



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Socioeconômico
Programa de Pós-Graduação em Economia

Por Onde Anda a Taxa Natural de Juros no Brasil?

Wellington Gubiani Maiberg

Florianópolis
2026

Wellington Gubiani Maiberg

Por Onde Anda a Taxa Natural de Juros no Brasil?

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Guilherme Valle Moura

Florianópolis

2026

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Maiberg, Wellington Gubiani
Por Onde Anda a Taxa Natural de Juros no Brasil? /
Wellington Gubiani Maiberg ; orientador, Guilherme Valle
Moura, 2026.
57 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Socioeconômico, Programa de Pós-Graduação em
Economia, Florianópolis, 2026.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Taxa Natural de Juros. 3. Política
Monetária. 4. Modelo de Espaço de Estados. 5. Filtro de
Kalman. I. Moura, Guilherme Valle. II. Universidade
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Economia. III. Título.

Wellington Gubiani Maiberg

Por Onde Anda a Taxa Natural de Juros no Brasil?

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Guilherme Valle Moura, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Pedro Luiz Paolino Chaim, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Roberto Meurer, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Economia.

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Economia

Prof. Guilherme Valle Moura, Dr.
Orientador

Florianópolis, 2026.

À minha família, que sempre acreditou em mim — mesmo quando eu mesmo duvidei.

Agradecimentos

À minha família, pelo incentivo constante e pela confiança de que eu chegaria até aqui. Cada palavra de apoio fez diferença nos momentos mais difíceis.

Aos amigos que fiz na pós-graduação, que tornaram tudo mais leve. A disposição de vocês em ajudar e não deixar ninguém para trás foi algo que levarei muito além da academia.

Ao grande amigo Darlan, que o que tem de forte tem de amoroso, pela presença e pelo apoio que só quem tem um amigo assim sabe o valor.

Aos professores Roberto Meurer e Pedro Chaim, membros da banca, que aceitaram participar na data em que precisei e contribuíram com comentários que melhoraram muito esta pesquisa.

Ao meu orientador, Professor Guilherme Valle Moura, que nunca simplesmente me deu as respostas, preferindo sempre me fazer as perguntas certas. À moda do mestre dos magos, sabia que o caminho percorrido vale tanto quanto o destino.

“The natural rate is an abstraction; like faith, it is seen by its works. One can only say that if the bank policy succeeds in stabilizing prices, the bank rate must have been brought in line with the natural rate, but if it does not, it must not have been.”

— John H. Williams (1931)

Resumo

Este trabalho estima e analisa a dinâmica da taxa natural de juros (r^*) no Brasil entre 2003 e 2025 a partir de um modelo semiestructural em espaço de estados, com duas extensões: (i) uma quebra estrutural em 2008 na tendência do PIB potencial e (ii) volatilidade variável no erro de medição durante a pandemia, capturada pelo parâmetro κ . A taxa real ex-ante é construída com expectativas de inflação do Boletim Focus (Banco Central) e os resultados são validados por uma especificação alternativa baseada na taxa DI-Pré (B3). Os resultados indicam que a taxa natural de juros brasileira situa-se em torno de 5,03% ao ano, com valor atual de 4,61%. A decomposição sugere crescimento tendencial $g = 2,10\%$ a.a. e outros fatores estruturais $z = 2,93\%$ a.a., consistentes com um prêmio de risco elevado em economias emergentes.

Palavras-chave: Taxa Natural de Juros. Política Monetária. Modelo de Espaço de Estados. Filtro de Kalman. Volatilidade Variável. Expectativas de Inflação.

Abstract

This paper estimates and analyzes the dynamics of Brazil's natural rate of interest (r^*) from 2003 to 2025 using a semi-structural state-space framework. It contributes by tailoring the approach to Brazilian data through two extensions: (i) a 2008 structural break in the potential-output trend and (ii) time-varying measurement-error volatility during the pandemic period, captured by κ . The ex-ante real interest rate is constructed from inflation expectations in the Central Bank's Focus Survey, and robustness is assessed using an alternative specification based on the DI-Pré (B3) rate. The estimated natural rate is about 5.03% per year (current value: 4.61%). The decomposition yields trend growth $g = 2.10\%$ p.a. and other structural factors $z = 2.93\%$ p.a., consistent with a high risk premium typical of emerging economies.

Keywords: Natural Rate of Interest. Monetary Policy. State-Space Model. Kalman Filter. Time-Varying Volatility. Inflation Expectations.

Lista de ilustrações

Figura 1	–	Efeito da quebra estrutural de 2008 sobre as estimativas. Painel superior: PIB observado com tendências estimadas com e sem quebra. Painel central: componente z inflado (sem quebra) versus contido (com quebra). Painel inferior: r^* resultante nos dois cenários.	20
Figura 2	–	Taxa natural de juros (r^*): Selic e DI-Pre sobrepostos. As duas especificações convergem ao longo de toda a amostra, demonstrando robustez das estimativas à escolha da taxa nominal.	25
Figura 3	–	Postura da Política Monetária (Taxa Real $-r^*$): Selic e DI-Pre. Valores positivos indicam política contracionista; negativos, política expansionista.	26
Figura 4	–	Decomposição $r^* = g + z$: Selic e DI-Pre sobrepostos. O componente g apresenta dinâmica semelhante em ambas as especificações; a variação de r^* decorre principalmente de z	27
Figura 5	–	Função impulso-resposta: efeito de um choque de +1 p.p. em $(r - r^*)$ sobre o hiato do produto (painel superior) e a inflação (painel inferior). Parâmetros: $a_r = -0,096$, $a_1 = 0,578$, $a_2 = 0,251$, $b_y = 0,25$	28
Figura 6	–	Taxa natural de juros com intervalo de confiança de 70% (Hamilton paramétrico, 5.000 iterações Monte Carlo).	30

Lista de tabelas

Tabela 1 – Fontes de Dados e Variáveis Utilizadas	14
Tabela 2 – Crescimento Potencial Implícito: Antes e Depois da Quebra Estrutural	19
Tabela 3 – Parâmetros Fixados na Estimação Final	21
Tabela 4 – Parâmetros κ Estimados: Brasil e Estados Unidos	23
Tabela 5 – Comparação dos Modelos: Original, Selic com κ e DI-Pre com κ	24
Tabela 6 – Parâmetros Livres do Estágio 3 com Erros Padrão	29
Tabela 7 – Intervalos de Confiança de r^* por Período (70%, Hamilton Paramétrico)	29
Tabela 8 – Comparação com Estimativas da Literatura	30
Tabela 9 – Restrições e Calibrações do Modelo	42

Lista de abreviaturas e siglas

BCB	Banco Central do Brasil
COPOM	Comitê de Política Monetária
DI-Pre	Taxa prefixada de Depósito Interfinanceiro
HLW	Holston, Laubach e Williams
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
IS	Investment-Saving (curva de demanda agregada)
LW	Laubach e Williams
MLE	Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation)
OxCGRT	Oxford COVID-19 Government Response Tracker
PIB	Produto Interno Bruto
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e de Custódia

Lista de símbolos

r^*	Taxa natural de juros
g_t	Crescimento tendencial do PIB potencial
z_t	Outros fatores estruturais da taxa natural
\tilde{y}_t	Hiato do produto
y_t^*	PIB potencial
κ_t	Parâmetro de volatilidade variável
a_r	Sensibilidade do hiato ao diferencial de juros
a_1, a_2	Coefficientes de persistência da curva IS
b_π	Coefficiente de persistência inflacionária
b_y	Inclinação da curva de Phillips
ϕ	Efeito do COVID-19 (<i>Stringency Index</i>) no hiato
σ_{IS}	Desvio padrão do choque da curva IS
σ_π	Desvio padrão do choque da curva de Phillips
σ_{y^*}	Desvio padrão do choque no PIB potencial
σ_z	Desvio padrão do choque em z_t
λ_g	Razão sinal-ruído do crescimento tendencial

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO DA LITERATURA	3
2.1	Origens e Evolução do Conceito	3
2.2	Estimação da Taxa Natural: Evidências Internacionais	3
2.3	Taxa Natural no Brasil: Evidências e Determinantes	4
2.4	Evolução Metodológica: De Laubach-Williams a Holston, Laubach e Williams	5
2.4.1	Laubach e Williams (2003): O Modelo Seminal	5
2.4.2	Holston, Laubach e Williams (2017): Extensão Internacional	6
2.4.3	Holston, Laubach e Williams (2023): Atualização Pós-COVID	6
2.5	Modelo de Espaço de Estado	7
2.6	Filtro de Kalman: Estimação de Estados Latentes	7
2.6.1	Estrutura Recursiva do Algoritmo	8
2.6.2	Aplicação à Taxa Natural de Juros	8
2.6.3	Suavização	9
2.7	Modelo Brasil: Adaptação para Economia Emergente	9
2.7.1	Equações Estruturais	10
2.7.2	Representação em Espaço de Estados	11
2.7.3	Implementação em Três Estágios Sequenciais	11
3	DADOS	14
3.1	Fontes e Descrição das Variáveis	14
3.1.1	Descrição Detalhada das Variáveis	14
3.2	Tratamento e Transformações	16
3.3	Tratamento do Período COVID-19: Stringency Index	16
3.3.1	Abordagem de Holston, Laubach & Williams (2023)	16
3.3.2	Implementação no Modelo Brasil	17
3.4	Período de Análise	17
4	RESULTADOS	19
4.1	Estágio 1: Tendência do Produto e Quebra Estrutural	19
4.1.1	Quebra Estrutural em 2008	19
4.2	Estágio 2: Parâmetros Estruturais e Restrições	20
4.3	Volatilidade Variável no Tempo: O Parâmetro κ	21
4.3.1	Motivação	21

4.3.2	Formulação	22
4.3.3	Resultados	22
4.3.4	Efeito sobre as Estimativas	23
4.4	Resultados Finais e Robustez: Selic vs DI-Pre	24
4.4.1	Estimativa de r^* e Decomposição	24
4.4.2	Evolução por Período	25
4.4.3	Postura da Política Monetária	26
4.4.4	Robustez: DI-Pre como Validação	26
4.4.5	Função Impulso–Resposta da Política Monetária	27
4.5	Intervalos de Confiança do Juro Natural	28
4.6	Comparação com a Literatura	29
5	IMPLICAÇÕES PARA POLÍTICA ECONÔMICA	31
5.1	Avaliação da Orientação Monetária	31
5.2	Implicações Fiscais	31
5.3	Implicações para Investimento	32
5.4	Limitações para Interpretação	32
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	34
	REFERÊNCIAS	36
	APÊNDICES	38
	APÊNDICE A – MATRIZES DO ESPAÇO DE ESTADOS	39
A.1	Estágio 1: Hiato do Produto	39
A.2	Estágio 2: Incorporação da Taxa de Juros	40
A.3	Estágio 3: Decomposição da Taxa Natural	40
A.4	Adaptações para a Economia Brasileira	42

1 INTRODUÇÃO

A taxa natural de juros (também conhecida como r^*) constitui um dos conceitos centrais da macroeconomia moderna, sendo definida como a taxa real de equilíbrio compatível com pleno emprego e inflação estável no longo prazo. Nesse contexto, r^* fornece uma referência fundamental para a avaliação da orientação da política monetária, pois permite distinguir se a taxa de juros efetiva exerce efeito expansionista ou contracionista sobre a atividade econômica. Quando a taxa real observada se encontra acima de r^* , a política monetária é considerada restritiva; quando se situa abaixo desse nível, é considerada expansionista.

Este estudo estima a taxa natural de juros para a economia brasileira e analisa sua evolução ao longo dos ciclos econômicos recentes no período de 2003 a 2025. A partir dessas estimativas, avalia-se a posição cíclica da política monetária ao longo do tempo, bem como os fatores estruturais associados a um nível de r^* persistentemente mais elevado no Brasil em comparação às economias avançadas. Adicionalmente, discute-se a adequação do modelo de Holston, Laubach e Williams (2023) ao contexto de uma economia emergente. A relevância dessa análise decorre do papel de r^* como parâmetro fundamental para a condução da política monetária, uma vez que, na ausência de estimativas confiáveis dessa taxa, a interpretação do grau de aperto monetário torna-se imprecisa. Em particular, um mesmo nível da taxa SELIC pode refletir condições expansionistas ou contracionistas, dependendo de sua posição relativa em relação à taxa natural.

O conceito de taxa natural de juros remonta a Wicksell (1898), que a definiu como a taxa real capaz de equalizar poupança e investimento sem gerar pressões inflacionárias. A formulação wickselliana, embora teoricamente consistente, permaneceu por décadas sem uma operacionalização empírica direta, até que Friedman (1968) e Phelps (1968) retomaram o conceito no contexto da incorporação das expectativas à análise macroeconômica. O avanço metodológico decisivo ocorre com a contribuição de Laubach e Williams (2003), que propõem um modelo em espaço de estados capaz de estimar a taxa natural de juros, variável latente não observável, a partir de séries macroeconômicas observáveis. Por meio do uso do Filtro de Kalman e de estimação por máxima verossimilhança, o modelo permite a identificação simultânea do hiato do produto, do PIB potencial e da taxa natural de juros, tornando-se uma referência amplamente adotada por bancos centrais em economias avançadas.

A aplicação desse arcabouço a economias emergentes, contudo, apresenta desafios adicionais. No caso brasileiro, Moreira e Portugal (2019) encontram evidências de uma taxa natural persistentemente elevada, situada entre 4,5% e 6% ao ano, mesmo após a

consolidação do regime de metas de inflação. Os autores atribuem esse resultado a fatores estruturais, como o baixo nível de poupança doméstica, o elevado endividamento público e a segmentação do mercado de crédito. Ademais, economias emergentes caracterizam-se por maior volatilidade macroeconômica, incidência frequente de choques de oferta e expectativas inflacionárias menos ancoradas, o que tende a violar hipóteses centrais do modelo original. Holston, Laubach e Williams (2023) reconhecem essas limitações e propõem extensões ao modelo, com destaque para a incorporação de choques persistentes, particularmente relevantes no período posterior à pandemia de COVID-19.

Nesse contexto, este trabalho estima a taxa natural de juros para o Brasil no período de 2003 a 2025, utilizando o modelo de Holston, Laubach e Williams (2023) em um arcabouço de três estágios sequenciais. A escolha do período amostral reflete a disponibilidade das expectativas de inflação do Boletim Focus, bem como a possibilidade de analisar múltiplos ciclos econômicos sob o regime de metas de inflação. Em relação à literatura existente, o estudo apresenta quatro contribuições principais. Primeiro, implementa-se o parâmetro de volatilidade variável κ de Holston, Laubach e Williams (2023), que permite ao filtro de Kalman tratar adequadamente a heterocedasticidade do período pandêmico, estimando-se κ específicos para o Brasil. Segundo, incorpora-se uma quebra estrutural na tendência do PIB potencial em 2008, capturando a desaceleração permanente do crescimento após a crise financeira global. Terceiro, valida-se a robustez dos resultados empregando duas especificações alternativas de taxa nominal (a taxa Selic e a taxa DI-Pre B3 de 12 meses), demonstrando convergência das estimativas. Por fim, utiliza-se a taxa real de juros ex-ante, baseada em expectativas de inflação do Boletim Focus, o que favorece a identificação dos parâmetros estruturais do modelo. A taxa natural média é estimada em 5,03% ao ano, com valor atual de 4,61%, implicando postura monetária fortemente contracionista no período recente.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta a revisão da literatura sobre a estimação da taxa natural de juros e descreve a metodologia adotada, incluindo o modelo em espaço de estados, o filtro de Kalman e as adaptações para o Brasil. O Capítulo 3 descreve os dados utilizados e os procedimentos de tratamento das séries. O Capítulo 4 apresenta os resultados empíricos, incluindo a quebra estrutural, os parâmetros κ , a comparação entre especificações, os intervalos de confiança e um exercício complementar de função impulso-resposta que ilustra o mecanismo de transmissão implícito nas equações IS e de Phillips. O Capítulo 5 discute as implicações para a condução da política monetária. Por fim, o Capítulo 6 sintetiza as principais conclusões e limitações do estudo.

2 Revisão da Literatura

2.1 Origens e Evolução do Conceito

A noção de uma taxa natural de juros antecede em muito os modelos empíricos modernos. Sua origem remonta a Wicksell (1898), que a definiu como a taxa real capaz de equalizar poupança e investimento sem gerar pressões inflacionárias nem deflacionárias. O próprio Wicksell advertiu que “*the natural rate is not fixed or unalterable in magnitude*”, reconhecendo desde as origens que essa taxa não é diretamente observável, devendo ser inferida a partir do comportamento das variáveis macroeconômicas.

O conceito permaneceu por décadas sem uma operacionalização empírica direta, até que Friedman (1968) e Phelps (1968) retomaram a questão no contexto da incorporação das expectativas à análise macroeconômica. Em sua conferência presidencial à American Economic Association, Friedman argumentou diretamente contra políticas baseadas na taxa natural: “[*the policymaker*] cannot know what the ‘natural’ rate is. Unfortunately, we have as yet devised no method to estimate accurately and readily the natural rate of either interest or unemployment”. A objeção ecoava a observação anterior de Williams (1931), para quem a taxa natural é “*an abstraction; like faith, it is seen by its works*”. Essas críticas, longe de invalidarem o conceito, motivaram o desenvolvimento de abordagens empíricas capazes de tratar a taxa natural como variável latente e potencialmente variável no tempo.

O tema ganhou renovada importância com o trabalho de Taylor (1993), que propôs uma regra simples de política monetária relacionando a taxa de juros nominal ao desvio da inflação em relação à meta e ao hiato do produto. A regra pressupõe a existência de uma taxa real de juros de equilíbrio constante, usualmente calibrada em 2% para a economia dos Estados Unidos. A adoção implícita de um valor fixo para a taxa natural de juros levantou questões fundamentais: esse valor é adequado? Ele permanece constante ao longo do tempo? Essas perguntas culminaram nos modelos semiestruturais propostos por Laubach e Williams (2003).

2.2 Estimação da Taxa Natural: Evidências Internacionais

A estimativa de r^* consolidou-se como prática regular em bancos centrais após Laubach e Williams (2003). Para os Estados Unidos, Holston, Laubach e Williams mantêm série atualizada desde 1960, documentando declínio secular de r^* de aproximadamente 4% nos anos 1980 para próximo de 1% na década de 2010, com leve recuperação pós-pandemia.

Essa tendência decrescente é atribuída à desaceleração do crescimento da produtividade, envelhecimento populacional e aumento da propensão a poupar (*savings glut* global).

Para economias avançadas, o Banco Central Europeu e o Banco da Inglaterra reportam trajetória similar, com r^* próximo de zero ou ligeiramente negativo na década de 2010. Essa convergência internacional reflete integração financeira global e sincronização de fatores demográficos e tecnológicos. Em contrapartida, mercados emergentes apresentam heterogeneidade significativa, com taxas naturais persistentemente elevadas refletindo prêmios de risco-país, vulnerabilidades fiscais e menor desenvolvimento financeiro.

2.3 Taxa Natural no Brasil: Evidências e Determinantes

Moreira e Portugal (2019) estimam r^* para o Brasil no período 1999-2017 utilizando metodologia de Laubach e Williams adaptada. Os autores documentam três fatos estilizados: (i) declínio de r^* de aproximadamente 9% a.a. em 2003 para 5-6% a.a. em 2017, refletindo consolidação do regime de metas e redução do prêmio de risco; (ii) persistência de nível elevado comparativamente a economias avançadas e emergentes; (iii) elevada volatilidade, com picos associados a crises (2002-2003, 2008-2009, 2015-2016).

Quanto aos determinantes estruturais, o estudo destaca: baixa poupança doméstica (15% do PIB vs. 25-30% em emergentes asiáticos), resultando em dependência de poupança externa e maior sensibilidade a choques de liquidez global; elevado endividamento público (60-75% do PIB), com mais de 90% do orçamento comprometido com despesas obrigatórias, gerando dominância fiscal; e incerteza institucional, com mudanças frequentes no arcabouço regulatório e baixa credibilidade de regras fiscais.

Fonseca, Muinhos e Orenge (2016) expandem o modelo incorporando variáveis fiscais (dívida pública/PIB) e de crédito (crédito livre/direcionado). Os resultados indicam que choques fiscais explicam aproximadamente 30% da variância de r^* no curto prazo, enquanto crédito direcionado atenua parcialmente a transmissão da política monetária via canal de crédito. Em trabalho posterior, Fonseca, Muinhos e Schulz (2022) encontram evidência de redução gradual do r^* ao longo do tempo, mas argumentam que a convergência para níveis internacionais é incompleta, uma vez que fatores estruturais como prêmio de risco elevado e fragilidade fiscal continuam exercendo papel relevante na determinação do nível da taxa natural no país.

Barbosa, Camêlo e João (2016) estimam a taxa natural para o Brasil no período 2003–2015 a partir do arcabouço de uma economia aberta pequena, definindo-a como a soma da taxa real internacional e de prêmios de risco soberano e cambial. Os autores encontram evidência de queda significativa do r^* ao longo dos anos 2000, seguida de reversão parcial a partir de 2013, associada ao aumento do risco-país e à deterioração fiscal.

Mais recentemente, Santos e Muinhos (2024) aplicam diferentes abordagens em espaço de estados ao caso brasileiro, utilizando taxas de contrato de *swap* de 90 dias e 1 ano da B3, e encontram taxa natural entre 3,4% e 4,8% para 2022–2023 em 44 das 80 especificações testadas. Os resultados revelam elevada dependência das estimativas em relação às hipóteses sobre a dinâmica dos estados latentes e suas variâncias, evidência que reforça a importância de exercícios de robustez na estimação do r^* .

O Banco Central do Brasil publica estimativas de r^* em seus Relatórios de Inflação, utilizando modelo Laubach-Williams com prêmio de risco soberano. No Relatório de Inflação de junho de 2024, as estimativas situam-se em 5,1% (com EMBI) e 4,5% (com CDS), servindo como referência para calibração da taxa SELIC e comunicação com mercados. A persistência de r^* elevado é reconhecida como desafio estrutural, limitando o espaço para política monetária expansionista e elevando o custo fiscal do serviço da dívida.

2.4 Evolução Metodológica: De Laubach-Williams a Holston, Laubach e Williams

A estimação da taxa natural de juros em modelos de espaço de estados evoluiu significativamente ao longo das últimas duas décadas. Esta subseção apresenta a progressão metodológica desde o modelo seminal até as versões mais recentes.

2.4.1 Laubach e Williams (2003): O Modelo Seminal

Laubach e Williams (2003) propuseram o arcabouço operacional para estimar r^* como variável não observável. O modelo original combina uma curva IS (demanda agregada) com uma curva de Phillips (oferta agregada), estimando simultaneamente o PIB potencial (y_t^*), o crescimento tendencial (g_t) e a taxa natural de juros (r_t^*).

A especificação original assume que $r_t^* = c \cdot g_t + z_t$, onde g_t representa o crescimento do produto potencial e z_t captura outros determinantes estruturais (preferência temporal, prêmio de risco, demografia). O modelo é estimado em três estágios sequenciais via máxima verossimilhança, utilizando o Filtro de Kalman para inferir as variáveis latentes.

Principais características de LW (2003):

- Estimação em três estágios para contornar problema de identificação
- Uso de estimação de mediana não-viesada para razões de variância (λ_g, λ_z)
- Aplicação original aos Estados Unidos (1961-2002)
- Taxa natural estimada: declínio de 4% (anos 1960) para 3% (anos 2000)

2.4.2 Holston, Laubach e Williams (2017): Extensão Internacional

Holston, Laubach e Williams (2017) estenderam o modelo para múltiplas economias avançadas (Estados Unidos, Canadá, Zona do Euro, Reino Unido), incorporando ajustes metodológicos importantes:

- Restrições adicionais: Limites nos parâmetros para garantir identificação ($b_y \geq 0,025$; $a_r \leq -0,0025$)
- Tratamento de quebras estruturais: Variáveis dummy para crise financeira de 2008
- Comparabilidade internacional: Padronização de fontes de dados e transformações

Os resultados documentaram declínio secular de r^* em todas as economias analisadas, convergindo para níveis próximos de zero ou negativos na década de 2010. Esse fenômeno foi atribuído a fatores globais: desaceleração da produtividade, envelhecimento populacional e excesso de poupança (estagnação secular).

2.4.3 Holston, Laubach e Williams (2023): Atualização Pós-COVID

A versão mais recente do modelo (HOLSTON; LAUBACH; WILLIAMS, 2023) incorpora tratamento específico para o período pandêmico (2020–2022), que representou choque sem precedentes nas séries macroeconômicas:

- Índice de Restrições (*Stringency Index*): Variável de controle na curva IS para capturar o efeito das restrições governamentais sobre o hiato do produto. O efeito na inflação é indireto, via hiato ajustado.
- Parâmetro de volatilidade variável (κ): Multiplicador da matriz de covariância do erro de medição (R) que permite ao filtro de Kalman atribuir peso menor às observações durante períodos de volatilidade atípica. O parâmetro é estimado por ano: κ_{2020} (T2–T4), κ_{2021} e κ_{2022} , com $\kappa = 1$ nos demais períodos. Para os EUA, os autores reportam κ_{2020} entre 5 e 18.
- Atualização das estimativas: r^* para EUA recuperou-se levemente pós-pandemia ($\approx 1\%$ a.a.).

A combinação do *Stringency Index* com o parâmetro κ permite separar choques temporários (restrições governamentais) de mudanças estruturais em r^* , evitando que o modelo interprete a volatilidade extrema de 2020 como alteração permanente na taxa natural. Esta extensão é central para o presente trabalho, conforme discutido na Seção 4.3.

2.5 Modelo de Espaço de Estado

Conforme Harvey (1993, p. 82–83), a formulação em espaço de estados oferece um instrumento poderoso para representar uma ampla variedade de modelos de séries temporais. Uma vez que um modelo é expresso nessa forma, pode-se aplicar o *Filtro de Kalman*, que fornece algoritmos recursivos para previsão, suavização e estimação por máxima verossimilhança, utilizando a decomposição do erro de previsão.

Na forma geral, o vetor de variáveis observadas no tempo t , denotado por \mathbf{y}_t , está relacionado ao vetor de estado \mathbf{a}_t por meio da equação de observação:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.1)$$

em que \mathbf{Z}_t é uma matriz $N \times m$, \mathbf{d}_t é um vetor de constantes e $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ representa os distúrbios de observação, assumidos como não correlacionados serialmente, com média zero e matriz de covariância \mathbf{H}_t , isto é, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = 0$ e $\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t$.

O vetor de estado \mathbf{a}_t , por sua vez, evolui ao longo do tempo segundo a equação de transição:

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{T}_t é a matriz de transição de estado, \mathbf{c}_t é um vetor de constantes, \mathbf{R}_t é uma matriz $m \times g$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ é o vetor de distúrbios do processo, com $\mathbb{E}(\boldsymbol{\eta}_t) = 0$ e $\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbf{Q}_t$.

A especificação do sistema é completada pela definição das condições iniciais do vetor de estado, \mathbf{a}_0 , com média $\mathbb{E}[\mathbf{a}_0] = \mathbf{a}_0$ e matriz de covariância \mathbf{P}_0 , bem como pela suposição de que os distúrbios $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_t$ são mutuamente não correlacionados entre si e com o estado inicial. Assume-se adicionalmente que tais distúrbios são independentemente e identicamente distribuídos segundo distribuições normais multivariadas com média zero e matrizes de covariância constantes.

2.6 Filtro de Kalman: Estimação de Estados Latentes

O Filtro de Kalman é um procedimento recursivo para calcular o estimador ótimo do vetor de estado dadas todas as informações disponíveis em cada ponto do tempo (HARVEY, 1993). No contexto da estimação de r^* , ele permite inferir variáveis não observáveis (PIB potencial y_t^* , taxa natural r_t^* , crescimento tendencial g_t) a partir de observáveis (PIB real, inflação, taxa de juros).

2.6.1 Estrutura Recursiva do Algoritmo

Seja \mathbf{a}_t o estimador ótimo de $\boldsymbol{\alpha}_t$ baseado em todas as observações até t (inclusive \mathbf{y}_t), e \mathbf{P}_t a matriz de covariância do erro de estimação associado. O algoritmo opera em dois passos a cada período t (HARVEY, 1993):

1. Equações de Predição: Partindo de \mathbf{a}_{t-1} e \mathbf{P}_{t-1} , projeta-se o estado para o período t utilizando a equação de transição:

$$\mathbf{a}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t \mathbf{a}_{t-1} + \mathbf{c}_t, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t', \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{a}_{t|t-1}$ é o estimador do estado condicional à informação até $t-1$, e $\mathbf{P}_{t|t-1}$ é sua matriz EQM (erro quadrático médio). O preditor da observação \mathbf{y}_t é dado por:

$$\hat{\mathbf{y}}_{t|t-1} = \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{d}_t, \quad (2.5)$$

com erro de predição (inovação):

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_{t|t-1} = \mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{a}_{t|t-1} - \mathbf{d}_t, \quad (2.6)$$

cuja matriz EQM é $\mathbf{F}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' + \mathbf{H}_t$.

2. Equações de Atualização: Ao observar \mathbf{y}_t , incorpora-se a nova informação via inovação \mathbf{v}_t :

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{v}_t, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t|t-1}. \quad (2.8)$$

A interpretação intuitiva é clara: quanto maior o desvio \mathbf{v}_t entre a observação realizada e a predição, maior a correção aplicada ao estimador do estado. O termo $\mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t' \mathbf{F}_t^{-1}$ atua como ganho de Kalman, ponderando a importância da nova informação.

2.6.2 Aplicação à Taxa Natural de Juros

No modelo de Holston, Laubach e Williams (2023), o vetor de estado é composto exclusivamente por variáveis latentes, incluindo o produto potencial (y_t^*), o crescimento tendencial (g_t) e a taxa natural de juros (r_t^*). As variáveis observáveis, como o hiato do produto e suas defasagens, entram no modelo por meio das equações de medição. O Filtro de Kalman permite:

- Separação produto potencial/ciclo: Observa-se apenas o PIB real y_t , mas o filtro permite inferir a decomposição $y_t = y_t^* + \tilde{y}_t$ em um componente permanente e um componente cíclico.

- Identificação de r^* : Embora a taxa natural de juros não seja observável, o filtro permite sua identificação por meio das restrições impostas pela curva IS, nas quais o diferencial $(r_{t-1} - r_{t-1}^*)$ está associado à dinâmica do hiato do produto \tilde{y}_t .
- Incorporação de incerteza: As matrizes de variância-condicional $\mathbf{P}_{t|t}$ fornecem medidas de incerteza associadas às estimativas de y_t^* , g_t e r_t^* , fundamentais para a correta interpretação dos resultados empíricos.

2.6.3 Suavização

O objetivo da filtragem é estimar o vetor de estado $\boldsymbol{\alpha}_t$ condicional à informação disponível até o tempo t . A suavização, por outro lado, busca estimar $\boldsymbol{\alpha}_t$ utilizando toda a informação da amostra, $t = 1, \dots, T$. O estimador suavizado, denotado $\mathbf{a}_{t|T}$, possui matriz MSE $\mathbf{P}_{t|T}$ que é, em geral, menor que a do estimador filtrado \mathbf{P}_t (HARVEY, 1993).

O algoritmo de suavização de intervalo fixo consiste em recursões que começam com as quantidades finais \mathbf{a}_T e \mathbf{P}_T fornecidas pelo Filtro de Kalman e trabalham para trás no tempo:

$$\mathbf{a}_{t|T} = \mathbf{a}_t + \mathbf{P}_t^*(\mathbf{a}_{t+1|T} - \mathbf{T}_{t+1}\mathbf{a}_t - \mathbf{c}_{t+1}), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}_{t|T} = \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_t^*(\mathbf{P}_{t+1|T} - \mathbf{P}_{t+1|t})\mathbf{P}_t^*, \quad (2.10)$$

onde

$$\mathbf{P}_t^* = \mathbf{P}_t \mathbf{T}_{t+1}' \mathbf{P}_{t+1|t}^{-1}, \quad t = T-1, \dots, 1, \quad (2.11)$$

com $\mathbf{a}_{T|T} = \mathbf{a}_T$ e $\mathbf{P}_{T|T} = \mathbf{P}_T$.

Este procedimento de duas passagens (*forward* via Filtro de Kalman, *backward* via suavização) produz estimativas finais que incorporam informação futura, sendo portanto mais precisas. No modelo de espaço de estado, as estimativas reportadas de y_t^* , g_t e r_t^* são sempre as suavizadas, $\mathbf{a}_{t|T}$, e não as filtradas \mathbf{a}_t .

2.7 Modelo Brasil: Adaptação para Economia Emergente

Neste trabalho, adaptamos o modelo de Holston, Laubach e Williams (2023) para a economia brasileira, incorporando especificidades metodológicas relevantes para mercados emergentes.

A estrutura teórica parte de Laubach e Williams (2003), que modelam r^* como a soma de dois componentes: $r_t^* = c \cdot g_t + z_t$, onde g_t é o crescimento tendencial do produto potencial e z_t captura outros fatores estruturais (prêmio de risco, poupança, preferências temporais).

Principais adaptações para o Brasil:

- Taxa real ex-ante: Utilização de expectativas de inflação do Boletim Focus, que favorece a identificação do parâmetro a_r
- Calibração de z_0 : Valor inicial de z calibrado em 2,2%, seguindo Moreira e Portugal (2019)
- Restrições paramétricas: Seguindo Moreira e Portugal (2019), $b_y \geq 0,25$ e $\lambda_g = 0,15$
- Quebra estrutural: Tendência quebrada no PIB potencial em 2008-T4, seguindo Holston, Laubach e Williams (2017)
- Tratamento COVID-19: Inclusão do *Stringency Index* na curva IS e do parâmetro de volatilidade variável κ conforme Holston, Laubach e Williams (2023)
- Robustez: Estimação com Selic e DI-Pre B3 (12 meses) como taxas nominais alternativas

2.7.1 Equações Estruturais

O modelo combina duas equações comportamentais fundamentais:

Curva IS (demanda agregada): Relaciona o hiato do produto ao diferencial de juros e à própria inércia:

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - r_{t-j}^*) + \phi \cdot d_t^{COVID} + \varepsilon_{IS,t} \quad (2.12)$$

onde $\tilde{y}_t = y_t - y_t^*$ é o hiato do produto, r_t é a taxa real de juros, r_t^* é a taxa natural, a_r representa a sensibilidade do hiato ao diferencial de juros, $\phi \cdot d_t^{COVID}$ captura o efeito das restrições pandêmicas, e $\varepsilon_{IS,t} \sim N(0, \sigma_{IS}^2)$.

Curva de Phillips (oferta agregada): Relaciona inflação ao hiato do produto:

$$\pi_t = b_\pi \pi_{t-1} + (1 - b_\pi) \bar{\pi}_{t-2:4} + b_y \tilde{y}_{t-1}^{adj} + b_{\Delta e} \Delta e_t + \varepsilon_{\pi,t} \quad (2.13)$$

onde $\bar{\pi}_{t-2:4}$ é a média da inflação dos trimestres $t-2$ a $t-4$, e $\tilde{y}_{t-1}^{adj} = \tilde{y}_{t-1} - \phi \cdot d_{t-1}^{COVID}$ é o hiato do produto ajustado pelo efeito das restrições pandêmicas na curva IS. A restrição $(1 - b_\pi)$ sobre o coeficiente da inflação defasada garante neutralidade de longo prazo. O termo $b_{\Delta e} \Delta e_t$ controla para choques cambiais na dinâmica inflacionária, onde Δe_t é a variação log da taxa de câmbio R\$/US\$; esse coeficiente é estimado no Estágio 1 e fixado nos estágios subsequentes.¹

¹ A formulação original de Holston, Laubach e Williams (2023) inclui também preços de petróleo e importados na curva de Phillips. Seguindo Moreira e Portugal (2019), substituímos essas variáveis pela variação cambial, mais relevante para o Brasil.

Equações de estado: O PIB potencial e seus componentes evoluem segundo passeios aleatórios:

$$y_t^* = y_{t-1}^* + g_{t-1} + \varepsilon_{y^*,t}, \quad \varepsilon_{y^*,t} \sim N(0, \sigma_{y^*}^2) \quad (2.14)$$

$$g_t = g_{t-1} + \varepsilon_{g,t}, \quad \varepsilon_{g,t} \sim N(0, \sigma_g^2) \quad (2.15)$$

$$z_t = z_{t-1} + \varepsilon_{z,t}, \quad \varepsilon_{z,t} \sim N(0, \sigma_z^2) \quad (2.16)$$

2.7.2 Representação em Espaço de Estados

O modelo é estimado via Filtro de Kalman na forma de espaço de estados. A estrutura geral consiste em:

Equação de Observação:

$$\begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_t \begin{bmatrix} y_t^* \\ g_t \\ z_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{y}_{t-1} \end{bmatrix} + \mathbf{d}_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\pi,t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Equação de Transição:

$$\begin{bmatrix} y_t^* \\ g_t \\ z_t \\ \tilde{y}_t \\ \tilde{y}_{t-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_t \begin{bmatrix} y_{t-1}^* \\ g_{t-1} \\ z_{t-1} \\ \tilde{y}_{t-1} \\ \tilde{y}_{t-2} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y^*,t} \\ \varepsilon_{g,t} \\ \varepsilon_{z,t} \\ \varepsilon_{IS,t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

As matrizes \mathbf{Z}_t , \mathbf{T}_t e os vetores \mathbf{d}_t , \mathbf{c}_t variam conforme o estágio de estimação (detalhes na próxima subseção).

2.7.3 Implementação em Três Estágios Sequenciais

Seguindo Holston, Laubach e Williams (2023), a estimação procede em três etapas, cada uma fixando parâmetros da etapa anterior:

Estágio 1 (Linha de Base - Sem Taxa de Juros):

Estima o hiato do produto e PIB potencial sem incorporar taxa de juros ($a_r = 0$). O vetor de estados é $\boldsymbol{\alpha}_t^{(1)} = [y_t^*, y_{t-1}^*, \tilde{y}_t, \tilde{y}_{t-1}]'$, e as equações comportamentais são:

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \phi \cdot d_t^{COVID} + \varepsilon_{IS,t} \quad (2.19)$$

$$\pi_t = b_\pi \pi_{t-1} + (1 - b_\pi) \bar{\pi}_{t-2:4} + b_y \tilde{y}_{t-1}^{adj} + b_{\Delta e} \Delta e_t + \varepsilon_{\pi,t} \quad (2.20)$$

Parâmetros estimados: $\theta_1 = \{a_1, a_2, b_\pi, b_y, b_{\Delta e}, g, \phi, \sigma_{IS}, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}\}$, onde g é a tendência de crescimento constante do PIB potencial.

Estágio 2 (Com Taxa de Juros - Taxa Natural Preliminar):

Incorpora taxa real ex-ante na curva IS e estima $r_t^* = g_t$ (identificação preliminar). Fixa parâmetros do Estágio 1 ($a_1, a_2, b_\pi, b_y, \phi$) e expande o vetor de estados para $\alpha_t^{(2)} = [y_t^*, y_{t-1}^*, y_{t-2}^*, g_t, g_{t-1}, g_{t-2}]'$. A curva IS torna-se:

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - g_{t-j}) + \phi \cdot d_t^{COVID} + \varepsilon_{IS,t} \quad (2.21)$$

Parâmetros estimados: $\theta_2 = \{a_r, \sigma_{IS}, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}\}$, além de $\lambda_g = \sigma_g / \sigma_{IS}$ (razão de variância estimada via estimação de mediana não-viesada de Stock e Watson (1998)). A utilização do estimador mediana-não-viesado é particularmente adequada em amostras finitas, nas quais a estimação direta por máxima verossimilhança tende a superestimar a variância do componente estocástico do crescimento.

Resultado: Taxa natural preliminar $r_t^* = g_t$ (Brasil 2003-2025).

Estágio 3 (Decomposição Completa):

Decompõe $r_t^* = c \cdot g_t + z_t$, separando crescimento tendencial (g_t) de outros fatores estruturais (z_t). Fixa todos os parâmetros dos Estágios 1 e 2, expandindo o vetor de estados para $\alpha_t^{(3)} = [y_t^*, g_t, z_t, \tilde{y}_t, \tilde{y}_{t-1}]'$. A curva IS passa a utilizar $r_t^* = c \cdot g_t + z_t$:

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 [r_{t-j} - (c \cdot g_{t-j} + z_{t-j})] + \phi \cdot d_t^{COVID} + \varepsilon_{IS,t} \quad (2.22)$$

Parâmetros estimados: $\theta_3 = \{\sigma_{IS}, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}, \sigma_z, \kappa_{2020}, \kappa_{2021}, \kappa_{2022}\}$, onde fixamos $c = 1$ (convenção de Laubach e Williams (2003)). O parâmetro σ_z é estimado livremente por máxima verossimilhança com limite superior de 2,2.

Resultado: Taxa natural final $r_t^* = g_t + z_t$, com média de 5,03% a.a., decomposta em $g = 2,10\%$ a.a. (crescimento tendencial) e $z = 2,93\%$ a.a. (outros fatores, incluindo prêmio de risco). Os detalhes da estimação são apresentados na Seção 4.

Função Impulso-Resposta:

Como exercício complementar, realiza-se uma simulação parcial de impulso-resposta a partir das equações IS e de Phillips estimadas. O experimento consiste em aplicar um choque exógeno de +1 ponto percentual no hiato de juros ($r_t - r_t^*$) no período $t = 0$, mantendo-o em zero nos períodos subsequentes, e simular a propagação sobre o hiato do produto e a inflação ao longo de 20 trimestres, sob a hipótese *ceteris paribus* de que os demais choques e estados permanecem inalterados. Os resultados desse exercício são apresentados na Subseção 4.4.5.

As matrizes completas do espaço de estados para cada estágio são apresentadas no Apêndice [A](#).

3 Dados

Este estudo utiliza séries trimestrais macroeconômicas brasileiras para o período de 2003-T1 a 2025-T2 (90 trimestres), coletadas de fontes oficiais. A escolha do período inicial reflete a disponibilidade das expectativas de inflação do Boletim Focus do Banco Central. Após o período de inicialização do Filtro de Kalman (8 trimestres), a amostra efetiva contém 82 observações trimestrais.

3.1 Fontes e Descrição das Variáveis

A Tabela 1 apresenta as variáveis utilizadas, suas fontes oficiais e códigos de referência.

Tabela 1 – Fontes de Dados e Variáveis Utilizadas

Variável	Fonte	Código/Série
PIB Real (índice de volume)	IBGE/BCB-SGS	22099
IPCA (inflação mensal)	BCB/IBGE	433
Taxa SELIC (meta COPOM)	BCB	432
Taxa DI-Pre B3 (12 meses)	B3/ANBIMA	Pré-fixado M12
Expectativas IPCA 12 meses	BCB/Focus	Sistema Expectativas
Câmbio (R\$/US\$ venda)	BCB/PTAX	3698
COVID-19 Stringency Index	Oxford CGRT	OxCGRT

3.1.1 Descrição Detalhada das Variáveis

1. Produto Interno Bruto (PIB): Série 22099 do Sistema Gerenciador de Séries Temporais (SGS) do BCB, correspondente ao PIB trimestral a preços constantes (índice encadeado com ajuste sazonal, base 1995=100), compilada do IBGE (Contas Nacionais Trimestrais). O uso do índice de volume garante que variações reflitam mudanças na produção real, eliminando efeitos de variação de preços. Frequência nativa trimestral, utilizada diretamente no modelo sem necessidade de agregação temporal.

2. Inflação (IPCA): Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo, série 433 do BCB. Variação percentual mensal agregada trimestralmente. O IPCA é o índice oficial de inflação do Brasil, utilizado pelo Banco Central no regime de metas.

3. Taxa SELIC (Meta): Série 432 do BCB, correspondente à meta da taxa SELIC definida pelo Comitê de Política Monetária (COPOM) nas reuniões regulares. Representa o instrumento oficial de política monetária brasileira desde 1999.

4. Taxa DI-Pre B3 (12 meses): Taxa prefixada de 12 meses negociada no mercado futuro de juros da B3, que reflete as expectativas dos agentes de mercado para a trajetória da taxa de juros no horizonte de um ano. A série é obtida a partir dos contratos de Depósito Interfinanceiro (DI) e convertida para frequência trimestral via média aritmética. Utilizada como taxa nominal alternativa à Selic no exercício de robustez (Seção 4.4), com início em 2003-T3 (dois trimestres após a Selic). A taxa real *ex-ante* correspondente é calculada como $r_t^{DI} = \text{DI-Pre}_{M12,t} - E_t[\pi_{t+12}]$.

5. Taxa Real de Juros (Ex-Ante): Para a especificação principal, calculada como $r_t = \text{SELIC}_t - E_t[\pi_{t+12}]$; para o exercício de robustez, como $r_t^{DI} = \text{DI-Pre}_{M12,t} - E_t[\pi_{t+12}]$. Em ambos os casos, $E_t[\pi_{t+12}]$ representa a expectativa mediana de inflação para os próximos 12 meses coletada pelo Boletim Focus do Banco Central. A taxa é expressa em percentual ao ano, de forma consistente com a escala do modelo original de Holston, Laubach e Williams (2023).

6. Expectativas de Inflação (Focus/BCB): Série de expectativas medianas de inflação (IPCA) para os próximos 12 meses, coletadas semanalmente pelo Sistema de Expectativas de Mercado do BCB. Disponível a partir de 2001, com cobertura robusta desde 2003. Agregação trimestral via média das expectativas coletadas no trimestre.

Justificativa para Ex-Ante: Optamos por taxa real ex-ante em vez de ex-post (baseada em inflação realizada) por três razões metodológicas:

1. Melhor identificação de a_r : Com taxa ex-ante, o parâmetro $a_r = -0,096$ é identificado naturalmente (não atinge o limite da restrição), enquanto com taxa ex-post $a_r = -0,0025$ (no limite)
2. Expectativas carregam mais informação: A transmissão da política monetária opera via expectativas, não via inflação passada
3. Consistência com literatura: Moreira e Portugal (2019) utilizaram expectativas de inflação para estimar r^* no Brasil

Testes comparativos demonstraram que o modelo ex-ante produz $g = 2,16\%$ a.a. (consistente com PIB potencial), enquanto o modelo ex-post resulta em $g \approx 0\%$ (implausível).

7. Câmbio (R\$/US\$): Taxa de câmbio comercial venda (PTAX), série 3698 do BCB. Média mensal convertida para trimestral. Utilizada em log-diferença ($\Delta \log(\text{Câmbio}_t)$) para capturar variações percentuais e choques cambiais.

8. COVID-19 Stringency Index: Obtido do *Oxford COVID-19 Government Response Tracker* (Hale et al. (2021)), que quantifica o grau de rigor das medidas de restrição governamentais em escala de 0 a 100. Fonte: Our World in Data. Utilizado como variável

de controle para capturar choques extraordinários associados à pandemia de COVID-19 no período 2020–2021.

3.2 Tratamento e Transformações

Todas as séries foram convertidas para frequência trimestral via média aritmética (IPCA, SELIC, Câmbio) ou máximo trimestral (Stringency Index). As principais transformações aplicadas incluem:

- PIB: Transformado para log natural ($\log(\text{PIB}_t)$) para estimação do PIB potencial via Filtro de Kalman. O hiato do produto é definido como $\tilde{y}_t = \log(\text{PIB}_t) - \log(\text{PIB}_t^*)$.
- Taxa Real Ex-Ante: Na especificação principal, $r_t = \text{SELIC}_t - E_t[\pi_{t+12}]$; na especificação alternativa, $r_t^{DI} = \text{DI-Pre}_{M12,t} - E_t[\pi_{t+12}]$. Ambas expressas em percentual ao ano.
- Câmbio: Utilizado em primeira diferença logarítmica para capturar variações percentuais e estacionariedade.

3.3 Tratamento do Período COVID-19: Stringency Index

O período pandêmico de 2020-2021 representa um choque estrutural sem precedentes nas séries temporais macroeconômicas, com *lockdowns*, colapso de demanda agregada e intervenções governamentais massivas. Seguindo a metodologia de Holston, Laubach e Williams (2023), incorporamos o *COVID-19 Stringency Index* como variável de controle para mitigar distorções na estimação de r^* .

3.3.1 Abordagem de Holston, Laubach & Williams (2023)

No trabalho de 2023, HLW incorporaram o *Stringency Index* na curva IS, como variável de controle para capturar o efeito das restrições governamentais sobre o hiato do produto. O índice entra diretamente na equação de demanda agregada por meio do parâmetro ϕ :

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \frac{a_r}{2} \sum_{j=1}^2 (r_{t-j} - r_{t-j}^*) + \phi \cdot d_t^{COVID} + \varepsilon_{IS,t} \quad (3.1)$$

onde d_t^{COVID} é o *Stringency Index* normalizado e ϕ captura o impacto das restrições sobre a atividade econômica. O efeito sobre a curva de Phillips é indireto: a inflação responde ao hiato do produto ajustado ($\tilde{y}_{t-1}^{adj} = \tilde{y}_{t-1} - \phi \cdot d_{t-1}^{COVID}$), de modo que os *lockdowns* afetam a dinâmica inflacionária apenas na medida em que distorcem o hiato do produto. Essa

formulação evita que o filtro de Kalman interprete as restrições pandêmicas como choques estruturais de oferta.

3.3.2 Implementação no Modelo Brasil

Nossa adaptação seguiu a especificação de Holston, Laubach e Williams (2023), com dois ajustes metodológicos:

1. Agregação Temporal: Valores diários do Oxford CGRT foram agregados *trimestralmente* usando o máximo (não média), pois o rigor das restrições é melhor capturado pelos picos de restrição em cada trimestre:

$$z_t^{COVID} = \max_{d \in \text{trimestre } t} \left(\frac{\text{Stringency}_d}{100} \right) \quad (3.2)$$

2. Efeito Indireto na Curva de Phillips: Conforme descrito acima, a curva de Phillips não recebe o *Stringency Index* diretamente. A inflação responde ao hiato do produto *já ajustado* pelo COVID ($\tilde{y}_{t-1}^{adj} = \tilde{y}_{t-1} - \phi \cdot d_{t-1}$). No modelo em espaço de estados, os termos $-\phi b_y \cdot d_{t-1}$ aparecem na linha da inflação da matriz \mathbf{A}' como consequência do uso do hiato ajustado, e não como efeito direto do COVID sobre os preços (ver Apêndice A).

Justificativa Brasil: O país experimentou variação significativa no Stringency Index:

- Pré-pandemia (2019): $z^{COVID} = 0$
- Pico 2020-Q2: $z^{COVID} = 0,81$ (lockdowns rigorosos)
- Gradual redução 2021-2022: $z^{COVID} \rightarrow 0$

Essa volatilidade torna a variável essencial para separar choques pandêmicos de dinâmica estrutural de r^* . Resultado: A inclusão do Stringency Index melhorou a estabilidade dos parâmetros estimados durante 2020-2021, evitando que o modelo interpretasse lockdowns como mudanças permanentes na taxa natural.

3.4 Período de Análise

A análise concentra-se no período de 2003-T1 a 2025-T2, totalizando 90 trimestres. A escolha do período inicial reflete a disponibilidade das expectativas de inflação do Boletim Focus do Banco Central, disponível de forma sistemática desde 2001 com cobertura robusta a partir de 2003. Como este estudo utiliza taxa real ex-ante (baseada em expectativas), essa disponibilidade determina o marco inicial da amostra.

O período 2003-2025 corresponde à fase de consolidação do regime de metas de inflação no Brasil. Após a transição de governo em 2003 e a manutenção da política mone-

tária ortodoxa, o sistema adquiriu credibilidade crescente, refletida na ancoragem gradual das expectativas inflacionárias. Essa característica é fundamental para a estimação de r^* , pois o modelo pressupõe estabilidade do arcabouço institucional de política monetária.

O período selecionado abrange múltiplos ciclos econômicos relevantes: a expansão de 2004-2010 impulsionada pelo boom de commodities; a desaceleração de 2011-2014 associada à “Nova Matriz Econômica”; a recessão de 2015-2016 decorrente da crise política e econômica; a recuperação gradual de 2017-2019; o choque da pandemia de COVID-19 em 2020-2021; e a recuperação pós-pandemia de 2022-2025. Essa diversidade de regimes macroeconômicos permite avaliar a robustez das estimativas de r^* em diferentes contextos.

A opção pela taxa real ex-ante mostrou-se superior do ponto de vista econométrico. Testes comparativos demonstraram que, com expectativas de inflação, o parâmetro $a_r = -0,096$ é identificado naturalmente sem atingir o limite da restrição imposta, enquanto com taxa ex-post (baseada em inflação realizada) o parâmetro atinge o limite ($a_r = -0,0025$). Adicionalmente, o crescimento tendencial estimado com taxa ex-ante ($g = 2,10\%$ a.a.) é consistente com o PIB potencial brasileiro, enquanto a estimativa com taxa ex-post ($g \approx 0\%$) é economicamente implausível. Após o período de inicialização do Filtro de Kalman (8 trimestres), a amostra efetiva contém 82 observações trimestrais.

4 Resultados

Esta seção apresenta os resultados obtidos para o Brasil, seguindo a metodologia em três estágios, com as extensões para o tratamento do período pandêmico. As principais contribuições são apresentadas em detalhe.

4.1 Estágio 1: Tendência do Produto e Quebra Estrutural

O primeiro estágio estima um modelo de referência que identifica o hiato do produto e a tendência do PIB potencial, sem incorporar a taxa de juros real na equação IS. A especificação segue Holston, Laubach e Williams (2023), com duas equações de observação (curvas IS e de Phillips) e uma equação de transição para o PIB potencial, cujo crescimento tendencial é modelado como passeio aleatório.

4.1.1 Quebra Estrutural em 2008

Uma extensão fundamental ao modelo base é a incorporação de uma quebra estrutural na tendência do PIB potencial em 2008-T4, seguindo a abordagem de Holston, Laubach e Williams (2017) para os Estados Unidos. A crise financeira global marcou uma inflexão permanente na trajetória de crescimento brasileiro:

Tabela 2 – Crescimento Potencial Implícito: Antes e Depois da Quebra Estrutural

Período	Crescimento tendencial	Observação
Antes de 2008-T4	4,91% a.a.	Superciclo de <i>commodities</i>
Após 2008-T4	0,92% a.a.	Estagnação produtiva
Desaceleração	−3,99 p.p.	

Essa desaceleração reflete transformações estruturais profundas na economia brasileira. O período anterior à crise foi marcado pelo superciclo de *commodities*, pela expansão acelerada do crédito e pela absorção de mão de obra no mercado formal, fatores que sustentavam taxas de crescimento potencial elevadas. A partir de 2008, a economia brasileira enfrentou esgotamento do bônus demográfico, estagnação da produtividade total dos fatores e deterioração fiscal progressiva, resultando em crescimento tendencial inferior a 1% ao ano. Essa queda no crescimento potencial constitui a base do declínio de longo prazo da taxa natural de juros observado nas estimativas.

A incorporação da quebra é essencial para a correta identificação dos componentes de r^* . Sem ela, a tendência OLS do Estágio 1 assume crescimento constante de 1,65%

ao ano, um compromisso que subestima a expansão pré-crise e superestima o período subsequente. Essa tendência inadequada contamina o hiato do produto e, por consequência, o componente z da taxa natural: no período 2009–2013, z sem quebra atinge 5,33%, inflado em 1,46 ponto percentual acima do valor com quebra (3,87%). Esse z espúrio não reflete prêmio de risco genuíno, mas compensação por uma tendência mal especificada.

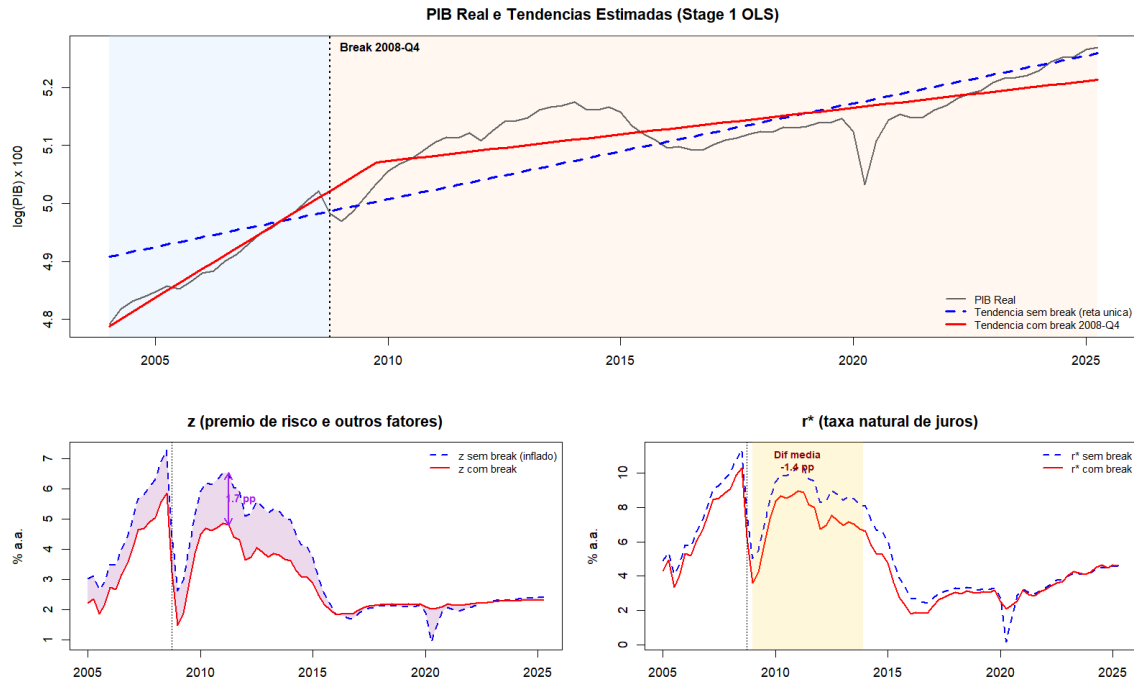


Figura 1 – Efeito da quebra estrutural de 2008 sobre as estimativas. Painel superior: PIB observado com tendências estimadas com e sem quebra. Painel central: componente z inflado (sem quebra) versus contido (com quebra). Painel inferior: r^* resultante nos dois cenários.

A Figura 1 ilustra o efeito da quebra: a tendência quebrada acompanha melhor a trajetória do PIB real, e os componentes z e r^* ficam mais contidos e economicamente plausíveis. No período recente (2020–2025), os modelos com e sem quebra convergem (diferença de +0,10 p.p.), confirmando que a quebra afeta principalmente a primeira metade da amostra.

4.2 Estágio 2: Parâmetros Estruturais e Restrições

O segundo estágio incorpora a taxa real de juros *ex-ante* na curva IS e identifica o parâmetro $a_r = -0,096$, que mede a sensibilidade do hiato do produto ao diferencial de juros. Esse valor é então fixado nas estimações subsequentes para evitar que o otimizador utilize a_r como grau de liberdade para absorver variação associada a κ , comportamento verificado em estimações preliminares, onde a_r atinha $-0,208$ com todos os parâmetros

livres. A Tabela 3 resume os parâmetros herdados dos estágios anteriores e fixados na estimação final.

Tabela 3 – Parâmetros Fixados na Estimação Final

Parâmetro	Valor	Origem	Descrição
a_1	0,578	Estágio 1	Persistência do hiato (defasagem 1)
a_2	0,251	Estágio 1	Persistência do hiato (defasagem 2)
a_r	-0,096	Estágio 2	Sensibilidade ao hiato de juros
ϕ	-9,063	Estágio 1	Efeito do COVID no hiato
λ_g	0,15	Calibrado	Razão sinal-ruído de g
c	1,00	Padrão HLW	Elasticidade $g-r^*$
z_0	2,20%	M&P (2019)	Prêmio de risco inicial

O coeficiente $\phi = -9,063$ mede o efeito contemporâneo do Índice de Restrições Oxford (*Oxford Stringency Index*) sobre o hiato do produto. Uma elevação de 0,10 no índice está associada a uma contração de 0,91 ponto percentual no hiato no mesmo trimestre. No pico da pandemia no Brasil (2020-T2), quando o índice atingiu 0,81, a contribuição estimada de ϕ para o fechamento do hiato foi de $-9,063 \times 0,81 \approx -7,3$ p.p., magnitude coerente com a queda de aproximadamente 10,9% no PIB dessazonalizado observada naquele trimestre. A estimativa para o Brasil é virtualmente idêntica à dos Estados Unidos (-9,0), superior à do Canadá (-6,0) e inferior à da área do euro (-13,0), conforme Holston, Laubach e Williams (2023) (Tabela 4, especificação *baseline*). A sensibilidade do hiato brasileiro às restrições de mobilidade, próxima à norte-americana, reflete o caráter parcial dos lockdowns adotados no Brasil, em contraste com as medidas mais abrangentes implementadas na Europa.

4.3 Volatilidade Variável no Tempo: O Parâmetro κ

4.3.1 Motivação

A hipótese de homocedasticidade dos choques é central na formulação clássica do filtro de Kalman: as matrizes de covariância R (erro de medição) e Q (transição dos estados) são tratadas como constantes ao longo da amostra. Essa premissa é razoável em períodos de estabilidade macroeconômica, mas torna-se inadequada durante eventos extremos como a pandemia de COVID-19.

No caso brasileiro, o PIB real recuou aproximadamente 10% em um único trimestre (2020-T2), a inflação oscilou mais de 5 pontos percentuais em poucos trimestres, e as expectativas sofreram revisões sem precedentes. Quando esses episódios são processados pelo filtro de Kalman sob homocedasticidade, os resíduos extremos são parcialmente interpretados como informação sobre os estados não observados, contaminando as estimativas

de r^* , g e do hiato do produto. Na prática, o modelo sem ajuste atribui aos estados latentes variações que decorrem da volatilidade atípica dos dados, e não de mudanças estruturais genuínas.

4.3.2 Formulação

Para contornar esse problema, Holston, Laubach e Williams (2023) propõem um parâmetro de volatilidade variável no tempo κ_t , que multiplica a covariância do erro de medição:

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \kappa_t^2 \cdot R, \quad \kappa_t \geq 1 \quad (4.1)$$

onde R é a matriz de covariância base dos erros de observação. O parâmetro κ_t é aplicado apenas em R , enquanto a matriz de transição Q permanece constante, de modo que a volatilidade adicional é atribuída ao erro de medição, e não aos estados latentes. Essa escolha é fundamental: ao aumentar R durante períodos atípicos, o filtro de Kalman atribui peso menor às observações e maior ao modelo de transição, impedindo que choques temporários contaminem as estimativas dos estados.

Seguindo a estrutura de Holston, Laubach e Williams (2023), o parâmetro κ_t é definido por ano:

$$\kappa_t = \begin{cases} \kappa_{2020} & \text{se } t \in \{2020\text{-T2}, 2020\text{-T3}, 2020\text{-T4}\} \\ \kappa_{2021} & \text{se } t \in 2021 \\ \kappa_{2022} & \text{se } t \in 2022 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

O primeiro trimestre de 2020 mantém $\kappa = 1$ porque os dados econômicos brasileiros ainda não refletiam o impacto da pandemia (os *lockdowns* iniciaram em março). Os três parâmetros κ são estimados por máxima verossimilhança conjuntamente com os demais parâmetros do Estágio 3.

4.3.3 Resultados

A Tabela 4 apresenta os valores estimados de κ para o Brasil em comparação com os valores reportados por Holston, Laubach e Williams (2023) para os Estados Unidos.

Os valores de κ para o Brasil são sistematicamente inferiores aos dos Estados Unidos. Isso não indica que a pandemia tenha tido menor impacto na economia brasileira, mas reflete o fato de que o Brasil já opera sob nível de volatilidade macroeconômica estruturalmente mais elevado. Em termos relativos, o aumento de volatilidade durante

Tabela 4 – Parâmetros κ Estimados: Brasil e Estados Unidos

Período	Brasil (Selic)	Brasil (DI-Pre)	EUA (HLW 2023)
κ_{2020} (T2–T4)	3,28	3,29	9,03
κ_{2021}	1,13	1,11	1,79
κ_{2022}	1,50	1,56	1,68

a pandemia foi proporcionalmente menor: o κ_{2020} brasileiro (3,28) é substancialmente inferior ao estimado por Holston, Laubach e Williams (2023) para os EUA (9,03), o que é consistente com a maior volatilidade macroeconômica estrutural do Brasil mesmo em períodos normais.

A estrutura temporal dos κ tem interpretação econômica clara:

- $\kappa_{2020} = 3,28$: Captura o auge da pandemia, incluindo *lockdowns*, queda abrupta do PIB, colapso da atividade econômica e incerteza generalizada. É o período de maior volatilidade.
- $\kappa_{2021} = 1,13$: Próximo de 1, indicando rápida normalização. A vacinação avançou ao longo do ano e a reabertura econômica reduziu a volatilidade dos dados quase ao nível pré-pandemia.
- $\kappa_{2022} = 1,50$: Elevação moderada, refletindo não apenas efeitos residuais da pandemia (variante Ômicron no início do ano), mas também a guerra na Ucrânia, o choque inflacionário global, a incerteza eleitoral doméstica e a volatilidade cambial. O κ captura a volatilidade macroeconômica geral de 2022, não apenas efeitos diretos do COVID-19.

4.3.4 Efeito sobre as Estimativas

A incorporação do κ altera principalmente o comportamento do filtro de Kalman durante o período pandêmico. Sem o ajuste de volatilidade, o filtro interpreta os resíduos extremos de 2020 parcialmente como informação sobre os estados latentes, gerando estimativas contaminadas de hiato e taxa natural. Com $\kappa > 1$, o filtro atribui peso proporcionalmente menor às observações do período COVID, preservando a trajetória dos estados não observados.

O efeito sobre r^* é mais sutil. A taxa natural média recua de 5,68% no modelo original para 5,03% com a incorporação conjunta da quebra estrutural e do κ . Essa redução decorre principalmente da quebra em 2008, que corrige a tendência do PIB potencial e reduz o componente z espúrio. O κ , por sua vez, atua na estabilização das estimativas do período 2020–2022, evitando que a volatilidade pandêmica se propague

para r^* . A combinação dos dois ajustes produz uma trajetória de taxa natural mais suave e economicamente plausível.

4.4 Resultados Finais e Robustez: Selic vs DI-Pre

A Tabela 5 apresenta os resultados para as duas especificações de taxa nominal (Selic e DI-Pre B3 de 12 meses) em comparação com o modelo original sem extensões.

Tabela 5 – Comparação dos Modelos: Original, Selic com κ e DI-Pre com κ

Métrica	Original	Selic pf+ κ	DI-Pre pf+ κ
r^* médio	5,68%	5,03%	5,12%
r^* atual (2025-T2)	4,55%	4,61%	4,83%
g médio	2,16%	2,10%	1,96%
z médio	3,52%	2,93%	3,16%
Hiato médio	0,21%	-0,14%	-0,03%
σ_z	3,00 (teto)	2,20 (teto)	2,20 (teto)
κ_{2020}	—	3,28	3,29
κ_{2021}	—	1,13	1,11
κ_{2022}	—	1,50	1,56

4.4.1 Estimativa de r^* e Decomposição

O modelo com extensões estima a taxa natural média em 5,03% ao ano para a especificação Selic e 5,12% para DI-Pre, ambas dentro do intervalo de referência do Banco Central (4,5–5,1%). No período mais recente (2025-T2), a estimativa situa-se em 4,61% (Selic) e 4,83% (DI-Pre), indicando que a taxa natural encontra-se abaixo de sua média histórica. A redução em relação ao modelo original (5,68%) decorre principalmente da quebra estrutural em 2008, que corrige a tendência superestimada do PIB potencial na primeira metade da amostra e, conseqüentemente, reduz o componente z de 3,52% para 2,93%.

A decomposição $r^* = c \cdot g + z$ revela, na média amostral:

- Crescimento tendencial ($g = 2,10\%$ a.a.): Consistente com estimativas de PIB potencial brasileiro ($\approx 2\%$ a.a.), refletindo baixa produtividade total dos fatores, desaceleração demográfica e taxa de investimento estruturalmente reduzida.
- Outros fatores ($z = 2,93\%$ a.a.): Captura o prêmio de risco elevado do Brasil, associado a fragilidade fiscal, baixa poupança doméstica ($\approx 15\%$ do PIB) e incerteza institucional. O valor positivo contrasta com economias avançadas, onde z é tipicamente negativo ou próximo de zero.

No período atual (2025-T2), a decomposição apresenta $g = 2,31\%$ e $z = 2,31\%$, ou seja, uma partilha praticamente equilibrada entre crescimento potencial e prêmio de risco. Esse padrão contrasta com os períodos de 2009–2013, quando o componente z (3,87%) era quase o dobro de g (2,06%), refletindo o prêmio de risco elevado da época.

A Figura 2 apresenta a evolução temporal de r^* para ambas as especificações sobrepostas, evidenciando a convergência dos resultados.

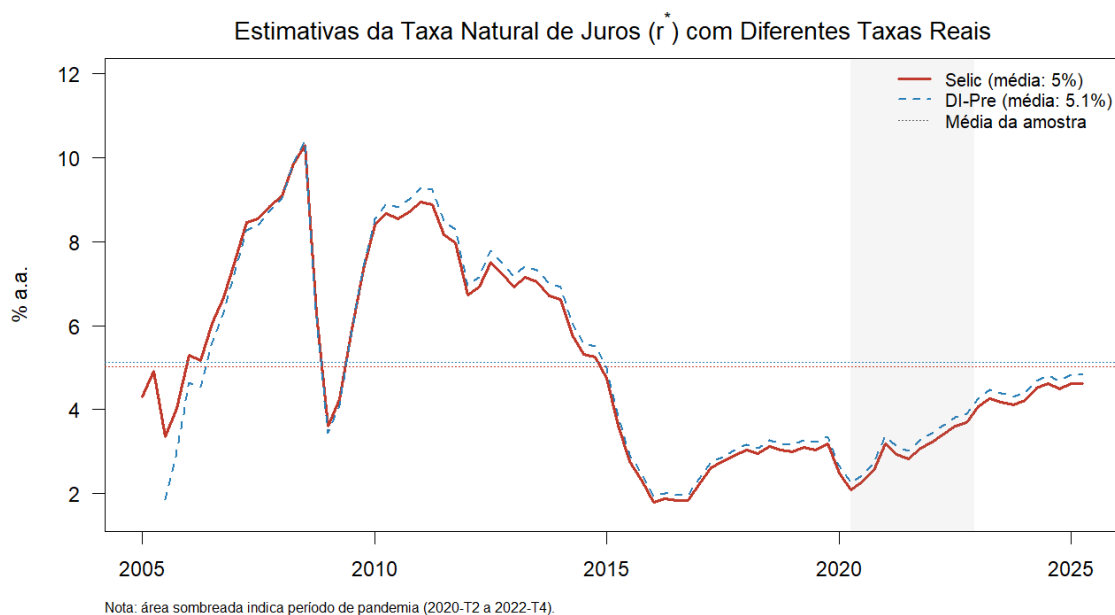


Figura 2 – Taxa natural de juros (r^*): Selic e DI-Pre sobrepostos. As duas especificações convergem ao longo de toda a amostra, demonstrando robustez das estimativas à escolha da taxa nominal.

4.4.2 Evolução por Período

A taxa natural apresenta dinâmica consistente com os ciclos econômicos brasileiros:

- 2005–2008 ($r^* \approx 6,8\%$): Nível elevado no contexto do superciclo de *commodities*, expansão de crédito e aquecimento econômico. O prêmio de risco (z) reflete o início da melhora institucional pós-2003.
- 2009–2013 ($r^* \approx 7,3\%$): Persistência em patamares elevados, refletindo estímulos fiscais e creditícios pós-crise que sustentaram a demanda agregada acima do potencial.
- 2014–2019 ($r^* \approx 3,3\%$): Queda pronunciada associada à recessão de 2015–2016, desaceleração do crescimento potencial e início das reformas estruturais (teto de gastos, reforma trabalhista).
- 2020–2022 ($r^* \approx 3,0\%$): Mínimo da série, com o modelo tratando adequadamente a volatilidade pandêmica via κ .

- 2023–2025 ($r^* \approx 4,4\%$): Recuperação gradual em direção à média histórica. Na última observação (2025-T2), r^* situa-se em 4,61% (Selic) e 4,83% (DI-Pre), ainda abaixo dos patamares pré-2014.

4.4.3 Postura da Política Monetária

A Figura 3 apresenta a postura da política monetária, definida como o diferencial entre a taxa real observada e a taxa natural estimada, para ambas as especificações. Valores positivos indicam política contracionista; negativos, política expansionista.

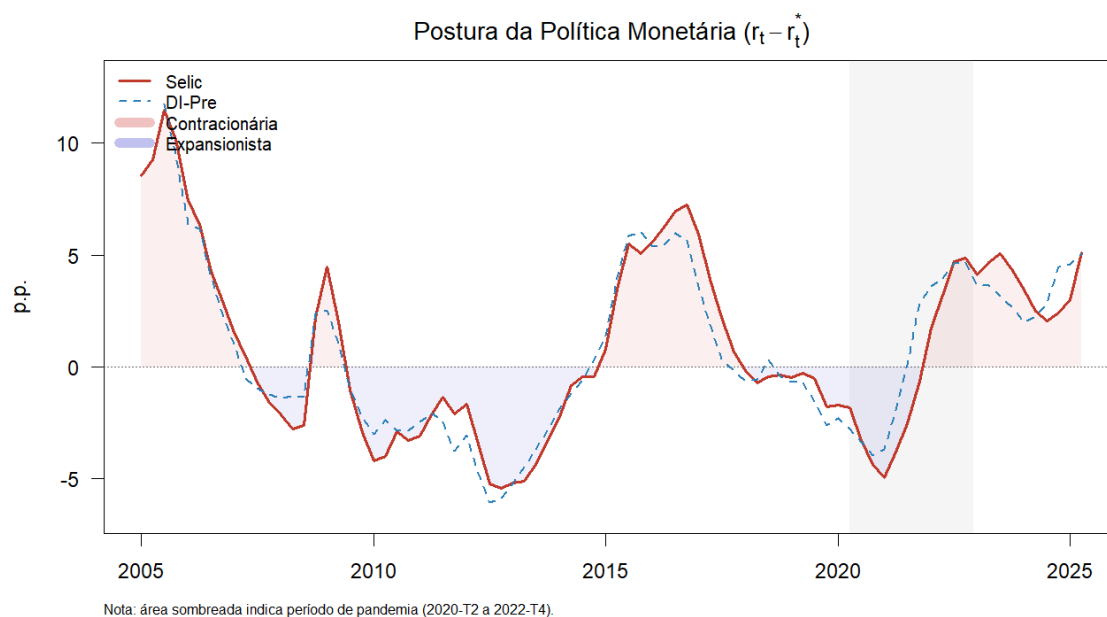


Figura 3 – Postura da Política Monetária (Taxa Real $-r^*$): Selic e DI-Pre. Valores positivos indicam política contracionista; negativos, política expansionista.

Historicamente, os períodos de postura mais expansionista coincidem com 2012–2014 e 2020–2021, enquanto os mais contracionistas ocorrem em 2015–2016 e 2023–2025. No período mais recente (2025-T2), com $r_{\text{atual}}^* = 4,61\%$ e taxa real *ex-ante* de 9,70%, a postura monetária é fortemente contracionista a +5,09 p.p. acima do nível neutro, o maior diferencial da amostra. Esse posicionamento é consistente com o ciclo de alta da SELIC iniciado em 2024 para conter pressões inflacionárias e ancorar expectativas.

4.4.4 Robustez: DI-Pre como Validação

A utilização da taxa DI-Pre B3 de 12 meses, que reflete as expectativas do mercado para a taxa de juros futura, como alternativa à Selic constitui um exercício de robustez relevante. A convergência dos resultados (Figura 2) indica que as estimativas de r^* não são sensíveis à escolha da taxa nominal, conferindo credibilidade adicional ao modelo.

Essa robustez é esperada do ponto de vista teórico: tanto a Selic (instrumento de política) quanto o DI-Pre (expectativa de mercado) incorporam informação sobre as condições macroeconômicas subjacentes. A diferença entre as estimativas ($r_{\text{DI-Pre}}^* - r_{\text{Selic}}^* \approx 0,10$ ponto percentual na média e 0,22 p.p. no valor atual) pode refletir prêmios de liquidez e risco embutidos na curva de juros futuros.

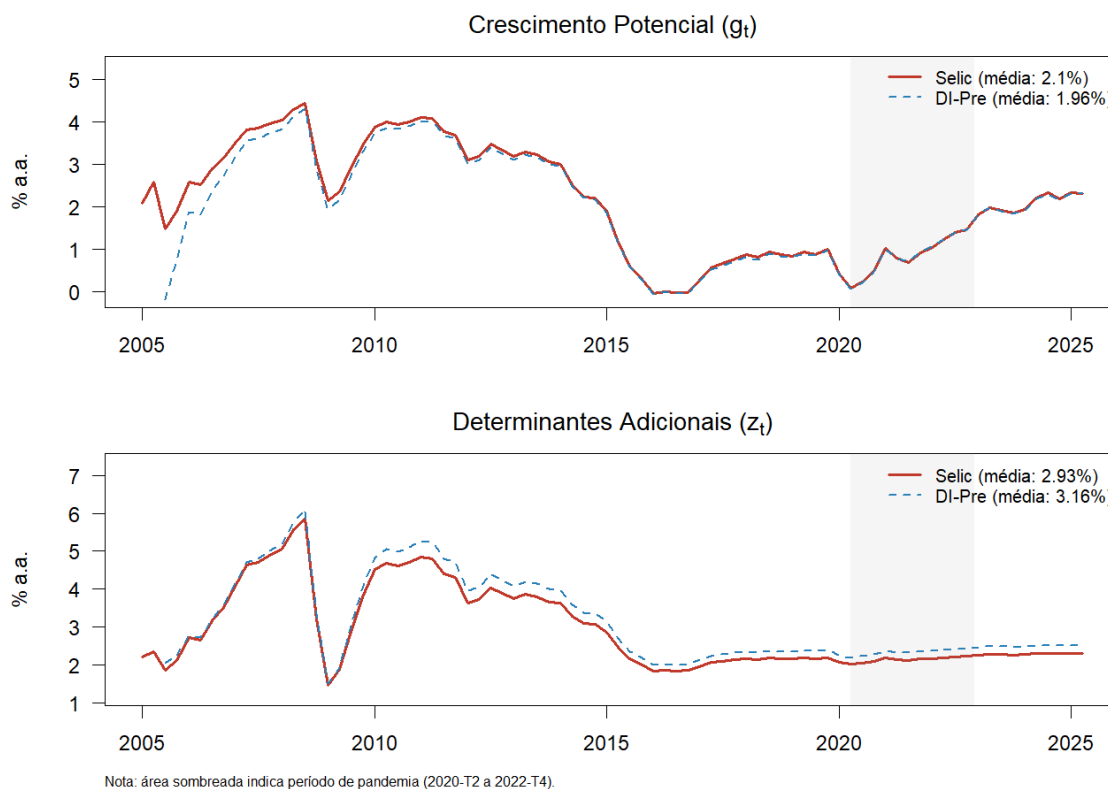


Figura 4 – Decomposição $r^* = g + z$: Selic e DI-Pre sobrepostos. O componente g apresenta dinâmica semelhante em ambas as especificações; a variação de r^* decorre principalmente de z .

4.4.5 Função Impulso–Resposta da Política Monetária

Para ilustrar o mecanismo de transmissão implícito no modelo, realiza-se um exercício de impulso–resposta parcial. Aplica-se um choque exógeno de +1 ponto percentual no hiato de juros ($r_t - r_t^*$) no período $t = 1$, mantendo-o em zero nos períodos subsequentes, e simula-se a propagação pelas equações IS e de Phillips utilizando os parâmetros estimados ($a_1, a_2, a_r, b_y, b_{\pi 1}, b_{\pi 2}$), sob a hipótese *ceteris paribus* de que os demais choques e estados permanecem inalterados.

A Figura 5 apresenta os resultados. No painel superior, o hiato do produto recua 0,096 ponto percentual no impacto, magnitude numericamente igual a a_r , e retorna à metade desse valor em aproximadamente três trimestres, seguindo a dinâmica autorregressiva de segunda ordem ($a_1 = 0,578, a_2 = 0,251$). O efeito torna-se residual após dois anos. No

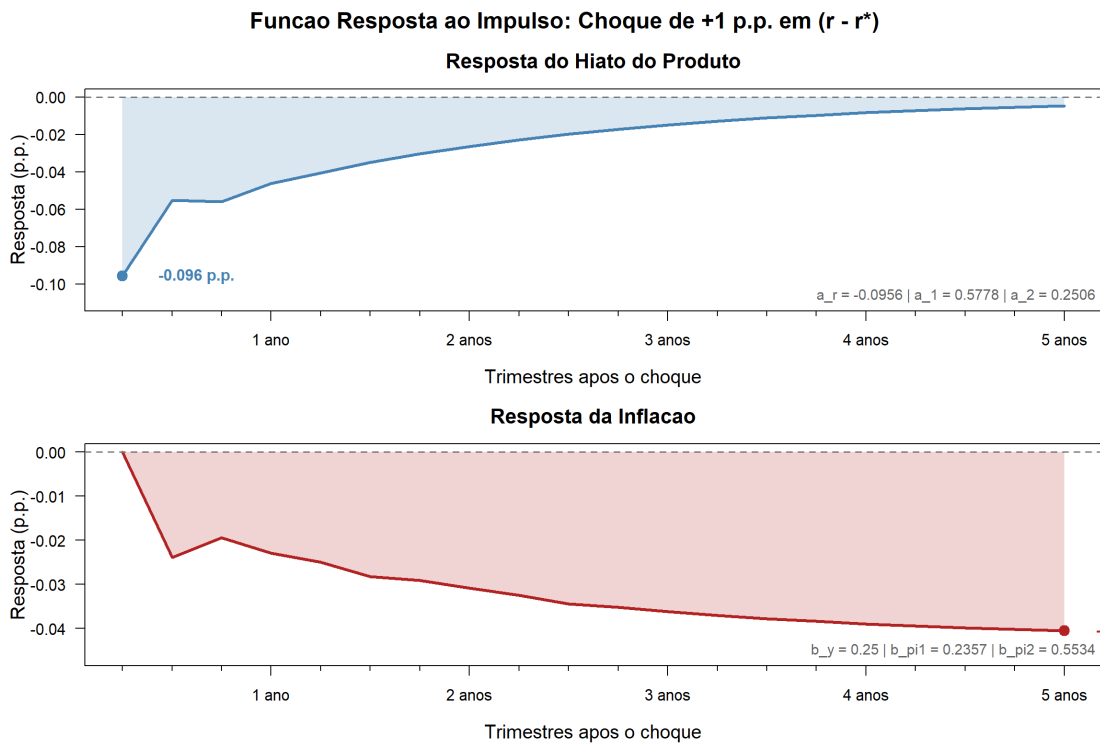


Figura 5 – Função impulso–resposta: efeito de um choque de +1 p.p. em $(r - r^*)$ sobre o hiato do produto (painel superior) e a inflação (painel inferior). Parâmetros: $a_r = -0,096$, $a_1 = 0,578$, $a_2 = 0,251$, $b_y = 0,25$.

painel inferior, a inflação reage com defasagem de um trimestre, por meio do canal $b_y \cdot \tilde{y}_{t-1}$, e apresenta resposta gradual e persistente, acumulando uma redução de aproximadamente 0,04 ponto percentual ao longo de cinco anos. Essa persistência decorre da inércia incorporada na curva de Phillips, cujos coeficientes de inflação defasada somam a unidade.

O efeito quantitativo modesto reflete a pequena magnitude estimada de $a_r = -0,096$: uma elevação de 1 p.p. na taxa real acima da taxa natural reduz o hiato em menos de um décimo de ponto percentual. Esse resultado é consistente com a evidência de que a transmissão da política monetária no Brasil opera com defasagens e por canais complementares não captados explicitamente pelo modelo.

4.5 Intervalos de Confiança do Juro Natural

Para quantificar a incerteza em torno das estimativas de r^* , aplica-se o procedimento de Hamilton (1986), que mede a incerteza decorrente da estimação dos parâmetros estruturais. O método perturba os parâmetros livres via decomposição da matriz de informação e reexecuta o filtro de Kalman para cada realização, acumulando a variância de r^* sobre 5.000 iterações de Monte Carlo. A cada iteração, a trajetória dos estados é recalculada condicionalmente aos parâmetros perturbados, de modo que os intervalos

resultantes capturam o efeito da incerteza de estimação sobre as estimativas de r^* .

A Tabela 6 apresenta os quatro parâmetros livres do Estágio 3 com seus erros padrão e estatísticas t .

Tabela 6 – Parâmetros Livres do Estágio 3 com Erros Padrão

Parâmetro	Estimativa	EP	t	Observação
σ_{IS}	0,989	0,124	7,99	Bem identificado
σ_{π}	0,719	0,043	16,86	Bem identificado
σ_{y^*}	0,500	0,351	1,43	No limite superior
σ_z	2,200	1,497	1,47	No limite superior

Os parâmetros σ_{IS} e σ_{π} são estatisticamente significativos ($t > 7$), enquanto σ_{y^*} e σ_z não se mostram estatisticamente significativos ao nível convencional ($t \approx 1,4$), ambos atingindo seus limites superiores (0,500 e 2,200, respectivamente). Esse comportamento é consistente com o problema de *pile-up* documentado por Stock e Watson (1998): em modelos com componentes de passeio aleatório, a máxima verossimilhança em amostras finitas tende a empilhar estimativas no limite do espaço paramétrico, produzindo erros padrão elevados e estatísticas t baixas. Apesar da identificação fraca desses dois parâmetros, os intervalos de confiança resultantes para r^* são moderados, conforme a Tabela 7.

Tabela 7 – Intervalos de Confiança de r^* por Período (70%, Hamilton Paramétrico)

Período	r^*	EP (p.p.)	IC 70%
2005–2008	6,80%	0,69	[6,08%; 7,51%]
2009–2013	7,28%	0,87	[6,38%; 8,17%]
2014–2019	3,28%	0,74	[2,51%; 4,05%]
2020–2022	2,95%	1,26	[1,65%; 4,25%]
2023–atual	4,37%	1,48	[2,84%; 5,90%]
Média	5,03%	0,93	[4,07%; 5,99%]
Atual (2025-T2)	4,61%	1,45	[3,11%; 6,12%]

O erro padrão médio de 0,93 ponto percentual indica incerteza moderada, com bandas mais estreitas na primeira metade da amostra (EP $\approx 0,7$ p.p.) e mais largas no período recente (EP $\approx 1,5$ p.p.), refletindo a maior incerteza paramétrica associada às estimativas mais recentes de r^* .

4.6 Comparação com a Literatura

A Tabela 8 situa as estimativas deste trabalho no contexto da literatura recente sobre a taxa natural de juros no Brasil.

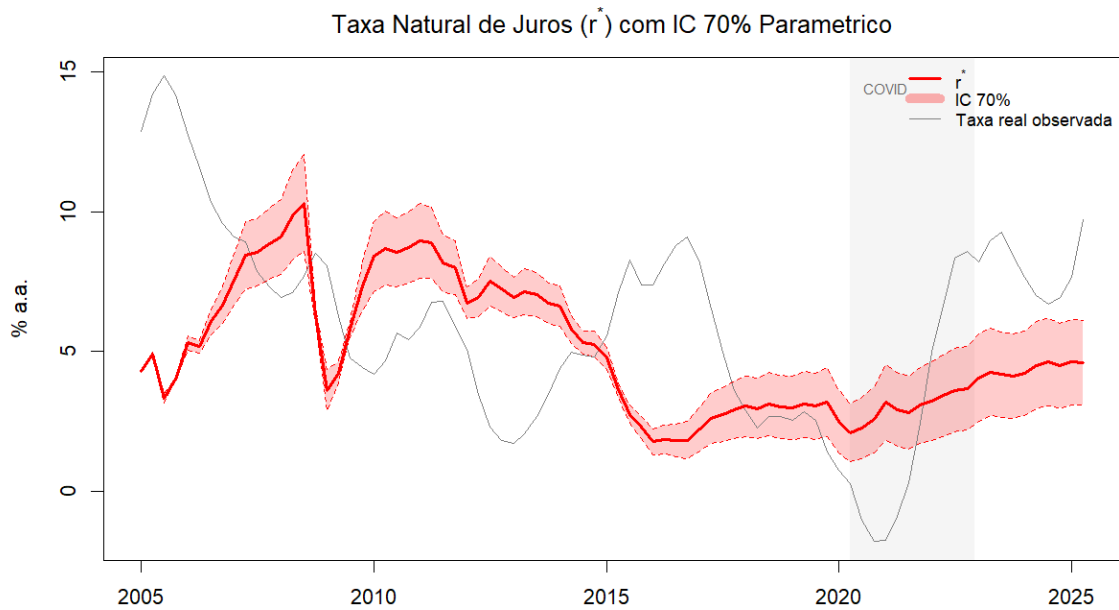


Figura 6 – Taxa natural de juros com intervalo de confiança de 70% (Hamilton paramétrico, 5.000 iterações Monte Carlo).

Tabela 8 – Comparação com Estimativas da Literatura

Fonte	Período	r^* médio	r^* atual
Este trabalho (Selic)	2004–2025	5,03%	4,61%
Este trabalho (DI-Pre)	2004–2025	5,12%	4,83%
BCB, RI Jun/2024 (LW + EMBI)	—	—	5,1%
BCB, RI Jun/2024 (LW + CDS)	—	—	4,5%
Santos & Muinhos (2024)	2022–2023	—	3,4–4,8%
Moreira & Portugal (2019)	1999–2017	$\approx 5,0\%$	—

A média amostral de 5,03% (Selic) e 5,12% (DI-Pre) situa-se próxima à estimativa de Moreira e Portugal (2019) para o período 1999–2017 ($\approx 5,0\%$), que utiliza arcabouço semelhante. A estimativa atual de 4,61% (Selic) e 4,83% (DI-Pre) é comparável às referências do Banco Central no Relatório de Inflação de junho de 2024, que reporta 5,1% (modelo LW com EMBI) e 4,5% (com CDS). A faixa de 3,4–4,8% estimada por Santos e Muinhos (2024) refere-se especificamente a 2022–2023, período em que nossas estimativas também se situam em patamar inferior à média ($r^* \approx 3,0\%$), de modo que a aparente diferença reflete a comparação entre períodos distintos e não uma divergência metodológica.

Com a taxa real *ex-ante* em torno de 9,7% ao ano na última observação (2025-T2) e r^* estimado em 4,6%, a postura monetária encontra-se em território significativamente contracionista (+5,1 p.p. acima do nível neutro), consistente com o ciclo de alta da Selic iniciado em 2024 para convergência da inflação à meta.

5 Implicações para Política Econômica

A estimativa de taxa natural de juros média de 5,03% a.a., com valor atual de 4,61% (2025-T2), possui implicações diretas para a condução da política monetária no Brasil e para a interpretação da orientação atual do Banco Central.

5.1 Avaliação da Orientação Monetária

A avaliação da orientação da política monetária deve considerar o hiato da taxa real de juros, definido como $(r - r^*)$, ou seja, a diferença entre a taxa real de juros efetiva e a taxa natural estimada.

Para o período mais recente (2025-T2), utilizando a estimativa final do modelo com quebra estrutural e κ ($r^* = c \cdot g + z$), observamos:

- Taxa SELIC meta: 14,58% a.a.
- Expectativa de inflação 12 meses (Focus): 4,88% a.a.
- Taxa real *ex-ante*: 9,70% a.a. (SELIC – expectativa)
- Taxa natural estimada (2025-T2): 4,61% a.a. [IC 70%: 3,11%–6,12%]
- Orientação da política monetária: $(r - r^*) = 9,70\% - 4,61\% = +5,09$ p.p.

A política monetária encontra-se em posição fortemente contracionista no segundo trimestre de 2025, com a taxa real efetiva cerca de 5,1 p.p. acima do nível neutro estimado. Esse posicionamento reflete: (i) o ciclo de alta da SELIC iniciado em 2024 para conter pressões inflacionárias; (ii) expectativas de inflação ainda acima da meta de 3%; (iii) a necessidade de manter juros restritivos para ancoragem das expectativas e convergência da inflação.

Cabe notar que, mesmo considerando o limite superior do intervalo de confiança de r^* (6,12%), a taxa real observada permanece acima da taxa natural, confirmando a orientação contracionista independentemente da incerteza paramétrica.

5.2 Implicações Fiscais

Uma taxa natural de 5,03% a.a. possui implicações fiscais significativas para o Brasil. Com dívida pública bruta em aproximadamente 75% do PIB (2024) e custo médio da dívida próximo à SELIC, o custo de carregamento fiscal pode ser estimado em:

$$\text{Custo Fiscal} = r^* \times \text{Dívida/PIB} \approx 5,03\% \times 75\% \approx 3,8\% \text{ do PIB}$$

Esse custo estrutural possui implicações importantes. Pela condição de estabilização da dívida (BLANCHARD et al., 1990, p. 16), o superávit primário necessário para manter constante a relação dívida/PIB é dado por $(r^* - g) \times \text{Dívida/PIB}$. Com crescimento real de 2–3% a.a., o diferencial $(r^* - g)$ situa-se entre 2 e 3 pontos percentuais, implicando superávit primário de aproximadamente 1,5% a 2,3% do PIB, valor significativamente superior aos resultados fiscais recentes. Adicionalmente, a taxa natural elevada reduz o espaço para política fiscal expansionista, de modo que elevações de gastos não financiadas por aumentos de receita tendem a elevar a trajetória da dívida de forma insustentável.

5.3 Implicações para Investimento

Do ponto de vista microeconômico, a taxa natural de 5,03% a.a. estimada pode ser interpretada como uma referência para o juro real livre de risco de longo prazo na economia brasileira. Embora r^* seja uma variável de equilíbrio macroeconômico, distinta do custo de capital efetivo observado no mercado, seu nível fornece um indicativo da base sobre a qual se constroem as taxas de retorno exigidas para investimentos produtivos.

A decomposição $r^* = g + z$ é relevante nesse contexto: o componente z_t , com média estimada de 2,93% a.a., captura o prêmio de risco estrutural da economia brasileira, incluindo risco soberano, incerteza fiscal e fatores externos. Adicionando-se prêmios adicionais típicos de projetos corporativos por risco de liquidez e incerteza de fluxos de caixa, a taxa de retorno exigida situar-se-ia indicativamente acima de r^* , possivelmente na faixa de 7% a 9% a.a. em termos reais. Trata-se, contudo, de uma ilustração qualitativa, não de uma estimativa formal do custo de capital.

Esse patamar elevado é consistente com a taxa de investimento estruturalmente baixa observada no Brasil e pode contribuir, entre outros fatores, para explicar o diferencial em relação a economias emergentes com r^* mais reduzido.

5.4 Limitações para Interpretação

As implicações discutidas acima devem ser interpretadas com cautela, considerando três limitações metodológicas. Primeiramente, os intervalos de confiança de r^* são amplos (EP médio de 0,93 p.p.), refletindo a identificação fraca do componente z_t ; a incerteza é particularmente elevada no período recente (EP $\approx 1,5$ p.p.), o que requer prudência na avaliação da orientação monetária corrente.

Em segundo lugar, r^* varia ao longo do tempo (na amostra analisada, oscilou entre aproximadamente 3% e 7% a.a.) e depende das especificações adotadas, embora a convergência entre as estimativas Selic e DI-Pre ($\Delta r^* \approx 0,10$ p.p.) confira robustez aos resultados.

Por fim, o parâmetro $a_r = -0,096$ (fixado do modelo original) é relativamente pequeno em magnitude, indicando transmissão limitada da política monetária via canal de juros. Essa característica, recorrente em aplicações a economias emergentes, sugere que outros canais (crédito, câmbio, expectativas) podem desempenhar papel mais relevante na transmissão monetária brasileira.

Em síntese, a taxa natural de 5,03% a.a. na média, e 4,61% no período atual, deve ser vista como referência indicativa robusta. O valor atual, inferior à média histórica, sugere que os fatores estruturais que sustentaram r^* em patamares mais elevados no início da amostra (prêmio de risco, incerteza institucional) reduziram-se parcialmente, embora permaneçam substancialmente acima do observado em economias avançadas. A consistência com as estimativas do Banco Central (4,5–5,1%) e da literatura recente confere validação externa aos resultados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho estimou a taxa natural de juros para o Brasil no período 2003–2025, utilizando o modelo de Holston, Laubach e Williams (2023) com duas extensões: a incorporação do parâmetro de volatilidade variável κ para o tratamento do período pandêmico e uma quebra estrutural na tendência do PIB potencial em 2008. Os resultados indicam que a taxa natural situa-se em torno de 5,03% ao ano (IC 70%: 4,07%–5,99%), com valor atual de 4,61%, estimativas consistentes com as referências do Banco Central (4,5–5,1%) e da literatura recente.

O trabalho apresenta quatro contribuições principais. Primeiro, a implementação do parâmetro κ de Holston, Laubach e Williams (2023) para o Brasil, com valores estimados de $\kappa_{2020} = 3,28$, $\kappa_{2021} = 1,13$ e $\kappa_{2022} = 1,50$, permitiu que o filtro de Kalman atribuísse menor peso às observações do período pandêmico, evitando contaminação das estimativas de r^* pela volatilidade atípica. Os valores são sistematicamente inferiores aos reportados para os EUA (5–18), refletindo o patamar de volatilidade estruturalmente mais elevado da economia brasileira.

Segundo, a quebra estrutural em 2008 corrigiu a tendência do PIB potencial, revelando desaceleração de 4,91% para 0,92% ao ano. Sem essa correção, o componente z da taxa natural era inflado em até 1,46 ponto percentual no período 2009–2013, absorvendo a tendência mal especificada. A combinação da quebra com o κ produziu uma trajetória de r^* mais suave e economicamente plausível.

Terceiro, a validação com a taxa DI-Pre B3 de 12 meses como alternativa à Selic demonstrou robustez das estimativas: a diferença entre os modelos é de apenas 0,10 ponto percentual na média e 0,22 p.p. no valor atual. Essa convergência indica que a taxa natural estimada não é sensível à escolha da taxa nominal.

Por fim, a utilização da taxa real *ex-ante* (baseada em expectativas Focus) mostrou-se essencial para a identificação do parâmetro $a_r = -0,096$, que com taxa *ex-post* atinge o limite da restrição ($-0,0025$). O crescimento tendencial estimado com taxa *ex-ante* ($g = 2,10\%$ a.a.) é consistente com o PIB potencial brasileiro, enquanto a estimativa com taxa *ex-post* ($g \approx 0\%$) é economicamente implausível.

A decomposição $r^* = g + z$ revelou componentes plausíveis: crescimento tendencial $g = 2,10\%$ a.a. e outros fatores $z = 2,93\%$ a.a. na média amostral. No período atual (2025-T2), os dois componentes convergem para valores praticamente iguais ($g = 2,31\%$, $z = 2,31\%$), sugerindo redução parcial do prêmio de risco em relação à primeira metade da amostra. O valor positivo de z contrasta com economias avançadas, onde esse componente é tipicamente negativo ou próximo de zero, e constitui o principal determinante da taxa

natural elevada no país.

Não obstante, o estudo apresenta limitações. Os intervalos de confiança são amplos (EP médio de 0,93 p.p.), com aproximadamente 94% da variância total proveniente da incerteza sobre z_t . Os parâmetros σ_{y^*} e σ_z são fracamente identificados, ambos atingindo seus limites superiores, comportamento consistente com o problema de *pile-up* documentado por Stock e Watson (1998). Adicionalmente, o parâmetro a_r é relativamente pequeno em magnitude, sugerindo transmissão limitada via canal de juros.

Trabalhos futuros poderiam avançar em diferentes direções: incorporação de mais defasagens na curva IS (3–4 defasagens) como exercício de robustez; utilização de dados mensais do IBC-Br em substituição ao PIB trimestral; estimação de funções de resposta ao impulso para avaliar a propagação dos choques; e comparações internacionais com outros mercados emergentes latino-americanos que permitam contextualizar a experiência brasileira.

Referências

- BARBOSA, F. d. H.; CAMÊLO, F. D.; JOÃO, I. C. A taxa natural de juros no brasil entre 2003 e 2015. *Revista Brasileira de Economia*, FGV, v. 70, n. 4, p. 399–417, 2016.
- BLANCHARD, O.; CHOURAQUI, J.-C.; HAGEMANN, R.; SARTOR, N. The sustainability of fiscal policy: New answers to an old question. *OECD Economic Studies*, n. 15, p. 7–36, 1990.
- FONSECA, M. W.; MUINHOS, M. K.; ORENG, M. *Equilibrium Interest Rate in Brazil: An Application of the Laubach-Williams Method*. [S.l.], 2016.
- FONSECA, M. W.; MUINHOS, M. K.; SCHULZ, E. Equilibrium real interest rates in brazil: Convergence at last, but not quite. *Brazilian Review of Finance*, Brazilian Society of Finance, v. 20, n. 1, p. 40–61, 2022.
- FRIEDMAN, M. The role of monetary policy. *American Economic Review*, American Economic Association, v. 58, n. 1, p. 1–17, 1968.
- HALE, T.; ANGRIST, N.; GOLDSZMIDT, R.; KIRA, B.; PETHERICK, A.; PHILLIPS, T.; WEBSTER, S.; CAMERON-BLAKE, E.; HALLAS, L.; MAJUMDAR, S. et al. A global panel database of pandemic policies (oxford covid-19 government response tracker). *Nature Human Behaviour*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 4, p. 529–538, 2021.
- HAMILTON, J. D. Standard errors of estimated state vectors of the kalman filter. 1986. Manuscript.
- HARVEY, A. C. *Time Series Models*. 2. ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1993.
- HOLSTON, K.; LAUBACH, T.; WILLIAMS, J. C. Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants. *Journal of International Economics*, Elsevier, v. 108, n. S1, p. S59–S75, 2017.
- HOLSTON, K.; LAUBACH, T.; WILLIAMS, J. C. *Measuring the Natural Rate of Interest after COVID-19*. [S.l.], 2023.
- LAUBACH, T.; WILLIAMS, J. C. Measuring the natural rate of interest. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 85, n. 4, p. 1063–1070, 2003.
- MOREIRA, J. R. R.; PORTUGAL, M. S. Natural rate of interest estimates for brazil after adoption of the inflation targeting regime. *Revista Brasileira de Economia*, FGV, v. 73, n. 1, p. 3–23, 2019.
- PHELPS, E. S. Money-wage dynamics and labor-market equilibrium. *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, v. 76, n. 4, Part 2, p. 678–711, 1968.
- SANTOS, F. M. G. dos; MUINHOS, M. K. The natural rate of interest in brazil: State-space modelling approaches. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 22, n. 4, p. 95–124, 2024.

STOCK, J. H.; WATSON, M. W. Median unbiased estimation of coefficient variance in a time-varying parameter model. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 93, n. 441, p. 349–358, 1998.

TAYLOR, J. B. Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Elsevier, v. 39, p. 195–214, 1993.

WICKSELL, K. Geldzins und güterpreise. *Jena: Fischer*, 1898.

WILLIAMS, J. H. The monetary doctrines of j. m. keynes. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 45, n. 4, p. 547–587, 1931.

Apêndices

APÊNDICE A – Matrizes do Espaço de Estados

Este apêndice apresenta as matrizes completas do modelo de espaço de estados para cada estágio da estimação, seguindo a documentação técnica de Holston, Laubach e Williams (2023).

O modelo segue a representação geral:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}'\mathbf{x}_t + \mathbf{H}'\boldsymbol{\xi}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{c} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (\text{A.2})$$

onde \mathbf{y}_t é o vetor de observações, \mathbf{x}_t o vetor de variáveis exógenas, $\boldsymbol{\xi}_t$ o vetor de estados latentes, \mathbf{H}' a matriz de observação dos estados, \mathbf{A}' a matriz de observação das exógenas, \mathbf{F} a matriz de transição, \mathbf{Q} a covariância dos choques de estado e \mathbf{R} a covariância dos choques de observação.

A.1 Estágio 1: Hiato do Produto

O primeiro estágio estima o PIB potencial (y_t^*) e o hiato do produto, incorporando o ajuste para COVID-19 via o parâmetro ϕ associado ao *Stringency Index* (d_t).

Vetores:

$$\mathbf{y}_t = [y_t, \pi_t]'$$

$$\mathbf{x}_t = [y_{t-1}, y_{t-2}, \pi_{t-1}, \bar{\pi}_{t-2:4}, \bar{\pi}_{t-5:8}, d_t, d_{t-1}, d_{t-2}]'$$

$$\boldsymbol{\xi}_t = [y_t^*, y_{t-1}^*, y_{t-2}^*]'$$

Matrizes:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & -b_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \phi & -\phi a_1 & -\phi a_2 \\ b_y & 0 & b_\pi & 1 - b_\pi & 0 & 0 & -\phi b_y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{y^*}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{IS}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\pi^2 \end{bmatrix}$$

Parâmetros: $\boldsymbol{\theta}_1 = [a_1, a_2, b_\pi, b_y, g, \phi, \sigma_{IS}, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}]$

A.2 Estágio 2: Incorporação da Taxa de Juros

O segundo estágio introduz a taxa de juros real na curva IS e permite que a tendência de crescimento (g_t) varie no tempo.

Vetores:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= [y_t, \pi_t]' \\ \mathbf{x}_t &= [y_{t-1}, y_{t-2}, r_{t-1}, r_{t-2}, \pi_{t-1}, \bar{\pi}_{t-2:4}, \bar{\pi}_{t-5:8}, 1, d_t, d_{t-1}, d_{t-2}]' \\ \boldsymbol{\xi}_t &= [y_t^*, y_{t-1}^*, y_{t-2}^*, g_t, g_{t-1}, g_{t-2}]'\end{aligned}$$

Matrizes de observação:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & 0 & \frac{a_r}{2} & \frac{a_r}{2} \\ 0 & -b_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \frac{a_r}{2} & \frac{a_r}{2} & 0 & 0 & 0 & a_0 & \phi & -\phi a_1 & -\phi a_2 \\ b_y & 0 & 0 & 0 & b_\pi & 1 - b_\pi & 0 & 0 & 0 & -\phi b_y & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de transição:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes de covariância:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{y^*}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_g \sigma_{y^*})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_{IS}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\pi^2 \end{bmatrix}$$

Parâmetros: $\boldsymbol{\theta}_2 = [a_1, a_2, a_r, a_0, b_\pi, b_y, \phi, \sigma_{IS}, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}]$

O parâmetro $\lambda_g = \sigma_g / \sigma_{y^*}$ é obtido via estimador mediana-não-viesado de Stock e Watson (1998).

A.3 Estágio 3: Decomposição da Taxa Natural

O terceiro estágio decompõe a taxa natural em $r_t^* = c \cdot g_t + z_t$, onde g_t é a tendência de crescimento e z_t captura outros determinantes estruturais.

Vetores:

$$\mathbf{y}_t = [y_t, \pi_t]'$$

$$\mathbf{x}_t = [y_{t-1}, y_{t-2}, r_{t-1}, r_{t-2}, \pi_{t-1}, \bar{\pi}_{t-2:4}, \bar{\pi}_{t-5:8}, d_t, d_{t-1}, d_{t-2}]'$$

$$\boldsymbol{\xi}_t = [y_t^*, y_{t-1}^*, y_{t-2}^*, g_t, g_{t-1}, g_{t-2}, z_t, z_{t-1}, z_{t-2}]'$$

Matrizes de observação:

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -c\frac{a_r}{2} & -c\frac{a_r}{2} & 0 & -\frac{a_r}{2} & -\frac{a_r}{2} & 0 \\ 0 & -b_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \frac{a_r}{2} & \frac{a_r}{2} & 0 & 0 & 0 & \phi & -\phi a_1 & -\phi a_2 \\ b_y & 0 & 0 & 0 & b_\pi & 1 - b_\pi & 0 & 0 & -\phi b_y & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de transição:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância dos estados:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{y^*}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_g \sigma_{y^*})^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_t = \kappa_t^2 \begin{bmatrix} \sigma_{IS}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\pi^2 \end{bmatrix}$$

onde $\kappa_t \geq 1$ é o parâmetro de volatilidade variável, com $\kappa_t = 1$ fora do período pandêmico (ver eq. 4.2).

Parâmetros: $\theta_3 = [a_1, a_2, a_r, b_\pi, b_y, c, \phi, \sigma_{IS}, \sigma_\pi, \sigma_{y^*}, \sigma_z, \kappa_{2020}, \kappa_{2021}, \kappa_{2022}]$

O parâmetro λ_g é fixado no valor obtido pelo estimador mediana-não-viesado de Stock e Watson (1998). O parâmetro σ_z é estimado livremente por máxima verossimilhança com limite superior de 2,2 (ver discussão na Seção 4.3). Seguindo a convenção de Laubach e Williams (2003), fixamos $c = 1$.

A.4 Adaptações para a Economia Brasileira

O modelo adotado neste trabalho difere do HLW (2023) original nos seguintes aspectos:

1. Curva de Phillips simplificada: Não incluímos inflação de petróleo e importados, variáveis menos relevantes para aplicações ao Brasil.
2. Restrições paramétricas: Seguindo Moreira e Portugal (2019), utilizamos $b_y \geq 0,25$ (versus $b_y \geq 0,025$ no original).
3. Calibração: $\lambda_g = 0,15$ e $z_0 = 2,2\%$, seguindo Moreira e Portugal (2019). O parâmetro σ_z é estimado livremente por máxima verossimilhança com limite superior de 2,2.
4. Volatilidade variável (κ): Implementamos os parâmetros κ_t de Holston, Laubach e Williams (2023), que multiplicam a matriz de covariância do erro de medição R durante o período pandêmico (2020-T2 a 2022-T4), conforme descrito na Seção 4.3.
5. Quebra estrutural: Tendência quebrada no PIB potencial em 2008-T4, seguindo Holston, Laubach e Williams (2017), capturando a desaceleração permanente do crescimento após a crise financeira global.

A Tabela 9 resume os valores utilizados.

Tabela 9 – Restrições e Calibrações do Modelo

Parâmetro	Restrição	Valor	Fonte
b_y	$\geq 0,25$	0,25	Moreira & Portugal (2019)
a_r	$\leq -0,0025$	-0,0956	HLW (2017)
σ_{y^*}	$\leq 0,50$	0,50	HLW (2017)
λ_g	calibrado	0,15	Moreira & Portugal (2019)
σ_z	$\leq 2,2$	2,20 (teto)	Livre por máxima verossimilhança
z_0	calibrado	2,2%	Moreira & Portugal (2019)
c	fixado	1	LW (2003)