



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ana Gabriela Basotti

Sistemas Dinâmicos Diferenciáveis: Hiperbolicidade e Teoria Ergódica

Florianópolis

2026

Ana Gabriela Basotti

Sistemas Dinâmicos Diferenciáveis: Hiperbolicidade e Teoria Ergódica

Dissertação de mestrado apresentada para o
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada da Universidade Federal de
Santa Catarina, para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Pura e Aplicada.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemática
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sobottka

Florianópolis

2026

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Basotti, Ana Gabriela
Sistemas Dinâmicos Diferenciáveis: Hiperbolicidade e
Teoria Ergódica / Ana Gabriela Basotti ; orientador,
Marcelo Sobottka, 2026.
119 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2026.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Sistemas Dinâmicos. 3.
Hiperbolicidade. 4. Teoria Ergódica. I. Sobottka, Marcelo .
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação em Matemática. III. Título.

Ana Gabriela Basotti

Sistemas Dinâmicos Diferenciáveis: Hiperbolicidade e Teoria Ergódica

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira
Universidade Federal de Alagoas

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura e Aplicada.

Dirceu Bagio
Pós-Graduação

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Orientador

Florianópolis, dia 23 de fevereiro de 2026

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família, minha mãe Stela e minha irmã Marina, pelo apoio incondicional durante toda a minha vida. Vocês são minha base e eu sou eternamente grata.

Ao meu avô Marino, que sempre teve orgulho e acreditou em mim.

Agradeço ao Daniel, o qual o suporte foi essencial para a conclusão desse capítulo da minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Marcelo Sobottka, por todos os ensinamentos durante o mestrado.

Também agradeço aos professores que passaram pelo meu caminho durante os últimos anos, levarei comigo todo o conhecimento que me foi passado.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho exploramos o conceito de hiperbolicidade em sistemas dinâmicos diferenciáveis, isto é, quando o espaço de fases é uma variedade diferenciável e a regra de evolução é dada por um difeomorfismo agindo na variedade. Estudamos propriedades fundamentais desses sistemas, como a existência de variedades estáveis e instáveis e a persistência da hiperbolicidade sob perturbações. Além disso, trabalhamos a noção de ergodicidade no caso do difeomorfismo ser hiperbólico em toda variedade e conservativo. Por fim, discutimos generalizações da noção de hiperbolicidade, como a decomposição dominada e a hiperbolicidade parcial, apresentando a conjectura de Pugh–Shub sobre ergodicidade em sistemas parcialmente hiperbólicos.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Hiperbolicidade. Teoria Ergódica.

ABSTRACT

In this work we explore the concept of hyperbolicity in differentiable dynamical systems, that is, when the phase space is a differentiable manifold and the evolution rule is given by a diffeomorphism acting on the manifold. We study some fundamental properties of these systems, such as the existence of stable and unstable manifolds and the persistence of hyperbolicity under perturbations. Moreover, we go through the notion of ergodicity in the case of the diffeomorphism being hyperbolic on the whole manifold and conservative. Finally, we discuss generalizations of the notion of hyperbolicity, such as dominated splitting and partial hyperbolicity, presenting the Pugh–Shub conjecture on ergodicity in partially hyperbolic systems.

Keywords: Dynamical Systems. Hyperbolicity. Ergodic Theory.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES	11
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS	11
2.2	VARIETADES DIFERENCIÁVEIS	14
2.3	TOPOLOGIA C^r	25
3	HIPERBOLICIDADE	27
3.1	CONJUNTOS HIPERBÓLICOS	27
3.2	PERSISTÊNCIA DA HIPERBOLICIDADE	38
3.3	CRITÉRIO DE DIFERENCIABILIDADE	43
3.4	VARIETADES ESTÁVEIS	46
3.5	ESTABILIDADE ESTRUTURAL	77
3.6	HÖLDER CONTINUIDADE	85
4	ERGODICIDADE DE DIFEOMORFISMOS DE ANOSOV	90
4.1	TEORIA ERGÓDICA	90
4.2	ARGUMENTO DE HOPF	94
4.3	CONTINUIDADE ABSOLUTA	98
4.4	ERGODICIDADE	102
5	ENFRAQUECIMENTO DA NOÇÃO DE HIPERBOLICIDADE	104
5.1	HIPERBOLICIDADE PARCIAL	104
5.2	ERGODICIDADE EM SISTEMAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS	111
6	CONCLUSÃO	117
	REFERÊNCIAS	118

1 INTRODUÇÃO

Sistemas Dinâmicos, de maneira simplificada, são modelos matemáticos que descrevem a evolução de um processo ao longo do tempo. Ao estudá-los, estamos interessados na estrutura de suas órbitas. Tais sistemas aparecem em diversas áreas, como economia, biologia, física, comunicação e ciência da computação.

A teoria moderna de Sistemas Dinâmicos teve origem no final do século XIX, com o estudo qualitativo de equações diferenciais, proposto por Henri Poincaré. Ao contrário da abordagem clássica, que buscava soluções explícitas das equações, Poincaré propôs analisar suas propriedades, recorrendo a ferramentas geométricas e topológicas. Seus trabalhos em mecânica celeste introduziram conceitos fundamentais como recorrência e estabilidade, marcando o início da visão qualitativa da dinâmica.

Formalmente, consideramos um espaço de fases M e uma regra de evolução temporal. Em tempo contínuo, para cada estado $x \in M$, associamos a velocidade e direção em que o sistema irá evoluir, isso corresponde a um campo vetorial $X(x)$ no espaço de fases. Se, por exemplo, este campo é continuamente diferenciável, existe uma única curva tangente a X em cada ponto e passando por x , dita a órbita de x . Também é interessante considerar sistemas que evoluem em tempo discreto, neste caso, observamos as iteradas de uma aplicação $f : M \rightarrow M$. Quando M é uma variedade diferenciável e f é um difeomorfismo, obtemos um sistema dinâmico diferenciável.

De acordo com Smale (1967), a principal razão para estudar a estrutura global das órbitas vem das equações diferenciais, que é o caso quando consideramos o tempo contínuo. A razão para considerar as iteradas de um certo difeomorfismo, é que, certas equações diferenciais possuem seções transversais (cross-sections) e, neste caso, o estudo qualitativo de equações diferenciais se reduz ao estudo do difeomorfismo associado a seção transversal. Além disso, outra razão é ideia de que os mesmos fenômenos e problemas da teoria qualitativa de equações diferenciais estão presentes em sua forma mais simples no caso discreto. Compreendendo inicialmente este ponto de vista, a tarefa secundária de traduzir para o caso das equações diferenciais é relativamente mais simples.

A noção de hiperbolicidade desempenha papel central na teoria dos sistemas dinâmicos diferenciáveis. Segundo Hasselblatt e Katok (2002), o desenvolvimento histórico dessa área passa por duas linhas principais: o estudo de fluxos geodésicos (por Hadamard, Hedlund, Hopf, Anosov, Sinai), especialmente em superfícies e variedades de curvatura negativa; e a identificação de fenômenos hiperbólicos em sistemas mais gerais, como nos trabalhos de Poincaré (pontos homoclínicos na mecânica celestial), Perron (equações diferenciais), Cartwright–Littlewood (circuitos de rádio), Levinson (equação de Van der Pol)

e Smale (modelo da ferradura).

O estudo sistemático da dinâmica hiperbólica começou a se desenvolver com os trabalhos de Anosov e Sinai (1967) sobre as propriedades ergódicas dos sistemas que atualmente são ditos de Anosov. Baseando-se nos trabalhos de Anosov, Smale propôs a ideia de estudar sistemas dinâmicos a partir da noção de conjuntos hiperbólicos, que são conjuntos invariantes, em que a dinâmica exibe comportamento hiperbólico.

Contudo, observou-se que a hiperbolicidade (uniforme) não é uma propriedade tão universal quanto se imaginava inicialmente. De fato, as condições impostas em um sistema para ser considerado hiperbólico são bastante restritivas. Assim, por volta de 1970, surgiram generalizações que enfraquecem essa noção, como a teoria dos sistemas parcialmente hiperbólicos. Nesses sistemas, admite-se a existência de uma direção central que não apresenta comportamento uniformemente expansivo ou contrativo. Os trabalhos de Hirsch, Pugh e Shub (1977) e de Brin e Pesin (1974), foram fundamentais na formulação moderna da hiperbolicidade parcial. Outra generalização é a teoria da hiperbolicidade não uniforme, introduzida por Pesin (1976), a qual utiliza a linguagem dos expoentes de Lyapunov. Esta é uma área bastante rica, porém não será o foco deste trabalho.

Ademais, também é importante para o texto a Teoria Ergódica. Genericamente, essa teoria estuda sistemas dinâmicos em um espaço de medida munido de uma medida invariante. Os fluxos e as funções que surgem das equações de movimento na mecânica clássica preservam volume no espaço de fases e seu estudo levou ao desenvolvimento dessa teoria. Em física estatística, a hipótese ergódica de Boltzmann-Maxwell, gerou uma busca por sistemas mecânicos ergódicos. Já em geometria, a busca por ergodicidade levou ao estudo de fluxos geodésicos em variedades de curvatura negativa, em que Hopf desenvolveu um argumento para estabelecer ergodicidade no caso de curvaturas negativas não constantes. Anosov generalizou este argumento para variedades de qualquer dimensão.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar propriedades de sistemas hiperbólicos, como a existência de variedades estáveis e instáveis, a estabilidade estrutural e a ergodicidade quando o sistema preserva medida.

O presente trabalho está dividido conforme o explicitado a seguir. No capítulo 2 é feita uma revisão acerca de conceitos utilizados no decorrer do texto. Mais precisamente, na seção 2.1 são introduzidas definições básicas de Sistemas Dinâmicos, na seção 2.2 são revisados diversos conceitos acerca de variedades diferenciáveis e na seção 2.3 é tratada a topologia C^r em espaços de difeomorfismos. O capítulo 3 é dedicado ao estudo da hiperbolicidade uniforme, isto é, é definida a noção de conjunto hiperbólico e apresentado diversos resultados sobre o assunto. Na seção 3.4 é explorada, de maneira detalhada, a questão da existência e caracterização das variedades estáveis e instáveis. O capítulo 4 é dedicado a conectar os conceitos de Teoria Ergódica com a hiperbolicidade. Para

este fim, são apresentados brevemente alguns conceitos da Teoria Ergódica e é provada a ergodicidade dos difeomorfismos de Anosov conservativos, utilizando o argumento de Hopf (seção 4.2) e a continuidade absoluta das folheações estável e instável (seção 4.3). Por fim, no capítulo 5, é tratado sobre o enfraquecimento da noção de hiperbolicidade uniforme, definindo decomposição dominada e hiperbolicidade parcial. Na seção 5.2 é enunciada a famosa conjectura de Pugh–Shub sobre ergodicidade em sistemas parcialmente hiperbólicos, com o objetivo de mostrar uma direção que os estudos de dinâmica hiperbólica e Teoria Ergódica tomaram.

2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão concisa de definições, notações e resultados importantes para o trabalho. A exposição visa proporcionar uma base teórica necessária para os capítulos subsequentes, garantindo a autossuficiência do texto.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Nesta seção apresentamos conceitos básicos da teoria de Sistemas Dinâmicos e notações. As principais referências utilizadas foram (BRIN; STUCK, 2002) e (WEN, 2016).

Um sistema dinâmico discreto é um par (X, f) em que X é um conjunto não vazio, chamado de espaço de fases, e $f : X \rightarrow X$ é uma função que dita como os pontos de X se comportam ao longo do tempo. Dependendo do contexto, o espaço X terá alguma estrutura extra, isto é, poderá ser um espaço métrico, um espaço topológico, uma variedade diferenciável, entre outros. Quando a estrutura é um espaço de medida, as questões sobre esse sistema são de interesse da área de Teoria Ergódica, como veremos brevemente na seção 4.1.

A dinâmica é vista como a passagem do tempo, ou seja, a iteração da função. Para $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima iterada de f é dada por $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n vezes) e definimos f^0 como sendo a função identidade. No caso de f ser invertível, definimos $f^{-n} = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ (n vezes). Note que, como $f^{m+n} = f^m \circ f^n$ e $f^n \circ f^{-n} = f^0 = id$, as iteradas da função f no ponto x formam um semigrupo (no caso de f invertível, será um grupo)

A órbita de um ponto x é a trajetória desse ponto no espaço X , vista sob iterações da função f . Para $x \in X$, a semiórbita positiva é o conjunto $\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. No caso de f ser invertível, definimos também a semiórbita negativa como o conjunto $\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$. A órbita de x é dada por $\mathcal{O}_f(x) = \mathcal{O}_f^+(x) \cup \mathcal{O}_f^-(x)$. Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é invariante por f se $f(A) = A$.

Um sistema dinâmico contínuo consiste de um espaço X e uma família de funções $\{f^t : X \rightarrow X\}$ que dependem do parâmetro t em \mathbb{R} ou \mathbb{R}_0^+ , que forma um semigrupo de um parâmetro, isto é, $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ e $f^0 = id$. O sistema dinâmico é chamado de fluxo, caso $t \in \mathbb{R}$, ou semifluxo, caso $t \in \mathbb{R}_0^+$. Fluxos normalmente surgem como soluções de equações diferenciais ordinárias, isto é, para $t \mapsto \varphi^t(\nu)$ a solução de

$$X' = F(X), \quad X(0) = \nu$$

e assumindo que a solução existe para todo tempo, então (φ^t) é um fluxo em M . O campo

de vetores F pode ser recuperado pela relação

$$F(X) = \left. \frac{\partial \varphi^t(X)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Note que para um t_0 fixo, as iteradas $(f^{t_0})^n = f^{t_0 n}$ formam um sistema dinâmico discreto.

Neste trabalho, focamos em sistemas dinâmicos diferenciáveis, porém, é importante entender algumas características inerentemente topológicas desses sistemas.

Um sistema dinâmico topológico é um espaço topológico X e uma função contínua f ou um (semi-)fluxo f^t para o qual a função $(t, x) \rightarrow f^t(x)$ é contínua. Aqui consideramos X um espaço topológico compacto, metrizável e segundo-contável.

Com o objetivo de classificar sistemas dinâmicos, é definida uma noção de equivalência.

Definição 2.1.1. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos topológicos. Uma semi-conjugação de (Y, g) para (X, f) é uma função contínua sobrejetora $\pi : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ g$. Se π é um homeomorfismo, então π é dito conjugação topológica.

De maneira simplificada, se f e g são conjugados, então essas duas dinâmicas podem ser consideradas “a mesma”, a menos de uma mudança de coordenadas.

Essa área busca entender a estrutura das órbitas de f e descrevê-las. Os pontos que são os mais fáceis de descrever são aqueles que nunca saem do lugar ou que eventualmente retornam à sua origem, ou seja, os pontos periódicos:

Definição 2.1.2. Um ponto $x \in X$ é dito ponto periódico de f se existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^n(x) = x$. Dizemos que o período é o menor natural positivo tal que isso acontece. Se $n = 1$, x é dito ponto fixo. Denotamos o conjunto dos pontos periódicos de f por $P(f)$ e o conjunto dos pontos fixos é denotado por $\text{Fix}(f)$.

Os pontos da órbita positiva de $x \in X$ geralmente não convergem (e se convergem, o limite deve ser um ponto fixo). No entanto, muitas subsequências convergem, considere a seguinte definição:

Definição 2.1.3. Seja $x \in X$. Definimos o conjunto ω -limite de x como

$$\omega_f(x) = \{y \in X : \text{existe subsequência } n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Se f é invertível, definimos o conjunto α -limite de x como

$$\alpha_f(x) = \{y \in X : \text{existe subsequência } n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \text{ tal que } f^{-n_k}(x) \rightarrow y\}.$$

Agora, vemos outras noções de recorrência mais fracas que periodicidade, porém que auxiliam a descrever a “trajetória” de um ponto.

Definição 2.1.4. Um ponto $x \in X$ é dito não-errante se para todo conjunto aberto U contendo x existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotamos o conjunto de pontos não errantes por $\Omega(f)$.

Esse conjunto é não-vazio, compacto e invariante por f . A condição $\Omega(f) = X$ significa que todo conjunto não vazio aberto retorna para si mesmo, garantindo a recorrência. A propriedade mais forte de transitividade de f significa que todo aberto não vazio visita todos os outros abertos não vazios, garantindo que a dinâmica cubra todo o espaço X . Isto é,

Definição 2.1.5. Uma função contínua f é dita topologicamente transitiva se para cada par de conjuntos abertos não vazios $U, V \subset X$, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Claramente, transitividade implica que $\Omega(f) = X$. Para funções que preservam uma medida, a definição análoga de transitividade é ergodicidade, definida na seção 4.1.

Outro conceito importante em sistemas dinâmicos é o de expansividade, que garante que pontos distintos se afastam sob iterações da função. Consideramos X um espaço métrico com métrica d .

Definição 2.1.6. Um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ é dito expansivo se existe $r > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe inteiro n tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq r$.

Outros conjuntos que desempenham um papel fundamental nessa área são os conjuntos estáveis e instáveis. Consideramos aqui X um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ um sistema dinâmico invertível.

Definição 2.1.7. Seja $x \in X$. Definimos o conjunto estável de x como

$$W^s(x, f) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\}.$$

Por outro lado, definimos o conjunto instável de x como

$$W^u(x, f) = \{y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty\}.$$

Os sobrescritos “s” e “u” decorrem das palavras em inglês *stable* e *unstable*, respectivamente estável e instável em português. No caso de x ser um ponto fixo, os conjuntos $W^s(x, f)$ e $W^u(x, f)$ se resumem aos pontos que convergem para x no futuro e que convergem para x no passado, respectivamente. Ainda, temos que $f(W^s(x, f)) = W^s(f(x), f)$ e $f^{-1}(W^u(x, f)) = W^u(f^{-1}(x), f)$, para todo $x \in X$.

2.2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Como o contexto principal do trabalho é uma variedade Riemanniana C^∞ e, durante todo o texto lidamos com conceitos dessa teoria, é importante ressaltar algumas definições e resultados dessa área. Para isso, foram utilizadas as referências (LEE, 2012) e (LIMA, 2007). Variedades diferenciáveis, resumidamente, são espaços que se parecem com algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , nos quais é possível aplicar as noções de cálculo.

Definição 2.2.1. Seja M espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se possui as seguintes propriedades:

- i) M é espaço de Hausdorff.
- ii) M é segundo-contável.
- iii) M é localmente euclidiano de dimensão n , isto é, para cada $p \in M$ existe um aberto $U \subset M$ contendo p , um aberto $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ homeomorfismo.

Para trabalhar com variedades topológicas utilizamos cartas de coordenadas. Uma carta em M é um par (U, φ) , em que $U \subset M$ é aberto e $\varphi : U \rightarrow V$ é homeomorfismo de U para o aberto $\varphi(U) = \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$. Pela definição de variedade, cada ponto $p \in U$ está contido no domínio de uma carta (φ, U) .

Dada uma carta (U, φ) , dizemos que U é uma vizinhança de coordenadas. As funções componentes de φ , definidas por $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, são ditas coordenadas locais em U .

Definimos agora a noção de estrutura diferenciável C^k em uma variedade. Sejam (U, φ) e (V, ψ) duas cartas de M tais que $U \cap V \neq \emptyset$. A composição $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo chamado de mapa de transição. Duas cartas são ditas C^k admissíveis se ou $U \cap V = \emptyset$ ou o mapa de transição é um difeomorfismo C^k . Uma coleção de cartas que cobrem M é dita um atlas \mathcal{A} . Se cada par de cartas em \mathcal{A} forem C^k compatíveis, o atlas é dito de classe C^k . Finalmente, dizemos que um atlas C^k \mathcal{A} é maximal se esse não está propriamente contido em nenhum outro atlas diferenciável. Um par (M, \mathcal{A}) , em que M é uma variedade topológica e \mathcal{A} é um atlas maximal C^k é dito uma variedade diferenciável de classe C^k .

A seguir é definido o que significa uma função f entre variedades diferenciáveis ser diferenciável.

Definição 2.2.2. Sejam M, N variedades de classe C^k , $k \geq 1$. Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita diferenciável em $p \in M$ se existem carta (U, φ) contendo p e carta (V, ψ) contendo $f(p)$ tal que $f(U) \subset V$ e a composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ é diferenciável no ponto $\varphi(p)$. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é diferenciável se for diferenciável em todos os pontos de

M e que f é C^r ($r \leq k$) se, para cada $p \in M$, a composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ é de classe C^r .

É possível mostrar que uma função diferenciável induz uma transformação linear entre espaços tangentes, definidos a seguir. Seja M variedade diferenciável e $p \in M$. Uma função $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma derivação em p se é linear e satisfaz a regra do produto:

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

O conjunto de derivações de $C^\infty(M)$ em p é um espaço vetorial chamado espaço tangente de M em p , denotado por T_pM . Um elemento de T_pM é dito um vetor tangente em p . Podemos pensar, simbolicamente, em vetores tangentes como setas, saindo do ponto p , tangentes a M . Estes espaços são como modelos lineares da variedade em cada ponto. Na literatura, é possível encontrar diversas outras definições de vetores tangentes a uma variedade diferenciável, como por exemplo por meio de espaço de germes ou classes de equivalência de curvas. Aqui foi seguida a construção de (LEE, 2012).

Em espaços euclidianos, a derivada de uma função em um ponto, representada pela matriz Jacobiana, é uma transformação linear que representa a melhor aproximação linear da função localmente. No caso de variedades temos uma função similar, definida no espaço tangente de um ponto p .

Definição 2.2.3. Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ função diferenciável. Para cada $p \in M$ definimos a derivada de f no ponto p

$$df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N,$$

como segue. Dado $v \in T_pM$, tomamos $df_p(v)$ a derivação em $f(p)$ que age em $g \in C^\infty(N)$ como

$$df_p(v)(g) := v(g \circ f).$$

Note que, se $g \in C^\infty(N)$, então $g \circ f \in C^\infty(M)$. Assim, $v(g \circ f)$ faz sentido. O operador $df_p(v) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, já que v é linear, e é uma derivação pois, para cada $g, h \in C^\infty(N)$,

$$\begin{aligned} df_p(v)(gh) &= v((gh) \circ f) = v((g \circ f)(h \circ f)) \\ &= (g \circ f)(p)v(h \circ f) + (h \circ f)(p)v(g \circ f) \\ &= g(f(p))df_p(v)(h) + h(f(p))df_p(v)(g). \end{aligned}$$

Proposição 2.2.4. Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow P$ funções diferenciáveis e $p \in M$. Então

i) $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é linear.

$$ii) \quad d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p : T_p M \rightarrow T_{(g \circ f)(p)} P.$$

$$iii) \quad d(id_M)_p = id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M.$$

$$iv) \quad \text{Se } f \text{ é difeomorfismo, } df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \text{ é difeomorfismo e } (df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}.$$

Demonstração. i) Sejam $v, u \in T_p M, \alpha \in \mathbb{R}$ e $F \in C^\infty(N)$, de modo que

$$\begin{aligned} df_p(v + \alpha u)(F) &= (v + \alpha u)(F \circ f) \\ &= v(F \circ f) + \alpha u(F \circ f) \\ &= df_p(v)(F) + \alpha df_p(u)(F). \end{aligned}$$

ii) Para $v \in T_p M$ e $F \in C^\infty(P)$, temos

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_p(v)(F) &= v(F \circ (g \circ f)) \\ &= v((F \circ g) \circ f) \\ &= df_p(v)(F \circ g) \quad (\text{note que } df_p(v) \in T_{f(p)} N) \\ &= dg_{f(p)}(df_p(v))(F). \end{aligned}$$

iii) Sejam $v \in T_p M$ e $F \in C^\infty(M)$. Note que

$$d(id_M)_p(v)(F) = v(F \circ id_M) = v(F).$$

iv) Suponha que f seja difeomorfismo. Então

$$id_M = d(id_M)_p = d(f^{-1} \circ f)_p = df_{f(p)}^{-1} \circ df_p$$

e por outro lado

$$df_p \circ df_{f(p)}^{-1} = df_{f^{-1}(f(p))} \circ df_{f(p)}^{-1} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = d(id_N)_{f(p)}.$$

□

É possível identificar o espaço tangente de um subconjunto aberto de M com o espaço tangente na variedade toda, como pode ser encontrado em Lee (2012, p. 56). A próxima proposição é sobre a dimensão do espaço tangente em um ponto da variedade.

Proposição 2.2.5. *Se M é uma variedade de classe C^k n -dimensional, então $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão n , para cada $p \in M$.*

Demonstração. Para $p \in M$, seja (U, φ) carta que contém p . Como φ é difeomorfismo de classe C^k de U para um aberto $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$, segue que $d\varphi_p$ é um isomorfismo de $T_p U$ para $T_{\varphi(p)} \hat{U}$. Ou seja $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$. Segue que $\dim T_p M = \dim T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n = n$. □

Temos que qualquer espaço vetorial finito admite uma estrutura de variedade diferenciável que independe da escolha de base ou norma. De fato, qualquer norma induz uma topologia que torna o espaço vetorial uma variedade e a estrutura diferenciável pode ser definida por meio do isomorfismo dado por uma base do espaço vetorial. Podemos identificar o espaço tangente de um espaço vetorial finito com o próprio espaço vetorial, como feito em Lee (2012, p. 59).

A abordagem da definição de espaço tangente pode parecer muito abstrata, então veremos um teorema que nos dá uma ideia de como tratar vetores tangente e diferenciais em coordenadas locais. Para isso, vamos achar uma base canônica para o espaço tangente.

Para o próximo teorema iremos utilizar que $\partial/\partial x^i|_a, \dots, \partial/\partial x^n|_a$ formam uma base para $T_a\mathbb{R}^n$, para algum $a \in \mathbb{R}^n$, em que $\partial/\partial x^i|_a$ é uma derivação em $T_a\mathbb{R}^n$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. A prova dessa afirmação pode ser encontrada em Lee (2012, p. 54).

Antes de enunciar o teorema, definiremos os vetores coordenadas em uma variedade diferenciável. Seja (U, φ) uma carta de coordenada C^k em M , com $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Para cada $p \in U$, definimos os vetores coordenadas $\partial/\partial x^i|_p \in T_pM$ como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = (d\varphi_p)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right).$$

Esses vetores agem em uma função $f \in C^\infty(U)$ como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} \right) (f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}).$$

Teorema 2.2.6. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e $p \in M$. Então T_pM é um espaço vetorial n -dimensional, e, para qualquer carta $(U, (x^i))$ contendo p , os vetores coordenadas $\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p$ formam uma base para T_pM .*

Demonstração. Seja (U, φ) um carta de coordenada C^k em M . Então φ é, em particular, um difeomorfismo de um aberto U de M para um aberto $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$. Da identificação de T_pU com T_pM e de 2.2.4, temos que $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Como comentado acima $\partial/\partial x^1|_{\varphi(p)}, \dots, \partial/\partial x^n|_{\varphi(p)}$ é base para $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Logo, as pré-imagens desses vetores por $d\varphi_p$ formam uma base para T_pM . \square

Dessa forma, qualquer vetor $v \in T_pM$ pode ser escrito de maneira única em uma carta $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ como

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

No lado direito da expressão acima, omitimos o somatório conforme a notação de Einstein. Note que os coeficientes de v são dados por $v^j = v(x^j)$, no qual x^j é função componente de φ . Isto é,

$$v(x^j) = \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} (x^j \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = v^i \delta_i^j = v^j$$

Muitas vezes precisamos considerar o conjunto de todos os vetores tangentes em todos os pontos da variedade, dessa forma, temos a seguinte definição:

Definição 2.2.7. Seja M variedade diferenciável. Definimos o fibrado tangente de M , denotado por TM , como sendo

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Escrevemos um elemento dessa união como (p, v) ou v_p , no qual o $p \in M$ e $v \in T_p M$, identificando em qual espaço tangente o vetor v está. O fibrado vem equipado com uma projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$, que leva cada vetor em $T_p M$ para o ponto p o qual é tangente. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em Lee (2012, p. 66).

Teorema 2.2.8. Para qualquer variedade n -dimensional M de classe C^k , o fibrado tangente TM tem uma topologia e estrutura diferencial que o torna uma variedade com dimensão $2n$ e de classe C^{k-1} . Com respeito a essa estrutura, $\pi : TM \rightarrow M$ é diferenciável.

Ao juntar as derivadas de uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$ em todos os pontos, obtemos uma função definida em todo o fibrado tangente, chamada de derivada global ou função tangente e denotada por $df : TM \rightarrow TN$ ou $Tf : TM \rightarrow TN$. Esta é apenas a função que quando restrita a cada espaço tangente $T_p M$ é df_p . Quando aplicamos a derivada de f em um vetor $v \in T_p M$ podemos denotar $df_p(v)$, $df(v)$ ou $Tf(v)$, dependendo do contexto e em quanta ênfase queremos dar ao ponto p .

A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em Lee (2012, p. 68):

Proposição 2.2.9. Se $f : M \rightarrow N$ é uma função suave, então $df : TM \rightarrow TN$ é suave.

Dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$ dizemos que o rank de f em p é dado pelo rank da transformação linear $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. É o rank da matriz Jacobiana de f em qualquer carta diferenciável ou a dimensão de $\text{Im}(df_p) \subset T_{f(p)} N$. A função f é dita uma submersão se sua derivada é sobrejetora em cada ponto (equivalentemente, $\text{rank } f = \dim N$) e é dita uma imersão se sua derivada é injetiva em cada ponto (ou $\text{rank } f = \dim M$). Submersões e imersões se comportam localmente como transformações lineares sobrejetivas e injetivas, respectivamente.

Definição 2.2.10. Se M e N são variedades suaves, uma função $f : M \rightarrow N$ é dita um difeomorfismo local se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U tal que $f(U)$ é aberto em N e $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo.

O próximo teorema é muito importante para as propriedades de difeomorfismos locais.

Teorema 2.2.11 (Teorema da Função Inversa para Variedades). *Suponha que M e N são variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ é suave. Se $p \in M$ é um ponto tal que df_p é invertível, então existem vizinhanças conexas U_0 de p e V_0 de $f(p)$ tais que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. De df_p ser bijeção, temos que $\dim M = \dim N = n$. Tomamos cartas de coordenadas suaves (U, φ) centrada¹ em p e (V, ψ) centrada em $f(p)$ tais que $f(U) \subset V$. Então $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma função suave do aberto $\hat{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ para $\hat{V} = \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, com $\hat{f}(p) = 0$. Como φ e ψ são difeomorfismos, $d\hat{f}_0 = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi_0^{-1}$ é não singular. Pelo Teorema da Função Inversa usual, o qual está enunciado em Lee (2012, p. 657), existem abertos conexos $\hat{U}_0 \subset \hat{U}$ e $\hat{V}_0 \subset \hat{V}$ contendo 0 tais que $\hat{f} : \hat{U}_0 \rightarrow \hat{V}_0$ é um difeomorfismo. Então, $U_0 = \varphi^{-1}(\hat{U}_0)$ e $V_0 = \psi^{-1}(\hat{V}_0)$ são vizinhanças conexas de p e $f(p)$, respectivamente. Segue, por composição, que $f|_{U_0}$ é um difeomorfismo de U_0 em V_0 . \square

Um tipo de imersão é particularmente importante.

Definição 2.2.12. Uma imersão $f : M \rightarrow N$ é dita um mergulho de M em N se também é um mergulho topológico, isto é, um homeomorfismo com sua imagem $f(M) \subset N$ na topologia do subespaço.

Os conjuntos abertos de variedades diferenciáveis podem ser vistos como uma variedade diferenciável própria. Aqui vemos algumas outras maneiras de subconjuntos de variedades serem variedades.

Definição 2.2.13. Uma variedade mergulhada de M é um subconjunto $S \subset M$ que é uma variedade, na topologia de subespaço, munido de uma estrutura diferenciável no qual a função inclusão $S \hookrightarrow M$ é um mergulho diferenciável.

As proposições a seguir apresentam outras maneiras de produzir variedades mergulhadas.

Proposição 2.2.14. *Suponha que M, N são variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ um mergulho diferenciável. Seja $S = f(M)$. Com a topologia do subespaço, S é uma variedade topológica e possui uma estrutura diferenciável única, tornando-se uma subvariedade mergulhada de N com a propriedade que f é um difeomorfismo com sua imagem.*

¹ $\varphi(p) = 0$.

Demonstração. Atribuimos a S a topologia de subespaço herdada de N . De f ser um mergulho, temos que é um homeomorfismo de M em S e, portanto, S é uma variedade topológica. Definimos uma estrutura diferenciável em S tomando cartas diferenciáveis da forma $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$, em que (U, φ) é qualquer carta em M , o que as tornam admissíveis. Com essa estrutura, f é um difeomorfismo em sua imagem e essa é a única estrutura com essa propriedade. A função inclusão $S \hookrightarrow N$ é igual a composição de um difeomorfismo com um mergulho diferenciável ($f^{-1} \circ f : S \rightarrow M$) e, portanto, é um mergulho diferenciável. \square

Proposição 2.2.15. *Suponha M uma variedade m -dimensional diferenciável, N uma variedade n -dimensional diferenciável, $U \subset M$ aberto e $f : U \rightarrow N$ função diferenciável. Seja $\text{gr}(f) \subset M \times N$ o gráfico de f :*

$$\text{gr}(f) = \{(x, y) \in M \times N : x \in U, y = f(x)\}.$$

Então $\text{gr}(f)$ é uma m -subvariedade mergulhada de $M \times N$.

Demonstração. Defina a função $\gamma_f : U \rightarrow M \times N$ por $\gamma_f(x) = (x, f(x))$. É uma função diferenciável que a imagem é $\Gamma(f)$. Como a projeção $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ satisfaz $\pi_M \circ \gamma_f(x) = x$, para $x \in U$, a composição $d(\pi_M)_{(x,f)} \circ d(\gamma_f)_x$ é a identidade em $T_x M$. Logo, $d(\gamma_f)_x$ é injetiva e, portanto, γ_f é uma imersão diferenciável e é um homeomorfismo em sua imagem, pois $\pi_M|_{\Gamma_f}$ é sua inversa contínua. Logo, Γ_f é uma subvariedade mergulhada de $M \times N$ difeomórfica a U . \square

Subvariedades mergulhadas são mais naturais, mas podemos definir subvariedades imersas.

Definição 2.2.16. Uma subvariedade imersa de M é um subconjunto $S \subset M$ munido de uma topologia (não necessariamente a topologia do subespaço) e uma estrutura diferenciável na qual S é uma variedade topológica tal que a função inclusão $S \hookrightarrow M$ é uma imersão diferenciável.

Toda subvariedade mergulhada é uma subvariedade imersa. Subvariedades imersas surgem normalmente da seguinte maneira:

Proposição 2.2.17. *Suponha M, N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma imersão diferenciável injetiva. Seja $S = F(M) \subset N$. Então S tem uma topologia única e estrutura diferenciável que torna S uma subvariedade imersa de N e tal que $f : M \rightarrow S$ é um difeomorfismo com sua imagem.*

Demonstração. A prova é muito parecida com a de variedade mergulhada em 2.2.14, com a exceção de que agora temos que dar uma topologia para S . Fazemos isso declarando que $U \subset S$ é aberto se, e somente se, $f^{-1}(U) \subset M$ é aberto. O resto segue da mesma

maneira que a versão mergulhada (agora $f^{-1} \circ f$ é a composição de um difeomorfismo com uma imersão diferenciável, o que torna a inclusão uma imersão diferenciável). \square

Um resultado muito interessante da teoria de variedades diferenciáveis é que qualquer variedade diferenciável de dimensão n é difeomórfica a uma subvariedade imersa de \mathbb{R}^{2n+1} . Esse resultado é conhecido como Teorema de Imersão de Whitney. Para a sua demonstração, são necessários outros resultados importantes, então iremos apenas enunciá-lo. Esse teorema é utilizado na seção 3.6, quando precisamos mergulhar a variedade que estamos trabalhando em um espaço euclidiano.

Teorema 2.2.18 (Teorema de Imersão de Whitney). *Toda variedade diferenciável de dimensão n admite uma imersão diferenciável própria² em \mathbb{R}^{2n+1} .*

Uma estrutura que surge frequentemente neste texto, mais precisamente nas demonstrações no capítulo 3, é a de fibrado vetorial (ou apenas fibrado). Já definimos o fibrado tangente, mas agora veremos algumas propriedades básicas. Localmente, essas estruturas se parecem com um produto cartesiano de um aberto da variedade com \mathbb{R}^n .

Definição 2.2.19. Seja M uma variedade topológica. Um fibrado vetorial (real) sobre M é um espaço topológico E e uma função contínua $\pi : E \rightarrow M$ (projeção) satisfazendo as seguintes condições:

- i) Para $p \in M$, a fibra $E(p) = \pi^{-1}(p)$ sobre p é munida da estrutura de um espaço vetorial de dimensão k .
- ii) Para $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e um homeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, dita trivialização local de E sobre U , satisfazendo:
 - $\pi_U \circ \phi = \pi$ (em que $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ é a projeção).
 - Para cada $q \in U$, a restrição $\phi|_{E_q}$ é um isomorfismo de espaço vetorial de E_q para $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Se M e E são variedades diferenciáveis, π é função diferenciável e as trivializações locais podem ser escolhidas como difeomorfismos, dizemos que E é um fibrado vetorial diferenciável. Caso exista uma trivialização local de E sobre todo M , então E é dito fibrado trivial e o próprio E é difeomorfo ao produto cartesiano $M \times \mathbb{R}^k$.

A proposição a seguir garante que o fibrado tangente é realmente um fibrado vetorial. A prova pode ser encontrada em Lee (2012, p. 252).

² Própria significa que a inclusão é uma função própria, isto é, que a pré-imagem de um conjunto compacto é um conjunto compacto.

Proposição 2.2.20. *Sejam M variedade diferenciável de dimensão d e TM o fibrado tangente. Com a sua função projeção e a sua estrutura natural de espaço vetorial em cada fibra, TM é um fibrado vetorial de rank d sobre M .*

Definimos agora a noção de soma de Whitney de fibrados vetoriais. Dada uma variedade M e fibrados vetoriais diferenciáveis $E' \rightarrow M$ e $E'' \rightarrow M$ de ranks r' e r'' , respectivamente, podemos construir um novo fibrado vetorial sobre M dito a soma de Whitney de E' e E'' , cuja fibra em cada $p \in M$ é a soma direta $E'(p) \oplus E''(p)$. O espaço total é identificado como $E' \oplus E'' = \bigsqcup_{p \in M} (E'(p) \oplus E''(p))$, com a projeção $\pi : E' \oplus E'' \rightarrow M$.

Também é bastante utilizada a ideia de restrição de um fibrado. Suponha $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial de rank k e $S \subset M$ é subconjunto de M , definimos a restrição de E a S como sendo $E|_S = \bigcup_{p \in S} E(p)$, com a projeção $\pi|_S : E|_S \rightarrow M$. Se E é fibrado vetorial diferenciável e $S \subset E$ é uma subvariedade imersa ou mergulhada, segue que $E|_S$ é um fibrado vetorial diferenciável.

Uma seção de E é uma seção da função π , isto é, uma função contínua $\sigma : M \rightarrow E$ satisfazendo $\pi \circ \sigma = id_M$. Isso significa que $\sigma(p)$ é um elemento da fibra $E(p)$, para cada $p \in M$. Podemos definir também seções locais, $\sigma : U \subset M \rightarrow E$, em um aberto U . Uma seção do fibrado TM , $X : M \rightarrow TM$, é dita um campo vetorial em M .

Se $U \subset M$ é aberto, uma k -upla de seções locais $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de E sobre U é dita linearmente independente se $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$ forma uma k -upla linearmente independente em $E(p)$, para cada $p \in U$. Similarmente, dizemos que a k -upla gera E se os seus valores geram $E(p)$, para cada $p \in U$. Um referencial local de E sobre U é uma k -upla ordenada $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de seções locais linearmente independentes que geram E . Logo, $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$ é uma base para $E(p)$, para cada $p \in U$.

Vamos definir outro conceito importante para o capítulo 3.

Definição 2.2.21. Se $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M'$ são fibrados vetoriais, dizemos que $F : E \rightarrow E'$ preserva fibra se existe $f : M \rightarrow M'$ satisfazendo $\pi' \circ F = f \circ \pi$, isto é,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Definição 2.2.22. Se $F : E \rightarrow E'$ é contínua, preserva fibra e $F|_{E(p)}$ é linear, para cada $p \in M$, dizemos que F é um homomorfismo de fibrado. Um homomorfismo de fibrado tal que a inversa também é homomorfismo de fibrado é dito isomorfismo de fibrado. Se for um difeomorfismo, é dito um isomorfismo diferenciável.

Exemplo 2.2.23. Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo, então $df : TM \rightarrow TM$ é um isomorfismo de fibrado contínuo.

Definição 2.2.24. Dado um fibrado vetorial $\pi_E : E \rightarrow M$, uma distribuição de E é um fibrado vetorial $\pi_D : D \rightarrow M$ tal que D é um subespaço topológico de E e π_D é a restrição da projeção π_E a D , tal que, para cada $p \in M$, o subconjunto $D(p) = D \cap E(p)$ é um subespaço linear de $E(p)$.

A seguinte proposição apresenta um critério para que a união de subespaços seja uma distribuição. A prova desse fato pode ser encontrada em Lee (2012, p. 265).

Proposição 2.2.25. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial diferenciável e suponha que, para cada $p \in M$, temos um subespaço m -dimensional $D(p) \subset E(p)$. Então $D = \bigcup_{p \in M} D(p) \subset E$ é uma distribuição diferenciável de E se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: cada ponto de M possui uma vizinhança U no qual existem seções locais diferenciáveis $\sigma_1, \dots, \sigma_m : U \rightarrow E$ com a propriedade que $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_m(p))$ é uma base para $D(p)$ em cada $p \in U$.*

A seguir enunciamos outra propriedade que utilizamos em alguns momentos. A prova pode ser encontrada em Lee (2012, p. 267).

Lema 2.2.26. *Sejam M uma subvariedade imersa de \mathbb{R}^n e D uma distribuição diferenciável de rank- k de $T\mathbb{R}^n|_M$. Para cada $p \in M$, seja D_p^\perp o complemento ortogonal de D_p em $T_p\mathbb{R}^n$ com respeito ao produto interno usual, e seja $D^\perp = \{(p, v) \in T\mathbb{R}^n : p \in M, v \in D_p^\perp\}$. Então D^\perp é uma distribuição diferenciável de rank- $(n - k)$ de $T\mathbb{R}^n|_M$.*

Como já foi comentado, o contexto principal do trabalho são variedades Riemannianas. Agora, definimos exatamente o que são esses objetos:

Definição 2.2.27. Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana g em M é uma correspondência que associa cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente T_pM . Indicamos com $g_p(u, v)$ o produto interno nos vetores $u, v \in T_pM$ ou, quando não há ambiguidade, $\langle u, v \rangle_p$ (e se ficar muito claro qual o ponto que estamos nos referindo, podemos dizer só $\langle u, v \rangle$).

Uma variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável na qual está definida uma métrica Riemanniana.

Definição 2.2.28. Uma métrica Riemanniana é de classe C^k se, para cada par de campos vetoriais $C^\infty X, Y : M \rightarrow TM$, a função $p \mapsto g_p(X|_p, Y|_p)$ é C^k .

A norma de um vetor tangente $v \in T_p M$ é definida por $\|v\| = \|v\|_p = g_p(v, v)^{1/2}$. O ângulo entre dois vetores não-nulos $v, u \in T_p M$ é o valor único $\theta \in [0, \pi]$ satisfazendo

$$\cos \theta = \frac{g_p(v, u)}{\|v\| \|u\|}.$$

Em uma variedade Riemanniana podemos definir o comprimento de curvas.

Definição 2.2.29. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes, o comprimento de γ é dado por

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma induzida da métrica Riemanniana g .

Se M é variedade Riemanniana conexa, podemos definir uma função distância em M .

Definição 2.2.30. Para $p, q \in M$ a distância (Riemanniana) de p a q é dada por

$$d(p, q) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ é curva suave por partes ligando } p \text{ a } q.\}$$

Agora veremos brevemente a noção de volume Riemanniano, que será importante no capítulo 4. Para mais detalhes consulte (SAKAI, 1996, p. 61).

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ uma carta de M . Definimos, para cada $p \in U$,

$$g_{ij}^U(p) = g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right).$$

Essa função define uma matriz simétrica positiva definida $g^U(p) = (g_{ij}^U(p))$, em cada $p \in U$.

Para uma cobertura de M por cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n))$, uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a essa cobertura (ver (LEE, 2012, p. 40)) e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com suporte compacto, a expressão

$$I(f) := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \left(\rho_\alpha \cdot f \cdot \sqrt{\det(g_{ij}^{U_\alpha})}\right) \circ \varphi_\alpha^{-1} dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n$$

é independente da escolha da cobertura e da partição da unidade. Tal expressão define um funcional linear positivo³ no espaço vetorial das funções contínuas em M com valores reais e com suporte compacto. O Teorema de Representação de Riesz (veja (FOLLAND, 1999, p. 212)) garante a existência de uma medida única m finita em compactos, regular⁴ e tal que $I(f) = \int f dm$, dita Volume Riemanniano.

³ $I(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$.

⁴ Se $m(E) = \inf\{m(U) : U \supset E, U \text{ aberto}\}$ e $m(E) = \sup\{m(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$ para todo subconjunto boreliano $E \subset M$.

Por fim, definimos a noção de folhação, que é basicamente particionar a variedade em “folhas”, que são subvariedades de mesma dimensão. Neste trabalho, iremos considerar um tipo específico de folheações que será bastante relevante no capítulo 4. Aqui definiremos apenas os conceitos principais e não iremos explorar mais a teoria. Para mais detalhes, veja (NETO; CAMACHO, 2019).

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e classe C^∞ .

Definição 2.2.31. Uma folheação \mathcal{F} de codimensão p e classe C^r é definida por uma coleção de cartas locais

$$\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in I$$

da variedade tais que

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
2. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $h_{ji} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ tem a forma

$$h_{ji}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y)), (x, y) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p,$$

e são de classe C^r .

As componentes conexas de $\varphi^{-1}(x, y_0)$, em que y_0 é constante, são chamadas de placas de U_i . Elas são subvariedades mergulhadas de U_i de codimensão p . A condição (2) expressa que se $\alpha_i \subset U_i, \beta_i \subset U_j$ são placas então ou $\alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$ ou $\alpha_i \cap \beta_j$ é aberto em α_i e β_j .

Se $\pi_2 : \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ é a projeção $\pi_2(x, y) = y$, definimos $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ por $f_i = \pi_2 \circ \varphi_i$. As placas de U_i são então as componentes conexas de $f^{-1}(y_0), y_0 \in \mathbb{R}^p$.

Uma folha de \mathcal{F} é um subconjunto conexo que é a união máxima de placas de \mathcal{F} . Isto é, se F é uma folha e α é uma placa com $\alpha \cap F \neq \emptyset$, então $\alpha \subset F$. Da definição, segue que toda folha é uma subvariedade imersa de codimensão p e que M é uma união disjunta das folhas de \mathcal{F} . As folhas podem não ser subvariedades mergulhadas.

2.3 TOPOLOGIA C^r

No próximo capítulo consideramos a estabilidade estrutural de difeomorfismos em uma variedade compacta. Esta definição utiliza a noção de duas funções estarem perto na topologia C^1 ou C^r . Definimos agora essa topologia. A principal referência utilizada nesta seção é (ROBINSON, 1998).

Iniciamos definindo para funções de uma variedade compacta M para o espaço euclidiano \mathbb{R}^N . Seja

$$\{\varphi_j : V_j \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_j \subset M\}_{j=1}^J$$

um número finito de cartas coordenadas com $\bigcup_{j=1}^J U_j = M$. Seja $C_j \subset U_j$ subconjuntos compactos com $\bigcup_{j=1}^J C_j = M$. Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ são C^r então a distância C^r de f à g é definida como

$$d^r(f, g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\|_{\mathbb{R}^N}, \|d^i(f \circ \varphi_j)_{\varphi_j^{-1}(x)} - d^i(g \circ \varphi_j)_{\varphi_j^{-1}(x)}\| : x \in C_j, 1 \leq j \leq J, 1 \leq i \leq r\},$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma do operador apropriada.

O caso de funções entre variedades é um pouco mais complicado. Ao invés de definir uma distância entre duas funções, vamos definir uma base de vizinhanças para a topologia. Assuma M, N são variedades compactas C^r . Seja $\{\varphi_j : V_j \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_j \subset M\}_{j=1}^J$ um número finito de cartas de coordenadas em M e $C_j \subset U_j$ compactos como acima. Seja $\{\psi_k : V'_k \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U'_k \subset N\}_{k=1}^K$ um número finito de cartas coordenadas em N . Seja $f \in C^r(M, N)$. Cada C_j pode ser dividido em partes compactas $C_j = \bigcup_{l=1}^{L_j} C_{j,l}$ e um índice $k(j, l)$ tal que $f(C_{j,l}) \subset U'_{k(j,l)}$ para $1 \leq l \leq L_j$ e $1 \leq j \leq J$. Para $\varepsilon > 0$, seja \mathcal{N} a vizinhança de f dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \{g \in C^r(M, N) : & g(C_{j,l}) \subset U'_{k(j,l)}, \\ & \|\psi_{k(j,l)}^{-1} \circ f(x) - \psi_{k(j,l)}^{-1} \circ g(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon, \\ & \|d^i(\psi_{k(j,l)}^{-1} \circ f \circ \varphi_j)_{\varphi_j^{-1}(x)} - d^i(\psi_{k(j,l)}^{-1} \circ g \circ \varphi_j)_{\varphi_j^{-1}(x)}\| \leq \varepsilon \\ & \text{para todo } x \in C_{j,l}, i \leq l \leq L_j, 1 \leq i \leq r\}. \end{aligned}$$

A estimativa C^0 , $\|\psi_{k(j,l)}^{-1} \circ f(x) - \psi_{k(j,l)}^{-1} \circ g(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ pode ser substituída pela estimativa $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ usando distâncias entre pontos na variedade. Essa base de vizinhanças \mathcal{N} geram a topologia em $C^r(M, N)$.

Observação 2.3.1. Sejam M, N variedades com M compacta. A variedade N pode ser mergulhada em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^L (com dimensão maior). Usando esse mergulho, é possível considerar $C^r(M, N) \subset C^r(M, \mathbb{R}^L)$, isto é, $f \in C^r(M, N)$ se $f \in C^r(M, \mathbb{R}^L)$ e f toma valores no subconjunto $N \subset \mathbb{R}^L$. Usando essa abordagem, a topologia $C^r(M, N)$ pode ser herdada de $C^r(M, \mathbb{R}^L)$.

Definição 2.3.2. Seja $k \geq 1$. Dizemos que $f \in \text{Diff}^k(M)$ é C^k estruturalmente estável se existe uma vizinhança \mathcal{U} de f em $\text{Diff}^k(M)$ tal que para toda $g \in \mathcal{U}$ é topologicamente conjugada a f .

De maneira mais geral, f é estruturalmente estável se pequenas perturbações C^r não alteram a estrutura topológica da órbita de f . O termo perturbação nesse contexto significa um difeomorfismo g que está C^r próximo de f . As vezes também se refere a diferença entre f e g .

3 HIPERBOLICIDADE

Neste capítulo apresentamos a noção de conjunto hiperbólico e diversos resultados acerca dessa propriedade. A referência principal utilizada foi (WEN, 2016), além de (BARREIRA; VALLS, 2012) e (KATOK; HASSELBLATT, 1995).

A definição dos conjuntos hiperbólicos remonta aos trabalhos de Smale (1967) e Anosov (1967) na década de 1960, sendo um pilar da teoria dos sistemas dinâmicos moderna.

Inicialmente definimos a hiperbolicidade para isomorfismos lineares e então utilizamos essa noção linear para definir conjuntos hiperbólicos para sistemas não-lineares, exigindo que o diferencial, restrito ao conjunto invariante, seja um isomorfismo linear hiperbólico.

Uma das motivações fundamentais para o estudo da hiperbolicidade é sua estabilidade estrutural, isto é, conjuntos hiperbólicos mantêm essa propriedade mesmo quando o sistema dinâmico é sujeito a perturbações C^1 . Esta robustez garante que a dinâmica qualitativa permaneça inalterada. Neste capítulo, destacamos propriedades associadas com hiperbolicidade, como a persistência da hiperbolicidade, a estabilidade estrutural e a existência de variedades estáveis e instáveis.

3.1 CONJUNTOS HIPERBÓLICOS

Inicialmente definimos a ideia de um isomorfismo linear hiperbólico, na qual a essência da hiperbolicidade é clara.

Definição 3.1.1. Seja E um espaço vetorial finito. Um isomorfismo linear $A : E \rightarrow E$ é chamado de hiperbólico se podemos escrever E como uma soma direta

$$E = E^s \oplus E^u,$$

invariante no sentido que

$$A(E^s) = E^s \text{ e } A(E^u) = E^u,$$

tal que, para constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$, a seguinte estimativa vale

$$\|A^n v\| \leq C \lambda^n \|v\|, \forall v \in E^s, n \geq 0,$$

$$\|A^{-n} v\| \leq C \lambda^n \|v\|, \forall v \in E^u, n \geq 0.$$

Definimos isomorfismo linear hiperbólico pois, dessa maneira, a definição se aplica ao caso de conjuntos hiperbólicos, que será visto a seguir, mas poderíamos ter definido,

equivalentemente, pedindo que nenhum autovalor de A tenha módulo igual a 1, de modo que,

$$E^s = \text{span}\{v : v \text{ é autovetor generalizado associado a um autovalor } \lambda \text{ com } |\lambda| < 1\},$$

e

$$E^u = \text{span}\{v : v \text{ é autovetor generalizado associado a um autovalor } \lambda \text{ com } |\lambda| > 1\}.$$

Utilizamos o conceito de isomorfismo linear hiperbólico para definir pontos fixos hiperbólicos de funções diferenciáveis e, dessa maneira, poder estudar o comportamento local de f perto de um ponto fixo.

Definição 3.1.2. Seja $O \subset E$ um conjunto aberto e $f : O \rightarrow E$ uma função C^1 . Um ponto fixo $p \in O$ é dito hiperbólico se a derivada de f no ponto p , $df_p : E \rightarrow E$, é um isomorfismo linear hiperbólico.

Temos que o comportamento local próximo a p é aproximado pela derivada nesse ponto. A hiperbolicidade de df_p implica que, perto de p , f herda a dicotomia contração/expansão.

A partir de agora serão considerados uma variedade Riemanniana M , de classe C^∞ , compacta, conexa e sem bordo e um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de classe C^1 .

Um conjunto hiperbólico é a generalização natural de um ponto fixo hiperbólico, isto é, em cada ponto do conjunto, a derivada no ponto é um isomorfismo linear hiperbólico: o espaço tangente tem direções complementares estáveis (eventual contração) e instáveis (eventual expansão).

Definição 3.1.3. Um conjunto $\Lambda \subset M$, invariante por f é dito hiperbólico se, para cada $x \in \Lambda$, o espaço tangente $T_x M$ se decompõe em uma soma direta

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

invariante (como uma família) no sentido que

$$Tf(E^s(x)) = E^s(f(x)) \quad \text{e} \quad Tf(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

tal que, para constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$, a seguinte estimativa uniforme é válida

$$\begin{aligned} \|Tf^n(v)\| &\leq C\lambda^n \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, v \in E^s(x), n \geq 0, \\ \|Tf^{-n}(v)\| &\leq C\lambda^n \|v\|, \quad \forall x \in \Lambda, v \in E^u(x), n \geq 0. \end{aligned}$$

Observação 3.1.4. Especialmente neste capítulo, seguindo a notação da referência principal, utilizaremos a notação da função tangente Tf , isto é para $x \in M$,

$$Tf(v) = T_x f(v) = df_x(v)$$

em que $v = \pi(x)$. O ponto base pode ser omitido se ficar claro do contexto em qual espaço tangente Tf está agindo. Ainda note que $T(f^n) = (Tf)^n$, então não tem confusão ao escrever Tf^n .

A norma $\|\cdot\|_x = \|\cdot\|$ é a norma induzida pela métrica Riemanniana de M (omitimos o ponto base, o qual será considerado implicitamente pelo contexto). Como a variedade M é compacta, a hiperbolicidade não depende da escolha da métrica Riemanniana, pois quaisquer duas métricas Riemannianas são equivalentes em uma variedade compacta.

Note que, se m é um inteiro positivo tal que $\rho = C\lambda^m < 1$, então, para $x \in \Lambda$,

$$\|Tf^m v\| \leq \rho \|v\|, v \in E^s(x) \text{ e } \|Tf^{-m} v\| \leq \rho \|v\|, v \in E^u(x),$$

de modo que $Tf^m|_{E^s(x)}$ é uma contração e $Tf^{-m}|_{E^u(x)}$ é uma expansão. Logo a constante C determina o número de iteradas de f que são necessárias antes dos vetores serem contraídos em $E^s(x)$ e expandidos em $E^u(x)$. Essa propriedade é dita muitas vezes uniformemente hiperbólica, pois as constantes λ, C e o número de iteradas m , são independentes do ponto x , em oposição a ideia de não uniformemente hiperbólico, quando o difeomorfismo tem expoentes de Lyapunov não nulos para quase todos os pontos de tal conjunto.

A seguir apresentamos um simples exemplo de conjunto hiperbólico.

Exemplo 3.1.5 (Conjunto Hiperbólico formado por um ponto fixo). Dado $a \in (0, 1)$ e $b > 1$, seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear

$$f(x, y) = (ax, by).$$

Claramente f tem inversa, dada por $g(x, y) = (a^{-1}x, b^{-1}y)$ e, portanto, é um isomorfismo linear.

Temos que $(0, 0)$ é ponto fixo. Consideramos a decomposição $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$, em que E^s e E^u são, respectivamente, o eixo horizontal e vertical. Isto é, $E^s = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $E^u = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Para a transformação linear $A = T_0 f = f$, dado $v = (x, 0)$ temos, para algum $x \in \mathbb{R}$,

$$Av = f(x, 0) = (ax, 0) \in E^s,$$

Agora, seja $v \in E^s$, então $v = (x, 0)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Tome $z = \frac{x}{a}$ e considere $w = (z, 0) \in E^s$. Assim,

$$Aw = (az, 0) = (x, 0) = v,$$

de modo que $E^s \subset AE^s$. Também,

$$\|Av\| = \|(ax, 0)\| = a\|(x, 0)\| = a\|v\|.$$

De maneira análoga, podemos mostrar para o espaço instável. Portanto,

- i) $AE^s = E^s$ e $AE^u = E^u$;
- ii) $\|Av\| \leq a\|v\|, v \in E^s$;
- iii) $\|A^{-1}v\| \leq b^{-1}\|v\|, v \in E^u$.

Tomando $\lambda = \max\{a, b^{-1}\}$ e $C = 1$, temos que $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo f .

Perceba que as dimensões $\dim E^s(x)$ e $\dim E^u(x)$ são constantes ao longo da órbita de x . De fato, como Tf restrito a um subespaço invariante é isomorfismo temos

$$\dim(E^s(f(x))) = \dim(Tf(E^s(x))) = \dim(E^s(x)), \forall x \in \Lambda.$$

Analogamente para $E^u(x)$.

A definição de hiperbolicidade engloba os casos triviais $E^s(x) = \{0\}$ ou $E^u(x) = \{0\}$. Nessa situação, Λ é dito ser expansão ou contração e é trivial no sentido que é formado por finitas órbitas periódicas de f .

Outra propriedade que decorre diretamente da definição é a seguinte: como $Tf(E^s(x)) = E^s(f(x))$, para um m qualquer

$$\|Tf^n(Tf^m v)\| \leq C\lambda^n \|Tf^m v\|, \forall v \in E^s(x), n \geq 0.$$

Em particular, se $m = -n$

$$\|v\| \leq C\lambda^n \|Tf^{-n}v\|, \forall v \in E^s(x), n \geq 0.$$

Isto é,

$$\|Tf^{-n}v\| \geq C^{-1}(\lambda^{-1})^n \|v\|, \forall v \in E^s(x), n \geq 0. \quad (3.1)$$

Da mesma forma, para $v \in E^u(x)$,

$$\|Tf^n v\| \geq C^{-1}(\lambda^{-1})^n \|v\|, n \geq 0. \quad (3.2)$$

Também é simples perceber que qualquer subconjunto invariante de um conjunto hiperbólico é hiperbólico e uma união finita de conjuntos hiperbólicos é hiperbólica. Porém, a união infinita de conjuntos hiperbólicos não é necessariamente hiperbólica. Isto ocorre pois a noção de hiperbolicidade apresentada requer um limite uniforme na expansão e na contração.

Os difeomorfismos mais estudados e conhecidos no caso de hiperbolicidade são aqueles chamados de difeomorfismos de Anosov.

Definição 3.1.6. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito Anosov se toda a variedade M é um conjunto hiperbólico.

A seguir definimos a noção de cone estável e instável, importante para caracterizar os espaços estável e instável. De certa forma, estes cones aproximam as direções estáveis e instáveis da definição de hiperbolicidade.

Definição 3.1.7. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Para $x \in \Lambda$ e $\gamma > 0$,

$$C_\gamma(E^s(x)) = \{v \in T_x M : \|v_u\| \leq \gamma \|v_s\|\},$$

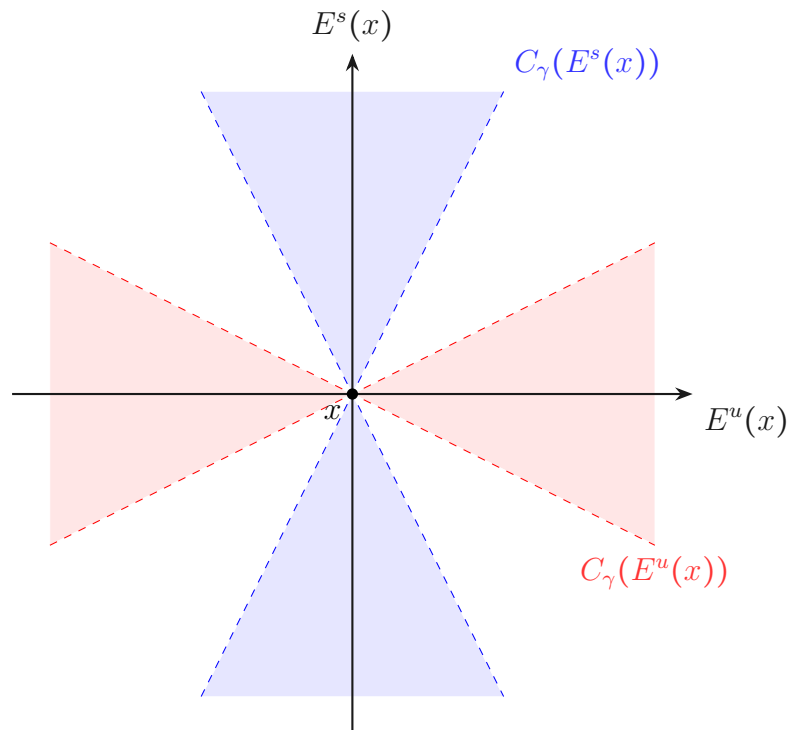
e

$$C_\gamma(E^u(x)) = \{v \in T_x M : \|v_s\| \leq \gamma \|v_u\|\}$$

são os γ -cones em x ao redor de $E^s(x)$ e $E^u(x)$, respectivamente. Aqui, $v = v_s + v_u$, em que $v_s \in E^s(x)$ e $v_u \in E^u(x)$.

Em dimensão 2, a ideia de cone estável e instável é bem intuitiva e pode ser pensada geometricamente, como na figura a seguir:

Figura 1 – Ilustração dos cones estável e instável em dimensão 2.



Fonte: Elaboração própria.

Podemos caracterizar os espaços estável e instável como conjuntos da seguinte maneira:

Teorema 3.1.8 (Caracterização de $E^s(x)$). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Para cada $x \in \Lambda$, $E^s(x)$ é caracterizado por*

$$\begin{aligned} E^s(x) &= \{v \in T_x M : \|Tf^n v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} \\ &= \{v \in T_x M : \exists r > 0 \text{ tal que } \|Tf^n v\| \leq r, \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in T_x M : \exists \gamma > 0 \text{ tal que } Tf^n v \in C_\gamma(E^s(f^n x)), \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Em particular, a decomposição hiperbólica é única.

Observação 3.1.9. Também podemos enunciar o teorema acima para o conjunto estável $E^u(x)$, revertendo o tempo n .

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Claramente o primeiro conjunto está contido no segundo conjunto e o segundo conjunto no terceiro conjunto. Agora, suponha que, para $v \in T_x M$,

$$v \notin \{v \in T_x M : \exists \gamma > 0 \text{ tal que } Tf^n v \in C_\gamma(E^s(f^n x)), \forall n \geq 0\}.$$

Então, dado $\gamma = 1$, existe $m \geq 0$ tal que $w = Tf^m v \in T_{f^m(x)} M \setminus C_1(E^s(f^m x))$. Isto é, $\|w_u\| > \|w_s\|$. Em particular, $w_u \neq 0$. Assim,

$$\|Tf^n(w_u)\| \geq C^{-1} (\lambda^{-1})^n \|w_u\| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

e

$$\|Tf^n(w_s)\| \leq C \lambda^n \|w_s\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Segue que

$$\|Tf^n(w)\| = \|Tf^n w_s + Tf^n w_u\| \geq \|Tf^n w_u\| - \|Tf^n w_s\| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Dessa forma $\{\|Tf^n v\|\}_{n=0}^\infty$ não é limitado e $v \notin \{v \in T_x M : \exists r > 0 \text{ tal que } \|Tf^n v\| \leq r, \forall n \geq 0\}$.

Por fim, provamos que $\{v \in T_x M : \exists \gamma > 0 \text{ tal que } Tf^n v \in C_\gamma(E^s(f^n x)), \forall n \geq 0\} \subset E^s(x)$. Se $v \notin E^s(x)$, então $v_u \neq 0$. Assim,

$$\|Tf^n v_u\| \geq C^{-1} (\lambda^{-1})^n \|v_u\| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

e

$$\|Tf^n v_s\| \leq C \lambda^n \|v_s\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Logo, para qualquer $\gamma > 0$, $Tf^n v \notin C_\gamma(E^s(f^n x))$ para n grande. A unicidade da decomposição segue do fato que $E^s(x)$ e $E^u(x)$ foram caracterizados como conjuntos. \square

O subespaço linear $E^s(x)$ varia continuamente de acordo com o ponto base x e da mesma forma para o subespaço linear instável $E^u(x)$. Para mostrar isso de maneira mais precisa, vamos introduzir uma topologia no conjunto de subespaços lineares.

Seja $m \geq 1$ inteiro. Sejam $x \in M$ e $E(x)$ um subespaço m -dimensional de $T_x M$. Seja $\{x_k\}$ uma sequência em M e $E(x_k)$ um subespaço m -dimensional de $T_{x_k} M$ para cada k . Dizemos que $E(x_k)$ converge para $E(x)$ se existe base $\{e_{x_k}^1, \dots, e_{x_k}^m\}$ de $E(x_k)$ para cada k e uma base $\{e_x^1, \dots, e_x^m\}$ de $E(x)$ tal que $e_{x_k}^1 \rightarrow e_x^1, \dots, e_{x_k}^m \rightarrow e_x^m$. Isso gera uma topologia para o espaço m -Grasmanniano

$$G^m(M) = \{V : V \text{ é um subespaço linear } m\text{-dimensional de } T_x M, x \in M\}$$

de M . O espaço $G^m(M)$ é compacto. Note que, $E(x_k) \rightarrow E(x)$ implica que $x_k \rightarrow x$, pois a projeção $\pi : TM \rightarrow M$ é contínua, e para cada $v \in E(x)$, existem $v_k \in E(x_k)$ tais que $v_k \rightarrow v$.

Teorema 3.1.10. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Então $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente em $x \in \Lambda$. Em particular, $\dim E^s(x)$ e $\dim E^u(x)$ são localmente constantes. Ainda mais, $\bar{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico de f .*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Vamos mostrar que E^s é contínua em x . Basta mostrar que quando uma sequência $E^s(x_k)$, $x_k \in \Lambda$, converge para um subespaço linear $G^s(x)$ de $T_x M$, então $G^s(x) = E^s(x)$. De fato, suponha que não seja contínua, então dada sequência $\{x_k\} \subset \Lambda$ tal que $x_n \rightarrow x$, $E^s(x_k)$ não converge para $E^s(x)$. Tomando subsequência se necessário, podemos assumir que $E^s(x_k)$ converge para um subespaço linear $H^s(x)$ de $T_x M$ que é diferente de $E^s(x)$.

Tome $v \in G^s(x)$. Existem $v_k \in E^s(x_k)$ com $v_k \rightarrow v$. Como $x_k \in \Lambda$,

$$\|Tf^n(v_k)\| \leq C\lambda^n \|v_k\|$$

para todo $n \geq 0$ e $k \geq 1$. Note que $Tf : TM \rightarrow TM$ é contínua e como $x_k \rightarrow x$ e $v_k \rightarrow v$, temos que, tomando $k \rightarrow \infty$,

$$\|Tf^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall n \geq 0.$$

Pelo Teorema 3.1.8, $G^s(x) \subset E^s(x)$. Agora, tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que $E^u(x_k)$ converge para um subespaço linear $G^u(x)$ e, seguindo a mesma prova, $G^u(x) \subset E^u(x)$. Perceba que, para $k \geq 1$, $E^s(x_k)$ e $E^u(x_k)$ tem dimensões complementares que somam $\dim M$ e que

$$\dim G^s(x) = \dim E^s(x_k) \quad \text{e} \quad \dim G^u(x) = \dim E^u(x_k).$$

Logo, $G^s(x) = E^s(x)$ e $G^u(x) = E^u(x)$. Isso prova que $E^s(x)$ varia continuamente.

Agora, vamos mostrar que $\overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ é hiperbólico. Seja $x \in \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Tome uma sequência $x_k \in \Lambda$ tal que $E^s(x_k)$ e $E^u(x_k)$ convergem, respectivamente, para dois espaços lineares $G^s(x)$ e $G^u(x)$ de $T_x M$. Pelo argumento anterior, temos

$$\begin{aligned} \|Tf^n(v)\| &\leq C\lambda^n \|v\|, \forall v \in G^s(x), n \geq 0, \\ \|Tf^n(v)\| &\geq C^{-1}(\lambda^{-1})^n \|v\|, \forall v \in G^u(x), n \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que existe $v \in G^s(x) \cap G^u(x)$ tal que $v \neq 0$, então

$$C^{-1}(\lambda^{-1})^n \leq C\lambda^n, n \geq 0.$$

Porém, tomando $n \rightarrow \infty$

$$\infty \leftarrow C^{-1}(\lambda^{-1})^n \leq C\lambda^n \rightarrow 0.$$

Então, $G^s(x) \cap G^u(x) = \{0\}$. Das dimensões de $G^s(x)$ e $G^u(x)$ serem complementares, $T_x M = G^s(x) \oplus G^u(x)$. Isso dá uma soma direta em x . Agora construímos uma soma direta na órbita de x pela f . Tomando uma iterada, $E^s(f(x_k))$ e $E^u(f(x_k))$ convergem, respectivamente, para os subespaços lineares (tomando subsequência se necessário)

$$G^s(f(x)) \text{ e } G^u(f(x)),$$

de modo que

$$\begin{aligned} G^s(f(x)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} E^s(f(x_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} Tf(E^s(x_k)) \\ &= Tf(G^s(x)) \end{aligned}$$

e $G^u(f(x)) = Tf(G^u(x))$. De isomorfismo linear preservar soma direta,

$$T_{f(x)} M = G^s(f(x)) \oplus G^u(f(x)).$$

Como as constantes C e λ são independentes de pontos de Λ , os vetores em $G^s(f(x))$ e $G^u(f(x))$ satisfazem as mesmas desigualdades que vetores de $G^s(x)$ e $G^u(x)$. Tomando as iteradas positivas e negativas dessa maneira, temos uma decomposição invariante em $\text{Orb}(x)$. Similarmente obtemos uma decomposição invariante para cada órbita de $\overline{\Lambda} \setminus \Lambda$, que é uma decomposição hiperbólica em $\overline{\Lambda} \setminus \Lambda$. Segue que $\overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ é hiperbólico e, portanto, $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda} \setminus \Lambda \cup \Lambda$ é hiperbólico. \square

Observação 3.1.11. Vamos assumir que os conjuntos hiperbólicos são compactos, tomando o fecho se necessário.

Considere

$$E^s := \bigcup_{x \in \Lambda} E^s(x) \text{ e } E^u := \bigcup_{x \in \Lambda} E^u(x).$$

Como $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com $x \in \Lambda$, temos que E^s e E^u são distribuições contínuas de $T_\Lambda M$.

Em seguida, vamos provar um teorema muito útil, o qual garante a existência de uma norma Riemanniana adaptada que torna o comportamento hiperbólico uma contração (e expansão) imediata, ou seja, temos $C = 1$ na definição de conjuntos hiperbólicos.

Teorema 3.1.12. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Existem uma métrica Riemanniana $C^\infty \langle \cdot, \cdot \rangle$ de M e uma constante $0 < \tau < 1$, referente a norma induzida, tal que*

$$\begin{aligned} \|Tf v\| &\leq \tau \|v\|, \forall v \in E^s, \\ \|Tf^{-1}v\| &\leq \tau \|v\|, \forall v \in E^u. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica Riemanniana de M e considere $|\cdot|$ a norma induzida que satisfaz as condições de conjunto hiperbólico com constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$. Tome N suficientemente grande tal que $C\lambda^N < 1$ e defina

$$\langle\langle v, u \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \langle Tf^n v, Tf^n u \rangle,$$

para $v, u \in T_x M$ e $x \in M$. Então $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é uma métrica Riemanniana de M . Considere $a = \sum_{n=0}^{N-1} C^2 \lambda^{2n}$. Assim, para todo $v \in E^s$,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |Tf^n v|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} C^2 \lambda^{2n} |v|^2 \\ &= a |v|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Para $v \in E^u$,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |Tf^n v|^2 \text{ (considere } m = N - 1 - n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} |Tf^{N-1-m} v|^2 \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} |Tf^{-m}(Tf^{N-1}v)|^2 \\ &\leq \sum_{m=0}^{N-1} C^2 \lambda^{2m} |Tf^{N-1}v|^2 \\ &= a |Tf^{N-1}v|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Também temos, para cada $v \in E^s$,

$$\begin{aligned}
\|Tf v\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |Tf^n(Tf v)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |Tf^{n+1}v|^2 = \sum_{n=1}^N |Tf^n v|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} |Tf^n v|^2 + |Tf^N v|^2 + |v|^2 - |v|^2 \\
&= \|v\|^2 - |v|^2 + |Tf^N v|^2 \\
&\leq \|v\|^2 - (1 - C^2 \lambda^{2N})|v|^2 \\
&\leq \|v\|^2 - a^{-1}(1 - C^2 \lambda^{2N})\|v\|^2 \text{ (por 1)}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para $v \in E^u$,

$$\begin{aligned}
\|Tf^{-1}(v)\|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} |Tf^n(Tf^{-1}v)|^2 \\
&= \sum_{n=-1}^{N-2} |Tf^n v|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |Tf^n v|^2 + |Tf^{-1}v|^2 - |Tf^{N-1}v|^2 \\
&= \|v\|^2 + |Tf^{-1}v|^2 - |Tf^{N-1}v|^2 \\
&= \|v\|^2 + |Tf^{-N+N-1}v|^2 - |Tf^{N-1}v|^2 \\
&\leq \|v\|^2 - (1 - C^2 \lambda^{2N})|Tf^{N-1}v|^2 \\
&\leq \|v\|^2 - a^{-1}(1 - C^2 \lambda^{2N})\|v\|^2 \text{ (por 2)}.
\end{aligned}$$

Seja

$$\tau' = \sqrt{1 - a^{-1}(1 - C^2 \lambda^{2N})}.$$

Temos que $0 < \tau' < 1$, pois $0 < 1 - C^2 \lambda^{2N} < 1$ e

$$a = \sum_{n=0}^{N-1} C \lambda^n = C \frac{1 - \lambda^N}{1 - \lambda} \geq \frac{1 - \lambda^N}{1 - \lambda} \geq 1.$$

Essa métrica Riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é geralmente apenas C^0 , pois Tf é geralmente C^0 . Tome uma aproximação C^∞ para obter uma métrica C^∞ de M . A métrica induzida restrita a E^s e E^u satisfaz as duas desigualdades para algum $\tau \in (\tau', 1)$.

□

Uma métrica Riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ de M que satisfaz as duas desigualdades do Teorema 3.1.12 é chamada de adaptada a Λ . Dizemos que

$$\tau(\Lambda) = \sup_{x \in \Lambda} \{ \|Tf|_{E^s(x)}\|, \|Tf|_{E^u(x)}\| \} < 1$$

é a constante de hiperbolicidade de Λ com respeito a norma induzida $\|\cdot\|$, que descreve a magnitude da maior contração (tempo futuro ou passado).

Agora é definimos uma norma do tipo caixa: considere $U \subset M$ um conjunto, não necessariamente invariante, e $T_U M = E_1 \oplus E_2$ uma soma direta. Uma norma $\|\cdot\|$ de $T_U M$ é dita de tipo caixa com respeito a $E_1 \oplus E_2$ se

$$\|v\| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}, \forall v \in T_U M,$$

em que v_1, v_2 são os componentes de v com respeito a E_1 e E_2 , respectivamente. Para qualquer norma $\|\cdot\|$ de $T_U M$,

$$\|v\|_* = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}, \forall v \in T_U M,$$

define uma norma $\|\cdot\|_*$ em $T_U M$ que é de tipo caixa com respeito a soma direta, chamada de norma ajustada de $\|\cdot\|$. A norma ajustada de uma norma adaptada a um conjunto hiperbólico Λ , com respeito a uma decomposição hiperbólica, é adaptada a Λ e de tipo caixa, com a mesma constante de hiperbolicidade da norma original.

De maneira geral, uma norma do tipo caixa, com respeito a uma soma direta contínua $T_\Lambda M = E_1 \oplus E_2$, é geralmente apenas contínua, não pode ser definida em toda a variedade M e não é induzida de uma métrica Riemanniana, pois violaria a lei do paralelogramo. Porém, é possível mostrar que é equivalente a norma induzida por um produto interno, se o ângulo entre E_1 e E_2 for uniformemente limitado inferiormente por um número positivo, como será mostrado a seguir.

Primeiro, para $x \in \Lambda$, defina o ângulo entre $E_1(x)$ e $E_2(x)$ como

$$\angle(E_1(x), E_2(x)) = \inf\{\angle(u, v) : u \in E_1(x) \setminus \{0\}, v \in E_2(x) \setminus \{0\}\}.$$

Defina

$$\angle(E_1, E_2) = \inf_{x \in \Lambda} \angle(E_1(x), E_2(x)).$$

Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Pelo Teorema 3.1.10, $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente em $x \in \Lambda$. Logo, se Λ é compacto, então $\angle(E^s, E^u) > 0$.

Agora mostramos que as normas são equivalentes sob a condição do ângulo.

Lema 3.1.13. *Para $\delta > 0$, existe $K \geq 1$ tal que, para qualquer espaço euclidiano E , qualquer soma direta $E = E_1 \oplus E_2$ e qualquer produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em E , se $\angle(E_1, E_2) > \delta$, em que o ângulo é com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então a norma do tipo caixa $\|\cdot\|_{E_1 \oplus E_2}$ ajustada a norma $|\cdot|$, induzida pelo produto interno, é equivalente a $|\cdot|$, com constante K .*

Demonstração. Fixe $\delta > 0$. Como $\angle(E_1, E_2) > \delta$, então dados $u \in E_1 \setminus \{0\}$ e $v \in E_2 \setminus \{0\}$, temos

$$\theta = \angle(u, v) \in [\delta, \pi/2].$$

Isto é,

$$\cos(\theta) \in [0, \cos(\delta)]$$

e portanto,

$$\langle u, v \rangle \geq 0.$$

Assim, para $w = w_1 + w_2$, em que $w_1 \in E_1$ e $w_2 \in E_2$, temos

$$\begin{aligned} |w|^2 &= |w_1|^2 + |w_2|^2 + 2\langle w_1, w_2 \rangle \geq |w_1|^2 + |w_2|^2 \\ &\geq (\max\{|w_1|, |w_2|\})^2 = \|w\|_{E_1 \oplus E_2}^2. \end{aligned}$$

Portanto, $|w| \geq \|w\|_{E_1 \oplus E_2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |w|^2 &= |w_1|^2 + |w_2|^2 + 2|w_1||w_2|\cos(\theta) \\ &\leq |w_1|^2 + |w_2|^2 + 2|w_1||w_2|\cos(\delta). \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $|w_1| \geq |w_2|$, então $\|w\|_{E_1 \oplus E_2} = |w_1|$. Assim,

$$\begin{aligned} |w|^2 &\leq |w_1|^2 + |w_1|^2 + 2|w_1|^2 \cos(\delta) \\ &= (2 + 2\cos(\delta))|w_1|^2 \\ &= (2 + 2\cos(\delta))\|w\|_{E_1 \oplus E_2}^2. \end{aligned}$$

Seja $K = \sqrt{2 + 2\cos(\delta)} \geq 1$. Logo,

$$\frac{1}{K}|w| \leq \|w\|_{E_1 \oplus E_2} \leq |w|.$$

□

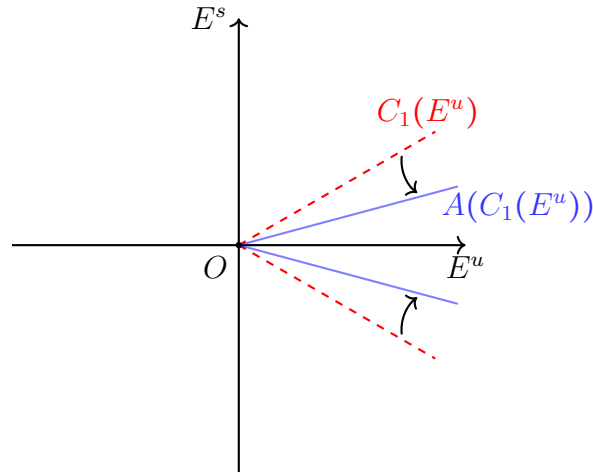
3.2 PERSISTÊNCIA DA HIPERBOLICIDADE

Nesta seção será explorada a propriedade de persistência da hiperbolicidade. Aqui, enunciaremos resultados que serão utilizados posteriormente, na prova do Teorema da Variedade Estável, em 3.4. As demonstrações técnicas serão omitidas do texto e podem ser encontradas em Wen (2016).

A ideia da prova da persistência da hiperbolicidade generaliza a intuição no caso da persistência da hiperbolicidade de um isomorfismo linear. Nesse caso, $A : E \rightarrow E$ é um isomorfismo linear hiperbólico, referente a decomposição $E = E^s \oplus E^u$, em que E é um espaço vetorial finito. Podemos mostrar que qualquer transformação linear B suficientemente próxima de A também é isomorfismo linear hiperbólico. Esta ideia é traduzida para o caso de conjuntos hiperbólicos utilizando a noção de transformações que preservam fibras. Primeiro ilustramos os passos principais no caso linear.

Para achar a decomposição hiperbólica de B , digamos $G^u \oplus G^s$, notemos que o isomorfismo A contrai o cone $C^1(E^u)$ e E^u é o “limite” da contração $\bigcap_{n=0}^{\infty} A^n(C_1(E^u))$.

Figura 2 – Ilustração da contração do cone instável por um isomorfismo linear hiperbólico.



Fonte: Elaboração própria.

Desde que B esteja perto o suficiente de A , B também contrai o cone instável $C^1(E^u)$. Isso sugere que um candidato ao conjunto G^u é

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} B^n(C_1(E^u)).$$

É necessário mostrar que essa interseção é um subespaço linear de E . Essa ideia pode ser pensada considerando o conjunto de gráficos de transformações lineares de E^u para E^s com norma menor ou igual a 1. Cada um desses gráficos é um subespaço linear de E que está dentro do cone $C_1(E^u)$. De fato, se $\sigma : E^u \rightarrow E^s$ é uma transformação linear com norma menor ou igual a 1, então para um vetor $v \in \text{gr}(\sigma)$, com $v = (x, \sigma(x))$, temos

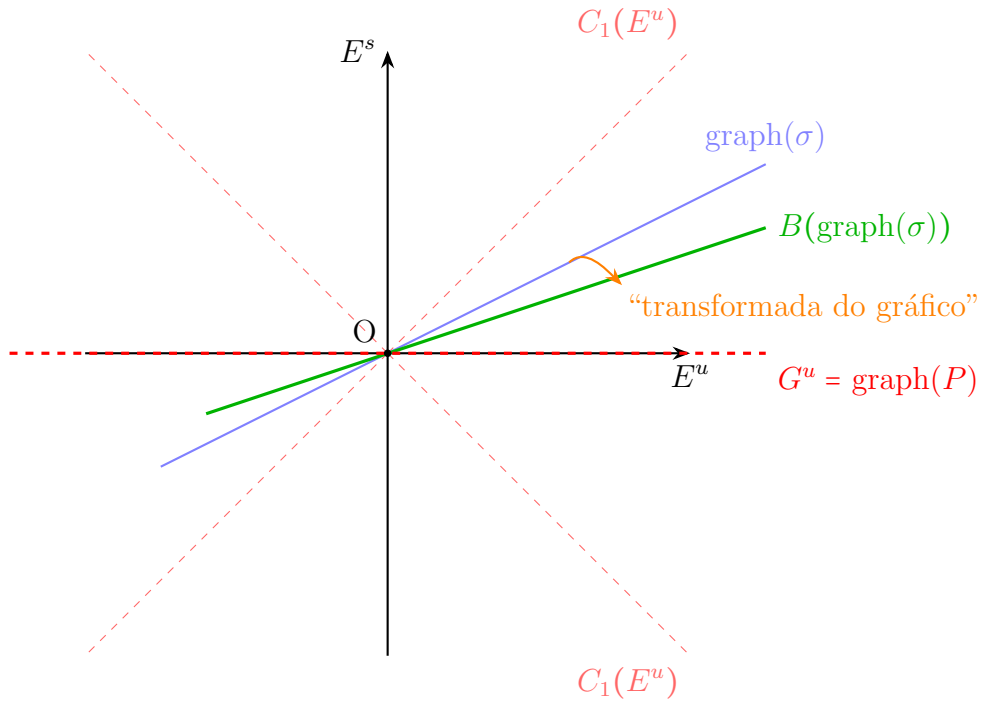
$$\|v_s\| = \|\sigma(x)\| \leq \|\sigma\| \cdot \|x\| \leq \|v_u\|$$

e portanto $v \in C^1(E^u)$. Intuitivamente, B transforma esses gráficos um no outro. O que estamos procurando, G^u , tem que ser invariante por B , para que possamos considerar G^u como espaço instável do isomorfismo B .

Para achar exatamente esse subespaço linear, é definido um operador, dito “transformada do gráfico”, em um espaço de Banach de transformações lineares e aplicado o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Essas ideias funcionam muito bem no caso de isomorfismos lineares hiperbólicos e então podemos mostrar que, para uma transformação linear perto de um isomorfismo linear hiperbólico, que satisfaz algumas condições técnicas,

existe uma função única P , tal que o seu gráfico é invariante pela transformação linear B e sua restrição ao gráfico expande os vetores. Dessa forma, o gráfico de P é o espaço instável de B , que estávamos procurando.

Figura 3 – Ilustração da ideia da transformada do gráfico.



Fonte: Elaboração própria.

É possível traduzir essa ideia para o caso de um conjunto hiperbólico, trabalhando nas fibras de um isomorfismo de fibrado linearmente.

Primeiramente vamos fixar algumas notações. Considere E_1, E_2 distribuições contínuas de $T_\Lambda M$. Considere um homomorfismo C^0 de fibrado $F : E_1 \rightarrow E_2$ que cobre uma função $f : M \rightarrow M$. Denotamos

$$\|F\| = \sup\{\|F(v)\| : v \in E_1, \|v\| = 1\},$$

em que as normas são tomadas na fibra apropriada.

Dizemos que F é limitado se $\|F\| < \infty$. Se Λ é compacto, um homomorfismo C^0 de fibrado é sempre limitado. Denotamos por $L(E_1, E_2; f)$ os homomorfismos contínuos de fibrado de E_1 para E_2 que cobrem f . Com respeito a norma definida acima, $L(E_1, E_2; f)$ é um espaço de Banach.

A noção de preservar fibra é essencial na ideia dos resultados dessa seção, pois, dessa forma, é possível traduzir as ideias do caso linear para o caso de um conjunto hiperbólico de um difeomorfismo f .

O lema a seguir garante que, se a ação de B é “dominada” por uma expansão em E_1 e uma contração em E_2 , com termos de acoplamento pequenos, então existe uma distribuição invariante, o gráfico de P . Este lema é utilizado para provar os resultados a seguir acerca da persistência da hiperbolicidade para conjuntos invariantes, além de ser utilizado na prova do Teorema da Variedade Estável, na próxima seção.

No lema, temos que se $P \in L(E_1, E_2; id)(1)$ (bola fechada em torno da origem no espaço $L(E_1, E_2; id)$), então

$$\text{gr}(P) = \bigcup_{x \in \Lambda} \text{gr}(P_x)$$

é uma distribuição contínua de $T_\Lambda M$. De fato, pelo Lema 2.2.25, como E_1 é uma distribuição contínua, para cada $x \in \Lambda$, existe vizinhança U de x e um referencial local de E_1 sobre U , $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$. Definimos os campos vetoriais ξ_i em U por

$$\xi_i(y) = (\sigma_i(y), P(\sigma_i(y))),$$

para $y \in U$. Como P é um homomorfismo de fibrado contínuo, então cada ξ_i é um campo vetorial contínuo em U . Além disso, para cada $y \in U$, $\{\xi_1(y), \dots, \xi_k(y)\}$ é uma base de $\text{gr}(P_y)$. Portanto, pelo Lema 2.2.25, $\text{gr}(P)$ é uma distribuição contínua de $T_\Lambda M$.

A prova do Lema abaixo pode ser encontrada em Wen (2016, p. 84). Aqui faremos um esboço das principais ideias.

Lema 3.2.1. *Seja $g : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Seja Δ um conjunto invariante de g , e $B : T_\Delta M \rightarrow T_\Delta M$ um isomorfismo de fibrado C^0 limitado sobre g , representado na soma direta contínua $T_\Delta M = E_1 \oplus E_2$ como*

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

em que $B_{ij} = \pi_i \circ B|_{E_j}$. Se existe uma norma $\|\cdot\|$ contínua de $T_\Delta M$, de tipo caixa com respeito a $E_1 \oplus E_2$, e constantes $\lambda > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\max\{\|B_{11}^{-1}\|, \|B_{22}\|\} < \lambda,$$

$$\max\{\|B_{12}\|, \|B_{21}\|\} < \varepsilon,$$

$$\text{e } \lambda + \varepsilon < 1,$$

então existe um único homomorfismo de fibrado $P = P_B : E_1 \rightarrow E_2$ sobre id de classe C^0 e com $\|P\| \leq 1$, tal que a distribuição contínua $\text{gr}(P)$ é invariante por B , isto é, $B_x(\text{gr}(P_x)) = \text{gr}(P_x)$, $\forall x \in \Delta$ e $B_x|_{\text{gr}(P_x)}$ é $(\lambda^{-1} - \varepsilon)$ -expansor. Ainda mais, P_B , e portanto $\text{gr}(P_B)$, dependem continuamente de B .

A demonstração é realizada pontualmente, trabalhando com a linearidade de B em cada fibra. Primeiramente, toma-se um homomorfismo de fibrados $P : E_1 \rightarrow E_2$ sobre a

identidade, com norma menor ou igual a 1, ou seja $P \in L(E_1, E_2; id)(1)$, e determinam-se as condições necessárias para que $B_x(\text{gr}(P_x)) \subset \text{gr}(P_{gx})$. Com isso, define-se um operador, denominado transformada do gráfico (cuja construção detalhada será apresentada na prova do teorema da variedade instável na seção 3.4). Mostra-se que o gráfico de P_x ser invariante por B_x é equivalente a existência de um ponto fixo para esse operador. Por fim, demonstra-se que o operador é uma contração no espaço $L(E_1, E_2; id)(1)$, o que permite aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e concluir a existência e unicidade do homomorfismo P desejado.

Com o objetivo de complementar a seção, apresentamos a seguir o teorema que garante a persistência da hiperbolicidade para conjuntos invariantes, cuja a demonstração pode ser encontrada em Wen (2016, p. 87).

Denotamos, para $a > 0$,

$$B(\Lambda, a) = \{x \in M : d(x, \Lambda) \leq a\}$$

em que

$$d(x, \Lambda) = \inf\{d(x, y) : y \in \Lambda\}.$$

Teorema 3.2.2 (Persistência da hiperbolicidade para um conjunto invariante). *Considere $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Existem uma vizinhança \mathcal{U}_0 de f em $\text{Diff}^1(M)$ e um número $a_0 > 0$ tal que, para qualquer $g \in \mathcal{U}_0$, todo conjunto g -invariante compacto Δ contido em $B(\Lambda, a_0)$ é hiperbólico. Além disso, quando g se aproxima de f na topologia C^1 e $x \in \Delta$ se aproxima de $y \in \Lambda$, o subespaço $E^s(x, g)$ se aproxima do subespaço $E^s(y, f)$. Da mesma forma para o subespaço instável.*

Este teorema diz que, para difeomorfismos C^1 que estão C^1 próximos de f e conjuntos invariantes por esses difeomorfismos, que estão também próximos de Λ , a hiperbolicidade persiste.

O lema a seguir adiciona alguns detalhes ao teorema da persistência de um conjunto hiperbólico referentes a norma adaptada e as constantes de hiperbolicidade. A demonstração utiliza basicamente o teorema anterior e o fato que o ângulo entre E^s e E^u é uniformemente limitado inferiormente por um número positivo.

Lema 3.2.3. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico compacto de f , e seja $\|\cdot\|$ uma norma Riemanniana em M . Então existem uma vizinhança \mathcal{U}_0 de f em $\text{Diff}^1(M)$, e dois números $a_0 > 0$ e $K \geq 1$ tais que, para todo conjunto invariante compacto $\Delta \subset B(\Lambda, a_0)$ de todo $g \in \mathcal{U}_0$, Δ é hiperbólico e a norma ajustada $\|\cdot\|_\Delta$, com respeito à decomposição hiperbólica de Δ , é equivalente a $\|\cdot\|$ com constante relativa K . Além disso, se $\|\cdot\|$ é adaptada a Λ e $\tau(\Lambda)$ é a constante de hiperbolicidade de Λ , então para qualquer $\epsilon > 0$, existem uma vizinhança C^1 $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ de f em $\text{Diff}^1(M)$ e um número $0 < a < a_0$ tais que a constante de*

hiperbolicidade com respeito a $\|\cdot\|$ de todo conjunto invariante compacto $\Delta \subset B(\Lambda, a)$ de todo $g \in \mathcal{U}$ satisfaz $\tau(\Delta) \leq \tau(\Lambda) + \epsilon$.

Demonstração. Se g está C^1 perto de f e Δ está em uma vizinhança pequena de Λ , então pelo Teorema 3.2.2, para cada $x \in \Lambda$ existe um $y \in \Lambda$ tal que $E^s(x, g) \oplus E^u(x, g)$ está perto de $E^s(y, f) \oplus E^u(y, f)$. Do ângulo entre $E^s(x, g) \oplus E^u(x, g)$ estar próximo do ângulo entre $E^s(y, f) \oplus E^u(y, f)$ e do lema 3.1.13, existe constante $K \geq 1$, independente de Δ , tal que $|\cdot|_\Delta$ é equivalente a $|\cdot|$ com constante K . Além disso, se g está C^1 perto de f e Δ está em uma vizinhança pequena de Λ , então, se $|\cdot|$ é adaptada a Λ , também é adaptada a Δ . \square

3.3 CRITÉRIO DE DIFERENCIABILIDADE

Agora mostraremos um critério para testar a diferenciabilidade de uma função Lipschitz, atribuído a Hasselblatt e Katok (2002). A demonstração segue a referência (WEN, 2016). Este critério será utilizado na próxima seção, especificamente, no Teorema 3.4.16.

Sejam E um espaço vetorial finito com decomposição em soma direta $E = E^u \oplus E^s$ e uma função $\sigma : E^u \rightarrow E^s$ Lipschitz. Denotemos o gráfico de σ por $\text{gr}(\sigma) = \{(v, \sigma(v)) : v \in E^u\}$. Seja $v \in E^u$, escreva $z = (v, \sigma(v))$.

Cada $h \in E^u$, com $h \neq 0$, determina uma reta secante de $\text{gr}(\sigma)$ passando em z e $(v+h, \sigma(v+h))$. Uma reta $\ell \subset T_z E$, passando por z , é dita uma reta tangente generalizada de $\text{gr}(\sigma)$ se existe uma sequência $\{h_n\} \subset E^u$, $h_n \neq 0$ e $h_n \rightarrow 0$, tal que a sequência de retas secantes ℓ_n , determinadas por z e $z_n = (v+h_n, \sigma(v+h_n))$, converge para ℓ . Isto é, existe uma sequência de vetores unitários

$$u_n = \frac{z_n - z}{\|z_n - z\|} = \frac{(h_n, \sigma(v+h_n) - \sigma(v))}{\|(h_n, \sigma(v+h_n) - \sigma(v))\|}$$

tais que $u_n \rightarrow u$, em que $\ell = \{z + tu : t \in \mathbb{R}\}$.

Dizemos que a união das retas tangentes generalizadas de $\text{gr}(\sigma)$ passando por z é o conjunto tangente de $\text{gr}(\sigma)$ em z , denotado por $T_z \text{gr}(\sigma)$.

Para cada $e \in E^u$ unitário, tomando h_n na direção de e , nos dá uma reta tangente generalizada ℓ . Como σ é Lipschitz,

$$\|\sigma(v+h_n) - \sigma(v)\| \leq K \|h_n\|$$

e ℓ não é paralela a E^s . Então a projeção $\pi_u : E \rightarrow E^u$ mapeia ℓ sobre a reta gerada por e . Isso significa que $E^u \subset \pi_u(T_z \text{gr}(\sigma))$.

Proposição 3.3.1 (Critério de diferenciabilidade). *Seja $E = E^u \oplus E^s$. Uma função Lipschitz $\sigma : E^u \rightarrow E^s$ é diferenciável em $v \in E^u$ se, e somente se, o conjunto tangente*

$T_z \text{gr}(\sigma)$ está contido em um subespaço linear de $T_z E$ de dimensão $\dim E^u$. Ademais, o conjunto tangente $T_z \text{gr}(\sigma)$ nesse caso, é o plano tangente de $\text{gr}(\sigma)$ em z .

Demonstração. A prova é basicamente interpretar diferenciabilidade com a linguagem geométrica de retas secantes e tangentes generalizadas. Seja $v \in E^u$ e $z = (v, \sigma(v))$. Assuma que exista um subespaço linear $V \subset T_z E$ de dimensão $\dim E^u$ tal que $T_z \text{gr}(\sigma) \subset V$. Seja $\pi_u : E \rightarrow E^u$ a projeção em E^u . Como já foi comentado, $E^u \subset \pi_u(T_z \text{gr}(\sigma)) \subset \pi_u(V)$. Como V e E^u são subespaços lineares de mesma dimensão, $\pi_u|_V : V \rightarrow E^u$ sobrejetora, $\pi_u|_V$ é um isomorfismo linear. Como $\pi_u|_V$ mapeia $T_z \text{gr}(\sigma)$ sobre E^u , segue que $T_z \text{gr}(\sigma) = V$. Em particular, para cada $e \in E^u$, $e \neq 0$, existe uma única reta tangente generalizada que a imagem por π_u contém e . Dizemos que existe reta tangente generalizada “sobre” e . Seja

$$L : E^u \rightarrow E^s$$

a função linear tal que $\text{gr}(L) = T_z \text{gr}(\sigma)$. Isto é, seja

$$L = \pi_s(\pi_u|_{T_z \text{gr}(\sigma)})^{-1}.$$

Então a reta tangente generalizada sobre $e \in E^u$ é $z + t(e, Le)$. Provemos que σ é diferenciável em v e na verdade $d\sigma_v = L$. Precisamos mostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(v+h) - \sigma(v) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

Suponha, por contradição, que esse limite não existe. Isto é, existe sequência $\{h_n\}$, $h_n \neq 0$, $h_n \rightarrow 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(v+h_n) - \sigma(v) - Lh_n}{\|h_n\|} \neq 0. \quad (3.3)$$

Podemos assumir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{\|h_n\|} = e \neq 0.$$

Como σ é Lipschitz, temos que existe $k \geq 0$ tal que

$$\|\sigma(v+h_n) - \sigma(v)\| \leq k\|h_n\|$$

isto é

$$\frac{\|\sigma(v+h_n) - \sigma(v)\|}{\|h_n\|} \leq k$$

e portanto a sequência em E^s

$$\frac{\sigma(v+h_n) - \sigma(v)}{\|h_n\|}$$

é limitada e portanto possui subsequência convergente. Podemos assumir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(v + h_n) - \sigma(v)}{\|h_n\|} = u.$$

Isso significa que a reta secante por z e $z_n = (v + h_n, \sigma(v + h_n))$ converge para a reta tangente generalizada $z + t(e, u)$, isto é,

$$\left(\frac{h_n}{\|h_n\|}, \frac{\sigma(v + h_n) - \sigma(v)}{\|h_n\|} \right) \rightarrow (e, u).$$

Porém a reta tangente generalizada sobre e é $z + t(e, Le)$ e por 3.3, $u \neq Le$, uma contradição.

Para o outro lado, considere σ é diferenciável em $v \in E^u$. Então existe uma transformação linear $L : E^u \rightarrow E^s$ tal que

$$\sigma(v + h) = \sigma(v) + L(h) + r(h),$$

em que $\frac{r(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. Considere uma reta tangente generalizada $\ell \in T_z \text{gr}(\sigma)$. Temos que existe sequência $\{h_n\} \subset E^u$, com $h_n \neq 0$ e $h_n \rightarrow 0$, tal que as retas secantes

$$\ell = \{z + t(h_n, \sigma(v + h_n) - \sigma(v)) : t \in \mathbb{R}\}$$

convergem para ℓ . Escreva $h_n = t_n e_n$, com $t_n = \|h_n\| > 0$ e $e_n = h_n / \|h_n\|$ um vetor unitário. Então

$$(h_n, \sigma(v + h_n) - \sigma(v)) = t_n(e_n, L(e_n) + r_n),$$

em que $r_n = \frac{r(h_n)}{t_n} \rightarrow 0$. A direção de ℓ_n é dada por

$$u_n = \frac{(e_n, L(e_n) + r_n)}{\|(e_n, L(e_n) + r_n)\|}.$$

Como a esfera unitária é compacta, suponha $u_{n_k} \rightarrow u$. Então, assumindo outra subsequência convergente se necessário, podemos assumir que $e_{n_k} \rightarrow e$, para algum vetor unitário $e \in E^u$. Pela continuidade de L e como $r_n \rightarrow 0$, temos

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(e_{n_k}, L(e_{n_k}) + r_{n_k})}{\|(e_{n_k}, L(e_{n_k}) + r_{n_k})\|} = \frac{(e, L(e))}{\|(e, L(e))\|}.$$

Logo, ℓ é a reta tangente generalizada gerada por $(e, L(e))$. Assim, cada reta tangente generalizada ℓ está contida em

$$\{z + t(e, L(e)) : t \in \mathbb{R}, e \in E^u, \|e\| = 1\}.$$

A união de todas retas é exatamente o subespaço afim

$$z + \{(h, L(h)) : h \in E^u\} = z + \text{gr}(L).$$

Como o gráfico de L é um subespaço linear de dimensão $\dim E^u$, a prova está completa. \square

3.4 VARIEDADES ESTÁVEIS

Esta seção concerne a demonstração do teorema da variedade estável, que garante a existência de variedades mergulhadas locais estáveis e instáveis para cada ponto de um conjunto hiperbólico. Esta é a característica mais proeminente de sistemas dinâmicos hiperbólicos. Existem dois métodos famosos para demonstrar o teorema da variedade estável: o método da transformada do gráfico, atribuído a Jacques Hadamard e o método da variação de parâmetros, atribuído a Oskar Perron. Utilizaremos a transformada do gráfico.

O teorema será enunciado mais adiante no texto, antes disso, apresentaremos um dos exemplos mais característicos de difeomorfismo de Anosov: os automorfismos torais de Anosov. Ao estudar esses automorfismos, a caracterização das variedades estáveis e instáveis é mais clara, auxiliando a compreensão do teorema geral.

Definição 3.4.1. Uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita um automorfismo de Anosov se A é hiperbólico, A tem entradas inteiras e $\det A = \pm 1$.

Teorema 3.4.2. *Seja A um automorfismo de Anosov. Então os autovalores de A são irracionais com $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ e a inclinação das direções dos autoespaços são irracionais.*

Demonstração. Se os dois autovalores λ_1 e λ_2 de A são conjugados complexos ou raiz real de multiplicidade 2, eles devem ter norma 1, pois $|\det A| = 1$, contradizendo A ser hiperbólico. Logo λ_1 e λ_2 são reais e distintos. Como $|\lambda_1 \lambda_2| = 1$ podemos assumir $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. Para ver que λ_1 é irracional, suponha por contradição que $\lambda_1 = p/q$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Então considerando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e substituindo λ_1 na equação característica

$$\lambda_1^2 - \lambda_1(a_{11} + a_{22}) + \det A = 0$$

temos

$$\frac{p^2}{q^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{p}{q} \pm 1 = 0.$$

Multiplicando por q^2 , temos

$$p^2 - (a_{11} + a_{22})pq \pm q^2 = 0,$$

o que implica

$$p^2 = \pm q^2 + (a_{11} + a_{22})pq,$$

e portanto

$$p^2 = q(\pm q + (a_{11} + a_{22})p)$$

Daí $q|p^2$. Note que, se existe primo que divide q , divide p^2 , pelo Lema de Euclides, e portanto divide p , contradizendo $\text{mdc}(p, q) = 1$. Assim q não tem fatores primos e logo $q = \pm 1$. Similarmente podemos chegar que $p = \pm 1$ mas então $|\lambda_1| = 1$ uma contradição pois A é hiperbólico. Logo λ_1 é irracional. Da mesma forma, λ_2 é irracional.

Seja $v \in \mathbb{R}^2$ um autovalor de λ_1 . Note que $v \neq (0, 1)$ pois, caso fosse, teríamos

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

daí,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

e portanto $\lambda_1 = a_{22}$, contradizendo a_{22} ser inteiro. Logo v tem componente v_1 diferente de zero. Sem perda de generalidade, podemos assumir $v = (1, b)$, no qual b é a inclinação.

Então

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 b \end{pmatrix}$$

e $a_{11} + a_{12}b = \lambda_1$, o que implica que b é irracional. \square

Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um automorfismo de Anosov. Como A tem entradas inteiras, o automorfismo mapeia \mathbb{Z}^2 em si mesmo. Logo $A(a + k) - A(a) = A(k) \in \mathbb{Z}^2$ para qualquer $a \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}^2$.

Identificando o toro com $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$, em que \sim é a relação de equivalência definida por $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^2$. Temos que a projeção na classe de equivalência $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ é aplicação quociente e $\pi \circ A$ é constante nas fibras, isto é, se $\pi(v) = \pi(v')$ então $\pi \circ A(v) = \pi \circ A(v')$. Logo, existe única função contínua $f_A : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tal que $\pi \circ A = f_A \circ \pi$. Dizemos que A desce para o quociente.

Temos que π é isometria local e difeomorfismo local (em coordenadas locais se comporta como uma translação). Como $\det A = \pm 1$, A é invertível e

$$A^{-1} = \pm 1 \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

tem entradas inteiras, A^{-1} também induz uma função $f_{A^{-1}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, que é dada por $f_{A^{-1}}(\pi(x, y)) = \pi(A^{-1}(x, y))$. Logo

$$f_A(f_{A^{-1}}(\pi(x, y))) = f_A(\pi(A^{-1}(x, y))) = \pi(A(A^{-1}(x, y))) = \pi(x, y)$$

e

$$f_{A^{-1}}(f_A(\pi(x, y))) = f_{A^{-1}}(\pi(A(x, y))) = \pi(A^{-1}(A(x, y))) = \pi(x, y).$$

Dizemos que f_A é difeomorfismo toral de Anosov.

Uma característica interessante sobre os automorfismos torais de Anosov é a sua família de variedades estáveis e instáveis. Definimos em 2.1.7 os conjuntos $W^s(x)$ e $W^u(x)$, que são ditos, respectivamente, variedade estável e instável.

Note que, se $y \in W^s(x)$, então $x \in W^s(y)$ e $W^s(x) = W^s(y)$. Na verdade, variedades instáveis são classes de equivalências da relação de equivalência \sim , em que $x \sim y$ se, e somente se, $d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0$. Logo X se decompõe em uma união disjunta de variedades estáveis.

Como A é hiperbólico, existe uma decomposição hiperbólica dada por $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$. Iremos mostrar que a o conjunto estável de A em um ponto $a \in \mathbb{R}^2$ é dado por $W^s(a, A) = a + E^s$ (analogamente para o instável).

De fato, seja $b \in W^s(a, A)$. Então

$$0 \leftarrow \|A^n b - A^n a\| = \|A^n(b - a)\|.$$

Assim, pelo Teorema 3.1.8, $b - a \in E^s$, ou ainda $b \in a + E^s$ e $W^s(a, A) \subset a + E^s$. Por outro lado, se $b \in a + E^s$, $b = a + c$, em que $\|A^n c\| \rightarrow 0$. Dessa maneira,

$$\|A^n b - A^n a\| = \|A^n(a + c) - A^n a\| = \|A^n c\| \rightarrow 0$$

e $b \in W^s(a, A)$. Logo $W^s(a, A) = a + E^s$.

Agora será provado que, para qualquer $x \in \mathbb{T}^2$, temos $W^s(x, f) = \pi(W^s(a, A))$, em que a é qualquer ponto em $\pi^{-1}(x)$, ou seja, a variedade estável de um ponto x em respeito ao automorfismo de Anosov f é dada pela imagem da projeção π da variedade estável (em respeito a A) de um ponto a na classe de equivalência de x .

Com efeito, seja $x = \pi a$. Primeiro mostraremos que $\pi(W^s(a, A)) \subset W^s(x, f)$. Seja $b \in W^s(a, A)$. Então $\|A^n b - A^n a\| \rightarrow 0$. Como π é uniformemente contínua, temos que $d(\pi(A^n b), \pi(A^n a)) \rightarrow 0$, ou seja $d(f^n(\pi(b)), f^n(\pi(a))) = d(f^n(\pi(b)), f^n(x)) \rightarrow 0$. Portanto, $\pi b \in W^s(x, f)$ e $\pi(W^s(a, A)) \subset W^s(x, f)$. Agora provamos a recíproca $W^s(x, f) \subset \pi(W^s(a, A))$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que π preserva distância em uma bola de raio ε . Isto é, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|a - b\| \leq \varepsilon$, temos $d(\pi a, \pi b) = \|a - b\|$. Tome $0 < \delta < \varepsilon$ tal que para qualquer $a, b \in \mathbb{R}^2$ se $\|a - b\| \leq \delta$, então $\|Aa - Ab\| \leq \varepsilon$. Seja $y \in W^s(x, f)$. Tome $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$,

$$d(f^n(y), f^n(x)) \leq \delta.$$

Como $\pi(A^m a) = f^m(\pi a) = f^m(x)$ e $d(f^m(x), f^m(y)) \leq \delta$, temos que existe único $c \in B(A^m a, \varepsilon)$ tal que $\pi c = f^m(y)$. Tome $b = A^{-m}c$. Então

$$\pi b = \pi(A^{-m}c) = f^{-m}(\pi c) = f^{-m}f^m(y) = y.$$

Logo b está na classe de equivalência de y . Queremos mostrar que $b \in W^s(a, A)$, que é o mesmo que provar que $c \in W^s(A^m a, A)$, de fato, note que

$$\|A^n b - A^n a\| = \|A^n(A^{-m}c) - A^n a\| = \|A^p c - A^p(A^m a)\|.$$

Como $\|c - A^m a\| \leq \varepsilon$ temos

$$\|c - A^m a\| = d(\pi c, \pi(A^m a)) = d(f^m y, f^m x) \leq \delta.$$

Então,

$$\|Ac - A(A^m a)\| \leq \varepsilon,$$

e

$$\|Ac - A(A^m a)\| = d(\pi(Ac), \pi(A(A^m a))) = d(f(\pi c), f^{m+1}(\pi a)) = d(f^{m+1}(y), f^{m+1}(x)) \leq \delta.$$

Indutivamente,

$$\|A^n c - A^n(A^m a)\| = d(f^{m+n}(y), f^{m+n}(x)) \leq \delta.$$

Mas $d(f^{m+n}(y), f^{m+n}(x)) \rightarrow 0$ e assim $c \in W^s(A^m a, A)$.

Em seguida, provamos que $W^s(x, f)$ é uma variedade imersa C^∞ que é densa em \mathbb{T}^2 (da mesma forma para $W^u(x)$). Ainda, para qualquer $x, y \in \mathbb{T}^2$, $W^s(x, f)$ intersecta $W^s(y, f)$ transversalmente em um conjunto denso de \mathbb{T}^2 .

Com efeito, como $W^s(a, A)$ é uma reta em \mathbb{R}^2 (é a translação de E^s) e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um C^∞ mergulho local (em particular uma imersão), $W^s(x, f)$ é uma subvariedade imersa C^∞ de \mathbb{T}^2 . Mostremos também que é densa em \mathbb{T}^2 . Por simplicidade, mostremos para o caso $x = \pi(0)$. Então $W^s(0, A) = 0 + E^s$, que é uma reta passando pela origem com inclinação irracional b . Notemos que cada reta vertical por um ponto de \mathbb{Z}^2 representa o “círculo S^1 (latitude)” de \mathbb{T}^2 . Temos que E^s intersecta essas linhas em alturas $\{nb\}_{n \in \mathbb{Z}}$, que, módulo inteiros, é um conjunto denso de S^1 . Logo $W^s(x, f)$ é denso em \mathbb{T}^2 . Ainda, $W^s(x, f)$ intersecta $W^u(y, f)$ transversalmente em um subconjunto denso de \mathbb{T}^2 para quaisquer $x, y \in \mathbb{T}^2$.

Outro resultado interessante sobre os automorfismos torais de Anosov é a densidade dos pontos periódicos e que esses automorfismos são topologicamente transitivos.

Teorema 3.4.3. *Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um automorfismo de Anosov. Então os pontos periódicos de f são densos em \mathbb{T}^2 e f é transitiva.*

Demonstração. Para provar que os pontos periódicos de f são densos em \mathbb{T}^2 , basta provar que qualquer “ponto racional” $x \in \mathbb{T}^2$ é f -periódico. Seja $a = (p_1/q_1, p_2/q_2) \in \mathbb{R}^2$ com coordenadas racionais. Para qualquer $n \geq 1$, A^n é uma matriz com entradas inteiras. Logo, os dois componentes de $A^n a$ são racionais com denominador sendo no máximo $\text{mmc}(q_1, q_2)$. Assim temos um número finito de possibilidades para $\pi(A^n a)$. Então deve existir $n > m \geq 0$ tal que

$$A^n a - A^m a \in \mathbb{Z}^2.$$

Logo

$$\pi A^n a = \pi A^m a.$$

Denote $x = \pi a$. Então

$$f^n x = f^n(\pi(a)) = \pi(A^n a) = \pi(A^m a) = f^m(\pi(a)) = f^m(x)$$

e

$$f^{n-m}(x) = x.$$

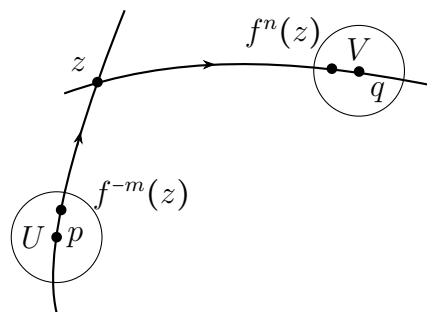
Portanto x é f -periódico.

Para a transitividade, considere U, V abertos de \mathbb{T}^2 . Como os pontos periódicos são densos em \mathbb{T}^2 , existem $p \in U, q \in V$ pontos periódicos. Como a variedade estável no ponto q , $W^s(q, f) = W^s(q)$ e a variedade instável no ponto p , $W^u(p, f) = W^u(p)$ se intersectam transversalmente, considere $z \in W^u(p) \cap W^s(q)$.

Como queremos um ponto que vai de U a V , podemos mudar para uma iterada, ou simplesmente assumir que p e q são pontos fixos. Assim, $f^n(z) \rightarrow q, n \rightarrow \infty$ e $f^{-n}(z) \rightarrow p, n \rightarrow \infty$. Existem $m, n \geq 1$ tais que $f^{-m}z \in U$ e $f^n z \in V$. Logo $f^{m+n}(f^{-m}z) = f^n(z) \in V$ e $f^{m+n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

□

Figura 4 – Ilustração da ideia da transitividade.



Fonte: Elaboração própria.

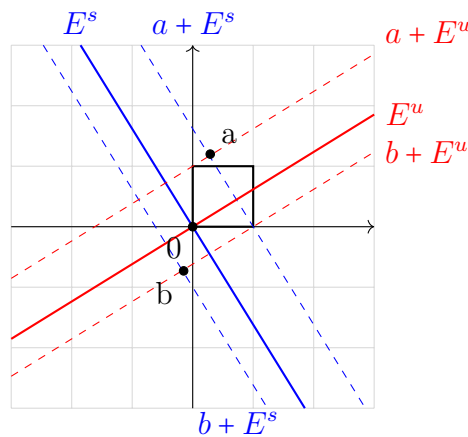
Observação 3.4.4. Poderíamos ter definido os automorfismos de Anosov para matrizes $A \in SL(d, \mathbb{Z})$.

Exemplo 3.4.5. Um exemplo típico é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que os autovalores de A são $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $1/\lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Como a matriz é simétrica, os autovetores são ortogonais. Dessa forma, a aplicação expande por um fator de λ na direção do autovetor $v_\lambda = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ e contrai por um fator de $1/\lambda$ na direção do autovalor $v_{1/\lambda} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$. Em dimensão 2, o espaço gerado por $v_{1/\lambda}$ é exatamente E^s e o espaço gerado por v_λ é E^u .

Figura 5 – Ilustração das variedades estáveis e instáveis de A .



Fonte: Elaboração própria.

Seguimos agora, com uma ideia mais concreta desses conjuntos, para as definições e os resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema da Variedade Estável. Como a construção é longa, será realizada em uma sequência de passos.

Passo 1: Primeiramente, definimos uma função que associa pontos do fibrado tangente de volta para a variedade M , verificamos algumas propriedades dessa função e então a utilizaremos para “levantar” $f : M \rightarrow M$ localmente para o fibrado tangente TM . Este passo é necessário pois, quando consideramos o caso de um ponto fixo hiperbólico 0 de uma função $f : U \subset E \rightarrow E$, em que E é espaço vetorial, temos que $df_0 : E \rightarrow E$ é um isomorfismo linear hiperbólico. Assim, faz sentido definir uma função $\phi = f - df_0$, que é a diferença entre f e sua linearização em 0 . No entanto, no cenário de uma variedade M , tomar a diferença $\phi = f - Tf$ não faz sentido em geral.

Para a definição a seguir e suas propriedades, são utilizados alguns conceitos de Geometria Riemanniana, os quais não serão aprofundados aqui, visto que fogem do escopo do trabalho. Para mais detalhes, consulte (LEE, 2019).

Para $x \in M$, a função exponencial

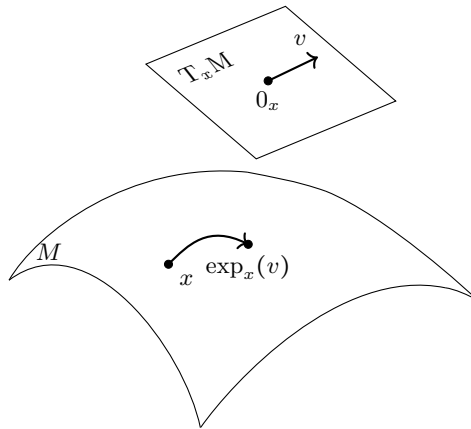
$$\exp_x : T_x M \rightarrow M$$

é definida como

$$\exp_x(v) = \sigma_v(1),$$

na qual $\sigma_v(t)$ é a geodésica¹ determinada pela métrica Riemanniana de M , passando por x em $t = 0$ com velocidade v . Aqui M é compacto, logo podemos definir a função em todo $T_x M$.

Figura 6 – Ilustração da função exponencial $\exp_x : T_x M \rightarrow M$.



Fonte: Elaboração própria.

A seguir enunciamos um resultado sobre as propriedades da exponencial. A demonstração pode ser encontrada em Lee (2019, p. 128).

Observação 3.4.6. Denotamos a bola fechada de raio ρ em $T_x M$ por

$$T_x M(\rho) = \{v \in T_x M : \|v\| \leq \rho\}.$$

Teorema 3.4.7. *i) $\exp_x(0_x) = x$, em que 0_x é a origem de $T_x M$.*

ii) $d(\exp_x)_{0_x} : T_x M \rightarrow T_x M$ é a identidade.

iii) Existe $\rho > 0$ tal que, para qualquer $x \in M$, $\exp_x : T_x M(\rho) \rightarrow M$ é um mergulho C^∞ . Ademais, $d(x, \exp_x(v)) = \|v\|, \forall v \in T_x M(\rho)$, em que d e $\|\cdot\|$ são induzidos pela métrica Riemanniana de M .

¹ Curva que minimiza a distância.

iv) A função $\exp : TM \rightarrow M$, $\exp(v) = \exp_{\pi(v)}(v)$ é C^∞ . Aqui $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção do fibrado.

Note que $d(\exp_x)_{0_x} = \text{id}_{T_x M}$ é um isomorfismo. Logo, pelo Teorema da Função Inversa (2.2.11), \exp_x é um difeomorfismo local em 0_x , isto é, mapeia uma vizinhança de 0_x difeomorficamente em uma vizinhança de $\exp_x(0_x) = x$. Logo, tomando x como base, qualquer ponto $y \in B(x, \rho)$ determina um vetor $\exp_x^{-1} y \in T_x M$ de comprimento

$$\|\exp_x^{-1} y\| = d(x, \exp_x(\exp_x^{-1} y)) = d(x, y).$$

Em um espaço euclidiano, é apenas o vetor $y - x$ de x até y .

Como f é contínua em M compacta, f é uniformemente contínua e, portanto, dado $\rho > 0$ que satisfaz o item (3) do Teorema 3.4.7, existe $0 < r_\rho < \rho$ tal que se $d(x, y) < r_\rho$, para $x, y \in M$ então $d(f(x), f(y)) < \rho$.

Definimos o auto-levantamento

$$F_f : TM(r_\rho) \rightarrow TM$$

de f como

$$F_f(v) = \exp_{f(x)}^{-1} f \exp_x(v), \text{ para } x = \pi(v).$$

Note que para $v \in T_x M(r_\rho)$ temos que $d(x, \exp_x(v)) = \|v\| \leq r_\rho$ o que implica que $d(f(x), f(\exp_x(v))) \leq \rho$. Desse modo, $\exp_{f(x)}^{-1}(f \exp_x(v))$ está bem definida. Claramente F_f preserva fibra sobre f . De fato,

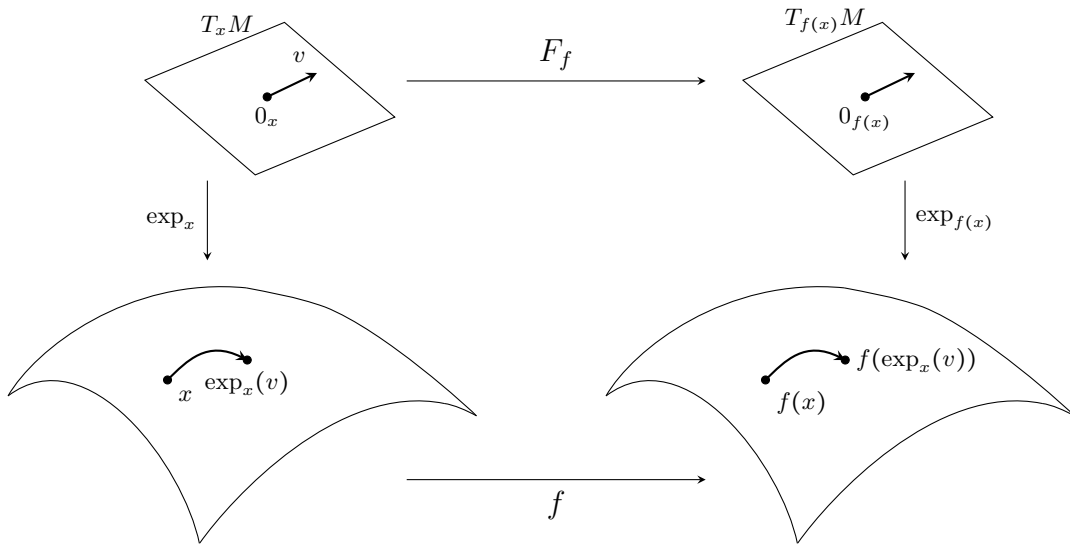
$$\pi(F_f(v)) = f(x) = f(\pi(v)), \text{ se } x = \pi(v) \text{ para } v \in TM(r_\rho).$$

Como f é C^1 , F_f é C^1 e ainda

$$F_f(\exp_x^{-1} y) = \exp_{f(x)}^{-1}(f y), \forall x, y \in M, y \in B(x, r_\rho).$$

Logo F_f leva vetores “de x para y ” a vetores “de $f(x)$ para $f(y)$ ”.

Figura 7 – Ilustração do auto-levantamento F_f .



Fonte: Elaboração própria.

Indutivamente,

$$F_f^n(\exp_x^{-1} y) = \exp_{f^n(x)}(f^n(y)).$$

Em particular,

$$\|F_f^n(\exp_x^{-1} y)\| = d(f^n(x), f^n(y)).$$

Assim, a distância $d(f^n(x), f^n(y))$ de dois pontos em M é convertida ao comprimento $\|\exp_{f^n(x)}^{-1} f^n(y)\|$ de um vetor em TM . Claro, para que as iteradas $F_f^n(v)$ façam sentido, em que $v = \exp_x^{-1} y$, temos que assumir

$$d(f^i(x), f^i(y)) < r_\rho, \forall 0 \leq i \leq n - 1.$$

Pode ser que para um vetor v , nem todas iteradas $F_f^n(v)$ estejam definidas. Consideramos apenas os vetores v tais que as iteradas positivas $F_f^n(v)$ ainda estão na união

$$TM(r_\rho) = \bigcup_{x \in M} T_x M(r_\rho).$$

Dado $r > 0$, de maneira geral, uma função $F : TM(r) \rightarrow TM$ que preserva fibra sobre f , quando restrita a cada fibra, se torna uma função entre espaços euclidianos:

$$F|_{T_x M(r)} : T_x M(r) \rightarrow T_{f(x)} M.$$

Definimos a derivada na fibra de F em $v \in TM(r)$ como sendo

$$d_2 F_v = d(F|_{T_x M(r)})_v : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$$

em que $x = \pi(v)$. Em coordenadas locais, $TM(r)$ é representada como $B_1 \times B_2$, nos quais B_1 e B_2 são bolas em \mathbb{R}^d , $d = \dim M$, com B_1 representado a base e B_2 a parte da fibra. Logo d_2F é apenas a derivada parcial de F com respeito a segunda variável (por esse motivo o subscrito “2”). As derivadas da fibra de ordem superior são definidas da mesma maneira sendo as derivadas de ordem superior da função restrita.

Lema 3.4.8. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo.*

i) $F_f(0_x) = 0_{f(x)}, \forall x \in M.$

ii) $d_2(F_f)_{0_x} = T_x f, \forall x \in M.$

iii) $d_2(F_f)$ é contínua em $TM(r_\rho)$.

Observação 3.4.9. O item (2) nos diz que perto da origem do espaço tangente $T_x M$, $T_x f$ é uma aproximação linear para a função não-linear F_f em $T_x M(r_\rho)$.

Em coordenadas locais (3) diz que a derivada parcial de F_f com respeito a segunda variável é contínua em $B_1 \times B_2$ (com respeito as duas variáveis).

Demonstração. Sejam $x \in M$ e $v \in T_x M$.

i) $F_f(0_x) = \exp_{f(x)}^{-1} f \exp_x(0_x) = \exp_{f(x)}^{-1}(f(x)) = 0_{f(x)}.$

ii) Note que

$$\begin{aligned} d_2(F_f)_{0_x} &= d(\exp_{f(x)}^{-1} f \exp_x)_{0_x} \\ &= d(\exp_{f(x)}^{-1})_{f(x)} \circ d(f)_x \circ d(\exp_x)_{0_x} \\ &= id|_{T_{f(x)}M} \circ df_x \circ id|_{T_x M} = T_x f \end{aligned}$$

iii) Temos

$$\begin{aligned} d_2(F_f)(v) &= d(\exp_{f(x)}^{-1} f \exp_x)_v \\ &= d(\exp_{f(x)}^{-1})_{f(\exp_x(v))} \circ df_{\exp_x(v)} \circ d(\exp_x)_v. \end{aligned}$$

Como \exp é suave e f é C^1 , $d_2(F_f)$ depende continuamente de v , o que prova que é contínua.

□

Seja

$$\phi_f = F_f - T f : TM(r_\rho) \rightarrow TM.$$

Claramente ϕ_f preserva fibras sobre f . De fato, para $v \in T_x M$,

$$\pi(\phi_f(v)) = f(x) = f(\pi(v)).$$

Pelo Lema 3.4.8, $\phi_f(0_x) = 0_{f(x)}$ e

$$d_2(\phi_f)_{0_x} = d((F_f - Tf)|_{T_x M(r_\rho)})_{0_x} = d(F_f|_{T_x M(r_\rho)})_{0_x} - d(Tf|_{T_x M(r_\rho)})_{0_x} = T_x f - T_x f = 0.$$

Note que ϕ_f é C^0 apenas (como Tf é C^0). Mas, ϕ_f restrito a cada fibra $T_x M(r_\rho)$ é C^1 ($F_f|_{T_x M} - Tf$ é C^1 pois F_f é C^1 e $T_x f$ é suave). Na verdade, temos mais ainda, $d_2 \phi_f$ é contínua em $TM(r_\rho)$. De fato, $d_2(\phi_f)_v = d_2(F_f)_v - T_{\pi(v)} f$. Em coordenadas locais, ϕ_f ser C^1 nas fibras significa que a derivada parcial com respeito a segunda variável é contínua com respeito a segunda variável, e $d_2 \phi_f$ ser contínua em $TM(r_\rho)$ significa que a derivada parcial de ϕ_f com respeito a segunda variável é contínua com respeito a ambas variáveis.

De maneira geral, para uma função que preserva fibra $F : TM(r) \rightarrow TM$, que é Lipschitz em cada fibra, definimos a constante de Lipschitz na fibra de F como sendo

$$\text{Lip}_2 F = \sup_{x \in M} \text{Lip}(F|_{T_x M(r)}).$$

Passo 2: Agora, provaremos que dado um difeomorfismo f , a constante de Lipschitz na fibra de ϕ_f é relativamente pequena.

Lema 3.4.10. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo. Denote $\phi_f = F_f - Tf$. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que $\text{Lip}_2 \phi_f < \varepsilon$ em $TM(r)$.*

Demonstração. Como $d_2(\phi_f)$ é contínua em $TM(r_\rho)$, $d_2(\phi_f)_{0_x} = 0$ e da imagem da seção nula de TM ser compacta (pois M é compacta), para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que para $v \in TM(r)$, temos $\|d_2(\phi_f)_v\| < \varepsilon$. Aplicando o Teorema do Valor Médio Generalizado as fibras temos que

$$\|(\phi_f)|_{T_x M(r)}(v) - (\phi_f)|_{T_x M(r)}(w)\| < \varepsilon \|v - w\|, \text{ para todo } v, w \in T_x M(r).$$

Assim,

$$\text{Lip}((\phi_f)|_{T_x M(r)}) < \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de x ,

$$\text{Lip}_2 \phi_f < \varepsilon$$

em $TM(r)$. □

Passo 3: Em seguida, definimos e caracterizamos as variedades estáveis e instáveis locais nas fibras, objetos que serão utilizados para construir as variedades estáveis e instáveis na variedade M .

Para achar as variedades estáveis globais, é necessário iterar as variedades estáveis locais, então iremos começar trabalhando com elas. Os resultados serão provados para funções do tipo

$$Tf + \phi$$

em $T_\Lambda M$, em que ϕ é contínua, preserva fibra sobre f e é Lipschitz na fibra com $\text{Lip } \phi$ pequeno. Note que $\phi_f = F_f - Tf$ satisfaz exatamente essas condições e eventualmente, iremos aplicar os resultados para $Tf + \phi_f$ em particular.

Seja

$$\phi : TM(r) \rightarrow TM, 0 < r \leq \infty$$

função que preserva fibras sobre f e tal que

$$\phi(0_x) = 0_{f(x)}, \forall x \in M.$$

Considere $\|\cdot\|$ uma norma em TM . Defina, respectivamente, a variedade local estável na fibra e a variedade local instável na fibra de 0_x de tamanho r com respeito a $Tf + \phi$ como

$$\begin{aligned} W_r^s(0_x, Tf + \phi) &= \{v \in T_x M : \|(Tf + \phi)^n v\| \leq r, \forall n \geq 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(Tf + \phi)^n v\| = 0\}, \\ W_r^u(0_x, Tf + \phi) &= \{v \in T_x M : \|(Tf + \phi)^{-n} v\| \leq r, \forall n \geq 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(Tf + \phi)^{-n} v\| = 0\}. \end{aligned}$$

Utilizamos a notação “estável na fibra” para enfatizar que é necessário que o vetor v esteja na mesma fibra que 0_x .

Os resultados a seguir serão provados para uma perturbação Lipschitz na fibra de Tf , isto é, para $Tf + \phi$, onde ϕ satisfaz as condições acima com a constante de Lipschitz suficientemente pequena.

Para a demonstração a seguir, são definidas algumas notações. Seja $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ soma direta. Denotamos por

$$\pi_s : T_x M \rightarrow E^s(x) \text{ e } \pi_u : T_x M \rightarrow E^u(x)$$

as projeções. Com o objetivo de simplificar a notação, para funções apropriadas ϕ denotamos

$$\phi_s = \pi_s \circ \phi \text{ e } \phi_u = \pi_u \circ \phi,$$

e para $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$

$$(T_x f)_{ss} = (Tf)_s|_{E^s(x)} \text{ e } (T_x f)_{uu} = (Tf)_u|_{E^u(x)}.$$

É fácil ver que para $v \in T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$, como Tf preserva $E^s(x)$ e $E^u(x)$ temos

$$(Tf)_s v = (Tf)_s(v_s + v_u) = (Tf)_s(v_s) + (Tf)_s(v_u) = (Tf)_s(v_s) = (Tf)_{ss}v_s,$$

e, similarmente $(Tf)_u v = (Tf)_{uu}v_u$.

Lema 3.4.11 (Caracterização de W_r^s nas fibras). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ e constante de hiperbolicidade $0 < \tau < 1$ com respeito a uma norma $C^0 \|\cdot\|$ de $T_\Lambda M$ que é adaptada e de tipo caixa com respeito a $E^s \oplus E^u$. Seja $r > 0$. Seja $\phi : T_\Lambda M(r) \rightarrow T_\Lambda M$ contínua, que preserva fibras, $\phi(0_x) = 0_{f(x)}$, $\forall x \in \Lambda$ e Lipschitz na fibra de maneira que*

$$\text{Lip}_2 \phi < 1 - \tau.$$

Então, para qualquer $x \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} W_r^s(0_x, Tf + \phi) &= \{v \in T_x M(r) : \|(Tf + \phi)^n v\| \leq r, \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in T_x M(r) : (Tf + \phi)^n v \in T_{f^n(x)} M(r) \cap C_1(E^s(f^n x)), \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in T_x M(r) : \|(Tf + \phi)^n v\| \leq (\tau + \text{Lip}_2 \phi)^n \|v\|, \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

E da mesma forma para W_r^u .

Demonstração. Mostramos inicialmente dois fatos:

1. Se $x \in M$ $v, v' \in T_x M(r)$ então

$$\|(Tf + \phi)_s v - (Tf + \phi)_s v'\| \leq (\tau + \text{Lip}_2 \phi) \|v - v'\|.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|(Tf + \phi)_s v - (Tf + \phi)_s v'\| &= \|(Tf)_s(v - v') + \phi_s v - \phi_s v'\| \\ &\leq \|(Tf)_{ss}(v_s + v'_s)\| + \|\phi_s v - \phi_s v'\| \\ &\leq \tau \|v_s + v'_s\| + \|\pi_s(\phi v - \phi v')\| \\ &\leq \tau \|v + v'\| + \|\phi v - \phi v'\| \text{ (a norma é de tipo caixa)} \\ &\leq (\tau + \text{Lip}_2 \phi) \|v - v'\|. \end{aligned}$$

2. Se $v, v' \in T_x M(r)$ e $v - v' \notin C_1(E^s(x))$ então $(Tf + \phi)v - (Tf + \phi)v' \notin C_1(E^s(f(x)))$
e

$$\|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'\| \geq \|(\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi)\| \|v - v'\|.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'\| &= \|(Tf)_{uu}(v_u - v'_u) + \phi_u v - \phi_u v'\| \\ &\geq \|(Tf)_{uu}(v_u - v'_u)\| - \|\phi_u v - \phi_u v'\| \text{ (aqui usamos 3.2)} \\ &\geq \tau^{-1} \|v_u - v'_u\| - \text{Lip}_2 \phi \|v - v'\|. \end{aligned}$$

Mas, $v - v' \notin C_1(E^s(x))$, o que significa que $\|v_u - v'_u\| > \|v_s - v'_s\|$ e portanto $\|v - v'\| = \max\{\|v_u - v'_u\|, \|v_s - v'_s\|\} = \|v_u - v'_u\|$. Assim

$$\|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'\| \geq (\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi) \|v - v'\|.$$

Ainda, $v - v' \notin C^1(E^s(x))$ então, $v - v' \neq 0$. Temos que $\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi > 1$, de fato, pela Desigualdade das Médias,

$$\tau^{-1} + \tau > 2, \forall \tau \in (0, 1),$$

o que implica em $\tau^{-1} + \tau - 1 > 1$ e portanto

$$\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi > \tau^{-1} - (1 - \tau) = \tau^{-1} + \tau - 1 > 1$$

Combinando isso com o fato 1 temos

$$\begin{aligned} \|(Tf + \phi)_u v - (Tf + \phi)_u v'\| &\geq (\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi) \|v - v'\| \\ &> (\tau + \text{Lip}_2 \phi) \|v - v'\| \\ &\geq \|(Tf + \phi)_s v - (Tf + \phi)_s v'\| \end{aligned}$$

O que prova o fato 2.

Agora é possível provar as igualdades do enunciado. Claramente o primeiro conjunto está contido no segundo. Vamos provar a inclusão do segundo conjunto no terceiro. Utilizamos os fatos 1 e 2 com o caso especial de $v' = 0$. Para $x \in \Lambda$ assumamos que exista $v \in T_x M(r)$ tal que $(Tf + \phi)^n v \in T_{f^n(x)} M(r)$ para todo $n \geq 0$ (isto é, v está contido no conjunto 2), mas existe $m \geq 0$ tal que $w = (Tf + \phi)^m v \notin C_1(E^s(f^m(x)))$. Pelo fato 2,

$$\|(Tf + \phi)w\| = \|(Tf + \phi)_u w\| \geq (\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi) \|w\|$$

e $(Tf + \phi)w \notin C_1(E^s(f^{m+1}(x)))$. Indutivamente, usando o fato 2, para $n \geq 1$

$$\|(Tf + \phi)^n w\| \geq (\tau^{-1} - \text{Lip}_2 \phi)^n \|w\|.$$

Note que $w \neq 0$ pois $w \notin C_1(E^s(f^m(x)))$. Logo $\{(Tf + \phi)^n w\}_{n=0}^\infty$ não é limitado, contradição.

Agora provamos que o terceiro conjunto está contido no quarto. Assumamos que para $n \geq 0$, $(Tf + \phi)^n v \in T_x M(r) \cap C_1(E^s(f(x)))$. Como $\|(Tf + \phi)_s v\| \geq \|(Tf + \phi)_u v\|$ e pelo fato 1

$$\|(Tf + \phi)v\| = \|(Tf + \phi)_s v\| \leq (\tau + \text{Lip}_2 \phi) \|v\|.$$

Indutivamente, para $n \geq 1$

$$\|(Tf + \phi)^n v\| \leq (\tau + \text{Lip}_2 \phi)^n \|v\|.$$

Finalmente, se $v \in T_x M(r)$ é tal que

$$\|(Tf + \phi)^n v\| \leq (\tau + \text{Lip}_2 \phi)^n \|v\| \quad \forall n \geq 0$$

e $(\tau + \text{Lip}_2 \phi) < 1$ então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (Tf + \phi)^n v = 0.$$

□

Observação 3.4.12. Aqui $T_\Lambda M(r)$ poderia ser todo $T_\Lambda M$.

Passo 4: Neste passo definiremos a variedade estável e instável local na variedade M .

Para $x \in M$ e $r > 0$ definimos a variedade local estável de x com respeito a f como

$$\begin{aligned} W_r^s(x, f) &= \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq r, \forall n \geq 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}, \\ W_r^u(x, f) &= \{y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) \leq r, \forall n \geq 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) = 0\}, \end{aligned}$$

Claramente para todo $x \in M$,

$$f(W_r^s(x)) \subset W_r^s(f(x)), \quad f(W_r^u(x)) \supset W_r^u(f(x)).$$

Teorema 3.4.13 (Caracterização de W_r^s em uma variedade). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f . Existem $r > 0, C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tal que para qualquer $x \in \Lambda$,*

$$\begin{aligned} W_r^s(x, f) &= \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq r, \forall n \geq 0\} \\ &= \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq r \text{ e } d(f^n(y), f^n(x)) \leq C\lambda^n d(y, x), \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Da mesma forma para W_r^u .

Demonstração. Iremos mostrar para W_r^s . Assumimos que a norma Riemanniana $\|\cdot\|$ de M é adaptada a Λ . É suficiente provar que existem $r > 0, C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tal que o segundo conjunto está contido no terceiro, as outras inclusões são diretas. Seja $x \in \Lambda$, para $y \in M$ perto suficiente de x , considere

$$v = \exp_x^{-1}(y).$$

Então, tomando $\phi_f = F_f - Tf$ temos

$$d(f^n(y), f^n(x)) = \|F_f^n(v)\| = \|(Tf + \phi_f)^n v\|,$$

onde as iteradas façam sentido. Então basta provar que existem $r > 0, C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\begin{aligned} & \{v \in T_x M(r) : \|(Tf + \phi_f)^n v\| \leq r, \forall n \geq 0\} \\ & \subset \{v \in T_x M(r) : \|(Tf + \phi_f)^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

É suficiente mostrar que existem $r > 0, C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tal que essa inclusão vale trocando a norma $\|\cdot\|$ pela norma ajustada $\|\cdot\|_\Lambda$ de $\|\cdot\|$ com respeito a $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Seja $0 < \tau < 1$ a constante de hiperbolicidade de Λ com respeito a $\|\cdot\|$. Assuma que $\|\cdot\|_\Lambda$ é equivalente a $\|\cdot\|$ por uma constante $K \geq 1$. Fixe

$$\tau < \lambda < 1.$$

Pelo Lema 3.4.10, dado $\varepsilon = K^{-2}(\lambda - \tau)$ existe $r > 0$ pequeno o suficiente tal que

$$\text{Lip}_{2, \|\cdot\|} \phi_f \leq K^{-2}(\lambda - \tau)$$

em $TM(Kr, \|\cdot\|)$. Logo,

$$\text{Lip}_{2, \|\cdot\|_\Lambda} \phi_f \leq \lambda - \tau$$

em $T_\Lambda M(r, \|\cdot\|_\Lambda)$.

Note que mudar a norma gera uma constante multiplicativa no tamanho dos vetores, mas para a constante de Lipschitz gera o quadrado dessa constante. Do Lema 3.4.11 e do fato de $\text{Lip}_{2, \|\cdot\|_\Lambda} \phi_f + \tau \leq \lambda$ temos que

$$\begin{aligned} W_r^s(0_x, Tf + \phi_f) &= \{v \in T_x M(r) : \|(Tf + \phi_f)^n v\|_\Lambda \leq r, \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in T_x M(r) : \|(Tf + \phi_f)^n v\|_\Lambda \leq \lambda^n \|v\|_\Lambda, \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Então como $d(f^n(y), f^n(x)) = \|(Tf + \phi_f)^n v\|$, na norma Riemanniana, usando a constante de equivalência para trocar $\|\cdot\|_\Lambda$ por $\|\cdot\|$, com $C = K^2 \geq 1$ e $r_0 = Kr > 0$ temos

$$\begin{aligned} W_{r_0}^s(x, f) &= \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq r_0, \forall n \geq 0\} \\ &= \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \leq r_0 \text{ e } d(f^n(y), f^n(x)) \leq C\lambda^n d(x, y), \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

□

Perceba que no último teorema, foi necessário passar para uma norma do tipo caixa para poder utilizar o Lema 3.4.11.

Passo 5: Nesta etapa, enunciamos e provamos um lema essencial para a demonstração do Teorema da Variedade Estável de conjuntos hiperbólicos.

Consideramos o cenário ideal $Tf + \phi : T_\Lambda M \rightarrow T_\Lambda M$, no qual $\phi : T_\Lambda M \rightarrow T_\Lambda M$ é contínua e preserva fibra sobre f , $\phi(0_x) = 0_{f(x)}$ e $\text{Lip } \phi$ é pequeno em todo $T_\Lambda M$. Definimos a variedade instável (global) nas fibras de $0_x \in T_x M$ como

$$W^u(0_x, Tf + \phi) = \{v \in T_x M : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(Tf + \phi)^{-n} v\| = 0\}.$$

Aqui a variedade instável “global” nas fibras de 0_x é definida nas fibras, a qual é diferente da variedade instável global $W^u(x)$ que será definida eventualmente na variedade M . É um objeto intermediário, o qual é utilizado para obter a variedade local instável $W_r^u(x)$ de M . Na demonstração do lema utilizamos a definição a seguir, que servirá para simplificar o estudo das funções que preservam fibra sobre f .

Definição 3.4.14. Seja $\{H_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de de espaços euclidianos com dimensão d . Denote

$$H = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} H_m,$$

em que \bigsqcup é para união discreta. Os H_m são considerados mutualmente isolados de maneira que H é uma variedade d -dimensional. Seja

$$A : H \rightarrow H$$

função tal que

$$A_m := A|_{H_m} : H_m \rightarrow H_{m+1}$$

é isomorfismo linear. Dizemos que A é uma sequência hiperbólica se $\{\|A_m\|, \|A_m^{-1}\|\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é limitado e, para cada $m \in \mathbb{Z}$, existe soma direta

$$H_m = E_m^s \oplus E_m^u$$

$$A(E_m^s) = E_{m+1}^s \text{ e } A(E_m^u) = E_{m+1}^u$$

e existem duas constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|A^n v\| \leq C \lambda^n \|v\|, \forall v \in E_m^s, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0,$$

$$\|A^{-n} v\| \leq C \lambda^n \|v\|, \forall v \in E_m^u, m \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Também é utilizado na demonstração o seguinte teorema:

Teorema 3.4.15 (Teorema da Função Inversa Lipschitz). *Seja $A : E \rightarrow F$ um isomorfismo linear e seja $\phi : E \rightarrow F$ Lipschitz. Se*

$$\text{Lip } \phi < m(A),$$

então $A + \phi : E \rightarrow F$ é Lipschitz e sua inversa também, e

$$\text{Lip}((A + \phi)^{-1}) \leq \frac{1}{m(A) - \text{Lip } \phi}.$$

Demonstração. Queremos mostrar que para qualquer $z \in F$ existe único $x \in E$ tal que $(A + \phi)(x) = z$, isto é, mostrar que $x = A^{-1}(z - \phi(x))$ tem uma única solução para x , ou ainda, mostrar que

$$T_z : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto A^{-1}(z - \phi(x))$$

tem um único ponto fixo. Para isso, devemos mostrar que T_z é contração. Note que, dados $x, y \in E$ temos

$$\begin{aligned} \|T_z(x) - T_z(y)\| &= \|A^{-1}(\phi(y) - \phi(x))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\phi(y) - \phi(x)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \text{Lip } \phi \|x - y\|. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\|A^{-1}\| \text{Lip } \phi < 1$, logo T_z é contração e possui um único ponto fixo. Claramente, $(A + \phi)^{-1}$ é a função que leva $z \in F$ ao ponto fixo de T_z . Agora, dados $z, z' \in F$ temos

$$\begin{aligned} \|(A + \phi)^{-1}(z) - (A + \phi)^{-1}(z')\| &= \|x - x'\| = \|A^{-1}(z - \phi(x)) - A^{-1}(z' - \phi(x'))\| \\ &= \|A^{-1}(z - z') - A^{-1}(\phi(x) - \phi(x'))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|z - z'\| + \|A^{-1}\| \text{Lip}(\phi) \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|x - x'\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \text{Lip}(\phi)} \|z - z'\|.$$

Multiplicando por $m(A) = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ temos que o resultado desejado. \square

Finalmente, enunciamos o lema:

Lema 3.4.16. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com respeito a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, e seja $\|\cdot\|$ uma norma C^0 de $T_\Lambda M$ que é adaptada e de tipo caixa a decomposição hiperbólica. Então existe $\delta > 0$ tal que*

1. *Se $\phi : T_\Lambda M \rightarrow T_\Lambda M$ é contínua, preserva fibra sobre f , é Lipschitz nas fibras com*

$$\text{Lip}_2 \phi < \delta \text{ e } \phi(0_x) = 0_{f(x)}, \forall x \in \Lambda,$$

então existe uma função contínua que preserva fibra sobre id , $\sigma : E^u \rightarrow E^s$, com $\sigma(0_x) = 0_x$ e $\text{Lip}_2 \sigma \leq 1$, tal que, para qualquer $x \in \Lambda$, $W^u(0_x, Tf + \phi)$ é o gráfico de σ_x .

2. *Se, além disso, ϕ for C^1 em cada fibra, a função σ_x , garantida por (1), é C^1 e a subvariedade $W^u(0_x, Tf + \phi)$ de classe C^1 é tangente em 0_x ao espaço instável $G^u(x)$ do isomorfismo de fibrado hiperbólico $\{T_x f + d_2 \phi_{0_x} : x \in \Lambda\}$. Ainda mais, se $d_2 \phi$ é contínua em $T_\Lambda M$, então $d_2 \sigma$ é contínua em E^u .*

Observação 3.4.17. É indicado em qual fibra uma função está agindo com o subscrito respectivo, por exemplo σ_x indica a restrição de σ à fibra $E^u(x)$.

Demonstração. Primeiro provamos o item (1). Seja

$$\Sigma(E^u, E^s; 0) = \{\sigma : E^u \rightarrow E^s : \sigma \text{ é } C^0, \text{ preserva fibra sobre } id, \sigma(0_x) = 0_x \text{ e } \|\sigma\|_* < \infty\},$$

em que

$$\|\sigma\|_* = \sup_{x \in \Lambda} \|\sigma_x\|_*$$

e

$$\|\sigma_x\|_* = \sup_{v \neq 0_x} \frac{\|\sigma_x(v)\|}{\|v\|}, v \in E^u(x).$$

Com essa norma, $\Sigma(E^u, E^s; 0)$ é um espaço de Banach, e

$$\Sigma(E^u, E^s; 0)[1] = \{\sigma \in \Sigma(E^u, E^s; 0) : \sigma \text{ é Lipschitz na fibra e } \text{Lip}_2 \sigma \leq 1\}$$

é um subespaço fechado de $\Sigma(E^u, E^s; 0)$. Seja $0 < \tau < 1$ a constante de hiperbolicidade de Λ com respeito a $\|\cdot\|$. Seja

$$\delta = \min \left\{ \frac{1 - \tau}{2}, m(Tf, \Lambda) \right\}$$

com $m(Tf, \Lambda) = \inf\{m(T_x f) : x \in \Lambda\}$ e $m(Tf)$ a conorma².

Temos que $m(Tf, \Lambda)$ é positivo pois Λ é compacto. Seja $\phi : T_\Lambda M \rightarrow T_\Lambda M$ função contínua, que preserva fibra sobre f e é Lipschitz na fibra com $\text{Lip}_2 \phi < \delta$ e $\phi(0_x) = 0_{f(x)}$ para todo $x \in \Lambda$. Provaremos que existe uma função $\sigma \in \Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ tal que seu gráfico

$$\text{gr}(\sigma) = \bigcup_{x \in \Lambda} \text{gr}(\sigma_x)$$

é invariante sob $Tf + \phi$, isto é, para cada $x \in \Lambda$,

$$(Tf + \phi) \text{gr}(\sigma_x) = \text{gr}(\sigma_{f(x)}).$$

Então provaremos que $\text{gr}(\sigma_x)$ é exatamente $W^u(0_x, Tf + \phi)$.

Um ponto em $\text{gr}(\sigma_x)$ é da forma $v + \sigma_x v$, para $v \in E^u(x)$. Aplicando $(Tf + \phi)$ nesse ponto obtemos

$$(Tf + \phi)(v + \sigma_x v) = (Tf + \phi)_s(v + \sigma_x v) + (Tf + \phi)_u(v + \sigma_x v).$$

Mostrar a condição de invariância $(Tf + \phi)(\text{gr}(\sigma_x)) \subset \text{gr}(\sigma_{f(x)})$ é o mesmo que mostrar que

$$(Tf + \phi)_s(v + \sigma_x v) + (Tf + \phi)_u(v + \sigma_x v) = v' + \sigma_{f(x)} v'$$

para algum $v' \in E^u(f(x))$. Ou seja,

$$\begin{cases} (Tf + \phi)_u(v + \sigma_x v) = v' \\ (Tf + \phi)_s(v + \sigma v) = \sigma_{f(x)} v'. \end{cases}$$

² Para uma transformação linear $A : E \rightarrow F$, a conorma é dada por $m(A) = \inf\{\|Av\|_F : v \in E \text{ e } \|v\|_E = 1\}$. Se A é invertível, $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Isto é,

$$\sigma_{f(x)}((Tf + \phi)_u(v + \sigma_x v)) = (Tf + \phi)_s(v + \sigma_x v).$$

Como $Tf_u(\sigma v) = 0$ e $Tf_s v = 0$, isso se reduz a

$$\sigma_{f(x)}((Tf_{uu})_x v + \phi_u(v + \sigma_x v)) = Tf_{ss}(\sigma_x v) + \phi_s(v + \sigma_x v),$$

ou seja,

$$\sigma_{f(x)}((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x)) = Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x),$$

em que $I_\alpha : E^\alpha \rightarrow E^\alpha$ é a identidade, para $\alpha = u, s$. Da norma ser adaptada, temos que

$$m((Tf_{uu})_x) \geq \tau^{-1}.$$

Logo,

$$\text{Lip}(\phi_u(I_{u,x} + \sigma_x)) \leq \text{Lip} \phi_u \text{Lip}(I_{u,x} + \sigma_x) \leq 2 \text{Lip}_2 \phi < 2\delta = 1 - \tau < 1 < \tau^{-1} \leq m((Tf_{uu})_x)$$

e, pelo Teorema 3.4.15, $(Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x)$ é invertível. Dessa forma,

$$\sigma_{f(x)} = (Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x))((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}.$$

Isso sugere uma função

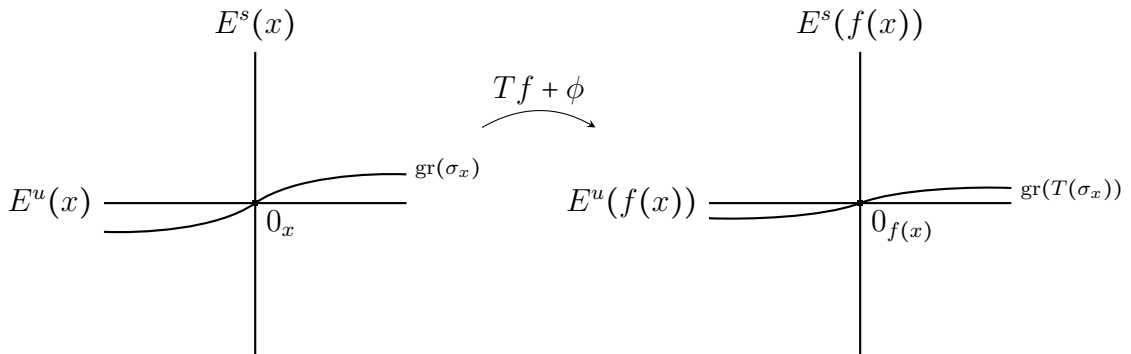
$$\begin{aligned} T = T_\phi : \Sigma(E^u, E^s; 0)[1] &\rightarrow \Sigma(E^u, E^s; 0) \\ \sigma &\mapsto T(\sigma) \end{aligned}$$

tal que

$$T(\sigma)_{f(x)} = (Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x))((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1},$$

para todo $x \in \Lambda$. Chamamos essa função de transformada do gráfico induzida por $Tf + \phi$. Achar σ_x com $(Tf + \phi)(\text{gr}(\sigma_x)) \subset \text{gr}(\sigma_{f(x)})$ se reduz a achar um ponto fixo de T .

Figura 8 – Ilustração de $Tf + \phi$ agindo sobre o gráfico de σ_x .



Fonte: Elaboração própria.

Agora vamos verificar que T mapeia $\Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ em si mesmo. Como $\sigma_x \in \Sigma(E^u(x), E^s(x); 0_x)[1]$ temos que $(T\sigma)_{f(x)}(0_{f(x)}) = 0_{f(x)}$ e $(T\sigma)_{f(x)}$ é Lipschitz com

$$\text{Lip}((T\sigma)_{f(x)}) \leq \frac{\tau + 2 \text{Lip}_2 \phi}{\tau^{-1} - 2 \text{Lip}_2 \phi} < 1.$$

De fato, note que, dados $v, w \in E^u(x)$ temos

$$\begin{aligned} & \|Tf_{ss}\sigma_x v + \phi_s(v + \sigma_x v) - Tf_{ss}\sigma_x w - \phi_s(w + \sigma_x w)\| \\ & \leq \|Tf_{ss}(\sigma_x v - \sigma_x w)\| + \|\phi_s(v + \sigma_x v) - \phi_s(w + \sigma_x w)\| \\ & \leq \tau \text{Lip} \sigma_x \|v - w\| + \text{Lip}(\phi_s(I_u + \sigma_x)) \|v - w\| \\ & \leq \tau \|v - w\| + 2 \text{Lip}_2 \phi \|v - w\| \end{aligned}$$

e pelo Teorema 3.4.15, $\text{Lip}(((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}) \leq \frac{1}{\tau^{-1} - 2 \text{Lip}_2 \phi}$. Assim

$$\begin{aligned} & \|(T\sigma)_{f(x)}(v) - (T\sigma)_{f(x)}(w)\| \\ & = \|(Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x))((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}(v) \\ & \quad - (Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x))((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}(w)\| \\ & = \|(Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x)) [((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}(v) \\ & \quad - ((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}(w)]\| \\ & \leq \text{Lip}(Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x)) \|((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}(v) \\ & \quad - ((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}(w)\| \\ & \leq \text{Lip}(Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x)) \text{Lip}(((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}) \|v - w\| \\ & \leq \frac{\tau + 2 \text{Lip}_2 \phi}{\tau^{-1} - 2 \text{Lip}_2 \phi} \|v - w\|. \end{aligned}$$

Agora verificamos que T é uma contração com respeito a norma $\|\cdot\|_*$. Para $\sigma, \sigma' \in \Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ abrevie

$$\begin{aligned} F_x &= (Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x) : E^u(x) \rightarrow E^u(f(x)), \\ F'_x &= (Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma'_x) : E^u(x) \rightarrow E^u(f(x)), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} (T\sigma)_{f(x)} F_x &= Tf_{ss}\sigma_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma_x), \\ (T\sigma')_{f(x)} F'_x &= Tf_{ss}\sigma'_x + \phi_s(I_{u,x} + \sigma'_x). \end{aligned}$$

Como $F_x : E^u(x) \rightarrow E^u(f(x))$ é um homeomorfismo que fixa a origem, quando v percorre todos os valores em $E^u(x) - \{0_x\}$,

$$\begin{aligned} \|\sigma - \sigma'\|_* &= \sup_{x \in \Lambda} \sup_{v \neq 0_x} \frac{\|(T\sigma)_x(v) - (T\sigma')_x(v)\|}{\|v\|} \\ &= \sup_{x \in \Lambda} \sup_{v \neq 0_x} \frac{\|(T\sigma)_{f(x)}(F_x v) - (T\sigma')_{f(x)}(F_x v)\|}{\|F_x v\|} \end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}
& \|(T\sigma)_{f(x)}(F_x v) - (T\sigma')_{f(x)}(F_x v)\| \\
& \leq \|(T\sigma)_{f(x)}(F_x v) - (T\sigma')_{f(x)}(F'_x v)\| \\
& \quad + \|(T\sigma')_{f(x)}(F'_x v) - (T\sigma')_{f(x)}(F_x v)\| \\
& \leq \|Tf_{ss}(\sigma_x(v) - \sigma'_x(v))\| + \|\phi_s(v + \sigma_x v) - \phi_s(v + \sigma'_x(v))\| \\
& \quad + \text{Lip}(T\sigma'_x)\|F'_x v - F_x v\| \\
& \leq \tau\|\sigma_x v - \sigma'_x v\| + \text{Lip } \phi_x\|\sigma_x v - \sigma'_x v\| + \text{Lip } \phi_x\|\sigma_x v - \sigma'_x v\| \\
& \leq (\tau + 2 \text{Lip } \phi_x)\|\sigma_x v - \sigma'_x v\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\phi_x(0_x) = 0_{f(x)}$ e $\sigma(0_x) = 0_x$

$$\begin{aligned}
\|F_x v\| &= \|(Tf_{uu})_x v + \phi_u(v + \sigma_x v) - \phi_u(0_x + \sigma_x 0)\| \\
&\geq \|(Tf_{uu})_x v\| - \|\phi_u(v + \sigma_x v) - \phi_u(0_x + \sigma_x 0_x)\| \\
&\geq \tau^{-1}\|v\| - \text{Lip } \phi_x(\|v\| + \text{Lip } \sigma_x\|v\|) \\
&\geq (\tau^{-1} - 2 \text{Lip } \phi_x)\|v\|
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|(T\sigma) - (T\sigma')\|_* &\leq \frac{\tau + 2 \text{Lip}_2 \phi}{\tau^{-1} - 2 \text{Lip}_2 \phi} \sup_{x \in \Lambda} \sup_{v \neq 0} \frac{\|\sigma_x v - \sigma'_x v\|}{\|v\|} \\
&= \frac{\tau + 2 \text{Lip}_2 \phi}{\tau^{-1} - 2 \text{Lip}_2 \phi} \sup_{v \neq 0} \|\sigma - \sigma'\|_*.
\end{aligned}$$

E portanto $T = T_\phi$ é contração com respeito a norma $\|\cdot\|_*$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, T tem um único ponto fixo $\sigma = \sigma_\phi \in \Sigma(E^u, E^s; 0)[1]$ tal que

$$(Tf + \phi) \text{gr}(\sigma) \subset \text{gr}(\sigma).$$

Note que, para qualquer $v + \sigma_{f(x)} v \in \text{gr}(\sigma_{f(x)})$, tomando $u = ((Tf_{uu})_x + \phi_u(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}v$ temos $(Tf + \phi)(u + \sigma_x u) = v + \sigma_{f(x)} v$. De fato, como $(Tf_{uu})_x + \phi_x(I_{u,x} + \sigma_x)$ é um homeomorfismo, $v = [(Tf_{uu})_x + \phi_x(I_{u,x} + \sigma_x)]u$. Além disso, de σ ser ponto fixo de T , segue que

$$(Tf_{ss}\sigma_x + \phi(I_{u,x} + \sigma_x))((Tf_{uu})_x + \phi_x(I_{u,x} + \sigma_x))^{-1}v = \sigma_{f(x)}v.$$

Assim, mostramos que

$$(Tf + \phi) \text{gr}(\sigma_x) = \text{gr}(\sigma_{f(x)}).$$

Podemos aplicar 3.4.11 em $(Tf + \phi)^{-1}$ no caso de $T_\Lambda M(r) = T_\Lambda M$. De fato, como $\text{Lip}_2 \phi < \delta \leq m(Tf, \Lambda)$, $Tf + \phi$ é invertível em cada fibra, pelo Teorema 3.4.15. Ainda mais, escrevendo $(Tf + \phi)^{-1} = Tf^{-1} + \psi$, é fácil de ver que se $\text{Lip}_2 \phi$ é pequeno, $\text{Lip}_2 \psi$ é pequeno também. Logo, diminuindo δ se necessário, assumimos que $(Tf + \phi)^{-1}$ satisfaz o Lema 3.4.11 e temos

$$W^u(0_x, Tf + \phi) = \{v \in T_x M : (Tf + \phi)^{-n}v \in T_{f^{-n}(x)} M \cap C_1(E^u(f^{-n}(x))), \forall n \geq 0\}.$$

Dessa forma, como $\sigma_x(0_x) = 0_x$ e $\text{Lip}_2 \sigma \leq 1$, o gráfico $\text{gr}(\sigma_x)$ está contido no cone $C_1(E^u(x))$, para todo $x \in \Lambda$. Como $\text{gr}(\sigma_x)$ é invariante sob $(Tf + \phi)^{-1}$, pela caracterização acima temos

$$\text{gr}(\sigma_x) \subset W^u(0_x, Tf + \phi).$$

Para provar a inclusão contrária, suponha que existe $v \in W^u(0_x, Tf + \phi) \setminus \text{gr}(\sigma_x)$. Então existe $w \in \text{gr}(\sigma_x)$ tal que $v_u = w_u$. Então $v - w \notin C_1(E^u(x))$, pois a componente instável de $v - w$ é nula. Pelo fato 2 na prova do Lema 3.4.11

$$\|(Tf + \phi)^{-n}(v) - (Tf + \phi)^{-n}(w)\| \rightarrow \infty.$$

Mas v e w pertencem a $W^u(0_x, Tf + \phi)$, logo,

$$\|(Tf + \phi)^{-n}(v) - (Tf + \phi)^{-n}(w)\| \rightarrow 0,$$

contradição. Logo $\text{gr}(\sigma_x) = W^u(0_x, Tf + \phi)$.

Agora iremos provar o item (2). Aqui será utilizada a definição 3.4.14. Assuma que ϕ restrita a cada fibra $T_x M$ de $T_\Lambda M$ é C^1 . Iremos mostrar que σ_x é C^1 e que a subvariedade $W^u(0_x, Tf + \phi)$ de classe C^1 de $T_x M$ é tangente em 0_x a $G^u(x)$, em que $G^u(x)$ é o subespaço instável em x do isomorfismo hiperbólico de fibrado $\{T_x f + d_2 \phi_{0_x} : x \in \Lambda\}$. Fixe $x \in \Lambda$. Colocamos a topologia discreta em $\mathcal{O}(x)$ e consideramos, como na definição 3.4.14,

$$T_{f^m x} M = H_m.$$

A ideia é isolar o comportamento ao longo da órbita de um ponto $x \in \Lambda$ e olhar a sequência de espaços euclidianos H_m . Podemos tomar esse ponto de vista para provar o item 2, pois iremos tomar as derivadas de $Tf + \phi$ dentro das fibras, o que seria mais confuso se considerássemos a métrica do espaço base M . Nesse contexto, como os H_m são separados um do outro, podemos escrever $\text{Lip}_2 \phi$ ou $d_2 \phi$ simplesmente como $\text{Lip} \phi$ ou $d\phi$. Abreviamos

$$g = (Tf + \phi)|_H : H \rightarrow H.$$

Logo g é só $Tf + \phi$ expressa nesse contexto discreto. Pelo Teorema 3.4.15, g é um difeomorfismo de H se $\text{Lip} \phi$ é pequeno o suficiente. Veremos que g é Anosov para $\text{Lip} \phi$ pequeno. Para cada $y \in H_m$, defina

$$E^u(y) = \{y\} \times E^u(f^m(x)) \text{ e } E^s(y) = \{y\} \times E^s(f^m(x)).$$

Aqui estamos apenas rotulando esses espaços no ponto y . Note que para $y \in H_m$, o espaço tangente é naturalmente identificado com o próprio H_m , pois é um espaço vetorial, então

$$T_y H = E^u(y) \oplus E^s(y), y \in H.$$

Esta é uma decomposição hiperbólica para $Tf|_H$ e portanto $Tf|_H$ é Anosov.

Se $\text{Lip } \phi$ é pequeno suficiente, então g também é Anosov. De fato, com respeito a decomposição $E^u(y) \oplus E^s(y)$, $y \in H$, temos

$$Tg = \begin{pmatrix} Tf_{uu} + T\phi_{uu} & T\phi_{us} \\ T\phi_{su} & Tf_{ss} + T\phi_{ss} \end{pmatrix}$$

em que $\|Tf_{uu}^{-1}\| \leq \tau$ e $\|Tf_{ss}\| \leq \tau$. Se $\text{Lip } \phi$ é arbitrariamente pequeno, $\|T\phi\|$ será pequeno. Logo Tg e Tg^{-1} vão satisfazer o Lema 3.2.1 e portanto H vai ser um conjunto hiperbólico de g (aqui a hiperbolicidade persiste a uma perturbação pequena, ϕ). Seja

$$T_y H = G^u(y) \oplus G^s(y), y \in H$$

a decomposição hiperbólica Tg . Note que

$$\dim G^u(y) = \dim E^u(y).$$

Agora provamos que σ_x é C^1 . Tome $v \in E^u(x)$. Primeiro mostremos que σ_x é diferenciável em v . Denote $z = (v, \sigma_x(v)) \in \text{gr}(\sigma_x)$. Pelo critério de diferenciabilidade 3.3, precisamos mostrar que o conjunto tangente $T_z \text{gr}(\sigma_x)$ está contido em um espaço linear de $T_z H$ de dimensão $\dim E^u(x)$. Na verdade, provamos

$$T_z \text{gr}(\sigma_x) \subset G^u(z).$$

Como $\text{Lip } \sigma \leq 1$ (aqui σ é a função que preserva fibra sobre id e como estamos no contexto discreto simplesmente escrevemos $\text{Lip}_2 \sigma$ como $\text{Lip } \sigma$), para cada $y \in \text{gr}(\sigma)$, toda reta tangente generalizada de $T_y \text{gr}(\sigma)$ está no 1-cone $C_1(E^u(y))$ com respeito a soma direta $E^s(y) \oplus E^u(y)$. Enquanto $\text{Lip } \phi$ é pequeno o suficiente, $G^u(y)$ e $G^s(y)$ estarão próximos de $E^u(y)$ e $E^s(y)$, respectivamente. Logo as retas tangentes generalizadas de $T_y \text{gr}(\sigma)$ estarão contidas no 2-cone $C_2(G^u(y))$ com respeito a soma direta $G^s(y) \oplus G^u(y)$. Como $\text{gr}(\sigma)$ é invariante sob g , Tg mapeia as retas tangentes generalizadas de $\text{gr}(\sigma)$ para as retas tangentes generalizadas de $\text{gr}(\sigma)$. Em particular, para cada reta tangente generalizada ℓ de $T_z \text{gr}(\sigma_x)$,

$$Tg^{-n}(\ell) \subset C_2(G^u(g^{-n}z)), \forall n \geq 0.$$

Pelo teorema 3.1.8, $\ell \in G^u(z)$. Pelo critério, σ_x é diferenciável em v e $\text{gr}(\sigma_x)$ é tangente em z ao espaço instável $G^u(z)$ de Tg . Em particular, na origem 0_x , $\text{gr}(\sigma)$ é tangente ao espaço instável $G^u(0_x)$ de $Tf + d_2\phi_{0_x}$. Pelo teorema 3.1.10 $G^u(z)$ varia continuamente em $z \in \text{gr}(\sigma_x)$. Logo σ_x é C^1 .

Finalmente, seja $d_2\phi$ contínua em $T_\Lambda M$. Provemos que $d_2\phi$ é contínua em E^u . Vamos deixar o cenário discreto e voltar ao fibrado tangente $T_\Lambda M$. Note que o cenário discreto é apenas uma “apresentação”, pois trabalhamos propriedades dentro das fibras do fibrado tangente, por exemplo, a soma direta $G^u(y) \oplus G^s(y)$, $y \in T_\Lambda M$ forma uma decomposição hiperbólica para $\{T_{\pi_y}f + d_2\phi_y : y \in T_\Lambda M\}$. Agora, $d_2\phi$ é contínuo em

$T_\Lambda M$, logo a ideia da prova do teorema 3.1.10 mostra que $G^u(y)$ varia continuamente em $y \in T_\Lambda M$. Escrevendo $z = (v, \sigma v)$ com $v \in E^u$, então $G^u(z)$ varia continuamente em $v \in E^u$. Em outras palavras, $d_2\sigma_v$ varia continuamente em $v \in E^u$ (pois é determinada pela inclinação dos subespaços $G^u(s)$).

□

Passo 6: Finalmente, enunciamos e provamos o Teorema da Variedade Estável para um conjunto hiperbólico.

Uma família de subvariedades mergulhadas $\{D_i\}_{i \in I}$ é dita auto-coerente se, para cada $i, j \in I$, $\text{int } D_i \cap \text{int } D_j$ é aberto em D_i e em D_j . Em particular, $\text{int } D_i$ e $\text{int } D_j$ não se cruzam.

Teorema 3.4.18 (Teorema da Variedade Estável para um conjunto hiperbólico). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^k , $k \geq 1$, e seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f com decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Então existe $r > 0$ tal que para cada $x \in \Lambda$:*

1. $W_r^s(x)$ é uma subvariedade mergulhada C^k de M de dimensão $\dim E^s(x)$, tangente em x a $E^s(x)$ e $W_r^s(x)$ varia continuamente em $x \in \Lambda$. Precisamente, existem vizinhanças V de 0_Λ em E^s e uma função contínua, $\sigma : V \rightarrow E^u$, que preserva fibra sobre id , tal que as derivadas na fibra até a ordem k são contínuas em V , $\sigma_x(0_x) = 0_x$ e $d_2\sigma_{0_x} = 0$, de maneira que $W_r^s(x) = \exp_x \text{gr}(\sigma|_{V \cap E^s(x)})$.
2. A família $\{W_r^s(x)\}_{x \in \Lambda}$ é auto-coerente.
3. A variedade global $W^s(x)$ é uma subvariedade imersa C^k de M , com dimensão $\dim E^s(x)$.

Observação 3.4.19. Dizemos que $\sigma : V \rightarrow E^u$ do item (1) é a função geradora da família de variedades estáveis $\{W_r^s(x)\}_{x \in \Lambda}$. Para cada $x \in \Lambda$, pelo gráfico e a função exponencial, σ mergulha $V \cap E^s(x)$, vizinhança de 0_x em $E^s(x)$, em $W_r^s(x)$.

Demonstração. Vamos começar com a demonstração do item (1). Primeiro mostramos que existe $r > 0$ tal que para cada $x \in \Lambda$, $W_r^s(x)$ é uma subvariedade C^k de M , tangente em x a $E^s(x)$. Note que

$$W_r^s(x, f) = \exp_x(W_r^s(0_x, F_f)).$$

De fato, $v \in W_r^s(0_x, F_f)$ se, e somente se, $y = \exp_x(v) \in W_r^s(x, f)$, pois temos que $\|F_f^n(v)\| = \|\exp_{f^n(x)}^{-1} f^n(y)\| = d(f^n(x), f^n(y))$. Assim, é suficiente provar que a variedade estável nas fibras $W_r^s(0_x, F_f)$ é uma subvariedade C^k de $T_x M$, tangente em 0_x a $E^s(x)$.

Primeiro provamos o caso $k = 1$. Seja f função C^1 . Iremos trabalhar com uma norma $|\cdot|$ de $T_\Lambda M$ que é adaptada e de tipo caixa a $E^s \oplus E^u$. A prova será da seguinte

forma: estendemos F_f para todo $T_\Lambda M$ e aplicamos o item (2) do Teorema 3.4.16 para obter as variedades globais (na fibra), então restringimos para obter as variedades locais e voltar para a norma Riemanniana.

Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função bump (função colisão) tal que $\alpha(t) = 1$, se $|t| \leq 1/3$ e $\alpha(t) = 0$, se $|t| \geq 2/3$. Denote

$$\phi_f = F_f - Tf : TM(r_\rho) \rightarrow TM.$$

Então ϕ_f é contínua, C^1 restrita as fibras,

$$\phi_f(0_x) = 0_{f(x)} \text{ e } d_2(\phi_f)_{0_x} = 0, \forall x \in M.$$

Defina $\overline{\phi_f} : TM \rightarrow TM$ por

$$\overline{\phi_f}(v) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{|v|}{3r}\right) \phi_f(v), & \text{se } |v| \leq 2r \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

em que $0 < r < r_\rho/3$. Então $\overline{\phi_f}$ é contínua, C^1 restrita as fibras e $\overline{\phi_f} = \phi_f$ em $TM(r)$. De fato, note que se $v \in TM(r)$, $|v| \leq r$ e

$$\frac{|v|}{3r} \leq \frac{1}{3},$$

o que implica que $\overline{\phi_f}(v) = \phi_f(v)$.

Aqui utilizamos a função bump para estender ϕ_f para todo o fibrado TM . É possível mostrar que $\text{Lip}_2 \overline{\phi_f} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$. Logo, podemos tomar r pequeno o suficiente tal que $\text{Lip}_2 \overline{\phi_f}$, com respeito a $|\cdot|$, vai satisfazer os lemas 3.4.11 e 3.4.16, em toda variedade TM . Dessa forma, existe uma função que preserva fibra

$$\sigma : E^s \rightarrow E^u$$

sobre id , C^1 quando restrita as fibras, com $\sigma(0_x) = 0_x$ e $\text{Lip}_2 \sigma \leq 1$ tal que, para $x \in \Lambda$,

$$W^s(0_x, Tf + \overline{\phi_f}) = \text{gr}(\sigma|_{E^s(x)}).$$

Ainda, a subvariedade $W^s(0_x, Tf + \overline{\phi_f}) \subset T_x M$ é tangente em 0_x ao subespaço estável do isomorfismo linear $Tf + d_2 \overline{\phi_f}_{0_x}$. Como

$$d_2(\phi_f)_{0_x} = 0,$$

esse subespaço estável é $E^s(x)$. Isso significa que

$$d_2 \sigma_{0_x} = 0.$$

Como a norma $|\cdot|$ é de tipo caixa, para qualquer $x \in \Lambda$,

$$T_x M(r) = E_x^s(r) \times E_x^u(r),$$

em que $E_x^\alpha(r) = \{v \in E^\alpha(x) : |v| \leq r\}$, $\alpha = s, u$. Denote

$$\begin{aligned} i : E^s &\rightarrow T_\Lambda M \\ v &\mapsto i(v) = (v, \sigma(v)) \end{aligned}$$

Então para cada $x \in \Lambda$, i é um mergulho C^1 que mapeia $E^s(x)$ sobre a subvariedade $\text{gr}(\sigma|_{E^s(x)})$ de $T_x M$, tangente em 0_x a $E^s(x)$. Como $\text{Lip } \sigma_x \leq 1$, temos, para $v \in E_x^s(r)$, isto é, $|v| \leq r$,

$$|\sigma_x(v)| \leq \text{Lip } \sigma_x |v| \leq |v| \leq r,$$

ou seja, $\sigma_x(v) \in E_x^u(r)$. Portanto, temos que

$$i(E_x^s(r)) = W^s(0_x, Tf + \overline{\phi_f}) \cap T_x M(r).$$

Provamos agora que $W_r^s(0_x, F_f) = W^s(0_x, Tf + \overline{\phi_f}) \cap T_x M(r)$. Como $\overline{\phi_f} = \phi_f$ em $T_\Lambda M(r)$ a inclusão $W_r^s(0_x, F_f) \subset i(E_x^s(r))$ é direta. Agora seja $v \in W^s(0_x, Tf + \overline{\phi_f}) \cap T_x M(r)$. Pelo Lema 3.4.11,

$$W_r^s(0_x, F_f) = \{v \in T_x M(r) : |(Tf + \phi_f)^n v| \leq r, \forall n \geq 0\},$$

portanto é suficiente mostrar que $(Tf + \overline{\phi_f})^n v \in T_{f^n(x)} M(r)$, para todo $n \geq 1$ (aqui já temos que $|v| \leq r$). Porém, pelo mesmo lema (no caso de todo $T_\Lambda M$) temos

$$W^s(0_x, Tf + \overline{\phi_f}) = \{v \in T_x M : |(Tf + \overline{\phi_f})^n v| \leq (\tau + \text{Lip}_2 \overline{\phi_f})^n |v|, \forall n \geq 0\}.$$

Logo, $W_r^s(0_x, F_f) = i(E_x^s(r))$ é uma subvariedade C^1 de $T_x M$.

Agora voltamos para a norma Riemanniana $\|\cdot\|$ em M . Tome $0 < a < r$ tal que para cada $x \in \Lambda$,

$$W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|) \subset W_r^s(0_x, F_f; |\cdot|).$$

Então $W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|)$ é uma subvariedade C^1 de $T_x M$. Seja

$$V_x = i^{-1}(W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|)).$$

Dessa maneira, V_x é uma vizinhança de 0_x em $E^s(x)$ que é mapeada sobre $W_a^s(0_x, F_f; \|\cdot\|)$ pelo gráfico de σ_x . Seja

$$V = \bigcup_{x \in \Lambda} V_x$$

Então V é uma vizinhança de 0_Λ em E^s satisfazendo os requerimentos do teorema. Isso prova o caso $k = 1$.

Seguimos a prova para o caso $k \geq 2$. Como os planos tangentes foram determinados no caso $k = 1$, provamos a classe de diferenciabilidade de $W_r^s(0_x, F_f)$ apenas. Suponha f função C^k . Fixe $x \in \Lambda$. Provaremos que $W_r^s(0_x, F_f)$ é uma subvariedade C^k de $T_x M$. Como tomamos as derivadas dentro das fibras $T_{f^m(x)} M$, para clareza, vamos voltar ao contexto discreto de uma sequência hiperbólica, tomando

$$H_m = T_{f^m(x)} M, \quad H = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} H_m, \quad U_m = T_{f^m(x)} M(r_\rho), \quad U = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} U_m, \quad 0_m = 0_{f^m(x)}.$$

Consideramos funções $g : U \rightarrow H$, com $g|_{U_m} : U_m \rightarrow H_{m+1}$ (que preservam fibra sobre a função shift $m \mapsto m + 1$). Dizemos que uma função C^1 , $g : U \rightarrow H$, é tangente na origem a uma sequência hiperbólica se

$$g(0_m) = 0_{m+1}$$

e

$$dg_{0_m} : H_m \rightarrow H_{m+1}$$

é sequência hiperbólica. Note que a versão discreta de F_f é uma função desse tipo. De fato, podemos pensar $F_f : U \rightarrow H$, função que preserva fibra sobre o shift $m \mapsto m + 1$, com $F_f : U_m \rightarrow H_{m+1}$. Já vimos que $F_f(0_m) = 0_{m+1}$ e $d(F_f)_{0_m} = T_{f^m(x)} f$. Logo, $\{d(F_f)_{0_m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência hiperbólica. Portanto, para fins dessa demonstração, é suficiente provar indutivamente que se $g : U \rightarrow H$ é C^k e é tangente na origem a uma sequência hiperbólica, então existe $r > 0$ tal que $W_r^s(0_0, g)$ é uma subvariedade C^k de H_0 (note que $0_0 = 0_x$). O caso $k = 1$ já foi provado (sem usar o contexto discreto). Assuma que o caso $k - 1$ está provado, vamos mostrar que vale para k .

Seja g função C^k . Defina uma função G tal que, para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$G : U_m \times H_m \rightarrow H_{m+1} \times H_{m+1} \\ (y, v) \mapsto G(y, v) = (g(y), dg_y(v)).$$

Aqui o espaço produto está munido da métrica do máximo. Então G é C^{k-1} . Claramente,

$$G^n(y, v) = (g^n(y), dg_y^n(v)).$$

Também,

$$G(0_m, 0_m) = (0_{m+1}, 0_{m+1}),$$

e

$$dG_{(0_m, 0_m)} = \begin{pmatrix} dg_{0_m} & 0 \\ 0 & dg_{0_m} \end{pmatrix}.$$

Logo $\{dG_{(0_m, 0_m)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência hiperbólica. De fato, note que se $H_m = E_m^s \oplus E_m^u$ é a decomposição hiperbólica de dg_{0_m} , então

$$H_m \times H_m = (E_m^s \oplus E_m^u) \times (E_m^s \oplus E_m^u) = (E_m^s \times E_m^s) \oplus (E_m^u \times E_m^u).$$

Portanto, se $(v, w) \in E_m^s \times E_m^s$, segue que

$$dg_{(0_m, 0_m)}(v, w) = (dg_{0_m}(v), dg_{0_m}(w)) \in E_m^s \times E_m^s$$

e da mesma forma para $E_m^u \times E_m^u$. Além disso, de $|dg_{0_m}^n|_{E_m^s} \leq C\lambda^n$ e $|dg_{0_m}^{-n}|_{E_m^u} \leq C\lambda^n, \forall n \geq 0$, em que $C > 1$ e $0 < \lambda < 1$, temos que para $(v, w) \in E_m^s \times E_m^s$

$$\begin{aligned} |dG_{(0_m, 0_m)}^n(v, w)| &= |(dg_{0_m}^n(v), dg_{0_m}^n(w))| = \max\{|dg_{0_m}^n(v)|, |dg_{0_m}^n(w)|\} \\ &\leq C\lambda^n \max\{|v|, |w|\} \\ &= C\lambda^n |(v, w)|. \end{aligned}$$

De forma análoga, se $(v, w) \in E_m^u \times E_m^u$, então $|dG_{(0_m, 0_m)}^n(v, w)| \leq C\lambda^n |(v, w)|$. Assim, $\{dG_{(0_m, 0_m)}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência hiperbólica.

Pela hipótese de indução, existe $r > 0$ tal que $W_r^s((0_0, 0_0), G)$ é uma subvariedade C^{k-1} de $U_0 \times H_0$. Por outro lado, pelo Teorema 3.4.13, podemos assumir $r > 0$ foi escolhido de modo que

$$W_r^s((0_0, 0_0), G) = \{(y, v) \in U_0 \times H_0 : |g^n y| \leq r, |dg_y^n(v)| \leq r, \forall n \geq 0\}$$

em que $dg_y^n(v)$ é só $Tg^n(v)$. Já mostramos que a função $g = Tf + \phi_f$ concorda com um difeomorfismo de Anosov $\bar{g} = Tf + \overline{\phi_f}$ em H em uma vizinhança do conjunto das origens 0_m . Seja

$$T_y H = G^s(y) \oplus G^u(y), y \in H,$$

a decomposição hiperbólica de \bar{g} . Se $r > 0$ é suficientemente pequeno, então $v \in T_y M$ satisfaz

$$|Tg^n(v)| \leq r, \forall n \geq 0$$

se, e somente se,

$$v \in G_y^s(r).$$

Assim, o conjunto acima pode ser rescrito como

$$W_r^s((0_0, 0_0), G) = \{(y, v) \in U_0 \times H_0 : y \in W_r^s(0_0, g), v \in G_y^s(r)\}.$$

Como provado anteriormente,

$$G^s(y) = T_y(W^s(0_0, g)).$$

Logo $W_r^s((0_0, 0_0), G)$ é simplesmente a r -vizinhança do fibrado tangente de $W_r^s(0_0, g)$. Como o grau de diferenciabilidade de uma variedade e seu fibrado tangente diferem por um e $W_r^s((0_0, 0_0), G)$ é C^{k-1} , então $W_r^s(0_0, g)$ é C^k . Provamos que se f é C^k , $W_r^s(0_x, F_f)$ é subvariedade C^k de $T_x M$.

Agora temos que provar que as derivadas na fibra de σ até ordem k são contínuas em $E^s(r)$. Como o problema restrito as fibras já foi resolvido, basta mostrar que a derivada na fibra é contínua com respeito aos pontos base $x \in \Lambda$.

Definimos uma função Σ . Sejam g e G como acima. Por simplicidade, denotamos por σ a sua versão discreta, isto é, $\sigma : E_m^s(r) \rightarrow E_m^s(r)$ é a função que $\text{gr}(\sigma) = W_r^s(0_m, g)$. Defina

$$\begin{aligned} \Sigma_m : E_m^s(r) \times E_m^s(r) &\rightarrow E_m^u \times E_m^u \\ (a, b) &\mapsto \Sigma(a, b) = (\sigma(a), d\sigma_a(b)). \end{aligned}$$

Afirmção: Σ é a função geradora de G , isto é, para cada $m \in \mathbb{Z}$, temos $\text{gr}(\Sigma_m) = W_r^s((0_m, 0_m), G)$,

De fato, por definição $(y, v) \in \text{gr}(\Sigma_m)$ se, e somente se,

$$y_u = \sigma(y_s), y_s \in E_m^s(r) \text{ e } v_u = d\sigma_{y_s} v_s, v_s \in E_m^s(r).$$

Ou seja,

$$y \in \text{gr}(\sigma) = W_r^s(0_m, g) \text{ e } v \in \text{gr}(d\sigma_{y_s}|_{E_m^s(r)}) = G^s(y)(r).$$

Isso significa que

$$(y, v) \in W_r^s((0_m, 0_m), G)$$

provando a afirmação.

Como uma função que preserva fibra no fibrado tem uma versão discreta, a função G definida no contexto discreto induz uma função

$$G_\Lambda : T_x M(\rho) \times T_x M \rightarrow T_{f(x)} M \times T_{f(x)} M, \forall x \in \Lambda,$$

tal que G é sua versão discreta. Da mesma forma, Σ induz uma função Σ_Λ .

Agora voltamos para o fibrado $T_\Lambda M$. Seja $f \in C^k$. Vamos provar que as derivadas na fibra de σ até ordem k são contínuas em $x \in \Lambda$. Como F_f tem derivada na fibra até ordem k contínuas em $x \in \Lambda$ e como a sua versão discreta (a função g) é tangente nas origens a uma família uniforme de sequências hiperbólicas, é suficiente mostrar (a afirmação mais geral) que se uma função que preserva fibra F , sobre $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$, definida perto das origens, tem derivada na fibra até ordem k contínuas em $x \in \Lambda$ e se a sua versão discreta é tangente nas origens a uma família de sequências hiperbólicas, então existe $r > 0$ tal que a função geradora σ de F de tamanho r tem derivadas na fibra até ordem k contínuas em $x \in \Lambda$.

O caso $k = 1$ é garantido pelo item (2) do Teorema 3.4.16. Assuma que vale para $k - 1$ e provaremos que vale para k . Assuma que F tem derivadas na fibra até ordem k contínuas em $x \in \Lambda$ e que sua versão discreta g é tangente nas origens a uma família

uniforme de seqüências hiperbólicas. Seja G o mapa induzido por g acima. Como G é definido usando g e dg , que são apenas F e d_2F no fibrado, as derivadas no fibrado de G_Λ até ordem $k-1$ são derivadas do fibrado de F até ordem k , e portanto contínuas em $x \in \Lambda$. Como provado acima, G é tangente nas origens a uma família de seqüências hiperbólicas e, pela afirmação, Σ_Λ é função geradora de G_Λ . Logo, por indução, existe $r > 0$ tal que a função geradora Σ_Λ de tamanho r tem derivada nas fibras até ordem $k-1$ contínuas em $x \in \Lambda$. Pela definição de Σ_Λ , σ tem derivadas nas fibras até ordem k contínuas em $x \in \Lambda$. Isso prova (1).

Agora mostramos o item (3) do teorema. Temos que, para $r > 0$

$$W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_r^s(f^n(x)) \text{ e } W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_r^u(f^{-n}(x)).$$

Com efeito, vamos mostrar para a variedade estável. Seja $y \in W^s(x)$, então $d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(y), f^n(x)) \leq r, \forall n \geq n_0.$$

Agora mostremos que $f^{n_0}(y) \in W_r^s(f^{n_0}(x))$. Note que

$$d(f^n(f^{n_0}(y)), f^n(f^{n_0}(x))) \leq r, n \geq 0.$$

Assim $y \in f^{-n_0} W_r^s(f^{n_0})$ para $n_0 \in \mathbb{N}$, o que implica que $y \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_r^s(f^n(x))$. Para a outra inclusão, dado $y \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_r^s(f^n(x))$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_0}(y) \in W_r^s(f^{n_0}(x)).$$

Isto é,

$$d(f^{n+n_0}(y), f^{n+n_0}(x)) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

e portanto $y \in W^s(x)$.

Por (1), $W_r^s(x)$ é uma subvariedade mergulhada C^k de M . Logo $f^{-n} W_r^s(x)$ é uma subvariedade mergulhada para todo $n \geq 0$. Como uma união monótona de subvariedades mergulhadas é uma subvariedade imersa, segue que $W^s(x)$ é uma subvariedade imersa de M . Da mesma forma para $W^u(x)$.

Finalmente, provamos (2). Temos que $W_r^s(0_x) \subset T_x M$ e $W_r^s(0_y) \subset T_y M$ são, por definição, disjuntas se $x \neq y$. Mas $W_r^s(x) = \exp_x(W_r^s(0_x))$ e $W_r^s(y) = \exp_y(W_r^s(0_y))$ em M podem se intersectar se $d(x, y)$ é pequena. Suponha que $W_r^s(x) \cap W_r^s(y) \neq \emptyset$ com $x, y \in \Lambda$. Então $W_r^s(x)$ e $W_r^s(y)$ estão contidas na variedade estável global $W^s(x)$. Como as subvariedades tem a mesma dimensão, a coerência da família $\{W_r^s(x)\}$, $x \in \Lambda$, segue imediatamente.

□

Observação 3.4.20. Aqui a variedade estável global é definida como $W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$. Os teoremas 3.4.13 e 3.4.18 são normalmente combinados e referidos como o Teorema da Variedade Estável.

Teorema 3.4.21. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Existem $r > 0$ e $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in \Lambda$, se $d(x, y) \leq \delta$ então $W_r^s(x) \cap W_r^u(y) \neq \emptyset$ transversalmente.*

Demonstração. Seja $\Lambda_i = \{x \in \Lambda : \dim E^s(x) = i\}$. Então $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{\dim M}$ são conjuntos compactos invariantes disjuntos finitos. Note que Λ_0 e $\Lambda_{\dim M}$ são conjuntos tais que a direção estável e instável tem dimensão zero e $\dim M$, respectivamente. É possível mostrar que, nesse caso, esses conjuntos consistem de finitas órbitas periódicas (a demonstração pode ser encontrada em Wen (2016, p. 77)). Logo Λ_0 e $\Lambda_{\dim M}$ consistem de finitos pontos. Assim, para o que queremos mostrar podemos assumir que $1 \leq i \leq \dim M - 1$. Pelo Teorema 3.4.18, existe $r > 0$ tal que para cada $x \in \Lambda$, $W_r^s(x)$ e $W_r^u(x)$ são subvariedades C^1 que variam continuamente com $x \in \Lambda$ na topologia C^1 . Como $W_r^s(x)$ e $W_r^u(x)$ se intersectam transversalmente em x , existe $\delta(x) > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ satisfaz $d(x, y) < \delta(x)$, então $W_r^s(x) \cap W_r^u(y) \neq \emptyset$ transversalmente. Como Λ é compacto, $\delta(x)$ pode ser escolhido independente de $x \in \Lambda$. \square

Existe uma boa explicação geométrica para a expansividade de um conjunto hiperbólico usando variedades estáveis locais. Seja Λ um conjunto hiperbólico para f . Como $W_r^s(x)$ e $W_r^u(x)$ intersectam transversalmente em x , se $r > 0$ é pequeno o suficiente, então $W_r^s(x) \cap W_r^u(x) = \{x\}$, para qualquer $x \in \Lambda$. Se $d(f^n(y), f^n(x)) \leq r$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $y \in W_r^s(x) \cap W_r^u(x)$ pelo Teorema 3.4.13. Logo $y = x$, e o único ponto que permanece na r -vizinhança de todas as iteradas de x é o próprio x , provando que f é r -expansiva em Λ .

O melhor cenário para uma família de variedades estáveis $\{W^s(x, f)\}$ é quando f é Anosov (isto é, o conjunto hiperbólico é toda a variedade M). Nesse caso, o Teorema 3.4.18 se aplica a todos os pontos e portanto gera a variedade local $W_r^s(x)$, para todo $x \in M$. A auto-coerência de $\{W_r^s(x)\}$ então garante que a família de variedades estáveis locais $W^s(x)$ formam uma folheação contínua \mathcal{W}^s em toda a variedade M com folhas C^k . De maneira análoga, a família de variedades instáveis locais $\{W_r^u(x)\}$ formam uma folheação contínua \mathcal{W}^u em M com folhas C^k . Essas folheações são chamadas de folheações estável e instável de f , respectivamente.

3.5 ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Já vimos em 3.2 que a hiperbolicidade persiste sob pequenas perturbações. Isto é, dado um conjunto hiperbólico de um difeomorfismo f podemos achar, para uma perturbação C^1 de f , um conjunto hiperbólico perto do conjunto hiperbólico original. É

possível mostrar resultados mais fortes, como a estabilidade estrutural C^1 de difeomorfismos de Anosov e a estabilidade estrutural C^1 de conjuntos hiperbólicos isolados.

Ser estruturalmente estável significa que pequenas perturbações do sistema ainda mantêm a dinâmica, ou seja, a perturbação é conjugada topologicamente ao sistema original. Veremos algumas versões de estabilidade estrutural que neste capítulo. Inicialmente, definiremos noções necessárias para enunciar o teorema de estabilidade estrutural e comentamos exemplos relacionados.

Primeiramente veremos a noção de conjunto isolado, a qual será utilizada no enunciado do teorema sobre estabilidade estrutural de conjuntos hiperbólicos.

Definição 3.5.1. Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Para qualquer conjunto $U \subset X$, o conjunto invariante maximal de f em U é definido como

$$M(U, f) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

$M(U, f)$ é o maior conjunto de pontos cujo as órbitas nunca saem de U .

Definição 3.5.2. Um conjunto compacto invariante Λ é dito isolado, ou localmente maximal, se existe vizinhança U de Λ em X tal que $M(U, f) = \Lambda$. Nesse caso U é dito vizinhança isolada de Λ .

Note que, caso Λ seja um conjunto isolado de f com vizinhança isolante U , então

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(K)$$

para qualquer conjunto compacto K com $\Lambda \subset \text{int}(K) \subset K \subset U$.

Temos que todo ponto fixo hiperbólico de $f : E \rightarrow E$, em que E é um espaço vetorial finito, é um conjunto isolado invariante. Para provar esse fato, primeiro mostramos o seguinte teorema:

Teorema 3.5.3. *Sejam $p \in U$, $U \subset E$ aberto e p ponto fixo hipoerbólico de $f : U \rightarrow E$. Então existe $r > 0$ tal que se*

$$\|f^n w - p\| < r, \forall n \in \mathbb{Z},$$

para alguma $w \in U$, então $w = p$.

Demonstração. Tome $r > 0$, $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tal que o Teorema 3.4.13 vale para f e f^{-1} . Seja $w \in U$ tal que $\|f^n w - p\| \leq r, \forall n \in \mathbb{Z}$. Novamente, por 3.4.13

$$\|w - p\| = \|f^{-n}(f^n(w)) - p\| \leq C\lambda^n \|f^n(w) - p\| \leq C^2\lambda^{2n} \|w - p\|, \forall n \geq 0.$$

Tomando n grande suficiente, segue que $w = p$. □

Agora tome $U = B(p, r)$. Claramente $p \in M(U, f)$. Seja $w \in W(U, f)$, então $f^n(w) \in U, \forall n \in \mathbb{Z}$. Isto é, $\|f^n(w) - p\| < r$. Dessa forma, pelo teorema acima, $w = p$ e $M(U, f) = \{p\}$. Portanto, p é um conjunto isolado invariante.

Por construção, a Ferradura de Smale (definido a seguir em 3.5.5) é um conjunto isolado invariante com o quadrado Q uma vizinhança isolante.

Um exemplo importante de conjuntos invariantes não-isolados é (o fecho) a órbita de um ponto homoclínico transverso.

Definição 3.5.4. Seja $p \in M$ um ponto fixo de f . Dizemos que $x \in M$ é ponto homoclínico de p se

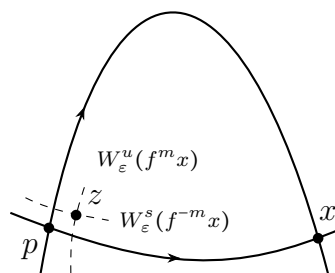
$$x \in W^s(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}.$$

Um ponto homoclínico é dito transverso se

$$T_x W^s(p) \oplus T_x W^u(p) = T_x M.$$

Seja $\Lambda = \mathcal{O}(x) \cup \{p\}$, em que p é um ponto hiperbólico e x é um ponto homoclínico transverso de p . Seja $\varepsilon > 0$. Da hiperbolicidade de Λ existe m suficientemente grande tal que $d(f^m(x), p) < \varepsilon$ e $d(f^{-m}(x), p) < \varepsilon$, de modo que $W_\varepsilon^s(f^{-m}x)$ e $W_\varepsilon^u(f^m(x))$ se intersectam em um ponto z . Então a órbita de z está na ε -vizinhança de Λ , mas não em Λ , de maneira que Λ não é um conjunto isolado.

Figura 9 – Conjunto invariante não isolado.



Fonte: Elaboração própria.

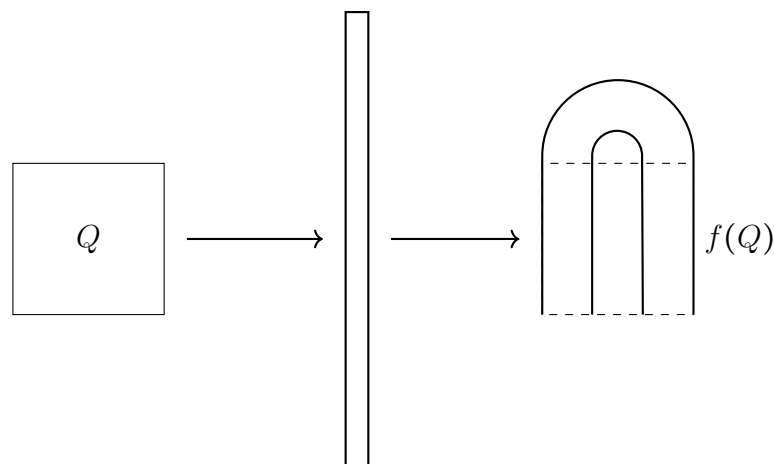
Os pontos homoclínicos, descobertos por H. Poincaré, são uma noção de muita significância na teoria dos sistemas dinâmicos. Ele percebeu que um ponto homoclínico complica a dinâmica drasticamente. Como a variedade estável e a variedade instável de um ponto são invariantes, iteradas de pontos homoclínicos transversos são pontos homoclínicos transversos, e a variedade instável $W^u(p)$ é forçada a dar um volta em si mesma, oscilando mais rápido ao fazer isso. O mesmo acontece com $W^s(p)$ com respeito

as iteradas negativas. Poincaré comparou a dificuldade de tentar entender a órbita de um ponto homoclínico transverso com a natureza do Problema dos Três Corpos.

Veremos agora, antes de continuar a discussão sobre estabilidade estrutural, um exemplo clássico na teoria de Sistemas Dinâmicos, que envolve a noção de pontos homoclínicos transversos. Smale percebeu que a melhor maneira de entender um ponto fixo transverso é mergulhando-o no modelo da ferradura, que será apresentado a seguir:

Exemplo 3.5.5 (Ferradura de Smale). Seja $Q = [0, 1]^2$. Vamos definir um difeomorfismo f de maneira que Q seja contraído horizontalmente, expandido verticalmente e entortado em uma ferradura, como na imagem.

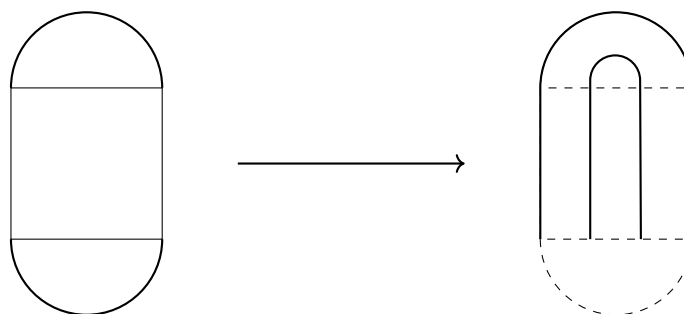
Figura 10 – Ilustração da ferradura de Smale.



Fonte: Elaboração própria.

Como $f(Q)$ não está contida em Q , alguns pontos de Q não tem segundas iteradas. Então, estendemos isso para um difeomorfismo global (ainda chamado f) $f : S^2 \rightarrow S^2$. Para mais detalhes, consultar (ROBINSON, 1998).

Figura 11 – Ilustração da ferradura de Smale global.



Fonte: Elaboração própria.

Focamos no quadrado Q . Considere as tiras verticais

$$H_0 = [0, 1] \times [0, a] \text{ e } H_1 = [0, 1] \times [1 - a, 1]$$

e as tiras horizontais

$$V_0 = [0, a] \times [0, 1] \text{ e } V_1 = [1 - a, 1] \times [0, 1],$$

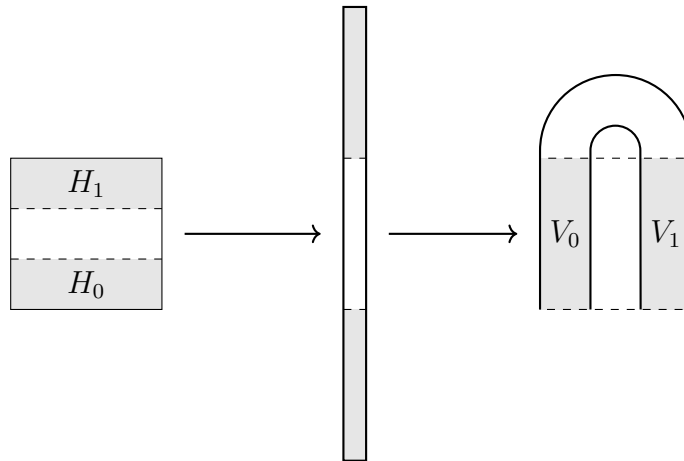
para $a \in (0, 1/2)$. Assumimos que

$$f(H_0) = V_0 \text{ e } f(H_1) = V_1$$

o que implica

$$Q \cap f(Q) = V_0 \cap V_1. \tag{3.4}$$

Figura 12 – Ilustração dos conjuntos H_0 e H_1 e V_0 e V_1 .



Fonte: Elaboração própria.

Também assumimos que as restrições $f|_{H_0}, f|_{H_1}$ são afim, com

$$f(x, y) = \begin{cases} (ax, by), & \text{se } (x, y) \in H_0 \\ (-ax + 1, -by + b), & \text{se } (x, y) \in H_1 \end{cases}$$

em que $b = 1/a$. A construção da ferradura de Smale só depende da restrição $f|_{H_0 \cup H_1}$. Agora consideremos f^{-1} . Temos

$$f^{-1}(V_0) = H_0 \text{ e } f^{-1}(V_1) = H_1.$$

Portanto, aplicando f^{-1} em 3.4, segue que

$$f^{-1}(Q) \cap Q = f^{-1}(V_0) \cup f^{-1}(V_1) = H_0 \cup H_1. \tag{3.5}$$

Combinando 3.4 e 3.5 concluímos que

$$\bigcap_{k=-1}^1 f^k(Q) = (H_0 \cup H_1) \cap (V_0 \cup V_1)$$

é a união de quatro quadrados de lado a .

Iterando esse procedimento, considerando as imagens $f^n(Q)$ e as pre-imagens $f^{-n}(Q)$, chegamos que

$$\Lambda_n = \bigcap_{k=-n}^n f^k(Q)$$

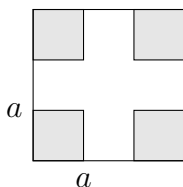
é a união de 4^n quadrados de lado a^n . Como Λ_n é uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios, o conjunto compacto

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(Q) \tag{3.6}$$

é não vazio. Este conjunto é dito Ferradura de Smale, referente a f . Claramente o conjunto Λ não tem ponto interior, pois o diâmetro dos 4^n quadrados em Λ_n tende a zero quando $n \rightarrow +\infty$. É possível também mostrar que Λ não possui pontos isolados, ou seja, é um conjunto de Cantor.

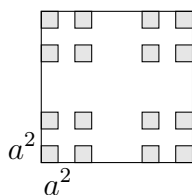
Nas figuras a seguir ilustramos a construção acima no caso particular que $a = 1/3$.

Figura 13 – Interseção $\bigcap_{k=-1}^1 f^k(Q)$.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 14 – Interseção $\bigcap_{k=-2}^2 f^k(Q)$.



Fonte: Elaboração própria.

Mostremos que o conjunto Λ é hiperbólico para o difeomorfismo f .

Proposição 3.5.6. Λ é um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo f

Demonstração. Segue de 3.6 que Λ é invariante por f . Ainda mais, temos

$$Tf = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ para } x \in H_0$$

e

$$Tf = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ para } x \in H_1.$$

Para cada $x \in \Lambda$ considere a decomposição

$$\mathbb{R}^2 = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

em que $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são, respectivamente, o eixo horizontal e vertical. Como as matrizes são diagonais segue que elas preservam as direções horizontal e vertical, logo

$$Tf(E^s(x)) \subset E^s(f(x))$$

e da invertibilidade, segue a inclusão inversa. Ainda, temos

$$\|Tfv\| = \begin{cases} a\|v\|, & \text{se } v \in E^s(x) \\ b\|v\|, & \text{se } v \in E^u(x). \end{cases}$$

Logo, podemos tomar $\lambda = a$ e $c = 1$ na definição de conjunto hiperbólico. \square

Necessariamente, temos três pontos fixos, p, q, s . O ponto q atrai todos os pontos fora de $H_0 \cup H_1$, que convergem para q sob iterações de f , no futuro. Os pontos p e s são pontos de sela. Se x está em uma reta horizontal passando por p , então f^n o leva para p , quando $n \rightarrow \infty$. Se x está em uma reta vertical passando por p , então as iteradas inversas de f o levam para p . Similarmente em s .

Um ponto essencial da Ferradura, é que sua dinâmica no quadrado pode ser descrita por meio da aplicação shift de dois símbolos no espaço das sequências bi-infinitas. Isto é, considere $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ o espaço de todas as sequências $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, em qual $a_n = 0$ ou 1. Temos que Σ é homeomorfo ao conjunto de Cantor. A função shift nesse espaço é dada por $\sigma(\{a_n\}) = \{b_n\}$, em que $b_n = \{a_{n+1}\}$, $\forall n$. Essa função é um homeomorfismo. A relevância dessa função no exemplo da ferradura é que o difeomorfismo $f|_{\Lambda}$ é conjugado a σ , isto é existe homeomorfismo $h : \Sigma \rightarrow \Lambda$ tal que $h\sigma = f_{\Lambda}h$. Dado $a \in \Sigma$, existe um único $z \in \Lambda$ tal que $f^n(z) \in H_1$ quando $a_n = 1$, enquanto $f^n(z) \in H_2$, quando $a_n = 0$. Logo σ codifica a dinâmica da ferradura. Todo ponto em Λ tem uma sequência em Σ associada que diz exatamente onde esse ponto está em cada instante n (ou iterada da função f). Por exemplo, $(\dots 00.000\dots)$ é a sequência que codifica o ponto fixo p , (estamos relacionando o zero com o lado esquerdo de Q), $(\dots 11.11\dots)$ é a sequência que codifica o ponto fixo s .

Todas as propriedades dinâmicas do shift são herdadas por f_Λ . Por exemplo, σ tem 2^n órbitas periódicas de período n , e portanto, o mesmo também é verdade para f_Λ . Ainda o conjunto de órbitas periódicas de σ é denso em Σ , logo o conjunto de órbitas periódicas de f_Λ é denso em Λ .

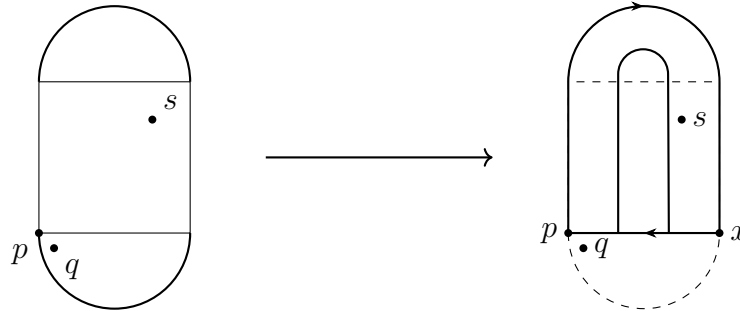
Agora conectamos este exemplo com a definição de ponto homoclínico. Lembrando que, para $\delta > 0$

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n} W_r^s(p),$$

$$W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_r^u(p).$$

Esses conjuntos se intersectam em x , que é o ponto homoclínico transverso.

Figura 15 – Ilustração dos pontos fixos p, q, s e do ponto x .



Fonte: Elaboração própria.

Smale provou que todo sistema que possui um ponto homoclínico transverso, também tem uma ferradura contendo esse ponto e portanto é conjugado ao shift em uma vizinhança.

Voltando a noção de estabilidade estrutural, podemos definir a estabilidade por mergulho, que é uma noção ligeiramente mais fraca.

Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante por f . Dizemos que f é estável por mergulho C^r em $\Lambda \subset M$ se existe uma vizinhança C^r de \mathcal{U} de f tal que, para qualquer $g \in \mathcal{U}$, existe uma função contínua injetiva $h : \Lambda \rightarrow M$ de modo que $hf = gh$ em Λ . Nesse caso, $h(\Lambda)$ será um conjunto compacto e invariante por g . Como Λ é compacto e Hausdorff, $h : \Lambda \rightarrow h(\Lambda)$ é um homeomorfismo. Isto é, h é uma conjugação topológica de $f|_\Lambda$ a $g|_{h(\Lambda)}$.

Uma noção mais forte é de ε -estável por mergulho: dado $\varepsilon > 0$, existe \mathcal{U} , uma vizinhança C^r de f , tal que para qualquer $g \in \mathcal{U}$, existe uma função contínua injetiva $h : \Lambda \rightarrow M$ tal que $hf = gh$ e $d(h, id) \leq \varepsilon$.

Assim, podemos enunciar o teorema a seguir, o qual diz que os conjuntos hiperbólicos são C^1 ε -estáveis por mergulho. A prova de uma versão mais forte desse teorema pode ser encontrada em Wen (2016, p. 122).

Teorema 3.5.7 (A estabilidade por mergulho de conjuntos hiperbólicos). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de f . Existem vizinhanças C^1 de \mathcal{U}_0 de f e um número $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para cada $g \in \mathcal{U}_0$, existe uma função contínua injetiva $h = h_g : \Lambda \rightarrow M$ que satisfaz $hf = gh$ e $d(h, id) \leq \varepsilon$. Mais ainda, $d(h_g, id) \rightarrow 0$ quando $d^1(g, f) \rightarrow 0$.*

Uma consequência direta desse teorema é o celebrado Teorema de Anosov.

Teorema 3.5.8. *Difeomorfismos de Anosov são C^1 estruturalmente estáveis.*

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow M$ Anosov. Pelo Teorema 3.5.7 existe uma vizinhança C^1 \mathcal{U} de f tal que, para qualquer $g \in \mathcal{U}$, existe uma função contínua injetiva $h : M \rightarrow M$ tal que $hf = gh$. Precisamos mostrar que h é sobrejetora. Pela invariância do domínio (generalizado para variedades), h é função aberta. Logo $h(M)$ é aberto e fechado. Logo $h(M) = M$, pois M é conexa. \square

Anosov provou o Teorema 3.5.7 quando o conjunto hiperbólico é toda a variedade, usando uma abordagem geométrica.

Finalizando esta seção, enunciamos outro teorema acerca da noção de estabilidade estrutural, agora para conjuntos hiperbólicos isolados, cuja a prova pode ser encontrada em Wen (2016, p. 127).

Teorema 3.5.9. (Estabilidade Estrutural de conjuntos hiperbólicos isolados). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto isolado hiperbólico de $f : M \rightarrow M$ com uma vizinhança isolante U . Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança C^1 \mathcal{U} de f tal que, para qualquer $g \in \mathcal{U}$ o conjunto invariante maximal Γ de g em U é isolado em U e $g|_{\Gamma}$ é ε -conjugado a $f|_{\Lambda}$.*

3.6 HÖLDER CONTINUIDADE

Para finalizar esse capítulo, estudamos uma característica dos difeomorfismos de Anosov, isto é, quando consideramos um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ tal que toda a variedade é um conjunto hiperbólico. No capítulo 4 iremos explorar mais essa classe. Aqui, mostramos a continuidade Hölder da distribuições estável (a continuidade da distribuição instável é análoga). Como referência foi utilizado (PESIN, 2004).

Teorema 3.6.1. *A distribuição E^s é Hölder contínua, isto é, para todo $x, y \in M$*

$$\angle(E^s(x), E^s(y)) \leq Cd(x, y)^\alpha,$$

em que $C > 0$.

A seguir é provado um fato ligeiramente mais geral. Pelo Teorema 2.2.18, podemos pensar em M como um mergulho em \mathbb{R}^N , para algum N grande suficiente. Se M é compacta, a métrica Riemanniana em M é equivalente a distância $\|x - y\|$ induzida pelo mergulho. O expoente de Hölder não muda se a métrica Riemanniana for substituída por outra métrica suave equivalente, mas a constante de Hölder pode mudar.

Para um subespaço $A \subset \mathbb{R}^N$ e $v \in \mathbb{R}^N$, seja

$$\text{dist}(v, A) = \inf_{w \in A} \|v - w\|,$$

isto é, $\text{dist}(v, A)$ é a norma da diferença entre v e sua projeção ortogonal em A . Para subespaços A, B em \mathbb{R}^N definimos

$$\text{dist}(A, B) = \max\left\{ \max_{v \in A, \|v\|=1} d(v, B), \max_{w \in B, \|w\|=1} d(w, A) \right\}$$

Agora podemos definir a continuidade Hölder para distribuições:

Definição 3.6.2. Seja E distribuição k -dimensional em um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$. Dizemos que E é Hölder contínua com expoente $\alpha \in (0, 1]$ e constante $L > 0$ se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\text{dist}(E(x), E(y)) \leq L\|x - y\|^\alpha,$$

para todo $x, y \in \Lambda$ com $\|x - y\| \leq \varepsilon_0$.

Dois subespaços $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ são ditos κ -transversos se $\|v_1 - v_2\| \geq \kappa$ para todos vetores unitários $v_1 \in E_1$ e $v_2 \in E_2$.

Primeiro, seguem dois lemas auxiliares.

Lema 3.6.3. *Seja $L_n^i, i = 1, 2, n \in \mathbb{N}$ duas sequências matrizes reais $N \times N$ tais que para $a > 1$ e $\delta \in (0, 1)$ que $\|L_n^1 - L_n^2\| \leq \delta a^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponha que exista dois subespaços $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ e constantes positivas $C > 1$ e $0 < \lambda < \mu$, $\lambda < a$ tais que*

$$\|L_n^i v\| \leq C\lambda^n \|v\|, v \in E_i,$$

$$\|L_n^i w\| \geq C^{-1}\mu^n \|w\|, w \in (E_i)^\perp.$$

Então

$$\text{dist}(E_1, E_2) \leq 3C^2 \frac{\mu}{\lambda} \delta^{(\log \mu - \log \lambda) / (\log a - \log \lambda)}.$$

Demonstração. Considere o cone $C_n^1 = \{v \in \mathbb{R}^N : \|L_n^1 v\| \leq 2C\lambda^n \|v\|\}$ para cada n . Seja $v \in K_n^1$. Seja $v = v_1 + v_1^\perp$, em que $v_1 \in E_1$ e $v_1^\perp \in E_1^\perp$. Temos

$$\|L_n^1(v)\| \geq \|L_n^1 v_1^\perp\| - \|L_n^1 v_1\| \geq C^{-1}\mu^n \|v_1^\perp\| - C\lambda^n \|v_1\|,$$

e portanto

$$\|v_1^\perp\| \leq C\mu^{-n} \|L_n^1 v\| + C^2\lambda^n \|v_1\| \leq 3C^2 \frac{\lambda^n}{\mu^n} \|v\|.$$

Segue diretamente que $d(v, E_1) \leq 3C^2 \frac{\lambda^n}{\mu^n} \|v\|$.

Seja $\gamma = \frac{\lambda}{a} < 1$. Existe um único inteiro não negativo tal que $\gamma^{k+1} < \delta \leq \gamma^k$. De fato, como $\gamma < 1$ existe j_0 inteiro não negativo tal que

$$\gamma^{j+1} < \lambda, \forall j \geq j_0.$$

Tomando $k = \min\{j : \gamma^{j+1} < \delta\}$ temos que

$$\gamma^{k+1} < \delta \leq \gamma^k.$$

Seja $v \in E_2$. Então

$$\begin{aligned} \|L_k^1 v_2\| &\leq \|L_k^2 v_2\| + \|L_k^1 - L_k^2\| \|v_2\| \\ &\leq C\lambda^k \|v_2\| + a^k \delta \|v_2\| \\ &\leq (C\lambda^k + (a\gamma)^k) \|v_2\| \\ &= (C\lambda^k + \lambda^k) \|v_2\| \leq 2C\lambda^k \|v_2\|. \end{aligned}$$

Segue que $v_2 \in K_k^1$ e então $E_2 \subset K_k^1$. Da mesma forma, trocando os índices é possível mostrar que $E_1 \subset K_k^2$. Pela estimativa de $d(v, E_1)$ temos

$$\text{dist}(E_1, E_2) \leq 3C^2 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k.$$

Agora, note que

$$k \leq \frac{\log \delta}{\log \gamma} < k + 1,$$

e como $(\log \lambda - \log \mu) < 0$

$$\frac{\log \delta}{\log \gamma} (\log \lambda - \log \mu) > (k + 1)(\log \lambda - \log \mu).$$

Ainda,

$$\exp^{\frac{\log \delta}{\log \gamma} (\log \lambda - \log \mu)} = \delta^{\frac{\log \lambda - \log \mu}{\log \lambda - \log a}} = \delta^{\frac{\log \mu - \log \lambda}{\log a - \log \lambda}}.$$

Assim,

$$\exp^{k(+1)(\log \lambda - \log \mu)} \exp^{\frac{\log \lambda}{\log \gamma} (\log \lambda - \log \mu)} = \delta^{\frac{\log \mu - \log \lambda}{\log a - \log \lambda}}.$$

e portanto

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} \leq \frac{\mu}{\lambda} \delta^{\frac{\log \mu - \log \lambda}{\log a - \log \lambda}},$$

que nos dá a desigualdade desejada. \square

Lema 3.6.4. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma função $C^{1+\beta}$ de uma variedade compacta C^2 , $M \subset \mathbb{R}^N$. Então, para cada $a > \max_{z \in M} \|df_z\|^{1+\beta}$ existe $D > 1$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x, y \in M$ temos*

$$\|df_x^n - df_y^n\| \leq Da^n \|x - y\|^\beta.$$

Observação 3.6.5. Aqui voltamos com a notação mais usual de derivada df_x .

Observação 3.6.6. Uma função f ser $C^{1+\beta}$ significa ser diferenciável com derivada β -Hölder contínua.

Demonstração. Seja D' tal que

$$\|df_x - df_y\| \leq Da^n \|x - y\|^\beta.$$

Seja $b = \max_{z \in M} \|df_z\| \geq 1$ e observe que para cada $x, y \in M$,

$$\|f^n(x) - f^n(y)\| \leq b^n \|x - y\|.$$

Fixe $a > b$. Então o lema é verdade para $n = 1$ e qualquer $D \geq D'$. Suponha que o lema seja verdade para $n > 1$. Note que

$$\begin{aligned} \|df_x^{n+1} - df_y^{n+1}\| &= \|df_{f^n(x)} \circ df_x^n - df_{f^n(x)} \circ df_y^n + df_{f^n(x)} \circ df_y^n - df_{f^n(y)} \circ df_y^n\| \\ &\leq \|df_{f^n(x)} \circ df_x^n - df_{f^n(x)} \circ df_y^n\| + \|df_{f^n(x)} \circ df_y^n - df_{f^n(y)} \circ df_y^n\| \\ &\leq \|df_{f^n(x)}\| \|df_x^n - df_y^n\| + \|df_{f^n(x)} - df_{f^n(y)}\| \|df_y^n\| \\ &\leq \|df_{f^n(x)}\| Da^n \|x - y\|^\beta + D' (\|f(x)^n - f^n(y)\|^\beta) \|df_y^n\| \\ &\leq bDa^n \|x - y\| + D' (b^n \|x - y\|)^\beta b^n \\ &\leq Da^{n+1} \|x - y\|^\beta \left(\frac{a}{b} + \frac{D' (b^{1+\beta})^n}{D a^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Se $a > b^{1+\beta}$ então existe $D \geq D'$ tal que o fator entre parênteses é menor ou igual a 1, o que completa a prova por indução. \square

Agora provamos o resultado principal:

Proposição 3.6.7. *Seja M uma subvariedade compacta C^2 de \mathbb{R}^N com $\dim M = n < N$ e $f : M \rightarrow M$ uma função $C^{1+\beta}$, $\beta \in (0, 1]$. Suponha que exista conjunto $\Lambda \subset M$ e números $0 < \lambda < \mu, c > 0$ tais que para cada $x \in \Lambda$ existem subespaços κ -transversos $E^s(x)$, $E^u(x) \subset T_x M$ com as seguintes propriedades:*

i) $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$.

ii) $\|df_x^n v\| \leq c\lambda^n \|v\|$ e $\|df_x^n v\| \geq c^{-1}\mu \|v\|$ para cada $v \in E^s(x)$ e $w \in E^u(x)$.

Então para cada $a > \max_{z \in M} \|df_z\|^{1+\beta}$, a distribuição E^s é Hölder contínua com expoente

$$\alpha = \frac{\log \mu - \log \lambda}{\log a - \log \lambda}.$$

Observação 3.6.8. O caso instável é análogo.

Demonstração. Para $x \in M$ seja $(T_x M)^\perp$ o complemento ortogonal de $T_x M$ em \mathbb{R}^N . Como $(TM)^\perp$ é uma distribuição C^1 , é suficiente mostrar a continuidade Hölder de $P = E \oplus (TM)^\perp$. Como $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são κ -transversos e de dimensões complementares em $T_x M$, então existe $d > 1$ tal que $\|df_x w\| \geq d^{-1} \mu^n \|w\|$ para cada $x \in \Lambda$ e $w \perp E^s(x)$. Para $x, y \in \Lambda$ e um inteiro positivo n , seja L_n^1 e L_n^2 matrizes $N \times N$ tais que

$$\begin{aligned} L_n^1 v &= df_x^n v \text{ se } v \in T_x M, \text{ e } L_n^1 v = 0 \text{ se } v \in (T_x M)^\perp, \\ L_n^2 v &= df_y^n v \text{ se } v \in T_y M, \text{ e } L_n^2 v = 0 \text{ se } v \in (T_y M)^\perp. \end{aligned}$$

A proposição segue do 3.6.3 com $\delta = D\|x - y\|^\beta$, $E_1 = P(x)$, $E_2 = P(y)$ e $C = \max c, d$. \square

Não podemos esperar que as distribuições sejam C^1 mesmo que o difeomorfismo seja de Anosov, mas existe algumas condições adicionais que garantem que as distribuições sejam C^1 , como por exemplo a distribuição E^s ter co-dimensão 1.

4 ERGODICIDADE DE DIFEOMORFISMOS DE ANOSOV

Neste capítulo será apresentado um pouco da Teoria Ergódica, área que estuda propriedades estatísticas dos sistemas dinâmicos em relação a uma medida. O objetivo deste capítulo é mostrar que certos sistemas hiperbólicos possuem a propriedade de ergodicidade. Inicialmente será realizado um resumo das principais definições e resultados dessa área. Em seguida, iremos apresentar uma técnica conhecida como Argumento de Hopf, e aplicá-la em algumas situações, com o objetivo final de mostrar que os Difeomorfismos de Anosov de classe C^2 que são conservativos, isto é, que preservam medida em uma variedade, são ergódicos.

4.1 TEORIA ERGÓDICA

Aqui será exposto um breve resumo sobre os principais conceitos da teoria que são necessários para o restante do capítulo. O estudo dessa teoria remonta à hipótese ergódica de Ludwig Boltzmann no final do século XIX. Como resposta a essa hipótese, George David Birkhoff e John von Neumann, em 1930, provaram teoremas fundamentais para a área e Eberhard Hopf estudou as propriedades ergódicas de fluxos geodésicos em variedades Riemannianas com curvaturas negativas. No contexto clássico em que o estudo surgiu, o espaço X é um conjunto de estados de um sistema físico, a σ -álgebra \mathcal{B} é a coleção de todos os subconjuntos mensuráveis de X e a medida μ é uma medida que captura a probabilidade desses eventos ocorrerem.

As referências para esta seção são (VIANA; OLIVEIRA, 2019) e (MANE, 1987). Serão assumidos os resultados de Teoria da Medida e de Integração. Para uma revisão mais profunda acerca desses conceitos, recomenda-se o texto de (FOLLAND, 1999).

Nesta seção, a tripla (X, \mathcal{B}, μ) é um espaço de medida em que X é um conjunto não vazio, \mathcal{B} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X e μ é uma medida de probabilidade em (X, \mathcal{B}) , isto é, $\mu(X) = 1$.

Definição 4.1.1. Seja (X, \mathcal{B}, μ) e $f : X \rightarrow X$ uma função mensurável. Dizemos que uma medida μ é invariante por f se $\mu(E) = \mu(f^{-1}E)$, para todo conjunto mensurável $E \subset X$.

Heuristicamente, estamos dizendo que a probabilidade de um ponto estar em um dado conjunto é a mesma que a probabilidade que a sua imagem esteja nesse conjunto. Podemos também estender essa noção para fluxos. Dizemos que uma medida é invariante por um fluxo φ^t se ela for invariante por cada uma das φ^t , ou seja

$$\mu(E) = \mu(\varphi^{-t}(E)), \text{ para todo } E \subset X \text{ mensurável e para todo } t \in \mathbb{R}.$$

A seguir será enunciado o Teorema Ergódico de Birkhoff. A sua demonstração é longa e pode ser encontrada em Mane (1987, p. 90).

Teorema 4.1.2 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma função mensurável e μ uma medida de probabilidade invariante por f . Dada qualquer função integrável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, o limite*

$$\varphi^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in X$. Além disso, a função φ^+ é integrável e satisfaz

$$\int \varphi^+(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

Uma propriedade valer para μ -quase todo ponto $x \in M$ significa que é válida para todo ponto em X , a menos, possivelmente, de pontos em um conjunto de medida nula de X . A função φ^+ é dita média temporal (ou orbital) de φ . Quando φ é uma função característica de um conjunto, o número $\varphi^+(x)$ mede o tempo médio de visita do ponto x ao conjunto. É possível mostrar que as médias temporais são constantes ao longo de órbitas:

Proposição 4.1.3. *Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ função integrável. Então*

$$\varphi^+(f(x)) = \varphi^+(x), \text{ para } \mu - \text{quase todo ponto } x \in X.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \varphi^+(f(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(f^j(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) + \frac{1}{n} [\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)] \\ &= \varphi^+(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\varphi(f^n(x)) - \varphi(x)]. \end{aligned}$$

Temos que se $\varphi \in L^1(\mu)$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi(f^n(x)) = 0$$

para μ -quase todo ponto $x \in M$, a prova pode ser encontrada em Viana e Oliveira (2019, p. 73). Logo,

$$\varphi^+(f(x)) = \varphi^+(x)$$

para μ -quase todo ponto $x \in M$. □

Como consequência do Teorema de Birkhoff, podemos deduzir o Teorema de von Neumann. A demonstração em detalhes pode ser encontrada em Viana e Oliveira (2019, p. 75).

Corolário 4.1.4 (Teorema Ergódico de von Neumann). *Sejam $1 \leq p < \infty$, $f : X \rightarrow X$ uma função mensurável e μ probabilidade invariante por f . Se $\varphi \in L^p(\mu)$, existe $\varphi^+ \in L^p(\mu)$ com $\|(1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) - \varphi^+(x)\|_p \rightarrow 0$ (ou seja, converge em $L^p(\mu)$) e $\varphi^+ \circ f = \varphi^+$ μ -quase sempre.*

Os próximos corolários seguem do Teorema de von Neumann.

Corolário 4.1.5. *A média temporal φ^+ de qualquer função $\varphi \in L^2(\mu)$ coincide com a projeção ortogonal $P(\varphi)$ de φ no subespaço das funções invariantes. Isto é,*

$$\|\varphi - \varphi^+\|_2 = \min\{\|\varphi - \psi\| : \psi \text{ é invariante}\}.$$

Corolário 4.1.6. *Se $f : X \rightarrow X$ é invertível e $\varphi \in L^2(\mu)$, temos $\varphi^+(x) = \varphi^-(x)$ μ -quase sempre, em que*

$$\varphi^+(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)),$$

e

$$\varphi^-(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(x))$$

Dada uma função mensurável $f : X \rightarrow X$ que preserva probabilidade μ em X , dizemos que uma função mensurável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante se $\varphi \circ f = \varphi$ em μ -quase todo ponto.

Agora definimos o conceito de ergodicidade. Um conjunto $B \in \mathcal{B}$ é dito f -invariante se $f^{-1}(B) = B$.

Definição 4.1.7. *Seja $f : X \rightarrow X$ função que preserva medida. Então f é ergódica se todo conjunto invariante por f tem medida total¹ ou medida nula.*

Dizer que um sistema é ergódico significa dizer que ele é irredutível do ponto de vista de medida, isto é, não podemos dividir o espaço X em subconjuntos invariantes.

Existem diversas equivalências para a noção de ergodicidade. Enunciamos uma equivalência em específico abaixo. Sua prova pode ser encontrada em Mane (1987, p. 101).

Proposição 4.1.8. *Seja $1 \leq p < \infty$. Uma função f que preserva medida em (X, \mathcal{B}, μ) é ergódica se, e somente se, toda função $\varphi \in L^p(\mu)$ invariante por f é constante μ -quase sempre.*

Em seguida, introduzimos a noção de desintegração de medida, que será utilizada na seção 4.3.

Considere M um espaço métrico compacto, μ uma medida de Borel de probabilidade e \mathcal{P} uma partição de M em subconjuntos mensuráveis. Seja $\pi : M \rightarrow \mathcal{P}$ a função que associa um ponto $x \in M$ ao subconjunto $P \in \mathcal{P}$ que o contém. Podemos munir \mathcal{P} de uma estrutura de espaço de probabilidade da seguinte maneira: dizemos que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ é mensurável se, e somente se, $\pi^{-1}(\mathcal{Q})$ é subconjunto mensurável de M . Consideramos $\hat{\mu}$ a medida quociente de μ sob π , isto é, $\hat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q}))$ para \mathcal{Q} mensurável.

¹ Um subconjunto ter medida total significa que ele tem a mesma medida de X , nesse caso 1.

Definição 4.1.9. Uma desintegração de μ em respeito a \mathcal{P} é uma família $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ de probabilidades, chamadas de probabilidades condicionais de μ , tais que

- i) $\mu_P(P) = 1$ para $\hat{\mu}$ -quase todo $P \in \mathcal{P}$;
- ii) Dada uma função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, a função $\mathcal{P} \ni P \mapsto \int \varphi d\mu_P$ é mensurável e
$$\int \varphi d\mu = \int \left(\int \varphi d\mu_P \right) d\hat{\mu}(P).$$

De modo geral, o item *ii*) da definição acima vale para φ função integrável. Além disso, é possível mostrar que as desintegrações, quando existem, são essencialmente únicas. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em Viana e Oliveira (2019, p. 146).

Proposição 4.1.10. *Se $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ e $\{\nu_P : P \in \mathcal{P}\}$ são duas desintegrações de μ em respeito a \mathcal{P} , então $\mu_P = \nu_P$ para $\hat{\mu}$ -quase todo $P \in \mathcal{P}$.*

Definição 4.1.11. Uma partição \mathcal{P} é dita mensurável se, restrita a um subconjunto de M com medida total, ela é o limite de uma sequência crescente de partições enumeráveis. Mais explicitamente, \mathcal{P} é mensurável se existe $M_0 \subset M$ com medida total tal que, restrito a M_0 ,

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

para alguma sequência crescente $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots$ de partições enumeráveis, em que $\mathcal{P}_i < \mathcal{P}_{i+1}$ significa que todo elemento de \mathcal{P}_{i+1} está contido em algum elemento de \mathcal{P}_i (dizemos que \mathcal{P}_i é menos fina que \mathcal{P}_{i+1}). Ainda, $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ é dita a partição menos fina tal que

$$\mathcal{P}_n < \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n, \forall n.$$

Os seus elementos são interseções não vazias da forma $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$, em que $P_n \in \mathcal{P}_n$.

Exemplo 4.1.12. Seja $M = \mathbb{T}^2$, munido da medida de Lebesgue m . Considere a partição \mathcal{P} de M em círculos horizontais, isto é, $\mathcal{P} = \{S^1 \times \{y\} : y \in S^1\}$. Temos que \mathcal{P} é partição mensurável. De fato, considere as partições

$$\mathcal{P}_n = \{S^1 \times I(i, n) : i = 1, \dots, 2^n\},$$

em que $I(i, n)$ é o segmento de \mathbb{R}/\mathbb{Z} correspondente ao intervalo $[(i-1)/2^n, i/2^n) \subset \mathbb{R}$. Seja $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a projeção nas classes de equivalência. Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{S^1 \times \pi([0, 1/2)), S^1 \times \pi([1/2, 1))\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{S^1 \times \pi([0, 1/4)), S^1 \times \pi([1/4, 1/2)), S^1 \times \pi([1/2, 3/4)), S^1 \times \pi([3/4, 1))\}, \end{aligned}$$

e assim por diante. Claramente $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2 < \dots$ e $\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$.

Por fim, enunciamos o Teorema de Rokhlin. A prova pode ser encontrada em Viana e Oliveira (2019, p. 151).

Teorema 4.1.13 (Rokhlin). *Se \mathcal{P} é uma partição mensurável, então existe uma desintegração de μ em respeito a \mathcal{P} .*

4.2 ARGUMENTO DE HOPF

Hopf (1936) provou a ergodicidade de um fluxo geodésico em uma superfície de curvatura negativa de volume finito. A prova se baseava em um fato que agora é conhecido como Argumento de Hopf:

“Qualquer conjunto mensurável invariante sob o fluxo geodésico, é na verdade, invariante pelas distribuições estáveis e instáveis deste fluxo.”

D.V. Anosov utilizou esse argumento para provar que uma classe de sistemas que preservam medida, que agora são conhecidos como Difeomorfismos de Anosov C^2 , são ergódicos. Este argumento foi estendido para diversos outros casos, como veremos no capítulo 5.

A ideia abstrata do argumento é simples e será esboçada neste capítulo. A referência principal desta seção é (WILKINSON, 2008).

Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa e de classe C^∞ . Para uma função $f : M \rightarrow M$ podemos associar a relação de equivalência estável \sim_s , dada por $x \sim_s y$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Denote por $W^s(x)$ a classe de equivalência contendo x . Quando f é invertível, podemos definir uma relação de equivalência instável, como sendo a relação de equivalência estável para f^{-1} e denotar por $W^u(x)$ a classe de equivalência instável. O primeiro passo no argumento de Hopf é mostrar que a média temporal de Birkhoff para funções contínuas é constante nas classes estável e instável. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ função integrável e seja

$$\varphi^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j. \quad (4.1)$$

Observe que, se φ é contínua, então, para cada $x \in M$ e $x' \in W^s(x)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(f^n(x)) - \varphi(f^n(x'))| = 0.$$

Segue que $\varphi^+(x) = \varphi^+(x')$, pois dadas sequências limitadas de números reais a_n e b_n , se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$ então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} b_j.$$

Em particular, se o limite em 4.1 existe no ponto x , então existe e é constante para todo ponto em $W^s(x)$.

O próximo passo é verificar o caso em que f é conservativo e Anosov. Aqui, conservativo significa um sistema que preserva uma medida finita equivalente² ao volume Riemanniano, digamos μ . Nesse caso, f é invertível e as classes de equivalência estáveis são precisamente as folhas da folheação estável \mathcal{W}^s e as classes de equivalência instáveis são as folhas da folheação instável \mathcal{W}^u .

Como f é conservativa, pelo Teorema 4.1.4, para cada função $\varphi \in L^2$, a função φ^+ é igual μ -quase sempre a projeção de φ nas funções f -invariantes. Pela proposição 4.1.8, para mostrar a ergodicidade de f , devemos mostrar que todas as funções invariantes por f em L^2 são constantes μ -quase sempre. Como a projeção é contínua na norma de L^2 e as funções contínuas são densas em L^2 , é suficiente mostrar que a projeção de qualquer função contínua é constante μ -quase sempre.

Dessa forma, seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Temos que $\varphi^+ = \varphi^-$ μ -quase sempre por 4.1.6. O argumento nos parágrafos anteriores mostra que φ^+ é constante ao longo das folhas estáveis e φ^- é constante ao longo das folhas instáveis. A conclusão que queremos é que φ^+ é constante μ -quase sempre. Para isto, basta mostrar em uma carta local, pois a variedade M é conexa. Em uma carta local, após uma mudança suave de coordenadas, podemos obter um par de folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 do cubo $[-1, 1]^n$ por discos, e uma função mensurável $\psi : [-1, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ que é constante ao longo das folhas de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . Quando as folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são ao menos C^1 , podemos realizar uma troca de coordenadas suaves de maneira que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são folheações em coordenadas transversas. Nesse caso, o teorema de Fubini implica que qualquer função mensurável que é constante ao longo de duas coordenadas transversas é μ -quase sempre constante, completando a prova.

No argumento original de Hopf, as folheações estáveis e instáveis são C^1 (hipótese satisfeita nos exemplos que ele considerou). Porém, para um difeomorfismo ou fluxo genérico de Anosov, as folheações estáveis e instáveis não são C^1 (mesmo que as folhas sejam tão diferenciáveis quanto o próprio sistema) e, então, a última parte do argumento não se aplica. Anosov e Sinai conseguiram contornar esse problema, provando que as folheações de um difeomorfismo de Anosov ao menos $C^{1+\beta}$ satisfazem uma propriedade mais fraca, chamada de continuidade absoluta, a qual é suficiente para finalizar a prova.

A ideia intuitiva por trás do argumento já é bem ilustrada em sua versão abstrata, que acabamos de descrever. Porém, ainda podemos aplicar esse argumento para uma classe mais simples de sistemas de maneira concreta. Apresentamos em 3.4.1 a construção de um Automorfismo Toral de Anosov. Vamos provar agora, utilizando o argumento de Hopf, que o exemplo dado em 3.4.5 é ergódico. Para isto, considere

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

² Duas medidas α e β são equivalentes se são absolutamente contínuas uma com respeito a outra, isto é, possuem os mesmos conjuntos de medida nula.

Como o determinante de A é 1, é possível mostrar que f_A preserva a medida de Lebesgue m no toro, veja em Viana e Oliveira (2019, p. 112). Lembre-se que, para o autoespaço E^s associado a um dos autovalores de A , as translações $a + E^s$, para $a \in \mathbb{R}^2$, são ditas folhas estáveis e a família de todos os subespaços afins dessa forma, variando $a \in \mathbb{R}^2$, forma uma folheação estável de \mathbb{R}^2 . Analogamente, o mesmo vale para o autoespaço E^u , formando uma folheação instável de \mathbb{R}^2 . Projetando ambas folheações pela π , obtemos folheações \mathcal{W}^s e \mathcal{W}^u do toro, ditas estável e instável, respectivamente. As folhas das duas folheações se intersectam transversalmente em um subconjunto denso de \mathbb{T}^2 .

Estas folheações são invariantes por f_A . Temos que, para quaisquer x e y na mesma folha estável,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_A^n(x), f_A^n(y)) = 0.$$

E, se y e z estão na mesma folha instável,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(y), f^{-n}(z)) = 0.$$

Agora, tome $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e considere as médias temporais:

$$\varphi^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_A^j(x)) \text{ e } \varphi^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_A^{-j}(x))$$

definidas, pelo Teorema 4.1.2, para m -quase todo ponto de \mathbb{T}^d . Sabemos que essas médias são iguais m -quase sempre, pois f_A é invertível.

Da mesma forma que no caso abstrato, podemos mostrar que φ^+ é constante em toda folha de \mathcal{W}^s e φ^- é constante em toda folha de \mathcal{W}^u . De fato, se $\varphi^+(x)$ existe e $y \in \mathcal{W}^s(x)$, então $d(f_A^j(x), f_A^j(y)) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, e como φ é contínua

$$\varphi(f_A^j(x)) - \varphi(f_A^j(y)) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty.$$

Logo, a média de Cesàro também converge para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f_A^j(x)) - \varphi(f_A^j(y)) = 0.$$

Então $\varphi^+(y)$ existe e é igual a $\varphi^+(x)$. O argumento para o caso φ^- é análogo.

Dados um subconjunto aberto $R \subset \mathbb{T}^2$ e $x \in R$, denotamos por $\mathcal{W}^s(x, R)$ a componente conexa de $\mathcal{W}^s(x) \cap R$ que contém x e, da mesma forma, denotamos $\mathcal{W}^u(x, R)$ para a componente conexa de $\mathcal{W}^u(x) \cap R$ que contém x . Dizemos que R é um retângulo se $\mathcal{W}^s(x, R)$ intersecta $\mathcal{W}^u(y, R)$ em um único ponto, para todo x e $y \in R$.

Seja $X \subset \mathbb{T}^2$ o conjunto com medida total no qual os limites φ^+ e φ^- existem e coincidem.

Lema 4.2.1. *Dado qualquer retângulo $R \subset \mathbb{T}^2$, existe um conjunto mensurável $Y_R \subset X \cap R$ tal que $m(R \setminus Y_R) = 0$ e, dados quaisquer x e $y \in Y_R$, existem x' e $y' \in X \cap R$ tais que $x' \in \mathcal{W}^s(x, R)$, $y' \in \mathcal{W}^s(y, R)$ e $y' \in \mathcal{W}^u(x')$.*

Demonstração. Representaremos por m_x^s a medida de Lebesgue na folha estável $\mathcal{W}^s(x)$ de cada $x \in \mathbb{T}^2$. Note que $m(R \setminus X) = 0$. Então, pelo teorema de Fubini (utilizando a estrutura de produto local desse retângulo e utilizando a fórmula de mudança de variável), temos que

$$m_x^s(\mathcal{W}^s(x, R) \setminus X) = 0, \text{ para quase todo } x \in R.$$

Defina $Y_R = \{x \in X \cap R : m_x^s(\mathcal{W}^s(x, R) \setminus X) = 0\}$. Então Y_R tem medida total em R . Dados $x, y \in R$, considere

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{W}^s(x, R) &\rightarrow \mathcal{W}(y, R) \\ x' &\mapsto \pi(x') = \mathcal{W}^u(x', R) \cap \mathcal{W}^s(y, R). \end{aligned}$$

Esta aplicação é afim e, portanto, tem a seguinte propriedade:

$$m_x^s(E) = 0 \iff m_y^s(\pi(E)) = 0.$$

Em particular, a imagem de $\mathcal{W}^s(x, R) \cap X$ pela função π tem medida total em $\mathcal{W}^s(y, R)$. De fato, note que

$$\mathcal{W}^s(x, R) = (\mathcal{W}^s(x, R) \cap X) \cup (\mathcal{W}^s(x, R) \setminus X).$$

Assim, aplicando π em ambos lados temos

$$\mathcal{W}^s(y, R) = \pi(\mathcal{W}^s(x, R) \cap X) \cup \pi(\mathcal{W}^s(x, R) \setminus X),$$

em que $m_x^s(\mathcal{W}^s(x, R) \setminus X) = 0$ e portanto

$$m_y^s(\mathcal{W}^s(y, R)) = m_y^s(\pi(\mathcal{W}^s(x, R) \cap X)).$$

Conseqüentemente, essa imagem intersecta $\mathcal{W}^s(y, R) \cap X$. Em outras palavras, existe $x' \in \mathcal{W}^s(x, R) \cap X$ cuja imagem $y' = \pi(x')$ está em $\mathcal{W}^s(y, R)$. Observando que x' e y' estão na mesma folha instável, pela definição da π , vemos que esses pontos satisfazem as condições na conclusão do lema. \square

Considere um retângulo qualquer R . Dados $x, y \in Y_R$, considere x' e y' em X dados pelo Lema. Usando que φ^+ e φ^- são constantes ao longo das folhas estáveis e instáveis, obtemos:

$$\varphi^-(x) = \varphi^+(x) = \varphi^+(x') = \varphi^-(x') = \varphi^-(y') = \varphi^+(y') = \varphi^+(y) = \varphi^-(y).$$

Isto mostra que as funções φ^+ e φ^- coincidem e são constantes em Y_R . Agora seja R_1, \dots, R_N uma cobertura finita do toro por retângulos. Considere

$$Y = \bigcup_{j=1}^N Y_{R_j}.$$

Temos claramente que $m(Y) = 1$, uma vez que $Y \cap R_j \supset Y_{R_j}$ tem medida total em R_j , para todo j . Afirmamos que $\varphi^+ = \varphi^-$ é constante em todo Y . De fato, dados quaisquer $k, l \in \{1, \dots, N\}$ podemos encontrar $j_0 = k, j_1, \dots, j_n = l$ tais que cada R_{j_i} intersecta $R_{j_{i+1}}$ (conexidade por caminhos do toro). Lembrando que R_j é aberto e Y_j é um subconjunto de medida total, obtemos que cada Y_{j_i} intersecta $Y_{j_{i-1}}$. Então $\varphi^+ = \varphi^-$ é constante na união de todos Y_{j_i} . Logo, como qualquer função contínua é constante, f_A é ergódica.

4.3 CONTINUIDADE ABSOLUTA

A propriedade que iremos explorar nesta seção é dita continuidade absoluta das folheações. Ela é essencial para aplicar o argumento de Hopf no caso dos difeomorfismos de Anosov C^2 conservativos. Esta propriedade foi introduzida por Anosov.

Inicialmente fixaremos a notação. Considere $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^2 de uma variedade Riemanniana compacta M diferenciável e seja \mathcal{W} uma folheação de M com folhas diferenciáveis. Fixe $x \in M$ e considere variedades locais $W_{\text{loc}}(w)$ em pontos $w \in B(x, r)$, $r > 0$. Como $W_{\text{loc}}(w)$ é uma subvariedade suave, a restrição da métrica Riemanniana a $W_{\text{loc}}(w)$ gera um volume Riemanniano $m_{W_{\text{loc}}(w)}$ em $W_{\text{loc}}(w)$, dito volume na folha.

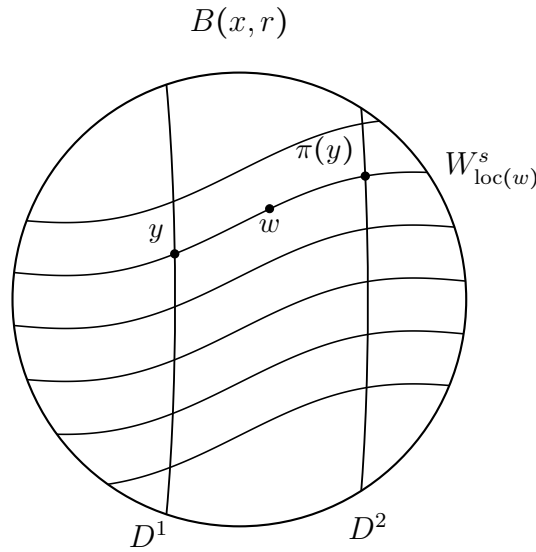
A propriedade de continuidade absoluta concerne a seguinte questão: Dado um conjunto de Borel $E \subset B(x, r)$ de volume positivo, a intersecção $E \cap W_{\text{loc}}(y)$ pode ter medida nula, com respeito ao volume Riemanniano induzido na folha, para quase todo $y \in E$? Se a folheação \mathcal{W} for suave, pelo Teorema de Fubini, $E \cap W_{\text{loc}}(y)$ tem medida positiva, para quase todo $y \in B(x, r)$. Se a folheação é apenas contínua, a propriedade de continuidade absoluta pode falhar (veja um exemplo em Pesin (2004, p. 86)).

Uma maneira de mostrar a continuidade absoluta é utilizando as funções holonomias associadas a folheação. Definimos agora esse conceito:

Definição 4.3.1. Considere um difeomorfismo hiperbólico f de classe C^2 com uma decomposição invariante do fibrado tangente. Seja \mathcal{W}^s a folheação tangente a distribuição estável E^s . Fixe um $x \in M$ e um $r > 0$ e considere a família das variedades locais estáveis $\mathcal{L}(x) = \{W_{\text{loc}}^s(w) : w \in B(x, r)\}$. Escolha dois discos locais D_1 e D_2 transversos a $\mathcal{L}(x)$ e defina a função holonomia $\pi = \pi(x, \mathcal{W}) : D^1 \rightarrow D^2$ da seguinte maneira: $\pi(y)$ é o único ponto da intersecção $D^2 \cap W_{\text{loc}}^s(w)$, em que $W_{\text{loc}}^s(w)$ é a folha estável local que contém y , para $w \in B(x, r)$.

Temos que a função holonomia π é um homeomorfismo com sua imagem.

Figura 16 – Ilustração da função holonomia π ao longo das folhas estáveis locais.



Fonte: Elaboração própria.

Uma função invertível $T : X \rightarrow Y$, entre espaços de medida (X, ν) e (Y, μ) , é dita absolutamente contínua se a medida μ é absolutamente contínua com respeito a medida $T_*\nu = \nu \circ T^{-1}$. Isto é, $\mu(A) = 0$ sempre que $T_*\nu(A) = 0$, para todo $A \subset Y$ mensurável. Nesse caso, definimos o Jacobiano $\text{Jac}(T)(x)$ de T em x (especificado pelas medidas ν e μ) como a derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mu}{d(T_*\nu)}$, ou seja

$$\mu(A) = \int_A \text{Jac}(T)(x) d(T_*\nu)(x), \text{ para todo } A \subset Y \text{ mensurável.}$$

Se X é um espaço métrico, então, para μ -quase todo $x \in X$, temos

$$\text{Jac}(T)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(T(B(x, r)))}{\nu(B(x, r))}.$$

Considere m o volume Riemanniano em M . Dada uma subvariedade D em M , considere m_D o volume Riemanniano induzido em D . Seja $\text{Jac}(\pi)(y)$ o Jacobiano da função holonomia π no ponto $y \in D^1$, especificado pelas medidas m_{D^1} e m_{D^2} .

É possível mostrar que a função holonomia π é absolutamente contínua e que seu Jacobiano é limitado superiormente e inferiormente por constantes positivas e então utilizar isso para provar a continuidade absoluta das folheações. A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em Pesin (2004, p. 77).

Teorema 4.3.2 (Continuidade absoluta da holonomia estável). *Seja f um difeomorfismo C^2 de Anosov em uma variedade diferenciável compacta M . Dado $x \in M$ e dois discos D^1 e D^2 , transversos à família $\mathcal{L}(x)$ das variedades estáveis locais, a função holonomia $\pi : D^1 \rightarrow D^2$ é absolutamente contínua (com respeito as medidas m_{D^1} e m_{D^2}) e seu Jacobiano é limitado superiormente e inferiormente por constantes positivas.*

Observação 4.3.3. Temos, em Barreira e Pesin (2013, p. 186), que o Jacobiano pode ser computado pela seguinte fórmula

$$\text{Jac}(\pi)(y) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Jac}(df_{f^n(\pi(y))}^{-1}|_{T_{f^n(\pi(y))}f^n(D^2)})}{\text{Jac}(df_{f^n(y)}^{-1}|_{T_{f^n(y)}f^n(D^1)})}.$$

Dado $x \in M, r > 0$, defina

$$Q(x) = \bigcup_{w \in B(x,r)} W_{\text{loc}}^s(w).$$

Considere a partição mensurável ξ de $Q(x)$ em variedades locais. Seja ν uma medida de probabilidade equivalente ao volume Riemanniano m em M e invariante por f . Pelo Teorema 4.1.13, existe uma desintegração $\{\nu_{W_{\text{loc}}}(w) : w \in B(x, r)\}$ e uma medida quociente $\hat{\nu}$ em $Q(x)/\xi$. Identificamos o espaço quociente $Q(x)/\xi$ com um disco aberto transversal D (transverso as variedades locais $W_{\text{loc}}(w)$). Denotamos por $\hat{\nu}_D$ a medida quociente em D . O teorema a seguir nos diz que a folheação \mathcal{W} satisfaz o Teorema de Fubini, isto é, podemos integrar primeiro ao longo das folhas locais e depois ao longo de um transversal.

Teorema 4.3.4. 1. As medidas $\nu_{W_{\text{loc}}}(w)$ e $m_{W_{\text{loc}}}(w)$ são equivalentes, para ν -quase todo $w \in B(x, r)$.

2. A medida quociente $\hat{\nu}_D$ é equivalente a medida m_D .

Demonstração. Considere $T = \{D(w) : w \in B(x, r)\}$, a família de transversais disjuntos diferenciáveis à família de variedades locais $\mathcal{L}(x)$. Esta família gera uma partição η da bola $B(x, r)$. Denote por $m_D(w)$ o volume Riemanniano induzido em $D(w)$. Ainda mais, denote por $\nu_D(w)$ as medidas condicionais geradas pela medida ν e a partição η . Perceba que $B(x, r)/\eta$ pode ser identificado com uma variedade local $W_{\text{loc}}(w)$, para algum $w \in B(x, r)$, e, então, denote a medida quociente por $\hat{\nu}_{W_{\text{loc}}}(w)$.

Como a partição η é diferenciável, existem funções contínuas $g(w, z)$ e $h(w)$ tais que, para $w \in B(x, r)$ e $z \in D(w)$,

$$d\nu_D(w)(z) = g(w, z)dm_D(w)(z) \text{ e } d\hat{\nu}_{W_{\text{loc}}}(w) = h(w)dm_{W_{\text{loc}}}(w).$$

De fato, existe um difeomorfismo local $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ que retifica a partição η , em que $k = \dim D(y), y \in W_{\text{loc}}(w)$. Isto é, a mapeia em uma partição do aberto $B^k \times B^{n-k}$ (bolas unitárias em \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{n-k} , respectivamente) por subespaços paralelos a \mathbb{R}^k e mapeia $W_{\text{loc}}(w)$ em B^{n-k} . Depois, basta aplicar o Teorema de Fubini com a medida $\varphi_*\nu$ que é equivalente ao volume em \mathbb{R}^n .

Considere $X \subset Q(x)$ conjunto de Borel de medida ν positiva. Temos

$$\begin{aligned} \nu(X) &= \int_{B(x,r)/\eta} \int_{D(w)} \chi_X(w, z) d\nu_D(w)(z) d\hat{\nu}_{W_{\text{loc}}}(w) \\ &= \int_{B(x,r)/\eta} \int_{D(w)} \chi_X(w, z) g(w, z) dm_D(w)(z) d\hat{\nu}_{W_{\text{loc}}}(w) \\ &= \int_{B(x,r)/\eta} \int_{D(w_0)} \chi_X(w, z) g(w, z) \text{Jac}(\pi_{w_0w})(y) dm_D(w_0)(y) d\hat{\nu}_{W_{\text{loc}}}(w), \end{aligned}$$

em que π_{w_0w} é a função holonomia entre os transversais $D(w_0)$ e $D(w)$, $z = \pi_{w_0w}(y)$ e $\text{Jac}(\pi_{w_0w})(y)$ é o jacobiano da holonomia no ponto y . Na última igualdade, mudamos o transversal $D(w)$ para um transversal fixo $D(w_0)$ e o Jacobiano aparece pela fórmula de mudança de variável. Aplicando Fubini obtemos

$$\begin{aligned} \nu(X) &= \int_{D(w_0)} \int_{B(x,r)/\eta} \chi_X(w, z) g(w, z) \text{Jac}(\pi_{w_0w})(y) d\hat{\nu}_{W_{\text{loc}}}(w) dm_D(w_0)(y) \\ &= \int_{D(w_0)} \int_{W_{\text{loc}}(w)} \chi_X(w, z) g(w, z) \text{Jac}(\pi_{w_0w})(y) h(w) dm_{W_{\text{loc}}}(w) dm_D(w_0)(y). \end{aligned}$$

Pela definição de desintegração, para as medidas condicionais $\{\nu_{W_{\text{loc}}}(w) : w \in B(x, r)\}$ é válido que

$$\nu(X) = \int_D \nu_{W_{\text{loc}}}(w)(X \cap W_{\text{loc}}(w)) d\hat{\nu}_D(w) = \int_D \int_{W_{\text{loc}}(w)} \chi_X(w, y) d\nu_{W_{\text{loc}}}(w)(y) d\hat{\nu}_D(w).$$

Pela unicidade da desintegração, segue que $\nu_W(w)$ é equivalente a $m_{W_{\text{loc}}}(w)$ para ν -quase todo $w \in B(x, r)$ e que $\hat{\nu}_D$ é equivalente a m_D . \square

Temos a seguinte consequência do teorema anterior:

Corolário 4.3.5. *Se $E \subset M$ é mensurável tal que $m(E) = 0$, então $m_{W_{\text{loc}}}(w)(E) = 0$, para m -quase todo $w \in M$.*

Demonstração. Seja $r > 0$ suficientemente pequeno e $\{B(x_i, r)\}_{i=1}^n$ cobertura de M . Seja $E_i = E \cap B(x_i, r)$. Note que se $m(E_i) = 0$ então $\nu(E_i) = 0$ em cada bola. Vamos mostrar para um i fixado. Pela desintegração de ν temos

$$0 = \nu(E) = \int_D \nu_{W_{\text{loc}}}(w)(E) d\hat{\nu}_D(w).$$

Portanto, $\nu_{W_{\text{loc}}}(w)(E) = 0$ para $\hat{\nu}_D$ -quase todo $w \in D$, o que implica que

$$\nu_{W_{\text{loc}}}(w)(E) = 0 \text{ para } \nu\text{-quase todo } w \in B(x, r),$$

pois

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\nu}_D(\{w \in D : \nu_{W_{\text{loc}}}(w)(E) > 0\}) \\ &= \nu(\pi_1^{-1}\{w \in D : \nu_{W_{\text{loc}}}(w)(E) > 0\}) \\ &= \nu(\{w \in B(x, r) : \nu_{W_{\text{loc}}}(w)(E) > 0\}) \end{aligned}$$

em que π_1 é a projeção canônica de $B(x, r)$ em D . Assim, como $m_{W_{\text{loc}}}(w)$ e $\nu_{W_{\text{loc}}}(w)$ são equivalentes para ν -quase todo $w \in B(x, r)$, temos que $m_{W_{\text{loc}}}(w)(E) = 0$ para ν -quase todo $w \in B(x, r)$, e portanto

$$m_{W_{\text{loc}}}(w)(E) = 0 \text{ para } m\text{-quase todo } w \in B(x, r).$$

□

As seguintes propriedades seguem da continuidade absoluta da folheação:

i) Se $A \subset M$ é conjunto mensurável, então

$$m(A) = 0 \iff m_{W_{\text{loc}}(w)}(A) = 0, \text{ para } m \text{ quase todo } w \in M.$$

ii) Se D é um disco pequeno transverso a uma folha local de \mathcal{W} e $T \subset D$ é um conjunto nulo em D (com respeito ao volume Riemanniano induzido em D), então a união das folhas de \mathcal{W} que passam por pontos em T tem volume nulo em M , ou seja,

$$m\left(\bigcup_{z \in T} W_{\text{loc}}(z)\right) = 0.$$

4.4 ERGODICIDADE

Finalmente, provamos a ergodicidade.

Teorema 4.4.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ Anosov de classe C^2 . Se f preserva volume Riemanniano, então f é ergódico.*

Demonstração. Seja $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua. Pelo Teorema Ergodicidade de Birkhoff, existem funções φ^+ e φ^- que são iguais, para m -quase todo $x \in M$.

Pelo argumento de Hopf, é suficiente mostrar que φ^+ é constante em quase todo M . Seja M_0 o conjunto de medida total em que φ^+ e φ^- estão definidas e são iguais. Para cada $x \in M_0$ e cada z na variedade local estável $W_{\text{loc}}^s(x)$ temos $\varphi^+(x) = \varphi^+(z)$. Pela continuidade absoluta da folheação estável e por $m(M_0^c) = 0$, temos que $m_{W_{\text{loc}}^s(x)}(M_0^c) = 0$, para m -quase todo $x \in M$. Ou seja, para quase todo $x \in M$, quase todo $z \in W_{\text{loc}}^s(x)$ pertence a M_0 . Defina $G = \{z \in W_{\text{loc}}^s(x) : z \notin M_0\}$. Dessa forma, das consequências da continuidade absoluta da folheação instável,

$$m\left(\bigcup_{z \in G} W_{\text{loc}}^u(z)\right) = 0.$$

Para y perto de x , temos que $w \in W_{\text{loc}}^s(x) \cap W_{\text{loc}}^u(y)$. Note que, se $w \notin M_0$, então $w \in G$. Como $w \in W_{\text{loc}}^u(y)$, temos que $y \in W_{\text{loc}}^u(w)$ e, conseqüentemente, $y \in$

$\bigcup_{z \in G} W_{\text{loc}}^u(z)$, que tem medida nula. Logo, para quase todo y perto suficiente de x , o ponto $w \in W_{\text{loc}}^s(x) \cap W_{\text{loc}}^u(y)$ está em M_0 e segue que

$$\varphi^+(x) = \varphi^+(w) = \varphi^-(w) = \varphi^-(y).$$

Logo, φ^+ é constante quase sempre em uma vizinhança de x . Como quaisquer dois pontos de M podem ser conectados por um caminho contido em uma união finita de tais vizinhanças, φ^+ é constante m -quase sempre em M . \square

Observação 4.4.2. Aqui, em particular, provamos a ergodicidade para uma função f que preserva volume Riemanniano m . Porém, ainda é válido para uma função f que preserva uma medida finita equivalente ao volume Riemanniano. Além disso, poderíamos também mostrar para f de classe $C^{1+\alpha}$.

5 ENFRAQUECIMENTO DA NOÇÃO DE HIPERBOLICIDADE

No Capítulo 3, foi introduzido o conceito de hiperbolicidade uniforme, no qual a dinâmica exibe, localmente, direções complementares de contração e expansão com taxas uniformemente limitadas. No entanto, as hipóteses necessárias para que um sistema exiba hiperbolicidade uniforme são bastante restritivas, e percebeu-se que tal propriedade não é tão universal quanto se imaginava inicialmente.

A noção de hiperbolicidade uniforme pode ser generalizada de diversas maneiras. Uma dessas maneiras é relaxar a exigência de uniformidade nas taxas de contração e expansão, dando origem à chamada hiperbolicidade não-uniforme¹. Outra generalização é noção de hiperbolicidade parcial, que pode ser uniforme ou não-uniforme, na qual se admite uma direção neutra na decomposição do espaço tangente. A teoria de hiperbolicidade parcial mostrou que mesmo uma quantidade limitada da dicotomia expansão-contração é suficiente para produzir propriedades que os sistemas uniformemente hiperbólicos possuem. Um dos objetivos de estudar a hiperbolicidade parcial é entender quais das propriedades que temos para hiperbolicidade uniforme ainda resistem. Vamos comentar brevemente sobre a noção de ergodicidade no contexto parcialmente hiperbólico com o objetivo de comparar com o que foi visto para o caso uniforme e também comentar sobre os avanços nessa área.

5.1 HIPERBOLICIDADE PARCIAL

Existem várias tentativas de formular uma noção mais fraca de hiperbolicidade, que na maioria das vezes recebe o nome de hiperbolicidade parcial. Essa noção normalmente tem uma característica em comum: pedindo a contração e expansão, mas permitindo uma direção neutra (com algumas características). Nesse sentido existem várias definições, dependendo do autor, ou da área de pesquisa. Nesta seção algumas serão apresentadas.

Começamos com uma definição mais geral, a ideia de uma decomposição dominada. Tanto em referências como (CROVISIER; POTRIE, 2015) e (BONATTI; DIAZ; VIANA, 2004) os autores definem hiperbolicidade parcial como um caso específico de decomposição dominada. Este conceito foi introduzido por Mane (1973).

Definição 5.1.1. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo em uma variedade Riemanniana M fechada e Λ um conjunto f -invariante. Uma decomposição $T_x M = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_k(x)$, $x \in \Lambda$ do fibrado tangente sobre Λ é dita dominada se

¹ Consulte Bonatti, Diaz e Viana (2004) para mais detalhes sobre hiperbolicidade não-uniforme.

- i) É invariante pela derivada df , isto é, $df_x(E^i(x)) = E^i(f(x))$ para todo $i = 1, \dots, k$.
- ii) Existem $C > 0$ e $\lambda < 1$ tais que para todo par de vetores unitários $u \in E_i(x)$ e $v \in E_j(x), i < j$,

$$\frac{\|df_x^n(u)\|}{\|df_x^n(v)\|} < C\lambda^n, \forall n \geq 1$$

Podemos trocar a condição ii) pela existência de $N > 0$ tal que para qualquer $x \in \Lambda$ e para quaisquer vetores unitários $u \in E_i(x), v \in E_{i+1}$

$$\|df_x^N u\| \leq \frac{1}{2} \|df_x^N v\|,$$

para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Definição 5.1.2. Uma distribuição invariante $E \subset T_\Lambda M$ é dita uniformemente contraída por df se, e somente se, existem $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ de tal maneira que, para quaisquer $x \in \Lambda$ e $u \in E(x)$,

$$\|df_x^n u\| \leq C\lambda^n \|u\|, \forall n \geq 0.$$

Similarmente, é uniformemente expandida se, e somente se, existem $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que para quaisquer $x \in \Lambda$ e $u \in E(x)$,

$$\|df_x^{-n} u\| \leq C\lambda^n \|u\|, \forall n > 0.$$

A decomposição dominada exhibe diversas propriedades, algumas que já foram apresentadas no caso uniforme.

Unicidade: Se fixarmos as dimensões das distribuições, a decomposição é única: Seja d a dimensão da variedade e $d = n_1 + \dots + n_k$. Então existe no máximo uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ sobre Λ com $\dim E_i = n_i$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Se não houvesse uma dimensão fixada, poderíamos ter mais de uma decomposição dominada, por exemplo: se $E^s \oplus E^c \oplus E^u$ é dominada, então $E \oplus E^u$ e $E^s \oplus F$, em que $E = E^s \oplus E^c$ e $F = E^c \oplus E^u$, também são decomposições dominadas.

Transversalidade: Os ângulos entre quaisquer duas distribuições de uma decomposição dominada são uniformemente limitados inferiormente por um número positivo.

Continuidade: Cada decomposição limitada é contínua, significando que $E_i(x)$ depende continuamente de x , para cada i .

Extensão para o fecho: Toda decomposição l -dominada sobre um conjunto Λ pode ser estendida para uma decomposição l -dominada sobre o fecho de Λ .

Extensão para uma vizinhança: Seja Λ um conjunto f -invariante com uma decomposição dominada. Então, tal decomposição pode ser estendida de maneira dominada para o conjunto maximal invariante por f em uma vizinhança de Λ .

Persistência: Toda decomposição dominada persiste sobre perturbações C^1 .

Clustering: Suponha que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ é uma decomposição dominada e $1 \leq i < j \leq k$, com $i > 1$ ou $j < k$. Então

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_{i-1} \oplus F \oplus E_{j+1} \oplus \cdots \oplus E_k,$$

em que $F = E_i \oplus \cdots \oplus E_j$ é decomposição dominada.

Subdecomposição: Seja $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ uma decomposição dominada e $E_j = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ é uma decomposição dominada. Então

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_{j-1} \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_m \oplus E_{j+1} \oplus \cdots \oplus E_k$$

é decomposição dominada.

Métrica adaptada A decomposição dominada não depende da métrica Riemanniana, porém as constantes C e λ dependem. Para qualquer conjunto Λ f -invariante que admite uma decomposição dominada, existe uma métrica Riemanniana suave $\|\cdot\|$ que é adaptada a decomposição dominada. Isto é, podemos escolher $C = 1$ na definição de distribuição uniforme.

As provas de cada uma dessas propriedades podem ser encontradas em Bonatti, Diaz e Viana (2004, p. 290).

A partir da definição de decomposição dominada é possível definir formalmente o que significa hiperbolicidade parcial.

Definição 5.1.3. Seja f difeomorfismo e Λ um conjunto f -invariante com decomposição dominada $T_\Lambda M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$. Dizemos que o conjunto Λ é parcialmente hiperbólico se, ou a restrição de df^n contrai uniformemente E_1 , ou expande uniformemente E_k .

Para enfatizar a contração (e/ou expansão) iremos denotar a decomposição dominada como

$$TM = E^s \oplus E_1^c \oplus \cdots \oplus E_l^c \oplus E^u.$$

As distribuições E_i^c são chamadas de distribuições centrais.

A definição de hiperbolicidade parcial às vezes é mais restritiva. Existem autores que requerem que ambas distribuições extremas sejam uniformes, essa versão é dita hiperbolicidade parcial forte.

Ainda mais, quando definindo dominação, existem autores que pedem que a expansão máxima de $df^l|_{E_i}$ em qualquer ponto $x \in \Lambda$ seja menos que a expansão mínima de $df^l|_{E_{i+1}}$ em qualquer ponto de Λ . Hirsch, Pugh e Shub (1977) chamam essa versão de

hiperbolicidade absolutamente normal e chamam a versão que foi apresentada acima de hiperbolicidade normal relativa.

No restante do capítulo iremos adotar uma definição que é comum em trabalhos modernos, mas que, como mostraremos, é um caso da definição acima de decomposição dominada. Hiperbolicidade parcial pode ser definida da seguinte maneira:

Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de uma variedade compacta M é parcialmente hiperbólico se existe uma decomposição não trivial do fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ que é invariante sob df . Ainda, existe métrica Riemanniana para a qual existem funções reais contínuas positivas $\nu, \hat{\nu}, \gamma, \hat{\gamma}$ com

$$\nu, \hat{\nu} < 1 \text{ e } \nu < \gamma < \hat{\gamma}^{-1} < \hat{\nu}^{-1}$$

tais que, para qualquer vetor unitário $v \in T_x M$,

$$\begin{aligned} \|df_x v\| &< \nu(x), & \text{se } v \in E^s(x), \\ \gamma(x) &< \|df_x v\| < \hat{\gamma}(x)^{-1}, & \text{se } v \in E^c(x), \\ \hat{\nu}(x)^{-1} &< \|df_x v\|, & \text{se } v \in E^u(x). \end{aligned}$$

Note que, para $u \in E^s(x)$ unitário e para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|df_x^n u\| &= \|df_{f^{n-1}x} \circ df_x^{n-1} u\| \frac{\|df_x^{n-1} u\|}{\|df_x^{n-1} u\|} < \nu(f^{n-1}(x)) \|df_x^{n-1} u\| \\ &< \dots < \nu(f^{n-1}(x)) \dots \nu(f(x)) \nu(x) \|u\|. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, para $v \in E^c(x)$ unitário e $n \in \mathbb{N}$,

$$\|df_x^n v\| > \gamma(f^{n-1}(x)) \dots \gamma(f(x)) \gamma(x) \|v\|.$$

Assim

$$\frac{\|df_x^n u\|}{\|df_x^n v\|} < \frac{\nu(f^{n-1}(x)) \dots \nu(x)}{\gamma(f^{n-1}(x)) \dots \gamma(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\nu(f^i(x))}{\gamma(f^i(x))}.$$

Seja $\delta = \max_{x \in M} \frac{\nu(x)}{\gamma(x)} < 1$. Logo

$$\frac{\|df_x^n u\|}{\|df_x^n v\|} < \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\nu(f^i(x))}{\gamma(f^i(x))} \leq \delta^n.$$

Com o mesmo argumento é possível mostrar que existe $\eta < 1$ tal que para $v \in E^c(x)$ e $w \in E^u(x)$ unitários,

$$\frac{\|df_x^n v\|}{\|df_x^n w\|} < \eta^n, \forall n \geq 1.$$

Assim existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\max\{\delta^N, \eta^N\} < \frac{1}{2}$ e, portanto,

$$\frac{\|df_x^N u\|}{\|df_x^N v\|} < \frac{1}{2} \text{ e } \frac{\|df_x^N v\|}{\|df_x^N w\|} < \frac{1}{2},$$

para $u \in E^s(x)$, $v \in E^c(x)$, $w \in E^u(x)$ e $x \in M$. Dessa forma, essa definição se encaixa no caso de decomposição dominada.

Assim como um difeomorfismo de Anosov, para os difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, os fibrados E^s e E^u são integráveis e tangentes a folheações \mathcal{W}^s e \mathcal{W}^u , respectivamente. Estas folheações são ditas (fortemente) estável e instável, respectivamente. A prova do teorema a seguir pode ser encontrada em Brin e Pesin (1974) e Hirsch, Pugh e Shub (1977):

Teorema 5.1.4. *Assumindo $\dim E^u > 0$ existe uma família única \mathcal{W}^u de subvariedades C^1 imersas $\{\mathcal{W}^u(x) : x \in M\}$ tal que $x \in \mathcal{W}^u(x)$ e $\mathcal{W}^u(x)$ é tangente a $E^u(x)$, para todo $x \in M$. Essa família é invariante no sentido que $f(\mathcal{W}^u(x)) = \mathcal{W}^u(f(x))$, para todo $x \in M$, e as folhas $\mathcal{W}^u(x)$ são uniformemente contraídas por alguma iteração negativa de f . Ainda mais, $\mathcal{W}^u(x)$ é uma laminação contínua de M , significando que em cada ponto existe uma carta local contínua que trivializa as folhas e é uniformemente C^r ao longo de cada folha.*

De maneira geral, folheações fortemente estáveis e instáveis existem para qualquer subconjunto invariante $\Lambda \subset M$ admitindo uma decomposição dominada como acima (conjuntos parcialmente hiperbólicos).

Agora, as propriedades da distribuição central E^c são diferentes. Ainda existem muitas questões em aberto, incluindo a existência de uma folhação tangente a essa direção. O que sabemos é que quando a distribuição central tem dimensão maior que 1, não é geralmente integrável.

Podemos tomar as somas $E^c \oplus E^s$ e $E^c \oplus E^u$ e as folheações tangentes a elas, (fracamente) estável e (fracamente) instável (ou também ditas centro-estável/instável). Quando ambas folheações \mathcal{W}^{cs} e \mathcal{W}^{cu} existem, a interseção das folhas define uma folheação central \mathcal{W}^c e dizemos que o sistema é dinamicamente coerente.

Como hiperbolicidade parcial é uma condição robusta, pequenas perturbações C^1 dos exemplos ainda possuem essa característica. Porém, essas perturbações não são necessariamente conjugadas aos exemplos iniciais, como seria o caso da hiperbolicidade

uniforme e a propriedade de estabilidade estrutural. Ou seja, a condição de hiperbolicidade parcial permanece, mas as propriedades dinâmicas das perturbações podem ser diferentes.

A seguir veremos alguns dos principais exemplos quando se trata de sistemas parcialmente hiperbólicos.

Exemplo 5.1.5 (Automorfismo do Toro). Como no exemplo de um automorfismo toral de Anosov em 3.4.1, um elemento $A \in SL(d, \mathbb{Z})$ induz um difeomorfismo f_A em \mathbb{T}^d . O difeomorfismo é parcialmente hiperbólico se A tem no mínimo um autovalor menor que 1 em módulo (que automaticamente implica que existe um autovalor maior que 1 em módulo). Note que essa família inclui os automorfismos torais de Anosov.

Em dimensão 3, temos possibilidades que podem ser divididas nos seguintes casos:

1. Um autovalor de módulo 1. Nesse caso o autovalor é único e real.
2. Três autovalores diferentes e reais com módulos diferentes de 1. Nesse caso f_A é parcialmente hiperbólica de duas maneiras diferentes: podemos considerar que f_A não tem direção central ou podemos considerar o autovalor do meio como direção central.
3. Dois autovalores complexos. Nesse caso f é parcialmente hiperbólica com a direção central trivial.

As possibilidades de entender difeomorfismos f_A como parcialmente hiperbólicos crescem com dimensões maiores.

Exemplo 5.1.6. Considere $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov e $\{g_x : x \in M\}$ uma família de difeomorfismos de N que dependem suavemente de x e satisfazem

$$\begin{aligned} \max_{x \in M} \|df_{E_f^s(x)}\| &< \min_{x \in M} \min_{y \in N} \|d(g_x^{-1})_y\|^{-1} \\ &\leq \max_{x \in M} \max_{y \in N} \|d(g_x)_y\| < \min_{x \in M} \|df^{-1}|_{E_f^u(x)}\|^{-1} \end{aligned}$$

A função

$$\begin{aligned} F : M \times N &\rightarrow M \times N \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g_x(y)) \end{aligned}$$

é parcialmente hiperbólica.

Podemos comentar também da versão algébrica desse exemplo, dita uma extensão de grupo, no qual G é um grupo de Lie compacto e $\varphi : M \rightarrow G$ uma função suave em M .

Definimos

$$F_\varphi : M \times G \rightarrow M \times G$$

$$(x, y) \mapsto (f(x), \varphi(x)g),$$

A função F_φ é parcialmente hiperbólica pois translações à esquerda são isometrias de G na métrica bi-invariante (invariante sob translações à direita e à esquerda).

Brin e Pesin (1974) mostraram que as extensões de grupo são parcialmente hiperbólicas.

Agora definimos a noção de hiperbolicidade para fluxos, com o objetivo de relacionar com a hiperbolicidade parcial: Sabemos que cada campo vetorial suave \mathcal{X} em uma variedade suave compacta M pode ser unicamente integrado, isto é, dado $x \in M$ existe uma curva suave $\gamma^{(x)} : \mathbb{R} \rightarrow M$, tal que $\gamma^{(x)}(0) = x$ e

$$\left. \frac{d}{ds} \gamma^{(x)}(s) \right|_{s=t} = \mathcal{X}(\gamma^{(x)}(t)),$$

para cada t . Podemos definir um fluxo contínuo $\varphi^t : M \rightarrow M$ tal que $\mathcal{X}(x) = \left. \frac{d}{dt} f^t(x) \right|_{t=0}$ por $\varphi^t(x) = \gamma^{(x)}(t)$.

Definição 5.1.7. Dizemos que $\varphi^t : M \rightarrow M$ é um fluxo de Anosov (ou que M é hiperbólico) se existe uma decomposição do fibrado tangente, para todo $x \in M$,

$$T_x M = E^s(x) \oplus E^0(x) \oplus E^u(x)$$

e constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

1. $E^0(x)$ é o espaço unidimensional gerado pelo vetor $\mathcal{X}(x)$.
2. $d\varphi_x^t E^s(x) = E^s(\varphi^t(x))$ e $d\varphi_x^t E^u(x) = E^u(\varphi^t(x))$, para $t \in \mathbb{R}$.
3. Para $t \geq 0$

$$\|d\varphi_x^t v\| \leq C\lambda^t \|v\|, v \in E^s(x),$$

$$\|d\varphi_x^{-t} v\| \leq C\lambda^t \|v\|, v \in E^u(x).$$

As distribuições $E^s = \bigcup_{x \in M} E^s(x)$ e $E^u = \bigcup_{x \in M} E^u(x)$ integram para folheações estável e instável W^s e W^u , respectivamente, para o fluxo.

Um exemplo de fluxo de Anosov é um fluxo especial sobre um difeomorfismo de Anosov. Dado um difeomorfismo de uma variedade Riemanniana M e uma função suave positiva $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos o espaço quociente

$$M_h = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R}_0^+ : 0 \leq t \leq h(x)\} / \equiv$$

em que \equiv é a relação de equivalência $(x, h(x)) \equiv (f(x), 0)$. O fluxo especial $\varphi^t : M_h \rightarrow M_h$ com uma função teto h move um ponto $(x, 0)$ ao longo de $\{x\} \times \mathbb{R}_0^+$ para $(x, h(x))$, então pula para $(f(x), 0)$ e continua ao longo de $\{f(x)\} \times \mathbb{R}_0^+$.

Em razão da própria definição, dado um fluxo de Anosov φ^t em M compacta, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função φ^t é parcialmente hiperbólica com uma direção central unidimensional gerada pelo campo vetorial.

5.2 ERGODICIDADE EM SISTEMAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICOS

Agora vamos tratar a questão da ergodicidade para sistemas parcialmente hiperbólicos. Seja $\text{diff}^2(M)$ o espaço dos difeomorfismos de classe C^2 de M . Para uma medida suave² μ em M , considere $\text{diff}_\mu^2(M)$ os elementos de $\text{diff}^2(M)$ que preservam μ . Dizemos que $f \in \text{diff}_\mu^2(M)$ é estavelmente ergódico se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \in \text{diff}_\mu^2(M)$ de f , tal que cada $g \in \mathcal{U}$ é ergódico com respeito a μ .

Combinando os resultados que já foram vistos nesse trabalho, temos que os difeomorfismos $f \in \text{diff}_\mu^2(M)$ que são Anosov são estavelmente ergódicos. Note que utilizamos a topologia C^2 em $\text{diff}_\mu^2(M)$ para definir estabilidade ergódica, mas, na maioria dos casos, propriedades que são abertas em $\text{diff}^r(M)$ são C^1 -abertas e propriedades densas são C^r -densas.

Nesta seção comentaremos sobre uma conjectura atribuída a Pugh e Shub (1997) e algumas das versões em que a conjectura foi provada.

Conjectura 5.2.1. *Em uma variedade compacta, ergodicidade é válida para um conjunto aberto e denso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos C^2 que preservam volume (com E^s e E^u não triviais).*

A conjectura foi provada, por exemplo, para o caso em que a distribuição central é unidimensional, por Rodriguez-Hertz, Rodriguez-Hertz e Ures (2006). Avila, Crovisier e Wilkinson (2017) mostraram uma versão C^1 da conjectura, isto é, eles provaram o seguinte teorema:

Teorema 5.2.2. *Ergodicidade estável é C^1 -densa no espaço dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos C^r que preservam volume em uma variedade compacta e conexa, para $r > 1$.*

A conjectura pode reescrita utilizando o conceito de acessibilidade³. Grayson, Pugh e Shub (1994) introduziram esse conceito como substituto para a propriedade de transversalidade das folheações estável e instável em difeomorfismos de Anosov. De

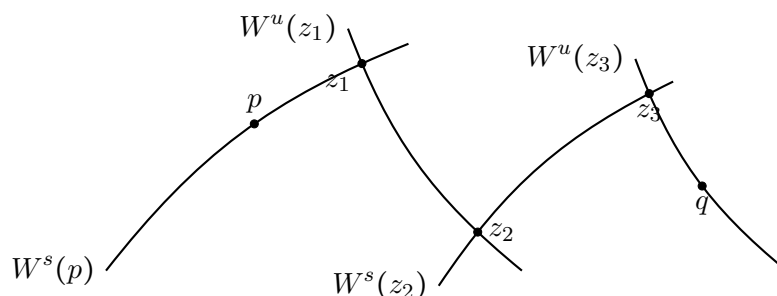
² Equivalente ao volume Riemanniano em M

³ A nomenclatura que vem da Teoria do Controle.

fato, no caso de Anosov, a transversalidade das folheações implica que o difeomorfismo é acessível.

Definição 5.2.3. Seja $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico com decomposição $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$. A função f é acessível se qualquer ponto em M pode ser acessado de qualquer outro por um caminho- us , que é uma concatenação de finitos subcaminhos, cada um inteiramente em uma única folha de \mathcal{W}^s ou de \mathcal{W}^u .

Figura 17 – Ilustração de um caminho- us entre os pontos p e q , passando pelos pontos de interseção z_1, z_2 e z_3 .



Fonte: Elaboração própria.

Acessibilidade é uma relação de equivalência. A classe de acessibilidade de $p \in M$ é o conjunto de todos os pontos $q \in M$ que podem ser alcançados de p ao longo de um caminho- us . Acessibilidade significa que existe apenas uma classe de acessibilidade, que contém todos os pontos.

Podemos enfraquecer ligeiramente a definição de acessibilidade da seguinte maneira:

Definição 5.2.4. Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ é essencialmente acessível se todo conjunto mensurável que é a união de classes de acessibilidades inteiras tem volume total ou zero.

Dizemos que um conjunto é us -saturado se é a união de folhas instáveis e também a união de folhas estáveis. O menor conjunto us -saturado que contém um dado ponto é seu conjunto us -acessível. Esses conjuntos particionam M . Se a partição tem apenas um elemento, f tem a propriedade de acessibilidade. Se todo conjunto mensurável que é a união de conjuntos acessíveis tem medida zero ou total, dizemos que f tem a propriedade de acessibilidade essencial.

Dessa maneira, a conjectura de Pugh e Shub se divide em duas conjecturas:

Conjectura 5.2.5. *Acessibilidade vale para um conjunto denso e aberto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos C^2 (que preservam ou não volume).*

Conjectura 5.2.6. *Um difeomorfismo hiperbólico C^2 que preserva volume essencialmente acessível é ergódico.*

Os autores da conjectura, juntamente com M. Grayson provaram inicialmente a conjectura 5.2.6, em (GRAYSON; PUGH; SHUB, 1994) com as hipóteses adicionais de f ser dinamicamente coerente e center bunched (traduzimos bunched como agrupado ou acumulado).

Definição 5.2.7. Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico é dito center bunched se as funções $\nu, \hat{\nu}, \gamma$ e $\hat{\gamma}$ podem ser escolhidas de maneira que $\nu < \gamma\hat{\gamma}$ e $\hat{\nu} < \gamma\hat{\gamma}$.

A condição de ser center bunched é uma condição técnica que, de certa maneira, significa que a ação da derivada df em E^c está perto suficiente de ser conformal, de maneira que a hiperbolicidade de f domine a não-conformalidade de df em E^c .

Em relação a 5.2.5, a estabilidade C^r ainda está em aberto, porém o caso C^1 foi estabelecido em (DOLGOPYAT; WILKINSON, 2003).

Burns e Wilkinson (2005) provaram uma versão de 5.2.6 para difeomorfismos que satisfazem apenas a condição de ser center bunched. Isto é, o teorema provado é o seguinte:

Teorema 5.2.8. *Seja f difeomorfismo C^2 , preservando medida, parcialmente hiperbólico e center bunched. Se f é essencialmente acessível, então f é ergódico.*

A condição de center bunching vale para qualquer f parcialmente hiperbólico quando $\dim(E^c) = 1$, logo

Corolário 5.2.9. *Considere f difeomorfismo C^2 , preservando medida, parcialmente hiperbólico com $\dim(E^c) = 1$. Se f é essencialmente acessível, f é ergódico.*

Como no caso de Anosov, as distribuições E^s e E^u de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos são tangentes as folheações \mathcal{W}^s e \mathcal{W}^u , respectivamente. Porém, as distribuições podem não gerar TM , o que implica que o argumento de Hopf pode falhar sem condições adicionais. Com as condições de acessibilidade essencial e center bunched, podemos aplicar o argumento de Hopf.

Vamos comentar algumas das principais ideias das provas de ergodicidade para sistemas que possuem comportamento hiperbólico. Já foi comentado em 4.2 o argumento de Hopf. Podemos enunciá-lo de outra maneira:

Considere (M, \mathcal{B}, μ) espaço de medida em que M é espaço métrico compacto, \mathcal{B} σ -álgebra de Borel e μ medida invariante por um homeomorfismo f . Seja \mathcal{T} a subálgebra

que consiste em conjuntos de Borel que tem medida zero ou total. Dada uma subálgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, sua saturação com respeito a conjuntos de medida zero é

$$\text{Sat}_0(\mathcal{A}) = \{B \in \mathcal{B} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ com } \mu(A \triangle B) = 0\}^4.$$

Aqui utilizaremos novamente as relações de equivalência estáveis e instáveis. Denotamos por \mathcal{S} a σ -álgebra de Borel gerada pelas classes estáveis e por \mathcal{U} a σ -álgebra de Borel gerada pelas classes instáveis. Podemos escrever o argumento de Hopf da seguinte maneira:

Teorema 5.2.10. *Se $\text{Sat}_0(\mathcal{S}) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$, então f é ergódico.*

Para a prova desse fato, utilizamos as ideias do Teorema Ergódico de Birkhoff, isto é, utilizamos as médias temporais de uma função contínua φ .

Demonstração. Suponha que f não é ergódica. Então existe função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que φ^+ não é constante quase sempre. Para $r \in \mathbb{R}$ considere

$$\begin{aligned} G_+(r) &= \{x \in M : \text{o limite } \varphi^+(x) \text{ existe e } \varphi^+(x) < r\} \\ G_-(r) &= \{x \in M : \text{o limite } \varphi^-(x) \text{ existe e } \varphi^-(x) < r\}. \end{aligned}$$

Estes conjuntos de Borel são claramente invariantes por f e como φ^\pm é constante em classes estáveis/instáveis, temos que $G_+(r) \in \mathcal{S}$ e $G_-(r) \in \mathcal{U}$ e, pelo Teorema de Birkhoff, esses conjuntos diferem por um conjunto de medida zero. Logo,

$$G(r) = G_-(r) \cap G_+(r) \in \text{Sat}_0(\mathcal{S}) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{U}) = \mathcal{T}.$$

Como φ^+ é não constante quase sempre, existe r tal que $0 < \mu(\{x \in M : \varphi^+(x) < r\}) < 1$ e, portanto, $G(r) \notin \mathcal{T}$, uma contradição. Dessa forma, φ^+ é constante quase sempre e a ergodicidade segue. \square

Para um difeomorfismo de Anosov, a classe de equivalência estável contendo um ponto x é a folha $W^s(x)$ da folheação estável. Similarmente para as classes de equivalência instáveis. Então, a σ -álgebra \mathcal{S} consiste dos conjuntos de Borel U para os quais $W^s(x) \subset U$, sempre que $x \in U$. A relação da hipótese do argumento de Hopf segue da propriedade de continuidade absoluta das folheações estável e instável.

No caso de f ser parcialmente hiperbólico, as folheações estável e instável ainda geram σ -álgebras de Borel \mathcal{B}^s e \mathcal{B}^u , respectivamente. Entretanto, temos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^s$ e $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}^u$, pois as classes estáveis/instáveis contendo um ponto x podem ser maiores que $W^s(x)$ e $W^u(x)$, em razão da possível contração/expansão na direção central. Segue que

$$\text{Sat}_0(\mathcal{S}) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{U}) \subset \text{Sat}_0(\mathcal{B}^s) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{B}^u).$$

⁴ $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$

Da acessibilidade essencial, temos que todo conjunto que é a união de conjuntos acessíveis tem medida zero ou um, logo $\text{Sat}_0(\mathcal{B}^s \cap \mathcal{B}^u) = \mathcal{T}$.

Dessa maneira, como $\text{Sat}_0(\mathcal{B}^s \cap \mathcal{B}^u) \subset \text{Sat}_0(\mathcal{B}^s) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{B}^u)$ para garantir a ergodicidade de f é suficiente mostrar que

$$\text{Sat}_0(\mathcal{B}^s) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{B}^u) \subset \text{Sat}_0(\mathcal{B}^s \cap \mathcal{B}^u).$$

Perceba que não é verdade que dada duas σ -álgebras \mathcal{A} e \mathcal{C} sempre temos

$$\text{Sat}_0(\mathcal{A}) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{C}) = \text{Sat}_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}).$$

De fato, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 5.2.11. Sejam $M = [0, 1]^2 = I^2$ equipado com a medida de Lebesgue, \mathcal{A} a subálgebra de Borel dos conjuntos de segmentos verticais $\{x\} \times I$ e \mathcal{C} a subálgebra de Borel dos conjuntos que ou contêm $I \times \{0\}$ ou são disjuntos de $I \times \{0\}$.

Como $I \times \{0\}$ tem medida de Lebesgue nula em I^2 , então $\text{Sat}_0(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, pois qualquer conjunto de Borel é igual, a menos de um conjunto de medida nula, a um conjunto de \mathcal{C} . Assim,

$$\text{Sat}_0(\mathcal{A}) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{C}) = \text{Sat}_0(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} = \text{Sat}_0(\mathcal{A}).$$

Ainda, temos que \mathcal{A} consiste de conjuntos que são uniões de segmentos verticais. Considere $S \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$. Então, ou S contém $I \times \{0\}$, ou é disjunto de $I \times \{0\}$. No primeiro caso, S deve conter todos os segmentos verticais e $S = M$. No segundo caso, como S é união de segmentos verticais, temos que $S = \emptyset$. Logo $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{M, \emptyset\}$ e $\text{Sat}_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) = \mathcal{T}$. Daí,

$$\text{Sat}_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) = \mathcal{T} \neq \mathcal{A} \subset \text{Sat}_0(\mathcal{A}) = \text{Sat}_0(\mathcal{A}) \cap \text{Sat}_0(\mathcal{C}).$$

Existem algumas condições sob quais a igualdade vale quando f é essencialmente acessível. Uma delas é pedir que f seja dinamicamente coerente e as folheações \mathcal{W}^{cs} e \mathcal{W}^{cu} sejam absolutamente contínuas. Esta é uma hipótese forte, uma folheação central “típica” não é absolutamente contínua, veja (PESIN, 2004).

Outra condição, como vimos acima, é pedir que f além de ser essencialmente acessível e dinamicamente coerente, seja center bunched. Nesse caso, em (GRAYSON; PUGH; SHUB, 1994) os autores utilizam uma coleção de conjuntos especiais em cada ponto $x \in M$, chamados de Juliennes⁵. Pugh e Shub comentam que esses conjuntos são naturais quando estamos analisando holonomias.

⁵ A nomenclatura vem do corte Julienne em função do seu formato.

As Juliennes podem ser vistas como “bolas” distorcidas pela dinâmica. Isto é, fixado inteiro $n \geq 0$, um ponto $x \in M$ e constantes τ, σ , tais que $0 < \tau < \sigma < 1$, denote

$$B_n^s(x, \tau) = \{y \in W^s(x) : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \tau^n\}$$

e

$$B_n^u(x, \tau) = \{y \in W^u(x) : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \tau^n\}.$$

A Julienne $J_n(x)$ é definida como a folheação produto

$$J_n(x) = B_n^s(x, \tau) \times B_n^u(x, \tau) \times B^c(x, \sigma^n),$$

em que $B^c(x, \sigma^n)$ é uma bola em $W^c(x)$ centrada em x com raio σ^n . Também temos as respectivas Juliennes centro-estável e centro-instável como as seguintes folheações produto:

$$J_n^{cs}(x) = B_n^s(x, \tau) \times B^c(x, \sigma^n), \quad J_n^{cu}(x) = B_n^u(x, \tau) \times B^c(x, \sigma^n).$$

A construção desses conjuntos garante propriedades que são suficientes para concluir a ergodicidade.

Estes são alguns resultados nessa direção, porém existem diversos outros avanços interessantes na área, que continua a crescer.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, estudamos a hiperbolicidade em sistemas dinâmicos diferenciáveis. No capítulo 3, vimos diversas propriedades de conjuntos hiperbólicos, como por exemplo a existência de uma norma Riemanniana adaptada, que torna o comportamento hiperbólico mais evidente. Vimos também que a hiperbolicidade é uma propriedade robusta, isto é, conjuntos hiperbólicos persistem sob pequenas perturbações C^1 . Além disso, o resultado mais importante desse capítulo foi o Teorema da Variedade Estável, o qual garante a existência de variedades estáveis e instáveis locais de tamanho uniforme para cada ponto do conjunto hiperbólico. Tais conjuntos são subvariedades mergulhadas de mesma classe de diferenciabilidade do difeomorfismo e são tangentes às distribuições estável e instável, respectivamente. Iterando as variedades estáveis e instáveis locais, construímos as variedades estáveis e instáveis globais.

No capítulo 4, foram revisados alguns conceitos da Teoria Ergódica, principalmente o Teorema Ergódico de Birkhoff. Além disso, estudamos o argumento de Hopf, o qual aproveita as propriedades das variedades estáveis e instáveis para mostrar que as médias temporais são constantes quase sempre. O objetivo desse capítulo foi mostrar a ergodicidade de difeomorfismos de Anosov conservativos de classe C^2 , utilizando o argumento de Hopf. Para esse fim, é necessário garantir que as folheações estável e instável sejam absolutamente contínuas.

No capítulo 5, apresentamos generalizações da noção clássica de hiperbolicidade, como a decomposição dominada e a hiperbolicidade parcial. Estas noções enfraquecem as condições impostas pela hiperbolicidade uniforme, permitindo a existência de uma direção central que não apresenta comportamento uniformemente expansivo ou contrativo. Por fim, discutimos a ergodicidade em sistemas parcialmente hiperbólicos, enunciando a conjectura de Pugh–Shub, a qual sugere que a ergodicidade é uma propriedade aberta e densa nos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de classe C^2 . Esta conjectura aponta para direções naturais de futuras pesquisas na área.

REFERÊNCIAS

- ANOSOV, D. V. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, v. 90, p. 1–235, 1967. Translation from Russian: Trudy Mat. Inst. Steklov., Vol. 90, 1967, pp. 3–210. Disponível em: <http://mi.mathnet.ru/tm2795>).
- ANOSOV, D. V.; SINAI, Y. G. Certain smooth ergodic systems. *Russ. Math. Surv.*, IOP Publishing, v. 22, n. 5, p. 103–167, out. 1967.
- AVILA, A.; CROVISIER, S.; WILKINSON, A. C^1 density of stable ergodicity. set. 2017.
- BARREIRA, L.; PESIN, Y. *Introduction to smooth ergodic theory*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2013. (Graduate studies in mathematics).
- BARREIRA, L.; VALLS, C. *Dynamical Systems*. 2013. ed. London, England: Springer, 2012. (Universitext).
- BONATTI, C.; DIAZ, L.; VIANA, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*. 2005. ed. Berlin, Germany: Springer, 2004. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences).
- BRIN, M.; STUCK, G. Introduction. In: *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. p. xi–xii.
- BRIN, M. I.; PESIN, J. B. Partially hyperbolic dynamical systems. *Math. USSR*, IOP Publishing, v. 8, n. 1, p. 177–218, fev. 1974.
- BURNS, K.; WILKINSON, A. *On the ergodicity of partially hyperbolic systems*. 2005. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/math/0510234>).
- CROVISIER, S.; POTRIE, R. *Introduction to partial hyperbolicity*. 2015. Notas de minicurso, Trieste Lecture Notes. Disponível em: <http://www.cmat.edu.uy/~rpotrie/documentos/pdfs/Crovisier-Potrie-PH.pdf>). Acesso em: 3 set. 2025.
- DOLGOPYAT, D.; WILKINSON, A. Stable accessibility is c^1 dense. In: MELO, W. de; VIANA, M.; YOCOZO, J.-C. (Ed.). *Geometric methods in dynamics (II) : Volume in honor of Jacob Palis*. Société mathématique de France, 2003, (Astérisque, 287). p. 33–60. Disponível em: https://www.numdam.org/item/AST_2003__287__33_0/).
- FOLLAND, G. B. *Real analysis*. 2. ed. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 1999. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts).
- GRAYSON, M.; PUGH, C.; SHUB, M. Stably ergodic diffeomorphisms. *Ann. Math.*, JSTOR, v. 140, n. 2, p. 295, set. 1994.
- HASSELBLATT, B.; KATOK, A. Preface. In: *Handbook of Dynamical Systems*. [S.l.]: Elsevier, 2002, (Handbook of dynamical systems). p. vii–viii.
- HIRSCH, M. W.; PUGH, C. C.; SHUB, M. *Invariant manifolds*. [S.l.]: Lecture Notes in Mathematics, 1977.

- HOPF, E. Fuchsian groups and ergodic theory. *Trans. Am. Math. Soc.*, American Mathematical Society (AMS), v. 39, n. 2, p. 299–314, 1936.
- KATOK, A.; HASSELBLATT, B. PREFACE. In: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. p. xiii–xviii.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2012. (Graduate texts in mathematics).
- LEE, J. M. *Introduction to Riemannian manifolds*. 2. ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019. (Graduate texts in mathematics).
- LIMA, E. L. *Variiedades diferenciáveis*. [S.l.]: IMPA, 2007.
- MANE, R. *Persistent Manifolds are Normally Hyperbolic*. Tese (Doutorado) — IMPA, 1973.
- MANE, R. *Ergodic theory and differentiable dynamics*. 1987. ed. Berlin, Germany: Springer, 1987. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge).
- NETO, A. L.; CAMACHO, C. *Teoria Geométrica das Folheações*. 2. ed. Rio de Janeiro, Brazil: IMPA, 2019. 244 p. ISBN 978-85-244-0452-8.
- PESIN, J. B. Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents. *Math. USSR*, IOP Publishing, v. 10, n. 6, p. 1261–1305, dez. 1976.
- PESIN, Y. *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society, 2004. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics).
- PUGH, C.; SHUB, M. Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity. *J. Complex.*, Elsevier BV, v. 13, n. 1, p. 125–179, mar. 1997.
- ROBINSON, C. *Dynamical systems*. 2. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998. (Studies in Advanced Mathematics).
- RODRIGUEZ-HERTZ, F.; RODRIGUEZ-HERTZ, M.; URES, R. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1d-center bundle. 2006.
- SAKAI, T. *Riemannian Geometry*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996. (Translations of Mathematical Monographs).
- SMALE, S. Differentiable dynamical systems. *Bull. New Ser. Am. Math. Soc.*, American Mathematical Society (AMS), v. 73, n. 6, p. 747–817, 1967.
- VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 2^a. ed. [S.l.]: SBM, 2019. 520 p.
- WEN, L. *Differentiable dynamical systems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2016. (Graduate studies in mathematics).
- WILKINSON, A. Smooth ergodic theory. abr. 2008.