Bruno Gerevini Boni

Grupoides Étale como grupoides de germes de uma Ação de Semigrupo Inverso em um Espaço Topológico

Florianópolis

2025

Bruno Gerevini Boni

Grupoides Étale como grupoides de germes de uma Ação de Semigrupo Inverso em um Espaço Topológico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Bacharel em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

Bacharelado em Matemática

Orientador: Dr. Paulinho Demeneghi

Florianópolis

2025

Bruno Gerevini Boni

Grupoides Étale como grupoides de germes de uma Ação de Semigrupo Inverso em um Espaço Topológico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Bacharel em Matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2025.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 19/12/2025 10:29:00-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr.
Felipe Lopes Castro

Banca Examinadora:

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulinho Demeneghi
Data: 09/12/2025 15:25:27-0300
CPF: ***.173.280-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Dr. Paulinho Demeneghi(Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Gilles Goncalves de Castro
Data: 09/12/2025 16:21:47-0300
CPF: ***.977.489-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
FERNANDO DE LACERDA MORTARI
Data: 09/12/2025 22:04:46-0300
CPF: ***.546.089-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis
2025

Aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço meus pais pela oportunidade de estudar, por toda a ajuda e incentivo durante esses longos anos de graduação na engenharia e matemática. Também a minha irmã Caroline e minhas colegas de apartamento Victória e Vitoria pelos bons momentos.

Agradeço a, Luiza, por ter sido minha companheira, parceira, por ter sido meu porto seguro e por ter me apoiado durante esse último ano.

Agradeço ao meu orientador, professor Paulinho Demeneghi, por todo o tempo e paciência dedicados a mim apesar de ele ser uma pessoa extremamente ocupada. Durante esse tempo, além de orientador, também foi meu amigo, ouvindo meus desabafos muitas vezes.

Agradeço ao professor Giuliano Boava por, mesmo sem saber, ter feito com que eu não desistisse da universidade nos meus anos iniciais, ainda na época da engenharia. Aqueles atendimentos que muitas vezes eu fingia ter dúvidas só para tomar um café comendo biscoito e conversar com alguém, fizeram com que me sentisse acolhido e isso contribuiu muito para que eu conseguisse virar uma página muito difícil da minha vida e, seguir estudando.

Agradeço ao professor Fernando de Lacerda Mortari, por ter feito com que eu mudasse o meu olhar à Matemática, fazendo meus olhos brilharem em uma disciplina de Álgebra Linear da engenharia, mostrando seu amor pela profissão, fazendo sem querer com que eu trocasse a engenharia pela matemática. O professor Fernando também foi meu professor em mais cinco disciplinas da graduação e orientador da minha primeira iniciação científica e, em todas elas, mostrou a sua admirável capacidade de comunicar ideias. Serei eternamente grato.

Agradeço à professora Alda Mortari, tutora do PET Matemática UFSC, projeto que fiz parte durante dois anos e que me abriu muitas portas. Sou grato ao PET por todas as oportunidades que me deu. A professora foi minha ouvinte e conselheira durante esse tempo e muitas vezes senti como se fosse a mãe que eu tinha por perto. Também foi minha professora de Fundamentos de Aritmética e Seminários no meu primeiro semestre e, foi uma professora incrível. Sou imensamente grato até mesmo pelos os puxões de orelha e por ter contribuído tanto para que eu me tornasse um matemático e uma pessoa melhor.

Agradeço aos meus demais professores da Matemática, Luis, Fábio Margotti, Fábio Botelho, Jauber, Fermin, Felipe, Dirceu, Sílvia, Oscar, Luciano, Licio, Douglas, Sérgio, Marcelo, Luciane, mas especialmente ao professor Gilles, por ser meu orientador de IC, pelas matérias de Análise I e Combinatória, e por aceitar ser meu orientador no mestrado; e ao professor Eliezer Batista, por me desafiar todas as vezes nas disciplinas de Álgebra II, Topologia e Geometria Diferencial e, por acreditar mais na minha capacidade matemática do que eu mesmo. Também agradeço aos professores da física e engenharia: Marco Aurélio, Paulo, Simone, Rogério, Olga, Mônica e Caroline.

Quero agradecer ao Marco e aos Eduardos da secretaria. Também à Giana, que foi uma querida durante minha graduação, me salvando nas burocracias do curso.

Agradeço aos meus amigos Marco, Fernando, Amanda, Gearlisson, Nathan, Edu, Gabriel e Tainara pelo tempo juntos, pelo apoio mútuo e por todos os momentos inesquecíveis.

Agradeço a minha amiga Cecília, por todas as conversas, por me ouvir em situações difíceis que passei e por todo apoio. Sou muito grato pela nossa amizade.

Por fim, faço um agradecimento especial a minha amiga Júlia, por todos os momentos que passamos juntos e pelo amparo que me ofereceu durante esses anos. Uma amizade que a Matemática me trouxe e certamente quero levar pro resto da vida.

"Matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes"
(Henri Poincaré)

Resumo

Grupoides constituem uma generalização natural de grupos e relações de equivalência, permitindo modelar simetrias parciais e estruturas locais. Entre eles, os grupoides étale desempenham papel central na interface entre álgebra, topologia e álgebras de operadores, em grande parte devido à sua relação com sistemas dinâmicos e ações de semigrupos inversos. Neste trabalho, apresentamos uma introdução à teoria dos grupoides étale e examinamos sua relação com ações de semigrupos inversos em espaços topológicos localmente compactos e Hausdorff. Inicialmente, demonstramos que a toda ação de um semigrupo inverso nesse tipo de espaço está associado um grupoide étale, denominado grupoide de germes da ação. Em seguida, mostramos que esses grupoides de germes, de fato, caracterizam todos os grupoides étale: a cada grupoide étale corresponde uma ação canônica do semigrupo inverso de suas bisseções sobre o espaço de unidades, e o próprio grupoide é isomorfo ao grupoide de germes associado a essa ação intrínseca.

Palavras-chave: Grupoides étale, semigrupos inversos, Ações de semigrupos inversos

Abstract

Groupoids constitute a natural generalization of groups and equivalence relations, allowing for the modeling of partial symmetries and local structures. Among them, étale groupoids play a central role at the interface of algebra, topology, and operator algebras, largely due to their connection with dynamical systems and actions of inverse semigroups. In this work, we present an introduction to the theory of étale groupoids and examine their relationship with actions of inverse semigroups on locally compact Hausdorff topological spaces. We first demonstrate that every action of an inverse semigroup on such a space gives rise to an étale groupoid, called the groupoid of germs of the action. We then show that these groupoids of germs, in fact, characterize all étale groupoids: to each étale groupoid there corresponds a canonical action of the inverse semigroup of its bisections on the unit space, and the groupoid itself is isomorphic to the groupoid of germs associated with this intrinsic action.

Keywords: Étale grupoids, inverse semigroups, actions os inverse semigroups

Sumário

INTRODUÇÃO

Os grupoides surgem como uma generalização natural dos grupos, permitindo modelar simetrias parciais e estruturas locais. Com o desenvolvimento da análise não comutativa e da teoria de C^*-álgebras, grupoides passaram a desempenhar papel central na interface entre álgebra, topologia e análise funcional, como pode ser visto, por exemplo, em (PATERSON, 2012).

Um exemplo importante é dado pelos grupoides étale, cuja estrutura topológica permite estabelecer conexões profundas com dinâmicas topológicas, ações de semigrupos inversos e C^*-álgebras associadas.

Por sua vez, semigrupos inversos formam a estrutura algébrica adequada para modelar simetrias parciais, generalizando a noção de inverso presente nos grupos. Clássicos resultados, como o teorema de Wagner–Preston, mostram que todo semigrupo inverso pode ser representado por bijeções parciais de um conjunto, o que justifica seu papel como objeto algebricamente ligado a ações e, portanto, à teoria de grupoides.

Um elo profundo entre esses dois mundos é estabelecido pela construção do grupoide de germes associado a uma ação de um semigrupo inverso em um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Essa construção permite interpretar ações de semigrupos inversos como mecanismos para produzir grupoides étale de forma natural. Mais surpreendentemente, o mecanismo inverso também é verdadeiro: todo grupoide étale pode ser recuperado como o grupoide de germes de uma ação do semigrupo inverso de suas bisseções sobre o espaço de unidades. Assim, evidencia-se que ações de semigrupos inversos e grupoides étale estão intimamente relacionados.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar, de maneira acessível e organizada, essa correspondência fundamental entre grupoides étale e ações de semigrupos inversos em espaços topológicos.

A seguir, descrevemos brevemente a estrutura do texto.

O primeiro capítulo é dedicado ao estudo dos conceitos fundamentais de semigrupos inversos, com base no livro (LAWSON, 1998). São introduzidas definições básicas, propriedades estruturais, a ordem parcial natural e o papel dos idempotentes. Resultados essenciais, como o teorema de Wagner–Preston — que garante a representação de todo semigrupo inverso por bijeções parciais de um conjunto — são apresentados com o intuito de motivar o estudo subsequente de ações de semigrupos inversos.

No segundo capítulo, desenvolvemos os elementos essenciais da teoria de grupoides topológicos, com ênfase nos grupoides étale. Este capítulo fundamenta-se principalmente no livro (PATERSON, 2012) e no artigo (EXEL, 2008). Iniciamos com a definição geral de grupoide e suas características estruturais básicas e, em seguida, introduzimos a noção de grupoide topológico, destacando o caso étale. Para o contexto étale, introduzimos a noção de bisseção e mostramos, entre outros resultados importantes, que as bisseções de um grupoide étale formam uma base para a sua topologia.

O terceiro capítulo, baseado no artigo (EXEL, 2008), introduz a construção central deste trabalho: o grupoide de germes associado a uma ação de um semigrupo inverso em um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Definimos ações de semigrupos em espaços topológicos, descrevemos em detalhe a construção do grupoide de germes e demonstramos que o grupoide obtido é necessariamente étale, estabelecendo uma das direções da correspondência entre as duas teorias.

No quarto e último capítulo, novamente fundamentado em (EXEL, 2008), demonstramos que o processo inverso também vale: todo grupoide étale pode ser realizado como o grupoide de germes de uma ação intrínseca ao próprio grupoide. Descrevemos a construção do semigrupo inverso das bisseções de um grupoide étale, estudamos sua ação natural sobre o espaço de unidades e provamos que essa ação recupera o grupoide original, completando assim a equivalência entre ações de semigrupos inversos e grupoides étale.

Por fim, ressaltamos que este trabalho foi elaborado com o objetivo de ser acessível a um estudante de graduação em matemática que possua noções básicas de teoria de grupos e topologia geral. Procuramos, sempre que possível, apresentar exemplos ao longo do texto, de modo a ilustrar os conceitos e construções introduzidos.

1 Semigrupos Inversos

Este capítulo apresenta uma introdução à teoria dos semigrupos inversos, tendo como principal referência (LAWSON, 1998). Assume-se que o leitor possua familiaridade com os conceitos básicos de teoria de grupos e conheça a definição de semigrupo.

1.1 A Estrutura de Semigrupo Inverso

Definição 1.1.1. *Um semigrupo S é dito*

(i) ***regular*** *se para qualquer $a \in S$ existe um elemento $b \in S$, chamado de um* ***inverso de*** $\mathbf{a}$*, satisfazendo $aba = a$ e $bab = b$;*

(ii) ***inverso*** *se é regular e todo elemento de S possui um único inverso.*

Uma classe de elementos importantes são os elementos idempotentes, cuja definição segue abaixo.

Definição 1.1.2. *Em um semigrupo, dizemos que um elemento é* ***idempotente*** *se ele coincide com o seu quadrado.*

O conjunto dos idempotentes de um semigrupo inverso é fechado para inversão. Para referência futura e para registrar notação, explicitamos isso na próxima observação.

Observação 1.1.3. *O conjunto de todos os idempotentes de um semigrupo inverso S é denotado por $E(S)$, isto é, $E(S) = \{e \in S \mid e^2 = e\}$. É fácil verificar que todo idempotente é o seu próprio inverso: se $e \in E(S)$, temos que $e = eee$.*

Agora vejamos que o conjunto dos idempotentes de um semigrupo inverso é fechado para produto.

Proposição 1.1.4. *Se S é um semigrupo inverso, então produto de idempotentes é idempotente.*

Demonstração. Seja S um semigrupo inverso e $e, f \in E(S)$ arbitrários. Seja $x \in S$ o inverso do produto ef e considere o elemento fxe. Esse elemento é idempotente já que

$$(fxe)(fxe) = f(xefx)e = fxe.$$

Além disso, ele é inverso de ef, já que

$$(fxe)(ef)(fxe) = (fxe)(fxe) = fxe \qquad \text{e} \qquad (ef)(fxe)(ef) = (ef)x(ef) = ef.$$

Portanto, pela unicidade do inverso, temos que $fxe = x$, de modo que x é idempotente. Pela observação 1.1.3, sabemos que idempotentes são seus próprios inversos, logo $x = ef$. Disso segue que ef é idempotente, como queríamos. ■

O próximo resultado evidencia o papel fundamental dos elementos idempotentes em um semigrupo. Ele estabelece que, para verificar que um semigrupo regular é inverso, basta verificar que o conjunto de seus elementos idempotentes é comutativo.

Proposição 1.1.5. *Se S é um semigrupo regular, então todo elemento de S possui um único inverso se, e somente se, os idempotentes de S comutam.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que os idempotentes de S comutam. Seja $s \in S$ e $u, v \in S$ dois inversos de s. Assim, us e vs são idempotentes pois $(us)(us) = (usu)s = us$ e $(vs)(vs) = (vsv)s = vs$. Analogamente, su e sv também são idempotentes. Além disso,

$$\begin{aligned} u = usu = u(svs)u = (us)(vs)u = (vs)(us)u = vs(usu) = vsu \\ = v(svs)u = v(sv)(su) = v(su)(sv) = vsv = v. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que todo elemento possua um único inverso. Sejam e, f idempotentes, vamos mostrar que $ef = fe$. Pela Proposição 1.1.4, produto de idempotentes é idempotente. Logo, ef e fe são idempotentes. Além disso,

$$(ef)(fe)(ef) = (ef)(ef) = ef \qquad \text{e} \qquad (fe)(ef)(fe) = (fe)(fe) = fe$$

de modo que ef efe são inversos de ef. Da unicidade do inverso segue que $ef = fe$. ■

A partir deste ponto, adotaremos uma notação para o inverso único de um elemento em um semigrupo inverso, conforme indicado na observação a seguir.

Observação 1.1.6. *Seja S um semigrupo inverso. Denotaremos o inverso de um elemento $s \in S$ por s^*.*

Agora trazemos algumas propriedades elementares relacionadas a inversão em um semigrupo inverso.

Proposição 1.1.7. *Seja S um semigrupo inverso.*

(i) Para qualquer $s \in S$, ambos ss^* e s^*s são idempotentes.

(ii) Para qualquer $s \in S$ tem-se $(s^*)^* = s$;

(iii) Para qualquer idempotente $e \in S$ e qualquer $s \in S$, o elemento s^*es é idempotente;

(iv) Para quaisquer $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$ com $n \geq 2$ tem-se $(s_1 s_2 \cdots s_n)^* = s_n^* \cdots s_1^*$.

Demonstração. (i) Seja $s \in S$. Temos $(ss^*)(ss^*) = (ss^*s)s^* = ss^*$ e $(s^*s)(s^*s) = (s^*ss^*)s = s^*s$.

(ii) Claramente s satisfaz as equações $s^*xs^* = s^*$ e $xs^*x = s^*$. O resultado segue pela unicidade do inverso.

(iii) Sejam $s \in S$ e $e \in E(S)$. Assim, $(s^*es)(s^*es) = s^*(ess^*e)s = (s^*ss^*)ees = s^*es$.

(iv) Faremos por indução sobre n. Para o caso base, sejam $s, t \in S$. Veja que

$$(st)(t^*s^*)(st) = s(tt^*)(s^*s)t = s(s^*s)(tt^*)t = (ss^*s)(tt^*t) = st$$

e, similarmente,

$$(t^*s^*)(st)(t^*s^*) = t^*(s^*s)(tt^*)s^* = t^*(tt^*)(s^*s)s^* = (t^*tt^*)(s^*ss^*) = t^*s^*,$$

de modo que $(st)^* = t^*s^*$. Tome agora $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$ e $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$. Suponha que $(s_1s_2\cdots s_n)^* = s_n^* \cdots s_2^*s_1^*$. Assim, temos que

$$(s_1s_2\cdots s_ns_{n+1})^* = s_{n+1}^*(s_1s_2\cdots s_n)^* = s_{n+1}^*s_n^*\cdots s_2^*s_1^*.$$

O resultado segue por indução. ∎

Proposição 1.1.8. *Seja S semigrupo inverso.*

(i) Para quaisquer $e \in E(S)$ e $s \in S$, existe $f \in E(S)$ tal que $es = sf$;

(ii) Para quaisquer $e \in E(S)$ e $s \in S$, existe $f \in E(S)$ tal que $se = fs$;

Demonstração. Provaremos (i). O item (ii) é análogo. Sejam $s \in S$ e $e \in E(S)$. Tome $f = s^*es$. Assim, $sf = s(s^*es) = (ss^*)es = e(ss^*)s = e(ss^*s) = es$. ∎

Agora trazemos alguns exemplos de semigrupos inversos. Os dois primeiros exemplos são provavelmente bem conhecidos pelo leitor.

Exemplo 1.1.9 (Grupos)**.** *Grupos são precisamente os semigrupos inversos com um único idempotente.*

De fato, se G é um grupo, ele satisfaz todos os axiomas de semigrupo inverso. Além disso, sabemos que o elemento neutro do grupo, denotado por e, é idempotente. Logo, se f é outro idempotente de G, temos que $ef = f = ff$, implicando que $e = f$. Reciprocamente, suponha que G é um semigrupo inverso que tem um único idempotente, digamos e. Note que, para todo $s \in G$ temos que ss^* e s^*s são idempotentes. Como e é o único idempotente de G, segue que $es = (ss^*)s = s = s(s^*s) = se$ o que implica que e é um elemento neutro para G. Ademais, como $ss^* = e = s^*s$ segue que s^* é um inverso (no sentido de grupo) para s em G, de modo que G é um grupo.

Exemplo 1.1.10 (Meet Semilattices)**.** *Seja P um conjunto parcialmente ordenado e $x, y, z \in P$. Se $z \leq x$ e $z \leq y$, dizemos que z é um limitante inferior de x e y. O ínfimo de x e y, denotado por $x \wedge y$, é o maior de seus limitantes inferiores. Um **meet semilattice** é um conjunto parcialmente ordenado tal que quaisquer dois elementos admitem um ínfimo.*

Meet semilattices são precisamente os semigrupos inversos no qual todo elemento é idempotente. De fato, se considerarmos um meet semilattice P com a operação $\wedge$, temos que para quaisquer $x, y \in P$ vale $x \wedge x = x$ e $x \wedge y = y \wedge x$ de modo que P é um semigrupo inverso formado por idempotentes. Reciprocamente, se P é semigrupo inverso formado por idempotentes, defina uma relação de ordem sobre P dada por $e \leq f$ se, e somente se, $ef = e$. Veremos na Proposição 1.3.3 que de fato esta é uma relação de ordem. Além disso, veja que para $e, f \in P$ vale $efe = fee = fe = ef$, de modo que $ef \leq e$ e similarmente, $ef \leq f$, Agora, se $k \leq e$ e $k \leq f$, temos $k(ef) = (ke)f = kf$, pois $k \leq e$ e $kf = k$ pois $k \leq f$. Logo, $k(ef) = k$ de modo que $k \leq ef$. Portanto, $ef = e \wedge f$ e P é meet semilattice.

Por fim, apresentamos um exemplo simples que não é nem um grupo nem um meet semilattice.

Exemplo 1.1.11. *Considere $S = \{a, b, c, d, e\}$ com operação de produto definida pela tabela abaixo.*

	a	***b***	***c***	***d***	***e***
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	a	a
c	a	a	a	b	c
d	a	d	e	a	a
e	a	a	a	d	e

Note que a, b e e são idempotentes e, por isso, $aaa = a, bbb = b$ e $eee = e$ de modo que são seus próprios inversos. Também $(dc)d = ed = d$ e $(cd)c = bc = c$ mostrando que d e c são inversos um do outro. Com uma verificação rápida vemos que $ab = a = ba$, $ae = a = ea$ e $be = a = eb$, mostrando que os idempotentes comutam. A associatividade fica a cargo do leitor. Segue que S é um semigrupo inverso.

Na Seção 1.5 veremos um novo exemplo que, em certo sentido, pode ser considerado o principal exemplo de semigrupo inverso.

Assim como se fala em subgrupos de um grupo, podemos falar de $*$-subsemigrupo de um semigrupo inverso, como feito na próxima definição.

Definição 1.1.12. *Seja S semigrupo inverso. Dizemos que um subconjunto não vazio $T \subset S$ é um* ***$*$-subsemigrupo*** *de S se para quaisquer $s, t \in T$ tivermos $st \in T$ e $s^* \in T$.*

Nós encerramos a seção com dois exemplos de $*$-subsemigrupos. O primeiro exemplo já foi visto ao longo da seção.

Exemplo 1.1.13. *Segue da Observação 1.1.3 e da Proposição 1.1.4 que o conjunto dos idempotentes $E(S)$ de um semigrupo inverso S é um $*$-subsemigrupo de S.*

Exemplo 1.1.14. *É imediato da definição de grupo que os $*$-subsemigrupos de um grupo são seus subgrupos.*

1.2 Ideais

Nessa seção veremos a definição de ideal de um semigrupo inverso além de algumas propriedades.

Definição 1.2.1. *Seja S semigrupo inverso. Um subconjunto $I \subset S$ é um* ***ideal à esquerda*** *(respectivamente* ***à direita****) se para qualquer $a \in I$ e qualquer $s \in S$ tem-se $sa \in I$ (respectivamente $as \in I$). Um ideal bilateral é simplesmente chamado de ideal.*

Veja que um ideal I de um semigrupo inverso S é, em particular, um *-subsemigrupo de S. De fato, a condição dada na definição garante que ideais são fechados para o produto. Além disso, se $s \in I$ é um elemento de I, então $s^* = s^*ss^* \in I$.

Vejamos agora que ideais se comportam bem em relação a intersecção.

Proposição 1.2.2. *A intersecção de ideais à esquerda de S (resp. à direita, bilateral) é novamente um ideal à esquerda de S (resp. à direita, bilateral).*

Demonstração. Faremos apenas para o caso de ideais à esquerda. Seja $\{I_j\}_{j \in J}$ família de ideais à esquerda de S. Seja $I = \bigcap_{j \in J} I_j$. Tome $a \in I$ e $s \in S$ arbitrários. Temos que $a \in I_j$ para todo $j \in J$, de modo que $sa \in I_j$ para todo $j \in J$. Disso segue que $sa \in I$ e I é ideal à esquerda de S. ∎

Para $X \subset S$ definimos o **ideal** à esquerda (resp. à direita, bilateral) **gerado por** X como sendo o menor ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) de S que contém X, ou seja, a interseção de todos os ideais à esquerda (resp. à direita, bilateral) que contém X.

Observação 1.2.3. *Vamos mostrar que $\bigcap_{I \supset X} I = SX := \{sx \mid s \in S, x \in X\}$ (apenas para o caso de ideais à esquerda, os demais são feitos de forma análoga). Para tanto, seja $t \in S$ e $sx \in SX$ arbitrários. Assim, $t(sx) = (ts)x \in SX$, logo SX é ideal à esquerda* *de S. Ademais, SX contém X, pois $x = (xx^*)x$ para todo $x \in X$, de modo que SX contém $\bigcap_{I \supset X} I$. Para a outra inclusão, seja I ideal à esquerda de S que contém X. Daí, $SX \subset SI \subset I$. Logo, da arbitrariedade de I, segue que $SX \subset \bigcap_{I \supset X} I$. No caso de ideias à direita, a intersecção é XS e no caso dos ideias bilaterais a intersecção é SXS.*

Em particular, para cada $s \in S$, existe um menor ideal à esquerda (resp. à direita, bilateral) contendo s. Esse ideal é chamado de **ideal principal** à esquerda (resp, à direita, bilateral) gerado por s. Em um semigrupo inverso, denotamos o ideal principal à esquerda gerado por s por Ss, à direita por sS e bilateral por SsS.

O leitor acostumado com teoria de grupos, talvez não esteja familiarizado com a noção de ideais. Isso se deve ao fato de que a noção de ideal perde o sentido quando se está trabalhando especificamente com grupos como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo 1.2.4. *Se G é um grupo e $g \in G$, então $Gg = G = gG$.*

Exemplo 1.2.5. *Um **ideal de ordem** de um meet semilattice E, é um subconjunto $I \subset E$, tal que para qualquer $x \in I$ e qualquer $e \in E$, se $e \leq x$, então $e \in I$.*

Os ideais de E são os ideais de ordem de E. De fato, sejam I um ideal de E, $e \in E$ e $x \in I$. Suponha $e \leq x$. Isso significa que $e = ex \in I$, mostrando que I é ideal de ordem. Mostraremos que I é ideal de E (apenas mostrar que é ideal à esquerda é suficiente uma vez que meet semilattices são comutativos). Como todo elemento de $e \in E$ é idempotente, temos $e^* = e$ para todo $e \in E$. Além disso, sejam $e \in E$ e $x \in I$ arbitrários. Assim, $ex \in I$ pois I é ideal de ordem. Segue o desejado.

Encerramos a seção com um resultado que será útil na Seção 1.5.

Proposição 1.2.6. *Tome S um semigrupo inverso, $a \in S$ e $e, f \in E(S)$.*

(i) $aS = aa^*S$ *e* aa^* *é o único idempotente gerador de* aS*;*

(ii) $Sa = Sa^*a$ *e* a^*a *é o único idempotente gerador de* Sa*;*

(iii) $eS \cap fS = efS$*;*

(iv) $Se \cap Sf = Sef$*.*

Demonstração. (i) Temos que $aS = aa^*aS \subset aa^*S \subset aS$, logo $aS = aa^*S$. Seja $f \in E(S)$ tal que $aS = fS$. Dessa forma, $aa^*S = fS$ de modo que existem $s, t \in S$ tais que $aa^* = fs$ e $aa^*t = f$. Assim, $faa^* = ffs = fs = aa^*$ e $aa^*f = aa^*aa^*t = aa^*t = f$. Como idempotentes comutam, temos que $f = aa^*$.

(ii) Análogo ao (i).

(iii) Seja $a \in eS \cap fS$. Assim, exitem $s, t \in S$ tais que $a = es = ft$. Disso temos que $(ef)a = (ef)(ft) = e(ft) = e(es) = es = a$ de modo que $a \in efS$. A outra continência é imediata, uma vez que os idempotentes e e f comutam.

(iv) Análogo ao (iii). ■

1.3 Ordem Parcial Natural

Em adição a estrutura algébrica, veremos nessa seção que todo semigrupo inverso admite uma ordem parcial “natural”. Iniciemos diretamente com a definição.

Definição 1.3.1. *Seja S um semigrupo inverso. Dados $s, t \in S$, dizemos que $s \leq t$ se $s = te$ para algum $e \in E(S)$.*

Veremos que essa relação define uma ordem parcial em S. Antes disso, estabelecemos algumas equivalências da definição que serão muito úteis ao longo do trabalho.

Proposição 1.3.2. *Seja S um semigrupo inverso. São equivalentes:*

(i) $s \leq t$;

(ii) $s = ft$ *para algum* $f \in E(S)$;

(iii) $s^* \leq t^*$;

(iv) $s = ss^*t$;

(v) $s = ts^*s$.

Demonstração. $(i) \implies (ii)$: Suponha $s \leq t$. Assim existe um idempotente e tal que $s = te$. Pela Proposição 1.1.8, temos que existe um idempotente f tal que $s = ft$.

$(ii) \implies (iii)$: Se $s = ft$, temos $s^* = (ft)^* = t^*f$ de modo que $s^* \leq t^*$.

$(iii) \implies (iv)$: Se $s^* \leq t^*$, existe um idempotente f tal que $s^* = t^*f$. Tomando os inversos, temos que $s = ft$. Logo, $ss^*t = (ft)(ft)^*t = ftt^*ft = ff(tt^*t) = ft = s$, como desejado.

$(iv) \implies (v)$: Se $s = ss^*t$, pela Proposição 1.1.8, existe um idempotente e tal que $s = te$. Assim, $ts^*s = t(te)^*(te) = tet^*te = teet^*te = te(te)^*te = ss^*s = s$.

$(v) \implies (i)$: Trivial, uma vez que s^*s é idempotente. ■

A partir de agora, usaremos indiscriminadamente qualquer um dos itens (i)-(ii) e (iv)-(v) da proposição acima sem citá-los para indicar que $s \leq t$.

Por fim, mostramos que a relação definida em 1.3.2 de fato determina uma ordem parcial em S e que a estrutura algébrica de S é compatível com essa ordem.

Proposição 1.3.3. *Seja S um semigrupo inverso.*

(i) A relação $\leq$ é uma relação de ordem parcial em S;

(ii) Para quaisquer $e, f \in E(S)$ tem-se $e \leq f$ se, e somente se, $e = ef = fe$;

(iii) Para quaisquer $s, t, u, v \in S$, se $s \leq t$ e $u \leq v$, então $su \leq tv$;

(iv) Para quaisquer $s, t \in S$, se $s \leq t$, então $ss^* \leq tt^*$ e $s^*s \leq t^*t$.

Demonstração. (i) Uma vez que $s = ss^*s$ e s^*s é idempotente, temos que $s \leq s$ e a relação é reflexiva. Para a antissimetria, suponha que $s \leq t$ e $t \leq s$, ou seja, $s = ts^*s$ e $t = st^*t$. Assim, $s = ts^*s = st^*ts^*s = ss^*st^*t = st^*t = t$. Por fim, suponha $s \leq t$ e $t \leq u$, isto é, $s = ts^*s$ e $t = ut^*t$. Assim, $s = ts^*s = ut^*ts^*s$ e como t^*ts^*s é idempotente, temos que $s \leq u$ e a relação é transitiva.

(ii) Suponha $e \leq f$. Assim, $e = fz$ para algum idempotente z. Disso segue que $ef = fe = ffz = fz = e$. A recíproca é imediata.

(iii) Suponha $s \leq t$ e $u \leq v$. Assim, existem $e, f \in E(S)$ tais que $s = te$ e $u = vf$. Pela Proposição 1.1.8, $ev = vz$ para algum idempotente z. Logo, $su = (te)(vf) = t(ev)f = t(vz)f = (tv)(zf)$, de modo que $su \leq tv$.

(iv) Segue imediatamente do item anterior combinado com item (iii) da Proposição 1.3.2. ■

A ordem definida em 1.3.1 é chamada de **ordem parcial natural** de S.

Fechemos essa seção com alguns exemplos.

Exemplo 1.3.4. *(Grupos) Se G é um grupo, então a ordem parcial natural em G é a igualdade. De fato, suponha $g \leq h$. Assim, $g = he = h$. Reciprocamente, se $g = h$ é imediato que $g \leq h$, provando que a ordem parcial natural é a igualdade.*

Exemplo 1.3.5 (Meet Semilattices)**.** *Se P é um meet semilattice, então podemos ver pelo Exemplo 1.1.10 que a ordem parcial natural em P é a própria ordem do meet semilattice.*

1.4 Homomorfismos

Nessa seção, apresentaremos a definição de homomorfismo de semigrupos inversos que é completamente análoga a definição de homomorfismos de grupos. Também provaremos algumas propriedades dos homomorfismos.

Definição 1.4.1. *Um **homomorfismo** de um semigrupo inverso S em um semigrupo inverso T é uma função $\theta : S \to T$ tal que para quaisquer $s, t \in S$ tem-se $\theta(st) = \theta(s)\theta(t)$.*

Se um homomorfismo é uma bijeção, então ele também é chamado de ***isomorfismo****. Vale a pena observar que o inverso de um homomorfismo bijetor também é um homomorfismo.*

O próximo resultado reúne, de forma concisa, diversas propriedades úteis de um homomorfismo de semigrupos inversos que serão empregadas ao longo do trabalho.

Proposição 1.4.2. *Seja $\theta : S \to T$ um homomorfirsmo de semigrupos inversos.*

(i) Para qualquer $s \in S$, $\theta(s^*) = \theta(s)^*$;

(ii) Se $e \in E(S)$, então $\theta(e) \in E(T)$;

(iii) Para qualquer $s \in S$, se $\theta(s) \in E(T)$, então existe $e \in E(S)$ tal que $\theta(e) = \theta(s)$;

(iv) $Im(\theta)$ é um $*$-subsemigrupo de T;

(v) Se V é um $*$-subsemigrupo de T, então $\theta^{-1}(V)$ é um $*$-subsemigrupo de S;

(vi) θ preserva a ordem isto é, para quaisquer $s, t \in S$, se $s \leq t$, então $\theta(s) \leq \theta(t)$;

(vii) Sejam $s, t \in S$ tais que $\theta(s) \leq \theta(t)$. Então, existe $z \in S$ tal que $z \leq t$ e $\theta(z) = \theta(s)$.

Demonstração. (i) Seja $s \in S$ arbitrário. Temos $\theta(s) = \theta(ss^*s) = \theta(s)\theta(s^*)\theta(s)$ e também, $\theta(s^*) = \theta(s^*)\theta(s)\theta(s^*)$, provando que $\theta(s^*) = \theta(s)^*$

(ii) Seja $e \in E(S)$. Logo, $\theta(e)\theta(e) = \theta(ee) = \theta(e)$.

(iii) Tome $e = s^*s$. Assim, $\theta(s^*s) = \theta(s)^*\theta(s) = \theta(s)^2 = \theta(s)$.

(iv) Imediato, uma vez que θ é homomorfismo e $\theta(s^*) = \theta(s)^*$.

(v) Sejam $s, t \in \theta^{-1}(V)$. Disso, temos $\theta(s), \theta(t) \in V$, de modo que $\theta(st) \in V$, pois V é $*$-subsemigrupo de T. Portanto $st \in \theta^{-1}(V)$. Para a inversão, temos que $\theta(s) \in V$, de modo que $\theta(s)^* = \theta(s^*) \in V$, e portanto, $s^* \in \theta^{-1}(V)$.

(vi) Suponha $s \leq t$, isto é, existe um idempotente e tal que $s = te$. Assim, $\theta(s) = \theta(t)\theta(e)$ e $\theta(e)$ é idempotente. Disso segue que $\theta(s) \leq \theta(t)$.

(vii) Tome $z = ts^*s$. Assim, por definição, $z \leq t$, e como $\theta(s) \leq \theta(t)$, isto é, $\theta(s) = \theta(t)\theta(s)^*\theta(s) = \theta(t)\theta(s^*)\theta(s)$, segue que $\theta(z) = \theta(t)\theta(s^*s) = \theta(s)$. ■

Encerremos esta seção com alguns exemplos.

Exemplo 1.4.3. *Os homomorfismos de semigrupos inversos entre dois grupos, são os homomorfismos de grupos.*

Exemplo 1.4.4. *Os homomorfismos de semigrupos inversos entre meet semilattices, são as funções que preservam a ordem do meet semilattice.*

1.5 O Semigrupo Inverso $\mathcal{I}(X)$ e o Teorema de Wagner-Preston

Esta seção apresentará $\mathcal{I}(X)$ como um semigrupo inverso e suas propriedades. Por fim, mostraremos que todo semigrupo inverso pode ser visto como um $*$-subsemigrupo de $\mathcal{I}(X)$.

Seja X um conjunto. Denotaremos por $\mathcal{I}(X)$ o conjunto de todas as bijeções entre subconjuntos de X.

Se tivermos $f, g \in \mathcal{I}(X)$, podemos fazer a **composição parcial** $g \circ f$ definida como sendo a composição no maior domínio no qual a composição está bem definida, isto é, $\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{im}(f) \cap \mathrm{dom}(g))$. Como queremos que a composição parcial de $g \circ f$ seja novamente um elemento de $\mathcal{I}(X)$, também decretamos o contradomínio de $g \circ f$ como $g(\mathrm{im}(f) \cap \mathrm{dom}(g))$. Observe que, mesmo que $\mathrm{im}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \emptyset$, a composição parcial está bem definida e nesse caso seria a função vazia, que pertence a $\mathcal{I}(X)$.

A partir de agora, denotaremos $f \circ g$ simplesmente por fg quando não houver chance de confusão.

O próximo resultado caracteriza os idempotentes de $\mathcal{I}(X)$.

Proposição 1.5.1. *Os idempotentes de $\mathcal{I}(X)$ são precisamente as identidades parciais em X, isto é, as funções identidades sobre subconjuntos de X. Além disso, se $A, B \subset X$, então $id_A id_B = id_{A \cap B}$.*

Demonstração. É obvio que as identidades são idempotentes. Para a recíproca, seja $\alpha \in \mathcal{I}(X)$ idempotente, ou seja, $\alpha \circ \alpha = \alpha$. Escreva $\alpha \colon A \to B$ como bijeção entre os subconjuntos $A = \mathrm{dom}(\alpha)$ e $B = \mathrm{im}(\alpha)$.

Para todo $x \in A$, como $(\alpha \circ \alpha)(x)$ está definido, precisamos ter $\alpha(x) \in A$. Logo, $\alpha(x) \in A \cap B$. Da idempotência, temos

$$\alpha(\alpha(x)) = (\alpha \circ \alpha)(x) = \alpha(x).$$

Como α é injetora em A, de $\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)$ com $\alpha(x), x \in A$ obtemos $\alpha(x) = x$. Portanto, α fixa ponto a ponto A, isto é, $\alpha = \mathrm{id}_A$. Em particular, $B = \mathrm{im}(\alpha) = A$. ∎

Proposição 1.5.2. *O conjunto $\mathcal{I}(X)$ com a operação de composição parcial é um semigrupo inverso. Além disso, para qualquer $f \in \mathcal{I}(X)$, tem-se que $f^* = f^{-1}$.*

Demonstração. A associatividade é trivial. Para a inversão, tome $f \in \mathcal{I}(X)$ arbitrária. Assim, existem $A, B \subset X$ tal que $f : A \mapsto B$ é uma bijeção. Seja f^{-1} a função inversa de f. Assim, $ff^{-1}f = id_B f = f$ e $f^{-1}ff^{-1} = id_A f^{-1} = f^{-1}$, provando que f^{-1} é um inverso de f. Como vimos na Proposição 1.5.1, os idempotentes são as identidades sobre subconjuntos de X, que obviamente comutam. Disso segue que $\mathcal{I}(X)$ é um semigrupo inverso. ∎

Vamos agora caracterizar a ordem natural em $\mathcal{I}(X)$. Para isso, introduzimos a seguinte definição.

Definição 1.5.3. *Dadas $f, g \in \mathcal{I}(X)$, dizemos que g estende f, e escrevemos $f \subset g$, se $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathrm{dom}(f)$.*

Proposição 1.5.4. *Para quaisquer $f, g \in \mathcal{I}(X)$ tem-se $f \leq g$ se, e somente se, $f \subset g$.*

Demonstração. O caso em que f ou g é a função vazia, é trivial. Suponha $f \leq g$ bijeções parciais não vazias. Assim, $f = g \circ f^* \circ f = g \circ id_{\mathrm{dom}(f)}$. Disso segue

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g \circ id_{\mathrm{dom}(f)}) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \subset \mathrm{dom}(g)$$

e que $f(x) = g \circ id_{\mathrm{dom}(f)}(x) = g(x)$, ou seja, $f \subset g$.

Reciprocamente, se $f \subset g$, temos $g|_{\mathrm{dom}(f)} = f$. Logo, $g \circ f^* \circ f = g \circ id_{\mathrm{dom}(f)} = g|_{\mathrm{dom}(f)} = f$. Segue que $f \leq g$. ■

Definição 1.5.5. *Um homomorfismo de semigrupos inversos $\theta : S \to \mathcal{I}(X)$ é chamado de **representação** de S por bijeções parciais. Se a representação é injetora, então ela é chamada de **fiel**.*

O próximo resultado, que encerra este capítulo, diz que todo semigrupo inverso é isomorfo a algum $*$-subsemigrupo de $\mathcal{I}(X)$. É um resultado análogo ao Teorema de Cayley na teoria de grupos e motiva o estudo de ações de semigrupos inversos.

Teorema 1.5.6. *(Wagner-Preston) Para qualquer S semigrupo inverso, existe um conjunto X e uma representação fiel $\theta : S \to \mathcal{I}(X)$ tal que para quaisquer $s, t \in S$*

$$\theta(s) \subset \theta(t) \iff s \leq t.$$

Demonstração. Para cada elemento $a \in S$, definimos

$$\begin{array}{rccc} \theta_a : & a^*aS & \longrightarrow & aa^*S \\ & x & \longmapsto & ax \end{array}$$

Veja que θ está bem definido, pois $aS = aa^*S$ pela Proposição 1.2.6. Observe que $\theta_{a^*}\theta_a$ é a identidade em a^*aS e $\theta_a\theta_{a^*}$ é a identidade em aa^*S. Assim, θ_a é uma bijeção e $\theta_a^* = \theta_{a^*}$.

Do último parágrafo, concluímos que está bem definida a função

$$\begin{array}{rccc} \theta : & S & \longrightarrow & \mathcal{I}(S) \\ & a & \longmapsto & \theta_a \end{array}$$

Mostremos agora que $\theta_a\theta_b = \theta_{ab}$. Por definição e pela Proposição 1.2.6 segue que

$$\mathrm{dom}(\theta_a\theta_b) = \theta_{b^*}(bb^*S \cap a^*aS) = \theta_{b^*}(bb^*a^*aS) = b^*bb^*a^*aS = b^*a^*aS$$

Ademais, pela Proposição 1.2.6, temos

$$b^*a^*aS = (b^*a^*a)(b^*a^*a)^*S = b^*a^*aa^*abS = b^*a^*abS = \mathrm{dom}(\theta_{ab}).$$

Assim, $\mathrm{dom}(\theta_a\theta_b) = \mathrm{dom}(\theta_{ab})$.

Veja que $\theta_a\theta_b(x) = \theta_a(bx) = abx = \theta_{ab}(x)$ e portanto θ é um homomorfismo.

Suponha agora que $a \leq b$. Segue diretamente do item (vi) da Proposição 1.4.2 que $\theta_a \subseteq \theta_b$. Reciprocamente, suponha que $\theta_a \subseteq \theta_b$. Pela definição, $a^*aS \subseteq b^*bS$. Agora, $a^* \in a^*aS$. Por hipótese, $\theta_a(a^*) = \theta_b(a^*)$. Assim, $aa^* = ba^*$ e, portanto, $a = ba^*a$. Logo, $a \leq b$.

Por fim, para provar que θ é injetora, suponha $\theta(a) = \theta(b)$. Isso implica que $a \leq b$ e $b \leq a$, ou seja, $a = b$.

O resultado segue. ∎

Observação 1.5.7. *A função θ criada acima, é um exemplo de ação de um semigrupo inverso em um conjunto, que no caso, é o próprio semigrupo inverso. O leitor pode encontrar mais sobre esse assunto em (GOULD; HOLLINGS, 2009) ou (BONI, 2024).*

2 Grupoides

Este capítulo apresenta uma introdução à teoria de grupoides, com ênfase nos grupoides étale. As ideias desenvolvidas baseiam-se principalmente em (PATERSON, 2012), enquanto os tópicos de topologia necessários podem ser revisados em (WILLARD, 2012) ou (MUNKRES, 2000). Pressupomos que o leitor tenha familiaridade com noções básicas de teoria de grupos e de topologia geral.

2.1 Definição e Exemplos

Nesta seção, introduzimos os conceitos fundamentais e alguns resultados básicos sobre grupoides, considerados nesse primeiro momento apenas em seu aspecto algébrico, isto é, sem qualquer estrutura topológica.

Definição 2.1.1. *Um* ***grupoide*** *é um conjunto $\mathcal{G}$ munido com um conjunto $\mathcal{G}^{(2)} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ e com funções*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{G}^{(2)} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} ()^{-1} : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

chamadas de função produto e função de inversão, respectivamente, satisfazendo:

(i) Para qualquer $x \in \mathcal{G}$ tem-se que $(x^{-1})^{-1} = x$;

(ii) Se $(x,y),(y,z) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então $(xy,z),(x,yz) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e $(xy)z = x(yz)$;

(iii) Para qualquer $x \in \mathcal{G}$ tem-se $(x,x^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e se $(x,y) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então $(xy)y^{-1} = x$ e $x^{-1}(xy) = y$.

O conjunto $\mathcal{G}^{(2)}$ é chamado de conjunto dos pares componíveis de $\mathcal{G}$.

Observação 2.1.2. *Note que o item (ii) garante que o item (iii) faz sentido pois, se $(x,y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e $(y,y^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então o (ii) garante que $(xy,y^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e de forma similar para a expressão do lado esquerdo da outra igualdade.*

Definição 2.1.3. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. O conjunto $\mathcal{G}^{(0)} := \{xx^{-1} | x \in \mathcal{G}\}$ é chamado de* ***espaço das unidades*** *de $\mathcal{G}$ e as funções*

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(0)} \\ & x & \longmapsto & x^{-1}x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} r : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(0)} \\ & x & \longmapsto & xx^{-1} \end{array}$$

são chamadas de ***source*** *e* ***range*** *respectivamente.*

A seguir, algumas propriedades fundamentais a respeito de grupoides.

Proposição 2.1.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Para quaisquer $x, y \in \mathcal{G}$ temos $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ se, e somente se, $d(x) = r(y)$.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Assim, usando o axioma 2.1.1(iii) temos que $(xy)y^{-1} = x$ e $x^{-1}(xy) = y$. Logo,

$$d(x) = x^{-1}x = x^{-1}((xy)y^{-1}) \overset{2.1.1(ii)}{=} (x^{-1}(xy))y^{-1} = yy^{-1} = r(y).$$

Reciprocamente, suponha que $d(x) = r(y)$. Sabemos por 2.1.1(ii) e 2.1.1(iii) que $(yy^{-1}, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e $(x, x^{-1}x) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Logo usando a hipótese temos $(x^{-1}x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e por 2.1.1(ii) segue que $(xx^{-1}x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Por fim, usando 2.1.1(iii) temos $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$.

■

Proposição 2.1.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Se $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$, então $(y^{-1}, x^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

Demonstração. Suponha $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Segue de 2.1.1(i) que $d(x) = r(x^{-1})$ e $r(y) = d(y^{-1})$. Assim, podemos usar a proposição 2.1.4 para concluir que $d(y^{-1}) = r(x^{-1})$, de modo que $(y^{-1}, x^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Além disso, pelo axioma 2.1.1(iii), temos que $(xy)y^{-1} = x$. Multiplicando à direita por x^{-1} temos $(xy)y^{-1}x^{-1} = xx^{-1}$. Como $(xy, (xy)^{-1}) \in \mathcal{G}^{(2)}$, podemos multiplicar a igualdade acima por $(xy)^{-1}$ à esquerda, obtendo $(xy)^{-1}(xy)y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}xx^{-1}$. Cancelando as unidades em ambos os lados, ficamos com $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$, como desejado. ■

A partir deste ponto, utilizaremos livremente os axiomas da Definição 2.1.1, bem como as Proposições 2.1.4 e 2.1.5, sem referência explícita a essas citações.

Observação 2.1.6. *Observe que para $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ arbitrário, temos que $r(xy) = r(x)$ e $d(xy) = d(y)$ pois*

$$r(xy) = xy(xy)^{-1} = xyy^{-1}x^{-1} = xx^{-1} = r(x)$$

e

$$d(xy) = (xy)^{-1}xy = y^{-1}x^{-1}xy = y^{-1}y = d(y).$$

Além disso, $d(x) = x = r(x)$ para todo $x \in \mathcal{G}^{(0)}$.

Vejamos alguns exemplos de grupoides.

Exemplo 2.1.7 (Grupos)**.** *Todo grupo G pode ser visto como um grupoide no qual $G^{(2)} = G \times G$ e as operações de multiplicação e inversão coincidem com as do próprio grupo. Nesse caso, o conjunto das unidades é dado por $G^{(0)} = \{e\}$.*

Exemplo 2.1.8 (Conjuntos)**.** *Um conjunto X pode ser visto como um grupoide em que $X^{(2)} = \{(x,x) \mid x \in X\}$ e as operações de multiplicação e inversão são dadas, respectivamente, por $x \cdot x = x$ e $x^{-1} = x$. Neste caso, temos $X^{(0)} = X$.*

Exemplo 2.1.9 (Relação de Equivalência)**.** *Seja X um conjunto e $R \subset X \times X$ uma relação de equivalência. Definimos*

$$R^{(2)} := \{((x,y),(y,z)) \mid (x,y)(y,z) \in R\}.$$

Definimos o produto e inversão como

$$(x,y)(y,z) = (x,z)$$

e

$$(x,y)^{-1} = (y,x).$$

A transitividade da relação garante que a multiplicação está bem definida, bem como a simetria da relação garante que a inversão está bem definida também.

Verifiquemos os axiomas:

(i) $((x,y)^{-1})^{-1} = (y,x)^{-1} = (x,y)$;

(ii) Suponha $((x,y),(y,z)),((y,z),(z,w)) \in R^{(2)}$. Assim x,y,z,w pertencem a mesma classe de equivalência e, portanto, $[(x,y)(y,z)](z,w) = (x,z)(z,w) = (x,w)$ e $(x,y)[(y,z)(z,w)] = (x,y)(y,w) = (x,w)$.

(iii) Seja $((x,y),(y,z)) \in R^{(2)}$. Assim, $[(x,y)^{-1}(x,y)](y,z) = [(y,x)(x,y)](y,z) = (y,y)(y,z) = (y,z)$ e $(x,y)[(y,z)(y,z)^{-1}] = (x,y)[(y,z)(z,y)] = (x,y)(y,y) = (x,y)$.

Segue que R é um grupoide. Além disso, é fácil ver que $r(x,y) = (x,x)$ e $d(x,y) = (y,y)$. Disso e da reflexividade da relação temos que $R^{(0)} = \{(x,x) \mid x \in X\}$, conjunto conhecido como a diagonal em $X \times X$.

Exemplo 2.1.10 (Ação de grupo à esquerda)**.** *Sejam G um grupo, X um conjunto e*

$$\begin{array}{rccc} \theta: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & \theta_g(x). \end{array}$$

uma ação à esquerda de G em X.

Sabemos que, para qualquer $g \in G$, a função $\theta_g \colon X \to X$ definida por $\theta_g(x) = \theta(g,x)$ é uma bijeção e $\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_{gh}(x)$ para todo $g,h \in G$ e todo $x \in X$. Além disso, vale a identidade $\theta_e(x) = x$ para todo $x \in X$ em que e denota o elemento neutro do grupo.

Definimos $\mathcal{G} := G \times X$ e

$$\mathcal{G}^{(2)} = \{((g,x),(h,y)) \mid x = \theta_h(y)\}.$$

Definimos ainda as operações de produto e inversão por

- $(g,x)(h,y) = (gh,y)$; *e*
- $(g,x)^{-1} = (g^{-1}, \theta_g(x))$.

Vejamos que $\mathcal{G}$ é um grupoide com as operações definidas acima.

(i) Para qualquer $(g,x) \in \mathcal{G}$ temos

$$((g,x)^{-1})^{-1} = (g^{-1}, \theta_g(x))^{-1} = \big((g^{-1})^{-1}, \theta_{g^{-1}}(\theta_g(x))\big) = (g,x);$$

(ii) Suponha $((g,x),(h,y)),((h,y),(k,z)) \in \mathcal{G}^{(2)}$, isto é $\theta_h(y) = x$ e $\theta_k(z) = y$. Quero mostrar que $((gh,y),(k,z)),((g,x),(hk,z)) \in \mathcal{G}^{(2)}$, ou seja, que $\theta_k(z) = y$ e que $\theta_{hk}(z) = x$. Com efeito, já sabemos que $\theta_k(z) = y$, por hipótese. Para a outra igualdade, calculemos $\theta_{hk}(z) = \theta_h(\theta_k(z)) = \theta_h(y) = x$. Logo, segue que

$$((gh,y),(k,z)),((g,x),(hk,z)) \in \mathcal{G}^{(2)}.$$

Por fim, veja que

$$\begin{aligned}\big((g,x)(h,y)\big)(k,z) = (gh,y)(k,z) = \big((gh)k,z\big)\\ = \big(g(hk),z\big) = (g,x)(hk,z) = (g,x)\big((h,y)(k,z)\big).\end{aligned}$$

(iii) Veja que $\theta_{g^{-1}}(\theta_g(x)) = x$, o que garante que $\big((g,x),(g,x)^{-1}\big) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Agora, suponha $\big((g,x),(h,y)\big) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Assim,

$$\big((g,x)(h,y)\big)(h,y)^{-1} = (gh,y)(h^{-1},\theta_h(y)) = ((gh)h^{-1},x) = (g,x)$$

e

$$(g,x)^{-1}\big((g,x)(h,y)\big) = (g^{-1},\theta_g(x))(gh,y) = (g^{-1}(gh),y) = (h,y)$$

como desejado. Segue que $\mathcal{G}$ é grupoide.

Ademais, descrevamos explicitamente $\mathcal{G}^{(0)}$ calculando as funções range e source. Veja que para $(g,x) \in \mathcal{G}$ temos

$$r(g,x) = (g,x)(g,x)^{-1} = (g,x)(g^{-1},\theta_g(x)) = (gg^{-1},\theta_g(x)) = (e,\theta_g(x))$$

e, de forma similar,

$$d(g,x) = (e,x).$$

Daí, tiramos que

$$\mathcal{G}^{(0)} = \big\{(e,x) \;\big|\; x \in X\big\}$$

de modo que podemos identificar de maneira biunívoca $\mathcal{G}^{(0)}$ com X. Por isso, sempre que for conveniente, escreveremos $r(g,x) = \theta_g(x)$ e $d(g,x) = x$.

Para finalizar a seção, apresentamos a definição de homomorfismo entre grupoides e também um singelo exemplo.

Definição 2.1.11. *Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupoides. Uma função $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um **homomorfismo de grupoides** se para qualquer $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ tem-se $(\phi(x), \phi(y)) \in \mathcal{H}^{(2)}$ e $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.*

Exemplo 2.1.12. *Se G, H são grupos, os homomorfismos de grupoide entre G e H são os homomorfismos de grupo.*

2.2 Grupoides Topológicos

A partir de agora, teremos não apenas um olhar algébrico sobre os grupoides, mas também um olhar topológico. Começamos com a definição de grupoide topológico.

Definição 2.2.1. *Um **grupoide topológico** $\mathcal{G}$ é um grupoide munido de uma topologia tal que as operações produto e inversão são contínuas.*

Observação 2.2.2. *Na definição acima, considera-se em $\mathcal{G}^{(2)}$ a topologia induzida (de subespaço) pela topologia produto de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.*

Observação 2.2.3. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico, então as funções source e range são contínuas quando se considere em $\mathcal{G}^{(0)}$ a topologia de subespaço de $\mathcal{G}$. Vejamos o caso do source, o caso do range é similar. Seja $x \in \mathcal{G}$ arbitrário. Podemos fazer a composição*

$$x \longmapsto (x, x) \longmapsto (x^{-1}, x) \longmapsto x^{-1}x$$

que é contínua, pois a função identidade, a função inversão e a função produto o são.

Proposição 2.2.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide topológico. Se $\mathcal{G}^{(0)}$ é Hausdorff, então*

(i) $\Delta = \left\{(u, u) \;\middle|\; u \in \mathcal{G}^{(0)}\right\}$ é fechado em $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$;

(ii) $\mathcal{G}^{(2)}$ é fechado em $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{G}^{(0)}$ é Hausdorff.

(i): Para provar que Δ é fechado, provaremos que $\Delta^c = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \neq y\right\}$ é aberto de $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$. Com efeito, seja $(x, y) \in \Delta^c$ arbitrário. Como $x \neq y$, exitem abertos U e V de $\mathcal{G}^{(0)}$ tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Como U e V são disjuntos, temos que $U \times V \subset \Delta^c$. Portanto, $(x, y) \in U \times V \subset \Delta^c \subset \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$. Note que $U \times V$ é aberto de $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$, de modo que Δ^c é aberto de $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$, como queríamos.

(ii) Para provar que $\mathcal{G}^{(2)}$ é fechado, mostraremos que é igual a pré imagem da diagonal Δ (que é fechado de $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ pelo item (i)) pela função

$$\begin{array}{rrcl} d \times r: & \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)} \\ & (x, y) & \longmapsto & (d(x), r(y)) \end{array}$$

que é contínua pois suas funções coordenadas são continuas. Dado um par $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$, temos que $d(x) = r(y)$, concluindo que $(d(x), r(y)) \in \Delta$ e $(x, y) \in (d \times r)^{-1}(\Delta)$. Por outro lado, se $(x, y) \in (d \times r)^{-1}(\Delta)$, temos que $(d \times r)(x, y) = (d(x), r(y)) \in \Delta$, de modo que $d(x) = r(y)$ e $(x, y) \in \mathcal{G}^{(2)}$ como queríamos. ■

A seguir, alguns exemplos.

Exemplo 2.2.5. *(Grupos Topológicos) Um grupo topológico G é um grupo munido de um topologia para a qual as operações de produto e inversão são contínuas (considera-se em $G \times G$ a topologia produto). Já vimos que todo grupo G é um grupoide. Consequentemente, todo grupo topológico é um grupoide topológico.*

Exemplo 2.2.6. *(Espaços Topológicos) Já vimos que que todo conjunto pode ser visto como um grupoide composto apenas por unidades. Consequentemente, um espaço topológico X é um grupoide topológico.*

Exemplo 2.2.7. *(Ação de Grupo à esquerda) Consideremos $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}$ em que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ estão munidos com as topologias usuais ($\mathbb{Z}$ é discreto). Como $\mathbb{Z}$ é grupo aditivo, também é grupoide, e como é discreto, se verifica facilmente que é grupoide topológico. Considere a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ por translação*

$$\begin{array}{rrcl} \theta: & \mathbb{Z} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (n, x) & \longmapsto & n + x \end{array}$$

Assim, temos que $\mathcal{G} := \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, além de

$$\mathcal{G}^{(2)} = \big\{ \big((n, x), (m, y)\big) \; \big| \; m + y = x \big\}$$

e as operações definidas como

- $(n, x)(m, y) = (n + m, y)$; *e*
- $(n, x)^{-1} = (-n, n + x)$.

Segue do Exemplo 2.1.10 que $\mathcal{G}$ é um grupoide. Vejamos que $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico se o munirmos com a topologia produto.

Para a operação de inversão, seja $(n, x) \in \mathcal{G}$ arbitrário. É importante ressaltar que a função

$$\begin{array}{rrcl} \theta_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & n + x. \end{array}$$

é contínua. Desse modo temos que a função de inversão é a função

$$\begin{array}{rccc} \iota \times \theta_n : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & (n, x) & \longmapsto & (\iota(n), \theta_n(x)) = (-n, n + x). \end{array}$$

em que ι *é a função inversão em* $\mathbb{Z}$*, que é contínua pois* $\mathbb{Z}$ *é grupo topológico. Disso segue que a inversão em* $\mathcal{G}$ *é contínua.*

Para o produto, considere as funções de projeção (que são contínuas) $\Pi_1 : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *que projeta na primeira entrada,* $\Pi_2 : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *que projeta na segunda entrada,* $\pi_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *que projeta na primeira entrada e* $\pi_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que projeta na segunda entrada. Observe que as componentes da imagem da função produto são construídas da forma* $(\pi_1 \circ \Pi_1 + \pi_1 \circ \Pi_2, \pi_2 \circ \Pi_2)$*, mostrando que a função produto é contínua, já que as funções componentes o são.*

Segue que $\mathcal{G}$ *é grupoide topológico.*

2.3 Grupoides Étale

Nessa seção, apresentaremos os objetos principais de estudo desse trabalho: os grupoides étale.

Definição 2.3.1. *Um* ***grupoide étale***[1] *é um grupoide topológico* $\mathcal{G}$ *cujo espaço das unidades* $\mathcal{G}^{(0)}$ *é localmente compacto e Hausdorff na topologia relativa, e tal que a função range é um homeomorfismo local*[2].

A partir de agora $\mathcal{G}$ será sempre um grupoide étale.

Observação 2.3.2. *Como em qualquer grupoide* $\mathcal{G}$ *sempre vale* $d(x) = r(x^{-1})$*, concluímos que a aplicação source* d *também é um homeomorfismo local em um grupoide étale. De fato, a inversão é um homeomorfismo, pois é contínua e coincide com sua própria inversa. Disso também segue que* d *e* r *são funções abertas.*

Proposição 2.3.3. *Se* $\mathcal{G}$ *é um grupoide étale, então o espaço das unidades* $\mathcal{G}^{(0)}$ *é aberto em* $\mathcal{G}$*.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$. Por hipótese, existe um subconjunto aberto A de $\mathcal{G}$ contendo x_0 e um subconjunto aberto B de $\mathcal{G}^{(0)}$ contendo $r(x_0)$, tal que $r(A) = B$ e $r|_A$ é um homeomorfismo sobre B. Seja $B' = A \cap B$, então $x_0 = r(x_0) \in A \cap B = B'$. Como

[1] Essa definição de grupoide étale é mais comumente feita por pesquisadores de Álgebras de Operadores. Em geral, não se pede que $\mathcal{G}^{(0)}$ seja localmente compacto e Hausdorff.

[2] Dizemos que $f : X \to Y$ é um **homeomorfismo local** se, para todo ponto $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que a restrição $f|_U : U \to f(U)$ é um homeomorfismo, ou seja, $f|_U$ é bijetora, contínua e sua inversa também é contínua.

A é aberto em G, vemos que B' é aberto em B, portanto $A' := r^{-1}(B') \cap A$ é aberto em A, e além disso, r é um homeomorfismo de A' para B'. Afirmamos agora que $B' \subseteq A'$. Para provar isso, seja $x \in B'$. Assim, $x \in B \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$, e logo $x = r(x)$. Isso implica que $x \in r^{-1}(B')$, e como já sabemos que $x \in A$, temos $x \in r^{-1}(B') \cap A = A'$. Concluímos que r é uma função bijetiva de A' para B', que se restringe a uma função sobrejetiva (a identidade) no subconjunto $B' \subseteq A'$. Isso implica que $B' = A'$, e como A' é aberto em $\mathcal{G}$, segue que B' também é aberto em $\mathcal{G}$. Como x_0 foi escolhido arbitrariamente em $\mathcal{G}^{(0)}$, concluímos que $\mathcal{G}^{(0)}$ é aberto em $\mathcal{G}$. ■

Vejamos exemplos.

Exemplo 2.3.4. *Se G um grupo topológico, então G é um grupoide étale se, e somente se, G é um grupo discreto. Com efeito, suponha G um grupoide étale. Como G é grupo, as funções source e range são a mesma e são dadas pelo homomorfismo trivial que mapeia todos elementos de G no elemento neutro de G. Como G é étale, d e r são homeomorfismos locais. Logo, para qualquer $g \in G$ existe um aberto $U \subset G$ tal que $g \in U$ e $U \cong d(U) = r(U) = \{e\}$, em que e é o elemento neutro do grupo. Disso segue que todo ponto de G tem uma vizinhança homeomorfa a um ponto, de modo que G é discreto. Reciprocamente, suponha G discreto. Assim, para qualquer $g \in G$, existe uma vizinhança aberta U de g tal que $U = \{g\} \cong \{e\} = d(g) = r(g) = d(U) = r(U)$. Segue que $\mathcal{G}$ é étale.*

Exemplo 2.3.5. *O grupoide topológico $\mathcal{G}$ apresentado no exemplo 2.2.7 é um grupoide étale. Com efeito, segue do exemplo 2.1.10 que $r(n, x) = (0, n + x) \cong n + x$ e $d(n, x) = (0, x) \cong x$. Dessa forma, a função source é a identidade e a função range é a ação de grupo. Logo, são homeomorfismos locais. Ademais, $\mathcal{G}^{(0)} \cong \mathbb{R}$, que é localmente compacto e Hausdorff na topologia usual. Segue que $\mathcal{G}$ é grupoide étale.*

Agora, focaremos um pouco mais em alguns abertos especiais de um grupoide étale: as bisseções.

Definição 2.3.6. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide étale. Um subconjunto aberto $U \subset \mathcal{G}$ é uma* ***bisseção*** *se as restrições $r|_U$ e $d|_U$ são injetoras.*

O conjunto de todas as bisseções de $\mathcal{G}$ será denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{G})$. Encerramos o capitulo apresentando alguns resultados importantes que esclarecem um pouco a importância das bisseções.

Proposição 2.3.7. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide étale, então $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma bisseção.*

Demonstração. Note que $r|_{\mathcal{G}^{(0)}}$ e $d|_{\mathcal{G}^{(0)}}$ são exatamente a função identidade em $\mathcal{G}^{(0)}$, que é injetora, provando que $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma bisseção. ■

Proposição 2.3.8. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide étale, então conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ forma uma base para a topologia de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Seja V um subconjunto aberto de G e seja $x_0 \in V$. Devemos provar que existe uma bisseção U tal que $x_0 \in U \subseteq V$. Como r é um homeomorfismo local, existe um subconjunto aberto A_1 de G contendo x_0 e um subconjunto aberto B_1 de $G^{(0)}$ contendo $r(x_0)$, tal que $r(A_1) = B_1$, e $r|_{A_1}$ é um homeomorfismo sobre B_1. Da mesma forma, como d também é um homeomorfismo local, podemos escolher um subconjunto aberto A_2 de G contendo x_0 e um subconjunto aberto B_2 de $G^{(0)}$ contendo $d(x_0)$, tal que $d(A_2) = B_2$, e $d|_{A_2}$ é um homeomorfismo sobre B_2. Portanto, $U := A_1 \cap A_2 \cap V$ é uma bisseção contendo x_0 e contido em V. ■

Proposição 2.3.9. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide étale, então toda bisseção é localmente compacta e Hausdorff na topologia relativa de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Seja U uma bisseção. Como r é uma função aberta, temos que $r(U)$ é aberto de $\mathcal{G}^{(0)}$ que é localmente compacto Hausdorff, de modo que $r(U)$ também o é. Por fim usamos o fato de $r|_U$ ser um homeomorfismo sobre sua imagem para concluir que U é localmente compacto e Hausdorff. ■

Proposição 2.3.10. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide étale, então todo aberto Hausdorff de $\mathcal{G}$ é localmente compacto.*

Demonstração. Seja V um aberto Hausdorff de $\mathcal{G}$. Pela proposição 2.3.8, temos que o conjunto $\{V \cap U \mid U \in \mathcal{B}(\mathcal{G})\}$, forma uma base para a topologia relativa de V. Note que $V \cap U$ é um aberto de U, que é localmente compacto pela proposição 2.3.9, de modo que $V \cap U$ é localmente compacto, provando que V também o é. ■

Proposição 2.3.11. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide étale. Se $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, então*

(i) $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$;

(ii) $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V, (u,v) \in \mathcal{G}^{(2)}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$.

Demonstração. Sejam U e V bisseções.

(i) Sejam $x^{-1}, y^{-1} \in U^{-1}$ tais que $r(x^{-1}) = r(y^{-1})$. Disso, temos que $d(x) = d(y)$ e como $x, y \in U$, concluímos que $x = y$ e $x^{-1} = y^{-1}$ de modo que $r|_{U^{-1}}$ é injetora. De forma análoga, mostra-se que $d|_{U^{-1}}$ é injetora. Também temos que U^{-1} é aberto pois a inversão é homeomorfismo, concluindo que U^{-1} é bisseção.

(ii) Sejam $u_1v_1, u_2v_2 \in UV$ tais que $r(u_1v_1)$=$r(u_2v_2)$ e $d(u_1v_1)$=$d(u_2v_2)$. Assim,

$$r(u_1v_1) = r(u_2v_2) \xrightarrow{2.1.6} r(u_1) = r(u_2) \xrightarrow{u_1,u_2 \in U} u_1 = u_2.$$

Também veja que

$$d(u_1v_1) = d(u_2v_2) \xrightarrow{2.1.6} d(v_1) = d(v_2) \xrightarrow{v_1,v_2 \in V} v_1 = v_2,$$

concluindo que $u_1v_1 = u_2v_2$ de modo que $d|_{UV}$ e $r|_{UV}$ são injetoras. A verificação de que UV é aberto de $\mathcal{G}$, fica a cargo do leitor. Segue que UV é bisseção. ■

3 Ações de Semigrupos Inversos

3.1 Definição e Resultados Iniciais

A partir de agora, vamos considerar X como sendo um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff.

Definição 3.1.1. *Defina o conjunto*

$$\mathcal{J}(X) := \left\{ f \in \mathcal{I}(X) \;\middle|\; f \text{ é homeomorfismo entre subconjuntos abertos de } X \right\}.$$

Observação 3.1.2. *É imediata a conclusão de que $\mathcal{J}(X)$ é $*$-subsemigrupo de $\mathcal{I}(X)$.*

Definição 3.1.3. *Sejam S um semigrupo inverso e X um espaço topológico. Uma ação de S sobre X é um homomorfismo de semigrupos*

$$\begin{array}{rccccccc} \theta: & S & \longrightarrow & \mathcal{J}(X) & & & & \\ & s & \longmapsto & \theta_s: & X_{s^*} & \longrightarrow & X_s & \\ & & & & x & \longmapsto & \theta_s(x) & \end{array} \qquad \text{tal que} \qquad \bigcup_{e \in E(S)} X_e = X.$$

Fixaremos a partir de agora uma ação θ de S sobre X.

Proposição 3.1.4. *Seja S um semigrupo inverso, X um espaço topológico e θ um ação de S sobre X. Se $s \in S$, então $\theta_s^{-1} = \theta_{s^*}$.*

Demonstração. Note que

$$\theta_s \theta_{s^*} \theta_s = \theta_{ss^*s} = \theta_s \qquad \text{e} \qquad \theta_{s^*} \theta_s \theta_{s^*} = \theta_{s^*ss^*} = \theta_{s^*}.$$

Mostrando que θ_{s^*} é o inverso de θ_s no sentido de semigrupo inverso, mas como vimos anteriormente, os inversos em $\mathcal{I}(X)$ são as funções inversas em seus respectivos domínios, de modo que em $\mathcal{J}(X)$ também. Pelo exposto, $\theta_s^{-1} = \theta_{s^*}$. ■

Proposição 3.1.5. *Seja S um semigrupo inverso, X um espaço topológico e θ um ação de S sobre X. Para qualquer $s \in S$, os domínios X_{s^*} e X_{s^*s} coincidem*

Demonstração. Note que $id_{X_{s^*}} = \theta_{s^*} \circ \theta_s = \theta_{s^*s} = id_{X_{s^*s}}$, implicando que $X_{s^*} = X_{s^*s}$. ■

Proposição 3.1.6. *Seja S um semigrupo inverso, X um espaço topológico e θ um ação de S sobre X. Se $e, f \in E(S)$, então $X_{ef} = X_e \cap X_f$.*

Demonstração. Veja que

$$id_{X_{ef}} = \theta_{ef} = \theta_e \circ \theta_f = id_{X_e} \circ id_{X_f} = id_{X_e \cap X_f}$$

mostrando que $X_{ef} = X_e \cap X_f$, como queríamos. ∎

Proposição 3.1.7. *Seja S um semigrupo inverso, X um espaço topológico e θ um ação de S sobre X. Para cada $s \in S$ e $e \in E(S)$ temos que $\theta_s(X_e \cap X_{s^*s}) = X_{ses^*}$.*

Demonstração. Como s^*s é idempotente, temos que

$$\theta_s(X_e \cap X_{s^*s}) = \theta_s(X_{es^*s}) = \mathrm{im}(\theta_s\theta_{es^*s}) = \mathrm{im}(\theta_{ses^*s}) = X_{ses^*s(ses^*s)^*}.$$

Mas note que

$$ses^*s(ses^*s)^* = ses^*ss^*ses^* = sees^* = ses^*.$$

Pelo exposto, temos que $\theta_s(X_e \cap X_{s^*s}) = X_{ses^*}$ ∎

3.2 O Grupoide de Germes

Nosso objetivo nesta seção é construir o grupoide de germes associado a uma ação θ de um semigrupo inverso S sobre um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff X.

Ao longo dessa seção, fixamos um semigrupo inverso S, um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff X e uma ação θ de S sobre X. Denotaremos por Ω o subconjunto de $S \times X$ dado por

$$\Omega = \big\{(s,x) \bigm| x \in X_{s^*s}\big\}$$

e vamos definir a seguinte relação em Ω: $(s,x) \sim (t,y)$ se, e somente se, $x = y$ e existe um idempotente $e \in E(S)$ tal que $x \in X_e$ e $se = te$.

Proposição 3.2.1. *A relação definida acima é uma relação de equivalência.*

Demonstração. <u>Reflexividade</u>: Sejam $s \in S$ e $x \in X_{s^*s}$. Obviamente $x \in X_e$ para algum idempotente e, já que $X = \bigcup_{e \in E(s)} X_e$. Além disso, temos que $se = se$ e $x = x$. Segue que $(s,x) \sim (s,x)$.

<u>Simetria</u>: Sejam $s,t \in S$ e $x,y \in X_{s^*s}$. Suponha que $(s,x) \sim (t,y)$, isto é, $x = y$ e existe $e \in E(S)$ tal que $x \in X_e$ e $se = te$. E isso obviamente significa que $y = x$, $y \in X_e$ e $te = se$. Segue que $(t,y) \sim (s,x)$.

<u>Transitividade</u>: Sejam $s,t,v \in S$ e $x,y,z \in X_{s^*s}$. Suponha que $(s,x) \sim (t,y)$ e $(t,y) \sim (v,z)$, isto é, $x = y, y = z$ e existem idempotentes e e f tais que $se = te$ e $tf = vf$. Como $x = y$ e $y = z$, temos que $x = z$. Além disso,

$$sef = tef = tfe = vfe = vef$$

e ef é idempotente. Como $x \in X_e$ e $x \in X_f$, pela Proposição 3.1.6, concluímos que $x \in X_{ef}$, de modo que $(s,x) \sim (v,z)$. ■

Observação 3.2.2. *Se $(s,x) \sim (t,y)$, isto é, se $x = y \in X_e$ e $se = te$ para algum idempotente e, então*

$$\theta_s(x) = \theta_s(\theta_e(x)) = \theta_{se}(x) = \theta_{te}(x) = \theta_t(\theta_e(x)) = \theta_t(x).$$

Motivados por essa observação, a classe de equivalência de (s,x) será chamada de **germe de s em x**, e será denotada por $[s,x]$.

Seja

$$\mathcal{G} = \Omega/\sim$$

o conjunto de todos os germes e defina

$$\mathcal{G}^{(2)} = \left\{([s,x],[t,y]) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \;\middle|\; x = \theta_t(y)\right\}.$$

Para $([s,x],[t,y]) \in \mathcal{G}^{(2)}$, defina

(i) $[s,x] \cdot [t,y] = [st,y]$; e

(ii) $[s,x]^{-1} = [s^*, \theta_s(x)]$.

Proposição 3.2.3. *As operações (i) e (ii) acima estão bem definidas; isto é, (st,y) e $(s^*, \theta_s(x))$ pertencem a Ω, e seus respectivos germes não dependem da escolha dos representantes.*

Demonstração. (ii) Seja $(s,x) \in \Omega$, isto é, $x \in X_{s^*s}$. Como $x \in X_{s^*s}$, é imediato que $\theta_s(x) \in X_{ss^*}$. Suponha agora que $[s,x] = [t,x]$. Assim, existe $e \in E(S)$ com $x \in X_e$ tal que $se = te$. Inicialmente, veja que $\theta_s(x) = \theta_t(x)$ pela Observação 3.2.2.

Agora, considere o idempotente $f = ses^* = tet^*$. Como $x \in X_e \cap X_{s^*s}$, temos pela Proposição 3.1.7 que

$$\theta_s(x) \in \theta_s(X_e \cap X_{s^*s}) = X_{ses^*} = X_f.$$

Além disso, temos que

$$s^*f = s^*ses^* = es^*ss^* = es^* = (se)^* = (te)^* = et^* = et^*tt^* = t^*tet^* = t^*f$$

Disso segue que $[s^*, \theta_s(x)] = [t^*, \theta_t(x)]$ e, portanto, a inversão está bem definida.

(i) Sejam $(s,x),(t,y) \in \Omega$ e suponha $([s,x],[t,y]) \in \mathcal{G}^{(2)}$.

Primeiramente, veja que

$$y = \theta_{t^*}(x) \in \theta_{t^*}(X_{s^*s} \cap X_{tt^*}) \overset{3.1.7}{=} X_{t^*s^*st} = X_{(st)^*st}$$

confirmando que $(st, y) \in \Omega$. Agora, sejam $(s', x), (t', y) \in \Omega$ tais que $(s, x) \sim (s', x)$ e $(t, y) \sim (t', y)$, isto é, existem $e, f \in E(S)$, com $x \in X_e$ e $y \in X_f$, tais que $se = s'e$ e $tf = t'f$. Como $\theta_{t'}(y) = \theta_t(y) = x$ e $(s', x), (t', y) \in \Omega$, concluímos que $(s't', y) \in \Omega$.

Vamos mostrar agora que $(st, y) \sim (s't', y)$: com efeito, considere o idempotente $d = ft^*et$. Afirmamos que $y \in X_d$: de fato, uma vez que $x \in X_e \cap X_{tt^*}$, vale que

$$y = \theta_{t^*}(x) \in \theta_{t^*}(X_e \cap X_{tt^*}) = X_{t^*et}$$

e como $y \in X_f$, temos

$$y \in X_f \cap X_{t^*et} = X_{ft^*et} = X_d$$

como afirmado.

Por fim, veja que

$$s't'd = s't'ft^*et = s'tft^*et = s'etft^*t = setft^*t = stft^*et = std.$$

Pelo exposto, $(st, y) \sim (s't', y)$, como queríamos. ■

Vejamos que $\mathcal{G}$ se torna um grupoide munido das operações acima definidas.

Proposição 3.2.4. *$\mathcal{G}$ é um grupoide com as operações definidas acima.*

Demonstração. Passamos agora a verificar separadamente os três axiomas de grupoide. Para isso, sejam $[s, x], [t, y], [u, z] \in \Omega$.

(i) $([s, x]^{-1})^{-1} = [s^*, \theta_s(x)]^{-1} = [(s^*)^*, \theta_{s^*}(\theta_s(x))] = [s, x]$.

(ii) Suponha $([s, x], [t, y]), ([t, y], [u, z]) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Dessa forma, temos que $\theta_t(y) = x$ e $\theta_u(z) = y$. Portanto, $x = \theta_t(y) = \theta_t(\theta_u(z)) = \theta_{tu}(z)$, provando que $([st, y], [u, z])$ e $([s, x], [tu, z])$ pertencem a $\mathcal{G}^{(2)}$. Além disso, $[st, y][u, z] = [stu, z] = [s, x][tu, z]$, finalizando a prova de (ii).

(iii) Primeiramente, note que

$$\theta_{s^*}(\theta_s(x)) = \theta_{s^*s}(x) = x,$$

o que implica que $([s, x], [s^*, \theta_s(x)]) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Agora, suponha que $([s, x], [t, y]) \in \mathcal{G}^{(2)}$; isto é, $\theta_t(y) = x$. Portanto,

$$([s, x][t, y])[t, y]^{-1} = [st, y][t^*, \theta_t(y)] = [stt^*, \theta_t(y)] = [stt^*, x] = [s, x]$$

pois $s(tt^*) = stt^*(tt^*)$, implicando que $(s,x) \sim (stt^*, x)$. Também

$$[s,x]^{-1}([s,x][t,y]) = [s^*, \theta_s(x)][st,y] = [s^*st, y] = [t,y].$$

finalizando a verificação do axioma (iii).

Pelo exposto, $\mathcal{G}$ é um grupoide com as operações assim definidas. ■

Observação 3.2.5. *O espaço das unidades de $\mathcal{G}$ é da forma*

$$\mathcal{G}^{(0)} := \left\{ [s,x]^{-1}[s,x] \;\middle|\; [s,x] \in \mathcal{G} \right\}.$$

Mas note que $[s,x]^{-1}[s,x] = [s^*, \theta_s(x)][s,x] = [s^*s, x]$, implicando que o espaço das unidades é da forma

$$\mathcal{G}^{(0)} = \left\{ [e,x] \;\middle|\; e \in E(S), x \in X_e \right\}.$$

Proposição 3.2.6. *O espaço das unidades $\mathcal{G}^{(0)}$, se identifica com X através da correspondência*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathcal{G}^{(0)} & \longrightarrow & X \\ & [e,x] & \longmapsto & x \end{array}$$

em que e é algum idempotente tal que $x \in X_e$.

Demonstração. Dado $x \in X_e \cap X_f$ com $e, f \in E(S)$, temos que $[e,x] = [f,x]$ pois uma vez que $ef \in E(S)$, vale que $e(ef) = ef = eff = f(ef)$ e $x \in X_{ef}$ pela Proposição 3.1.6. Disso segue que η é injetora. Note que η é claramente sobrejetora, uma vez que $\bigcup_{e \in E(S)} X_e = X$, provando que η é uma bijeção. ■

Observação 3.2.7. *A função source de $\mathcal{G}$, $d : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(0)}$ é dada por*

$$d[t,x] = [t^*, \theta_t(x)][t,x] = [t^*t, x].$$

Através da correspondência vista em 3.2.6, vamos escrever

$$d[t,x] = x.$$

Com respeito a função range de $\mathcal{G}$, por razões similares, escrevemos

$$r[t,x] = \theta_t(x).$$

Agora, trabalharemos para dar uma topologia ao nosso grupoide. Dados quaisquer $s \in S$ e $U \subset X_{s^*s}$ aberto arbitrários, defina

$$\Theta(s,U) = \left\{ [s,x] \in \mathcal{G} \;\middle|\; x \in U \right\}.$$

Proposição 3.2.8. *Sejam $s, t \in S$, U e V abertos tais que $U \subset X_{s^*s}$ e $V \subset X_{t^*t}$. Se $[r, z] \in \Theta(s, U) \cap \Theta(t, V)$, então existe um idempotente $e \in E(S)$ e um aberto $W \subset X_{(re)^*re}$ tais que*

$$[r, z] \in \Theta(re, W) \subset \Theta(s, U) \cap \Theta(t, V).$$

Demonstração. Por hipótese, $[r, z] = [s, x] = [t, y]$ em que $x \in U$ e $y \in V$, mas isso implica que $x = y = z$, de modo que $z \in U \cap V$. Além disso, existem $e, f \in E(S)$ tais que $z \in X_e$, $z \in X_f$, $re = se$ e $rf = tf$. Substituindo e e f por ef, podemos sem perda de generalidade supor $e = f$. Dessa forma, $re = se = te$.

Defina $W = U \cap V \cap X_{(re)^*re}$. Como $z \in X_{r^*r} \cap X_e = X_{r^*re} = X_{r^*ree} = X_{er^*re} = X_{(re)^*re}$, vemos que $z \in W$ e, portanto,

$$[r, z] = [re, z] \in \Theta(re, W).$$

Mostraremos agora que $\Theta(re, W) \subset \Theta(s, U) \cap \Theta(t, V)$. Com efeito, seja $[re, x] \in \Theta(re, W)$ arbitrário. Como $x \in U$, temos que

$$[re, x] = [se, x] = [s, x] \in \Theta(s, U).$$

Como $x \in V$

$$[re, x] = [te, x] = [t, x] \in \Theta(t, V)$$

provando que

$$\Theta(re, W) \subset \Theta(s, U) \cap \Theta(t, V).$$

■

Observação 3.2.9. *Dado $[s, x] \in \mathcal{G}$ arbitrário, é sempre verdade que $[s, x] \in \Theta(s, X_{s^*s})$. Unindo isso com a Proposição 3.2.8, concluímos que a coleção de todos os $\Theta(s, U)$ forma uma base para alguma topologia de $\mathcal{G}$.*

Proposição 3.2.10. *Com a topologia definida acima, $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico.*

Demonstração. Vamos mostrar que as operações de multiplicação e inversão são contínuas. Primeiro para a multiplicação. Com efeito, seja $([s, x], [t, y]) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e W uma vizinhança aberta arbitrária de $[st, y]$. Usando o fato de que a coleção $\{\Theta(s, U)\}$ é uma base para esta topologia, concluímos que existe $r \in S$ e um aberto $V \subset X_{r^*r}$ tais que

$$[s, x][t, y] = [st, y] \in \Theta(r, V) \subset W.$$

Isso implica que $y \in V$ e existe $e \in E(S)$ tal que $y \in X_e$ e $ste = re$. Tome $U = V \cap X_e \cap X_{t^*t}$ e considere a vizinhança de $([s, x], [t, y])$ dada por $(\Theta(s, X_{s^*s}) \times \Theta(t, U)) \cap \mathcal{G}^{(2)} := Y$ (é vizinhança na topologia relativa de $\mathcal{G}^{(2)}$ pois $x \in X_{s^*s}$ e $y \in U$). Mostraremos que a imagem dessa vizinhança pela operação de multiplicação está contida em W. Com efeito, seja $([s,x'],[t,y']) \in Y$. Temos $[s,x'][t,y'] = [st,y']$ e como $y' \in U \subset X_e$ também temos que $[st,y'] = [r,y'] \in \Theta(r,V) \subset W$, provando que o produto é contínuo.

Para a operação de inversão, sejam $[s,x] \in \mathcal{G}$ e W vizinhança aberta de $[s^*,\theta_s(x)]$ arbitrária. Assim, pela Proposição 3.2.8, exitem $r \in S$ e $U \overset{ab.}{\subset} X_{r^*r}$ tais que $[s^*,\theta_s(x)] \in \Theta(r,U) \subset W$. Ademais, existe $e \in E(S)$ tal que $\theta_s(x) \in X_e$ e $s^*e = re$, ou seja, $es = er^*$. Veja que $\theta_s(x) \in X_e$ implica que

$$x \in \theta_{s^*}(X_e \cap X_{ss^*}) \overset{3.1.7}{=} X_{s^*es} = X_{s^*ees} = X_{s^*e(s^*e)^*} = X_{re(re)^*} = X_{rer^*} \overset{rer^* \leq rr^*}{\subset} X_{rr^*}.$$

Portanto, concluímos que $[s,x] = [r^*,x]$ e, mais do que isso, que $\Theta(r^*,\theta_r(U))$ é vizinhança de $[s,x]$. Por fim, veja que $\Theta(r^*,\theta_r(U))^{-1} = \Theta(r,\theta_{r^*}\theta_r(U)) = \Theta(r,\theta_{r^*r}(U)) = \Theta(r,U) \subset W$, de modo que a inversão é contínua. Pelo exposto, $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico. ■

A partir de agora, vamos trabalhar para mostrar que $\mathcal{G}$ é um grupoide étale.

Proposição 3.2.11. *Sejam $s \in S$ e $U \subset X_{s^*s}$ um aberto. Então a função*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U & \longrightarrow & \Theta(s,U) \\ & x & \longmapsto & [s,x] \end{array}$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Segue diretamente da definição da relação de equivalência 3.2.1 que ϕ é injetora e, além disso, $\phi(U) = \Theta(s,U)$, mostrando que ϕ é uma bijeção. Dado um aberto qualquer $A \subset U$, temos $\phi(A) = \Theta(s,A)$, provando que ϕ é uma função aberta. Provaremos agora que ϕ é contínua. Com efeito, sejam $x \in U$ e W uma vizinhança aberta de $\phi(x)$ arbitrária. Assim, existem $t \in S$ e $V \subset X_{t^*t}$ tais que $[s,x] = \phi(x) \in \Theta(t,V) \subset W \subset \Theta(s,U)$. Portanto, $x \in V \subset U \subset X_{s^*s}$. Além do mais, existe $e \in E(S)$ tal que $x \in X_e$ e $se = te$. Mostraremos que $\phi(V \cap X_e) \subset W$ e como $V \cap X_e$ é vizinhança aberta de x, concluiremos que ϕ é contínua. Seja $y \in V \cap X_e$ arbitrário. Assim, vale que $\phi(y) = [s,y] = [t,y] \in \Theta(t,V) \subset W$, como queríamos. Segue que ϕ é homeomorfismo. ■

Corolário 3.2.12. *A bijeção dada em 3.2.6 é um homeomorfismo.*

Demonstração. Dado $[e,x] \in \mathcal{G}^{(0)}$, temos que X_e é um aberto de X que contém x e $\Theta(e,X_e)$ é um aberto de $\mathcal{G}^{(0)}$ que contém $[e,x]$. Pela proposição 3.2.11, concluímos que a função

$$\begin{array}{rccc} \phi_e: & X_e & \longrightarrow & \Theta(e,X_e) \\ & y & \longmapsto & [e,y] \end{array}$$

é um homeomorfismo. Como $X = \bigcup_{e \in E(S)} X_e$ e dados $e, f \in E(S)$, tem-se $[e, x] = [f, x]$. O Lema da Colagem[1] nos garante que a função $\phi : X \to \mathcal{G}^{(0)}$ dada por $\phi(x) = \phi_e(x)$, em que e é um idempotente tal que $x \in X_e$, é um homeomorfismo. Como ϕ é a inversa da função η dada na Proposição 3.2.6, concluímos o desejado. ■

Mostraremos a seguir que o grupoide construído nesse capítulo é um grupoide étale.

Proposição 3.2.13. *O grupoide $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\theta, S, X)$ construído acima, é um grupoide étale e é chamado de **grupoide de germes** associada a ação θ de S sobre X.*

Demonstração. Uma vez que X é localmente compacto Hausdorff, pelo Corolário 3.2.12, $\mathcal{G}^{(0)}$ também o é. A função source sobre todo aberto básico $\Theta(s, U)$ é homeomorfismo sobre U pois é a função inversa do homeomorfismo definido na Proposição 3.2.11. Isso implica que d é um homeomorfismo local, de modo que a função range, também o é. Pelo exposto $\mathcal{G}$ é grupoide étale. ■

Proposição 3.2.14. *Para qualquer $s \in S$ e qualquer aberto $U \subset X_{s^*s}$, tem-se que $\Theta(s, U)$ é uma bisseção de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Diretamente da definição da topologia de $\mathcal{G}$, concluímos que $\Theta(s, U)$ é aberto de $\mathcal{G}$. Como $d[s, x] = x$, temos que $d|_{\Theta(s,U)}$ é a função inversa do homeomorfismo definido na Proposição 3.2.11, de modo que $d|_{\Theta(s,U)}$ é injetora. Uma vez que $r = \theta_s \circ d$, pois $r[s, x] = \theta_s(x)$, concluímos que r também é injetora e, portanto, $\Theta(s, U)$ é bisseção. ■

Neste capítulo, construímos o grupoide de germes de um sistema e mostramos que ele é étale. No próximo capítulo, mostraremos também que todo grupoide étale é um grupoide de germes desse tipo.

[1] O Lema da Colagem pode ser encontrado em (MUNKRES, 2000).

4 Ação do Semigrupo Inverso de Bisseções

4.1 A Ação de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ em $\mathcal{G}^{(0)}$

Falaremos nesse capítulo sobre um exemplo de ação de semigrupo inverso que é intrínseca aos grupoides étale. Fixaremos $\mathcal{G}$ um grupoide étale.

Proposição 4.1.1. *O conjuto das bisseções de $\mathcal{G}$ ($\mathcal{B}(\mathcal{G})$), munido com a operação*

$$UV = \left\{uv \;\middle|\; u \in U, v \in V, (u,v) \in \mathcal{G}^{(2)}\right\}$$

é um semigrupo inverso em que os inversos são dados por $U^* = \left\{u^{-1} \;\middle|\; u \in U\right\}$. Além disso, os idempotentes de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ são os subconjuntos abertos de $\mathcal{G}^{(0)}$.

Demonstração. Primeiramente, veja que UV está bem definido graças a Proposição 2.3.11. Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$. Veja que $U^*U = \left\{u^{-1}v \;\middle|\; u, v \in U, (u^{-1}, v) \in \mathcal{G}^{(2)}\right\}$. Sejam $u, v \in U$ tais que $(u^{-1}, v) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Disso temos que $r(v) = d(u^{-1}) = r(u)$, implicando que $u = v$ pois U é bisseção. Logo, $U^*U = \left\{u^{-1}u \;\middle|\; u \in U\right\} = d(U) \subset \mathcal{G}^{(0)}$. Assim,

$$UU^*U = Ud(U) = \left\{uv \;\middle|\; u \in U, v \in d(U), (u,v) \in \mathcal{G}^{(2)}\right\}.$$

Se $(u,v) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e $v \in \mathcal{G}^{(0)}$, então $d(u) = r(v) = v$ de modo que $uv = ud(u) = uu^{-1}u = u$, provando que $UU^*U = Ud(U) = \left\{u \;\middle|\; u \in U\right\} = U$. Analogamente, $UU^* = r(U)$ e $U^*UU^* = U^*$.

Vejamos que os idempotentes de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ são os abertos de $\mathcal{G}^{(0)}$. De fato, suponha que $U \in E(\mathcal{B}(\mathcal{G}))$. Assim, $U = UU$. Seja $u \in U$. Desse modo, existem $v, w \in U$ tais que $u = vw$. Disso temos que $d(u) = d(vw) = d(w)$ e $r(u) = r(vw) = r(v)$, concluindo que $w = u = v$ pois U é bisseção. Logo, $u = u^2$. Multiplicando essa equação por u^{-1} à direita, concluímos que $u = r(u)$, provando que $u \in \mathcal{G}^{(0)}$. Por outro lado, se U é aberto de $\mathcal{G}^{(0)}$, é claro que U é bisseção e $UU = U$.

Por fim, vejamos que os idempotentes de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ comutam. De fato, se U e V são abertos de $\mathcal{G}^{(0)}$, temos $UV = \left\{uv \;\middle|\; u \in U, v \in V, (u,v) \in \mathcal{G}^{(2)}\right\}$. Mas $(u,v) \in \mathcal{G}^{(2)}$ implica $v = r(v) = d(u) = u$ de modo que $uv = uu = u$. Portanto,

$$UV = \left\{u \;\middle|\; u \in U, u \in V\right\} = U \cap V = V \cap U = VU$$

como queríamos. O resultado segue.

■

Proposição 4.1.2. *A relação de ordem parcial natural de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ é a inclusão.*

Demonstração. Sejam $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$. Suponha $U \subset V$. Queremos mostrar que $U \leq V$, isto é, $U = VU^*U$. Com efeito, seja $u \in U$ arbitrário. Assim, $u \in V$ e $u = uu^*u \in VU^*U$. Para a segunda continência, seja $u \in VU^*U = Vd(U)$. Logo, existem $v \in V$ e $w \in U$ tais que $u = vd(w)$. Portanto, $d(v) = r(d(w)) = d(w)$, de modo que $v = w$, pois v e w pertencem a V e V é bisseção. Disso temos que $u = wd(w) = w \in U$, provando que $U = VU^*U$.

Reciprocamente, suponha $U = VU^*U$. Tome $u \in U$ arbitrário. Assim, existem $v \in V$ e $w \in U$ tais que $u = vd(w)$. Disso temos que $d(w) = d(v)$, implicando que $u = vd(v) = v \in V$. Pelo exposto, $U \subset V$. ∎

A partir de agora denotaremos por X o espaço das unidades $\mathcal{G}^{(0)}$ do grupoide $\mathcal{G}$.

Já vimos anteriormente que, para $U \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, $d(U)$ e $r(U)$ são abertos de X e as funções $r_U : U \to r(U)$ e $d_U : U \to d(U)$ são homeomorfismos. Defina para cada $U \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, a função $\theta_U : d(U) \to r(U)$ dada por $\theta_U(x) = r_U(d_U^{-1}(x))$.

Proposição 4.1.3. *A correspondência*

$$\begin{array}{rcccccl} \theta : & \mathcal{B}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{J}(X) & & & \\ & U & \longmapsto & \theta_U : & d(U) & \longrightarrow & r(U) \\ & & & & x & \longmapsto & r_U(d_U^{-1}(x)) \end{array}$$

é uma ação de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ em X.

Demonstração. Primeiramente veja que $\theta_U(x) = y$ se, e somente se, existe $u \in U$ tal que $d(u) = x$ e $r(u) = y$. De fato, se $\theta_U(x) = y$, basta tomar $u = d_U^{-1}(x)$ para termos $d(u) = x$ e $r(u) = y$. Reciprocamente, se existe $u \in U$ tal que $d(u) = x$ e $r(u) = y$, então $\theta_U(x) = \theta_U(d(u)) = r_U(d_U^{-1}(d(u))) = r_U(u) = y$. Feito isso, podemos ver θ_U como um conjunto de pares ordenados da forma $\theta_U = \big\{(d(u), r(u)) \;\big|\; u \in U\big\}$.

Provaremos agora que $\theta_{UV} = \theta_U\theta_V$ para todo $U, V \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$. Com efeito, suponha $\theta_U\theta_V(x) = z$. Assim, existe $y \in X$ tal que $\theta_V(x) = y$ e $\theta_U(y) = z$, ou seja, $(x, y) \in \theta_V$ e $(y, z) \in \theta_U$. Logo, podemos tomar $u \in U$ e $v \in V$ tais que $d(v) = x$, $r(v) = d(u) = y$ e $r(u) = z$. Temos $uv \in UV$ e uma vez que $(x, z) = (d(v), r(u)) = (d(uv), r(uv)) \in \theta_{UV}$, concluímos que $\theta_{UV}(x) = z$.

Por outro lado, se $\theta_{UV}(x) = z$, temos que existe $w \in UV$ tal que $d(w) = x$ e $r(w) = z$. Tomando $w = uv$ com $u \in U$ e $v \in V$, e tomando $y = d(u) = r(v)$, temos $(x, y) = (d(w), r(v)) = (d(v), r(v)) \in \theta_V$. Similarmente, $(y, z) = (d(u), r(w)) = (d(u), r(u)) \in \theta_U$.

Disso segue que $\theta_{UV} = \theta_U\theta_V$, provando que θ é homomorfismo de semigrupos inversos. Por fim, veja que

$$\bigcup_{U\in E(\mathcal{B}(\mathcal{G}))} d(U) = \bigcup_{U\in E(\mathcal{B}(\mathcal{G}))} U = \mathcal{G}^{(0)} = X$$

provando que é ação.

■

Teorema 4.1.4. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide étale. Se $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{G})$ é um $*$-subsemigrupo tal que*

(i) $\mathcal{G} = \bigcup_{U\in S} U$; e

(ii) para quaisquer U, $V \in S$, e qualquer $u \in U \cap V$, existe $W \in S$ tal que $u \in W \subset U \cap V$,

então $\theta|_S$ é ação de S em $X = \mathcal{G}^{(0)}$ e o grupoide de germes associado a esta ação é isomorfo ao grupoide original $\mathcal{G}$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $\theta|_S$ é ação de S em $X = \mathcal{G}^{(0)}$. Com efeito, dado $x \in X$, existe $U \in S$ tal que $x \in U$, por (i), logo $(x, x) = (d(x), r(x)) \in \theta_U$, em particular, $x \in d(U)$ de modo que $\theta|_S$ é ação.

Vamos denotar o grupoide de germes associado a restrição $\theta|_S$ por $\mathcal{H}$. Como o domínio de θ_U é $d(U)$, $\mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{H} = \{[U, x] | U \in S, x \in d(U)\}.$$

Dado um germe $[U, x] \in \mathcal{H}$, temos que existe um único $u_0 \in U$ tal que $d(u_0) = x$, pois $d|_U$ é injetora. Afirmamos que u_0 depende apenas do germe $[U, x]$. De fato, suponha que $[U, x] = [V, x]$, para algum $V \in S$, ou seja, existe um idempotente $E \in S$ tal que $x \in d(E)$ e $UE = VE$. Como observado anteriormente, E é subespaço de X, e portanto, $E = d(E)$. Aplicando a definição de produto, temos temos que $UE = \{u \in U \mid d(u) \in E\}$, e uma vez que $d(u_0) = x \in d(E) = E$, concluimos que $u_0 \in UE = VE$, em particular, $u_0 \in V$. Logo, o único elemento $v \in V$ com $d(v) = x$ é $v = u_0$, de modo que a afirmação segue.

Definimos agora

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & [U, x] & \longmapsto & u \end{array}$$

em que u é o único elemento de de U tal que $d(u) = x$. A função está bem definida pela argumentação que fizemos acima.

Para mostrar que ϕ é sobrejetora, tome $u \in \mathcal{G}$ arbitrário. Por (i), existe $U \in S$ tal que $u \in U$, e portanto, $[U, d(U)] \in \mathcal{H}$ e $\phi([U, d(u)]) = u$.

Para mostrar que ϕ é injetora, tome $[U_1, x_1], [U_2, x_2] \in \mathcal{H}$ tais que $\phi([U_1, x_1]) = \phi([U_2, x_2]) = w$, com $w \in U_i$, $d(w) = x_i$ $\forall i = 1, 2$. Por (ii) existe $W \in S$ tal que

$w \in W \subset U_1 \cap U_2$. Pela Proposição 4.1.2, $W \subset U_i$ pode ser descrito como $W = U_i W^* W$. Disso segue que $U_1 W^* W = U_2 W^* W$. Mais ainda, $x_1 = x_2 = d(w) \in d(W) = d(W^* W)$, provando que $[U_1, x_1] = [U_2, x_2]$.

Provaremos agora que ϕ é homeomorfismo. Para tanto, seja $[U, x]$ um germe em H. Já sabemos que

$$\Theta_U := \Theta(U, d(U)) = \big\{[U, y] \;\big|\; y \in d(U)\big\}$$

é uma bisseção que contém $[U, x]$. Como as bisseções formam uma base para a topologia de $\mathcal{G}$ e $\phi^{-1}(U) = \Theta_U$, temos que ϕ é contínua. Por outro lado temos $\phi^{-1}(u) = [U, d(u)]$, pois $\phi[U, x] = u$ para todo $u \in U$. Disso segue que ϕ^{-1} mapeia U para dentro da bisseção Θ_U. Portanto, basta mostrar que $\delta \circ \phi^{-1}$ é contínua, em que δ é a função source de $\mathcal{H}$. Mas essa composição, para qualquer $u \in U$ é dada por

$$\delta \circ \phi^{-1}(u) = \delta([U, d(u)]) = [U^* U, d(u)] = d(u)^1$$

ou seja, é contínua. Compondo com δ^{-1} (que existe pois δ é homeo local) temos $\delta^{-1} \circ (\delta \circ \phi^{-1}) = \phi^{-1}$ de modo que ϕ^{-1} é contínua em U. Usando o Lema da Colagem, concluímos que ϕ^{-1} é contínua em todo $\mathcal{G}$, mostrando que ϕ é homeomorfismo.

Resta mostrar que ϕ é isomorfismo de grupoides. Para tanto, tome $([U, x], [V, y]) \in \mathcal{H}^{(2)}$ e sejam $u = \phi([U, x])$ e $v = \phi([V, y])$. Assim, temos $u \in U, d(u) = x, v \in V$ e $d(v) = y$, implicando que $\theta_V(y) = r(v)$. Como $([U, x], [V, y]) \in \mathcal{H}^{(2)}$, temos que $x = \theta_V(y)$ de modo que $d(u) = r(v)$, ou seja, $(u, v) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Temos $uv \in UV$, portanto, $d(uv) = d(v) = y$. Logo,

$$\phi([U, x][V, y]) = \phi([UV, y]) = uv = \phi([U, x])\phi([V, y]).$$

Fica provado que $\mathcal{H} \cong \mathcal{G}$. ■

O que acabamos de estabelecer é que, além de o grupoide de germes associado à ação de um semigrupo inverso sobre um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff ser étale, todo grupoide étale pode ser realizado como o grupoide de germes de uma ação de um semigrupo inverso sobre um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff.

Pra finalizar, vejamos um exemplo.

Exemplo 4.1.5. *Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e o espaço topológico $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto (e a topologia discreta em $\{0, 1\}$). Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere*

$$\begin{array}{rccc} \sigma^n : & X & \longrightarrow & X \\ & (x_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_{k+n})_{k\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

[1] Aqui usamos a identificação dada pelo homeomorfismo em 3.2.12.

Definimos agora o conjunto

$$\mathcal{G} := \big\{(x, m-n, y) \;\big|\; \sigma^m(x) = \sigma^n(y)\big\} \subset X \times \mathbb{Z} \times X.$$

Também definimos

$$\mathcal{G}^{(2)} := \big\{\big((x_1, m-n, y_1), (x_2, l-k, y_2)\big) \;\big|\; y_1 = x_2\big\}$$

e as operações

- $(x_1, m-n, y_1) \cdot (x_2, l-k, y_2) = (x_1, (m+l)-(n+k), y_2)$; *e*
- $(x, m-n, y)^{-1} = (y, n-m, x)$.

Vejamos que $\mathcal{G}$ é grupoide com o espaço de pares componíveis e as operações definidas acima.

Primeiro, verifiquemos que as operações estão bem definidas. Para o produto, seja

$$\big((x_1, m-n, y_1), (x_2, l-k, y_2)\big) \in \mathcal{G}^{(2)}.$$

Assim, $y_1 = x_2$, $\sigma^m(x_1) = \sigma^n(y_1)$ e $\sigma^l(x_2) = \sigma^k(y_2)$. Disso temos

$$\sigma^{m+l}(x_1) = \sigma^l\sigma^m(x_1) = \sigma^l\sigma^n(y_1) = \sigma^l\sigma^n(x_2) = \sigma^n\sigma^l(x_2) = \sigma^n\sigma^k(y_2) = \sigma^{n+k}(y_2),$$

provando que $(x_1, (m+l)-(n+k), y_2) \in \mathcal{G}$. A boa definição da operação de inversão é imediata.

Verifiquemos agora que as operações acima satisfazem os axiomas da Definição 2.1.1.

(i) Seja $(x, m-n, y) \in \mathcal{G}$. Assim,

$$\big((x, m-n, y)^{-1}\big)^{-1} = (y, n-m, x)^{-1} = (x, m-n, y).$$

(ii) Sejam $\big((x_1, m_1-n_1, y_1), (x_2, m_2-n_2, y_2)\big)$ e $\big((x_3, m_3-n_3, y_3)(x_4, m_4-n_4, y_4)\big)$ elementos em $\mathcal{G}^{(2)}$. Assim, $y_1 = x_2$, $y_3 = x_4$, $\sigma^{m_1}(x_1) = \sigma^{n_1}(y_1)$, $\sigma^{m_2}(x_2) = \sigma^{n_2}(y_2)$, $\sigma^{m_3}(x_3) = \sigma^{n_3}(y_3)$ e $\sigma^{m_4}(x_4) = \sigma^{n_4}(y_4)$. Logo, é imediato que

$$\big((x_1, (m_1+m_2)-(n_1+n_2), y_2), (x_3, m_3-n_3, y_3)\big) \in \mathcal{G}^{(2)}$$

e

$$\big((x_1, m_1-n_1, y_1), (x_2, (m_2+m_3)-(n_2+n_3), y_3)\big) \in \mathcal{G}^{(2)}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(x_1, (m_1+m_2)-(n_1+n_2), y_2)(x_3, m_3-n_3, y_3) &= (x_1, (m_1+m_2+m_3)-(n_1+n_2+n_3), y_3)\\ &= (x_1, m_1-n_1, y_1)(x_2, (m_2+m_3)-(n_2+n_3), y_3).\end{aligned}$$

(iii) É fácil verificar que $\big((x,m-n,y)(x,m-n,y)^{-1}\big) \in \mathcal{G}^{(2)}$, *uma vez que* $(x,m-n,y)^{-1} = (y,n-m,x)$. *Agora suponha* $\big((x_1,m_1-n_1,y_1),(x_2,m_2-n_2,y_2)\big) \in \mathcal{G}^{(2)}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}\big((x_1,m_1-n_1,y_1)&(x_2,m_2-n_2,y_2)\big)(x_2,m_2-n_2,y_2)^{-1}\\ &= (x_1,(m_1+m_2)-(n_1+n_2),y_2)(y_2,n_2-m_2,x_2) = (x_1,m_1-n_1,y_1).\end{aligned}$$

A outra conta é análoga.

Segue que $\mathcal{G}$ *é um grupoide. Ademais, veja que*

$$r(x,m-n,y) = (x,0,x) \qquad e \qquad d(x,m-n,y) = (y,0,y)$$

para todo $(x,m-n,y) \in \mathcal{G}$, *de modo que*

$$\mathcal{G}^{(0)} = \big\{(x,0,x) \;\big|\; x \in X\big\} \cong X.$$

Por isso, escreveremos $r(x,m-n,y) = x$ *e* $d(x,m-n,y) = y$ *a partir de agora.*

Considere agora $\alpha, \beta \in X^*$ *em que* X^* *é o conjunto de todas as sequências finitas formadas por* 0*'s e* 1*'s. Definimos o conjunto*

$$Z(\alpha,\beta) := \big\{(\alpha x, |\alpha|-|\beta|, \beta x) \;\big|\; x \in X\big\}.$$

Verifiquemos que a família

$$\mathcal{Z} = \big\{Z(\alpha,\beta) \;\big|\; \alpha,\beta \in X^*\big\} \cup \{\emptyset\}$$

forma uma base para alguma topologia em $\mathcal{G}$, *ou seja, que satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 4.1.4.*

Para a condição (i), seja $(x,m-n,y) \in \mathcal{G}$. *Definimos* $\alpha = x_1x_2\cdots x_m$ *e* $\beta = y_1y_2\cdots y_n$. *Dessa forma, exitem* $x', y' \in X$ *tais que* $x = \alpha x'$ *e* $y = \beta y'$. *Assim,*

$$(x,m-n,y) = (\alpha x', |\alpha|-|\beta|, \beta y') \in Z(\alpha,\beta).$$

Agora para mostrar (ii), tomamos $x \in Z(\alpha,\beta) \cap Z(\gamma,\delta)$. *Disso temos que* $|\alpha| - |\beta| = |\gamma| - |\delta|$. *Se tivermos* $|\alpha| \le |\gamma|$, *também teremos* $|\beta| \le |\delta|$. *Nesse caso,* α *e* β *são subpalavras de* γ *e* δ, *respectivamente. Disso segue que* $Z(\gamma,\delta) \subset Z(\alpha,\beta)$, *de modo que* $Z(\alpha,\beta) \cap Z(\gamma,\delta) = Z(\alpha,\beta)$. *Segue que* $x \in Z(\alpha,\beta) \subset Z(\alpha,\beta) \cap Z(\gamma,\delta)$ *e (ii) é satisfeita, provando que* $\mathcal{Z}$ *é base. O caso* $|\alpha| \ge |\gamma|$ *é análogo.*

Mostraremos que $\mathcal{G}$ *é grupoide topológico com a topologia que definimos acima. Primeiro, provaremos que o produto é contínuo. Para tanto, seja* $\big((x,m-n,y),(y,k-l,z)\big) \in \mathcal{G}^{(2)}$. *Podemos assumir* $k = n$. *De fato, se* $k \le n$, *exite* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = k+p$. *Como* $\sigma^k(y) = \sigma^l(z)$, *temos* $\sigma^{k+p}(y) = \sigma^{l+p}(z)$, *de modo que* $(y,k-l,z) = (y,(k+p)-$

$(p+l), z)$. Se $n \leq k$, exite $p \in \mathbb{N}$ tal que $k = n + p$. Como $\sigma^n(y) = \sigma^m(x)$, temos $\sigma^{m+p}(y) = \sigma^{n+p}(z)$, de modo que $(x, m-n, y) = (x, (m+p)-(n+p), y)$. Assumindo $k = n$, temos

$$(x, m-n, y)(y, n-l, z) = (x, m-l, z).$$

Seja $Z(\alpha, \beta)$ aberto básico tal que $(x, m-l, z) \in Z(\alpha, \beta)$. Seja $q \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha| \leq m + q$ (e automaticamente, $|\beta| \leq l + q$. Defina $\gamma = x_1 x_2 \cdots x_{m+q}$, $\delta = y_1 y_2 \cdots y_{n+q}$ e $\lambda = z_1 z_2 \cdots z_{l+q}$. Como $|\alpha| \leq m+q$ e $|\beta| \leq l+q$, temos $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \lambda$. Além disso, como $\sigma^m(x) = \sigma^n(y) = \sigma^l(z)$, temos $\sigma^{m+q}(x) = \sigma^{n+q}(y) = \sigma^{l+q}(z)$ e, portanto,

$$(x, m-n, y) = (x, (m+q)-(n+q), y) \in Z(\gamma, \delta)$$

e

$$(y, n-l, z) = (y, (n+q)-(l+q), z) \in Z(\delta, \lambda)$$

de modo que $\big((x, m-n, y), (y, k-l, z)\big) \in (Z(\gamma, \delta) \times Z(\delta, \lambda)) \cap \mathcal{G}^{(2)}$ que é aberto de $\mathcal{G}^{(2)}$. Além disso, $Z(\gamma, \delta) Z(\delta, \lambda) = Z(\gamma, \lambda) \subset Z(\alpha, \beta)$, pois $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \lambda$. Segue que o produto é contínuo.

Para ver que a inversão é contínua, basta notar que a pré-imagem de um aberto básico $Z(\alpha, \beta)$ pela inversão coincide com $Z(\beta, \alpha)$ que é novamente um aberto básico.

Vejamos que para quaisquer $\alpha, \beta \in X^*$, tem-se que $Z(\alpha, \beta)$ é uma bisseção de $\mathcal{G}$. De fato, pela construção da topologia de $\mathcal{G}$, temos que $Z(\alpha, \beta)$ é aberto e, se

$$\beta x_1 = d(\alpha x_1, |\alpha| - |\beta|, \beta x_1) = d(\alpha x_2, |\alpha| - |\beta|, \beta x_2) = \beta x_2,$$

temos $x_1 = x_2$, de modo que d é injetora. Para a função range é análogo. Além disso,

$$d\big(Z(\alpha, \beta)\big) = Z(\beta, \beta)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} d(\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x) &= (\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x)^{-1} (\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x) \\ &= (\beta x, |\beta| - |\alpha|, \alpha x)(\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x) = (\beta x, 0, \beta x). \end{aligned}$$

Isso mostra que d é um homeomorfismo local e, um argumento análogo mostra que r também é um homeomorfismo local. Como $\mathcal{G}^{(0)}$ é homeomorfo à $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ que é localmente compacto e Hausdorff, segue que $\mathcal{G}$ é um grupoide étale.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{Z} := \big\{ Z(\alpha, \beta) \;\big|\; \alpha, \beta \in X^* \big\} \cup \{\emptyset\}$ é um semigrupo inverso com a operação

$$Z(\alpha, \beta) Z(\gamma, \delta) = \begin{cases} Z(\alpha\gamma', \delta) & \text{se } \gamma = \beta\gamma', \\ Z(\alpha, \delta\beta') & \text{se } \beta = \gamma\beta', \\ \emptyset, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$

Além disso, os inversos são dados por $Z(\alpha,\beta)^* = Z(\beta,\alpha)$.

É claro que $Z(\alpha,\beta)^* = Z(\beta,\alpha)$. *Para o produto, façamos as contas. Vejamos que* $Z(\alpha,\beta)Z(\gamma,\delta) = Z(\alpha\gamma',\delta)$ *se* $\gamma = \beta\gamma'$. *Os demais casos são análogos. De fato, sejam* $(\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x) \in Z(\alpha,\beta)$ *e* $(\gamma y, |\gamma| - |\delta|, \delta y) \in Z(\gamma,\delta)$ *tais que* $\beta x = \gamma y$. *Observe que* $\beta x = \beta\gamma' y$ *pois* $\gamma = \beta\gamma'$. *Assim,* $x = \gamma' y$. *Além disso,*

$$|\alpha\gamma'| - |\delta| = |\alpha| + |\gamma'| - |\delta| = |\alpha| + |\gamma| - |\beta| - |\delta|.$$

Logo,

$$(\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x) \cdot (\gamma y, |\gamma| - |\delta|, \delta y) = (\alpha x, |\alpha| + |\gamma| - |\beta| - |\delta|, \delta y) = (\alpha\gamma' y, |\alpha\gamma'| - |\delta|, \delta y)$$

que pertence a $Z(\alpha\gamma',\delta)$. *A continência contrária é similar ao caminho inverso do argumento que acabamos de fazer.*

Denotaremos $d(Z(\alpha,\beta)) = Z(\beta,\beta)$ *e* $r(Z(\alpha,\beta)) = Z(\alpha,\alpha)$ *por* Z_β *e* Z_α *respectivamente. Por fim, vamos construir uma ação de* Z *em* X, *dada da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rccc} \theta_{Z(\alpha,\beta)}: & Z_\beta & \longrightarrow & Z_\alpha \\ & \beta x & \longmapsto & \alpha x. \end{array}$$

Como $r|_{Z(\alpha,\beta)}(d|^{-1}_{Z(\alpha,\beta)}(\beta x)) = r|_{Z(\alpha,\beta)}(\alpha x, |\alpha| - |\beta|, \beta x) = \alpha x$, *podemos usar o Teorema 4.1.4, para garantir que esta é de fato uma ação de semigrupo inverso.*

Finalmente temos todas as hipóteses para garantir, pelo Teorema 4.1.4, que o grupoide de germes associado a ação θ *de* ($\mathcal{Z}$ *em* X) *é isomorfo ao grupoide*

$$\mathcal{G} := \left\{(x, m-n, y) \;\middle|\; \sigma^m(x) = \sigma^n(y)\right\}.$$

5 Conclusão

O trabalho mostrou a interessante relação entre grupoides étale e ações de semigrupos inversos em espaços topológicos, podendo-se construir um a a partir do outro. Além disso, o teorema 4.1.4, que provamos no capítulo 4, diz que todo grupoide étale é um grupoide de germes (produto semidireto) de uma ação de semigrupo inverso em um espaço topológico. O teorema também é fortemente usado na classificação de C^*-álgebras de grupoides étale.

Com esse estudo, tive a chance de estudar assuntos que me interessavam e ver como álgebra, topologia e análise tem uma grande intersecção e experimentar as três trabalhando juntas, além de me preparar para o estudo de Álgebras de Operadores.

Como perspectivas futuras, é natural explorar a relação entre grupoides étale e C^*-álgebras, em especial no contexto de grupoides de germes associados a ações de semigrupos inversos.

Referências

BONI, B. G. Globalização de ações parciais de semigrupos inversos em conjuntos. Universidade Federal de Santa Catarina, 2024. 2024.

EXEL, R. Inverse semigroups and combinatorial c*-algebras. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, Springer, v. 39, p. 191–313, 2008.

GOULD, V.; HOLLINGS, C. Partial actions of inverse and weakly left e-ample semigroups. Journal of the australian mathematical society, Cambridge University Press, v. 86, n. 3, p. 355–377, 2009.

LAWSON, M. V. Inverse semigroups, the theory of partial symmetries. [S.l.]: World Scientific, 1998.

MUNKRES, J. Topology james munkres second edition. 2000.

PATERSON, A. Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 170.

WILLARD, S. General topology. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.