ||x||_{min}^2.$$

Q.E.D.

Finalmente, podemos definir o produto tensorial de C*-álgebras.

Definição T.10 (Produto Tensorial de C*-álgebras)**.** O ***produto tensorial (espacial)*** de duas C*-álgebras A e B, denotado por $A \otimes B$, é o completamento da *-álgebra $A \odot B$ com respeito à norma espacial $||\cdot||_{min}$.

O resultado desta construção, $A \otimes B$, é uma C*-álgebra. Uma observação é que podemos definir diversos produtos tensoriais de C*-álgebras, com base na C*-norma que escolhemos, por exemplo a C*-norma máxima.

Definição T.11 (Norma Máxima)**.** A ***norma máxima***, $|| \cdot ||_{max}$, em $A \odot B$ é definida como:

$$||x||_{max} := \sup\{||\rho(x)||\}$$

em que o supremo é tomado sobre *todas* as *-representações ρ de $A \odot B$.

Pode-se mostrar que $||x||_{min} \leq ||x||_{max}$ para todo $x \in A \odot B$.

Definição T.12 (C*-Álgebra Nuclear)**.** Uma C*-álgebra A é dita ***nuclear*** se, para toda C*-álgebra B, a norma espacial é a única C*-norma em $A \odot B$. Ou seja,

$$||x||_{min} = ||x||_{max} \quad \text{para todo } x \in A \odot B.$$

Por exemplo, todas as C*-álgebras comutativas ($C_0(X)$) e todas as C*-álgebras de dimensão finita ($M_n(\mathbb{C})$) são nucleares.

REFERÊNCIAS DO APÊNDICE T

As referências principais utilizadas para a teoria desta parte do trabalho foram:

1. (MURPHY, 1990)
2. (BROWN; OZAWA, 2008)