

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENGENHARIA

UM ESQUEMA ADAPATIVO PARA UM SISTEMA DE
POUSO AUTOMÁTICO PARA AVIÃO

JOÃO BOSCO DA MOTA ALVES

TESE SUBMETIDA A APRECIÇÃO COMO REQUISITO
PARCIAL PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE:
MESTRE EM CIÊNCIAS DE ENGENHARIA

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
JUNHO - 1973

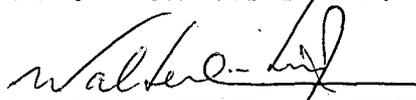
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA
A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM CIÊNCIAS"
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO ORIEN-
TADOR E PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

PROF. RAJAMANI DORAISWAMI
ORIENTADOR


PROF. DOMINGOS BOECHAT ALVES
INTEGRADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

BANCA EXAMINADORA:

PROF. RAJAMANI DORAISWAMI



PROF. WALTER CELSO DE LIMA

PROF. ROGER POULIQUEN

À meus pais

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Rajamani Doraiswami, orientador, pela maior boa vontade que sempre demonstrou na solução das dificuldades encontradas, contribuindo para que o objetivo da pesquisa fosse concretizado.

- Aos Professores Nicole Pouliquen, Roger Pouliquen e Walter Celso de Lima, por assegurarem o incentivo necessário em assuntos de controles.

- Aos órgãos CAPES e BNDE pelo financiamento que possibilitou este trabalho.

- Ao departamento de Física, pela boa vontade e colaboração prestadas.

- Ao Departamento de Ciências Estatísticas e da Computação pela paciência e pelo carinho dispensados.

- Aos colegas Vânia Conceição Tavares, João Nildo de Souza-Viana e Luiz Carlos Duclós, pela Cooperação na elaboração de programas de computação.

- Aos alunos do Centro de Estudos Básicos e Pós-Graduação - da UFSC, cujo relacionamento possibilitou condições psicológicas que tornaram mais fácil este trabalho.

- Aos professores, alunos e funcionários do Centro Tecnológico da UFSC, pela boa vontade em qualquer ocasião.

- Ao Diretorio do Centro de Estudos Básicos da UFSC pelo trabalho de impressão.

- À minha mulher, Bernardete, e ao meu irmão, Adilson, pela valiosa colaboração nos serviços de datilografia e impressão.

- Aos amigos Nery e Flavio pelo serviço de impressão.

Sem qualquer dos presentes acima este trabalho de tese jamais seria possível.

S U M A R I O

Resumo	01
Summary.....	02
CAPÍTULO 1-Introdução.....	03
CAPITULO 2-Definição do Problema.....	07
2.1- Descrição resumida da sustentação do avião no ar....	07
2.2- Descrição resumida do pouso.....	09
2.3- Pressuposições gerais.....	10
CAPITULO 3 - Modelo Matemático.....	12
3.1- Equações do avião para o movimento longitudinal....	12
3.2- Utilização da técnica de espaço de estado.....	16
CAPITULO 4- Índice de Desempenho.....	18
4.1- Utilização do Conceito ID.....	18
4.2- Seleção do ID para o sistema de pouso em questão....	20
CAPITULO 5- Otimização	26
5.1- Problema de pouso.....	26
5.2- Problema de "TRACKING".....	26
5.3- Lei de controle.....	32
CAPITULO 6 - Simulação.....	36
6.1- Considerações.....	36
6.2- Programa Executado.....	36
6.3- Exatidão do programa.....	36
CAPITULO 7- Controlabilidade e Observabilidade.....	39
7.1- Considerações.....	39
7.2- Controlabilidade.....	39
7.3- Observabilidade.....	42
CAPITULO 8- Estabilidade.....	43
8.1- Considerações.....	43
8.2- Método Direto de LYAPUNOV.....	43
8.3- Análise da Estabilidade do Sistema de Pouso do Avião.....	44
CAPITULO 9- Sensibilidade.....	46
9.1- Considerações.....	46
9.2- Análise da sensibilidade.....	47
9.3- Sensibilidade dos estados.....	49
CAPITULO 10- Esquema Adaptativo.....	56
10.1- Considerações.....	56
10.2- Esquema Adaptativo.....	58
10.3- Índice de Desempenho para o esquema adaptativo.....	60

10.4-	Cálculo da variação do ID com os parâmetros da otimização.....	62
10.5-	Resumo da aplicabilidade prática do esquema adaptativo.....	64
CAPITULO 11-	Conclusões.....	66
	Bibliografia-.....	70

R E S U M O

O presente trabalho foi desenvolvido no sentido de assegurar conforto e segurança no pouso do avião. Consta de um sistema de pouso automático, o qual foi otimizado e depois sugerido um Esquema Adaptativo que cumprirá esta exigência.

Apesar do sistema de pouso em questão já haver sido bastante testado e utilizado, além da otimização, foram efetuadas análises sobre a controlabilidade e observabilidade, no sentido de se verificar a viabilidade de otimizá-lo. Também foi feita uma análise sobre a Estabilidade do mesmo, o que - mostrou a eficiência do modelo.

Após a otimização, foi, o sistema, simulado no computador digital 1130 e dessa simulação adquirido muito conhecimento prático do mesmo.

Porém, a seriedade de uma terrisagem não admite falhas no sistema de pouso automático. Dai a necessidade de não se admitir variações nas trajetórias de estado do processo. Com esse problema em vista, foi feita uma análise da Sensibilidade, na qual tomou-se conhecimento sobre a variação da trajetória de estado com cada parâmetro do modelo matemático do avião. Em seguida, um esquema adaptativo foi sugerido, com a finalidade de compensar a trajetória do avião quando, por variações dos parâmetros do avião, meio ambiente, etc., se fizer necessário.

O esquema adaptativo não dispensa a otimização do sistema, visto que suas correções, por motivos de problemas de estabilidade, devem ser pequenas e tão rápidas quanto possível.

S U M M A R Y

The present work was developed in order to assure comfort and security on the landing of the plane. It consists of a system of automatic landing, which has been optimized and after suggested an adaptative scheme that will perform this exigence.

In spite of the landing system refferred had already been tested and used, besides the optimization, analysis' have been made over the Control and observation, in order to find out the viability of optimize it. Also was made an analysis over the stability of the same, that showed the efficiency of the model.

After the optimization, the system was simulated ' in the computer 1130, and, from this simulation, a great deal of practical learning of the same was acquired.

However, the seriousness of a landing, does not admit mistakes in the automatic landing system. So, the necessity of non admittance of variations in the trajectory of the state of the process. With this problem in view, was made an analysis of the sensibility, from which knowledge was taken about the variation of the trajectory of state with each parameter of the mathematic model of plane. After, an adaptative-scheme was suggested, with the finality of compensate the plane's trajectory when, by variations of the plane's parameters environment, etc, will be need.

The adaptative does not disperse the optimization - of the system, due that its corrections, by reasons of stability problems, must be little and as fast as possible.

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

Quando se fala em automatismo, é praxe lembrar em máquinas substituindo o homem em tarefas repetitivas, no sentido de fazer com que o homem descanse um pouco de trabalho braçal e arranje tempo para raciocinar um pouco mais.

Será que é isso mesmo que ocorre? Será que o automatismo é dirigido somente ao lado humano da civilização? Será que o homem foi a peça fundamental de toda uma criação e seu de corrente desenvolvimento? *Acha-se que não.*

É lastimável que este mesmo automatismo, tanto explorado como colaborador primordial do desenvolvimento tecnológico tenha sido criado e desenvolvido com a finalidade primeira de enriquecer militarmente impérios que, fazendo crescer armas do mais alto poder de destruição e, porisso mesmo, a garantia de que as possuindo, possam ditar as leis que regem o comportamento do mundo atual, segundo seus interesses, na maioria das vezes, financeiros.

A grande maioria de livros e periódicos especialistas no assunto trazem, geralmente, vasta ferramenta ilustradora de problemas de automatismo, em forma de mísseis balísticos com alvos fixos ou móveis, ou qualquer coisa que o valha.

A automatização de uma indústria traz consigo, inevitavelmente, o desemprego.

Estas, dentre tantas, são as principais desvantagens da má aplicação do automatismo. As vantagens da boa aplicação (respeitando os direitos humanos) dispensa o comentário, pois os acima citados dispositivos de publicação trazem com seus exemplos balísticos uma grande variedade de tais aplicações.

Uma pergunta se faz necessária: *Para quem e porque assim se refere?*

Aos novos estudantes do automatismo e por uma forma de conscientização, pois acreditamos que os antigos, responsáveis ou não pela má aplicação desta técnica, já devem ser conscientizados, e seja qual for sua filosofia, é bem difícil mudá-la, embora tenhamos, também, consciência de que esses novos serão futuramente, responsáveis ou não pela má . . . etc.

E é exatamente por não acreditarmos no futuro das soluções para esse problema, por não possuímos nenhuma, mesmo apelos que mereçam créditos por parte competente, que chegando, não a um abandono, porém, a uma forma de luta há muito esquecida (*conscientização*), no entanto propomos a esperar que desapareça o *animal irracional* dentro da espécie humana, embora seja, para nós, um pouco difícil de admiti-lo.

O nosso trabalho não se afasta muito dessas considerações. Consiste em uma *sugestão no sentido de aperfeiçoar a otimização de um sistema de pouso automático para avião*.

O pouso e decolagem de avião, são operações repetitivas. A primeira exige melhor desempenho que a segunda, e será disso que trataremos.

Por mais experiente que seja o piloto, cada vez que o mesmo efetua um pouso, este se transforma em uma tentativa. Os mesmos atenção e cuidados, exigidos na primeira vez se fazem necessários. Portanto, com um mecanismo automático, desde que o mesmo tenha um bom desempenho, nas mais variadas condições de tempo do aeroporto, o pouso pode deixar de constituir uma forma de perigo aos passageiros e tripulação do avião.

Porém, este sistema de pouso automático não dispensa totalmente o piloto, pois não pode haver variação na velocidade do avião, o que pode dificultar sua adaptação à missões, embora saibamos da possibilidade de se projetar um sistema para esse fim, mesmo que dele não tomemos parte.

Resumidamente, podemos mostrar o desenvolvimento de nosso trabalho. Ele dispõe basicamente de três partes, das quais faremos um comentário na tentativa de uma melhor compreensão por parte dos leitores.

A primeira parte se constitui de uma apresentação do projeto do Sistema de pouso e sua otimização.

Nos segundo e terceiro capítulos, é definido o problema e apresentado um modelo temático para o sistema, bastante testado e prático.

Do terceiro ao oitavo, se mostra a otimização do sistema de pouso e o necessário para se poder otimizar um sistema, que são: *Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade*.

Também nessa segunda parte é colocado um capítulo sobre a simulação do computador digital, no qual é explanada com detalhes as dificuldades encontradas em simular um sistema complexo como este. A principal razão da inclusão de um capítulo sobre a simulação, reside na dificuldade prática na computação da otimização.

A terceira parte, a qual constitui a parcela mais importante no presente trabalho, podemos subdividir em outras três partes. A primeira que é uma análise da sensibilidade do sistema de pouso já otimizado, cuja necessidade mora no fato de que:

1) O sistema é otimizado segundo o modelo matemático escolhido, que mesmo sendo um modelo já bastante testado e prático, nunca representará idealmente o sistema, portanto é passivo de algumas modificações.

2) Com essas modificações, a trajetória deixará de ser ótima, visto que esta trajetória ótima foi desenvolvida a partir de valores supostamente constantes.

3) Se a trajetória não é ótima, o avião pode aterrisar em um ponto-de-toque não situado na pista, ou mesmo, as correções podem ser abruptas o que ocasionaria um pouso, caso pousasse, não suave.

Por estas três razões fizemos uma análise da sensibilidade, cujo valor principal está em se conhecer a variação dos estados do sistema, com a variação de cada parâmetro do modelo do avião.

Em seguida é proposto um esquema adaptativo, que fará a compensação para a variação que houver na trajetória, decorrente da modificação nos parâmetros do modelo, etc.

Finalizando a última parte, e como é necessário um comentário sobre o proposto desenvolvimento, foi colocado também' um capítulo inteiro sobre as conclusões, nas quais, na medida ' do possível, se incluem alguns tópicos referentes a experiência por nós adquiridas no assunto em questão.

Sabemos que, por não sermos donos de nossas próprias ' vidas, não o somos, também, da dos outros.

E, tampouco achamos que vale a pena construirmos *uma* vida, a nossa, com a finalidade de *outras* destruímos.

Por nós, o tempo e o nosso trabalho, de testa, dirão.

uma

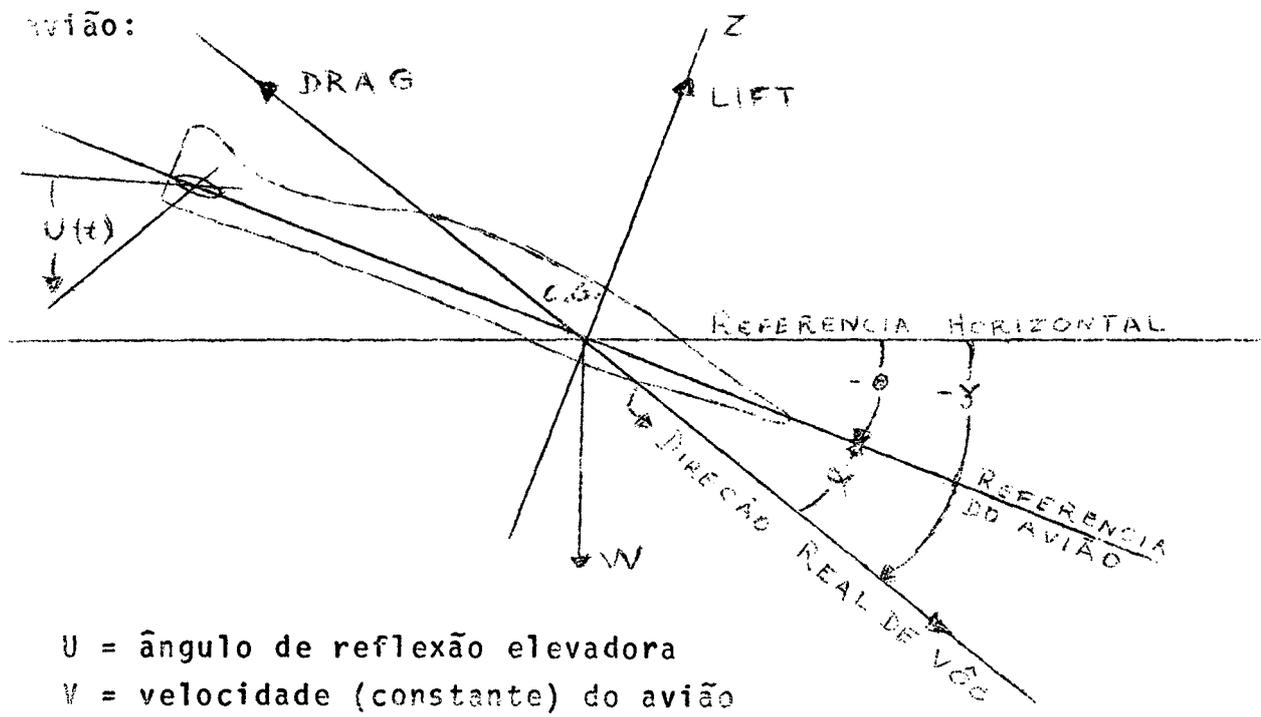
CAPÍTULO II

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - DESCRIÇÃO RESUMIDA DA SUSTENTAÇÃO DO AVIÃO NO AR

2.1.1 - Sustentação do avião no ar

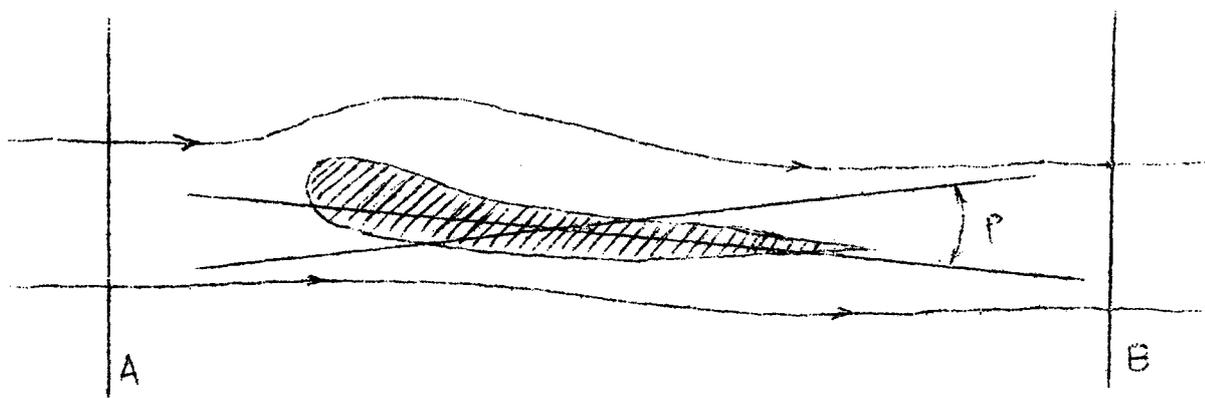
Antes se definam as coordenadas e ângulos



- U = ângulo de reflexão elevadora
- V = velocidade (constante) do avião
- θ = ângulo de inclinação do avião (pitch angle)
- α = ângulo de ataque do avião
- γ = ângulo de caminho de planeio (glide path angle)
- W = peso do avião
- CG = centro de gravidade do avião

Quando o avião se encontra em pleno vôo, i. é., na presença de um fluxo contínuo de ar incidindo sobre sua asa,

provocando, como ver-se-á, sua sustentação no ar, ele é passivo de um movimento longitudinal, em um plano vertical (movimento de rotação em torno do centro de gravidade), causado por intermédio da variação do "ângulo de deflexão elevadora", $\theta(t)$. Ver-se-á que esse ângulo é limitado, pois ao avião não é permitida uma rotação de 360° e àquele existe também limitação por paradas mecânicas. Portanto, veja-se como se processam essas limitações.



A figura acima mostra um corte sobre a asa do avião. Vêem-se as linhas de fluxo incidindo sobre a mesma. Entre A e B (dois planos perpendiculares às linhas de fluxo), as linhas de fluxo levam o mesmo tempo de percurso. Como a trajetória acima da asa é maior que abaixo da mesma, a velocidade do fluxo, acima é maior. Pelo princípio de Bernoulli, sabemos que a velocidade deste fluxo é aumentada devido a uma queda de pressão no local da ocorrência. Portanto, concluímos que a pressão sobre a asa é menor que sob a mesma, logo o avião será impelido para cima (em geral, será impelido a uma direção perpendicular à direção do movimento do avião), por intermédio de uma força, conhecida como LIFT, e que é dirigida perpendicularmente à direção do movimento do avião.

É evidente que, quanto maior a velocidade do avião maior será essa força. Mais precisamente, o empuxo L (lift) é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do avião V :

$$L \propto V^2 \rightarrow L = K \cdot V^2,$$

onde K deve conter um fator que é a superfície da asa, outro que é a densidade do ar, ρ , e finalmente, um fator C_L , que depende do ângulo "p". Integralmente,

$$\underline{L = C_L \cdot \rho \cdot A \cdot V^2}$$

Com isto, está garantida a sustentação do avião no ar.

2.1.2 - Limitação do Movimento Longitudinal Vertical

À medida que se aumenta o ângulo "p", vai aumentando, também, o LIFT, até que para um determinado valor deste ângulo, teremos o surgimento de turbulência, fazendo com que o LIFT caia o suficiente para não mais haver sustentação do avião no ar (provocando uma queda brusca do avião). Este valor limite de "p", leva ao chamado ângulo de STALL.

Portanto, sabendo da limitação de "p", pelo mesmo motivo, de $U(t)$, e ainda, que esses valores variam de acordo com o modelo de avião, aqui será fixado, para efeito de resolução deste problema, em

$$0^\circ \leq \alpha \leq 18^\circ ,$$

onde α é o ângulo de ataque, e seu limite superior, é o "ângulo de stall". E

$$-35^\circ \leq U(t) \leq 15^\circ$$

Adicionalmente, para valores de $U(t)$ fora, é impossível o processamento, pois esta limitação é efetuada por paradas mecânicas. E, dentro da própria limitação, podemos variar $U(t)$ com o compromisso do ângulo de stall. Porém, esta restrição é colocada na apresentação das restrições referentes aos ângulos definidos do avião. Portanto, esta restrição ao $U(t)$ é suficiente.

2.2 - DESCRIÇÃO RESUMIDA DO POUSO

2.2.1 - Quanto à velocidade do avião

Até o enquadramento da pista, através do contato pelo rádio, com a torre, o avião sofre apenas uma diminuição de velocidade. Após esse enquadramento, há a necessidade de ser a velocidade do avião:

- a) Tão pequena, de modo que o mesmo não pare após o término da pista.
- b) Tão grande, para que o avião não perca a sustentação no ar.

c) Constante, pelas razões "a" e "b".

Isto se dá há poucas dezenas de metros do chão para que, ao atingir uma altitude de poucos centímetros da pista possa cair suavemente, garantido pelo sistema de suspensão do avião, não afetando, assim, sua estrutura.

2.2.2 - Quanto à trajetória

A trajetória deve ser tal que, ao ser iniciada a fase do pouso, deve-se fazer com que, ao atingir o início da pista, o avião esteja a baixa altura, e, sua aproximação vertical em relação à pista, seja bem suave, e ao mesmo tempo, atinja o ponto de toque a uma distancia bastante curta em relação ao início da pista.

2.3 - PRESSUPOSIÇÕES GERAIS

Até o enquadramento da pista, com o avião a uns 100 pés de altitude, aproximadamente, o contato é feito pelo rádio, através do sistema de instrumento de pouso (ILS). A partir daí, ou seja, iniciada a fase de pouso, o contato pelo rádio não é mais possível, devido as perturbações eletromagnéticas, o que obriga ao piloto fazer contato visual com a terra. Isto se reforça pela necessidade do piloto escolher um confortável e suave - "ângulo de caminho de planeio" (glide path angle), o qual gira em torno de -3° , aproximadamente.

O problema de pouso descrito aqui se relaciona apenas com a fase de pouso i.é, a partir dos 100 pés de altitude do movimento descendente do avião. Portanto, até esse ponto, o avião é guiado pelo controle de tráfego aéreo. E, ao avião, é permitida uma entrada na fase de pouso com variações de altitude e razões de altitude de 120 a 80 pés, e, -16 a -24 pés/s, respectivamente. Para valores fora desta variação, o Sistema de Pouso Automático, em análise, não deve ser aplicado. Finalmente, apenas o movimento longitudinal (movimento em um plano vertical), deve ser considerado. Precisa-se do movimento lateral até os 100 pés acima citados, i.é, até o início da fase de pouso

lac

Durante esta fase de pouso, o avião estará sujeito a rajadas de vento e vento brando permanente. Rajadas de vento são de primordial importância, pois tendem a ser aleatórias, o que podem deslocar o avião para fora da pista. Já o vento brando permanente pode ser considerado como um deslocamento permanente do avião. Aqui, neste problema, as rajadas de vento, por não poderem ser medidas, assume-se seu valor médio zero.

C A P I T U L O I I I

M O D E L O M A T E M Á T I C O

3.1 - EQUAÇÕES DO AVIÃO PARA O MOVIMENTO LONGITUDINAL

Em qualquer projeto de sistemas de controle, uma descrição matemática sucinta se faz necessária. Esta descrição pode, então, ser feita através de uma equação diferencial de ordem "n", "n" equações diferenciais de primeira ordem, ou, uma função de transferência. É, também, necessário, neste caso particular, uma descrição completa do avião, relatando as variáveis de resposta, variáveis de controle e variáveis de estado mensuráveis.

As equações do avião (1) :

$$\theta(s) = \frac{K_s [T_s s + 1]}{s \left[\frac{s^2}{\omega_s^2} + \frac{2\zeta}{\omega_s} s + 1 \right]} U(s) \quad \text{eq. 3.1.1}$$

$$h(s) = \frac{V}{s (T_s s + 1)} \theta(s) \quad \text{eq. 3.1.2}$$

foram desenvolvidas procedendo-se de uma consideração dos momentos e forças aerodinâmicas e da aplicação das leis fundamentais da mecânica. Para linearizá-las, assumiu-se que o desvio da condição de equilíbrio de vôo é pequeno.

Assume-se que o ângulo de caminho de planeio, γ , é suficientemente pequeno, a ponto de considerarmos $\sin \gamma = \gamma$ e $\cos \gamma = 1$. Isto é válido devido a geometria de pouso. Finalmente, assume-se que a velocidade, V , é mantida essencialmente constante durante o pouso, utilizando, para isso, o TROTTLE CONTROL; Portanto, o movimento longitudinal do avião é governado inteiramente pelo ângulo de deflexão elevadora $U(t)$, o qual, é a única variável de controle.

O uso dessas suposições leva às tão conhecidas equações de "período curto", do movimento do avião. Assumiremos K_S , T_S , W_S e ξ , invariantes no tempo e as definimos, para este caso particular como:

$$\begin{aligned} K_S &= -0.95 \quad s^{-1}, \text{ Ganho de período curto (p.c.)} \\ T_S &= 2.5 \quad s, \text{ Constante de tempo de p.c.} \\ W_S &= 1.0 \quad \text{rad/s}, \text{ Frequência de ressonância de p.c.} \\ \xi &= 0.5, \text{ Razão de amortecimento de p.c.} \end{aligned}$$

As equações do avião, no plano s , são: eq. 3.1.1 e eq. 3.1.2. Reunindo as duas, tem-se:

$$h(s) = \frac{K_S V}{S^2(S^2/W_S^2 + 2 \xi S/W_S + 1)} U(s)$$

$$\frac{S^4 h(s)}{W_S^2} + \frac{2 \xi S^3 h(s)}{W_S} + S^2 h(s) = K_S V U(s)$$

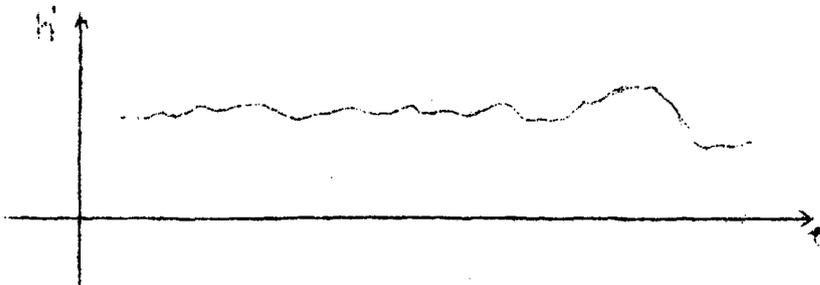
ou

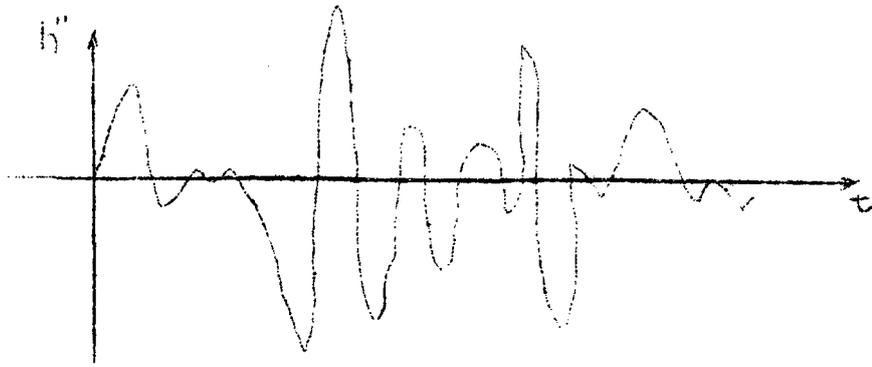
$$\frac{d^4 h(t)}{dt^4} + 2 \xi W_S \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + W_S^2 \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = K_S V W_S^2 U(t)$$

Da equação no tempo acima, como se nota, será razoavelmente difícil medir todos os estados h' , h'' , h''' e h . No máximo, são facilmente mensuráveis h e h' , com o auxílio de um radar altimétrico e um medidor de razão barométrica, respectivamente. h'' será muito difícil medi-lo, assim como h''' . Duas razões fortes levam a abandoná-los:

a) Deseja-se um pouso bem suave, porisso h'' é quase imperceptível, tornando-se bastante difícil sua leitura.

b) Para medi-lo através de diferenciação, é pior, pois sua amplitude se confunde com o ruído, dificultando a leitura. As ilustrações mostram tal dificuldade.





h''' , por sua vez, com muito mais razão, será abandonado como variável de estado, pois é muito mais difícil medi-la.

Em vista disso foi escolhido $\theta(t)$ e $\theta'(t)$, para substituir h'' e h''' , pois são facilmente mensuráveis através do GYROS

Portanto, precisa relacionar h , h' , θ e θ' , que a partir de agora, serão as variáveis de estado. Encontrando, então, essa relação a seguir:

$$h(s) = \frac{V}{S(T_s S + 1)} \theta(s)$$

$$T_s S^2 h(s) + S h(s) = V \theta(s)$$

$$T_s \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = V \theta(t)$$

$$h''(t) = \frac{V}{T_s} \theta(t) - \frac{1}{T_s} h'(t)$$

$$h'''(t) = \frac{V}{T_s} \theta'(t) - \frac{1}{T_s} h''(t)$$

$$h''''(t) = \frac{V}{T_s} \theta''(t) - \frac{1}{T_s} h'''(t)$$

$$\frac{V}{T_s} \theta''(t) - \frac{1}{T_s} h''''(t) + 2\epsilon W_s \left(\frac{V}{T_s} \theta'(t) - \frac{1}{T_s} h''(t) \right) +$$

$$+ W_s^2 \left(\frac{V}{T_s} \theta(t) - \frac{1}{T_s} h'(t) \right) = V K_s W_s^2 U(t)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V}{T_s} \theta''(t) - \frac{1}{T_s} \left(\frac{V}{T_s} \theta'(t) - \frac{1}{T_s} h''(t) \right) + \\ & + 2\epsilon W_s \left[\frac{V}{T_s} \theta'(t) - \frac{1}{T_s} h''(t) \right] + \\ & + \frac{W_s^2}{T_s} \left(\frac{V}{T_s} \theta(t) - \frac{1}{T_s} h'(t) \right) = VK_s W_s^2 U(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V}{T_s} \theta''(t) - \frac{1}{T_s} \left[\frac{V}{T_s} \theta'(t) - \frac{1}{T_s} \left(\frac{V}{T_s} \theta(t) - \frac{1}{T_s} h'(t) \right) \right] + \\ & + 2\epsilon W_s \left[\frac{V}{T_s} \theta'(t) - \frac{1}{T_s} \left(\frac{V}{T_s} \theta(t) - \frac{1}{T_s} h'(t) \right) \right] + \\ & + \frac{W_s^2}{T_s} \left(\frac{V}{T_s} \theta(t) - \frac{1}{T_s} h'(t) \right) = VK_s W_s^2 U(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V}{T_s} \theta''(t) - \frac{V}{T_s^2} \theta'(t) + \frac{V}{T_s^3} \theta(t) - \frac{1}{T_s^3} h'(t) + \\ & + \frac{2\epsilon W_s V}{T_s} \theta'(t) - \frac{2\epsilon W_s V}{T_s^2} \theta(t) - \frac{2\epsilon W_s}{T_s^2} h'(t) + \\ & + \frac{W_s^2 V}{T_s} \theta(t) - \frac{W_s^2}{T_s} h'(t) = VK_s W_s^2 U(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V}{T_s} \theta''(t) + \left(\frac{2\epsilon W_s V}{T_s} - \frac{V}{T_s^2} \right) \theta'(t) + \left(\frac{V}{T_s^3} - \frac{2\epsilon W_s V}{T_s^2} + \right. \\ & \left. + \frac{W_s^2 V}{T_s} \right) \theta(t) - \left(\frac{1}{T_s^3} + \frac{2\epsilon W_s}{T_s^2} + \frac{W_s^2}{T_s} \right) h'(t) = VK_s W_s^2 U(t) \end{aligned}$$

Eq. 3.1.3

$$a_{11} = \frac{1}{T_s} - 2\epsilon W_s$$

$$a_{32} = \frac{V}{T_s}$$

$$a_{12} = \frac{2\epsilon W_s}{T_s} - \frac{W_s^2}{T_s} - \frac{1}{T_s^2}$$

$$a_{33} = -\frac{1}{T}$$

$$a_{13} = \frac{1}{VT_S^2} - \frac{2\xi M_S}{VT_S} + \frac{W_S^2}{V}$$

$$b_{11} = \frac{W_S^2}{S} K_S T_S$$

3.2 - UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DE ESPAÇO DE ESTADO

Em geral, análise e projeto de sistemas lineares podem ser tratados utilizando-se duas técnicas fundamentais. A primeira, faz uso da TRANSFORMAÇÃO LAPLACE, função de transferência, diagrama de blocos ou diagrama de fluxo de sinal. O outro, o qual tem ganho importante significação na teoria moderna de sistemas de controle e engenharia, é a técnica de variável de estado.

A familiaridade desta última é também evidenciada pelo fato de a grande maioria de técnicos de projeto em sistemas de controle moderno, são baseados em uma formulação utilizando variáveis de estado.

A utilização de variáveis de estado, dentre outras, tem as seguintes vantagens sobre a técnica convencional:

- 1) A formulação em variável de estado é natural e conveniente para a solução em computadores.
- 2) O método de variável de estado nos leva a uma representação unificada de sistemas a múltiplas ou a uma simples variável.
- 3) Pode ser aplicado, também, a sistemas não lineares e também, sistemas variantes no tempo.
- 4) Facilita a análise por otimização.

Em geral um sistema a dados contínuos, o mesmo é representado por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, chamadas equações de estado.

Por essas razões acima é que se prefere a utilização da técnica de variáveis de estado.

Por tanto, passando a equação 3.1.3 para equações de estado.

$$x_1(t) = \theta(t)$$

$$x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$x_3(t) = h'(t)$$

$$x_4(t) = h(t)$$

$$\begin{aligned}
 U(t) &= U(t) \\
 \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11} U(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= x_3(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & x_1(t) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_2(t) \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & x_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U(t)$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B U(t)$$

o qual será nosso modelo do avião. Note que os elementos das matrizes A e B são constantes.

C A P Í T U L O I V

P E R F O R M A N C E I N D E X

4.1 - UTILIZAÇÃO DO CONCEITO DE PI.

De posse do modelo matemático, e com os estados e restrições determinados, estamos à frente de um novo problema: - "determinar o PI a ser utilizado". O objetivo é fornecer motivação física para a seleção desse PI.

Como já vimos, as técnicas clássicas de projeto, tem sido aplicadas; com sucesso em Sistemas Lineares, *invariantes no tempo, entrada e saída escalares* (caracterizadas por "tempo de subida", "tempo de assentamento", "pico de sobretensão" e "acuracidade do estado de regime") com condições iniciais nulas, e *resposta em frequência* (caracterizada por "margem de fase e ganho", "amplitude de pico" e "faixa de passagem".). Portanto, em muitas aplicações podemos utilizar as técnicas clássicas, cujo sucesso é garantido. Porém, precisamos considerar sistemas de uma maneira mais geral, com objetivos de desempenho não facilmente descritos por técnicas clássicas. Daí a necessidade de uma forma matemática (PI) que represente realmente o sistema, seja qual ele for. Em suma, para um dado PI representativo de um sistema, este último não pode ser melhor que o PI, sob pena do PI não representá-lo. Obviamente, no PI, colocamos todos os requisitos e restrições do problema, e assim minimizando o PI, estaremos minimizando o sistema.

Na seleção de um PI, o Engenheiro de Controle tenta em definir uma expressão matemática que quando minimizada, indica que o sistema está desempenhando o seu papel da forma mais desejável. Então, escolher um PI, é passar para o papel, os requisitos físicos do sistema, ou seja, representar os objetivos do sistema sob uma forma matemática.

Evidentemente, o PI $J \in I$ (onde I é um campo escalar, ou seja, todos os seus elementos sofrem das seguintes propriedades abaixo:

seja $J_1, J_2, J_3 \in I$ e as relações $< e =$.

P_1 - Das três expressões, apenas uma é verdadeira:

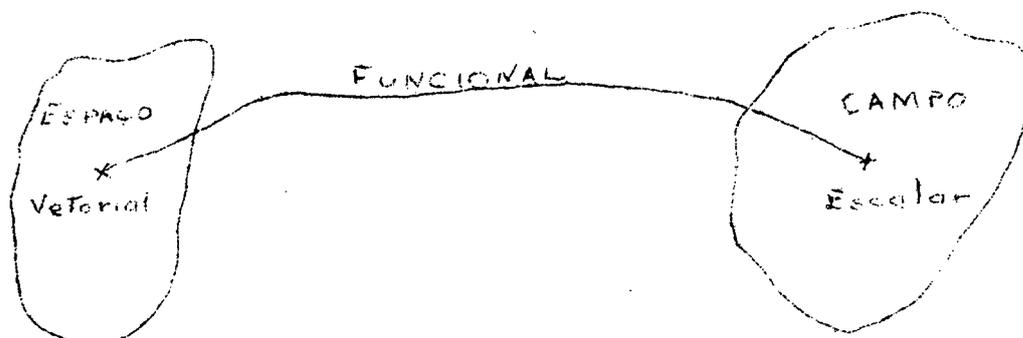
$$J_1 < J_2 ; J_1 = J_2 < J_2 < J_1$$

P_2 - Se

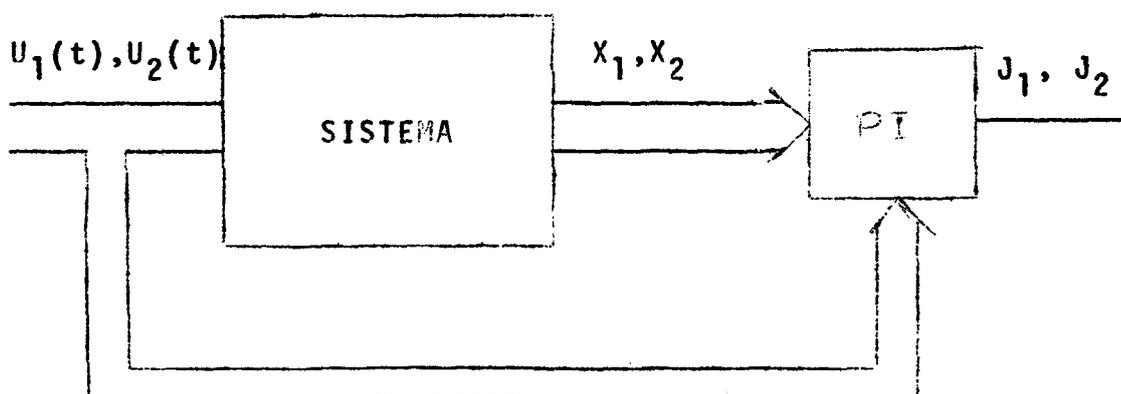
$$J_1 < J_2 \text{ e } J_2 < J_3 \text{ então } J_1 < J_3.$$

Observação: O Campo será o dos números reais.

J sendo funcional, é uma transformação de um Espaço Vetorial em um Campo Escalar. Ilustrando,



O processamento pode ser feito da seguinte maneira: suponhamos que dois controles admissíveis (que satisfaçam todos os requisitos e restrições) foram especificados. É claro que os mesmos causam trajetórias admissíveis: "selecionaremos o melhor". Para evoluirmos esta seleção, desenvolveremos o teste mostrado na figura abaixo:



Primeiro aplicamos o controle $U_1(t)$, ao sistema e determinamos o valor do PI, J_1 , então repetimos o processo para $U_2(t)$, encontrando J_2 . Se $J_1 < J_2$, designamos $U_1(t)$ melhor que $U_2(t)$. Caso contrário, se dá o inverso. E se $J_1 = J_2$, qualquer um dos dois servirá. Neste caso, utilizaremos o de mais simples construção.

Devemos levar em conta a interpretação do PI mínimo . Se multiplicarmos todos os pesos no PI por uma constante, desde que seja positiva, "K", o valor do PI ficará multiplicado por K, porém, o controle e trajetórias ótimas não se alteram, é claro.

Em geral, o valor numérico do PI não representa uma quantidade fisicamente observável.

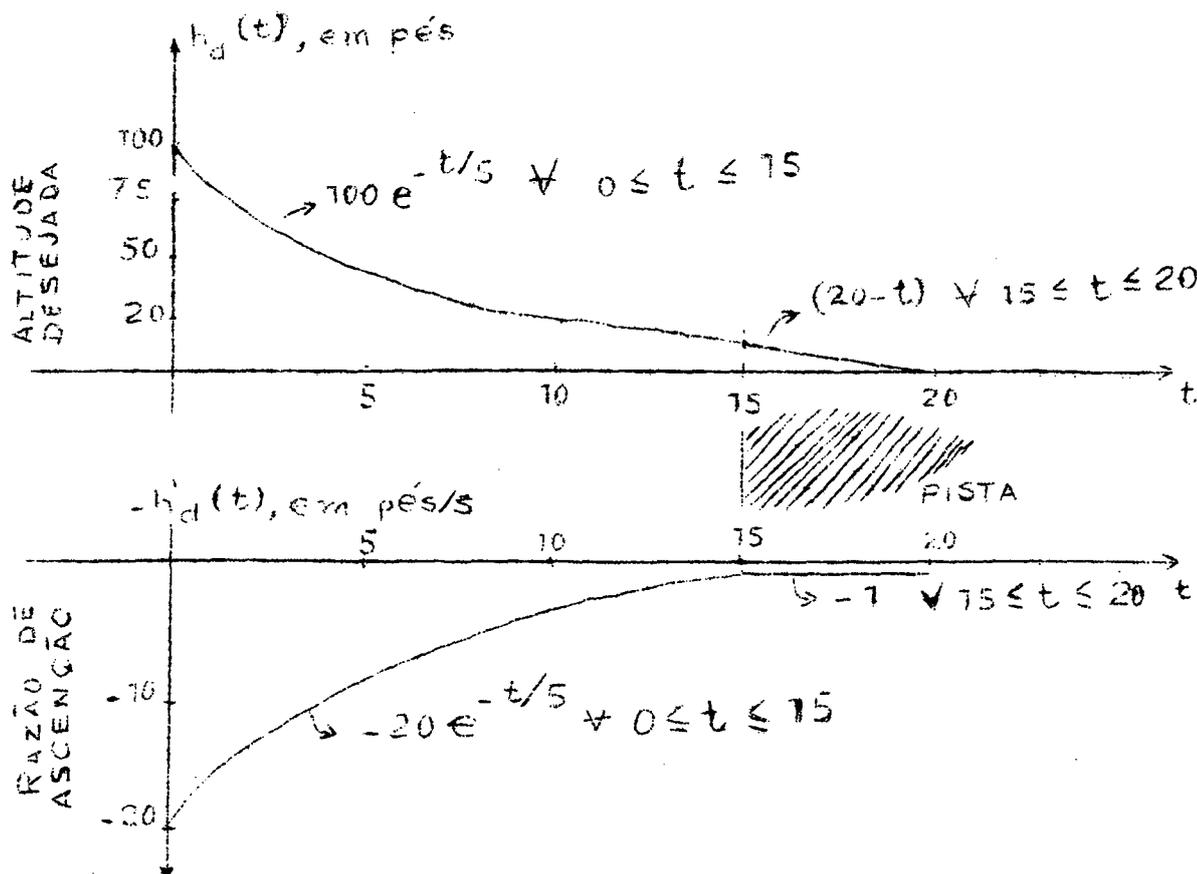
4.2 - SELEÇÃO DO PI PARA O SISTEMA DE POUSO EM QUESTÃO

4.2.1 - Requisitos

Um sistema de pouso de avião é satisfatório somente se certos requisitos forem satisfeitos. Frequentemente, são descritos em termos de sinais de controle e respostas desejadas e em termos de limites desses sinais.

Os seguintes requisitos são considerados fatores essenciais neste problema:

1 - *Altitude desejada* $h_d(t)$ do avião, em cada instante de tempo, é descrito ⁽²⁾ pela curva mostrada na primeira figura abaixo:



Esta primeira figura acima indica que o caminho consiste de uma função exponencial, seguida de uma função linear ,

$$h_d(t) = \begin{cases} 100 \cdot e^{-t/5} & \text{para } 0 \leq t \leq 15 \\ 20 - t & \text{para } 15 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Um caminho exponencial linear desta forma, assegura um pouso suave, confortavel e seguro.

Note que a duração desejada é de 20 segundos, incluindo os 5 segundos sobre a pista, até o ponto de toque. Este valor é apropriado para um avião voando a aproximadamente 175 mi/ hora e começando a fase de pouso a uma altitude de uns 100 pés.

2 - Razão de ascensão $h'_d(t)$, é dada pela derivada no tempo de altitude desejada, mostrada acima.

Observação: A razão de ascensão é de vital importancia no ponto de toque. Um valor diferente de zero, é desejável para prevenir o avião de choques "secos", os quais podem abalar sua estrutura e, também, trazer desconforto indesejável. Um valor muito negativo pode forçar uma descida rápida, e é, igualmente indesejável. O valor de -1 pē/s no ponto de toque é igual a -60 pē/min, que está na faixa do valor máximo permitido para um avião moderno.

4.2.2 - Restrições.

1- O ângulo de inclinação do avião $\theta(t)$ desejado no ponto de toque $t=T$ deve estar compreendido entre:

$$0^\circ \leq \theta(T) \leq 10^\circ$$

O limite inferior é necessário para evitar que o nariz do avião toque antes do tempo de pouso, na pista. O limite superior é requerido para que o mesmo não aconteça à cauda.

2- Durante o intervalo inteiro da fase de pouso, o ângulo de ataque, $\alpha(t)$, deve permanecer abaixo do denominado stall, já definido na página 9: menor que 18° .

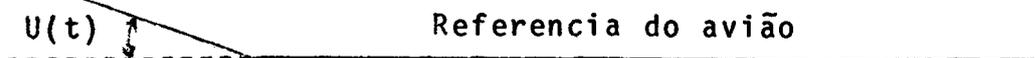
O avião entra na fase de pouso com um angulo de ataque de aproximadamente de 80% de seu valor de stall. Sendo o valor de stall, é permitido um acréscimo de 20%: $3,6^\circ$.

Resumindo,

$$\alpha(t) < 18^\circ$$

$$\Delta \alpha(t) < 3.6^\circ$$

3 - O ângulo de deflexão elevadora $U(t)$, que controla a resposta longitudinal do avião, é restrito ao movimento entre



paradas mecânicas. Neste caso sua restrição será:

$$-35^\circ \leq U(t) \leq 15^\circ$$

Para um controlador linear, não é permitido chegar a esses valores limites, exceto instantaneamente. Deverão ser evitados também, neste problema, efeitos de saturação.

4.2.3 - Pressuposições

1 - O movimento lateral é ignorado; somente se leva em conta o movimento no plano X-Z.

2 - Perturbações aleatórias, como rajadas de vento, serão desprezadas.

3 - O ângulo de caminho de planeio (glide path angle) nominal, γ , é suficientemente pequeno a ponto de considerarmos que $\cos \gamma = 1$ e $\sin \gamma = \gamma$, em radianos. γ é da ordem de -0.063 rad aproximadamente, o que faz com que isso seja possível.

4 - A Velocidade nominal do avião com respeito à terra é mantida essencialmente constante no valor de 175 mph, por um dispositivo que controla automaticamente o acelerador.

5 - O movimento longitudinal do avião é controlado inteiramente pelo ângulo de deflexão elevadora $U(t)$, o qual é a única variável de controle.

6 - A dinâmica do avião é descrita por um conjunto de equações diferenciais, linearizadas a partir do fato em que o desvio da condição de equilíbrio de voo é pequeno e pode ser desprezado.

4.2.4 - Seleção

Como já selecionamos h , h' , θ e θ' , como variáveis de estado, definimos

$$\begin{aligned}x_1 &= \dot{\theta} \\x_2 &= \theta \\x_3 &= \dot{h} \\x_4 &= h \\U &= U\end{aligned}$$

as equações de estado resultantes serão reescritas,

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + b_{11}U(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 1 \cdot x_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = 1 \cdot x_3(t)$$

ou ainda,

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$$

onde,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, os a 's e b , definidos anteriormente.

Escrever o PI é a próxima etapa. O PI é escolhido como a integral de uma soma ponderada de termos quadráticos. Pode-se e deve-se ponderar, devido a importância dos termos ser relativa. Quadráticos por duas razões:

1. Os desvios negativos e positivos são igualmente indesejáveis.

2. Pelo item 1, pode-se escolher para PI forma quadrática, valor absoluto ou qualquer função convexa. Como a forma quadrática é mais fácil de manusear matematicamente, ela será adotada. Então,

$$J = \int_0^{20} \left\{ q_{11}(t) \left[x_1(t) - x_{1d}(t) \right]^2 + q_{22}(t) \left[x_2(t) - x_{2d}(t) \right]^2 + \right. \\ + q_{33}(t) \left[x_3(t) - x_{3d}(t) \right]^2 + q_{44}(t) \left[x_4(t) - x_{4d}(t) \right]^2 + \\ \left. + \left[U(t) \right]^2 \right\} dt.$$

Observação: A restrição sobre a variável de controle é necessária, pois se não se considera, pode-se otimizar o sistema com valores da variável de controle não práticos. É por esta razão que este termo adicional aparece no PI. No próximo capítulo pode-se ver isso mais detalhadamente.

Os q 's são funções do tempo devido alguns estados serem importantes em, apenas, parte do percurso. Portanto, devem variar com o tempo. Como, neste problema, o ponto de toque é crucial, toma-se

$$q_{ij}(t) = q_{ij} + h_{ij}(20)$$

onde q_{ij} é constante e $h_{ij}(20)$ são impulsos que mostram a importância maior no final do pouso, i.é., no instante de tempo igual a 20 segundos. O PI também poderá ser escrito como

$$J = \frac{h_{11}}{2} \left[x_1(T) - x_{1d}(T) \right]^2 + \frac{h_{22}}{2} \left[x_2(T) - x_{2d}(T) \right]^2 + \\ + \frac{h_{33}}{2} \left[x_3(T) - x_{3d}(T) \right]^2 + \frac{h_{44}}{2} \left[x_4(T) - x_{4d}(T) \right]^2 + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{20} \left\{ q_{11} \left[x_1(t) - x_{1d}(t) \right]^2 + q_{22} \left[x_2(t) - x_{2d}(t) \right]^2 + \right. \\ + q_{33} \left[x_3(t) - x_{3d}(t) \right]^2 + q_{44} \left[x_4(t) - x_{4d}(t) \right]^2 + \\ \left. + \left[U(t) \right]^2 \right\} dt.$$

$$J = \frac{1}{2} \left\| \left\| X(T) - X_d(T) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\| \left\| X(t) - X_d(t) \right\|_Q^2 + \left\| \left\| U(t) \right\|_R^2 \right\| dt \right.$$

onde H e Q são matrizes simétricas reais positivas semidefinidas e R é uma matriz real simétrica positiva definida. Neste problema, $R=1$.

Observação: Os termos de fora da integral, mostram a importância que é dada aos erros para quantidades cruciais no ponto de toque. H e Q, são assim definidas:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} \end{bmatrix}$$

O engenheiro, quando da escolha do PI, precisa selecionar os q's, h's e os elementos da matriz R, que neste caso é unitária igual a unidade, mas poderia ser de segunda, terceira, etc., de acordo com o número de variáveis de controle.

Neste exemplo, o desvio da trajetória precisa ser minimizado, portanto, os elementos de Q e H, devem ser não negativos, i.é, maiores ou iguais a zero, sendo este último (iguais a zero) quando a importância relativa de alguns termos, for desprezível em relação aos demais. Por estas razões é que a matriz Q, assim como H, é POSITIVA SEMIDEFINIDA. Já os coeficientes das variáveis de controle devem ser todos maiores que zero, devido a vital importância dessas variáveis. R, então, é uma matriz POSITIVA DEFINIDA.

Este PI admite suficiente flexibilidade para satisfazer os requisitos e restrições do sistema e, também, leva à LEI DE CONTROLE ÓTIMO, o que se verá no próximo capítulo.

C A P I T U L O V

OTIMIZAÇÃO

5.1 - PROBLEMA DO POUSO

Uma vez formuladas as equações dinâmicas do processo e o PI, a Teoria da Otimização pode ser aplicada para obter diretamente ambos, a configuração e os parâmetros do sistema de controle. Neste projeto em particular, o processo dinâmico é linear e o PI quadrático. Portanto, se está à frente de um problema bem conhecido que o "problema de tracking", apresentado da seguinte maneira:

- Queremos encontrar uma função, chamada controle $U(t)$ para o sistema

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$$

tal que minimize o PI

$$J = \frac{1}{2} \left\| X(T) - X_d(T) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \left[\left\| X(t) - X_d(t) \right\|_Q^2 + \left\| U(t) \right\|_R^2 \right] dt.$$

Eq. 5.1.1

Portanto, é necessário rever alguns tópicos sobre o assunto.

5.2 - PROBLEMA DE TRACKING

O problema linear de tracking é o mesmo problema do regulador, só que é mais geral, i.é., o valor desejado do vetor de estado não é a origem.

A equação de estado é:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$$

e o PI é, para

$$r(t) \triangleq X_d(t)$$

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2} \left| X(t_f) - r(t_f) \right|^T B \left| X(t_f) - r(t_f) \right| + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[\left| X(t) - r(t) \right|^T Q(t) \left| X(t) - r(t) \right| + U^T(t) R(t) U(t) \right] dt. \\
&= \frac{1}{2} \left\| X(t_f) - r(t_f) \right\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \left\| X(t) - r(t) \right\|_{Q(t)}^2 + \right. \\
&\left. \left\| U(t) \right\|_{R(t)}^2 \right\} dt.
\end{aligned}$$

onde $r(t)$ é o valor desejado ou de referencia do vetor de estado do sistema. O tempo é fixado, $X(t_f)$ é livre, e os estados e controles não estão amarrados. H e Q são matrizes reais simétricas, positivas sedefinidas. R é uma matriz real, simetrica, positiva definida.

Sabe-se que minimizar J , equivale a minimizar o Hamiltoniano, através do máximo de Pontryagin.

Portanto, minimizar-se-á, apenas o Hamiltoniano, para conseguir $U(t)$.

As trajetórias ótimas serão dadas pelas condições necessárias, como se verá adiante.

O Hamiltoniano é dado por:

$$\begin{aligned}
H(X(t), U(t), P(t), t) &= 1/2 \left\| X(t) - r(t) \right\|_{Q(t)}^2 + \\
&+ 1/2 \left\| U(t) \right\|_{R(t)}^2 + P(t)^T A(t) X(t) + P(t)^T B(t) U(t).
\end{aligned}$$

Tem-se, portanto,

$$X^*(t) = \frac{\partial H}{\partial t} = AX^*(t) + BU(t)$$

De onde se tira as equações de estado. Do Hamiltoniano também saem as equações de coestado:

$$P^*(t) = \frac{\partial H}{\partial t} = -Q(t)X^*(t) - A^t P^*(t) + Q(t)r(t).$$

$P(t)$ são os multiplicadores de Lagrange.

Observação:

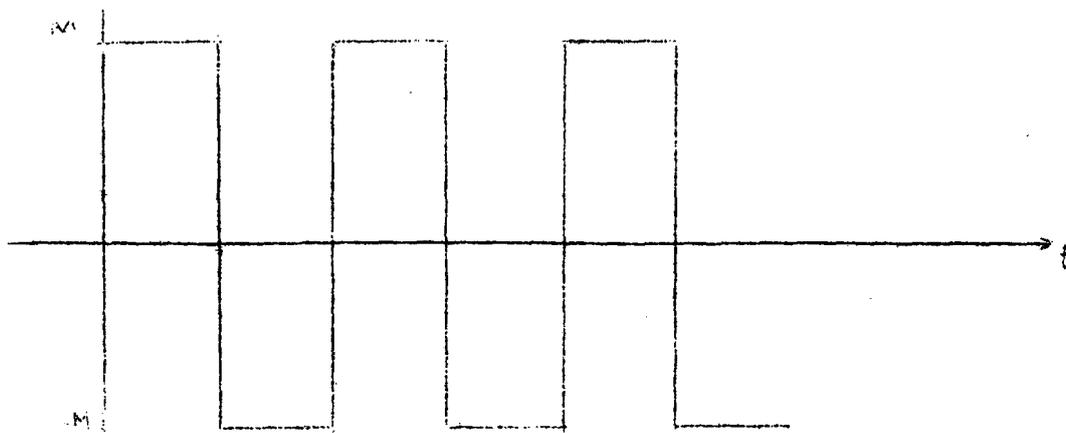
a) Para achar U^* , tem-se que minimizar o Hamiltoniano, o que significa fazer $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

b) Vê-se, conseqüentemente, que se é colocado

$\left| U(t) \right|^2$ no PI, minimizar o Hamiltoniano, que agora é linear, implica que

$$U^* = M \operatorname{sgn} P^t B$$

donde $M \rightarrow \infty$, que é mostrado na ilustração abaixo:



É por esta razão que se é obrigado a restringir também $U(t)$, através do termo quadrático no PI, o que significa restringir a energia gasta no controle.

E as relações algébricas que devem ser satisfeitas:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial U} = R(t)U^*(t) + B^T(t)P^*(t)$$

portanto,

$$U^*(t) = -R(t)^{-1} B^T(t) P^*(t) \quad \text{Eq. 5.2.2}$$

Substituindo a equação 5.2.2, na equação de estado, conduz às equações de estado e coestado:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}^*(t) \\ \dot{P}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^*(t) \\ P^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q(t)r(t) \end{bmatrix}$$

Note que $Q(t)r(t)$ é uma função excitação; essas equações diferenciais são lineares e variantes no tempo, mas não são homogêneas. A solução tem a forma:

$$\begin{bmatrix} X^*(t) \\ P^*(t) \end{bmatrix} = \phi(t_f, t) \begin{bmatrix} X^*(t) \\ P^*(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \phi(t_f, t) \begin{bmatrix} 0 \\ Q(t)r(t) \end{bmatrix} dt.$$

onde ϕ é matriz de transição do sistema, dado pela equação 5.1.1.

Se a matriz de transição é particionada, e a integral escrita sob a forma vetorial, por um vetor $(2n \times 1)$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Essas equações podem ser escritas por:

$$X^*(t_f) = \phi_{11}(t_f, t)X^*(t) + \phi_{12}(t_f, t)P^*(t) + f_1(t) \quad \text{Eq.5.2.3}$$

$$P^*(t_f) = \phi_{21}(t_f, t)X^*(t) + \phi_{22}(t_f, t)P^*(t) + f_2(t) \quad \text{Eq.5.2.4}$$

As condições de fronteira são:

$$P^*(t_f) = HX^*(t_f) - Hr(t_f)$$

Recolocando $P^*(t_f)$ na equação 5.2.4, e então substituindo $X^*(t_f)$ da equação 5.2.3, obtem-se:

$$\begin{aligned} H \left| \phi_{11}(t_f, t)X^*(t) + \phi_{12}(t_f, t)P^*(t) + f_1(t) \right| - Hr(t_f) &= \\ = \phi_{21}(t_f, t)X^*(t) + \phi_{22}(t_f, t)P^*(t) + f_2(t). \end{aligned}$$

Tirando o valor de $P^*(t)$, encontrar-se-á:

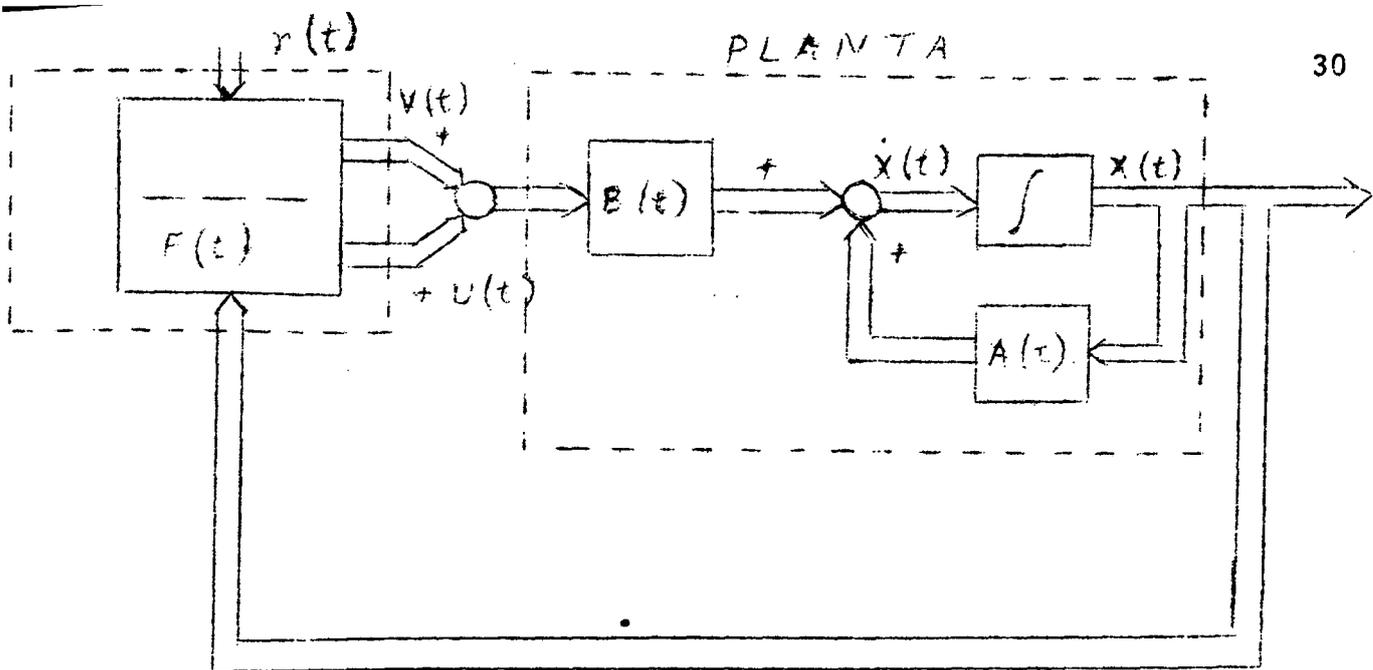
$$\begin{aligned} P^*(t) &= \left| \phi_{22}(t_f, t) - H\phi_{12}(t_f, t) \right|^{-1} \left| H\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t) X^*(t) \right| \\ &+ \left| \phi_{22}(t_f, t) - H\phi_{12}(t_f, t) \right|^{-1} \left| Hf_1(t) - Hr(t_f) - f_2(t) \right|. \end{aligned}$$

$$P^*(t) = K(t) X^*(t) + S(t)$$

Substituindo-o na função de controle:

$$U^*(t) = -R^{-1}B^TKX^* - R^{-1}B^TS = FX^* + V.$$

com todos variantes no tempo, daí a ausência de (t) . Onde F é a matriz ganho de realimentação e V é o sinal de comando. Note - que V depende dos parâmetros do sistema e do sinal de referência $r(\cdot)$. De fato, V depende dos futuros valores do sinal de referência, o que leva a dizer que o controle ótimo tem uma qualidade antecipada. Isto é reforçado por razões físicas, que dizem que se deve determinar a estratégia presente na base de (onde-se está e o que se quer). Abaixo, encontra-se o diagrama de bloco da planta e do controlador:



Novamente se está à frente de um problema que é a necessidade de se determinar a matriz de transição, porém, como antes, existe um caminho computacional tranquilo para isto. Começa-se com a equação:

$$P(t) = K(t) \cdot X(t) + S(t) \quad \text{Eq.5.2.4}$$

Note que não se está mais dando a atenção para o asterisco, pois o $X(t)$ e $P(t)$ são valores ótimos, e despreza-los significa menos trabalho.

Diferenciando ambos os lados com respeito à t , obtense

$$\dot{P}(t) = \dot{K}(t) \cdot X(t) + K(t) \cdot \dot{X}(t) + \dot{S}(t),$$

substituindo das equações de estado e coestado $P(t)$ e $X(t)$ e usando a equação 5.2.4 para eliminar $P(t)$, ten-se

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) + Q(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ X(t) + S(t) + A^T(t)S(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) - Q(t) \\ r(t) = 0 \end{aligned}$$

Isto deve ser satisfeito para todos os r 's e X 's ótimos, portanto conclui-se que

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$$

$$\dot{S}(t) = -\left[A^T(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \right] S(t) + Q(t)r(t)$$

Como K é simétrica, da equação em K 's, que dá para notar que é a equação de RICCATI, tira-se $(n+1) \cdot n/2$ equações de primeira ordem, e da equação matricial em S 's, tira-se n . Por conseguinte, tem-se um total de $n+n \cdot (n+1)/2$ equações diferenciais de ordem 1.

Observação: Nos problemas de regulador, precisa-se apenas resolver a equação de RICCATI, pois o valor desejado $r(t) = 0$, o que mostra ser o mesmo um caso particular do TRACKING.

As condições necessárias para controle ótimo, são:

$$\dot{X}(t) = \frac{\partial H}{\partial P(t)} [X(t), U(t), P(t), t] \quad \text{equação de estado}$$

$$\dot{P}(t) = \frac{\partial H}{\partial X(t)} [X(t), U(t), P(t), t] \quad \text{equação de coestado}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial U(t)} [X(t), U(t), P(t), t] \quad \text{equação que dá o controle ótimo.}$$

e, as condições de fronteira,

$$0 = \left\{ \frac{\partial h}{\partial X_f} [X(t_f), t_f] - P(t_f) \right\}^T \partial X_f + \left[H [X(t_f), U(t_f), P(t_f), t_f] + \frac{\partial h}{\partial t_f} [X(t_f), t_f] \right] \partial t_f$$

onde h é função que aparece fora da integral, no PI; H é o Hamiltoniano e ∂X_f e ∂t_f , são, respectivamente, as variações dos estados e tempo finais. Como no problema de pouso o tempo final é fixo, $\partial t_f = 0$. Portanto,

$$P(t_f) = HX(t_f) - Hr(t_f)$$

que é derivada de h em relação a $X(t_f)$, e definida anteriormente como

$$P(t_f) = K(t_f) X(t_f) + S(t_f),$$

de onde tira-se as condições de contorno, para a solução dos parâmetros K 's e s 's,

$$K(t_f) = H$$

$$S(t_f) = -Hr(t_f)$$

Para se determinar $F(t)$ e $V(t)$, integra-se as equações 5.2.5 no intervalo de t_f para t_0 .

5.3 - Lei de Controle

Como se vê definida no problema de TRACKING, e - fazendo a substituição em função das componentes matriciais, ten se:

$$U(t) = -1 \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & x_1(t) \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & x_2(t) \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & x_3(t) \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & x_4(t) \end{bmatrix} -$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix}$$

$$U(t) = - \begin{bmatrix} b_{11}K_{11} & b_{11}K_{12} & b_{11}K_{13} & b_{11}K_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}s_1(t) \end{bmatrix}$$

$$U(t) = -b_{11} \left[K_{11}x_1(t) + K_{12}x_2(t) + K_{13}x_3(t) + K_{14}x_4(t) + s_1(t) \right]$$

onde $b_{11} = w_5^2 \cdot T_s$, portanto, conhecendo-se os parâmetros K 's e s 's, conhece-se o controle ótimo. Das equações 5.2.5, escreve-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{K}_{11}(t) & \dot{K}_{12}(t) & \dot{K}_{13}(t) & \dot{K}_{14}(t) \\ \dot{K}_{21}(t) & \dot{K}_{22}(t) & \dot{K}_{23}(t) & \dot{K}_{24}(t) \\ \dot{K}_{31}(t) & \dot{K}_{32}(t) & \dot{K}_{33}(t) & \dot{K}_{34}(t) \\ \dot{K}_{41}(t) & \dot{K}_{42}(t) & \dot{K}_{43}(t) & \dot{K}_{44}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) & K_{13}(t) & K_{14}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) & K_{23}(t) & K_{24}(t) \\ K_{31}(t) & K_{32}(t) & K_{33}(t) & K_{34}(t) \\ K_{41}(t) & K_{42}(t) & K_{43}(t) & K_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{32} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) & K_{13}(t) & K_{14}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) & K_{23}(t) & K_{24}(t) \\ K_{31}(t) & K_{32}(t) & K_{33}(t) & K_{34}(t) \\ K_{41}(t) & K_{42}(t) & K_{43}(t) & K_{44}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) & K_{13}(t) & K_{14}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) & K_{23}(t) & K_{24}(t) \\ K_{31}(t) & K_{32}(t) & K_{33}(t) & K_{34}(t) \\ K_{41}(t) & K_{42}(t) & K_{43}(t) & K_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) & K_{13}(t) & K_{14}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) & K_{23}(t) & K_{24}(t) \\ K_{31}(t) & K_{32}(t) & K_{33}(t) & K_{34}(t) \\ K_{41}(t) & K_{42}(t) & K_{43}(t) & K_{44}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (a_{11}K_{11}(t) + K_{12}(t))(a_{12}K_{11}(t) + a_{32}K_{13}(t))(a_{13}K_{11}(t) + a_{33}K_{13}(t) + \\ & (a_{11}K_{12}(t) + K_{22}(t))(a_{12}K_{21}(t) + a_{32}K_{23}(t))(a_{13}K_{12}(t) + a_{33}K_{23}(t) + \\ & (a_{11}K_{13}(t) + K_{23}(t))(a_{12}K_{13}(t) + a_{32}K_{33}(t))(a_{13}K_{13}(t) + a_{33}K_{33}(t) + \\ & (a_{11}K_{14}(t) + K_{24}(t))(a_{12}K_{14}(t) + a_{32}K_{34}(t))(a_{13}K_{14}(t) + a_{33}K_{43}(t) + \\ & + K_{14}(t)) 0 \\ & + K_{24}(t)) 0 \\ & + K_{34}(t)) 0 \\ & + K_{44}(t)) 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc}
 (a_{11}k_{11}(t) + k_{12}(t)) & (a_{11}k_{12}(t) + k_{22}(t)) \\
 (a_{12}k_{11}(t) + a_{32}k_{13}(t)) & (a_{12}k_{12}(t) + a_{32}k_{23}(t)) \\
 (a_{13}k_{11}(t) + a_{33}k_{13}(t) + k_{14}(t)) & (a_{13}k_{12}(t) + a_{33}k_{23}(t) + k_{24}(t)) \\
 0 & 0 \\
 (a_{11}k_{13}(t) + k_{23}(t)) & (a_{11}k_{14}(t) + k_{24}(t)) \\
 a_{12}k_{13}(t) + a_{32}k_{33}(t) & (a_{12}k_{14}(t) + a_{32}k_{34}(t)) \\
 (a_{13}k_{13}(t) + a_{33}k_{33}(t) + k_{43}(t)) & (a_{13}k_{14}(t) + a_{33}k_{34}(t) + k_{44}(t)) \\
 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 q_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{22} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_{33} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & q_{44}
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c}
 b_{11}k_{11}(t) \\
 b_{11}k_{12}(t) \\
 b_{11}k_{13}(t) \\
 b_{11}k_{14}(t)
 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc}
 b_{11}k_{11}(t) & b_{11}k_{12}(t) & b_{11}k_{13}(t) & b_{11}k_{14}(t) \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & &
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

das quais tiramos as equações em k .

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_{11}(t) &= -a_{11}k_{11}(t) - k_{12}(t) - a_{11}k_{11}(t) - k_{12}(t) - q_{11} + b_{11}^2 k_{11}^2(t) \\
 \dot{k}_{12}(t) &= -a_{12}k_{11}(t) - a_{32}k_{13}(t) - a_{11}k_{12}(t) - k_{22}(t) - q_{22} + b_{11}^2 k_{11}(t)k_{12}(t) \\
 \dot{k}_{13}(t) &= -a_{13}k_{11}(t) - a_{33}k_{13}(t) - k_{14}(t) - a_{11}k_{13}(t) - 0 + b_{11}^2 k_{11}(t)k_{13}(t) - \\
 &\quad - k_{23}(t)
 \end{aligned}$$

$$\dot{k}_{14}(t) = -a_{11}k_{14}(t) - k_{24}(t) - 0 + b_{11}^2 k_{14}(t)k_{14}(t)$$

$$\dot{k}_{22}(t) = -a_{12}k_{12}(t) - a_{32}k_{23}(t) - a_{12}k_{12}(t) - a_{32}k_{23}(t) - q_{22} + b_{11}^2 k_{12}^2(t)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_{23}(t) &= -a_{13}k_{12}(t) - a_{33}k_{23}(t) - a_{12}k_{13}(t) - k_{24}(t) - a_{32}k_{33}(t) - \\
 &\quad - 0 + b_{11}^2 k_{12}(t)k_{13}(t).
 \end{aligned}$$

$$\dot{k}_{24}(t) = -a_{12}k_{14}(t) - a_{32}k_{34}(t) - 0 + b_{11}^2 k_{12}(t)k_{14}(t).$$

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_{33}(t) &= -a_{13}k_{13}(t) - a_{33}k_{33}(t) - k_{34}(t) - a_{13}k_{13}(t) - a_{33}k_{33}(t) - \\
 &\quad - k_{34}(t) - q_{33} + b_{11}^2 k_{13}^2(t).
 \end{aligned}$$

$$\dot{k}_{34}(t) = -q_{44} + b_{11}^2 k_{14}^2(t).$$

e,

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1(t) \\ \dot{s}_2(t) \\ \dot{s}_3(t) \\ \dot{s}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{32} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(t)k_{12}(t)k_{13}(t)k_{14}(t) \\ k_{21}(t)k_{22}(t)k_{23}(t)k_{24}(t) \\ k_{31}(t)k_{32}(t)k_{33}(t)k_{34}(t) \\ k_{41}(t)k_{42}(t)k_{43}(t)k_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \\ r_4(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{32} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}k_{11}(t) \\ b_{11}k_{12}(t) \\ b_{11}k_{13}(t) \\ b_{11}k_{14}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11}r_1(t) \\ q_{22}r_2(t) \\ q_{33}r_3(t) \\ q_{44}r_4(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11}^2 k_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} - b_{11}^2 k_{12}(t) & 0 & a_{32} & 0 \\ a_{13} - b_{11}^2 k_{13}(t) & 0 & a_{33} & 1 \\ -b_{11}^2 k_{14}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11}r_1(t) \\ q_{22}r_2(t) \\ q_{33}r_3(t) \\ q_{44}r_4(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{s}_1(t) = -a_{11}s_1(t) + b_{11}^2 k_{11}(t)s_1(t) - s_2(t) + q_{11}r_1(t)$$

$$\dot{s}_2(t) = -a_{12}s_1(t) + b_{11}^2 k_{12}(t)s_1(t) - a_{32}s_3(t) + q_{22}r_2(t)$$

$$\dot{s}_3(t) = -a_{13}s_1(t) + b_{11}^2 k_{13}(t)s_1(t) - a_{33}s_3(t) + q_{33}r_3(t) - s_4(t)$$

$$\dot{s}_4(t) = b_{11}^2 k_{14}(t)s_1(t) + q_{44}r_4(t)$$

e com isso, pode-se efetuar os cálculos dos parâmetros, o que se verá a seguir

C A P Í T U L O VI

SIMULAÇÃO

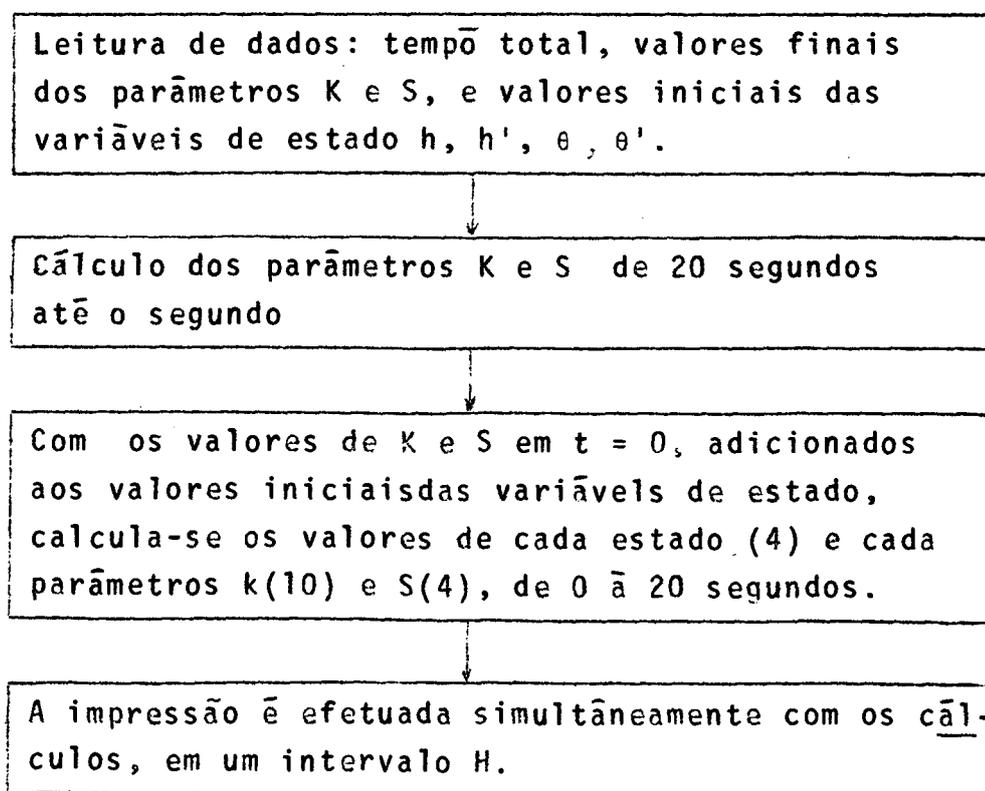
CONSIDERAÇÕES

Devido a alta acuracidade exigida pelo método, - era de se esperar a dificuldade na execução de tal cálculo. Portanto, um capítulo à parte, do qual este é o objetivo principal, - foi necessário, no sentido de suprir uma deficiência, não muito rara, nos problemas de otimização de sistemas de controle: A *dificuldade de execução dos programas deste tipo em computadores digitais*. Acreditamos que quanto maior a simplicidade na elaboração da solução encontrada, tanto melhor será a compreensão por parte dos leitores.

6.2 - PROGRAMA EXECUTADO

No cálculo dos parâmetros e estados do sistema - foi escolhido um programa, ainda que um tanto prolixo, fácil em compreensão e adaptação a outros problemas semelhantes, embora de ordens diferentes. Este programa foi adaptado de uma modificação no Método de Runge-Kutta de 4a. ordem.

Foi usado o seguinte fluxograma geral:



O programa para o IBM-1130 usado na execução do cálculo está contido no APÊND. I, e a definição de cada variável usada, está contida no APÊND. II.

6.3 - EXATIDÃO DO PROGRAMA

Acredita-se que este item mereça uma atenção especial devido à observação final de todo o cálculo incluído até agora. Sim, pois sem uma simulação do sistema, é realmente difícil de se ver o mesmo antes de ser construído. E com esta fabulosa técnica, que é a simulação, neste caso em computador digital, é permitido observar o comportamento do sistema já otimizado, na sua melhor performance. Como já foi dito, esta simulação digital foi efetuada em um computador IBM 1130.

O sistema em questão, o qual congrega 18 equações diferenciais de primeira ordem, exige uma precisão quase que sem limites (em termos práticos), pois devido à própria configuração de seus estados desejados, podem levar o computador à interpretações incorretas de dados. Como um exemplo citar-se-á um problema que surgiu quase que constantemente na execução de tal programa: " O estado $h(t)$, definido anteriormente, é uma exponencial até $t = 15$ segundos e linear de 15 a 20 segundos. Esta última é óbvia, pois se continuasse exponencial, jamais tocaria a pista. Antes de atingir a metade do percurso, no eixo dos tempos a exponencial, em termos macroscópicos, tende a se confundir com uma paralela ao eixo acima relatado. E, se o computador interpreta desta maneira, quando na realidade a curva possui uma leve inclinação, i.é., despreza a inclinação que a diferencia, para pequenos intervalos, de uma reta horizontal, o controle ótimo tende a ser infinito, para torná-la horizontal, contrariando, portanto, o sistema de equações de estado, e, levando todos os estados a valores infinitos. É certo, entretanto, que antes da curva se aproximar o suficiente para uma interpretação errada pelo computador, o sistema tem um comportamento excelente. Também, quando diminuimos o passo de integração, o ponto de onde começa esta má interpretação se aproxima do ponto final, levando a se acreditar que é necessário diminuir-se paulatinamente o valor do passo até que se consiga a simulação em todo o intervalo desejado, sempre com o compromisso de minimizar o tempo de execução do programa.

Isso pode constituir, e acredita-se que seja, uma desvantagem de nosso programa, porém, se esta deficiência puder ser suprimida, pode-se ter em mão um excelente programa de simulação neste tipo de problema.

Para que se tenha uma idéia, quantitativa, constrói-se a seguinte tabela:

Passo Seg.	t_i (aprox.) seg.	t_e minutos
0.1	7.9	10
0.05	8.5	15
0.01	Completo	2 h 58Min.

ONDE t_i é o tempo em que os estados começam a tomar valores infinitos t_e é o tempo real de execução até o estouro do programa.

Se nota a acuracidade exigida pelo programa e o tempo gasto de execução dos mesmos.

As curvas obtidas no processo de elaboração do programa podem ser vistas no APÊND. III.

C A P I T U L O VII

CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE:

7.1 - Considerações.

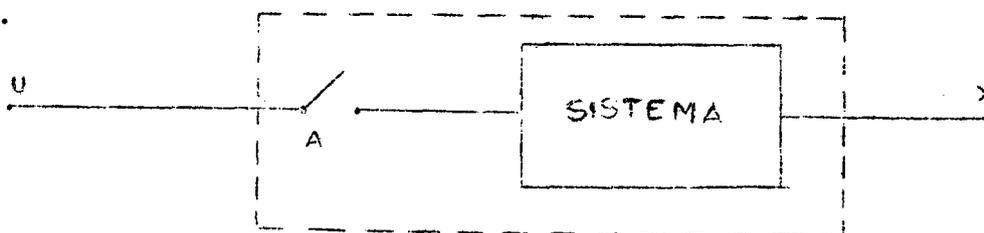
É claro que sem um estudo prévio da controlabilidade e observabilidade do sistema, não se pode iniciar o desenvolvimento de sua otimização. E, sobre o assunto, agora é que se manifesta.

Como foi dito no capítulo 1 (introdução), o propósito do desenvolvimento, isto é, o objetivo deste, que é uma sugestão ao emprego de um esquema adaptativo, tinha de partir de um sistema já em já bastante testado e bem prático, o que acarreta em um sistema já otimizado, portanto com esse estudo prévio de suas controlabilidade e observabilidade já efetuados, evidentemente.

Far-se-a, no entanto um resumo de tal estudo, no sentido de elucidar possíveis dúvidas e, ao mesmo tempo justificar o que acima afirmamos.

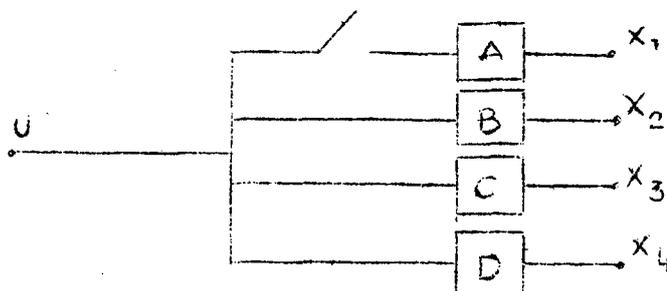
7.2 CONTROLABILIDADE

Tomar-se-a o mais simples exemplo de um sistema entrada-saída.



Se a chave A estiver desligada, qualquer que seja o valor de U, este jamais influenciará a saída X.

Agora, um outro exemplo um pouco mais sofisticado



Se pode variar X_2, X_3, X_4 , se variarmos U , porém, X_1 nunca. Isso dá uma ideia sobre o que é controlabilidade. Definamos controlabilidade.

Definição de Controlabilidade.

Um sistema é dito controlável, se podemos mudá-lo um estado inicial $X(t_0)$ a qualquer outro estado desejado $X(t)$, com um dado controle $U(t)$.

Ilustração da definição.

Um sistema representado por

$$\dot{X} = A X + B U,$$

que é uma equação matricial diferencial de 1ª. ordem, tem a solução da forma

$$X(t) = \phi(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau)BU(\tau) d\tau$$

Sem perda de generalidades podemos transformá-la, fazendo $Y(t) = X(t) - \phi(t-t_0)X(t_0)$

$$Y(t) = \int_{t_0}^t \phi(t-\tau)BU(\tau) d\tau$$

onde τ é a variável de integração e

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Se tomarmos } \phi(t-\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \text{t\u00f3dos os outros} \\ \text{elementos} \\ \text{n\u00e3o nulos} \end{bmatrix}$$

Ent\u00e3o,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \square & & & & \square \\ & & & & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 U_1(\tau) \\ \vdots \\ b_n U_n(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$



no que podemos observar, todos os elementos de $Y(t)$, com exceção de $y_1(t)$, podem ser controlados a partir do vetor $U(\tau)$. Portanto, se a matriz de transição, $\Phi(t-\tau)$, depende do valor de A que $\Phi(t)$ depende de $\Phi(t-\tau)$ e B , podemos concluir que existirão alguns valores de A e B que não permitirão o controle para sistema.

Agora, um teorema dispensará mais comentários

Teorema da Controlabilidade.

Um sistema $\dot{X} = A X + B U$ é controlável sse a matriz.

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & A^3 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

possui rank igual a n (número de componentes do vetor X .)

No nosso caso, temos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a matriz será,

$$\begin{bmatrix} b_{11} & a_{11} b_{11} & b_{11} & b_{11}(a_{11}^2 + a_{12}) & b_{11}[a_{11}(a_{11}^2 + a_{12}) + (a_{11}a_{12} + a_{13}a_{32})] \\ 0 & b_{11} & & b_{11}a_{11} & b_{11}(a_{11}^2 + a_{12}) \\ 0 & 0 & & b_{11}a_{32} & b_{11}(a_{32}a_{11} + a_{32}a_{33}) \\ 0 & 0 & & 0 & b_{11}a_{32} \end{bmatrix}$$

como b_{11} , a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{32} , a_{33} , são todos não nulos, a matriz acima é triangular superior não singular, quadrada de ordem 4, portanto de rank igual a 4. O sistema

$$\dot{X} = A X + B U$$

onde X é um vetor de quatro componentes, portanto, é controlável.

7.3 Observabilidade

Este sistema não apresenta problemas quanto à observabilidade, visto que todos os estados são medidos através de instrumentos:

- a) Altitude $h(t)$ e variação de Altitude $h(t)$, com auxílio de um radar altimétrico,
- b) Ângulo de inclinação $\theta(t)$ e sua variação $\theta'(t)$. com auxílio de um GYROS.

Portanto, é evidente que o Sistema é OBSERVÁVEL.

E, é justamente por isso que faz sentido acharmos o controle U como função dos estados X .

C A P Í T U L O VIII

ESTABILIDADE

8.1 - CONSIDERAÇÕES

Um fator realmente importante na otimização de um sistema de controle automático é o ESTUDO DA ESTABILIDADE DO SISTEMA. E, na maioria das vezes, é omitido.

A seriedade da importancia de tal estudo pode ser resumida em uma simples pergunta: *Será que vale a pena otimizar um sistema de estabilidade duvidosa?*

Acredita-se que essa seria uma razão suficiente para a inclusão deste capítulo na tese em questão.

8.2 - MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

Seja o sistema representado pela seguinte equação de estado

$$\dot{X} = f(X)$$

onde X é o vetor de estado e no qual procuramos saber sobre sua estabilidade no ponto $X=0$.

Se for conseguida uma função

$$V(X), \text{ tal que } \begin{cases} V(X) > 0 & X \neq 0 \\ V(X) = 0 & \text{sse } X = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 8.2.1}$$

$\frac{\partial V}{\partial X}$ é contínua

$V(X)$ será chamada de função de LYAPUNOV. Toma-se, então, a função de LYAPUNOV e verifica-se se $V(X)$ satisfaz a quarta condição

$$\begin{cases} \dot{V}(X) < 0 & X \neq 0 \\ \dot{V}(X) = 0 & \text{sse } X = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 8.2.2}$$

Se for verificado, o sistema é estável no ponto

$X = 0$.

Como existem várias funções LYAPUNOV, ou seja, - que satisfazem as condições dadas na Eq.8.2.1., e nem todas sa- tisfazem a quarta condição dada no conjunto Eq.8.2.2., será sor- te do Engenheiro de Controle conseguir verificar a estabilidade- do sistema com a primeira função de LYAPUNOV que o mesmo tomar.- Portanto, sabe-se que o método é um processo de tentativas, e is- so pode se constituir em um problema sério.

8.3 - ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO SISTEMA DE POU-- SO DO AVIÃO

Ten-se um sistema representado por

$$\dot{X} = A X + B U^*$$

onde $U^* (g(X))$ foi escolhido de

$$\text{Min}_U \int_0^{20} \left(\left\| X - X_d \right\|_Q^2 + \left\| U^* \right\|_R^2 \right) dt.$$

Quer-se analisar a estabilidade do sistema, sem- excitação, no ponto $X = 0$. Sem excitação significa que $X_d = 0$.

Portanto, ter-se-á de escolher entre várias fun- ções de LYAPUNOV, uma para se tentar verificar a quarta condição Escolha-se, portanto, uma já conhecida:

$$V(X(t)) = \int_t^{20} \left(\left\| X \right\|_Q^2 + \left\| U^* \right\|_R^2 \right) dt.$$

Como o integrando é uma forma quadrática, e as matrizes Q e R são, respectivamente, positiva semidefinida e po- sitiva definida (já vistas anteriormente), e sabe-se que... $U^* = g(X)$, então

$$\begin{aligned} V(X) &> 0 \quad \text{para todo } X \neq 0 \\ e \\ V(X) &= 0 \quad \text{sse } X = 0 \end{aligned}$$

e também $\frac{\partial V}{\partial X}$ é contínua em todo o intervalo em questão, donde, a partir de que $V(X)$ satisfaz as condições para se tornar uma fun- ção de LYAPUNOV, ter-se-á apenas de verificar a quarta condição

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &< 0 \quad \text{para todo } X \neq 0 \\ \dot{V}(X) &= 0 \quad \text{sse } X = 0, \end{aligned}$$

e para tal, lança-se mão da programação Dinâmica.

Tome-se a equação de Hamilton-Jacob-Bellman

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} \dot{X} + h(X) = 0$$

onde

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial X} \dot{X} = \dot{V}(X) \quad \text{e} \quad h(X) = \left\| \left\| X \right\| \right\|_Q^2 + \left\| \left\| U^* \right\| \right\|_R^2$$

portanto

$$\dot{V}(X) + \left[\left\| \left\| X \right\| \right\|_Q^2 + \left\| \left\| U^* \right\| \right\|_R^2 \right] = 0$$

donde

$$\dot{V}(X) = - \left[\left\| \left\| X \right\| \right\|_Q^2 + \left\| \left\| U^* \right\| \right\|_R^2 \right] \triangleq -h(X)$$

como $h(X)$, se vê acima, é positiva definida, chegamos à conclusão que $\dot{V}(X)$ é negativa definida, ou

$$\dot{V}(X) < 0 \quad \text{para} \quad X \neq 0$$

e

$$\dot{V}(X) = 0 \quad \text{sse} \quad X = 0$$

Portanto, o sistema é estável, no ponto $X=0$. E a través do teorema de LYAPUNOV, para sistemas lineares, o sistema é globalmente estável, ou seja, para todos os pontos.

E, ainda, se o sistema é estável sem excitação, é estável, também, com excitação, desde que a mesma seja finita, o que permite a conclusão: *O sistema em questão é globalmente estável.*

Foi efetuado um estudo da estabilidade, através de simulação, no computador com a seguinte conclusão: *O sistema é tão estável que mesmo sem controle ele apresenta um bom desempenho.*

A altitude $h(t)$ partindo de 100 pés apresenta u ma boa suavidade em todo o intervalo 0,20, fazendo que o avião não sofra variações bruscas.

No APÊND. IV ve-se este desempenho do estado $h(t)$

C A P Í T U L O I X

SENSITIVIDADE

9.1 - CONSIDERAÇÕES

A trajetória atual do avião durante o pouso é mantida fechada (i.é, o mais próximo possível) em relação à trajetória desejável, pelo uso do controle ótimo U^* . O controlador ótimo é projetado, com base no modelo identificado no sistema. - Isto é, o controlador é

$$U^* = -R^{-1}.B^T.k.X - R^{-1}.B^T.S$$

definindo

$$-R.B^T.k \triangleq M \text{ e } -R^{-1}.B^T \triangleq N, \text{ ficamos}$$

$$U^* = M.X + N.S$$

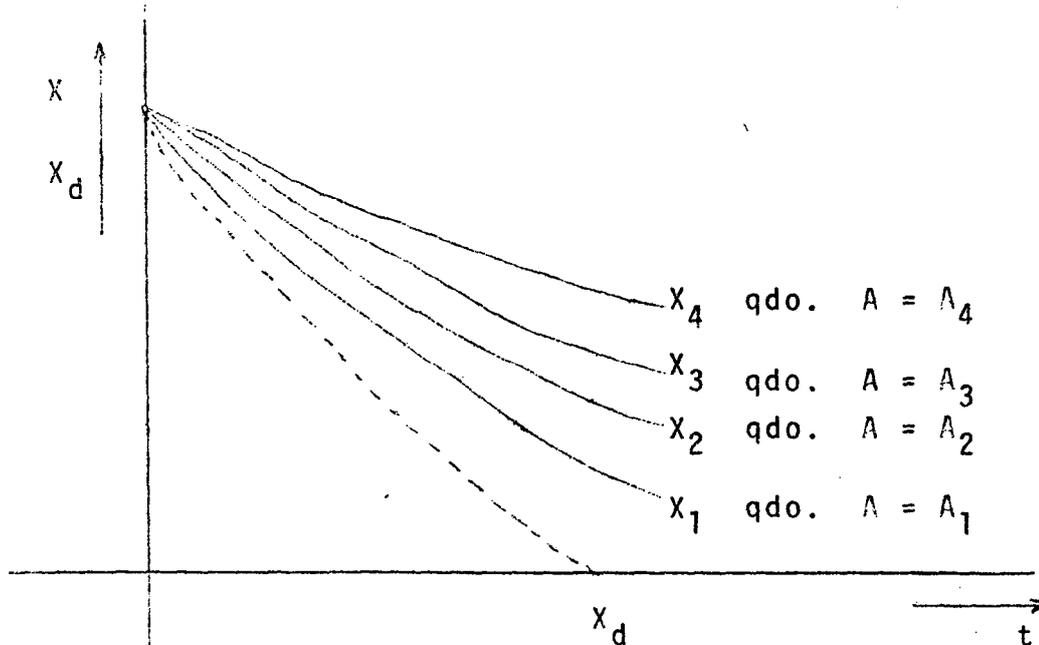
onde M e N , são matrizes conhecidas, e R , B e k foram tratadas no capítulo 5.

Como se vê, U^* depende de k e este por sua vez depende dos parâmetros do sistema, ou seja, do modelo que o representa. Mais explicitamente, para cada matriz A , existe um K particular que dá margem a um controlador ótimo U^* . Em outras palavras, o controlador é construído com um valor de A apenas, - isto é, a matriz K é obtida para um valor de A somente.

Com isso, é fixo, de uma vez por todas, o controlador ótimo em questão.

Porém, na prática, não se conhece precisamente o valor de A . Então, se os elementos de A variarem, ou uma combinação dos mesmos, o controlador, decerto, deixará de ser ótimo. Resumindo, U^* não é ótimo para qualquer valor A , e sim, para um somente. Caso haja, então, essa variação, a trajetória atual obtida será diferente da trajetória ótima

A figura abaixo ilustra muito bem esse comportamento.



A figura mostra claramente o desempenho do avião segundo as variações de A . Se o objetivo é obter a trajetória atual fechada em relação a desejável, um estudo da variação de $X(t)$, com respeito aos parâmetros a_{ij} , é de primordial importância. O estudo da sensibilidade dar-se-á uma previsão do desempenho do avião, o que permitir-se-á uma maior confiabilidade no sistema de pouso que ora discute-se.

Se a sensibilidade com respeito a um parâmetro particular é alta, podemos nos empenhar em maior esforço a fim de indentificar melhor o parâmetro, ou, projetar alguma correção online com este objetivo em vista. Para tanto, um tratamento analítico da sensibilidade está incluído.

9.2 - ANÁLISE DA SENSITIVIDADE

Representar-se-a por "a" os parâmetros do sistema. O mesmo é representado por

$$\dot{X} = AX + B U^*$$

eq. 9.2.1

onde

$$U^* = M X + N S, \text{ com } M \text{ e } N \text{ acima definidos.}$$

A matriz A é função dos parâmetros do sistema, isto é,

$$\dot{X} = A(a) X + B U^* \quad \text{eq. 9.2.2}$$

Claramente a solução da eq. acima será função de "a" pois

$$\dot{X}(t) = A(a) X(t) + B \left[M X(t) + N S \right] \quad \text{eq. 9.2.3}$$

Existem vários métodos de caracterizar a sensibilidade. Em nosso caso particular, como nos interessa o estudo da variação da trajetória X em relação a "a", escolhe-se $\frac{\partial X}{\partial a}$ como sendo o critério para o estudo desta sensibilidade.

Diferenciando a Eq. 9.2.3 parcialmente com respeito a "a", ficamos

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial a} = \frac{\partial A}{\partial a} X + \frac{\partial X}{\partial a} \left[A + B M \right]$$

Denotando

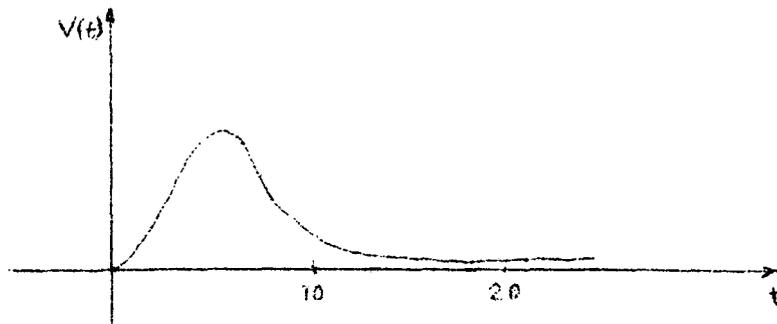
$$\frac{\partial X}{\partial a} = v, \text{ temos } \dot{v} = \left[A + B M \right] \cdot v + \frac{\partial A}{\partial a} \cdot X \rightarrow \text{Eq. 9.2.4}$$

A eq. 9.2.4 é linear e de primeira ordem, porém, não homogênea. A trajetória X é conhecida. Então, v pode ser obtido. Esta equação é similar à equação do sistema, Eq. 9.2.1 exceto para a função excitação.

A condição inicial para a eq. 9.2.4 é

$$v(0) = \frac{\partial X(0)}{\partial a} = 0,$$

visto que $X(0)$ é constante e independente de a . Evidentemente v é função do tempo.



De acordo com Eq. 9.2.4, sabemos que $v(t)$ tem a forma da figura acima. Portanto, a observação da mesma nos mostra que na região próxima ao ponto-de-toque, $v(t)$ é aproximadamente horizontal, portanto podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\dot{v}(t) \cong 0 \text{ na região ao ponto-de-toque.}$$

É justamente nesta região que o nosso sistema necessita de uma maior precisão. Então, faremos uma análise quantitativa da sensibilidade em tal região.

Substituindo na Eq. 9.2.4 obtemos

$$0 = [A + B M] v + \frac{\partial A}{\partial a} X$$

o que nos dará

$$v_{MAX} = - [A + B M]^{-1} \frac{\partial A}{\partial a} X \quad \text{eq. 9.2.5}$$

Considerando que de toda a trajetória de estado, a região próxima do ponto-de-toque, ou seja próxima do ponto X (20) é a mais crucial, devemos medir esta sensibilidade nas proximidades deste ponto, pois é a região a qual dela mais se exige precisão. Portanto calcularemos v_{MAX} em um ponto na dita região.

9.3 - SENSITIVIDADE NOS ESTADOS

A matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e,

$$\frac{\partial A}{\partial a_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_{13}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_{32}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a_{33}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A Eq. 9.2.5, calculado para $t = 18$, fica

$$v_{\text{MAX}}(18) = - \left[\Lambda + B M(18) \right]^{-1} \frac{\partial \Lambda X(18)}{\partial a}$$

eq.9.3.1

A eq. acima é uma equação matricial, entretanto dos 4 estados h, h, θ e θ , far-se-á uma análise, apenas do estado

$$h \triangleq x_4$$

PORTANTO,

$$v \triangleq \frac{\partial x_4}{\partial a}$$

ou melhor

$$v_1 \triangleq \frac{\partial x_4}{\partial a_{11}} ; v_2 \triangleq \frac{\partial x_4}{\partial a_{12}} ; v_3 \triangleq \frac{\partial x_4}{\partial a_{13}}$$

$$v_4 \triangleq \frac{\partial x_4}{\partial a_{32}} \text{ e } v_5 \triangleq \frac{\partial x_4}{\partial a_{33}}$$

Necessitamos calcular a matriz

$\left[\Lambda + B M(18) \right]$. E, também, a sua inversa

$$\left[\Lambda + B M(18) \right]^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = -R^{-1} \cdot B^T \cdot K \cdot -1 \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$M = - \begin{bmatrix} b_{11} & k_{11} & b_{11} & k_{12} & b_{11} & k_{13} & b_{11} & k_{14} \end{bmatrix}$$

$$BM = - \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & k_{11} & b_{11} & k_{12} & b_{11} & k_{13} & b_{11} & k_{14} \end{bmatrix}$$

$$BM = - \begin{bmatrix} b_{11}^2 & k_{11} & b_{11}^2 & k_{12} & b_{11}^2 & k_{13} & b_{11}^2 & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + BM = \begin{bmatrix} (a_{11} - b_{11}^2 k_{11}) & (a_{12} - b_{11}^2 k_{12}) & (a_{13} - b_{11}^2 k_{13}) & (-b_{11}^2 k_{14}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$a_{11} = -0.6$$

$$k_{11} = 0.147$$

$$a_{12} = -0.76$$

$$k_{12} = 0.306$$

$$b_{11}^2 = 5.64$$

$$a_{13} = 0.0029604$$

$$k_{13} = 0.004$$

$$a_{32} = 102.69$$

$$k_{14} = 0.003$$

$$a_{33} = -0.4$$

que fica

$$A + BM = \begin{bmatrix} -1.429 & -2.485 & -0.01959 & -0.0169 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 102.69 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+BM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0097 & 0.0389 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -59.17 & -84.55 & -147.04 & -57.65 \end{bmatrix}$$

portanto, a variação de $X(t)$ com a_{11} é,

$$v_{MAX} = \left. \frac{\partial X}{\partial a_{11}} \right|_{t=18} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 59.17x_1(18) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com a_{12} tem-se

$$v_{MAX} = \left. \frac{\partial X}{\partial a_{12}} \right|_{t=18} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 59.17x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

com a_{13} , tem-se

$$v_{MAX} = \left. \frac{\partial X}{\partial a_{13}} \right|_{t=18} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 59.17x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix}$$

com a_{32} ten-se

$$V_{MAX} = \frac{\partial X}{\partial a_{32}} \quad t=18 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0097x_2 \\ 0 \\ -147.55x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.00194 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$$

finalmente, com a_{33} , ten-se

$$V_{MAX} = - \frac{\partial X}{\partial a_{33}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0097x_3 \\ 0 \\ 147.55x_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0097 \\ 0 \\ -147.55 \end{bmatrix}$$

Resumindo, x_4 sofre a maior variação com o parâmetro a_{33} , e ao mesmo é dado por

$$a_{33} = - \frac{1}{T_s}$$

donde T_s é a constante de tempo de período curto do sistema.

Na tabela seguinte da-se um resumo da sensitividade do sistema.

TABELA DE VARIAÇÃO DOS ESTADOS COM OS PARÂMETROS a_{ij}

ESTADOS PARAMETROS	h	h'	e	e'
a_{11}	0	0	0	0
a_{12}	11	0	0	0
a_{13}	-60	0	0	0
a_{32}	30	0	0.00194	0
a_{33}	-147.55	0	0.0097	0

O que interessa mais a análise de h em relação aos parâmetros, no APÊNDICE V são plotadas as curvas de variação de h com os parâmetros "a" em torno de uma variação feita, por nós, nestes últimos, de 20% aproximadamente.

C A P I T U L O X

ESQUEMA ADAPTATIVO

10.1 - CONSIDERAÇÕES

O conceito de sistema adaptativo é relativamente novo e não existe uma definição única para tal técnica. Limitar-se-á a defini-lo com base em nosso problema. Para tal, usa-se uma das várias definições existentes, a qual esclarecerá esse conceito e permitirá uma melhor compreensão do mesmo.

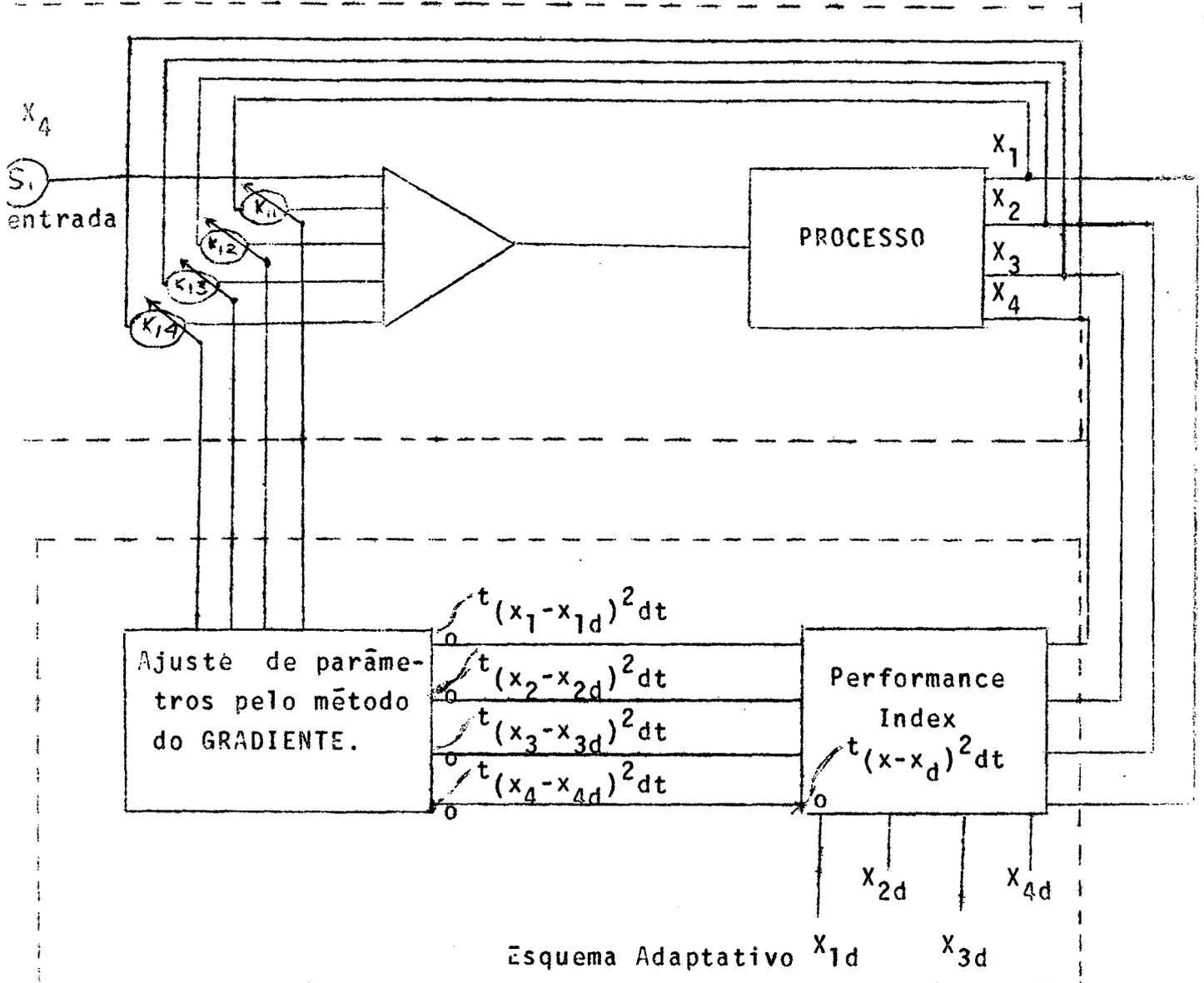
DEFINIÇÃO: "Um sistema adaptativo se constitui de dispositivo - que prevê um meio de medir continuamente o desempenho do sistema em relação a um dado critério e um meio de modificar automaticamente os parâmetros ajustáveis do controlador pela ação de malha fechada, tal que o critério deva ser satisfeito".

Esta definição implica que o sistema de controle adaptativo deve reagir ou adaptar-se ao *meio ambiente* que o envolve. Aqui, a expressão *meio ambiente* pode ser definida como o conjunto de condições as quais o Engenheiro de controle leva - leva em consideração a quando da elaboração do projeto, como por exemplo os fatores dos quais os parâmetros do sistema podem ser dependentes.

Este sistema deve, portanto, automaticamente, medir as características de saída do sistema de controle, e do processo sob controle, e com bases nessas medidas, ajustar o sistema, ou melhor, conduzir o sistema a características ótimas, previamente definidas.

Agora, precisa-se dar resposta a uma pergunta: *Por que usar um sistema de controle adaptativo?* Um sistema de controle adaptativo se faz necessário quando um controlador convencional fica impossibilitado de exercer sua função. Por exemplo, um controlador poderia precisar de compensação devido:

a) Variações no modelo do processo, ou nos valores dos parâmetros decorrentes de variações em seu meio ambiente, por exemplo, o modelo do avião varia com a velocidade do ar, altitude,

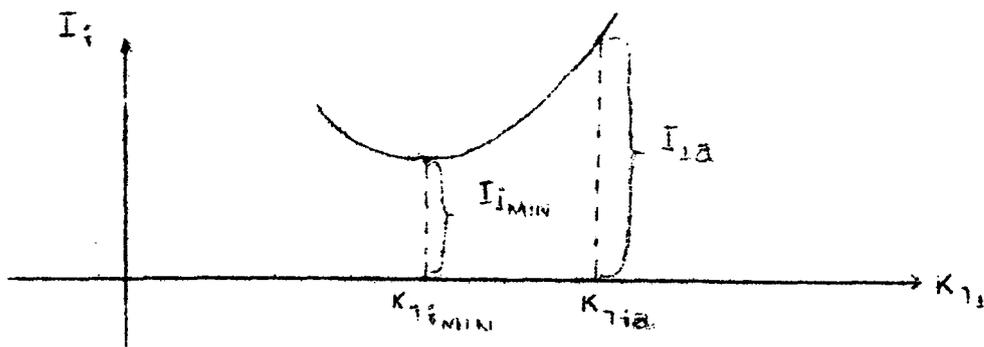


Como se vê, os estados atuais são medidos "on line" e deles, em cada ponto se calcula $(x - x_d)^2$, o qual modificará o parâmetro correspondente ao estado cuja variação deu origem a esse ajustamento.

Ten-se de supor que uma variação no estado x_i exige um ajuste apenas no parâmetro k_{1i} .

Precisa-se saber qual o tipo de correção que será feita nos parâmetros calculados pela otimização.

Pode-se fazer uma análise desta variação. Sabe-se que existe um valor de k_{1i} , o qual minimiza o PI I_i . Tome-se a figura.



Suponha-se que pela modificação do estado x_i , apareça um PI I_{ia} , com um parâmetro correspondente $K_{\gamma_{ia}}$. Se mudar-se o parâmetro $k_{\gamma_{ia}}$ para $k_{\gamma_{ib}}$, obedecendo a relação.

$$K_{\gamma_{ib}} = K_{\gamma_{ia}} \mp \frac{dI_{ia}}{dk_{\gamma_{ia}}} \cdot \delta$$

onde δ é um acréscimo pequeno, devido a suavidade exigida, tendo-se a certeza de que $k_{\gamma_{ib}}$ se aproximará de $k_{\gamma_{i, \min}}$, e assim sucessivamente, até chegar-se ao $k_{\gamma_{i, \min}}$, que dará o PI mínimo $I_{i, \min}$.

10.3 - PERFORMANCE INDEX PARA O ESQUEMA ADAPTATIVO

Precisa-se desenvolver um esquema adaptativo tal que o avião siga uma trajetória desejável, sejam quais forem as condições exigentes, como por exemplo mudança dos parâmetros do modelo, no meio ambiente e nas condições da pista. Além disso, o pouso deverá ser suave e satisfazer todas as restrições exigidas, as quais foram citadas no capítulo sobre a performance-index. São elas:

- a) $\alpha < 18^\circ$; $\Delta\alpha < 3.6^\circ$
- b) $0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$
- c) $-35^\circ \leq U \leq 15^\circ$

Quando for efetuado o cálculo da otimização do sistema de pouso, as restrições acima não foram levadas em consideração.

Sómente após otimização o sistema, é que se verifica a coerência ou não, desta otimização, com as citadas restrições. Caso não haja, então se repete o cálculo para outro performance index, até que se consiga superar esta questão. E, como na otimização, já foi superado, resta apenas lembrar que a trajetória de corrente do cálculo da otimização, só será ótima se não houver as variações por nós já tratadas. Então, as seguintes condições devem ser satisfeitas, mesmo que ocorra essas variações:

a) A altitude h deve seguir a altitude desejada h_d , por necessidade de um pouso correto.

b) A variação de altitude h' deve seguir a variação de altitude desejada h'_d , devido a necessidade de se assegurar um pouso bastante suave.

c) O ângulo de ataque α não é estado, porém possui vinculação com o estado θ . Portanto, as restrições exigidas para o ângulo de inclinação θ , sendo satisfeitas, as restrições de α também o serão.

d) A variação do ângulo de ataque α' , também não é estado, mas possui vinculação com a variação do ângulo de inclinação θ' .

e) As restrições com o controle U não constitui problema, mesmo porque sendo já, o sistema, otimizado, as correções que porventura se fizerem necessárias, serão pequenas.

Utiliza-se os seguintes funcionais como Performance Índices,

$$\text{para } x_4 : I_1 = \int_0^{\tau} (x_4 - x_{4d})^2 dt,$$

$$\text{para } x_3 : I_2 = \int_0^{\tau} (x_3 - x_{3d})^2 dt,$$

$$\text{para } x_2 : I_3 = \int_0^{\tau} (x_2 - x_{2d})^2 dt,$$

$$\text{para } x_1 : I_4 = \int_0^{\tau} (x_1 - x_{1d})^2 dt.$$

10.5 - CÁLCULO DE $\frac{\partial I}{\partial k_1}$

O sistema otimizado é representado por

$$\dot{X} = A X + B U \quad \text{eq. 10.1}$$

onde

$$U = -R^{-1} \cdot B^T \cdot K \cdot K \cdot X - R^{-1} \cdot B^T \cdot s$$

ou como foi definido F e V

$$U = F X + V$$

A eq. 10.1 fica,

$$\dot{X} = A X + B F X + B V$$

ou

$$\dot{X} - A X - B F X = B V$$

ou sua transformada de Laplace,

$$(SI - A - BF(S)) X(S) = BV(S) + X(0)$$

onde S agora é a variável de Laplace.

Ou,

$$X(S) = (SI - A - BF(S))^{-1} BV(S) + X(0)$$

omitindo a variável S, fica

$$X = (SI - A - BF)^{-1} [BV + X(0)]$$

ou ainda

$$X = (SI - A + BR^{-1}B^TK)^{-1} [BV + X(0)]$$

dai,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial k} &= -(SI - A + BR^{-1}B^TK)^{-1} \frac{\partial}{\partial k} (SI - A + BR^{-1}B^TK) \cdot \\ &\quad \cdot (SI - A + BR^{-1}B^TK)^{-1} \cdot (BV + X(0)). \end{aligned}$$

como

$$\frac{\partial}{\partial k} (SI - A + BR^{-1}B^TK) = BR^{-1}B^T \frac{\partial K}{\partial k} \quad C \frac{\partial k}{\partial k}$$

onde

$$C = BR^{-1}B^T$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial k} &= -(SI - A + CK)^{-1} C \frac{\partial K}{\partial k} (SI - A + CK)^{-1} \cdot \\ &\quad [BV + X(0)] \quad \text{eq. 10.2} \end{aligned}$$

Observação: A eq. 10.2 foi deduzida a partir de que se tome

$$T \cdot T^{-1} = I$$

$$\frac{\partial T}{\partial k} \cdot T^{-1} + T \frac{\partial T^{-1}}{\partial k} = 0$$

então

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial k} = - T^{-1} \frac{\partial T}{\partial k} \cdot T^{-1}$$

Calculando, agora, a variação de I com k, tem-se para cada caso,

$$I = \int_0^t (x - x_d)^2 dt.$$

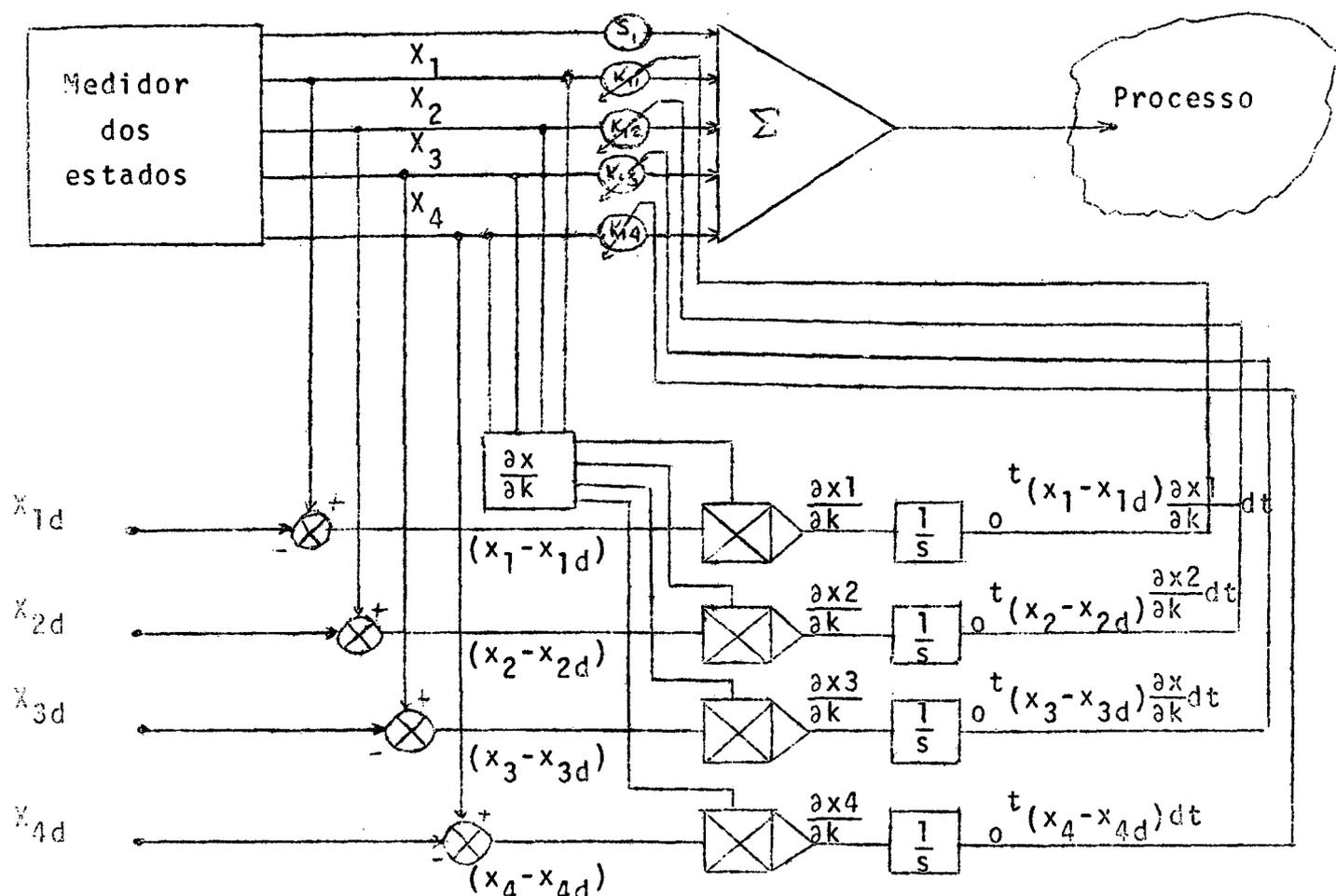
$$\frac{\partial I}{\partial k} = \int_0^t 2(x - x_d)^2 \cdot \frac{-I}{k} \cdot dt$$

onde, $\frac{\partial x}{\partial k}$ no tempo \bar{t} é dado pela transformada inversa da equação 10.a.

Tem-se, agora, algumas considerações a respeito desse Esquema Adaptativo. A primeira é que a cada estado corresponde apenas um PI, como visto acima. A segunda é que cada PI influenciará na variação de apenas um parâmetro do controlador. Uma terceira é a assunção de que a curva PI versus k é convexa, portanto admite um mínimo no ponto k_1 já definido anteriormente.

Também, para evitar problemas de estabilidade do sistema de Controle Adaptativo Geral, sugerimos que essas modificações dos parâmetros k_1 , sejam tão rápidas quanto possível.

Portanto, o esquema adaptativo sugerido é



10.6 - RESUMO DA APLICABILIDADE PRÁTICA DO ESQUEMA ADAPTATIVO

Além das considerações práticas sobre o uso do Sistema de Pouso Automático, compensado através de um esquema adaptativo, feitas no início deste capítulo, é mister se tecer algum comentário sobre sua aplicabilidade prática, sem a qual, acredita-se, será, o mesmo, mais um projeto engavetado.

Exigências do Esquema Adaptativo

O pouso do avião tem a duração total de 20 segundos, desde o início da fase de pouso, com o aparelho a, aproximadamente, 100 pés de altitude, até o ponto-de-toque, quando ocorre o primeiro contato do avião com a pista. Portanto, é um tempo relativamente pequeno, considerando que as medições são feitas "on line", e, correções efetuadas depois desse intervalo, obviamente, não levarão a qualquer boa finalidade. Assim as cor-

reções devem ser o mais rápido possível. Isto é reforçado através da assunção feita, anteriormente, que cada parâmetro ajustado K_{1i} devido a variação no estado x_i , compensará apenas este estado x_i que lhe deu origem. Ora, isto não é verdade, pois temos apenas uma variável de controle, e, todas as correções serão feitas através dela, o que poderá muito bem mudar ou não as outras variáveis de estado. Sabemos, no entanto, que uma variação em K_{1i} terá mais peso na variável x_i do que o parâmetro K_{1j} , com $i \neq j$. Também, se sugirem variações nos outros estados, os outros parâmetros também serão compensados, o que aliviará a desvantagem da assunção acima.

Não LINEARIDADE

Inicialmente, o sistema é linear, o que não ocorre com o sistema acoplado do EA.

Sem o EA, o sistema linear é representado por

$$\dot{X} = A X + B U$$

onde

$$U = F(K) X + V$$

ou

$$\dot{X} = [A + B V^{-1} K(X)] X + B V^{-1} V \quad \text{Eq. 10.3}$$

Após a colocação do EA, os parâmetros K , são funções das trajetórias X , e a Eq. 10.3, fica

$$\dot{X} = [A + B V^{-1} (K(X))] X + B V^{-1} V \quad \text{Eq. 10.4}$$

o que mostra ser a mesma não linear.

Porém, desde que a compensação seja bem rápida, isto é possível devido a utilização do Método do Gradiente, não se tem problema de estabilidade. Mesmo assim, um estudo de partida para um outro trabalho.

Considerações sobre a Matriz A

Tomando a Eq. 10.2, se observa que a análise da variação dos estados com os parâmetros foi efetuado levando em conta o valor nominal da matriz A . Porém, se sabe que o afastamento dos estados desejáveis se faz quando há variações em A . Mas, essa aproximação é reforçada pelos resultados da simulação no computador, decorrentes de variações nos elementos da matriz A em torno de 20% trazerem ótimos resultados práticos.

Considera-se, portanto, o sistema bastante prático e eficiente, carecendo de uma rápida construção, o que também sugerimos como de um outro trabalho.

C A P Í T U L O X I

11.0 - Conclusões.

Como se disse no prefácio, o presente trabalho foi desenvolvido no sentido de dar segurança e conforto aos passageiros por ocasião do pouso do avião. Esta foi, realmente, a primeira e única preocupação desde o momento em se propôs a desenvolver tal estudo. Além de uma convicção da importância de tal trabalho, tem-se consciência de que o mesmo não é tão simples como talvez possa parecer, pois apesar de ser usado um estudo altamente sofisticado, cre-se que se conseguirá chegar a resultados bastante práticos, o que dá um incalculável incentivo em se continuar pesquisando com base em ferramenta, a qual chega a ser temida por parecer muito teórica e sem aplicação prática imediata -- que é a matemática.

O modelo matemático do avião foi desenvolvido a partir de considerações dos momentos e forças aerodinâmicos e da aplicação das leis fundamentais da mecânica. Este modelo foi linearizado assumindo-se que o desvio da condição de equilíbrio vôo é pequeno.

A escolha do modelo recaiu na utilização da técnica de variáveis de estado, cujo valor atual está sofrendo um crescimento cada vez maior já comentado.

O modelo, portanto, é composto de quatro variáveis de saída (*altitude, variação de altitude, ângulo de inclinação e sua variação*) e uma variável de entrada (*ângulo de deflexão-elevadura*). Com apenas uma variável de controle deve-se controlar as quatro de saída. Isso é possível, pois, conforme foi dito, o sistema é controlável e ao mesmo tempo observável. Assim como o sistema é estável.

A colocação dos capítulos sobre controlabilidade-observabilidade e estabilidade, após o estudo de otimização do sistema tem sentido, pois se toma, um modelo já bastante testado e prático, o que dispensaria tal estudo, porém, o mesmo foi executado para sanar algumas dúvidas, e mesmo, para reafirmar o que acima se assegura.

O performance index deveria possuir todas as restrições e requisitos exigidos para que o melhor desempenho fosse obtido. Em outras palavras, o sistema não pode ser melhor do que o performance index, sob pena deste não representá-lo. Porém, - quanto mais restrições se coloca em um PI, tanto mais difícil se torna sua otimização. Então, escolhe-se um performance index não muito rico das considerações e otimiza-se o sistema. Depois de calculados os parâmetros referentes à otimização, é que se verifica se todas as restrições e requisitos são satisfeitos. Caso não seja, repete-se o cálculo até que se verifique tais condições. Apesar de ser um processo de tentativas, o método é muito mais - do que se escolher um performance index já, da primeira vez bastante sofisticado, com prejuízo de sua execução devido a dificuldade no cálculo.

Escolhido o PI; passa-se à otimização propriamente dita. Utiliza-se o mínimo princípio de Pontryagin, o qual é bastante conhecido e dispensa qualquer comentário sobre o assunto. Mesmo assim as dificuldades de se completar tal estudo devem ser expostas. Uma delas, a qual se considera a mais importante reside no fato de que não existe apenas uma anotação no vasto material bibliográfico existente no ramo.

Isto pode trazer dificuldades para um estudante de controles que inicia tal estudo. Porém, com boa orientação este problema pode ser solucionado. Conclui-se e acredita-se - que deve-se conscientizar sempre, que embora haja vasta literatura sobre as técnicas de otimização, ela não permite a existência de auto-didatas, o que é uma pena, pois no Brasil, onde há deficiência de especialistas em assunto tão importante, carece ainda da existência de tais estudantes como um meio de superar o atraso tecnológico, a pesquisa, etc.

A outra dificuldade está na simulação em computador. Dificuldade essa, surgida, em parte pela pequena experiência em que o estudante se encontra, parte por ser um sistema não trivial, pois o sistema otimizado, utilizando-se variável de estado, possui dezoito equações diferenciais de primeira ordem, das quais quatorze são não-lineares. O método Runge-Kutta de quarta ordem é eficiente, porém, muito sensível. O programa utilizado,

devido a suavidade do pouso, exige um passo de integração bastante pequeno, da ordem de um centésimo, e, como se precisa imprimir do tempo zero até o tempo vinte segundos, e como são dez dados com cinco em cada linha, precisa-se de quatro mil linhas para a impressão total. Caso o computador utilizado seja o IBM-1130, e o mesmo imprime uma linha por vez, o tempo de execução é de aproximadamente 3 horas. Caso se utilize um computador que imprima uma página, ao invés de uma linha, por vez, esse tempo será obviamente, minimizado, diminuindo o gasto financeiro da simulação do sistema de pouso em questão.

O tempo de utilização do computador digital foi bastante grande pois além da elaboração de tal programa, foram feitas variações dos elementos da matriz coeficiente do vetor estado, na equação de estado, para fins de visualização prática na análise da sensibilidade do sistema.

A quando da elaboração do programa, foi, o sistema, simulado fazendo-se a variável de controle igual a zero, para se visualizar, praticamente, o resultado do estudo da estabilidade do sistema, que com isso se comportou de uma maneira excelente reforçando a clarividência de sua estabilidade que a tal análise comprovou.

Se se propôs projetar um esquema adaptativo a ser acoplado ao sistema otimizado, por razões que se julgou necessárias, como variações nos parâmetros do modelo, falhas mecânicas e/ou, necessidade de mudança na trajetória desejada, um estudo das variações que os estados estariam sujeitos, pelo menos, se faria necessárias. Este estudo abrange variações dos estados atuais com os parâmetros do modelo do avião.

Existem vários métodos que podem ser aplicados ao estudo do Esquema Adaptativo. Dentre eles, citamos o método do gradiente e o método de Fibonacci, sendo este último desaconselhável por uma razão muito simples em favor do primeiro: o de Fibonacci calcula e dá a variação do PI, relativo ao respectivo parâmetro, duas vezes, e toma a direção no eixo, dos parâmetros - que dá um menor performance index, e, assim sucessivamente, até com que o PI seja minimizado. Portanto, o processo não deixa de ser por tentativas, o que pode fazer, em dado momento, que o avião, já fora de sua trajetória, se afaste um pouco mais, causan

do uma correção um tanto brusca. Já o primeiro apresenta diretamente o sentido, no eixo dos parâmetros, o qual a correção deve ser efetuada.

Uma outra vantagem da análise da sensitividade é o conhecimento sobre sistema, cujo valor está maior visualizado do projeto por parte do Engenheiro de Controle.

O Esquema Adaptativo é tão versátil que, na necessidade de se mudar a trajetória desejada do avião, o mesmo reage ou se adapta facilmente a tal circunstância.

Desde que as compensações sejam feitas tão rápidas quanto possível, não se terá problema de estabilidade, visto que o processo nem notará que houve qualquer variação.

O objetivo deste trabalho não foi de se utilizar técnicas desconhecidas ou inéditas. Apesar desse trabalho possuir técnicas não muito velhas em Sistemas de Controle, fez-se questão de levar as causas práticas, teorias que já existiam há alguns anos.

Em automatismo, a aplicação prática está muito defasada em relação à teoria. Cerca de noventa por cento dos trabalhos de pesquisa, em Controles, é desenvolvimento matemático. Portanto, o automatismo carece de utilização prática. Com isso, mais uma finalidade foi cumprida.

É óbvio que o automatismo, tal qual a energia nuclear para fins passíficos, possa ser aplicado visando favorecer um melhor modo de vida ao elemento principal que existe na terra, ou como queiram, em todo o universo. É uma questão de ombriedade. Será que é tão difícil respeitar os direitos humanos.

B I B L I O G R A F I A

01. MERRIAM III, C. W., Optimization Theory and the design of Feedback Control System. - N.Y. EEUU, McGraw-Hill, Inc. 1964. Pãg. 327. Apêndice E.
02. KIRK, Donald E. - Optimal Control Theory - An Introduction. N. Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1970.
03. WILLEMS, J. L., Stability Theory of Dynamical Systems. - Great Britain, Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970.
04. EVELEIGH, Virgil M., Adaptative Control and Optimization Techniques. N.Y- McGraw-Hill Book Company, 1967.
05. PERKINS, William R. and Cruz Jr., Josê B., Engineering of Dynamics Systems. N.Y., John Willey & Sons., 1969.
06. CHEN and HASS, Elements of Control Systems Analisis. N. Y., Prentice Hall, 1968.
07. MATYÁS, Optimal Control Systems. London, Iliffe Books Ltd, 1969.
08. ANDERSON, Brian D.O. and Moore, John B., Linear Optimal Control. N.Y., Prentice Hall, Inc. 1971.
09. HARD, John R. and STRUM, Robert D., State Variable Analysis. N.Y., Prentice Hall, Inc. 1970.
10. OLDENBURGER, Rujus, Optimal Control. N.Y. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1966.
11. BELLMAN, Richard, Mathematical Theory of Control Processes. N.Y., Academic Press, Inc. 1967.
12. SHINNERS, Stanley M. - Modern Control System Theory and Application. Mass. Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

A P E N D I C E - 2

Definição das variáveis usadas no programa.

XN(K) , K = 1,18

Para K variando de

01 a 4 , são os parâmetros S.

05 a 14, são os parâmetros K.

15 a 18, são as variáveis de estado θ' , θ , h' e h , respectivamente.

X(K) , K = 1,18

A mesma configuração acima, são que estes são usados no cálculo das inclinações pelo método Range - KUTTA.

Q(M,N) , M = 1,18 , N = 1,14

Incremento definido no método de Range - KUTTA.

FX(K) , K = 1,18

Derivada dos estados e parâmetros, obedecendo a mesma ordem que XN(K).

TN , T

Tempos final e atual respectivamente.

H

Passo de integração

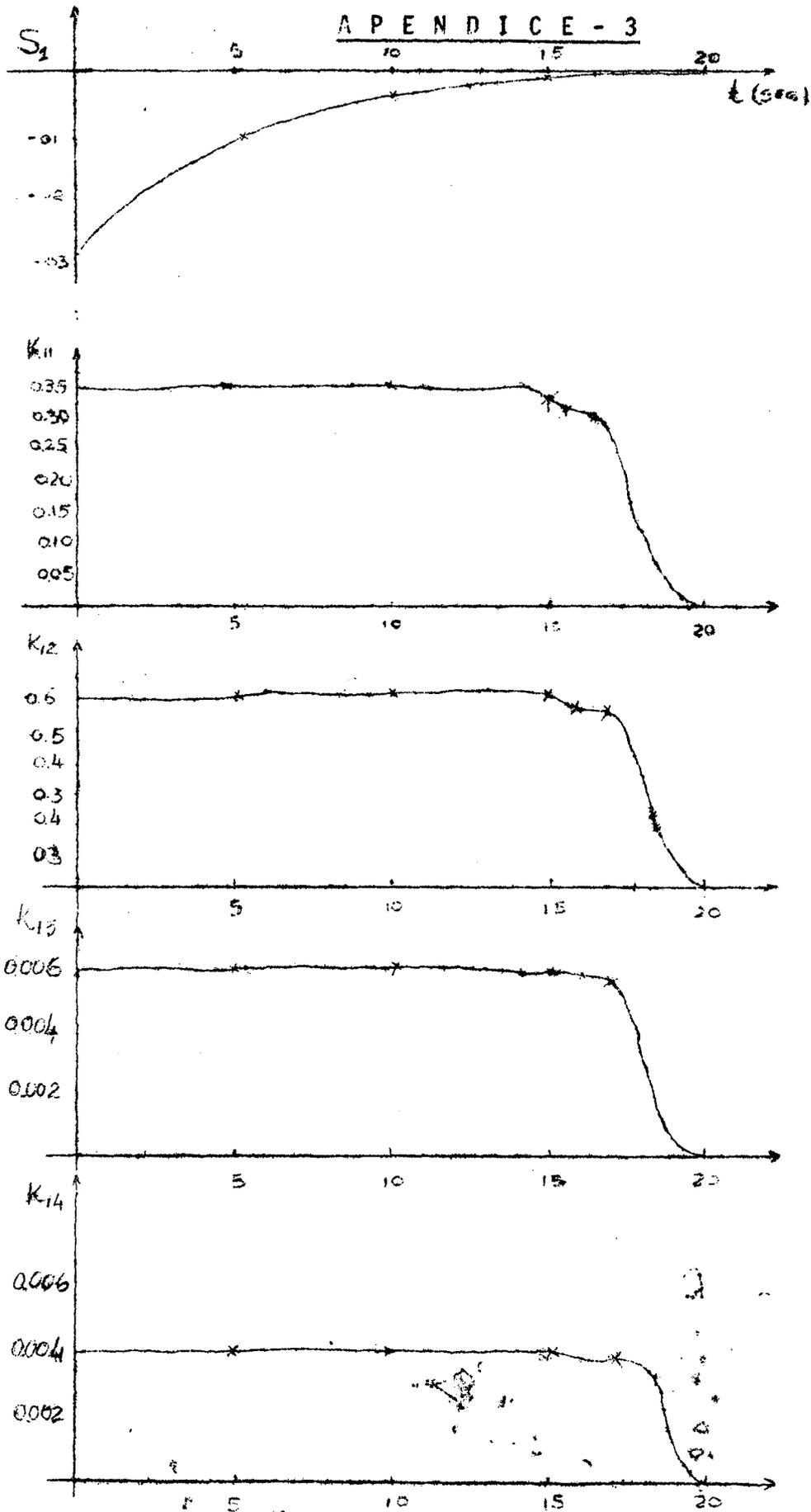
P(K) , K = 1,4

Elementos da matriz de ponderação Q.

U

Variável de controle.

A P E N D I C E - 3



Ganhos Decorrentes da Otimização

A P E N D I C E - 4

