Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Programa de Bacharelado em Matemática

Carolina Takeda Barbosa

Atratores pullback para sistemas dinâmicos não autônomos e aplicações a um modelo SIR

Florianópolis
2025

Carolina Takeda Barbosa

Atratores pullback para sistemas dinâmicos não autônomos e aplicações a um modelo SIR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para a Coordenação do curso de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.
Orientador: Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa.

Florianópolis
2025

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Takeda Barbosa, Carolina
Atratores pullback para sistemas dinâmicos não autônomos e aplicações a um modelo SIR / Carolina Takeda Barbosa ; orientador, Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa, 2025.
67 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Graduação em Matemática - Bacharelado, Florianópolis, 2025.

Inclui referências.

1. Matemática - Bacharelado. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Atratores pullback. 4. Processos de evolução. 5. SIR. I. do Nascimento Oliveira Sousa, Alexandre. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Matemática - Bacharelado. III. Título.

Carolina Takeda Barbosa

Atratores pullback para sistemas dinâmicos não autônomos e aplicações a um modelo SIR

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa
Universidade Federal de Santa Catarina

Matheus Cheque Bortolan
Universidade Federal de Santa Catarina

Paulo Mendes de Carvalho Neto
Universidade Federal de Santa Catarina

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Paulo Mendes de Carvalho Neto
Data: 08/12/2025 20:06:29-0300
CPF: ***.211.858-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Lopes Castro
Data: 09/12/2025 18:40:59-0300
CPF: ***.060.710-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Felipe Lopes de Castro
Coordenador do Curso

GOV.BR
Documento assinado digitalmente
ALEXANDRE DO NASCIMENTO OLIVEIRA SOUSA
Data: 09/12/2025 09:00:21-0300
CPF: ***.839.241-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa
Orientador

Florianópolis, 27 de novembro de 2025

Dedico este trabalho à minha esposa, Isabela Finco, minha companheira de vida e maior incentivadora, e à minha mãe, cujo amor e dedicação sempre me sustentaram. Este trabalho é fruto da força e do apoio de vocês.

AGRADECIMENTO

Agradeço especialmente ao professor Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa, que me orientou por mais de dois anos e desempenhou essa função com dedicação, paciência e amizade. Aos meus colegas Eduardo Teixeira de Oliveira e Guilherme de Oliveira Cunha, pela parceria nessa jornada, que possibilitou não apenas a realização deste trabalho, mas também uma compreensão mais aprofundada da teoria de atratores para semigrupos e do modelo SIR autônomo.

Sou grata também pelas oportunidades que a UFSC me proporcionou e também ao FNDE e ao CNPQ por meio das bolsas do PET Matemática, da monitoria e da iniciação científica — experiências que contribuíram profundamente para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Agradeço igualmente aos professores que auxiliaram na minha formação e se dedicaram para além de suas obrigações.

Agradeço à minha mãe, Mary Takeda, por acreditar em mim e me incentivar a sempre buscar meus sonhos.

Por último, agradeço à minha esposa, que esteve ao meu lado em todos os momentos: estudando comigo para provas, oferecendo apoio emocional, ajudando no dia a dia e, sobretudo, demonstrando paciência durante os períodos em que minha ausência foi necessária para a conclusão desta graduação.

RESUMO

O estudo concentrou-se na análise qualitativa de equações diferenciais ordinárias (EDOs), por meio de teoremas de boa colocação local e global de soluções, isto é, resultados envolvendo existência, unicidade e continuidade em relação às condições iniciais e aos parâmetros do sistema. Em seguida, para investigar o comportamento assintótico de sistemas com dependência temporal, utilizamos a teoria de processos de evolução, que estende a teoria clássica de semigrupos e permite a formulação rigorosa do conceito de atrator pullback. Estabelecemos condições gerais para a existência desses atratores, que descrevem o comportamento de longo prazo de sistemas dinâmicos.

Por fim, aplicamos esses resultados ao modelo epidemiológico SIR com taxa de transmissão e de nascimento dependentes do tempo, demonstrando que o problema é bem posto e que o conjunto de soluções não negativas é positivamente invariante, garantindo a existência de um sistema dinâmico que descreve o comportamento assintótico do modelo, o qual chamamos de processo de evolução. Mostramos ainda que o processo de evolução possui um atrator pullback e determinamos condições sob as quais a doença é erradicada ou persiste, em função da média temporal da taxa de transmissão e seus parâmetros.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, Processos de evolução, Atratores pullback, Modelos epidemiológicos, SIR.

Lista de Figuras

Sumário

Notações

$\mathbb{N}$ Conjunto dos números naturais incluindo o zero, ou seja, $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

$\mathbb{N}^*$ Conjunto dos números naturais sem o zero, ou seja, $\{1, 2, \ldots\}$.

(a, b) Intervalo aberto definido por $a < b$, ou seja, $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

$B_r(x)$ Bola de centro $x \in X$ (em que (X, d) é espaço métrico) e raio $r > 0$, ou seja, $\{y \in X \mid d(y, x) < r\}$.

$\langle x, y\rangle$ Produto interno entre os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, ou seja, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ então

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$f^{(d)}$ d-ésima derivada de $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, em que $d \in \mathbb{N}^*$.

$\blacksquare$ Indica que a demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário está concluída.

Introdução

A teoria matemática de equações diferenciais e sistemas dinâmicos constitui uma ferramenta fundamental para a modelagem de fenômenos naturais e sociais que evoluem no tempo. Quando os parâmetros que regem um sistema variam com o tempo, torna-se necessário recorrer a abordagens que considerem essa dependência temporal de forma explícita. Este trabalho fundamenta-se em duas teorias matemáticas complementares que fornecem a base teórica necessária para a análise desse tipo de comportamento.

Primeiramente, a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias (EDOs) oferece as ferramentas essenciais para estabelecer a existência, unicidade e dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais e aos parâmetros do sistema. Essa teoria constitui o alicerce para garantir que os modelos matemáticos sejam bem colocados, isto é, que possuam solução única e estável sob pequenas perturbações nas condições iniciais. Além disso, a teoria qualitativa permite compreender o comportamento local das soluções sem a necessidade de resolvê-las explicitamente, o que é especialmente importante, dado que a maioria dos sistemas não lineares não admite soluções analíticas.

Em seguida, a teoria de processos de evolução amplia esses conceitos, permitindo o estudo do comportamento assintótico de sistemas com parâmetros variáveis no tempo. Diferentemente da teoria clássica de semigrupos, cuja dinâmica independe do instante inicial, os processos de evolução possibilitam analisar sistemas cuja trajetória depende tanto do instante inicial quanto do final. Essa distinção é relevante para aplicações práticas. Em um modelo epidemiológico com taxa de transmissão sazonal, por exemplo, a evolução da doença iniciada no inverno pode diferir daquela iniciada no verão, mesmo que o intervalo de tempo considerado seja o mesmo. Nesse contexto, a teoria de processos de evolução fornece o arcabouço necessário para definir rigorosamente o conceito de atrator pullback, que generaliza a noção clássica de atrator global.

Essas ferramentas teóricas têm aplicação direta na modelagem matemática de epidemias, permitindo descrever a evolução temporal de uma doença, prever seu comportamento assintótico e identificar condições críticas para sua persistência ou extinção.

Portanto, este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No **Capítulo 1**, baseado em Viana and Espinar [2011] apresentamos resultados de boa colocação para EDOs, isto é, teoremas de existência, unicidade local e global, e dependência contínua com relação a paramêtros.

- No **Capítulo 2** apresentamos os conceitos de atratores pullback para processos de evolução e teoremas que garantem a existência de tais objetos, fundamentando-nos em Carvalho et al. [2013].

- Por fim, no **Capítulo 3**, abordamos a aplicação da teoria ao modelo SIR com parâmetros variáveis no tempo, seguindo a linha de desenvolvimento proposta em Lópes-de-La-Cruz and Oliveira-Sousa [2025].

1 Boa colocação para EDOs

A teoria qualitativa de EDOs busca entender o comportamento das soluções sem recorrer a expressões explícitas. Estuda-se, por exemplo, existência, unicidade e estabilidade das soluções, bem como a estrutura das trajetórias no espaço de fases. Esta abordagem será desenvolvida com base em Viana and Espinar [2011].

Definição 1.0.1. *Uma **equação diferencial ordinária**, ou simplesmente uma **EDO**, é qualquer expressão da forma*

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, x^{(k)}) = 0,$$

*em que $F : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{1+kn}$, com t tomando valores em $\mathbb{R}$ e as variáveis $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ e $x^{(k)}$ tomando valores em $\mathbb{R}^n$. Os valores k e n são denominados, respectivamente, a **ordem** e a **dimensão** da equação diferencial. Neste trabalho usaremos EDOs semi-lineares, ou seja, equações que podem ser descritas da forma*

$$x^{(k)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

Vale destacar que a notação acima será recorrente ao longo desta seção.

Exemplo 1.0.2. *A equação diferencial ordinária*

$$x''(t) = k_1 k(t) + t^3.$$

Pode ser escrita como

$$x^{(2)} = F(t, x).$$

Com $F(t, x) = k_1 x + t^3$. Assim, a EDO acima possui ordem 2 e dimensão 1.

Definição 1.0.3. *Se o campo de vetores $F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$ não depende da variável t dizemos que a equação diferencial é **autônoma**. Caso contrário, dizemos que a EDO é **não autônoma**.*

Definição 1.0.4. *Um **problema de valor inicial (PVI)** é composto por uma equação diferencial junto com o estabelecimento do valor das funções desejadas em um ponto t_0:*

$$\begin{cases} x^{(k)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}), \\ x(t_0) = x_0, \\ x'(t_0) = x_1, \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}. \end{cases}$$

Definição 1.0.5. *Uma **solução** de uma equação diferencial, como apresentada acima, é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ k-vezes diferenciável tal que*

1. *I é um intervalo aberto.*
2. *$v(t) = \left(t, \gamma(t), \dfrac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \dfrac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}}(t)\right) \in U$, $\forall t \in I$.*
3. *$\dfrac{d^k\gamma}{dt^k}(t) = F(v(t))$, $\forall t \in I$.*

1.1 Soluções locais

Esta seção tem como objetivo investigar a existência e a unicidade de soluções de EDOs de primeira ordem $k = 1$. Partimos da pergunta fundamental: "toda equação diferencial tem solução? E, se tem, ela é única?". Veremos que, sob hipóteses apropriadas, essas questões podem ser respondidas afirmativamente. Para isso, revisitaremos conceitos importantes e apresentaremos algumas demonstrações. Considere a equação diferencial

$$x' = F(t, x) \tag{1.1.1}$$

Definição 1.1.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função. f é dita uma **contração** se existir $\lambda < 1$ tal que para quaisquer $x_1, x_2 \in X$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y).$$

*A constante λ é chamada de **taxa de contração de** f.*

Teorema 1.1.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam X um espaço métrico completo e não vazio com uma métrica d e $f : X \to X$, uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Considere λ a taxa de contração de f. Seja $x_0 \in X$ e tome a sequência em X definida por $x_{n+1} = f(x_n)$. Então,

$$\begin{aligned} &d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \lambda\, d(x_0, x_1), \\ &d(x_1, x_2) \leq \lambda\, d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Realizando um processo similar, temos:

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda\, d(x_1, x_2) \leq \lambda^2\, d(x_0, x_1).$$

De forma geral, podemos concluir que:

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \lambda^n\, d(x_0, x_1).$$

Queremos agora mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) \\ &\vdots \\ d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) &\leq \lambda^{n+p-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Assim temos,

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+p-1}) d(x_0, x_1).$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, temos

$$\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+p-1} = \lambda^n \left(\frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \right) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}.$$

Logos, obtemos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ chegamos a:

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1) = 0.$$

Assim, concluímos de fato que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em X. Como, (X, d) é completo, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em X. Ou seja, existe $a \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Assim, tomando o limite na equação $f(x_n) = x_{n+1}$ e notando que toda contração é contínua obtemos

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(a)$$

Portanto, a é ponto fixo de f. Agora mostremos que esse ponto fixo é único. Suponha que existam dois pontos fixos $a, b \in X$, ou seja,

$$f(a) = a \quad \text{e} \quad f(b) = b.$$

Então, pela propriedade de contração de f, temos:

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda\, d(a, b),$$

onde $0 \leq \lambda < 1$.

Rearranjando,

$$d(a, b) \leq \lambda\, d(a, b).$$

Como $\lambda < 1$, a única possibilidade para essa desigualdade ser verdadeira é:

$$d(a, b) = 0,$$

o que implica que

$$a = b.$$

Portanto, o ponto fixo de f é único.

■

Definição 1.1.3. *Uma função $F : X \to Y$ entre dois espaços métricos é dita ser* ***Lipschitz****, se existir uma constante*

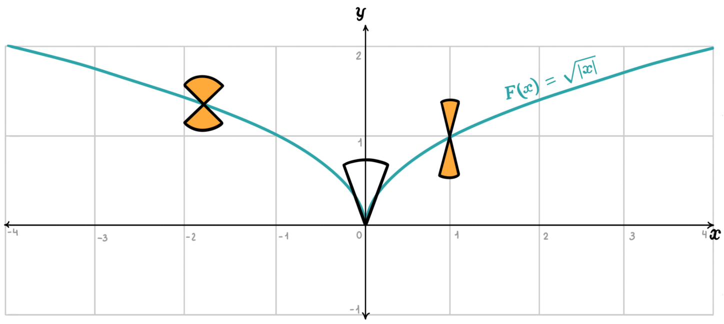
$c > 0$ *tal que, para quaisquer* $x_1, x_2 \in X$, *temos que*

$$d_Y(F(x_1), F(x_2)) \leq c\, d_X(x_1, x_2).$$

A constante c *é chamada de* ***constante de Lipschitz****.*

Exemplo 1.1.4. *Uma interpretação geométrica para uma função Lipschitziana em espaços euclidianos é: existe algum cone vertical tal que quando colocamos o seu vértice em qualquer ponto* $(x_1, F(x_1))$ *voltado para cima ou para baixo, temos que o cone intersepta o gráfico apenas nesse ponto. A figura abaixo ilustra essa propriedade na função* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) = \sqrt{|x|}$. *Note que* F *não é lipschiziana em* $x = 0$, *mas é em todo ponto em sua vizinhança.*

Figura 1.1.1: Cone duplo no gráfico da função $F(x) = \sqrt{|x|}$



Fonte: Viana and Espinar [2011]

Definição 1.1.5. *Uma função* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *é* ***localmente Lipschitz em*** x *se para todo* $(t_0, x_0) \in U$, *existe* $\delta := \delta(t_0, x_0) > 0$ *e* $c := c(t_0, x_0) > 0$ *tais que* $\overline{B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0)} \subset U$ *e*

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|,$$

para quaisquer $t \in \overline{B_\delta(t_0)}$ *e* $x_1, x_2 \in \overline{B_\delta(x_0)}$.

Lema 1.1.6. *Se* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *é contínua e localmente Lipschitz em* x, *então para qualquer compacto* $K \subset U$, *existe* $c := c(K) > 0$ *tal que, se tivermos* $(t, x), (t, y) \in K$,

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Demonstração. Suponha, para obter contradição, que para cada $n \geq 1$, existam $(t_n, x_n), (t_n, y_n) \in K$ tais que

$$\|F(t_n, x_n) - F(t_n, y_n)\| > n\|x_n - y_n\|.$$

Como F é contínua e K compacto. Existe $M > 0$ tal que

$$\|F(t, x)\| \leq M \quad \text{para todo } (t, x) \in K.$$

Portanto, $\|x_n - y_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, como f é limitada, temos que

$$\|F(t_n, x_n) - F(t_n, y_n)\| \leq 2M.$$

Além disso,

$$2M \geq \|F(t_n, x_n) - F(t_n, y_n)\| > n\|x_n - y_n\|,$$

então

$$n\|x_n - y_n\| < 2M \quad \Rightarrow \quad \|x_n - y_n\| < \frac{2M}{n}.$$

Logo,

$$\|x_n - y_n\| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Novamente se utilizando da compacidade de K, podemos supor que (t_n, x_n) converge para algum ponto $(\bar{t}, \bar{x}) \in K$, passando para uma subsequência se necessário. Mas então (t_n, y_n) deve convergir para esse mesmo ponto, o que implica que F não é Lipschitz em x em nenhuma vizinhança de $(\bar{t}, \bar{x})$, o que é um absurdo. ∎

Teorema 1.1.7 (Teorema de Picard)**.** *Suponha que $F : U \to \mathbb{R}^n$ é contínua e localmente Lipschitz em relação à x. Então*

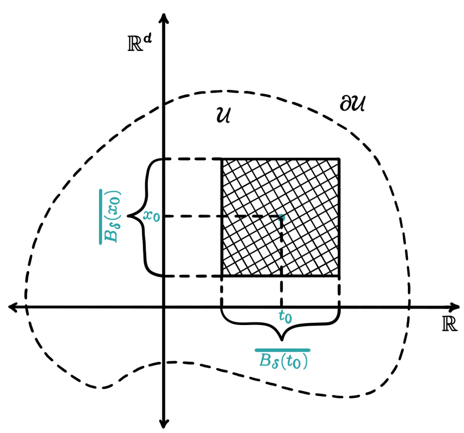
1. *Para todo $(t_0, x_0) \in U$ existem algum intervalo aberto I e alguma solução $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ da equação diferencial (1.1.1) tal que $t_0 \in I$ e $\gamma(t_0) = x_0$;*

2. *Se $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ são soluções e existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

Nas condições do primeiro item, dizemos que γ é solução da EDO com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$.

Demonstração. 1. Dado qualquer $(t_0, x_0) \in U$, fixe $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$.

Figura 1.1.2: Ilustração da condição de δ



Fonte: Viana and Espinar [2011]

Como F é localmente Lipschitz em x e o conjunto $\overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}$ é compacto, segue do Lema 1.1.6 que existe $C(\delta) > 0$ tal que

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leq C(\delta)\|x_1 - x_2\| \tag{1.1.2}$$

para quaisquer $(t,x_1),(t,x_2) \in \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}$. Seja

$$M(\delta) = \sup\{\|F(t,x)\| : (t,x) \in \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}\}. \tag{1.1.3}$$

Dado qualquer $\varepsilon \leq \delta$, defina o espaço

$$Y = Y(t_0,x_0,\delta,\varepsilon) := \{\phi : (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to \overline{B_\delta(x_0)} \text{ contínua} : \phi(t_0) = x_0\}$$

com a distância

$$d(\phi_1,\phi_2) = \sup\{\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| : t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\}$$

Mostremos que Y é completo. Seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (Y,d), isto é, dado $\eta > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\phi_n - \phi_m) < \eta$ para todo $m,n \geq N_0$. Fixado $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, a sequência $(\phi_n(t))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, e como $\mathbb{R}^n$ é completo, existe $\phi(t) := \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$. Assim, definimos $\phi : (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \to \overline{B_\delta(x_0)}$, e como $\overline{B_\delta(x_0)}$ é fechado, temos $\phi(t) \in \overline{B_\delta(x_0)}$ para todo t. Mostremos agora que a convergência é uniforme. Dado $\varepsilon > 0$, escolha N_0 tal que $d(\phi_m - \phi_n) < \varepsilon/2$ para todo $m,n \geq N_0$. Fixado $K \geq N_0$ e $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, temos $\|\phi_K(t) - \phi(t)\| \leq \|\phi_K(t) - \phi_n(t)\| + \|\phi_n(t) - \phi(t)\|$. Como $\phi_n(t) \to \phi(t)$, existe $N(t)$ tal que $\|\phi_n(t) - \phi(t)\| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N(t)$. Para $k \geq \max\{N_0, N(t)\}$, obtemos $\|\phi_K(t) - \phi(t)\| < \varepsilon$ e para todo $k \geq N_0$. Logo, $\phi_k \to \phi$ uniformemente. Como o limite uniforme de funções contínuas é contínuo, ϕ é contínua, satisfaz $\phi(t_0) = x_0$ e $\phi(t) \in \overline{B_\delta(x_0)}$ para todo t. Assim, $\phi \in Y$ e (Y,d) é completo.

Agora, considere o operador de Picard, definido por

$$\mathcal{L}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\gamma(s)), \quad \text{para } \gamma \in Y.$$

Afirmação: Para ε suficientemente pequeno está bem definido $\mathcal{L}$ no espaço (Y,d).

De fato, a integral está bem definida, uma vez que F é contínua e o domínio de integração é limitado. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a aplicação $t \mapsto \mathcal{L}(\gamma)(t)$ é contínua. Além disso,

$$\mathcal{L}(\gamma)(t_0) = x_0.$$

Note que,

$$\|\mathcal{L}(\gamma)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(s,\gamma(s))\, ds \right\| \leq M(\delta)|t - t_0| < M(\delta)\varepsilon,$$

para todo $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$. Supondo que

$$\varepsilon \leq \frac{\delta}{M(\delta)},$$

segue que $\mathcal{L}(\gamma)(t) \in B_\delta(x_0)$ para todo $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$. Estas observações mostram que $\mathcal{L}(\gamma) \in Y$ para todo $\gamma \in Y$.

Mostremos que existe ε tal que $\mathcal{L}$ é uma contração. Dados quaisquer $\gamma_1, \gamma_2 \in Y$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}(\gamma_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [F(s,\gamma_1(s)) - F(s,\gamma_2(s))]\, ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s,\gamma_1(s)) - F(s,\gamma_2(s))\|\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} C(\delta)\|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|\, ds \\
&\leq C(\delta) d(\gamma_1,\gamma_2)(t - t_0),
\end{aligned}$$

para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Portanto,

$$d(\mathcal{L}(\gamma_1), \mathcal{L}(\gamma_2)) \leq \lambda d(\gamma_1,\gamma_2), \quad \text{com } \lambda = C(\delta)\varepsilon,$$

e assim $\mathcal{L}$ é uma contração, desde que $\lambda < 1$, ou seja, $\varepsilon < 1/C(\delta)$. Isso mostra a afirmação. Aplicando o Teorema 1.1.2 à transformação $\mathcal{L} : (Y,d) \to (Y,d)$, obtemos que existe uma única aplicação contínua,

$$\gamma_0 : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \overline{B_\delta(x_0)}$$

tal que

$$\gamma_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\gamma_0(s)) ds \quad \text{para todo } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

Em particular, $\gamma(t_0) = x_0$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que γ_0 é diferenciável e

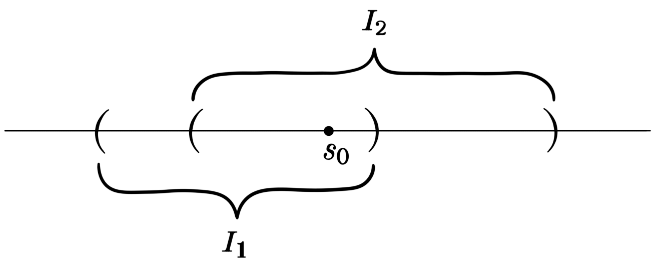
$$\gamma_0'(t) = F(t,\gamma_0(t)) \quad \text{para todo } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

2. Sejam $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ duas soluções quaisquer tais que

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) \text{ para algum } t_0 \in I_1 \cap I_2,$$

como ilustrado na figura abaixo. Considere $I = \{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$. Por definição, o conjunto I é não vazio e fechado em $I_1 \cap I_2$. Afirmamos que I também é aberto em $I_1 \cap I_2$. Isto implicará que $I = I_1 \cap I_2$, que é precisamente o que queremos mostrar.

Figura 1.1.3: Ponto comum nos intervalos de definição



Fonte: Viana and Espinar [2011]

Para provar a afirmação, considere qualquer $s_0 \in I$. Então,

$$\gamma_1(s_0) = y_0 = \gamma_2(s_0) \text{ para algum } (s_0, y_0) \in \mathcal{U}.$$

Pela construção do parágrafo anterior aplicada a (s_0, y_0), encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{L} : Y(s_0, y_0, \delta, \epsilon) \to Y(s_0, y_0, \delta, \epsilon)$$

é uma contração e, portanto, admite um único ponto fixo, qualquer que seja ε suficientemente pequeno. Para qualquer $j \in \{1, 2\}$, é claro que a restrição $\gamma_j|_{(s_0-\epsilon, s_0+\epsilon)}$ está em $Y(s_0, y_0, \delta, \varepsilon)$ desde que ε seja suficientemente pequeno. Além disso, a hipótese acarreta que

$$\gamma_j'(t) = F(t, \gamma_j(t)) \text{ para todo } t \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon).$$

Isto significa que $\gamma_j|(s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ é ponto fixo de $\mathcal{L} : Y(s_0, y_0, \delta, \epsilon) \to Y(s_0, y_0, \delta, \epsilon)$ para $j = 1, 2$. Por unicidade do ponto fixo, segue que

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \text{ para todo } t \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon).$$

Isto prova que I é aberto, tal como afirmamos. Além disso, $I_1 \cap I_2$ é conexo, logo $I = I_1 \cap I_2$. Portanto, a demonstração do teorema está completa.

■

Note que a construção do teorema anterior fornece soluções definidas apenas em uma vizinhança do tipo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, onde $\varepsilon < \min\{1/C(\delta), \delta/M(\delta)\}$. O que possivelmente pode ser muito pequeno. Levantando uma questão natural: seria possível estender a solução para um intervalo maior?

Agora traremos alguns resultados que iremos utilizar para enfraquecer uma das restrições impostas sobre $\varepsilon > 0$ na demonstração anterior.

Lema 1.1.8. *Para qualquer $\varepsilon > 0$ satisfazendo*

$$\varepsilon \le \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M(\delta)}\right\},$$

existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}^k$ é uma contração.

Demonstração. A hipótese garante que o operador $\mathcal{L}$ está bem definido. Assim, para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}^n(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}^n(\gamma_2)(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(s_1, \mathcal{L}^{n-1}(\gamma_1)(s_1)) - F(s_1, \mathcal{L}^{n-1}(\gamma_2)(s_1))\| ds_1 \right| \\ &\leq C(\delta) \left| \int_{t_0}^{t} \|\mathcal{L}^{n-1}(\gamma_1)(s_1) - \mathcal{L}^{n-1}(\gamma_2)(s_1)\| ds_1 \right|\end{aligned}$$

Logo, por indução,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}^n(\gamma_1)(t) - \mathcal{L}(\gamma_2)(t)\| &\leq C(\delta)^2 \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \|\mathcal{L}^{n-2}(\gamma_1)(s_2) - \mathcal{L}^{n-2}(\gamma_2)(s_2)\| ds_2\, ds_1 \right| \\ &\vdots \\ &\leq C(\delta)^n \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{n-1}} \|\gamma_1(s_n) - \gamma_2(s_n)\| ds_n \ldots ds_2\, ds_1 \right|\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \left| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \cdots \int_{t_0}^{s_{n-1}} ds_n \ldots ds_2\, ds_1 \right| &\leq C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \frac{|t - t_0|^n}{n!} \\ &\leq C(\delta)^n d(\gamma_1, \gamma_2) \frac{\varepsilon^n}{n!}\end{aligned}$$

Logo, para k suficientemente grande, temos que

$$\frac{(C(\delta)\varepsilon)^k}{k!} < 1.$$

Então, $\mathcal{L}^k$ é uma contração ■

Lema 1.1.9. *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Se $T : X \to X$ é uma função contínua tal que T^k é uma contração para algum $k \in \mathbb{N}$, então existe um único $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = x_0$.*

Demonstração. Por hipótese, $T^k : X \to X$ é uma contração, ou seja, existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(T^k(x), T^k(y)) \leq \lambda\, d(x, y), \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $x_0 \in X$ tal que

$$T^k(x_0) = x_0,$$

Queremos mostrar que x_0 é também ponto fixo de T. Note que, para $y := T(x_0)$,

$$T^k(y) = T^{k+1}(x_0) = T(T^k(x_0)) = T(x_0) = y.$$

Assim, y é ponto fixo de T^k. Pela unicidade do ponto fixo de T^k, concluímos que

$$T(x_0) = y = x_0.$$

■

Lema 1.1.10. *Sob as condições do Teorema 1.1.7, dado qualquer $(t_0, x_0) \in U$, tome $\delta > 0$, $M(\delta)$ como no início da demonstração. Para qualquer $\varepsilon > 0$ que satisfaz*

$$\varepsilon \leq \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M(\delta)}\right\}, \tag{1.1.4}$$

existe uma única solução γ definida no intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_o + \varepsilon)$ que satisfaz a condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$.

Demonstração. Combinando os dois fatos provados acima, concluímos que se $\varepsilon > 0$ satisfaz 1.1.4, então $\mathcal{L}$ tem um único ponto fixo $\gamma_0 \in Y$ e que $\mathcal{L}^n(\gamma) \to \gamma_0$, para todo $\gamma \in Y$. A partir daqui, podemos realizar uma demonstração perfeitamente análoga à parte *(1)* do Teorema 1.1.7 para obter o resultado desejado. ■

1.2 Teorema de Peano

Nesta seção vamos mostrar que a continuidade da F é suficiente para garantir a existência de soluções da equação (1.1.1). Para isso, usaremos alguns resultados que nos auxiliarão na demonstração do teorema.

Teorema 1.2.1 (Regra de Leibniz)**.** *Seja $f(t,x)$ uma função tal que tanto $f(t,x)$ quanto sua derivada parcial $f_x(x,t)$ sejam contínuas em x em um compacto K contido no domínio da f. Então*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_K f(t,x)\,dt\right) = \int_K f_x(t,x)\,dt.$$

Teorema 1.2.2 (Teorema de Ascoli–Arzelà)**.** *Seja $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de funções que satisfazem:*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in [a,b]$ se $|x-y| < \delta$ então $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|f_n(x)\| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Então existe $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência uniformemente convergente

Teorema 1.2.3 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$, definidas em um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, tal que $f_n(x) \to f(x)$ quase em todo $x \in X$. Suponha que existe uma função integrável $g : X \to [0,\infty)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $x \in X$, então:*

1. *A função f é mensurável e integrável;*
2. $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$;

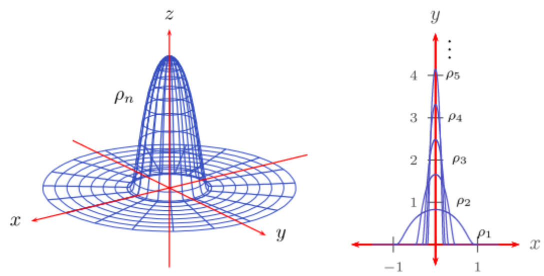
Proposição 1.2.4. *Sejam $a, b \geq 1$ e $f : U \to \mathbb{R}^b$ uma função contínua definida num aberto U de $\mathbb{R}^a$. Então existem funções $f_n : U_n \to \mathbb{R}^b$, $n \geq 1$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que:*

1. *$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de abertos tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$;*
2. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em cada compacto $K \subset U$.*

Demonstração. Considere uma sequência qualquer $\rho_n : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}$ de funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que:

- $\rho_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^a$;
- $\rho_n(x) = 0$ sempre que $\|x\| \geq 1/n$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(x)dx = 1$.

Figura 1.2.1: Representações gráficas de ρ_n



Fonte: Viana and Espinar [2011]

Para cada $n \geq 1$, defina

$$U_n = \{x \in U : \text{a bola fechada de centro } x \text{ e raio } \frac{1}{n} \text{está contida em } U.\}$$

Note que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de abertos cuja união coincide com U. Defina $f_n : U_n \to \mathbb{R}^b$ por

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(y)f(x+y)dy.$$

Mostremos que para cada n, a função f_n está bem definida. Note que $f(x+y)$ não faz sentido quando $x+y$ não está em U. Por outro lado, como consideramos $x \in U_n$, isso só pode acontecer se $\|y\| \geq 1/n$ e, nesse caso, $\rho_n(y) = 0$. Então, convencionamos que $\rho_n(y)f(x+y) = 0$ sempre que $x+y$ não está em U. Dessa forma, f_n fica bem definida pois a função

$$y \mapsto \rho_n(y)f(x+y)$$

é contínua. Seja K um subconjunto compacto qualquer de U. Por continuidade, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(x^*)\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in X \text{ e todo } x^* \in U \text{ com } \|x - x^*\| < \delta.$$

Considere n suficientemente grande para que $K \subset U_n$ e $1/n < \delta$. Então,

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - f(x)\| &= \| \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \rho_n(y)f(x)dy\rho_n(y)f(x+y)dy - \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \rho_n(y)f(x)dy\| \\
&\leq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \rho_n(y)\|f(x+y)\|dy \\
&\leq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \rho_n(y)\varepsilon dy = \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $x \in K$. Isto prova que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em cada compacto K. Mostremos que

f_n é de classe $\mathcal{C}^\infty$. Para isto, fazemos a mudança de variável $z = x + y$ na integral, obtendo

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^a} \rho_n(z - x) f(z) dz.$$

Note que após a mudança de variáveis, apenas ρ_n depende explicitamente de x. Deste modo, o integrando é diferenciável em relação a x, tantas vezes quanto ρ_n. O Teorema da Regra de Leibniz (1.2.1) afirma que, sob certas condições adicionais, f_n será diferenciável até a ordem que ρ_n o for e sua derivada será dada por

$$Df_n(x) = \int_{\mathbb{R}^a} -D\rho_n(z - x) f(y)\, dz \tag{1.2.1}$$

Mais ainda, iterando este procedimento, resulta que a função f_n é de classe C^k, com

$$D^k f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^a} (-1)^k D^k \rho_n(z - x) f(z)\, dz, \quad \text{para todo } k \geq 1. \tag{1.2.2}$$

Precisamos verificar que estamos realmente nas condições em que a Regra de Leibniz pode ser aplicada, especialmente quando consideramos um domínio de integração ilimitado. Isto pode ser feito da seguinte forma. Dado qualquer $x_0 \in U_n$, fixe uma vizinhança V de x_0 contida em U_n e um compacto $K \subset U$ tal que a bola fechada de raio $1/n$ em torno de todo ponto de V está contida em K. Então,

$$f_n(x) = \int_K \rho_n(z - x) f(z) dz, \quad \text{para todo } x \in V.$$

O domínio de integração é compacto, o integrando é contínuo e derivável em respeito a x e esta derivada também é contínua. Assim, a Regra de Leibniz (1.2.1) e o Teorema da Convergência Dominada (1.2.3) resultam em:

$$Df_n(x) = \int_K -D\rho_n(z - x) f(y)\, dz \quad \text{para todo} x \in V.$$

Portanto, valem as equações acima. ■

Com a proposição acima, conseguimos mostrar o principal resultado dessa seção:

Teorema 1.2.5 (Teorema de Peano)**.** *Suponha que a função a F é contínua. Então, para todo $(t_0, x_0) \in U$ existem algum intervalo aberto I e alguma solução $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ da equação diferencial (1.1.1) com $t_0 \in I$ e $\gamma(t_0) = x_0$.*

Demonstração. A proposição anterior permite-nos obter funções de classe C^∞

$$F_n : \mathcal{U}_n \to \mathbb{R}^d, \tag{1.2.3}$$

onde $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de abertos de $\mathbb{R}^{d+1}$ cuja união é $\mathcal{U}$ e a sequência F_n converge para $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ uniformemente em compactos. Fixemos tal sequência $(F_n)_n$ e consideramos as respectivas equações diferenciais:

$$x' = F_n(t, x).$$

Como as funções F_n são localmente Lipschtz em t e em x, a teoria de existência e unicidade desenvolvida anteriormente garante que, para cada $n \geq 1$ tal que $(t_0, x_0) \in U_n$, existe alguma solução $\gamma_n : (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^d$ de (1.2.3) satisfazendo $\gamma_n(t_0) = x_0$. Queremos mostrar que estas soluções satisfazem condições em n.

A primeira delas é que o raio do domínio pode ser escolhido independentemente de n. Isto é uma consequência simples das ideias no Teorema 1.1.7. De fato, de acordo com este teorema, podemos tomar qualquer

$$\varepsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M_n(\delta)}\right\},$$

onde $\delta > 0$ só depende da distância de (t_0, x_0) ao complementar de U_n e $M_n(\delta)$ é o supremo de $\|F_n\|$ restrito ao compacto $K = \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}$. Como $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, é claro que podemos escolher δ independente de n. E como F_n converge para F uniformemente em K, a sequência $M_n(\delta)$ é majorada por alguma constante $M(\delta)$ que independe de n. Isto prova nossa afirmação de que podemos tomar ε independente de n.

Outra propriedade importante de uniformidade é de que as funções $\gamma_n : (t_0 - \varepsilon, t_0 - \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$ são lipschitzianas, com constante de Lipschitz independente de n. De fato, por construção,

$$\gamma_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F_n(s, \gamma_n(s))\, ds \quad \text{e} \quad (t, \gamma_n) \in B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0),$$

para todo t. Como a restrição de $\|F_n\|$ ao compacto $K = \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)}$ é majorada por $M(\delta)$, segue que

$$\|\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)\| = \|\int_{t_1}^{t_2} F_n(s, \gamma_n(s))\, ds\| \leq M(\delta)|t_1 - t_2|. \tag{1.2.4}$$

Isto prova a nossa afirmação, implicando que a sequência γ_n é equicontínua. Como toda γ_n é contínua e a imagem de cada uma é compacta (porque F_n é contínua com imagem uniformemente limitada). Logo, estamos nas condições do Teorema de Ascoli–Arzelà. Segue que existe uma função $\gamma : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}^d$ e uma subsequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(\gamma_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para γ, uniformemente em compactos de $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Como F_n converge para F uniformemente em compactos e que

$$\gamma_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F_n(s, \gamma_n(s))ds \quad \text{e} \quad (t, \gamma_n(t)) \in B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0)$$

para todo $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e todo n. Logo, tomando o limite ao longo da subsequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e pelo Teorema da Convergência Dominada (1.2.3),

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \gamma(s))ds \quad \text{para todo } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon.)$$

Segue que γ é solução de (1.1.1). ∎

Exemplo 1.2.6. *Vejamos como a EDO $x' = x^{2/3}$, com condição inicial $x(0) = 0$, se comporta. Note que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(t, x) = x^{2/3}$ é contínua, mas não é localmente lipschitziana em x. De fato, suponha para obter contradição que F é localmente lipschitziana em x então para qualquer $t \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $\overline{B_\delta(t_0) \times B_\delta(0)} \subset U$, e*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq c\|x - y\|,$$

para todo $t \in \overline{B_\delta(t_0)}$ e $x, y \in \overline{B_\delta(0)}$. Ou seja,

$$\frac{\|F(t, x) - F(t, y)\|}{\|x - y\|} \leq c.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\|F(t,x)-F(t,y)\|}{\|x-y\|} &= \frac{\|x^{2/3}-y^{2/3}\|}{\|x-y\|}\\ &= \frac{\|x^{2/3}-y^{2/3}\|}{\|x^{3/3}-y^{3/3}\|}\\ &= \frac{(x^{1/3}-y^{1/3})(x^{1/3}+y^{1/3})}{(x^{1/3}-y^{1/3})(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})}\\ &= \frac{(x^{1/3}+y^{1/3})}{(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})}.\end{aligned}$$

Vamos avaliar quando $x, y \to 0$. Fazemos a mudança de variáveis

$$x = r^3\cos^3\theta, \quad y = r^3\sin^3\theta,$$

Substituindo na expressão original, obtemos:

$$\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3}} = \frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)}.$$

Fatorando r e simplificando:

$$= \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}.$$

Agora, tomamos o limite quando $r \to 0$:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta} = +\infty$$

Uma contradição, uma vez que

$$\frac{\|F(t,x)-F(t,y)\|}{\|x-y\|} \le c.$$

Logo, F não satisfaz as condições do Teorema 1.1.7, mas satisfaz as hipóteses do Teorema de Peano, pois é contínua. Assim, existe ao menos uma solução local passando pela origem.

De fato, a função constantemente nula $\gamma_1(t) = 0$ é uma solução.

No entanto, observe que também podemos obter uma família de soluções não triviais. Pelo método de separação de variáveis na equação $x' = x^{2/3}$, temos:

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{t}{3}\right)^3$$

também é solução da EDO.

Logo, a equação admite mais de uma solução passando pela origem, o que mostra que a unicidade de soluções não é garantida.

1.3 Teorema de dependência contínua

Quando estudamos equações diferenciais ordinárias, não nos preocupamos apenas com a existência e a unicidade das soluções. Muitas vezes, o sistema depende de um parâmetro (como uma constante física), e é importante garantir que pequenas variações nesse parâmetro não causem mudanças drásticas na solução.

O teorema de dependência contínua em relação aos parâmetros formaliza essa ideia: ele assegura que, sob hipóteses adequadas, se modificarmos ligeiramente um parâmetro, a solução do problema também se modifica de forma suave e contínua.

Exemplo 1.3.1 (Lei de Hooke)**.** *Considere a equação da Lei de Hooke para uma massa $m > 0$ presa a uma mola com constante elástica $k > 0$:*

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0.$$

Aqui:

- *$x(t)$ descreve a posição da massa no tempo;*
- *k é a rigidez da mola (parâmetro);*
- *m é a massa (parâmetro).*

A solução explícita é dada por

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{\tfrac{k}{m}}} \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right).$$

Observa-se que a solução depende continuamente de k e de m: ao variar o parâmetro, a frequência $\sqrt{k/m}$ se altera suavemente, e não ocorrem mudanças bruscas no comportamento da solução.

Para formular o problema, vamos utilizar famílias parametrizadas de equações diferenciais. Mais precisamente, vamos considerar transformações contínuas

$$G : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^d, \text{ dadas por } (t, x, \mu) \to G_\mu(t, x)$$

Onde $\mathcal{V}$ é um aberto de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^{1+d+p}$ e, para cada valor de μ, consideraremos a equação diferencial

$$x' = G_\mu(t, x).$$

Dizemos que G é localmente lipschitziana em x se G_μ é localmente lipschitziana em x para todo μ. Então, para cada $(t_0, x_0, \mu) \in \mathcal{V}$ existe solução única.

$$\gamma_{t_0,x_0,\mu} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$$

da equação com condição inicial $\gamma_{t_0,x_0,\mu}(t_0) = x_0$. Queremos entender como é que esta solução depende do parâmetro μ e do ponto (t_0, x_0).

Teorema 1.3.2 (Dependência contínua do parâmetro)**.** *Sejam $\mathcal{V}$ um aberto de $\mathbb{R}^{1+d+p}$ e $G : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^d, (t, s, \mu) \mapsto G_\mu(t, x)$ uma aplicação contínua e localmente lipschitziana em x. Então, para todo (t_0, x_0, μ_0), existe $\rho > 0$ tal que:*

- *o domínio da solução γ_μ da equação diferencial com condição inicial $\gamma_\mu(t_0) = x_0$ con tém o intervalo $[t_0 - \rho, t_0 + \rho]$, para todo $\mu \in \overline{B_\rho(\mu_0)}$*

- *a aplicação* $(t,\mu) \mapsto \gamma_\mu(t)$ *é contínua em* $[t_0-\rho, t_0+\rho] \times \overline{B_\rho(\mu_0)}$.

Demonstração. Fixe $\delta > 0$ tal que $K_\delta = \overline{B_\delta(t_0)} \times \overline{B_\delta(x_0)} \times \overline{B_\delta(\mu_0)}$ esteja contido em $\mathcal{V}$. Tome

$$\varepsilon = \min\{\delta, \frac{\delta}{M(\delta)}\}, \text{ onde } M(\delta) = \sup\{\|G_\mu(t,x)\| : (t,x,\mu) \in K_\delta\}.$$

Pelo Lema 1.1.10, temos que a respectiva solução γ_μ com condição inicial $\gamma(t_0) = x_0$ está definida no intervalo $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ para todo $\mu \in \overline{B_\delta(\mu_0)}$. Isso prova a parte 1 do teorema para qualquer $\rho < \varepsilon \leq \delta$. Em seguida, observamos que as soluções $\gamma_\mu : [t_0-\rho, t_0+\rho] \to \mathbb{R}^d$ são lipschitzianas, com constante de Lipschitz independente de $\mu \in \overline{B_\rho(\mu_0)}$. De fato, por construção

$$\gamma_\mu(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} G_\mu(s, \gamma_\mu(s))ds \text{ para todo } t \in [t_0-\rho, t_0+\rho].$$

Logo, para quaisquer $t_1, t_2 \in [t_0-\rho, t_0+\rho]$ e todo $\mu \in \overline{B_\rho(\mu_0)}$,

$$\|\gamma_\mu(t_1) - \gamma_\mu(t_2)\| = \|\int_{t_1}^{t_2} G_\mu(s,\gamma_\mu(s))ds\| \leq M(\delta)|t_1-t_2|.$$

Isso mostra nossa afirmação.

Note que, dada qualquer sequência $(\mu_k)_k \in \overline{B_\rho(\mu_0)}$ convergindo para algum μ, a sequência $(\gamma_{\mu_k})_k$ converge uniformemente para γ_μ. Além disso, γ_μ é solução da equação $x' = G_\mu(t,x)$ com condição inicial $\gamma_\mu(t_0) = x_0$. De fato, pelo mostrado acima, a família $(\gamma_{\mu_k})_k$ é equicontínua. Além disso, como $\gamma_{\mu_k}(t_0) = x_0$ para todo k, a sequência é uniformemente limitada. Pelo Teorema de Arzelà–Ascoli, $(\gamma_{\mu_k})_k$ possui uma subsequência convergente. Portanto, para concluir que $(\gamma_{\mu_k})_k$ converge para γ_μ, basta provar que *toda subsequência convergente converge para* γ_μ. Assim, a menos de restringir-nos a uma subsequência, podemos supor que $(\gamma_{\mu_k})_k$ converge uniformemente para alguma

$$\overline{\gamma} : [t_0-\rho,\, t_0+\rho] \to \mathbb{R}^d.$$

Como G é contínua, segue que

$$G_{\mu_k}(s, \gamma_{\mu_k}(s)) \quad \longrightarrow \quad G_\mu(s, \overline{\gamma}(s))$$

uniformemente em s. Por construção, para todo $t \in (t_0-\varepsilon,\, t_0+\varepsilon)$,

$$\gamma_{\mu_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} G_{\mu_k}(s, \gamma_{\mu_k}(s))\, ds.$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos

$$\overline{\gamma}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} G_\mu(s, \overline{\gamma}(s))\, ds,$$

isto é, $\overline{\gamma}$ satisfaz a equação integral associada ao problema de Cauchy

$$x'(t) = G_\mu(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Logo, $\overline{\gamma}$ é a solução desse problema. Pelo teorema de unicidade da solução, segue que $\overline{\gamma} = \gamma_\mu$.

Portanto, qualquer subsequência convergente de $(\gamma_{\mu_k})_k$ converge para γ_μ, e, consequentemente, a sequência toda converge uniformemente para γ_μ.

Agora, suponha que $(t_k, \mu_k)_k$ converge para algum (t, μ) em $[t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \overline{B_\rho(\mu_0)}$. Pela afirmação mostrada acima, dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos que

$$\|\gamma_{\mu_k}(t_k) - \gamma_\mu(t_k)\| \leq \varepsilon \text{ para todo } k \text{ suficientemente grande.}$$

Além disso, pela continuidade de γ_μ, temos que

$$\|\gamma_\mu(t_k) - \gamma_\mu(t)\| \leq \varepsilon \text{ para todo } k \text{ suficientemente grande.}$$

Logo, $\|\gamma_{\mu_k}(t_k) - \gamma_\mu(t)\| \leq 2\varepsilon$ para todo k suficientemente grande.. Isto prova a parte 2 do teorema. ■

Agora, vamos deduzir do teorema anterior que as soluções da equação diferencial dependem continuamente tanto da condição inicial quanto do parâmetro:

Teorema 1.3.3. *Sejam $\mathcal{V}$ um aberto de $\mathbb{R}^{1+d+p}$ e $G : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^d$, $(t, x, \mu) \mapsto G_\mu(t, x)$ uma aplicação contínua e localmente lipschtziana em x. Então, para todo $(t_0, x_0, \mu_0) \in \mathcal{V}$, existe $\rho > 0$ tal que:*

- *para todo $(\bar{t}, \overline{x}, \mu) \in \overline{B_\rho(t_0)} \times \overline{B_\rho(x_0)} \times \overline{B_\rho(\mu_0)}$, o domínio da solução $\gamma_{\bar{t},\overline{x},\mu}$ da equação diferencial com condição inicial $\gamma_{\bar{t},\overline{x},\mu}(\bar{t}) = \overline{x}$ contém o intervalo $[\bar{t} - \rho, \bar{t} + \rho]$;*
- *a aplicação $(t, \bar{t}, \overline{x}, \mu) \mapsto \gamma_{\bar{t},\overline{x},\mu}(t)$ é contínua no domínio*

$$\mathcal{D} = \{(t, \bar{t}, \overline{x}, \mu) : t \in [\bar{t} - \rho, \bar{t} + \rho] \textit{ e } (\bar{t}, \overline{x}, \mu) \in \overline{B_\rho(t_0)} \times \overline{B_\rho(x_0)} \times \overline{B_\rho(\mu_0)}\}$$

Demonstração. Consideramos

$$\mathcal{W} = \{(t, x, s, y, \mu) \in \mathbb{R}^{1+d+1+d+p} : (t + s, x + y, \mu) \in \mathcal{V}\}$$

e a aplicação

$$H : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^d, \text{ dada por } (t, x, s, y, \mu) \mapsto H_{s,y,\mu}(t, x) = G_\mu(t + s, x + y)$$

É claro que H está bem definida, é contínua e localmente lipschitziana em x. Vamos aplicar o teorema anterior à família parametrizada de equações diferenciais

$$x' = H_{s,y,\mu}(t, x),$$

cujo parâmetro (s, y, μ) varia em um subconjunto de $\mathbb{R}^{1+d+p}$. Dados quaisquer $(t_0, x_0, \mu_0) \in \mathcal{V}$, é claro que $(0, 0, t_0, x_0, \mu_0) \in \mathcal{W}$. Então segue do Teorema 1.3.2 que existe $\rho > 0$ e uma aplicação contínua

$$[-\rho, \rho] \times \overline{B_\rho(t_0)} \times \overline{B_\rho(x_0)} \times \overline{B_\rho(\mu_0)} \to \mathbb{R}^d, \text{ dada por } (t, s, y, \mu) \mapsto \beta_{s,y,\mu}(t)$$

tal que cada aplicação $\beta_{s,y,\mu} : [-\rho, \rho] \to \mathbb{R}^d$ satisfaz

$$\beta_{s,y,\mu}(0) = 0 \quad e \quad \beta'_{s,y,\mu}(t) = H_{s,y,\mu}(t, \beta_{S,Y,\mu}(t)) = G_\mu(t + s, \beta_{s,y,\mu}(t) + y)$$

para todo $t \in [-\rho, \rho]$ e todo $(s, y, \mu) \in \overline{B_\rho(t_0)} \times \overline{B_\rho(x_0)} \times \overline{B_\rho(\mu_0)}$. Considere a aplicação

$$\mathcal{D} \to \mathbb{R}^d, \text{ dada por } (t, \bar{t}, \bar{x}, \mu) \mapsto \gamma_{\bar{t},\bar{x},\mu}(t) = \beta_{\bar{t},\bar{x},\mu}(t - \bar{t}) + \bar{x}$$

Observe que essa aplicação está bem definida e é contínua. Além disso, tomando $s = \bar{t}$ e $y = \bar{x}$, temos que

$$\gamma_{\bar{t},\bar{x},\mu}(\bar{t}) = \beta_{\bar{t},\bar{x},\mu}(0) + \bar{x} = \bar{x}$$

e, para todo $t \in [\bar{t} - \rho, \bar{t} + \rho]$

$$\gamma'_{\bar{t},\bar{x},\mu}(t) = \beta'_{\bar{t},\bar{x},\mu}(t - \bar{t}) = G_\mu(t - \bar{t} + \bar{t}, \beta'_{\bar{t},\bar{x},\mu}(t - \bar{t}) + \bar{x}) = G_\mu(t, \gamma_{\bar{t},\bar{x},\mu}(t))$$

Em outras palavras, $\gamma_{\bar{t},\bar{x},\mu}$ é solução da equação diferencial com condição inicial $\gamma_{\bar{t},\bar{x},\mu}(\bar{t}) = \bar{x}$. ■

1.4 Soluções maximais

Até aqui, os teoremas obtidos nos trouxeram apenas soluções locais. Investigaremos se tais soluções obtidas pelos teoremas apresentados acima podem ser estendidas a um intervalo maior e, possivelmente, até mesmo para toda a reta $\mathbb{R}$.

Dada $F : U \to \mathbb{R}^d$ uma função contínua definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, para cada $(t_0, x_0) \in U$ defina o seguinte conjunto:

$$\Gamma(t_0, x_0) = \{\gamma : I_\gamma \to \mathbb{R}^n : \gamma \text{ é solução de } x' = F(t, x) \text{ tal que } \gamma(t_0) = x_0\}.$$

Definimos também a seguinte relação no conjunto $\Gamma(t_0, x_0)$:

Definição 1.4.1. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(t_0, x_0)$. Dizemos que:*

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \iff I_1 \subset I_2 \text{ e } \gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall t \in I_1.$$

Essa relação tem as seguintes propriedades:

- se $\gamma_1 \leq \gamma_2$ e $\gamma_2 \leq \gamma_3$, então $\gamma_1 \leq \gamma_3$ (transitividade);
- $\gamma \leq \gamma, \forall \gamma \in \Gamma(t_0, x_0)$ (reflexividade);
- se $\gamma_1 \leq \gamma_2$ e $\gamma_2 \leq \gamma_1$, então $\gamma_1 = \gamma_2$ (anti-simetria).

Dessa forma, $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $S(t_0, x_0)$.

Definimos que $\gamma \in \Gamma(t_0, x_0)$ é **solução maximal** de $x' = F(t, x)$ se γ é um elemento maximal de $\Gamma(t_0, x_0)$, ou seja, se $\gamma^* \in \Gamma(t_0, x_0)$ é tal que $\gamma \leq \gamma^*$, então $\gamma = \gamma^*$.

Teorema 1.4.2 (Lema de Zorn)**.** *Se um conjunto X parcialmente ordenado é tal que, todo subconjunto $A \subset X$ totalmente ordenado é superiormente limitado, então existe um elemento $x \in X$ maximal de X.*

Proposição 1.4.3. *Para todo $\gamma \in \Gamma(t_0, x_0)$ existe algum elemento maximal $\gamma_0 \in \Gamma(t_0, x_0)$ tal que $\gamma \leq \gamma_0$.*

Demonstração. Seja $X \subset \Gamma(t_0, x_0)$ subconjunto não vazio totalmente ordenado. Mostremos que existe $\beta_0 \in \Gamma(t_0, x_0)$ tal que $\beta \leq \beta_0$ para todo $\beta \in X$. De fato, represente I_β como o domínio de cada $\beta \in X$. Considere

$$I = \bigcup_{\beta \in X} I_\beta$$

claramente I é um intervalo aberto, uma vez que é união arbitrária de intervalos abertos que contém t_0. Além disso, defina $\beta_0 : I \to \mathbb{R}^d$ como $\beta_0(t) = \beta(t)$ para qualquer $\beta \in \Gamma(t_0, x_0)$ tal que $t \in I_\beta$. Note que o valor de $\beta_0(t)$ não depende da escolha de $\beta \in \Gamma(t_0, x_0)$.De fato, como X é totalmente ordenado, dado qualquer $\alpha \in \Gamma(t_0, x_0)$ com $t \in I_\alpha$ temos pelo menos uma das seguintes possibilidades:

- $\alpha \leq \beta,$ assim, $I_\alpha \subset I_\beta$ para todo $t \in I_\alpha$
- $\beta \leq \alpha,$ assim, $I_\beta \subset I_\alpha$ para todo $t \in I_\beta$

Em qualquer caso, $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I_\alpha \cap I_\beta$. Isto mostra que β_0 está bem definida. Além disso, $\beta_0(t_0) = x_0$ e que $\beta \leq \beta_0$ para todo $\beta \in X$. Pelo Lema de Zorn, temos que todo subconjunto não vazio tem algum elemento maximal de X. Dado qualquer $\gamma \in \Gamma(t_0, x_0)$, defina

$$\mathcal{X} = \{\beta \in \Gamma(t_0, x_0) : \gamma \leq \beta\}.$$

Assim, $\mathcal{X}$ é naõ vazio, pois $\gamma \in \mathcal{X}$. Usando o resultado obtido acima, seja $\gamma_0 \in \mathcal{X}$ um elemento maximal de $\mathcal{X}$. Claro que $\gamma \leq \gamma_0$, pela definição de $\mathcal{X}$. Considere, $\beta_0 \in \Gamma(t_0, x_0)$ tal que $\gamma_0 \leq \beta_0$. Então, $\gamma \leq \beta_0$, ou seja, $\beta_0 \in \mathcal{X}$. Consequentemente, $\beta_0 \leq \gamma_0$ e, portanto, $\beta_0 = \gamma_0$. Isto mostra que γ_0 é um elemento maximal de $\Gamma(t_0, x_0)$ ■

Definição 1.4.4. *Dizemos que a EDO $x' = F(t_0, x_0)$ possui a* ***propriedade de unicidade de soluções*** *se, dadas quaisquer soluções $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ para algum $(t_0) \in I_1 \cap I_2$ implica que:*

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \; \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Proposição 1.4.5. *Se $x' = F(t_0, x_0)$ possui a propriedade de unicidade de soluções, então, para todo $(t_0, x_0) \in U$, existe um único $\gamma_0 \in \Gamma(t_0, x_0)$ tal que $\gamma \leq \gamma_0, \forall \gamma \in \Gamma(t_0, x_0)$.*

Demonstração. Considere I da seguinte forma:

$$I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(t_0, x_0)} I_\gamma$$

e seja $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^d$ definida por

$$\gamma_0(t) = \gamma(t) \quad \text{para qualquer } \gamma \in \Gamma(t_0, x_0) \text{ tal que } t \in I_\gamma.$$

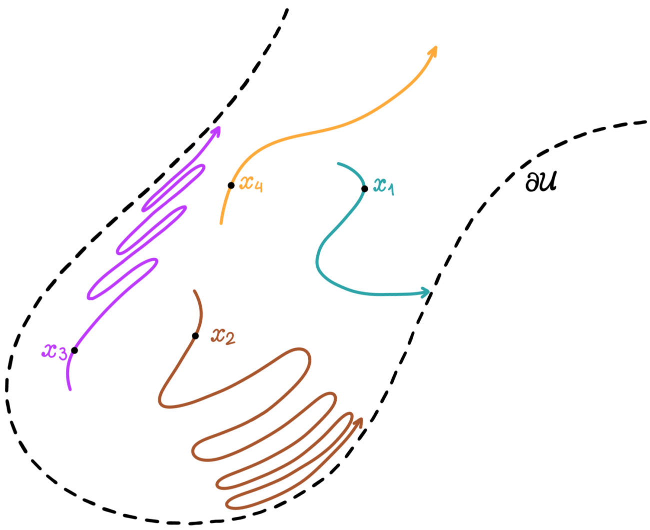
Usando os mesmos argumentos da Proposição 1.4.3 temos que γ_0 está bem definida. Além disso, γ_0 é solução de $x' = F(t_0, x_0)$, com condição inicial $\gamma_0(t_0) = x_0$ e que $\gamma \leq \gamma_0$ para todo $\gamma \in \Gamma(t_0, x_0)$. Por fim, mostremos que γ_0 é única. Suponha que existe γ_1 elemento maximal de $\Gamma(t_0, x_0)$. Por construção, temos que $I_1 \subset I$, assim obtemos que $\gamma_1 \leq \gamma_0$, então $\gamma_1 = \gamma_0$, pois caso contrário γ_1 não seria solução maximal. ■

Nesse caso, dizemos que γ_0 é a *solução máxima* de $\Gamma(t_0, x_0)$, o que é mais forte do que ser apenas uma solução maximal.

Explicaremos esse fenômeno fazendo um estudo do comportamento de soluções máximas próximo da fronteira de seus domínios.

Definição 1.4.6. *Seja U um aberto e $\beta : (a, b) \to U$ uma aplicação contínua. Dizemos que β* ***converge para o bordo*** *de U quando $t \to b$, se para todo compacto $K \subset U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta(t) \notin K$ para todo $t \in (b-\varepsilon, b)$. Nesse caso, escrevemos que $\beta(t) \to \partial\mathcal{U}$ quando $t \to b$. Analogamente, dizemos que $\beta(t) \to \partial U$ quando $t \to a$ se para todo compacto $K \subset U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta(t) \notin K$ para todo $t \in (a, a+\varepsilon)$.*

Figura 1.4.1: Soluções convergindo ao bordo de U



Fonte: Viana and Espinar [2011]

Teorema 1.4.7.

Demonstração. Vamos analisar apenas o caso em que $t \to b$, uma vez que a demonstração para $t \to a$ é totalmente análoga. Suponha que $b = +\infty$, e seja $K \subset U$ um conjunto compacto. Como $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$, o conjunto K é fechado e limitado. Assim, existe $M > 0$ tal que, para todo $y = (t, x) \in K$, tem-se $\|y\| < M$, o que implica em particular que $|t| < M$. Como estamos assumindo que $b = +\infty$, existe $t_0 > M$. Para todo $t > t_0$, temos $|t| > M$, logo $(t, \gamma(t)) \notin K$. Isso implica que $(t, \gamma(t)) \to \partial U$ quando $t \to b = +\infty$. Se $b < +\infty$, dado qualquer compacto $K \subset U$ fixe $\delta > 0$ tal que

$$\overline{B_{2\delta}(t)} \times \overline{B_{2\delta}(x)} \subset U \quad \text{para todo}(t, x) \in K.$$

Tome

$$\varepsilon = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M(\delta)}\right\},$$

onde

$$M(\delta) = \sup\{\|F(t, x)\| : (t, x) \in \overline{B_\delta(K)}\}, \text{ com } B_\delta(K) = \bigcup_{y \in K} B_\delta(y).$$

Afirmação: $(t, \gamma(t)) \notin K$ para todo $t \in (b-\varepsilon, b)$. De fato, suponha que exista $\bar{t} \in (b-\varepsilon, b)$ tal que $(\bar{t}, \gamma(\bar{t})) \in K$. Denotaremos $\bar{x} = \gamma(\bar{t})$. Então, pelo teorema 1.1.10, existe uma solução $\bar{\gamma} : (\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$ da equação

(1.1.1) com condição inicial $\overline{\gamma}(\overline{t}) = \overline{x} = \gamma(\overline{t})$. Note que, as duas soluções devem coincidir na intersecção de seus domínios de definição. Logo, definindo $\phi : (a,b) \cup (\overline{t} - \varepsilon, \overline{t} + \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$ dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{para } t \in (a,b) \\ \overline{\gamma}(t), & \text{para } t \in (\overline{t} - \varepsilon, \overline{t} + \varepsilon) \end{cases}$$

Então, $\gamma \leq \phi$ e $\gamma \neq \phi$ já que $\overline{t} + \varepsilon > b$. O que contradiz a hipótese de que γ é solução maximal. Isso prova a afirmação a respeito de $t \to b$. ■

Corolário 1.4.8. *Suponha que $U = \mathbb{R}^{1+n}$ e seja $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ uma solução maximal de 1.1.1. Então:*

- *se $b < +\infty$ então $||\gamma(t)|| \to \infty$ quando $t \to b$.*
- *se $a > -\infty$ então $||\gamma(t)|| \to \infty$ quando $t \to a$.*

Demonstração. Seja $b < +\infty$, suponha, para obter contradição, que $\|\gamma(t)\|$ é limitada quando $t \to b$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$\|\gamma(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } t \in [b - \varepsilon, b),$$

Logo, o gráfico $(t, \gamma(t))$ está contido em um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{1+n}$,

$$(t, \gamma(t)) \in [b - \varepsilon, b) \times \overline{B}_M(0) \subset \mathbb{R}^{1+n},$$

O que contraria a hipótese que $(t, \gamma(t)) \to \partial U$ quando $t \to b$.

O caso que $a > -\infty$ é análogo. ■

2 Atratores pullback para processo de evolução

Para analisar o comportamento assintótico de soluções de Equações Diferenciais não autônomas, vamos introduzir a noção de processo de evolução. Nesta seção, apresentamos os conceitos fundamentais dessa teoria com base em Carvalho [2020] e Carvalho et al. [2013], os quais servirão de fundamento para o estudo de atratores pullback aplicados ao modelo SIR não autônomo.

2.1 Processo de evolução

Definição 2.1.1. *Um **processo de evolução** (ou também sistema dinâmico) num espaço métrico (X, d) é uma família de operadores de dois parâmetros $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\} \subset \mathcal{C}(X)$ que satisfaz:*

(i) $\mathcal{S}(t, t) = Id_X$*;*

(ii) $\mathcal{S}(t, v)\mathcal{S}(v, s) = \mathcal{S}(t, s),\ t \geq v \geq s,\ t, s, v \in \mathbb{R}$*;*

(iii) Se $\mathcal{P} = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; t \geq s\}$ *então a aplicação* $\mathcal{P} \times X \ni (t, s, x) \mapsto \mathcal{S}(t, s)x \in X$ *é contínua.*

Observação 2.1.2. *Se $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ é um processo de evolução, então quando $t \geq s$, diz-se que: s é o **instante inicial** e t é **instante final**.*

Para contextualizar, um processo de evolução $\mathcal{S}$ é uma das formas de modelar matematicamente um problema que varia com o tempo, isto é, um problema do tipo $\dot{x} = f(t, x)$. Assim, $\mathcal{S}(t, s)x_0$ é a evolução de x_0 de um instante inicial s ao instante final t. A seguir iremos ver como podemos definir um processo de evolução a partir de um PVI.

Proposição 2.1.3. *Considere o PVI*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ t > s \\ x(s) = x_0, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua e localmente Lipschitz na segunda variável. Assim, pelo Teorema 1.1.7 existe $x(t, s, x_0)$ uma única solução maximal para todo $t \in [s, \tau_{max})$. Suponha que $\tau_{max} = +\infty$, obtido através do Corolário 1.4.8. Considere a solução $x(t) = x(t; s, x_0)$ definida para $t \in [s, +\infty)$ e a família de aplicações

$$\mathcal{S}(t, s)x_0 = x(t; s, x_0), \quad \text{para todo} \quad t \geq s.$$

Logo, $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ define um processo de evolução em X.

Demonstração. Devemos verificar que $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ satisfaz as propriedades de um processo de evolução:

(i) $\mathcal{S}(s, s)x_0 = x_0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, pois a solução do sistema satisfaz $x(s) = x_0$.

(ii) Seja $x_0 \in X$ e $s \leq r \leq t$. Queremos mostrar que

$$\mathcal{S}(t, s)x_0 = \mathcal{S}(t, v)\big(\mathcal{S}(v, s)x_0\big).$$

Por definição, temos que $\mathcal{S}(t, s)x_0 = x(t, s, x_0)$ Definimos $y_0 := x(r, s, x_0) = \mathcal{S}(r, s)x_0$. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(r) = y_0, \end{cases}$$

Como f é localmente Lipschitz na segunda variável, pelo Teorema 1.1.7 o sistema acima admite uma única solução local $x(t, r, y_0) = x(t, r, x(r, s, x_0))$.

Observe que a função $x(t, s, x_0)$, solução do problema com dado inicial em (s, x_0), também satisfaz este novo problema no instante r, já que

$$x(r, s, x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \text{para todo} \quad t \geq s.$$

Portanto, como $x(r, r, y_0) = x(r, s, x_0)$. Pelo, teorema 1.1.7 temos

$$x(t, r, y_0) = x(t, s, x_0) \quad \text{para todo} \quad t \geq r.$$

Assim,

$$\mathcal{S}(t, r)(\mathcal{S}(r, s)x_0) = \mathcal{S}(t, r)(y_0) = x(t, s, x_0) = \mathcal{S}(t, s)x_0,$$

(iii) A continuidade segue direto do Teorema da dependência contínua com relação as condições iniciais (1.3.3)

Logo, $\mathcal{S}(t, s)$ define um processo de evolução em X. ■

Definição 2.1.4. *Se $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ é um processo de evolução tal que*

$$\mathcal{S}(t, s) = \mathcal{S}(t - s, 0), \quad \forall t \geq s,$$

*dizemos que o $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ é um **processo de evolução autônomo** e, caso contrário, $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$ é dito **não autônomo**. No caso que o processo de evolução é autônomo chamamos $t - s \geq 0$ de **tempo decorrido**.*

Para formalizar os conceitos de atração e absorção entre conjuntos, utilizamos a semi-distância de Hausdorff.

Definição 2.1.5. *A semi-distância de Hausdorff de um conjunto A até o conjunto B é definida por*

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B),$$

em que $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b)$.

Observação 2.1.6. *Note que $dist(A, B) = 0$ se, e somente se, $A \subset \overline{B}$.*

Definição 2.1.7. *Seja $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ um processo de evolução. Fixado $t \in \mathbb{R}$ dizemos que um subconjunto $D(t) \subset X$:*

1. ***Absorve** um subconjunto $B \subset X$ em sentido **pullback** no instante t quando, existe $s_0 = s_0(t, B) \leq t$ tal que*

$$\mathcal{S}(t, s)B \subset D(t), \forall s \leq s_0.$$

2. ***Atrai** um subconjunto $B \subset X$ em sentido **pullback** no instante t quando*

$$\lim_{s \to -\infty} dist(\mathcal{S}(t, s)B, D(t)) = 0.$$

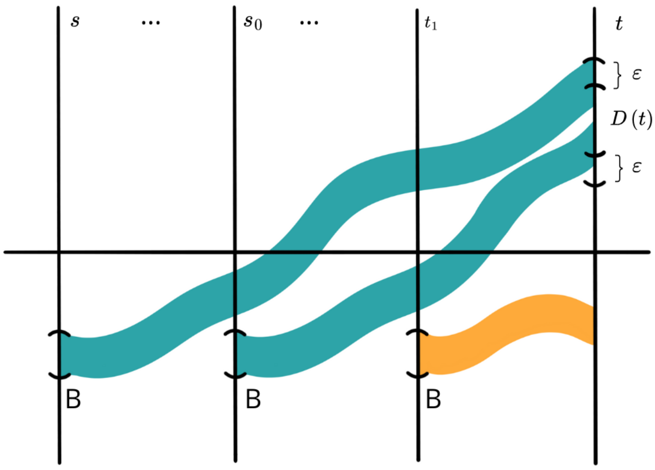


Figura 2.1.1: Conjunto D(t) absorvendo conjunto B

A seguir, veremos uma equivalência da definição de atração pullback que se mostrará extremamente útil nas demonstrações subsequentes, por ser mais simples de aplicar do que a definição original.

Observação 2.1.8. *No contexto da Definição 2.1.7, note que $D(t)$ atrai sentido pullback B se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um instante $s_0 = s_0(t, B, \varepsilon)$ tal que, para todo $s \leq s_0$, temos*

$$\mathcal{S}(t,s)B \subset V_\varepsilon(D(t)),$$

onde $V_\varepsilon(D(t))$ representa a ε-vizinhança de $D(t)$.

De fato, suponha que $\lim\limits_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t,s)B, D(t)) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe s_0 tal que, $\forall s \leq s_0$, temos:

$$dist(\mathcal{S}(t,s)B, D(t)) < \varepsilon.$$

Logo, $\sup\limits_{b\in B} d(\mathcal{S}(t,s)b, D(t)) < \varepsilon$. Por definição de supremo, concluímos que $\mathcal{S}(t,s)B \subset V_\varepsilon(D(t))$ para todo $s \leq s_0$. Por outro lado, suponha que dado $\varepsilon > 0$, existe s_0 tal que para todo $s \leq s_0$,

$$\mathcal{S}(t,s)B \subset V_\varepsilon(D(t)).$$

Logo,

$$d(\mathcal{S}(t,s)b, D(t)) < \varepsilon, \quad \forall b \in B, \forall s \leq s_0.$$

Assim, pela definição de supremo

$$\sup_{b\in B} d(\mathcal{S}(t,s)b, D(t)) \leq \varepsilon, \quad \forall s \leq s_0.$$

Portanto, $\lim\limits_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t,s)B, D(t)) = 0$.

Definição 2.1.9. *Dizemos que o processo de evolução é **dissipativo** em sentido pullback quando existe $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos limitados de X de modo que, para cada real t, o conjunto D(t) atrai os limitados de X em sentido pullback no instante t.*

Denotaremos $\mathcal{B}$ como a família de todos os conjuntos limitados de X.

Observação 2.1.10. *Note que, na Definição 2.1.9, os termos "atrai" e "absorve" são equivalentes. Mais precisamente, vai existir uma outra família $\{D^*(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos limitados de X tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $D^*(t)$ absorve todos os subconjuntos limitados de X em sentido* pullback *no instante t.*

Definição 2.1.11. *Dizemos que uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é **invariante** por $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$, quando para todo $t \geq s$ tivermos que*

$$\mathcal{S}(t,s)A(s) = A(t).$$

Exemplo 2.1.12. *Se $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é o processo correspondente à equação diferencial autônoma*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t), \quad t > s, \\ x(s) = x_0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Considere a família de conjuntos $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$, onde, para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$K(t) = [e^{-t}a,\, e^{-t}b], 0.$$

é invariante sob $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$. Note que o processo de evolução associado a EDO (2.1.1) *é:*

$$\mathcal{S}(t,s) = e^{t-s}.$$

Logo, tomando $x \in K(s)$, temos que $x = e^{-s}x_0$, com $x_0 \in [a,b]$. Assim, aplicando o processo de evolução, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t,s)e^{-s}x_0 &= e^{-(t-s)}e^{(-s)}x_0 \\ &= e^{-t}x_0 \in K(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{S}(t,s)K(s) \subset K(t)$. Por outro lado, seja $y \in K(t)$. Logo, existe $x_0 \in [a,b]$. Então,

$$\begin{aligned} y &= e^{(-t)}x_0 \\ &= e^{-t}e^{s}e^{-s}x_0 \\ &= e^{-(t-s)}e^{(-s)}x_0 \in \mathcal{S}(t,s)K(s) \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\mathcal{S}(t,s)K(s) = K(t), \quad \forall t \geq s.$$

Uma vez estabelecida a invariância, é natural considerar o seguinte conceito.

Definição 2.1.13. *Um caminho $\xi : \mathbb{R} \to X$ é dito **solução global** para $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ quando para todo $t \geq s$ tivermos*

$$\mathcal{S}(t,s)\xi(s) = \xi(t).$$

Definição 2.1.14. *Uma família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é chamada de **atrator pullback** para um processo $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ se satisfaz:*

i) $\mathcal{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$;

ii) $\mathcal{A}(\cdot)$ é invariante em relação a $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$;

iii) $\mathcal{A}(\cdot)$ *atrai em sentido pullback conjuntos limitados de* X*;*

iv) $\mathcal{A}(\cdot)$ *é a menor família de conjuntos fechados que satisfaz a propriedade (iii).*

Na teoria de semigrupos (Seção 2.4), quando tratamos de processos autônomos, veremos que na Definição 2.4.11 de atrator global não exige a minimalidade do item (iv). Surge então a questão: por que, no caso de atratores pullback, precisamos dessa condição?

Em geral, a minimalidade é necessária para garantir a unicidade do atrator pullback. De fato, considere o processo de evolução

$$\mathcal{S}(t,s)x = e^{-(t-s)}x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq s.$$

Para esse processo, a família $A = \{[-e^{-t}, e^{-t}] : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante (como visto no Exemplo 2.1.12) e, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $A(t) = [-e^{-t}, e^{-t}]$ é compacto.

Mostremos que A atrai conjuntos limitados. Seja $B \subset \mathbb{R}$ limitado. Fixe $t > 0$, $\varepsilon > 0$ e $x \in B$. Temos

$$\mathcal{S}(t,s)x = e^{-(t-s)}x,$$

e como $\lim\limits_{s \to -\infty} e^{-(t-s)}x = 0$, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $s \leq s_0$,

$$|e^{-(t-s)}x| < \varepsilon.$$

Portanto, $e^{-(t-s)}x \in [-e^{-t}, e^{-t}] = A(t)$, e assim $A(t)$ absorve B.

Por outro lado, note que a família $\mathcal{A}(t) = \{0\}$ também satisfaz as propriedades (i)–(iii).

Teorema 2.1.15. *Se* $\{F(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *é invariante se, e somente se,*

$$F(t) = \{\xi(t) : \xi \text{ é solução global de } \mathcal{S}(\cdot,\cdot)\}.$$

Demonstração. Primeiramente, seja F uma família tal que $F(t) = \{\xi(t) : \xi \text{ é solução global de } \mathcal{S}(\cdot,\cdot)\}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Segue direto da Definição de solução global (2.1.13) que é família invariante.

Reciprocamente, seja F uma família invariantes, vamos provar que para cada $x \in F(t)$ existe uma solução global por x. Com efeito, seja $x_0 \in F(0)$, como $F(0)$ é invariante, em particular $F(0) = \mathcal{S}(0,-1)F(-1)$, logo existe $x_{-1} \in F(-1)$ de forma que $x_0 = \mathcal{S}(0,-1)x_{-1}$. Agora, como $x_{-1} \in F(-1)$ e como $F(-1)$ é invariante $F(-1) = \mathcal{S}(-1,-2)F(-2)$, logo existe $x_{-2} \in F(-2)$ tal que $x_{-1} = \mathcal{S}(-1,-2)x_{-2}$. Prosseguindo indutivamente, conseguimos uma sequência x_{-n} tal que $\mathcal{S}(-n,-n-1)x_{-n-1} = x_{-n}$. Deste modo, definimos:

$$\xi(t) = \begin{cases} \mathcal{S}(t,0)x_0, & \text{se } t \geq 0 \\ \mathcal{S}(t,-n)x_{-n-1}, & \text{se } t \in [-n,-n+1] \text{ com } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Por construção, vemos que $\xi(s) \in F, \forall t \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $\xi(t)$ como definida acima é uma solução global por x. Dado $s, t \in \mathbb{R}$ com $t \geq s$, analisamos dois casos:

- Se $s \geq 0$, então $\xi(s) = \mathcal{S}(s,0)x_0$. Para $t \geq s$,

$$\mathcal{S}(t,s)\xi(s) = \mathcal{S}(t,s)\mathcal{S}(s,0)x_0 = \mathcal{S}(t,0)x_0 = \xi(t).$$

- Se $s < 0$, então $s \in [-n, -n+1]$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, temos que $\xi(s) = \mathcal{S}(s, -n)x_{-n}$, e para $t \geq s$, também temos que

$$\mathcal{S}(t, s)\xi(s) = \mathcal{S}(t, s)\mathcal{S}(s, -n)x_{-n} = \mathcal{S}(t, -n)x_{-n} = \xi(t).$$

Assim, ξ é uma solução global por x_0, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Corolário 2.1.16. *Se $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é atrator pullback e*

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t) \text{ é limitado}$$

então $\mathcal{A}(t) = \{\xi(t) : \xi$ é solução global limitada de $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)\}$

Demonstração. Por definição de atrator pullback temos que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante, logo o resultado segue direto do Teorema 2.1.15. ■

Exemplo 2.1.17. *Se $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ é o processo correspondente à equação diferencial não autônoma*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x + t, \quad t > s, \\ x(s) = x_0 \end{cases}$$

tem como o atrator pullback $\mathcal{A}(t) = \{t - 1\}$.

De fato, resolvendo a EDO acima, obtemos que o processo de evolução $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ associado é dado por

$$\mathcal{S}(t, s)x = e^{-(t-s)}(x - s + 1) + (t - 1), \quad x \in X.$$

Mostremos que $\xi(t) = t - 1$ é solução global. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t, s)\xi(s) &= e^{-(t-s)}((s-1) - s + 1) + (t-1) \\ &= t - 1 \\ &= \xi(t). \end{aligned}$$

Note que, para cada t $\in \mathbb{R}$ temos que $\mathcal{A}(t) = \{t-1\}$ é compacto. Além disso, como $\xi(t) = t-1$ é solução global temos que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante. Mostremos que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai cada conjunto limitado de $\mathbb{R}$ e que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é a menor família de conjuntos fechados com a propriedade de atrair cada conjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Seja B um conjunto limitado de $\mathbb{R}$, ou seja, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x_0 \in B$, temos $|x_0| \leq M$. Note que

$$\lim_{s\to-\infty} \mathcal{S}(t, s)x_0 = t - 1.$$

Portanto, $\lim\limits_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t, s)B, \mathcal{A}(t))$= 0 para todo $t \in \mathbb{R}$. A minimalidade segue do fato de que para cada $t \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{A}(t)$ é apenas um ponto.

2.2 ω-limite pullback

Definição 2.2.1. *Dados $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ um processo de evolução e $B \subset X$ definimos para cada $t \in R$ o conjunto $\omega - limite$ de B no instante t em sentido pullback como sendo*

$$\omega(B,t) = \bigcap_{\sigma \leq t} \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} \mathcal{S}(t,s)B}.$$

Proposição 2.2.2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\omega(B,t)$ é fechado e*

$$\omega(B,t) = \{x \in X : x = \lim_{k \to \infty} \mathcal{S}(t,s_k)x_k, \text{ para cada } s_k \to -\infty \text{ e } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B\}.$$

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{R}$ fixado. É direto ver que $\omega(B,t)$ é fechado, pois é intersecção de conjuntos fechados. Para a segunda afirmação, denotaremos por $W(t)$ o conjunto candidato a ω-limite pullback. Vamos provar que $\omega(B,t) = W(t)$.

Seja $y \in \omega(B,t)$, temos que $y \in \overline{\bigcup_{s \leq -n} \mathcal{S}(t,s)B}$. Logo, por definição de fecho, $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcup_{s \leq -n} \mathcal{S}(t,s)B$ tal que $y_n \to y$. Logo, para cada y_n da sequência, existe $s_n \leq -n$ e $x_n \in B$ tais que $y_n = \mathcal{S}(t,s_n)x_n$. Como $y_n \to y$ e $s_n \leq -n$, temos que $s_n \to -\infty$ quando $n \to +\infty$.

Assim, conseguimos uma sequência $(s_n)_{n\ in \mathbb{N}}$ com $s_n \to -\infty$ e uma sequência $(x_n)_{n\ in \mathbb{N}} \subset B$ tal que:

$$y = \lim_{n \to \infty} \mathcal{S}(t,s_n)x_n.$$

Isso mostra que $y \in W(t)$, ou seja, $\omega(B,t) \subset W(t)$. Agora tome $y \in W(t)$ por definição de $W(t)$, existem sequências $(s_k)_{k\ in \mathbb{N}}$ e $(x_k)_{k\ in \mathbb{N}} \subset B$ tais que $s_k \to -\infty$ e $y = \lim_{k \to \infty} \mathcal{S}(t,s_k)x_k$. Para mostrar que $y \in \omega(B,t)$, observe que, para qualquer $\sigma \leq t$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, temos $s_k \leq \sigma$. Portanto, $\mathcal{S}(t,s_k)x_k \in \bigcup_{s \leq \sigma} \mathcal{S}(t,s)B$ para $\forall k \geq k_0$, e como $\mathcal{S}(t,s_k)x_k \to y$, temos $y \in \overline{\bigcup_{s \leq \sigma} \mathcal{S}(t,s)B}$. Como isso vale para qualquer $\sigma \leq t$, concluímos que $y \in \omega(B,t)$. ∎

Definição 2.2.3. *Dizemos que um processo $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ é* ***assintoticamente compacto em sentido pullback*** *quando dados $t \in \mathbb{R}$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ limitada em $X, t \in \mathbb{R}$ e $s_k \to -\infty$, quando $k \to \infty$, tivermos que a sequência $\{\mathcal{S}(t,s_k)x_k\}$ possui uma subsequência convergente.*

Lema 2.2.4. *Se $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ é assintoticamente compacto em sentido pullback e $B \subset X$ é limitado, tem-se:*

1. *$\omega(B,t)$ é compacto e não vazio $\forall t \in \mathbb{R}$;*
2. *$\omega(B,t)$ atrai B em sentido pullback no instante t;*
3. *$\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família invariante;*
4. *$\omega(B,t)$ é o menor fechado com a Propriedade 2;*
5. *$\omega(B,t)$ é conexo se B é conexo.*

Demonstração. 1. Observe primeiro que existe um tempo s_0 tal que

$$\bigcup_{s \leq s_0} \mathcal{S}(t,s)B$$

é limitado. Caso contrário, haveria uma sequência $s_k \to -\infty$ e uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B$ tal que $\{\mathcal{S}(t,s_k)x_k\}$ é não limitada, o que contradiz a compacidade assintótica.

Agora, para quaisquer sequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $s_k \leq s_0$, com $s_k \to -\infty$ quando $k \to \infty$, como $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é assintoticamente compacto em sentido pullback, existe uma subsequência de $\{\mathcal{S}(t,s_k)x_k\}$ que converge para algum $y \in X$. Assim, $y \in \omega(B,t)$, pela proposição anterior e $\omega(B,t)$ é não vazio.

Vamos mostrar que $\omega(B,t)$ é compacto. Considere uma sequência arbitrária $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \omega(B,t)$. Por definição de $\omega(B,t)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem uma sequência $(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ e uma sequência $s_k^{(n)} \to -\infty$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{S}(t,s_k^{(n)})x_k^{(n)} = y_n.$$

Defina $z_k^{(n)} := \mathcal{S}(t,s_k^{(n)})x_k^{(n)}$ para simplificar a notação. Assim, temos $\lim\limits_{k\to\infty} z_k^{(n)} = y_n$.

Agora, vamos construir uma subsequência de $\{z_k^{(n)}\}$. Para $n=1$, como $z_k^{(1)} \to y_1$ quando $k \to \infty$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_1$, temos

$$d(z_k^{(1)}, y_1) < 1.$$

Para $n=2$, como $z_k^{(2)} \to y_2$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ com $k_2 \geq \max\{k_1, 2\}$ tal que, para $k \geq k_2$, temos

$$d(z_k^{(2)}, y_2) < \frac{1}{2}.$$

Prosseguindo indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_n \in \mathbb{N}$ com $k_n \geq n$ tal que

$$d(z_{k_n}^{(n)}, y_n) < \frac{1}{n}. \tag{2.2.1}$$

Como $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ é assintoticamente compacto no sentido pullback, existe uma subsequência de $\{z_{k_n}^{(n)}\}$ que converge para algum $y \in \omega(B,t)$. Consequentemente, por (2.2.1) a sequência (y_n) possui uma subsequência convergente para y, o que implica que $\omega(B,t)$ é compacto.

2. Provamos que $\omega(B,t)$ atrai B em sentido pullback no tempo t por contradição. Suponha que existe um $\varepsilon > 0$, uma sequência $s_n \to -\infty$, e uma sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B$ tal que

$$\operatorname{dist}(\mathcal{S}(t,s_n)x_n, \omega(B,t)) > \varepsilon, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mas acabamos de mostrar que deve haver uma subsequência de $\{\mathcal{S}(t,s_n)x_n\}$ que converge para um elemento de $\omega(B,t)$, gerando uma contradição .

3. Mostremos que $\{\omega(B,t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante. Tome $x \in \mathcal{S}(t,s)\omega(B,s)$. Logo, existe $y \in \omega(B,s)$ tal que $x = \mathcal{S}(t,s)y$. Como $y \in \omega(B,s)$, sabemos que existe $s_n \to -\infty$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $\mathcal{S}(s,s_n)x_n \to y$. Logo, para todo $t \geq s$:

$$\mathcal{S}(t,s)y = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(t,s)\mathcal{S}(s,s_n)x_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(t,s_n)x_n \in \omega(B,t).$$

Logo, $\mathcal{S}(t,s)y \in \omega(B,t)$ e portanto $\mathcal{S}(t,s)\omega(B,s) \subset \omega(B,t)$ para todo $t \geq s$. Por outro lado, tome $x \in \omega(B,t)$, existe $s_n \to -\infty$ e $(x_n) \subset B$ tal que $\mathcal{S}(s,s_n)x_n \to x$. Note que:

$$x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(t,s_n)x_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(t,\tau)\mathcal{S}(\tau,s_n)x_n \in \mathcal{S}(t,\tau)\omega(B,t) \subset \mathcal{S}(t,\tau)\omega(B) \quad \forall \tau \leq t.$$

Sendo assim, $\omega(B,t) \subset \mathcal{S}(t,s)\omega(B,s)$ e concluímos que $\omega(B,t) = \mathcal{S}(t,s)\omega(B,s)$ para todo $t \geq s$.

4. Seja $F(t)$ um conjunto fechado tal que $F(t)$ atrai B no sentido pullback no instante t. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe s_0 tal que $\mathcal{S}(t,s)B \subset V_\varepsilon(F(t))$ para todo $s < s_0$. Seja $y \in \omega(B,t)$ então existe $s_n \to -\infty$ e $(x_n) \subset B$ tal que $\mathcal{S}(t,s_n)x_n \to y$. Como $s_n \to -\infty$, existe n_0 tal que $s_n \leq s_0$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $\mathcal{S}(t,s_n)x_n \in V_\varepsilon(F(t))$ para todo $n \geq n_0$. Logo, para cada $n \geq n_0$, existe $z_n \in F(t)$ tal que

$$d(\mathcal{S}(t,s_n)x_n, z_n) < \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando que $\mathcal{S}(t,s_n)x_n \to y$, obtemos

$$d(y, F(t)) \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $d(y, F(t)) = 0$. Como $F(t)$ é fechado, concluímos que $y \in F(t)$.

Portanto,

$$\omega(B,t) \subset F(t).$$

5. Suponha, por contradição, que $\omega(B,t)$ não seja conexo. Então, existe ω_1 *e* ω_2 conjuntos não vazios, disjuntos e fechados tais que:

$$\omega(B,t) = \omega_1 \cup \omega_2,$$

Como $\omega(B,t)$ é compacto e ω_1 e ω_2 são subconjuntos fechados e disjuntos de $\omega(B,t)$, concluímos que ω_1 e ω_2 são compactos. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(\omega_1, \omega_2) = \delta.$$

Considere agora a vizinhança $V_{\frac{\delta}{4}}(\omega(B,t))$ de raio $\dfrac{\delta}{4}$ em torno de $\omega(B,t)$. Como $\omega(B,t)$ atrai B no sentido pullback, então existe um instante $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\bigcup_{s \leq s_0} \mathcal{S}(t,s)B \subset V_{\frac{\delta}{4}}(\omega(B,t)).$$

Como $\omega(B,t) = \omega_1 \cup \omega_2$ e $S(t,s)B$ é conexo. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\bigcup_{s \leq s_0} \mathcal{S}(t,s)B \subset V_{\frac{\delta}{4}}(\omega_1),$$

Portanto, temos:

$$\left(\bigcup_{s \leq s_0} \mathcal{S}(t,s)B \right) \cap \omega_2 = \varnothing.$$

Contudo, como ω_2 é não vazio, tome $x_0 \in \omega_2$. Por definição de $\omega(B,t)$, existe uma sequência $\{s_n\}$ com

$s_n \to -\infty$ e uma sequência $\{y_n\} \subset B$ tal que

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(t, s_n)y_n.$$

Como $x_0 \in \omega_2$ e estamos assumindo que $\bigcup_{s\leq s_0} \mathcal{S}(t,s)B \subset V_{\frac{\delta}{4}}(\omega_1)$, isso implica que $x_0 \in \omega_1$, o que contradiz a hipótese de que $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$.

Portanto, $\omega(B,t)$ é conexo.

■

2.3 Existência de atratores pullback

Nesta seção, apresentaremos resultados que estabelecem condições para a existência de um atrator pullback, bem como propriedades que caracterizam sua estrutura.

Proposição 2.3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico, $(x_n) \subset X$ uma sequência e $K \subset X$ um subconjunto compacto. Se*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = 0,$$

então (x_n) possui uma subsequência convergente em X. Além disso, o limite dessa subsequência pertence a K.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, K) < \varepsilon/2$, para todo $n \geq n_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $f_n : K \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(y) = d(x_n, y).$$

Como a função distância é contínua, cada f_n é contínua. Como K é compacto, f_n atinge seu valor mínimo, de modo que existe $y_n \in K$ tal que $d(x_n, y_n) = \min_{y\in K} d(x_n, y) = d(x_n, K)$.

Assim obtemos uma sequência $(y_n) \subset K$. Pelo fato de K ser compacto, existe uma subsequência (y_{n_k}) que converge para algum $y \in K$, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_k}, y) < \varepsilon/2$, para todo $k \geq k_0$. Vamos mostrar que $x_{n_k} \to y$. Para qualquer k temos

$$d(x_{n_k}, y) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) = d(x_{n_k}, K) + d(y_{n_k}, y) < \varepsilon,$$

isto é, $x_{n_k} \to y$ em X.

Por fim, o limite y pertence a K porque K é fechado e $d(y, K) = 0$. Portanto, (x_n) possui uma subsequência convergente cujo limite está em K. ■

Teorema 2.3.2. *Dado um processo de evolução $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$, as afirmações a seguir são equivalentes:*

a) $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ possui atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b) Existe $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{K}$ uma família de compactos que atrai limitados pullback.

Em caso afirmativo, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B,t)},$$

em que $\mathcal{B}$ é a coleção de limitados de X.

Demonstração. Primeiramente, note que a) implica b) trivialmente, basta tomar $K(t) = \mathcal{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, mostremos que b) implica a).

Se vale b) então dado $B = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ sequência limitada. Dado $t \in \mathbb{R}$, como $K(t)$ atrai em sentido pullback limitados, tem-se que

$$\lim_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t,s)B, K(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dada $s_j \to -\infty$, temos $\lim_{j\to+\infty} d(S(t,s_j)x_j, K(t)) = 0$

Pela Proposição 2.3.1 existe subsequência convergente. Logo, segue que $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ é um processo assintoticamente compacto em sentido pullback. Dessa forma, definindo

$$\mathcal{A}_0(t) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B,t)$$

segue que $\mathcal{A}_0(t)$ atrai cada limitado em sentido pullback no instante t. Logo, definindo $\mathcal{A}(t) = \overline{\mathcal{A}_0(t)}$ também possui esta propriedade.

Note que, também pelo Lema 2.2.4 temos que $\omega(B,t) \subset K(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $B \in \mathcal{B}$, pois $\omega(B,t)$ é o menor fechado que atrai B no sentido pullback. Logo, $\mathcal{A}_0(t) \subset K(t)$ e portanto $\mathcal{A}(t) = \overline{\mathcal{A}_0(t)} \subset \overline{K(t)} = K(t)$. Segue que $\mathcal{A}(t)$ é compacto, pois é um subconjunto fechado de um compacto.

A invariância de $\mathcal{A}(\cdot)$ segue da invariância de cada conjunto ω-limite $\omega(B,\cdot)$. De fato, dado $x_0 \in \mathcal{A}(s)$, existem $(x_n) \subset \mathcal{A}_0(s)$ com $x_n \to x_0$ quando $n \to +\infty$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x_n \in \omega(B_n,s)$. Então, $\mathcal{S}(t,s)x_n = y_n \in \omega(B_n,t)$ e, pela continuidade de $\mathcal{S}(t,s)$, $\mathcal{S}(t,s)x_n = y_n \to \mathcal{S}(t,s)x_0$, o que implica que $\mathcal{S}(t,s)x_0 \in A(t)$, e assim $\mathcal{S}(t,s)A(s) \subset A(t)$. Agora, escolha algum $y_0 \in A(t)$. Então, existem $y_n \in \omega(B_n,t)$ com $y_n \to y_0$ quando $n \to +\infty$. Mas então, novamente pela invariância da família $\omega(B_n,\cdot)$, existem $x_n \in \omega(B_n,s)$ com $\mathcal{S}(t,s)x_n = y_n$. Mas como $x_n \in \omega(B_n,s) \subset A(s)$ e $A(s)$ é compacto, existe uma subsequência x_{n_j} que converge para algum $x_0 \in A(s)$, para a qual $\mathcal{S}(t,s)x_0 = \lim_{j\to\infty} \mathcal{S}(t,s)x_{n_j} = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0$. Conclui-se que $A(t) \subset \mathcal{S}(t,s)A(s)$, e assim $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante.

Por fim, mostremos a propriedade de minimalidade. Seja $\hat{A}(t)$ é fechado e limitado que atrai pullback conjuntos limitados no instante t, então $\omega(B,t) \subset \hat{A}(t)$ para todos os subconjuntos limitados B de X, e, portanto, $\mathcal{A}(t) \subset \hat{A}(t)$.

■

Corolário 2.3.3. *Se existe $K \subset X$ compacto que atrai em sentido pullback todos os limitados de X então existe atrator pullback e ele é dado por:*

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B,t)}.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.3.2, bastando definir a família $\{K(t) : t \in \mathbb{R}\}$ por $K(t) = K$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

■

Teorema 2.3.4. *Se $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto, então $\mathcal{A}(t)$, definido por*

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \omega(B,t), \tag{2.3.1}$$

atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t, a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante e, se $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, se $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é pullback dissipativo, temos que $\mathcal{A}(t)$ é limitado.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai limitados em sentido pullback limitados. Dado um conjunto limitado $B \subset X$, pelo Lema 2.2.4 $\omega(B,t)$ atrai B no sentido pullback. Como $\mathcal{A}(t)$ contém $\omega(B,t)$, segue que $A(t)$ também atrai B no sentido pullback. Para mostrar que $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante, isto é, vamos provar que $\mathcal{S}(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t) \quad \forall t \geq s$. Pela definição de $\mathcal{A}(s)$, temos $\mathcal{A}(s) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B,s)$. Logo, $\mathcal{S}(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{S}(t,s) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B,s)$. Como $\mathcal{S}(t,s)\omega(B,s) = \omega(B,t) \quad \forall t \geq s$. Portanto, $\mathcal{S}(t,s)\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(t)$, como queríamos. Agora, suponha que $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ seja uma família de conjuntos que atrai pullback subconjuntos limitados de X. Queremos mostrar que $\mathcal{A}(t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $C(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados, para qualquer conjunto limitado $B \subset X$, temos que a família $\{\overline{C(t)} : t \in \mathbb{R}\}$ também atrai, basta notar que dado um conjunto limitado $B \subset X$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $s_0 = s_0(\varepsilon, B)$ tal que

$$\mathcal{S}(t,s)B \subset V_\varepsilon(C(t)) \subset V_\varepsilon(\overline{C(t)}) \quad \forall s \leq s_0.$$

Assim, $\omega(B,t) \subset \overline{C(t)}$ para todo $B \subset X$ limitado. Portanto, pela definição de $\mathcal{A}(t)$,

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\omega(B,t) : B \subset X, B \text{ limitado}\} \subset \overline{C(t)}.$$

Por fim, se $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é pullback limitado dissipativo, existe $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos limitados tal que o conjunto $D(t)$ atrai em sentido pullback cada um dos limitados, pela demonstração acima temos que $\mathcal{A}(t) \subset \overline{D(t)}$, como $D(t)$ é limitado, temos que $\overline{D(t)}$ também é limitado. Portanto, $\mathcal{A}(t)$ é limitado. ■

Observação 2.3.5. *Considere a família $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definida no Teorema 2.3.4. Se $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é pullback assintoticamente compacto e dissipativo. Então, $\{\overline{\mathcal{A}(t)} : t \in \mathbb{R}\}$ consiste numa família de fechados limitados que atraem, em sentido pullback, todos os subconjuntos limitados de X. Em particular, quando $(X, \|\cdot\|)$ é espaço normado com $\dim(X) < \infty$, conclui-se que $\{\overline{\mathcal{A}(t)} : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator pullback.*

Definição 2.3.6. *Diremos que um processo de evolução $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é **fortemente limitado dissipativo no sentido pullback** quando existir uma família de limitados tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ o conjunto $D(t)$ absorve limitados no instante τ para todo $\tau \leq t$, isto é, dado B um conjunto limitado de X e $\tau \leq t$ existe $s_0 = s_0(\tau, B)$ tal que $\mathcal{S}(\tau,s)B \subset D(t)$ para todo $s \leq s_0$.*

Teorema 2.3.7. *Um processo de evolução $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto se, somente se, $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s \leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que o processo de evolução $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto. Assim, definindo

$$\mathcal{A}(t) = \bigcup \{\omega(B,t) : B \subset X, B \text{ limitado}\}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

segue do Teorema 2.3.4 que, $\mathcal{A}$ é invariante e para cada $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(t)$ atrai pullback subconjuntos limitados de X no instante t. Além disso, se $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback subconjuntos limitados de X, então $A(t) \subset \overline{D(t)}$.

Do fato que $\{\mathcal{S}(t,s) : t > s \in T\}$ é pullback fortemente limitado dissipativo, existe $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ que absorve pullback subconjuntos limitados de X no instante τ, para cada $\tau \leq t$.

Queremos mostrar que

$$\mathcal{A}(t) = \omega(B(t), t).$$

Assim, pelo Lema 2.2.4 temos que $\omega(B(t), t) \subset \mathcal{A}(t)$. Dado $D \subset X$ limitado, para todo $\tau \leq t$ existe $s_0(D, \tau)$ tal que

$$\mathcal{S}(\tau, s)D \subset B(t) \quad \forall s \leq s_0$$

Seja $x \in \omega(D, t)$, existe $s_j \to -\infty$ e $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in D$ tal que $\mathcal{S}(t, s_j)xj \to x$.

Como $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\ \}$ absorve fortemente, podemos encontrar subsequência $(s_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que para k suficientemente grande $s_{jk} \leq t - k$ e

$$\mathcal{S}(t-k, s_{jk})x_{jk} \in B(t).$$

Logo,

$$x = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{S}(t, s_{jk})x_{jk}$$

$$x = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{S}(t, t-k)\underbrace{\mathcal{S}(t-k, s_{jk})x_{jk}}_{\in B(t)}$$

Assim, $x \in \omega(B(t), t)$ e portanto $\omega(D, t) \subset \omega(B(t), t)$. Como tomamos D limitado, temos que a união dos ω-limites de limitados estão em $\omega(B(t), t)$, ou seja, $\mathcal{A}(t) \subset \omega(B(t), t)$. Logo, $\mathcal{A}(t) = \omega(B(t), t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por fim, mostremos que $\bigcup_{s\leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Fixado $t \in \mathbb{R}$, para todo $\tau \leq t$ e $D \subset X$ limitado. Temos que

$$\omega(D, \tau) \subset B(t),$$

pois $\omega(D, \tau)$ é o menor fechado que atrai no instante τ. Logo, $\mathcal{A}(\tau) \subset B(t)$ para todo $\tau \leq t$. Portanto, $\bigcup_{\tau\leq t} \mathcal{A}(\tau) \subset B(t)$ como queríamos demonstrar.

Por outro lado, suponha que $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ tem um atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com a propriedade que $\bigcup_{s\leq t} \mathcal{A}(s)$ é limitado para cada $t \in \mathbb{R}$. Seja $B = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência limitada e $t \in \mathbb{R}$, logo

$$\lim_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t,s)B, \mathcal{A}(t)) = 0,$$

pois $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ no instante t. Pela Proposição 2.3.1 segue que (x_n) possui subsequencia convergente. Agora mostremos que $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é fortemente limitado dissipativo em sentido pullback, seja $t \in \mathbb{R}$ fixado, tome $\tau \leq t$ e $B \subset X$ limitado. Defina a família $\{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em que $D(t) = \cup_{\tau\leq t} V_1(\mathcal{A}(\tau))$. Dado $t \in \mathbb{R}$, como $V_1(\mathcal{A}(\tau))$ absorve limitados $\forall \tau \leq t$ temos que $V_1(\mathcal{A}(\tau))$ absorve B no sentido pullback no instante τ. Logo, existe $s_0 = s_0(\tau, B)$ tal que

$$\begin{aligned} S(\tau, B) &\subset V_1(\mathcal{A}(\tau)) \\ &\subset D(t) \end{aligned}$$

■

2.4 Semigrupos

Depois de estudar o processo de evolução no capítulo anterior, vimos que a solução de um problema de valor inicial pode ser descrita por uma família de operadores. Nesse contexto, é possível focar em uma estrutura um pouco mais simples: os problemas autônomos, isto é, problemas do tipo $\dot{x} = f(x)$. Os operadores associados a esses problemas possuem propriedades que nos levam naturalmente à teoria de semigrupos. Neste capítulo, vamos entender melhor o que são os semigrupos de operadores e como essa teoria se conecta com o que foi desenvolvido até aqui.

Definição 2.4.1. *Sejam $X = \{X, d\}$ um espaço métrico e $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Uma família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamada de **semigrupo** em X, se satisfaz:*

1. $T(0) = Id_X$;
2. $T(t + s) = T(t)T(s), \forall s, t \geq 0$;
3. *A aplicação $(x, t) \mapsto T(t)x$ é contínua para $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times X$.*

Proposição 2.4.2. *Se $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ é um processo autônomo (ver definição 2.1.4). Então, a família $\{T(t) : t > 0\}$ definida por $T(t) = \mathcal{S}(t, 0)$, é um semigrupo em X.*

Analogamente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em X, definindo $\mathcal{S}(t, s) = T(t - s)$ temos que $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ é um processo de evolução autônomo.

Demonstração. Note que, como $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$ é autônomo então $\mathcal{S}(t, s) = \mathcal{S}(t - s, 0) = T(t - s)$.

i $T(0) = \mathcal{S}(0, 0) = Id_X$;

ii $T(t + s) = \mathcal{S}(t + s, 0) = \mathcal{S}(t, (-s)) = \mathcal{S}(t, 0)\mathcal{S}(0, (-s)) = T(t - 0)T(0 - (-s)) = T(t)T(s)$;

iii a aplicação $(t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua. Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Além disso, sejam $x_0 \in X$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(t_n, 0)x_n = \mathcal{S}(t_0, 0)x_0 = T(t_0)x_0.$$

Portanto $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em X.

Por outro lado, tome $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X, e definimos $\mathcal{S}(t, s) = T(t - s)$. Vamos mostrar que $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$ é um processo de evolução.

i $\mathcal{S}(t, t) = T(t - t) = T(0) = Id_X$;

ii $\mathcal{S}(t, v)\mathcal{S}(v, s) = T(t - v)T(v - s) = T(t - v + v - s) = T(t - s) = \mathcal{S}(t, s)$;

iii Mostremos que a aplicação $(t, s, x) \mapsto \mathcal{S}(t, s)x = T(t - s)x \in X$ é contínua. Note que a aplicação $(x, t) \mapsto T(t)x$ é contínua. A função $(t, s) \mapsto (t - s)$ é contínua. Portanto a aplicação $(t, s, x) \mapsto \mathcal{S}(t, s)x$ é uma composição de duas aplicações contínuas e consequentemente contínua.

Logo, $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$ é um processo de evolução. ∎

Definição 2.4.3. *Para um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ e um conjunto $B \subset X$ definimos*

- *Para cada* $t \geq 0$, *a imagem de* B *sob* $T(t)$,

$$T(t)B = \{T(t)x : x \in B\};$$

- *A órbita positiva de* B,

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \geq 0} T(t)B;$$

- *A órbita positiva de* $T(s)B$,

$$\gamma_s^+(B) = \bigcup_{t \geq s} T(t)B.$$

Definição 2.4.4. *Um semigrupo* $\{T(t); t \geq 0\}$ *é dito* ***eventualmente limitado*** *se para cada limitado* $B \subset X$, *existe* $t_B \geq 0$ *tal que* $\gamma_{t_B}^+(B)$ *é limitado.*

Definição 2.4.5. *Um conjunto* $K \subset X$ *é dito* ***invariante*** *se* $T(t)K = K$, *respectivamente, para todo* $t \geq 0$. *Além disso, K é* ***positivamente invariante*** *se* $T(t)K \subset K$ *para todo* $t \geq 0$.

Definição 2.4.6. *Dizemos que um conjunto* B ***atrai*** C *sob a ação de um semigrupo* $\{T(t); t \geq 0\}$ *quando*

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}(T(t)C, B) = 0.$$

Deste modo, se B *atrai* C, *dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $t_0 \geq 0$ *de modo que*

$$\operatorname{dist}(T(t)C, B) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,$$

o que implica que

$$\operatorname{dist}(T(t)C, B) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0,\ c \in C \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_{t_0}^+(C) \subset V_\varepsilon(B).$$

Portanto, dizer que B *atrai* C *é equivalente a dizer que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $t_0 \geq 0$ *tal que*

$$\gamma_{t_0}^+(C) \subset V_\varepsilon(B).$$

Definição 2.4.7. *Para qualquer conjunto* $B \subset X$, *definimos o conjunto* ω*-limite de* B, $\omega(B)$ *como,*

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)}.$$

Analogamente a Proposição 2.2.2 temos a seguinte caracterização:

Proposição 2.4.8. *Se* $B \subset X$, *então* $\omega(B)$ *é fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X : y = \lim_{n \to +\infty} T(t_n)x_n \text{ para certas sequências } t_n \to +\infty \text{ e } (x_n) \subset B\}$$

Definição 2.4.9. *O semigrupo,* $\{T(t) : t \geq 0\}$, *é dito* ***dissipativo****, se existe um conjunto limitado* $B \subset X$ *que atrai que cada limitado de* X *sob ação de* $T(t)$.

Definição 2.4.10. *Um semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é dito* ***assintoticamente compacto*** *se para toda sequência limitada* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *e* $t_n \to +\infty$, *a sequência* $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *admite subsequencia convergente.*

Definição 2.4.11. *Chamaremos $\mathcal{A} \subset X$ de* **atrator global** *para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ quando $\mathcal{A}$ é compacto, invariante e atrai cada um dos subconjuntos limitados de X pela ação de $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

Teorema 2.4.12. *Se um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global A, então*

i) O atrator é único;

ii) A é o menor fechado e limitado que atrai subconjuntos limitados de X, em particular, é o menor compacto de X que atrai limitados;

iii) A é o maior conjunto limitado e invariante.

Demonstração. Para provar ii), seja D um conjunto fechado e limitado que atrai limitados. Como A é compacto temos que A é limitado e portanto D atrai A, ou seja,

$$0 = \lim_{t\to\infty} dist(T(t)A, D)$$

Como $T(t)A = A, \forall t \geq 0$, pois A é invariante. $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)A, D) = \lim_{t\to\infty} dist(A, D)$. Portanto dist$(A, D) = 0$ e pela Observação 2.1.6 obtemos que $A \subset \overline{D} = D$, pois D é fechado. Logo, $A \subset D$, como queríamos.

Agora, seja B um limitado e invariante, por ser limitado o atrator global A o atrai e por ser invariante (com o argumento da prova de ii)),

$$0 = \lim_{t\to\infty} dist(T(t)B, A) = \lim_{t\to\infty} dist(B, A)$$

obtemos que $B \subset \overline{A} = A$ e portanto segue iii).

Finalmente, seja A_1 um outro atrator global para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$. Como A_1 é um compacto que atrai limitados e A é atrator global, temos por ii) que $A \subset A_1$. E como A_1 é um limitado e invariante e A é atrator global, de iii) segue que $A_1 \subset A$. Portanto, devemos ter $A_1 = A$, o que conclui a demonstração. ∎

Apresentamos agora o t eorema que estabelece a relação entre os atratores pullback e os atratores globais.

Teorema 2.4.13. *Se $\{\mathcal{S}(t, s) : t \geq s\}$ é um processo autônomo e $T(\cdot)$ é o semigrupo associado, então $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$ possui atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se, e somente se, $T(\cdot)$ possui atrator global $\mathcal{A}$. Em caso afirmativo, $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ é o atrator global para $T(\cdot)$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui atrator global $\mathcal{A}$ e consideremos a família constante $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Naturalmente, essa família é o atrator global pullback para $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$, pois para cada $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$ é compacto e invariante

$$\mathcal{S}(t, s)\mathcal{A}(s) = T(t - s)\mathcal{A} = \mathcal{A} = \mathcal{A}(t), \quad \forall t \geq s.$$

Além disso, se B é limitado temos

$$\lim_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t, s)B, \mathcal{A}(t)) = \lim_{s\to-\infty} dist(T(t - s)B, \mathcal{A}) = 0.$$

Se $\{F(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de fechados que atrai limitados no sentido pullback, em particular atrai $\mathcal{A}$, então para cada $t \in \mathbb{R}$

$$0 = \lim_{s\to-\infty} dist(\mathcal{S}(t, s)\mathcal{A}(t), F(t)) = dist(\mathcal{A}, F(t)).$$

Logo, $\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{(F(t))} = F(t)$.

Reciprocamente, se $\mathcal{S}(\cdot,\cdot)$ é autônomo e $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é o atrator pullback. Seja $B \subset X$ um conjunto limitado. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to-\infty} dist\big(\mathcal{S}(0,s)B,\mathcal{A}(0)\big)=0 &\iff \lim_{s\to-\infty} dist\big(\mathcal{S}(0-s,0)B,\mathcal{A}(0)\big)=0\\ &\iff \lim_{s\to-\infty} dist\big(T(0-s)B,\mathcal{A}(0)\big)=0\\ &\iff \lim_{s\to-\infty} dist\big(T(t-s)B,\mathcal{A}(0)\big)=0 \quad \forall\, t,s\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Defina a família $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em que $C(t) = \mathcal{A}(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é família de compactos que atrai conjuntos limitados em sentido pullback. Segue da minimalidade de $\mathcal{A}(\cdot)$ que $\mathcal{A}(t) \subset C(t) = \mathcal{A}(0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}(0)$ é limitado. Tome

$$K = \overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}(t)}$$

é compacto, invariante, e atrai limitados pela ação de $T(\cdot)$. Portanto, K é atrator global de $T(\cdot)$. Note que

$$\mathcal{A}(0) \subset K \subset \mathcal{A}(0).$$

Ou seja, $K = \mathcal{A}(0)$. Portanto $\mathcal{A}(0)$ atrator global sob a ação de $T(\cdot)$.

■

Proposição 2.4.14. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo contínuo em X e considere o processo autônomo associado*

$$S(t,s) = T(t-s), \qquad t \geq s.$$

Então o semigrupo é dissipativo se, e somente se, o processo de evolução pullback fortemente limitado dissipativo.

Demonstração. Suponha que o semigrupo seja dissipativo. Então, para cada conjunto limitado $B \subset X$, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\bigcup_{t\geq t_0} T(t)B \subset B_0.$$

Assim, $T(t)B \subset B_0$ para todo $t \geq t_0$. Defina a família $D(t) = B_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo a família constante $D(t) = \{B_0 : t \in \mathbb{R}\}$ é uma familia de limitados que absorve limitados. De fato, fixe $t \in \mathbb{R}$ e B limitado. Assim, para todo $\tau \leq t$ defina $s_0 = \tau - t_0$. Deste modo, para todo $s \leq s_0$, temos $\tau - s \geq \tau - s_0 = t_0$. Logo:

$$S(\tau,s)B = T(\tau-s)B \subset B_0 = D(t).$$

Portanto, o processo é fortemente limitado dissipativo no sentido pullback. Por outro lado, suponha que $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ é fortemente limitado dissipativo em sentido pullback. Escolha $t = 0$. Existe $s_0 = s_0(0,B,\varepsilon)$ tal que para todo $\tau \leq 0$ temos que

$$S(\tau,s)B \subset D(0), \qquad \forall s \leq s_0.$$

Como $S(\tau,s) = T(\tau-s)$ e $s \leq s_0$. Defina $t_0 = -s_0 > 0$. Para todo $t \geq t_0$, tome $s = -t \leq -t_0 = s_0$. Então

$$T(t)B = T(-s)B = S(0,s)B \subset D(0).$$

Portanto

$$\bigcup_{t \geq t_0} T(t)B \subset D(0)$$

e o semigrupo é dissipativo. ∎

Proposição 2.4.15. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo e considere o processo autônomo associado*

$$S(t,s) = T(t-s), \qquad t \geq s.$$

Então o semigrupo é assintoticamente compacto se, e somente se, o processo é pullback assintoticamente compacto.

Demonstração. Suponha que o semigrupo é assintoticamente compacto. Seja $t \in \mathbb{R}$ fixo, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e $s_k \to -\infty$. Defina $\tau_k = t - s_k$. Como $s_k \to -\infty$, temos $\tau_k \to +\infty$. Observe que

$$S(t, s_k)x_k = T(t - s_k)x_k = T(\tau_k)x_k.$$

Como (x_k) é limitada e $\tau_k \to \infty$, a sequência $(T(\tau_k)x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Portanto, $\{S(t, s_k)x_k\}$ possui uma subsequência convergente, mostrando que o processo é assintoticamente compacto em sentido pullback.

Agora, suponha que o processo de evolução é assintoticamente compacto em sentido pullback. Seja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e $t_k \to \infty$. Fixe qualquer $t \in \mathbb{R}$ (por exemplo, $t = 0$) e defina $s_k = t - t_k$. Como $t_k \to \infty$, temos $s_k = t - t_k \to -\infty$. Observe que

$$T(t_k)x_k = T(t - s_k)x_k = S(t, s_k)x_k.$$

Pela compacidade assintótica pullback do processo, como (x_k) é limitada e $s_k \to -\infty$, a sequência $\{S(t, s_k)x_k\}$ possui uma subsequência convergente. Portanto, $\{T(t_k)x_k\}$ possui uma subsequência convergente. Assim, semigrupo é assintoticamente compacto. ∎

Teorema 2.4.16. *Seja* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo. Então* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *possui um atrator global se, e somente se, é dissipativo e assintoticamente compacto.*

Demonstração. Como $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto e dissipativo então pelas as Proposições 2.4.15 e 2.4.14 temos que o processo de evolução autônomo associado é fortemente limitado dissipativo e assintoticamente compacto em sentido pullback. Assim, pelo Teorema 2.3.7 temos que existe atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e pelo Teorema 2.4.13 existe atrator global. ∎

Exemplo 2.4.17. *Considere o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x - x^3, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}$ *é a condição inicial.*

Resolvendo a equação por separação de variáveis, obtemos a solução explícita

$$x(t,x_0)=\begin{cases}\dfrac{e^t}{\sqrt{\dfrac{1-x_0^2}{x_0^2}+e^{2t}}}, & \textit{se } x_0>0,\\ -\dfrac{e^t}{\sqrt{\dfrac{1-x_0^2}{x_0^2}+e^{2t}}}, & \textit{se } x_0<0,\\ 0, & \textit{se } x_0=0.\end{cases}$$

Assim, a família de operadores $\{T(t) : t\geq 0\}$ *definida por*

$$T(t)x_0 = x(t,x_0)$$

constitui o semigrupo associado ao problema.

Na Figura 2.4.1, observamos que todas as soluções com condição inicial em $[-1,1]$ *permanecem neste intervalo e todas as soluções são atraídas para os pontos* $x=-1$ *e* $x=1$. *Isso sugere que o atrator global do sistema é*

$$\mathcal{A}=[-1,1].$$

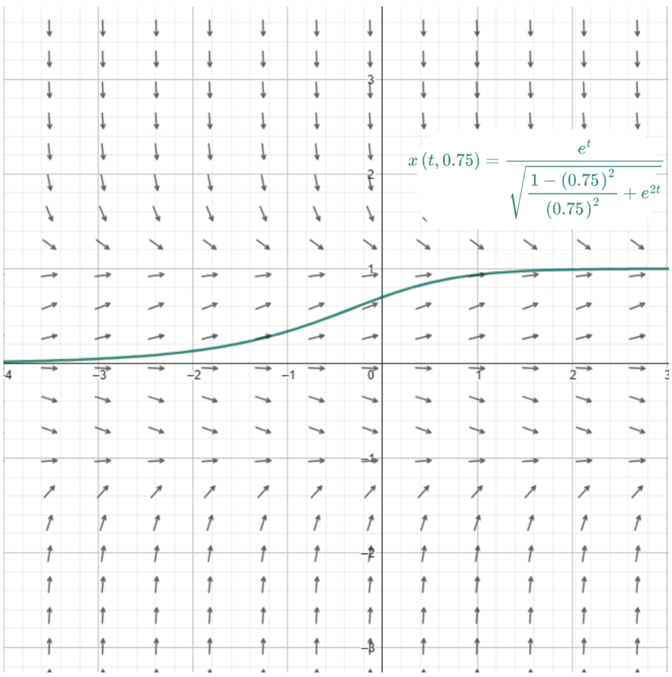


Figura 2.4.1: Campo vetorial associado à EDO $\dot{x}=x-x^3$.

Mostremos a seguir que, de fato, $\mathcal{A}=[-1,1]$ *é o atrator global para o semigrupo* $T(\cdot)$. *Assim, seja* $x_0\in\mathcal{A}$.

Caso 1: $x_0>0$

Temos

$$T(t)x_0=x(t,x_0)=\frac{e^t}{\sqrt{\frac{1-x_0^2}{x_0^2}+e^{2t}}}.$$

Note que

$$0 < x(t, x_0) \leq 1 \quad \textit{para todo } t \geq 0,$$

porque o denominador $\sqrt{\dfrac{1-x_0^2}{x_0^2} + e^{2t}} \geq e^t$. *Logo,* $x(t, x_0) \in [0, 1] \subset [-1, 1]$.

Caso 2: $x_0 < 0$

Temos

$$T(t)x_0 = x(t, x_0) = -\frac{e^t}{\sqrt{\frac{1-x_0^2}{x_0^2} + e^{2t}}}.$$

Analogamente, $-1 \leq x(t, x_0) < 0$ *para todo* $t \geq 0$, *de modo que* $x(t, x_0) \in [-1, 0] \subset [-1, 1]$.

Caso 3: $x_0 = 0$

Neste caso, $x(t, 0) = 0 \in [-1, 1]$ *para todo* $t \geq 0$.

Portanto, em todos os casos, temos $x(t, x_0) \in [-1, 1]$. *Logo* $T(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. *Com a análise acima, também conseguimos concluir que* $\mathcal{A} \subset T(t)\mathcal{A}$. *Dessa forma,* $\mathcal{A}$ *é invariante. Agora, tome* $B \in \mathbb{R}$ *limitado, queremos mostrar que existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $\gamma_{t_0}^+(B) \subset V_\varepsilon(\mathcal{A})$. *Logo, seja* $\varepsilon > 0$. *Note que como* $B \subset \mathbb{R}$ *e limitado, temos que* $\overline{B}$ *é compacto. Seja* $x \in \overline{B}$.

Caso 1: $x > 0$

$$T(t)x = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2} + e^{2t}}}.$$

No que $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)x = 1$. *Logo, existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \geq t_0$ *temos que* $d(T(t)x, 1) < \varepsilon$. *Ou seja,* ***Caso 2:*** $x < 0$

$$T(t)x = -\frac{e^t}{\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2} + e^{2t}}}.$$

No que $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)x = -1$. *Logo, existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \geq t_0$ *temos que* $d(T(t)x, 1) < \varepsilon$. *Ou seja,* ***Caso 3:*** $x_0 = 0$ *Neste caso,* $x(t, 0) = 0 \in [-1, 1]$ *para todo* $t \geq 0$.

Assim, para cada $x \in \overline{B}$ *existe* $t_x \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$d(T(t)x, \mathcal{A}) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_x.$$

Note que a aplicação $x \mapsto d(T(t)x, \mathcal{A})$ *é contínua, como* $\overline{B}$ *é um compacto temos que para todo* $x \in \overline{B}$, *a aplicação é uniformemente contínua. Logo, existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$d(T(t)x, \mathcal{A}) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Disso, segue que $\gamma_{t_0}^+(B) \subset V_\varepsilon(\mathcal{A})$. *E podemos concluir que* $\mathcal{A}$ *é o atrator global para o semigrupo* $T(\cdot)$.

3 SIR não autônomo

Neste trabalho, introduziremos o modelo SIR, que servirá como aplicação da teoria abstrata apresentada. O modelo SIR é um dos mais clássicos e amplamente utilizados para descrever a propagação de doenças infecciosas em uma população. Ele divide a população em três grupos:

- **Indivíduos suscetíveis** (S)**:** Indivíduos que não estão infectados, mas que podem contrair a doença ao entrarem em contato com indivíduos infectados.
- **Indivíduos infectados** (I)**:** Indivíduos que estão atualmente infectados e são capazes de transmitir a doença a indivíduos suscetíveis.
- **Indivíduos recuperados** (R)**:** Indivíduos que já foram infectados e que não podem mais contrair ou transmitir a doença, seja por imunidade adquirida ou por terem falecido.

Seja $N(t)$ a população total no instante de tempo t; temos que:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

Assumimos ainda as seguintes constantes não-negativas:

- a: taxa de mortalidade ou emigração;
- b: taxa de reinfecção;
- $\frac{1}{c}$: tempo médio que um indivíduo permanece infectado;

Além disso, consideramos as seguintes funções $q, \gamma : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ para o nosso modelo:

- $\gamma(t)$: taxa de infecção.
- $q(t)$: nascimentos e imigrações na população.

Para nosso estudo, tomaremos q e γ funções contínuas e limitadas. A seguir, a Figura 3.0.1 apresenta um diagrama ilustrando a dinâmica entre os grupos.

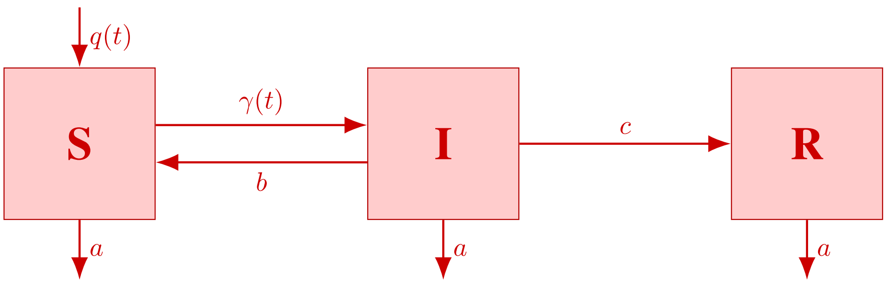


Figura 3.0.1: Diagrama do modelo SIR.

Com base nas suposições anteriores, o modelo SIR é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$
\begin{aligned}
S' &= q(t) - \gamma(t)\frac{SI}{N} - aS + bI, && \text{(3.0.1a)}\\
I' &= \gamma(t)\frac{SI}{N} - (a+b+c)I, && \text{(3.0.1b)}\\
R' &= cI - aR. && \text{(3.0.1c)}
\end{aligned}
$$

Por se tratar de um problema com motivações biológicas, uma restrição importante é que estamos considerando apenas valores não negativos para $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, pois não faz sentido admitir populações negativas. Sendo assim, o espaço de estados do sistema está contido no octante do $\mathbb{R}^3$ onde todas as coordenadas são não negativas. Denotamos esse conjunto por:

$$X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0\}.$$

3.1 Boa colocação

Teorema 3.1.1 (Boa colocação para o modelo SIR)**.** *Para cada dado inicial $x_0 = (S_0, I_0, R_0) \in X$ e instante inicial $s \geq 0$, existe uma única solução*

$$x(t,s,x_0) = (S(t,s,x_0), I(t,s,x_0), R(t,s,x_0)) \in \mathcal{C}([s,+\infty), X)$$

do sistema (3.0.1a)–(3.0.1c)*, satisfazendo a condição inicial $x(s,s,x_0) = x_0$.*

Além disso, a família de operadores $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$ definida por

$$\mathcal{S}(t,s) : X \to X, \quad x_0 \mapsto \mathcal{S}(t,s)x_0 := x(t,s,x_0)$$

define um processo de evolução no espaço X.

Demonstração. Primeiramente, vamos denotar o sistema (3.0.1a)–(3.0.1c) da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
S' &= q(t) - \gamma(t)\frac{SI}{N} - aS + bI && =: g_1(t,x), && \text{(3.1.1a)}\\
I' &= \gamma(t)\frac{SI}{N} - (a+b+c)I && =: g_2(t,x), && \text{(3.1.1b)}\\
R' &= cI - aR && =: g_3(t,x), && \text{(3.1.1c)}
\end{aligned}
$$

em que $x = (S,I,R) \in X$ e $N = S + I + R$

Mostremos que $g = (g_1, g_2, g_3)$ é localmente lipschitziana em relação a segunda variável. Para $N > 0$, a derivada de g em relação a x é dada por:

$$
D_x(g)(t,x) = \begin{bmatrix}
-\gamma(t)\dfrac{I(I+R)}{N^2} - a & -\gamma(t)\dfrac{S(S+R)}{N^2} + b & \gamma(t)\dfrac{SI}{N^2}\\
\gamma(t)\dfrac{I(I+R)}{N^2} & \gamma(t)\dfrac{S(S+R)}{N^2} - (a+b+c) & -\gamma(t)\dfrac{SI}{N^2}\\
0 & c & -a
\end{bmatrix}
$$

Temos que as derivadas parciais de g existem e são contínuas em X e, portanto, g é localmente Lipschitz em relação à segunda variável. No caso que $N = 0$, defina

$$f(t,x) = \begin{cases} \gamma(t)\dfrac{SI}{N}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Provemos que f é localmente Lipschitz em relação à segunda variável em X, munido da métrica $d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$.

Seja $x = (S,I,R) \in X$ e $t^* \in [s,+\infty)$. Como γ é limitada, existe $M > 0$ tal que $|\gamma(t)| < M$, para todo $t \in [s,+\infty)$ Seja (S_1,I_1,R_1) e $(S_2,I_2,R_2) \in B_\varepsilon(x)$ e $t \in B_\varepsilon(t^*)$.

- Caso 1: $N_1 = S_1 + I_1 + R_1 > 0$ e $(S_2,I_2,R_2) = (0,0,0)$. Assim, como $S_1 \leq N_1$:

$$d(f(t,S_1,I_1,R_1), f(t,0,0,0)) = |\gamma(t)|\frac{S_1I_1}{N_1} \leq MI_1 \leq M(S_1+I_1+R_1) = Md((S_1,I_1,R_1),(0,0,0)).$$

- Caso 2 $N_1 = S_1 + I_1 + R_1 > 0$ e $N_2 = S_2 + I_2 + R_2 > 0$:

$$\begin{aligned} d(f(t,S_1,I_1,R_1), f(t,S_2,I_2,R_2)) &= |\gamma(t)|\left|\frac{S_1I_1}{N_1} - \frac{S_2I_2}{N_2}\right| \\ &\leq M\left(\left|\frac{S_1I_1}{N_1}\right| + \left|\frac{S_2I_2}{N_2}\right|\right) \\ &\leq M(I_1+I_2) \\ &\leq M(S_1+I_1+R_1+S_2+I_2+R_2) \\ &= 2Md((S_1,I_1,R_1),(S_2,I_2,R_2)). \end{aligned}$$

Portanto para todo (S_1,I_1,R_1) e $(S_2,I_2,R_2) \in X$, temos que $d(f(S_1,I_1,R_1), f(S_2,I_2,R_2)) \leq 2Md((S_1,I_1,R_1),(S_2,I_2,R_2))$ e portanto f é Lipschitz em relação a x, e pelo discutido anteriormente concluímos que g é localmente Lipschitz em relação à segunda variável.

Pelo Teorema 1.1.7, o sistema SIR possui a propriedade da unicidade de soluções e, assim, pela Proposição 1.4.5, existe uma solução máxima $x(t,s,x_0) = (S(t,s,x_0), I(t,s,x_0), R(t,s,x_0))$ para (3.0.1a)–(3.0.1c) definida para $[0,\tau_{max})$.

Mostremos que $\tau_{max} = +\infty$. Primeiramente, somando as equações do sistema (3.0.1a)–(3.0.1c) obtemos:

$$N'(t,s,x_0) = S'(t,s,x_0) + I'(t,s,x_0) + R'(t,s,x_0) = q(t) - aN(t,s,x_0).$$

Logo,

$$N'(t,s,x_0) + aN(t,s,x_0) = q(t).$$

A EDO acima é uma equação linear de primeira ordem. Resolvendo analiticamente obtemos que

$$N(t,s,x_0) = \left(\int_s^t e^{a\tau}q(\tau)\,d\tau + e^{as}N(s,s,x_0)\right)e^{-at}.$$

Como $q(t)$ é limitada, existe uma constante $q_1 > 0$ tal que $q(t) \leq q_1$ para todo $t \geq 0$. Logo,

$$N(t,s,x_0) \leq \left(\int_s^t e^{a\tau} q_1 \, d\tau + e^{-as} N(s,s,x_0) \right) e^{-at}$$

$$N(t,s,x_0) \leq \left(\frac{q_1}{a}(e^{at} - e^{as}) + e^{as} N(s,s,x_0) \right) e^{-at}$$

$$N(t,s,x_0) \leq \frac{q_1}{a}(1 - e^{a(s-t)}) + e^{a(s-t)} N(s,s,x_0)$$

$$N(t,s,x_0) \leq e^{a(s-t)} \left(N(s,s,x_0) - \frac{q_1}{a} \right) + \frac{q_1}{a}. \tag{3.1.2}$$

Suponha, que $\tau_{max} < \infty$. Obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \tau_{\max}} \|N(t,s,x_0)\| &\leq \lim_{t \to \tau_{\max}} \|e^{a(s-t)} \left(x_0 - \frac{q_1}{a} \right) + \frac{q_1}{a}\| \\
&= \|e^{a(s-\tau_{\max})} \left(x_0 - \frac{q_1}{a} \right) + \frac{q_1}{a}\| \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

O que contradiz o Corolário 1.4.8, logo $\tau_{max} = +\infty$. Até aqui, mostramos apenas que a solução $N(t,s,x_0)$ existe globalmente, ou seja, que $\tau_{\max} = +\infty$ para $N(t,s,x_0)$. Agora, precisamos garantir que o mesmo ocorre para $S(t,s,x_0)$, $I(t,s,x_0)$ e $R(t,s,x_0)$. Mas como para todo t, temos que $S(t,s,x_0), I(t,s,x_0), R(t,s,x_0) \leq N(t,s,x_0)$ é fácil ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \tau_{\max}} \|S(t,s,x_0)\| &\leq \lim_{t \to \tau_{\max}} \|N(t,s,x_0)\| < +\infty, \\
\lim_{t \to \tau_{\max}} \|I(t,s,x_0)\| &\leq \lim_{t \to \tau_{\max}} \|N(t,s,x_0)\| < +\infty, \\
\lim_{t \to \tau_{\max}} \|R(t,s,x_0)\| &\leq \lim_{t \to \tau_{\max}} \|N(t,s,x_0)\| < +\infty.
\end{aligned}$$

e portanto, $S(t,s,x_0), I(t,s,x_0), R(t,s,x_0)$ estão definidas globalmente.

A família de operadores $\{\mathcal{S}(t,s) : t \geq s\}$, definida por

$$\mathcal{S}(t,s)x_0 := x(t,s,x_0),$$

define um processo de evolução no espaço X, conforme estabelecido na Proposição 2.1.3.

Teorema 3.1.2. *Dado $x_0 = (S_0, I_0, R_0) \in X$ então para toda solução $x \in X$ em que $x(s,s,x_0) = x_0$ temos que $x(t,s,x_0) \in X$ para todo $t, s \geq 0$. Ou seja, conjunto das soluções não negativas é positivamente invariante.*

Seja $x_0 = (S_0, I_0, R_0) \in X$ e $x(t,s,x_0) = (S(t,s,x_0), I(t,s,x_0), R(t,s,x_0))$ a solução do sistema (3.0.1a)–(3.0.1c) com condição inicial $x(s,s,x_0) = x_0$. Pela definição de X, temos $S_0 \geq 0$, $I_0 \geq 0$ e $R_0 \geq 0$. Suponha, para obter uma contradição, que alguma componente da solução assuma valores negativos.

Como $x(t,s,x_0)$ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 > s$ em que alguma componente da solução atinge o valor zero, enquanto todas as componentes permanecem não negativas. Vamos analisar cada caso:

- **Caso 1:** $S(t_0,s,x_0) = 0, I(t_0,s,x_0) \geq 0, R(t_0,s,x_0) \geq 0$. Da equação para $S'(t,s,x_0)$ em (3.0.1a), temos:
$$S'(t,s,x_0) = q(t) - \gamma(t)\frac{SI}{N} - aS + bI.$$
Em $t = t_0$, obtemos:
$$S'(t_0,s,x_0) = q(t_0) + bI(t_0,s,x_0) \geq 0.$$
Como $S'(t_0,s,x_0) \geq 0$ temos que $S(t,s,x_0) \geq 0$ para todo $t \in [s,+\infty)$.

- **Caso 2:** $S(t_0,s,x_0) \geq 0, I(t_0,s,x_0) = 0, R(t_0,s,x_0) \geq 0$. Da equação para $I'(t,s,x_0)$ em (3.0.1b), temos:
$$I'(t,s,x_0) = \gamma(t)\frac{SI}{N} - (a+b+c)I.$$
Em $t = t_0$, substituindo $I(t_0,s,x_0) = 0$, obtemos:
$$I'(t_0,s,x_0) = 0.$$
Logo, $I \equiv 0$, ou seja, $I \geq 0$.

- **Caso 3:** $S(t_0,s,x_0) \geq 0, I(t_0,s,x_0) \geq 0, R(t_0,s,x_0) = 0$. Da equação para $R'(t,s,x_0)$ em (3.0.1c), temos:
$$R'(t,s,x_0) = cI - aR.$$
Em $t = t_0$, substituindo $R(t_0,s,x_0) = 0$, obtemos:
$$R'(t_0,s,x_0) = cI(t_0,s,x_0) \geq 0.$$
Logo, $R(t,s,x_0) \geq 0$ para todo $t \in [s,+\infty)$

Em todos os casos, chegamos a uma contradição com a suposição de que alguma componente da solução se torna negativa. Portanto, a solução $x(t,s,x_0)$ permanece em X para todo $t \geq s$, e o conjunto das soluções não negativas é positivamente invariante. ■

Sejam q_0 e $q_1 \geq 0$ tais que para todo $t \in [s,+\infty)$, $q_0 \leq q(t) \leq q_1$. Definimos
$$\mathcal{B}_0 = \left\{(S,I,R) \in X : \frac{q_0}{a} \leq S+I+R \leq \frac{q_1}{a}\right\}.$$

Teorema 3.1.3. *O conjunto $\mathcal{B}_0 \subset X$ atrai conjuntos limitados de X em sentido pullback e portanto existe atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, dado por*
$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B,t)}.$$

Demonstração. Seja $B \subset X$ um conjunto limitado. Então existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $(S,I,R) \in B$, tem-se
$$(S,I,R) \in B_M(0).$$

Para qualquer $x_0 \in B$, a equação para $N(t,s,x_0)$ é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = q(t) - aN(t,s,x_0),$$

em que vimos que a solução geral é:

$$N(t,s,x_0) = \left(\int_s^t e^{a\tau} q(\tau)\, d\tau + e^{as} N(s,s,x_0) \right) e^{-at}.$$

Assim, o processo de evolução associado é dado por

$$\mathcal{S}(t,s)x_0 = x(t,s,x_0) = \left(\int_s^t e^{a\tau} q(\tau)\, d\tau + e^{as} x_0 \right) e^{-at}.$$

Como $q_0 \leq q(t) \leq q_1$ para todo t, segue que

$$e^{a(s-t)}\left(N_0 - \frac{q_0}{a}\right) + \frac{q_0}{a} \leq N(t,s,x_0) \leq e^{a(s-t)}\left(N_0 - \frac{q_1}{a}\right) + \frac{q_1}{a}, \tag{3.1.3}$$

Logo,

$$\mathcal{S}(t,s)x_0 \leq e^{a(s-t)}(x_0 - \frac{q_1}{a}) + \frac{q_1}{a}.$$

Tomando o limite $s \to -\infty$, temos $e^{a(s-t)}(x_0 - \frac{q_1}{a}) + \frac{q_1}{a} \to \frac{q_1}{a}$.
Por outro lado,

$$e^{a(s-t)}(x_0 - \frac{q_0}{a}) + \frac{q_0}{a} \leq \mathcal{S}(t,s)x_0.$$

Tomando o limite $s \to -\infty$, temos $e^{a(s-t)}(x_0 - \frac{q_0}{a}) + \frac{q_0}{a} \to \frac{q_0}{a}$.
Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $s_0(t, B, \varepsilon)$ tal que para todo $s \leq s_0$

$$\mathcal{S}(t,s)x_0 \in V_\varepsilon(\mathcal{B}_0).$$

Portanto,

$$\mathcal{S}(t,s)B \subset V_\epsilon(\mathcal{B}_0).$$

Temos que $\mathcal{B}_0$ atrai conjuntos limitados de X.

■

Note que, temos então um conjunto compacto $\mathcal{B}_0$ que atrai limitados, assim pelo Corolário 2.3.3 temos que existe atrator pullback $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, dado por

$$\mathcal{A}(t) = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B,t)}.$$

3.2 Condições para a extinção ou persistência da infecção

Nesta seção, investigaremos as condições que determinam se a doença persiste na população ou é erradicada.

Definição 3.2.1. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A **média** de γ é dada por:*

$$m(\gamma) := \limsup_{n \to +\infty} \left\{ \frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau)\, d\tau \ :\ t-s \geq n \right\}.$$

Teorema 3.2.2. *Sejam $x(t,s,x_0) = (S(t,s,x_0), I(t,s,x_0), R(t,s,x_0))$ uma solução do sistema (3.0.1b) - (3.0.1a), com condição inicial $x(s) = x_0 = (S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}^3_+$. Então:*

1. *Se γ satisfaz $m(\gamma) < a+b+c$, então*

$$\lim_{s \to -\infty} I(t,s,x_0) = 0 \quad e \quad \lim_{s \to -\infty} R(t,s,x_0) = 0.$$

Além disso, definindo

$$N^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{-a(t-r)} q(r)\, dr,$$

segue que $\xi(t) = (N^*(t), 0, 0)$ é uma solução global, e que o conjunto $\mathcal{A}(t) = \{(N^*(t), 0, 0)\}$ constitui um atrator pullback.

Além disso, também vale que

$$\lim_{t \to +\infty} I(t,s,x_0) = 0 \quad e \quad \lim_{t \to +\infty} R(t,s,x_0) = 0.$$

2. *Se γ satisfaz $m(\gamma) > a+b+c$, então para todo $x_0 = (S_0, I_0, R_0) \in X$, com $I_0 > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{t \to +\infty} I(t,s,x_0) > \varepsilon_0.$$

Demonstração. Da equação 3.0.1b, temos que

$$I'(t,s,x_0) = \gamma(t) \frac{S(t,s,x_0)}{N(t,s,x_0)} I(t,s,x_0) - (a+b+c) I(t,s,x_0).$$

Colocando $I(t,s,x_0)$ em evidência, obtemos:

$$I'(t,s,x_0) = I(t,s,x_0) \left[\gamma(t) \frac{S(t,s,x_0)}{N(t,s,x_0)} - (a+b+c) \right].$$

Como $\dfrac{S}{N} \leq 1$, para todo $t \geq s$, segue que

$$I'(t,s,x_0) \leq I(t,s,x_0) \left[\gamma(t) - (a+b+c) \right].$$

Defina a função $\alpha(t) := \gamma(t) - (a+b+c)$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $e^{-\int_s^t \alpha(t)dt}$, obtemos:

$$e^{-\int_s^t \alpha(t)dt} I'(t,s,x_0) \leq \alpha(t) e^{-\int_s^t \alpha(t)dt} I(t,s,x_0).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int_s^t \alpha(t)dt} I(t,s,x_0)] \leq 0$$

$$\int_s^t \frac{d}{dr}[e^{-\int_s^r \alpha(\tau)d\tau} I(r,s,x_0)]dr \leq 0.$$

Assim, temos que

$$e^{-\int_s^t \alpha(\tau)\,d\tau} I(t,s,x_0) \leq e^{-\int_s^s \alpha(\tau)\,d\tau} I(s,s,x_0) = I_0.$$

Logo, para todo $t \geq s$,

$$I(t,s,x_0) \leq I_0 e^{\int_s^t \alpha(\tau)\,d\tau}.$$

Ou seja,

$$I(t,s,x_0) \leq I_0 e^{\int_s^t [\gamma(r)dr]-(a+b+c)(t-s)}. \tag{3.2.1}$$

Por hipótese, a média de $\gamma(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} m(\gamma) &= \limsup_{n\to+\infty} \left\{ \frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau : t-s \geq n \right\} < a+b+c \\ &= \inf_{n\geq 0} \sup_{m\geq n} \left\{ \frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau : t-s \geq m \right\} < a+b+c. \end{aligned}$$

Assim, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $m(\gamma) - (a+b+c) + \varepsilon < 0$ existe $n_0 > 0$ tal que

$$\sup_{n\geq n_0} \left\{ \left[\frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau \right] : t-s \geq n \right\} < m(\gamma) + \varepsilon.$$

Logo, para todo $t - s \geq n_0$

$$\frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(r)dr < m(\gamma) + \varepsilon.$$

Assim,

$$\int_s^t [\gamma(r)dr] - (a+b+c)(t-s) < (t-s)[m(\gamma) + \varepsilon - (a+b+c)].$$

Note que, $m(\gamma)+\varepsilon-(a+b+c) < 0$ e $\lim_{s\to-\infty}(t-s) = +\infty$. Ou seja, $\lim_{t\to+\infty}(t-s)[m(\gamma)+\varepsilon-(a+b+c)] = -\infty$
Segue que

$$\lim_{t\to+\infty} I(t,s,x_0) \leq \lim_{t\to+\infty} I_0 e^{\int_s^t [\gamma(r)dr]-(a+b+c)(t-s)} = 0.$$

Segue que $\lim_{s\to-\infty} I(t,s,x_0) = 0$.

Para $R(t,s,x_0)$, da equação 3.0.1c, temos:

$$R'(t,s,x_0) = cI(t,s,x_0) - aR(t,s,x_0).$$

Multiplicando ambos os lados por e^{at} de modo que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{at}R(t,s,x_0)\right] = ce^{at}I(t,s,x_0).$$

Integrando de s até t:

$$e^{at}R(t,s,x_0) = e^{as}R_0 + c\int_s^t e^{ar}I(r,s,x_0)\,dr.$$

Logo,

$$R(t,s,x_0) = e^{-a(t-s)}R_0 + c\int_s^t e^{-a(t-r)}I(r,s,x_0)\,dr.$$

Como $I(r,s,x_0) \leq I_0 e^{\int_s^r [\gamma(\theta)d\theta]-(a+b+c)(r-s)}$. Temos que:

$$\begin{aligned} R(t,s,x_0) &\leq e^{-a(t-s)}R_0 + c\int_s^t e^{-a(t-r)} I_0 e^{\int_s^t [\gamma(\theta)d\theta]-(a+b+c)(r-s)}\, dr \\ &= e^{-a(t-s)}R_0 + cI_0\int_s^t e^{\int_s^t [\gamma(\theta)d\theta]-a(t-r)-(a+b+c)(r-s)} dr. \end{aligned}$$

Já vimos que, dado $\varepsilon > 0$ tal que $m(\gamma) - (a+b+c) + \varepsilon < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{r-s}\int_s^r \gamma(r)dr < m(\gamma) + \varepsilon,$$

sempre que $r - s > n_0$. Assim,

$$R(t,s,x_0) \leq e^{-a(t-s)}R_0 + cI_0\int_s^t e^{(m(\gamma)+\varepsilon)(r-s)-(a+b+c)(r-s)-a(t-r)} dr.$$

Para resolver a integral acima, vamos denotar $\lambda := (m(\gamma)+\varepsilon) - (a+b+c)$. Note que, $\lambda < 0$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \int_s^t e^{(m(\gamma)+\varepsilon)(r-s)-(a+b+c)(r-s)-a(t-r)} dr &= \int_s^t e^{\lambda(r-s)-a(t-r)} dr \\ &= e^{-(\lambda s + at)}\int_s^t e^{(\lambda+a)r} dr \\ &= e^{-(\lambda s+at)}[\frac{e^{(\lambda+a)t} - e^{(\lambda+a)s}}{\lambda+a}] \\ &= \frac{e^{\lambda(t-s)} - e^{-a(t-s)}}{\lambda+a}. \end{aligned}$$

Como $\lambda < 0$ e $a > 0$, segue que:

$$\lim_{s\to-\infty} e^{-a(t-s)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to-\infty} e^{\lambda(t-s)} = 0,$$

logo,

$$\lim_{s\to-\infty} R(t,s,x_0) = 0.$$

Assim, sob a hipótese de que $m(\gamma) < a+b+c$, concluímos que:

$$\lim_{s\to-\infty} I(t,s,x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to-\infty} R(t,s,x_0) = 0.$$

Para o caso quando $t \to +\infty$ é análogo. Se $I = R = 0$, a equação para S é dada por $S' = q(t) - aS$. Logo,

$$S(t,s,x_0) = e^{-a(t-s)}S_0 + \int_s^t e^{-a(t-r)}q(r)\, dr.$$

Ou seja,

$$\lim_{s\to-\infty} S(t,s,x_0) = N^*(t).$$

Considere $\xi(t) = (N^*(t), 0, 0)$ temos que

$$\mathcal{S}(t,s)\xi^*(s) = x(t,s,\xi(s)),$$

em que a solução de S é dada por

$$\begin{aligned}
S(t,s,N^*(s)) &= e^{-a(t-s)}N^*(s) + \int_s^t e^{-a(t-r)}q(r)\,dr \\
&= e^{-a(t-s)}\int_{-\infty}^{s} e^{-a(s-r)}q(r)\,dr + \int_s^t e^{-a(t-r)}q(r)\,dr \\
&= \int_{-\infty}^{s} e^{-a(t-r)}q(r)\,dr + \int_s^t e^{-a(t-r)}q(r)\,dr \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-r)}q(r)\,dr = N^*(t).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\mathcal{S}(t,s)\xi(s) = \xi(t),$$

Ou seja, $\xi(t)$ é solução global. Por fim, mostremos que $\mathcal{A}(t) = \{(N^*(t), 0, 0)\}$ é atrator pullback. Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $\mathcal{A}(t)$ é apenas um ponto, ou seja, compacto, além disso, como mostrado acima $\mathcal{A}(t)$ é invariante. Mostremos que $\{\mathcal{A} : t \in \mathbb{R}\}$ atrai limitados de X no instate t. Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja B um conjunto limitado qualquer de X. Considere $x_0 \in B$ temos que $\mathcal{S}(t,s)x_0 = x(t,s,x_0)$ Como $\lim_{s\to-\infty} x(t,s,x_0) = (N^*(t), 0, 0)$ temos que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{S}(t,s)x_0 \in V_\varepsilon(\mathcal{A}(t))$ para todo $s \le s_0$. Portanto, $\mathcal{A}(t)$ atrai B no instante t. Pela minimalidade concluímos que $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é um atrator pullback. Isso prova o primeiro item do teorema .

Para a segunda parte, suponha para obter contradição, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\tau_0 > s$ tal que $I(t,s,x_0) < \varepsilon$ para todo $t > \tau_0$. Assim, como feito anteriormente, temos que

$$\begin{aligned}
R(t,s,x_0) &= e^{-a(t-s)}R_0 + c\int_s^t e^{-a(t-r)}I(r,s,x_0)\,dr \\
&= e^{-a(t-s)}R_0 + ce^{-t}\left[\int_s^{\tau_0} e^{ar}I(r,s,x_0) + \int_{\tau_0}^t e^{ar}I(r,s,x_0)\right] dr.
\end{aligned}$$

Por hipótese, para $t > \tau_0$ vale

$$\int_{\tau_0}^t e^{ar}I(r,s,x_0)\,dr < \varepsilon\int_{\tau_0}^t e^{ar}\,dr = \frac{\varepsilon}{a}\big(e^{at} - e^{a\tau_0}\big).$$

Logo, para $t > \tau_0$,

$$\begin{aligned}
R(t,s,x_0) &< e^{-a(t-s)}R_0 + ce^{-at}\int_s^{\tau_0} e^{ar}I(r,s,x_0)\,dr + ce^{-at}\cdot\frac{\varepsilon}{a}\big(e^{at} - e^{a\tau_0}\big) \\
&< e^{-a(t-s)}R_0 + C_1e^{-at} + \frac{c\varepsilon}{a}\big(1 - e^{-a(t-\tau_0)}\big),
\end{aligned}$$

onde $C_1 := c\int_s^{\tau_0} e^{ar}I(r,s,x_0)\,dr$ é constante (independente de t). Assim, temos que $\lim_{t\to+\infty} R(t,s,x_0) < \dfrac{c\varepsilon}{a}$. Portanto, que para todo $t > \tau_0$ obtemos

$$R(t,s,x_0) \le \frac{c\varepsilon}{a}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
I' &= \gamma(t)\frac{SI}{N} - (a+b+c)I \\
&= I\Big[\gamma(t)\frac{S}{N} - (a+b+c)\Big] \\
&= I\Big[\gamma(t)\frac{N-R-I}{N} - (a+b+c)\Big] \\
&= I\Big[\gamma(t) - (a+b+c) - \gamma(t)\frac{R+I}{N}\Big].
\end{aligned}$$

Por (3.1.3) temos que

$$N(t,s,x_0) \leq e^{a(s-t)}\Big(N_0 - \frac{q_1}{a}\Big) + \frac{q_1}{a}.$$

Assim, existe $\eta > 0$ tal que para todo $t > \tau$ temos que

$$N(t,s,x_0) < \frac{q_1}{a} + \eta. \tag{3.2.2}$$

Assim,

$$\frac{R+I}{N} < \frac{\varepsilon + \frac{c\varepsilon}{a}}{\frac{q_1}{a} + \eta} := k. \tag{3.2.3}$$

Portanto, temos que

$$I' \geq I\Big[\gamma(t) - (a+b+c) - \gamma(t)k\Big].$$

Então,

$$I(t) \geq I_0 e^{\left(\int_s^t \left[\gamma(r)-(a+b+c)-\gamma(r)k\right]\, d\tau\right)}.$$

Por hipótese, a média de $\gamma(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
m(\gamma) &= \limsup_{n\to+\infty}\Big\{\frac{1}{t-s}\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau : t-s \geq n\Big\} > a+b+c \\
&= \inf_{n\geq 0}\ \sup_{m\geq n}\Big\{\frac{1}{t-s}\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau : t-s \geq n\Big\} > a+b+c.
\end{aligned}$$

Ou seja, para qualquer $n \geq 0$

$$\sup_{m\geq n}\Big\{\frac{1}{t-s}\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau : t-s \geq n\Big\} > a+b+c.$$

Assim, existe $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $t - s > m$ e $\dfrac{1}{t-s}\displaystyle\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau > (a+b+c)$. Ou seja, existe $\tau_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau > (a+b+c), \quad \forall t > \tau_1.$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que $\displaystyle\int_s^t \gamma(r) - (a+b+c) - \gamma(r)\left(\frac{\varepsilon + \frac{c\varepsilon}{a}}{\frac{q_1}{a}+\eta}\right) dr > 0$, obtemos que

$$\lim_{t\to+\infty} I(t,s,x_0) = +\infty,$$

usando 3.2.2 e 3.2.3 acima, obtemos uma contradição. ■

Observação 3.2.3. *Podemos agora definir o* ***número básico de reprodução*** *como*

$$R_0 = \frac{m(\gamma)}{a+b+c}$$

que representa a média de indivíduos suscetíveis que um indivíduo infectado pode infectar durante o período de infeção. Sabemos então que $R_0 < 1$ a doença é erradicada e se $R_0 > 1$ a doença é endêmica.

3.3 Simulações numéricas

Neste capítulo apresentamos simulações numéricas do modelo SIR não autônomo com dinâmica vital e reinfecção, com o objetivo de ilustrar os resultados teóricos estabelecidos anteriormente. A implementação computacional foi desenvolvida em Python, utilizando a biblioteca `scipy.integrate.solve_ivp` para resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias (3.0.1a)–(3.0.1c).

As simulações consideram funções periódicas $\gamma(t) = \gamma_0 + A_\gamma sen(t)$ e $q(t) = q_0 + A_q sen(t)$, representando as funções de transmissão e a taxa de nascimentos/imigrações, com constantes $\gamma_0, q_0 \in X$ e A_γ e $A_q \in \mathbb{R}$ a serem escolhidas.

Observação 3.3.1. *A função $q(t) = q_0 + A_q \sin(t)$ descreve a taxa de nascimento e imigração da população. Por razões biológicas, essa taxa deve ser não-negativa para todo $t \in \mathbb{R}$. Para garantir que $q(t) \geq 0$ para todo t, precisamos impor a restrição: $q_0 \geq |A_q|$*

Observação 3.3.2. *Nesse caso, $m(\gamma)$ é dado por $m(\gamma) = \gamma_0$. De fato, fixe $n \in \mathbb{N}$. Defina o conjunto*

$$A_m = \left\{ \frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau), d\tau : t - s \geq m \right\}.$$

Calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau), d\tau &= \frac{1}{t-s} \int_s^t \big(\gamma_0 + A_\gamma \sin(\tau)\big)\, d\tau \\ &= \frac{1}{t-s} \big[\gamma_0(t-s) - A_\gamma(\cos(t) - \cos(s))\big] \cdot \\ &= \gamma_0 - \frac{A_\gamma}{t-s}(\cos(t) - \cos(s)) \end{aligned}$$

Como $|\cos(t) - \cos(s)| \leq 2$, segue que:

$$\left| \frac{1}{t-s} \int_s^t \gamma(\tau), d\tau \right| = \left| \gamma_0 + \frac{A_\gamma}{t-s}(\cos(t) - \cos(s)) \right| \leq |\gamma_0| + \frac{2A_\gamma}{t-s}.$$

Portanto, para $m \geq n$, temos

$$\sup_{m \geq n} A_m \leq \gamma_0 + \frac{2A_\gamma}{t-s}.$$

Tomando o ínfimo sobre n, obtemos:

$$m(\gamma) = \inf_{n>0} \sup_{m \geq n} A_m = \gamma_0.$$

Observação 3.3.3. *Para o caso que $m(\gamma) < a+b+c$ temos que o atrator pullback é dado por $\mathcal{A} = \{(N^*(t), 0, 0)\}$ em que*

$$N^*(t) = \frac{q_0}{a} + \frac{A_q(a\sin(t) - \cos(t))}{a^2+1}.$$

3.3.1 Painel interativo

Para que o leitor também consiga experimentar diferentes parâmetros e analisar o comportamento da população, foi desenvolvido um painel interativo do modelo SIR não autônomo, disponível em: https://an5s68nzzwg4c3hrm9zng5.streamlit.app/

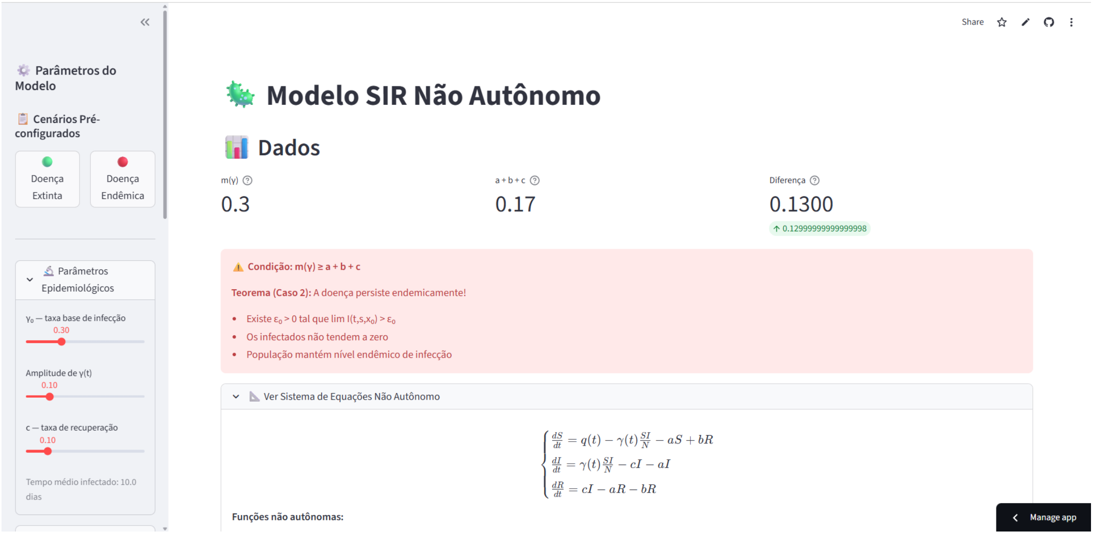


Figura 3.3.1: Interface do painel interativo do modelo SIR não autônomo.

O painel oferece cenários pré-configurados que ilustram diferentes comportamentos dinâmicos do modelo. A seguir, apresentamos os resultados obtidos para cada cenário:

Cenário 1: Doença Extinta

- **Parâmetros:**
  - $\gamma_0 = 0{,}06$, $A_\gamma = 0{,}05$;
  - $q_0 = 20{,}00$, $A_q = 5{,}00$;
  - $a = 0{,}02$, $b = 0{,}05$, $c = 0{,}10$.
- **Condições iniciais:** $S(0) = 900$, $I(0) =50$, $R(0) = 50$.
- **Resultado observado:** O sistema converge para o estado livre de doença, com:
  - $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t, s, x_0) = 0$;
  - $\lim\limits_{t \to +\infty} R(t, s, x_0) = 0$;
  - O atrator pullback é dado por $\mathcal{A}(t) = \{(N^*(t), 0, 0)\}$, onde

$$N^*(t) = \frac{q_0}{a} + \frac{Q(a \sin(t) - \cos(t))}{a^2 + 1}.$$

Cenário 2: Doença Endêmica

- **Parâmetros:**
  - $\gamma_0 = 0{,}86$, $A_\gamma = 0{,}20$;

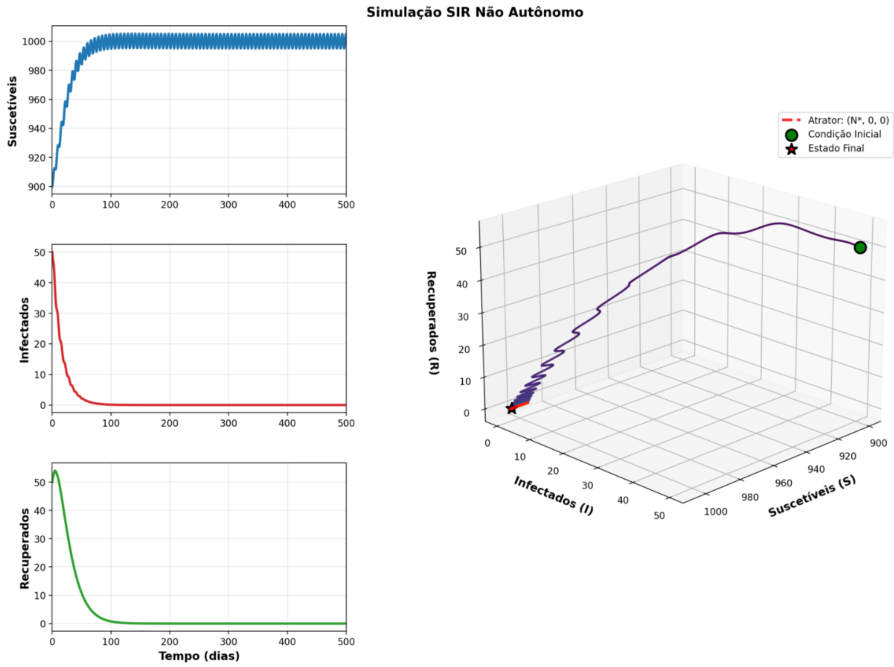


Figura 3.3.2: Evolução temporal das populações no Cenário 1.

- $q_0 = 20{,}00$, $A_q = 5{,}00$;
- $a = 0{,}02$, $b = 0{,}05$, $c = 0{,}10$;

- **Condições iniciais:** $S(0) = 900$, $I(0) =50$, $R(0); = 50$.
- **Resultado observado:** A doença persiste endemicamente na população, com:
  - Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\liminf_{t\to+\infty} I(t, s, x_0) > \varepsilon_0$;
  - Os infectados não tendem a zero;
  - A população mantém um nível endêmico de infecção.

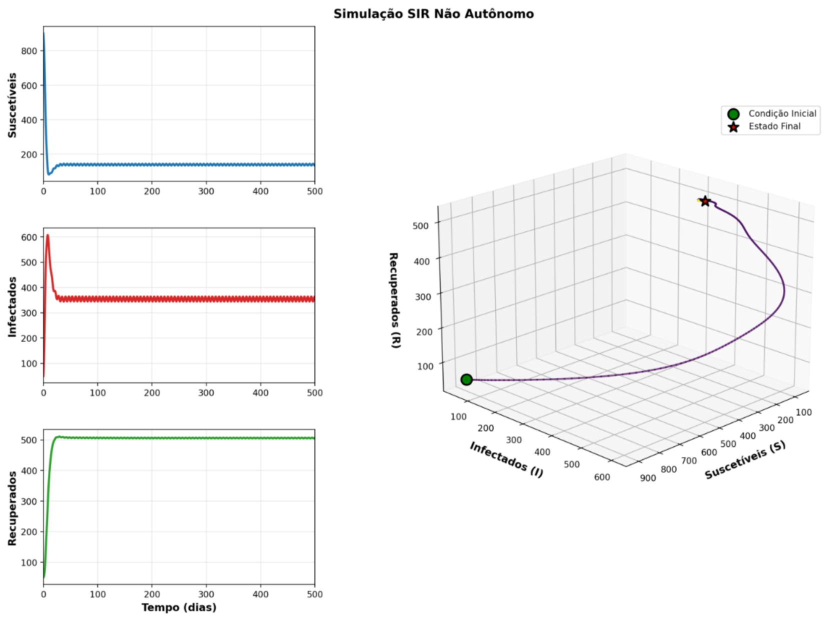


Figura 3.3.3: Evolução temporal das populações no Cenário 2.

4 Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso foram obtidas conclusões matemáticas e epidemiológicas de grande relevância. Mostramos que através da taxa de transmissão obtemos condições para erradicação ou permanência da população de infectados.

Além disso, a investigação realizada revelou a riqueza e a utilidade das teorias de equações diferenciais ordinárias e de processos de evolução. As demonstrações foram de extrema importância na compreensão profunda do sistema biológico estudado, evidenciando como o formalismo matemático abstrato pode contribuir no entendimento dos comportamentos em dinâmicas populacionais.

É válido, porém, questionar quais doenças reais podem ser adequadamente descritas pelo nosso modelo. Esta é, de fato, a principal motivação para aprofundar o estudo de modelos epidemiológicos como o S.I.R., buscando compreender suas limitações e potencialidades na representação de fenômenos concretos. Os resultados obtidos abrem caminho para diversas extensões promissoras. Trabalhos futuros podem abordar, por exemplo:

- a incorporação de estratégias de controle, como vacinação ou isolamento;
- a validação dos modelos teóricos com dados reais de epidemias;
- a análise de modelos estocásticos, desenvolvendo uma teoria de atratores pullback aleatórios.

Espera-se que os resultados aqui apresentados contribuam não apenas para o avanço da compreensão teórica de sistemas dinâmicos com parâmetros variáveis, mas também reforcem o papel da matemática como uma ciência integradora, capaz de estabelecer pontes com áreas como a biologia, a medicina e a epidemiologia. Que este trabalho sirva, portanto, de inspiração para novas investigações na interface entre a matemática e as demais ciências, fortalecendo o diálogo interdisciplinar que impulsiona o conhecimento científico contemporâneo.

Referências

F. S. Botelho. *Real Analysis and Applications*. Springer Cham, 1 edition, 2018. ISBN 978-3-319-78631-5. doi: 10.1007/978-3-319-78631-5.

R. Carrasco Moreno. Modelos matemáticos que describen la evolución de epidemias. Trabajo Fin de Grado, Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Universidad Politécnica de Madrid, May 2021. URL https://oa.upm.es/68538/.

A. N. Carvalho. Notas de aula: Sistemas dinâmicos não lineares. Apostila online, 2020. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/andcarva/SDNL/SDNL2020.pdf. Acesso em: 19 jun. 2025.

A. N. Carvalho, J. A. Langa, and J. C. Robinson. *Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems*, volume 182 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2013. ISBN 978-1-4614-4580-7. doi: 10.1007/978-1-4614-4581-4.

J. Lópes-de-La-Cruz and A. N. Oliveira-Sousa. SIR models with vital dynamics, reinfection, and randomness to investigate the spread of infectious diseases. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 140:108359, 2025. doi: 10.1016/j.cnsns.2024.108359.

E. T. d. Oliveira. Teoria de atratores, teorema de poincaré-bendixson e aplicação ao modelo s.i.r. Trabalho de conclusão de curso (graduação), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2025. URL https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/268765. Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática.

W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 1976. ISBN 0-07-085613-3.

A. d. N. O. Sousa. Sistemas dinâmicos autônomos. *PETMAT UnB*, 2016. URL https://mat.unb.br/pet/Publica%C3%A7%C3%B5es.html.

M. Viana and J. Espinar. Equações diferenciais: Uma abordagem de sistemas dinâmicos, 2011. URL https://edo.impa.br/Livro.