UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UMA SISTEMÁTICA DE ESPECIFICAÇÃO PARA POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS NA SÍNTESE DE MECANISMOS ARTICULADOS.

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do grau de mestre em engenharia mecânica.

PÉRICLES GANDI DO VALLE

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL
ABRIL - 1983

DESENVOLVIMENTO DE UMA SISTEMÁTICA DE ESPECIFICAÇÃO PARA POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS NA SÍNTESE DE MECANISMOS ARTICULADOS.

Péricles Gandi do Valle

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia", especialidade: Engenharia Mecânica, área de concentração: Projeto, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. José Carlos Zanini, Ph.D.
Orientador

Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador da Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica

Apresentada perante a Banca Examinadora,
composta dos Professores:

Prof. José Carlos Zanini, Ph.D.

Prof. José João de Espíndola, Ph.D.

Prof. Nelson Back, Ph.D.

À

MARGARETH,

AO DIOGO E

AOS MEUS FAMILIARES

A G R A D E C I M E N T O S

- Aos professores da Universidade Federal de Santa Catarina;
- Em especial, ao professor JOSÉ CARLOS ZANINI, pela orientação;
- Aos funcionários do Núcleo de Processamento de Dados, pelo auxílio na computação do programa;
- Ao Programa de Recursos Humanos para o Setor Nuclear(PRONUCLEAR), pela bolsa de estudos durante a obtenção dos créditos;
- A administração do BRDE, agência de Florianópolis, pelo apoio na conclusão do trabalho;
- Em especial ao Diretor - Superintendente JOÃO ADALBERTO DA SILVEIRA e ao Gerente Administrativo JOÃO LÚCIO DA COSTA BARACUHY;
- Aos meus familiares, pela paciência e compreensão;
- E a todos que contribuiram positivamente para a realização do mesmo.

S U M Á R I O

LISTA DE FIGURAS

SÍMBOLOS MAIS USADOS

AB,BC	- Articulações móveis do quadrilátero articulado obtido.
CD,DA	- Articulações fixas do quadrilátero articulado obtido.
E	- Origem do plano móvel.
$E_0,\ldots E_4$	- Posições particulares do ponto E.
F	- Ponto genérico com trajetória arbitrada.
$F_0,\ldots F_4$	- Posições particulares do ponto F.
$g(U,V), f(\alpha,\beta)$	- Função desejada e função gerada.
j	- Contador do número de PFS.
J_E , J_F	- Intersecções das retas r e r' com a circunferência do círculo de inflexão.
k	- Contador do número de PIS.
K	- Curvatura de uma trajetória.
K', K"	- Derivadas da curvatura.
ℓ	- Contador do número total de PMS.
m	- Parâmetro de otimização real.
m_E , m_F	- Inclinações das tangentes as trajetórias dos pontos E e F.
n,m	- Duas posições finitas do plano móvel.
$\frac{N}{2}, \frac{M}{2}$	- Raios de curvatura da cúbica no polo.

n,t	- Normal e tangente a circunferência do círculo de inflexão no polo P.
O_E , O_F	- Centros de curvatura das trajetórias dos pontos E e F.
PIS	- Posições infinitesimalmente separadas.
PFS	- Posições finitamente separadas.
PMS	- Posições multiplamente separadas.
P-P	- Duas posições finitamente separadas (2 PFS).
PP	- Duas posições infinitesimalmente separadas (2 PIS).
Q	- Ponto de Ball.
r	- Reta que contém os pontos E, O_E, J_E, P.
r'	- Reta que contém os pontos F, O_F, J_F, P.
$(r_E, \Theta_E), (r_F, \Theta_F)$	- Coordenadas polares dos pontos E e F.
SIMAP	- Programa para síntese de mecanismos articulados planos.
SIMAPM	- Sistema modificado para a síntese de mecanismos articulados planos.
PISEP	- Subrotina das posições infinitesimalmente separadas.
SGR	- Sistema geral de referência.
SER	- Sistema especial de referência.
$(\frac{T}{2}, \frac{W}{2})$	- Coordenadas do centro da circunferência do círculo de inflexão em relação ao plano móvel.
$U(\gamma)$, $V(\gamma)$	- Funções.

$U' \ldots U'''', V' \ldots V''''$	-	Derivadas de I a IV ordem de U e V.
UV	-	Sistema fixo de referência (SGR).
uv	-	Sistema móvel de referência (SG.R).
$(U_P, V_P), (u_p, v_p)$	-	Coordenadas do polo em relação ao sistema fixo e móvel.
$(U_{P_1}, V_{P_1}), (U_{P_2}, V_{P_2})$	-	Coordenadas do polo para o primeiro e segundo grupo de dois PIS.
$(U_E, V_E), (U_F, V_F), (U_{OE}, V_{OE})$	-	Coordenadas dos pontos E, F, O_E.
XY, xy	-	Sistema especial de referência plano fixo e móvel.
α, β, γ	-	Parâmetros de movimento.
$(\alpha_0 \ldots \alpha_4, \beta_0 \ldots \beta_4), (\gamma_0 \ldots \gamma_4)$	-	Parâmetros lineares e angulares para as posições $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$.
$\Delta U, \Delta V, \Delta \gamma$	-	Intervalos.
$\Delta S_{01}, \Delta S_{12}, \Delta S_{23}, \Delta S_{34}$	-	Intervalos dos arcos entre as posições zero-um, um-dois, dois-três e três-quatro do ponto E.
ρ	-	Raio de curvatura para a trajetória do ponto E.
$\rho_{012}, \rho_{123}, \rho_{234}$	-	Raios de curvatura nas posições zero-um-dois, um-dois-três e dois-três-quatro.
ψ_E, ψ_F	-	Ângulos que as retas r e r' fazem com o eixo t.

R E S U M O

Desenvolveu-se, no plano, uma especificação compacta das posições infinitesimalmente separadas (PIS) para a síntese de mecanismos articulados, utilizando expressões para a determinação dos parâmetros de movimento α, β para duas, três, quatro e cinco posições do plano.

Com estas expressões tornou-se possível a especificação dos seis casos da teoria PMS, que envolve posições finitamente separadas (PFS) e posições infinitesimalmente separadas PIS do plano móvel.

As equações desenvolvidas foram acrescentadas ao programa de computador SIMAP (Síntese de Mecanismos Articulados Planos) através da subrotina PISEP resultando o programa PMS Modificado, denominado SIMAPM.

O programa SIMAPM (Sistema Modificado para a Síntese de Mecanismo Articulados no Plano), utiliza dois sistemas de referência ou seja, o geral e o especial. Este programa está preparado para resolver, considerando o sistema geral de referência, os cinco casos de 5 PMS que são P-P-P-P-P; PP-P-P-P; PP-PP-P; PPP-P-P; PPP-PP, e através do sistema especial de referência os casos, PPPP-P; PPPPP.

Exemplos de aplicação da nova sistemática de especificação são dados, evidenciando a eficácia do modelo proposto.

A B S T R A C T

A compact specification for infinitesimally separated positions (PIS) of the coupler plane in plane linkage synthesis is developed from the expressions involving the motion parameters α, β, for two, three, four and five positions of the coupler plane. By this procedure it becomes possible the specification of the six cases in the PMS theory, involving finitely (PFS) and infinitesimally separated positions (PIS) of the moving plane.

The developed equations were added to the computer programme SIMAP through the subrotine PISEP, resulting the modified PMS computer programme called SIMAPM.

The SIMAPM computer programme uses two reference systems, i.e. the general and the special one, and is prepared to solve, the five cases of 5 PMS respectively P-P-P-P-P; PP-P-P-P; PP-PP-P; PPP-P-P; PPP-PP, using the general reference system, and PPPP-P; PPPPP by the special reference system.

Examples of application of the new systematic are given, which proves the efficacy of the proposed model.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

Métodos analíticos programados para computador tem sido utilizados no projeto dos mecanismos articulados, onde em uma mesma especificação pode-se ter combinações envolvendo deslocamentos finitos e infinitesimais do plano móvel, que ao todo chegam a acomodar até 5 posições multiplamente separadas do plano móvel, ou seja 5 PMS.

Para 5 PMS há sete combinações possíveis para o deslocamento do plano móvel, envolvendo posições finitamente separadas do plano (PFS) e posições infinitesimalmente separadas (PIS). As posições separadas finitamente são relativamente fáceis de especificar não ocorrendo o mesmo com as posições separadas infinitesimalmente que requerem o perfeito entendimento da teoria PIS, Zanini [6]

A disponibilidade de um programa de computador que resolva completamente o problema de 5 PMS, se apresenta como uma ferramenta poderosa para o projeto de mecanismos articulados, que só poderá ser usada, uma vez conhecida as qualidades potenciais da teoria PIS.

Todas as características especiais de movimento dentro da teoria PIS são armazenadas em onze cartões de dados.

Nesta dissertação são utilizados os sistemas geral e especial de referência e a transformação de coordenadas que envolve rotação e translação do sistema geral para o sistema especial e a transformação inversa do sistema especial para o sistema geral.

O método apresentado possibilita um elenco de alternativas na determinação da especificação dos parâmetros de movimento (α,β,γ) fig. 2.1 gerando soluções as mais variadas, sem exercer todavia controle sobre as dimensões finais das barras das soluções encontradas.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Tesar e Sparks [4], em 1968 desenvolveram a síntese coplanar para 5 posições, dentro da teoria PMS.

Em 1975 Zanini [6], elaborou a sua tese de Doutoramento, na qual apresentou interpretações do significado geométrico de PIS, e comparou os resultados obtidos através da aplicação da teoria PMS com aqueles obtidos através da aplicação de métodos de otimização.

Em 1980, Riso [9] em sua tese de Mestrado, realizou a unificação da teoria PMS plana em termos dos coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$, que só tinham sido utilizados para 5 PMS.

Na dissertação ora apresentada é realizada uma sistemática programada para a especificação de PIS utilizando o sistema geral de referência até 3 PIS, e o sistema especial de referência para 4 PIS e 5 PIS.

Exemplos de aplicação são apresentados mostrando a utilização da sistemática proposta, em computador.

1.3. OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo do trabalho é o de desenvolver uma sistemática que, aplicada ao computador, permita especificar de forma automática os parâmetros de movimento α e β para as posições infinitesimalmente separadas do plano acoplador. Até então a especificação vinha sendo feita em uma forma desacoplada à teoria das Posições Multiplamente Separadas (PMS), requerendo um extenso trabalho de preparação de dados.

Hoje, com a implantação na U.F.S.C. deste programa fica facilitado o processo de especificação para as posições infinitesimalmente separadas dentro dos sete casos da teoria 5 PMS.

Convém ressaltar que o programa de computador SIMAPM desenvolvido traz como vantagem a economia de tempo e a precisão dos resultados, poupando cálculos extensos e complicados.

CAPÍTULO II

A TEORIA DAS POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS (PIS)

2.1. INTRODUÇÃO

A síntese de mecanismo articulados pode ser realizada através de três modos distintos, que são os métodos geométrico, analítico e de otimização.

Este trabalho baseia-se na teoria analítica de 5 PMS (cinco posições multiplamente separadas), que se apresenta sob 7 combinações distintas de posições infinitesimalmente separadas (PIS) e posições finitamente separadas (PFS) ou seja

Caso 1	PPPPP
Caso 2	PPPP-P
Caso 3	PPP-PP
Caso 4	PPP-P-P
Caso 5	PP-PP-P
Caso 6	PP-P-P-P
Caso 7	P-P-P-P-P

onde PP representa duas posições infinitesimalmente separadas (2PIS), e P-P duas posições finitamente separadas (2PFS).

Neste texto apresenta-se para a teoria 5 PMS o desenvolvimento das equações básicas de α e β [1] [2] [3] [4] [5], cujas interpretações geométricas [6] já haviam sido estabelecidas por Zanini [6] em sua tese de doutoramento.

Complementando, o texto apresentam-se outras equações que associadas as expressões de α e β e geram as especificações automaticamente de 2 PIS, 3 PIS, 4 PIS e 5 PIS, respectivamente.

A apresentação da teoria PIS será feita a seguir, a partir das expressões da transformação fundamental da teoria PMS.

A transformação de coordenadas (fig.2.1) entre os sistemas coordenados fixo e móvel é básica para o tratamento analítico da síntese coplanar.

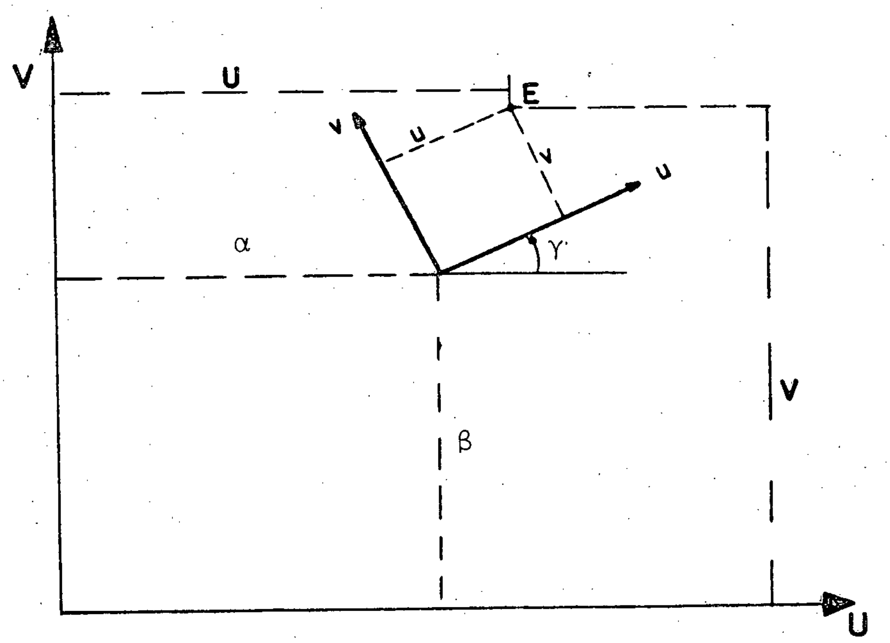


Fig. 2.1. - A transformação de coordenadas

Para um ponto qualquer E (u,v) do plano móvel as coordenadas em relação ao plano fixo UV, são definidas por:

$$U = u\cos\gamma - v\,\mathrm{sen}\gamma + \alpha$$
$$V = u\,\mathrm{sen}\gamma + v\cos\gamma + \beta \qquad (2.1)$$

onde γ é tomado como parâmetro independente.

Considerando duas posições finitas n,m do plano móvel, de acordo com a equação (2.1) tem-se:

$$U_n = u_n \cos\gamma_n - v_n \operatorname{sen}\gamma_n + \alpha_n$$

$$V_n = u_n \operatorname{sen}\gamma_n + v_n \cos\gamma_n + \beta_n$$

$$U_m = u_m \cos\gamma_m - v_m \operatorname{sen}\gamma_m + \alpha_m$$

$$V_m = u_m \operatorname{sen}\gamma_m + v_m \cos\gamma_m + \beta_m$$

em que o deslocamento de um ponto do plano móvel é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_n - U_m \\ \Delta V &= V_n - V_m \end{aligned} \qquad (2.2)$$

As expressões para o deslocamento infinitesimal (PIS) são consideradas abaixo quando a γ se dá o acréscimo $\Delta\gamma$.

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(\gamma + \Delta\gamma) - U(\gamma) \\ \Delta V &= V(\gamma + \Delta\gamma) - V(\gamma) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

A partir das expressões (2.3), aplicando limites sobre ΔU e ΔV, ou seja, fazendo $\Delta\gamma \to 0$, tem-se as equações que representam um deslocamento infinitesimal de um ponto do plano móvel,

$$dU = U'd\gamma \qquad dV = V'd\gamma \tag{2.4}$$

A teoria PMS dá um tratamento analítico unificado para PFS e PIS, resultando para U e V as expressões gerais que seguem:

$$U_{(j,k,\ell)} = \frac{d^k}{d\gamma^k}\Big[u\cos\gamma - v\,\mathrm{sen}\gamma\Big]_{\gamma=\gamma_j} + \frac{d^k}{d\gamma^k}\Big[\alpha(\gamma)\Big]_{\gamma=\gamma_j}$$

$$V_{(j,k,\ell)} = \frac{d^k}{d\gamma^k}\Big[u\,\mathrm{sen}\gamma + v\cos\gamma\Big]_{\gamma=\gamma_j} + \frac{d^k}{d\gamma^k}\Big[\beta(\gamma)\Big]_{\gamma=\gamma_j} \tag{2.5}$$

que são chamadas expressões da transformação fundamental da teoria PMS.

Os índices j,k,ℓ são próprios da teoria PMS e foram introduzidos para caracterizar PFS e PIS. Quando $k=0$ as expressões (2.5) são adequadas ao tratamento de PFS. Quando $k\neq 0$ trata-se de PIS, onde:

j = contador do número de PFS, podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4.

k = contador do número de PIS, correspondente a uma dada posição finita, podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4.

ℓ = contador do número total de PMS, podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4.

A consideração de PIS, leva, portanto às derivadas das funções $U(\gamma)$ e $V(\gamma)$ dadas por U' e V'. Conforme se poderá ver a seguir essas derivadas são de primeira ordem para 2 PIS, de segunda ordem para 3 PIS,de terceira ordem para 4 PIS,e de quarta ordem para 5 PIS.

Nas expressões (2.5) o movimento cinemático do sistema pode ser expresso em termos de γ, parâmetro independente do tempo com α_ℓ e β_ℓ sendo expressos como funções de γ_ℓ em que se tem:

$$\alpha_\ell = \left.\frac{d^k}{d\gamma^k}\,\alpha(\gamma)\right|_{\gamma=\gamma_j}$$

$$\beta_\ell = \left.\frac{d^k}{d\gamma^k}\,\beta(\gamma)\right|_{\gamma=\gamma_j}$$

2.2 - DUAS POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS (PP)

Para o caso PP, α_0, β_0, γ_0, α_1 e β_1 devem ser determinados para $(j,k,\ell) = (0,0,0)$ e $(0,1,1)$ respectivamente.

Se k=1 para 2 PIS,a equação 2.5 resulta

$$\begin{aligned} U_1 &= U' = -u\,\text{sen}\gamma - v\cos\gamma + \alpha_1 \\ V_1 &= V' = u\cos\gamma - v\,\text{sen}\gamma + \beta_1 \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Considerando as curvas desejada $g(U,V)$ e gerada, $f(\alpha,\beta)$ ao se considerar PFS o ponto móvel E descreve um arco de curva ΔS_{01},finito ao passar da posição E_0 para E_1, e ao se considerar PIS um arco de curva elementar $\Delta S_{01} \to 0$, para PFS a aproxi

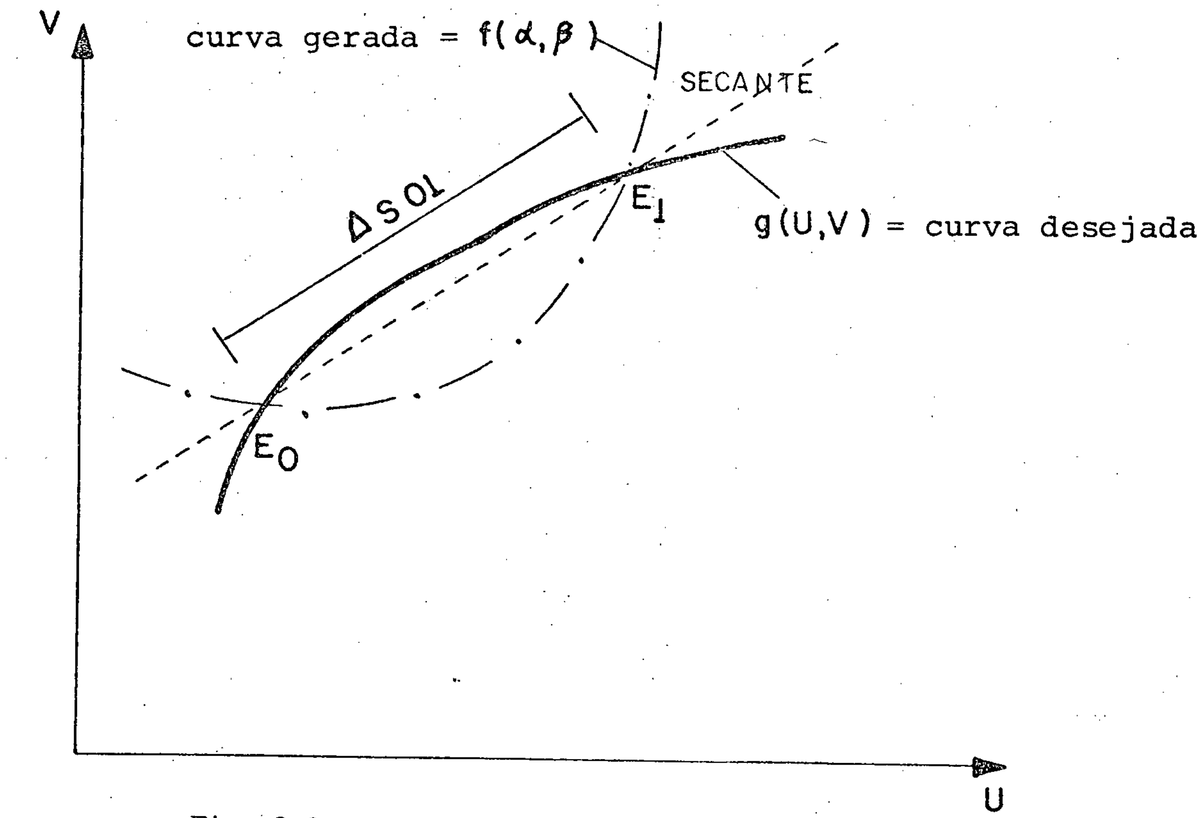


Fig. 2.2a. - 2PFS - Define a secante

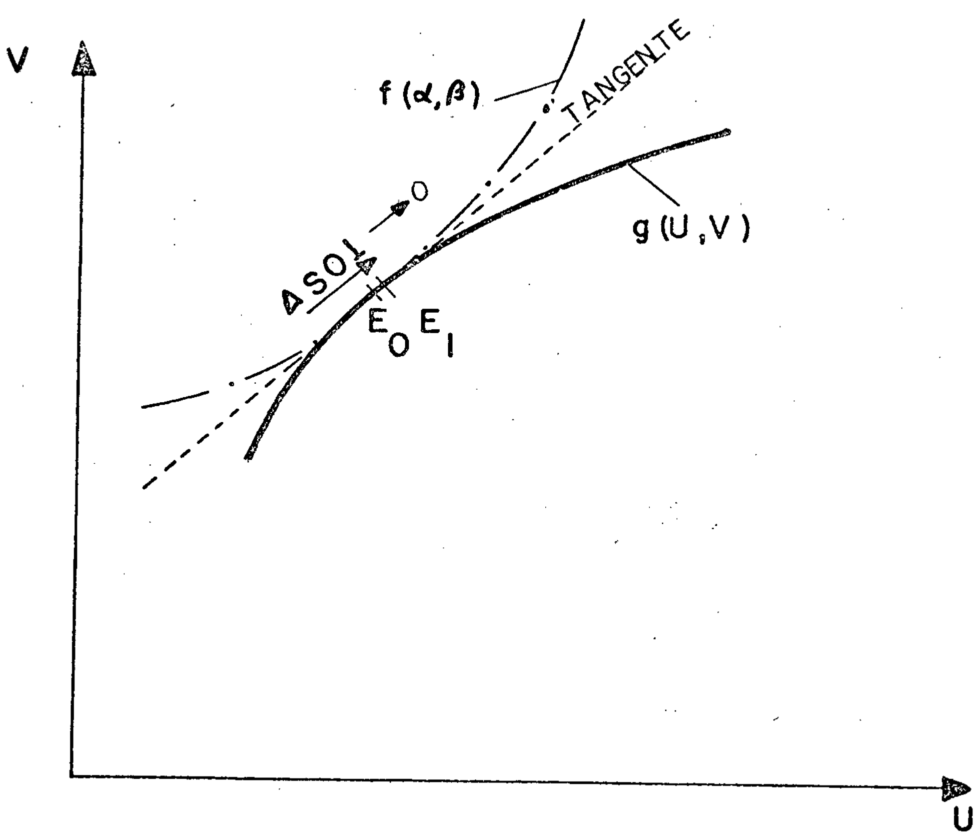


Fig. 2.2b. - Contato de primeira ordem (2PIS)

mação entre elas se dá pela sua intersecção nos pontos de precisão. Na fig. 2.2a observa-se que a intersecção das duas curvas em duas posições finitamente separadas define uma secante.

Na fig. 2.2b nota-se que duas posições separadas infinitesimalmente definem uma tangente e por conseguinte as duas curvas estão com apenas um ponto de contato, o que significa um contato de primeira ordem [6].

Quando uma curva é dada por sua representação paramétrica

$$\begin{aligned} U &= f(\gamma) \\ V &= g(\gamma) \end{aligned} \tag{2.7}$$

o polo, por definição, é o ponto onde U'=0 e V'=0 é obtido como mostrado na figura 2.2c. Assim as coordenadas do polo em relação ao plano móvel são dadas por:

$$\begin{aligned} u_p &= \alpha_1 \operatorname{sen}\gamma - \beta_1 \cos\gamma \\ v_p &= \alpha_1 \cos\gamma + \beta_1 \operatorname{sen}\gamma \end{aligned} \tag{2.8}$$

e as coordenadas do polo em relação ao plano fixo são:

$$\begin{aligned} U_p &= \alpha_0 - \beta_1 \\ V_p &= \beta_0 + \alpha_1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

As expressões (2.9) servem para determinar os parâmetros α_1 e β_1 quando são conhecidos α_0, β_0 e γ_0 e a posição do

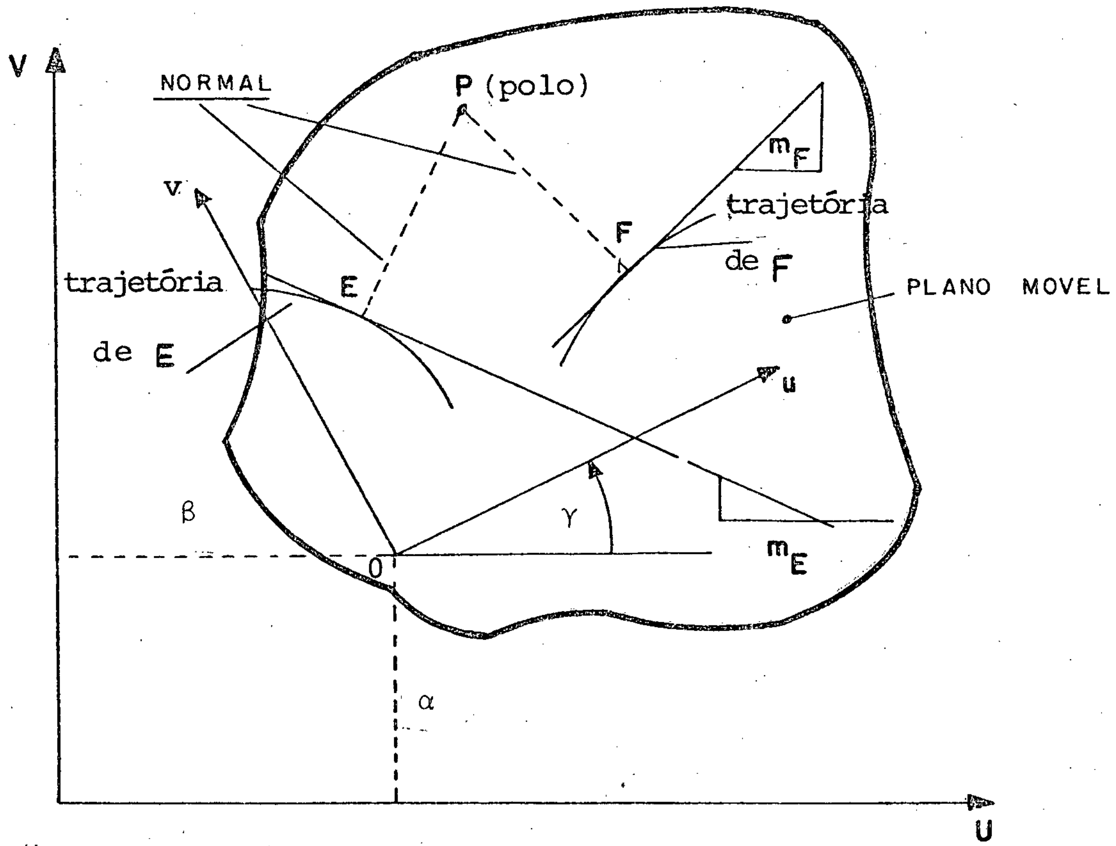


Fig. 2.2c - As tangentes às trajetórias de dois pontos definem o movimento do plano móvel instantaneamente.

polo em relação ao sistema fixo de referência.

Nas expressões (2.9) podem ser feitas as seguintes simplificações:

1. Se $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ os planos móvel e fixo coincidirão e U_p e V_p serão funções de β_1 e α_1 respectivamente:

$$U_p = -\beta_1$$
$$V_p = \alpha_1 \qquad (2.10)$$

2. Se $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$

$$U_p = 0$$
$$V_p = 0 \qquad (2.11)$$

e o polo está na origem do sistema fixo, e os planos móvel e fixo possuem uma origem comum. O plano móvel contudo, girará instantâneamente sobre a origem.

3. Se $\alpha_1 \longrightarrow \infty, \quad V_p = \infty$

$$\beta_1 \longrightarrow \infty, \quad U_p = \infty \qquad (2.12)$$

resultando numa translação instantânea do plano móvel.

A derivação acima pode ser aplicada aos dois casos de 2 PIS a saber PP - P - P - P e PP - PP - P, da teoria das posições multiplamente separadas.

2.3. TRÊS POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS (PPP).

No caso PPP em acréscimo a α_0, β_0, γ_0, e α_1, β_1 é necessário especificar α_2, β_2 para $(j,k,\ell) = (0,2,2)$

Se k = 2 para 3 PIS a equação (2.5) resulta,

$$U_2 = U'' = -u\cos\gamma + v\,\mathrm{sen}\gamma + \alpha_2$$
$$V_2 = V'' = -u\,\mathrm{sen}\gamma - v\cos\gamma + \beta_2 \tag{2.13}$$

Considerando as curvas desejada e gerada, para PFS a aproximação entre elas se dá pela sua intersecção nos pontos de precisão. Na fig. 2.3a observa-se que a intersecção das duas curvas em três posições finitamente separadas definem duas secantes e uma circunferência. Na fig. 2.3b, nota-se que três posições separadas infinitesimalmente definem um contato de segunda ordem entre as duas curvas, e portanto fica definido instantaneamente um raio de curvatura ρ, do círculo que contém as três posições infinitesimalmente separadas [6].

A curvatura da trajetória é definida por:

$$K = \frac{1}{\rho} \tag{2.14}$$

sendo que para 3 PIS do plano móvel ela é explicitada conforme mostrado na expressão abaixo, ou seja

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{U'V'' - V'U''}{\left[(U')^2 + (V')^2\right]^{3/2}} \tag{2.15}$$

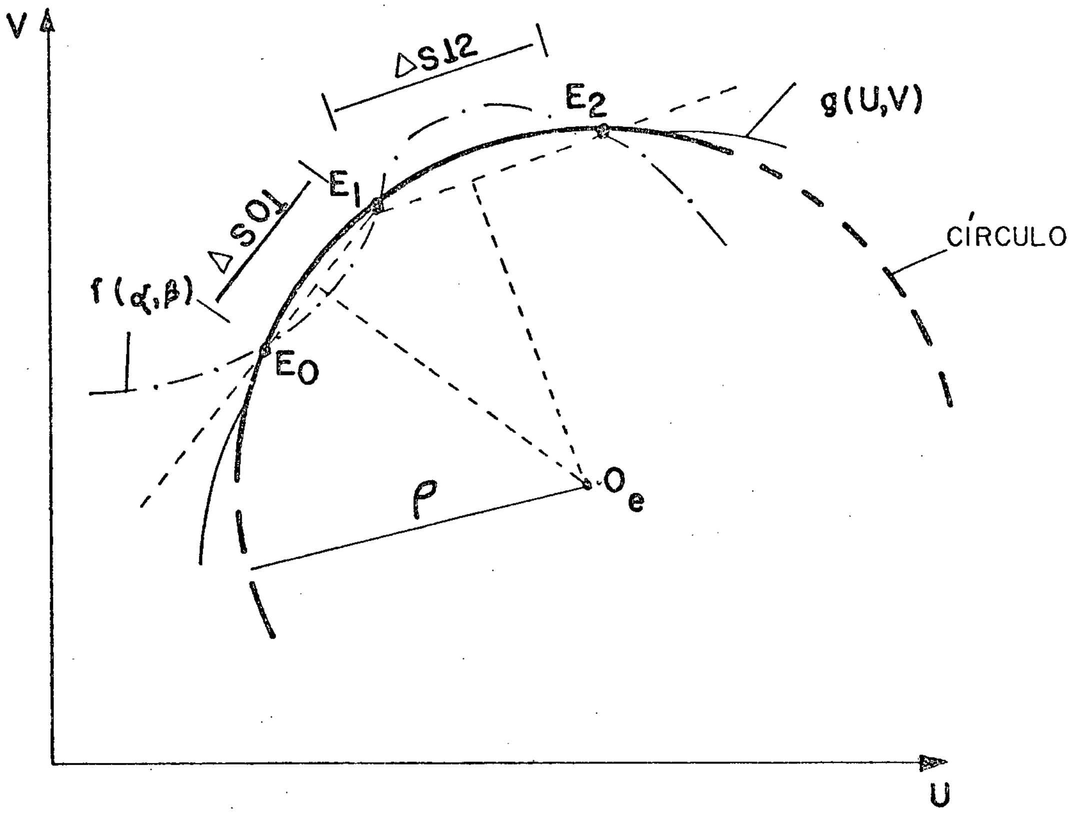


Fig. 2.3a. - 3PFS - Define duas secantes e uma circunferência

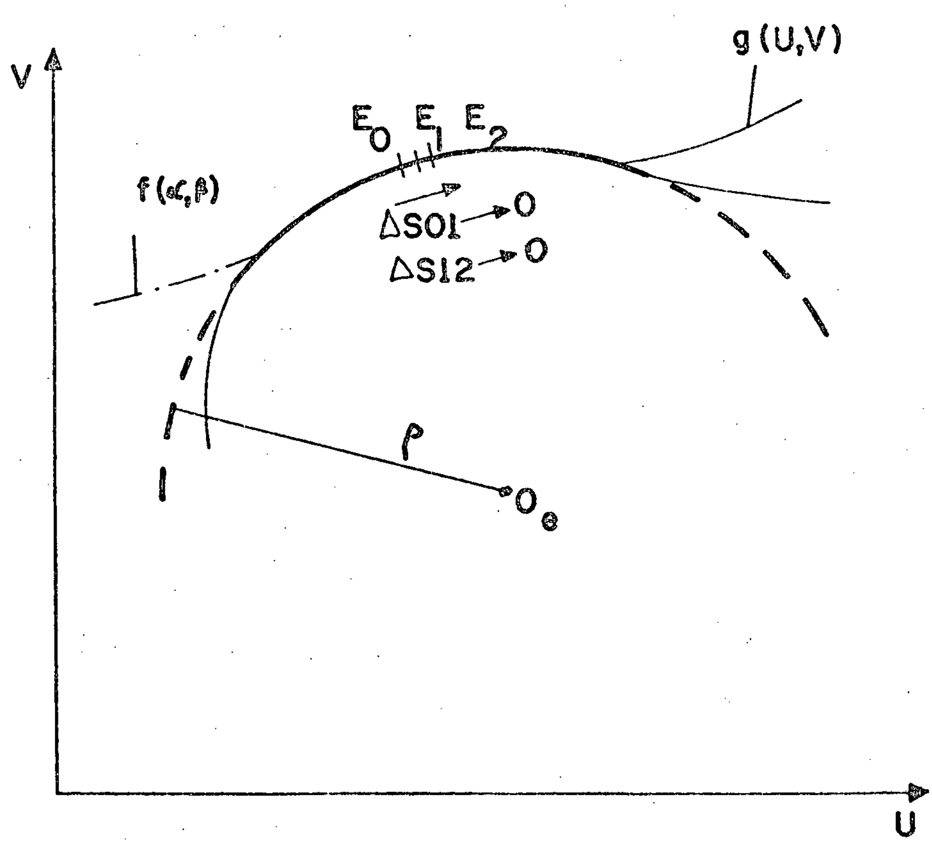


Fig. 2.3b. - 3PIS - Contato de segunda ordem

No caso de k=0 o numerador da expressão (2.15) será igual a zero e, consequentemente, $\rho = \infty$, ou seja,

$$U'V'' - V'U'' = 0 \tag{2.16}$$

Considerando a equação 2.5 e substituindo em 2.16 para U', V', U" e V", tem-se:

$$\left[u - \frac{T}{2}\right]^2 + \left[v - \frac{W}{2}\right]^2 = \frac{T^2 + W^2 + 4\alpha_2\beta_1 - 4\alpha_1\beta_2}{4} \tag{2.17}$$

onde

$$\begin{aligned} T &= \beta_2 \operatorname{sen}\gamma_0 + \alpha_1 \operatorname{sen}\gamma_0 + \alpha_2 \cos\gamma_0 - \beta_1 \cos\gamma_0 \\ W &= \beta_2 \cos\gamma_0 + \alpha_1 \cos\gamma_0 - \alpha_2 \operatorname{sen}\gamma_0 + \beta_1 \operatorname{sen}\gamma_0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

O lugar geométrico dos pontos do plano assim definidos é denominado círculo de inflexão, significando que os pontos sobre a circunferência estão sobre uma inflexão.

Portanto, a circunferência divide o plano em duas regiões em que cada uma delas proporciona pontos com curvatura opostas uma em relação a outra.

O centro e o raio da circunferência com respeito as coordenadas do plano móvel são definidas pelas expressões:

$$\begin{aligned} &\text{CENTRO:} \quad \left[\frac{T}{2}, \frac{W}{2}\right] \longrightarrow f(\alpha_2, \beta_2) \\ &\text{RAIO:} \quad \frac{1}{2}\left[T^2 + W^2 + 4\alpha_2\beta_1 - 4\alpha_1\beta_2\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Portanto, conhecendo-se as coordenadas do centro da circunferência $(\frac{T}{2}, \frac{W}{2})$, α_2 e β_2 podem ser determinados. Para isto é necessário determinar-se a circunferência do círculo de inflexão (fig.2.3c), que se dá pela aplicação da equação de Euler-Savary a dois pontos E e F, a seus centros de curvatura O_E e O_F e ao polo (P). Portanto,

$$\overline{EP}^2 = \overline{EO}_E \cdot \overline{EJ}_E \tag{2.20}$$

Da equação (2.20) é possível determinar-se J_E e J_F. A partir dos pontos P, J_E e J_F determina-se a equação da circunferência que passa por estes três pontos e acha-se o seu centro (T/2, W/2). Substituindo estes valores na equação (2.18), reescrita na forma que segue,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_1 + T\cos\gamma_0 - W\operatorname{sen}\gamma_0 \\ \beta_2 &= T\operatorname{sen}\gamma_0 + W\cos\gamma_0 - \alpha_1 \end{aligned} \tag{2.21}$$

e, com α_1, β_1 e γ_0 conhecidos, determina-se α_2 e β_2, conforme a expressão 2.21.

O procedimento para a determinação analítica de W e T é conduzido na forma que segue, entrando-se com:

$E(U_E, V_E)$

$O_E(U_{OE}, V_{OE})$

$P(U_{P_1}, V_{P_1})$

$F(U_F, V_F)$

$m(-\alpha, +\alpha)$

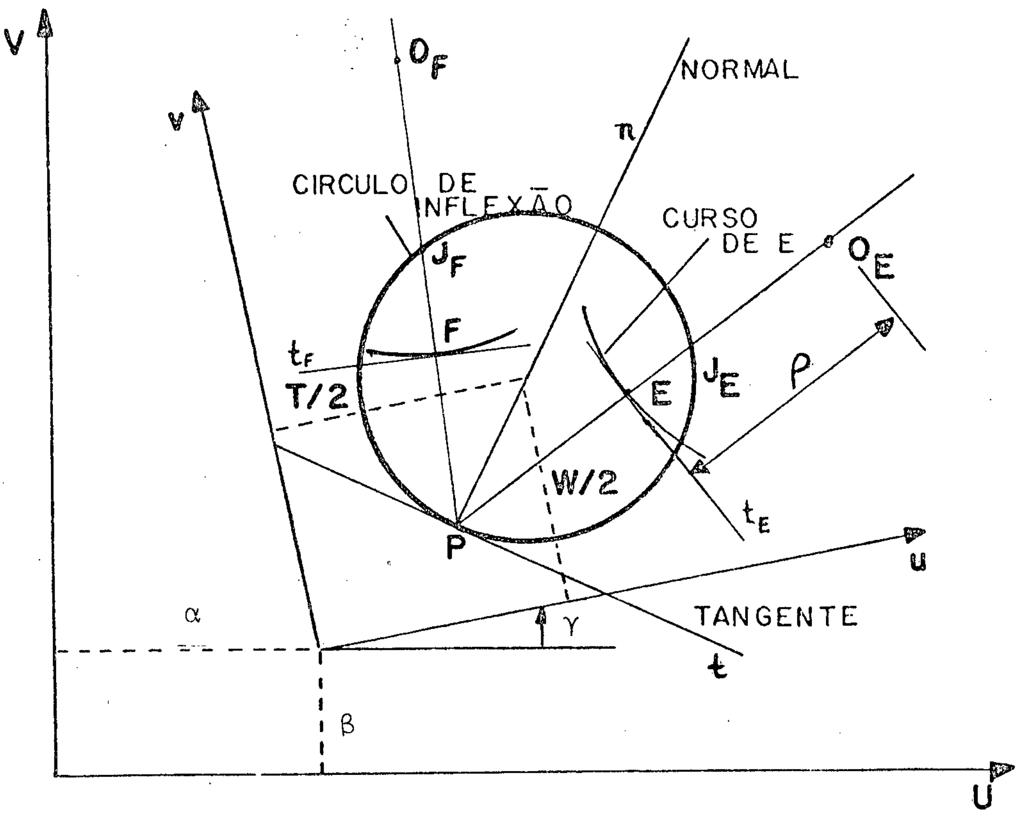


Fig. 2.3c. - Círculo de inflexão com tangente e normal ao polo

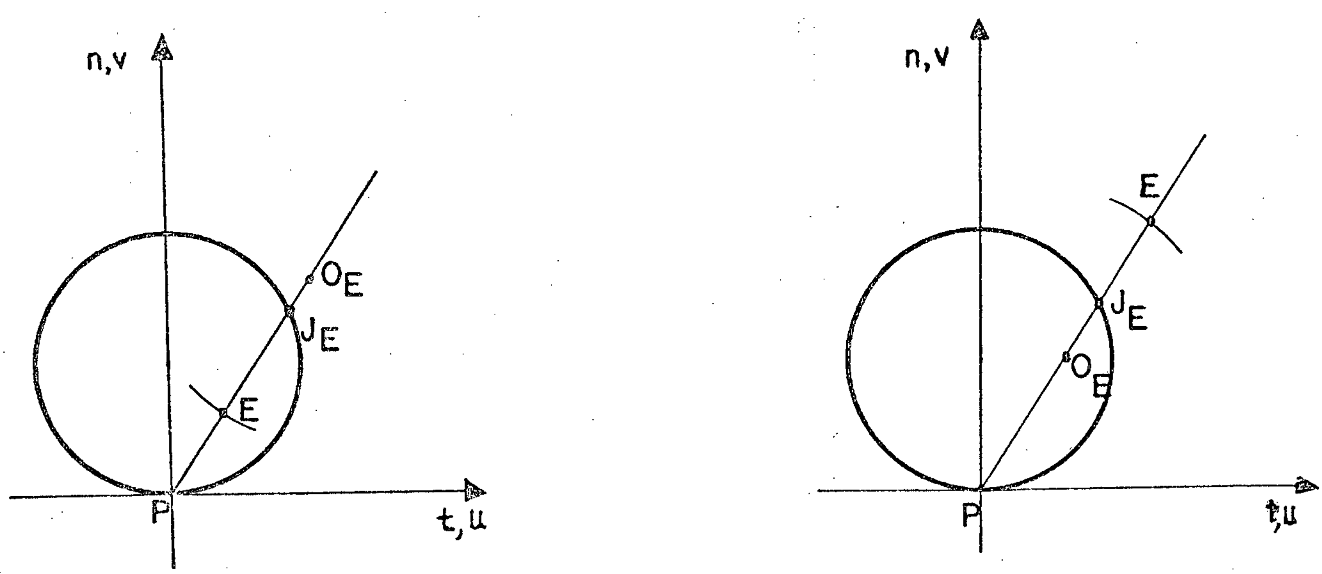


Fig. 2.3d. - As curvaturas convexas e côncavas para o ponto do acoplador

onde

E = Ponto do acoplador

O_E = Centro de curvatura do ponto E

P = Polo (fig. 2.2c)

F = Ponto arbitrado para obter o círculo de inflexão

m = Coeficiente real que posiciona O_F sobre a FP; é um parâmetro de otimização ($m = \overline{FO_F}/\overline{FP}$).

O_F = Centro de curvatura do ponto F.

Define-se o significado de $m(-\infty, +\infty)$ através das seguintes considerações:

a) Se $m<0$; F está entre O_F e P.

b) Se $m=0$; O_F está sobre F, significa o raio de curvatura nulo para o ponto F, o que significa a formação de uma cúspide na trajetória gerada pelo ponto F.

c) Se m está entre (0,1); O_F está entre F e P.

d) Se $m=1$;O_F está sobre P e o Ponto F se encontra na tangente t do polo P.

e) Se $m>1$; P está entre F e O_F.

f) Se m = infinito; o ponto O_F estará no infinito logo o raio de curvatura (FO_F) para a trajetória de F será infinito, o que significa deslocamento do ponto F sobre uma reta, e F estará sobre a circunferência do círculo de inflexão, e portanto F está sobre J_F, conforme equação (2.25) $\overline{FJ_F}=0$.

J_E, O_E e J_F, O_F devem estar sempre do mesmo lado de E e F respectivamente, de tal sorte que olhando do polo P, se o ponto E estiver dentro do círculo de inflexão a curvatura será convexa e, se estiver fora, a curvatura será côncava, conforme mostra a figura 2.3d.

A determinação de T e W, far-se-á em cinco partes, ou seja:

1. Especificação do problema

a) Determinação da origem do sistema geral de referência UV;

b) Localização do ponto do acoplador sobre a origem do plano móvel;

c) Posicionamento do polo (P) em função das características iniciais do problema;

d) Especificação do raio de curvatura $\overline{OE_E}$ do ponto do acoplador E;

e) Determinação do ponto F;

f) Determinação de OF como função de um parâmetro de otimização m que varia de $(-\infty, \infty)$.

Utilizando-se o conceito de ponto que divide um segmento numa razão dada pode-se escrever:

$$m = \frac{\overline{FO_F}}{\overline{FP}} \tag{2.22}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} U_{OF} &= (1-m) \,.\, U_F + m.U_P \\ V_{OF} &= (1-m) \,.\, V_F + m.V_P \end{aligned} \tag{2.23}$$

É importante ressaltar que m deve satisfazer as restrições impostas pela equação de Euler-Savary, anteriormente destacada.

2. Relações entre os parâmetros constitutivos do problema

$$\begin{aligned} EP &= \sqrt{(U_P - U_E)^2 + (V_P - V_E)^2} \\ EO_E &= \sqrt{(U_{OE} - U_E)^2 + (V_{OE} - V_E)^2} \\ FP &= \sqrt{(U_P - U_F)^2 + (V_P - V_F)^2} \\ FO_F &= \sqrt{(U_{OF} - U_F)^2 + (V_{OF} - V_F)^2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

3. Determinação de EJ_E, FJ_F por Euler-Savary (Equação 2.20)

$$\begin{aligned} \overline{EJ_E} &= \frac{(EP)^2}{\overline{EO_E}} \\ \overline{FJ_F} &= \frac{(FP)^2}{\overline{FO_F}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

4. Determinação das coordenadas de J_E e J_F.

$$U_{JE} = \frac{(U_P - U_E).EJ_E}{EP} + U_E$$

$$V_{JE} = \frac{(V_P - V_E).EJ_E}{EP} + V_E \tag{2.26}$$

$$U_{JF} = \frac{(U_P - U_F).FJ_F}{FP} + U_F$$

$$V_{JF} = \frac{(V_P - V_F).FJ_F}{FP} + V_F$$

5. Determinação da circunferência do círculo de inflexão que passa por três pontos P, J_E , J_F .

Chamando:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = U_P & A_{21} = U_{JE} & A_{31} = U_{JF} \\ A_{12} = V_P & A_{22} = V_{JE} & A_{32} = V_{JF} \\ A_{13} = 1 & A_{23} = 1 & A_{33} = 1 \end{array} \tag{2.27}$$

$$B_1 = A_{11}^2 + A_{12}^2 \qquad B_2 = A_{21}^2 + A_{22}^2 \qquad B_3 = A_{31}^2 + A_{32}^2$$

Adotando a equação da circunferência onde U e V

$$U^2 + V^2 + DD.U + EE.V + FF = 0 \tag{2.28}$$

são os eixos coordenados e DD, EE, FF, são os coeficientes a serem determinados e aplicando aos três pontos dados, obtém-se o sistema de equações

$$A_{11}DD + A_{12}EE + A_{13}FF + B_1 = 0$$

$$A_{21}DD + A_{22}EE + A_{23}FF + B_2 = 0 \qquad (2.29)$$

$$A_{31}DD + A_{32}EE + A_{33}FF + B_3 = 0$$

Fazendo as igualdades abaixo:

$$C_1 = -B_1$$

$$C_2 = -B_2 \qquad (2.30)$$

$$C_3 = -B_3$$

e aplicando nas equações 2.29 e em seguida, utilizando o método de GAUSS, resulta:

$$A_{11}DD + A_{12}EE + A_{13}FF = C_1$$

$$A_{21}DD + A_{22}EE + A_{23}FF = C_2 \qquad (2.31)$$

$$A_{31}DD + A_{32}EE + A_{33}FF = C_3$$

Denominando

$$AA_{11} = (A_{11}.A_{22} - A_{12}.A_{21})$$

$$AA_{12} = (A_{11}.A_{23} - A_{13}.A_{21})$$

$$AA_{21} = (A_{11}.A_{32} - A_{12}.A_{31})$$

$$AA_{22} = (A_{11}.A_{33} - A_{13}.A_{31}) \tag{2.32}$$

$$CC_{1} = (A_{11}.C_{2} - A_{21}.C_{1})$$

$$CC_{2} = (A_{11}.C_{3} - A_{31}.C_{1})$$

Resulta

$$EE = \frac{CC_{1}\,.\,AA_{22} - CC_{2}.AA_{12}}{AA_{11}.AA_{22} - AA_{21}.AA_{12}}$$

$$FF = \frac{CC_{2}.AA_{11} - CC_{1}.AA_{21}}{AA_{11}.AA_{22} - AA_{21}.AA_{12}} \tag{2.33}$$

$$DD = \frac{-(A_{22}.EE + A_{23}.FF + B_{2})}{A_{21}}$$

Uma vez que foram determinados EE, FF, DD tem-se a equação da circunferência do círculo de inflexão, faltando determinar, portanto, o raio e as coordenadas do centro dadas por

$$U_{CEN} = -\frac{DD}{2}$$

$$V_{CEN} = -\frac{EE}{2}$$

$$T = TT = -DD$$

$$W = WW = -EE \qquad (2.34)$$

$$RAIO = \sqrt{U_{CEN}{}^{2} + V_{CEN}{}^{2} - FF}$$

As expressões (2.34) fornecem T, W, as coordenadas do centro e o raio da circunferência, necessários para a determinação de α_2, β_2 pelas expressões (2.21) ou seja:

$$\alpha_2 = \beta_1 + T\cos\gamma_0 - W\operatorname{sen}\gamma_0$$

$$\beta_2 = T\operatorname{sen}\gamma_0 + W\cos\gamma_0 - \alpha_1$$

Algumas simplificações são possíveis nas expressões (2.21):

1 - Quando a origem dos planos fixo e móvel coincidem, isto é, $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ tem-se conforme a figura (2.3.e)

$$\alpha_2 = \beta_1 + T$$

$$\beta_2 = W - \alpha_1 \qquad (2.35)$$

2 - Quando $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_0 = 0$ o plano móvel e o plano fixo terão uma origem comum, e portanto o polo estará também nesta origem dos dois planos. (fig. 2.3.f)

$$\alpha_2 = T$$

$$\beta_2 = W \qquad (2.36)$$

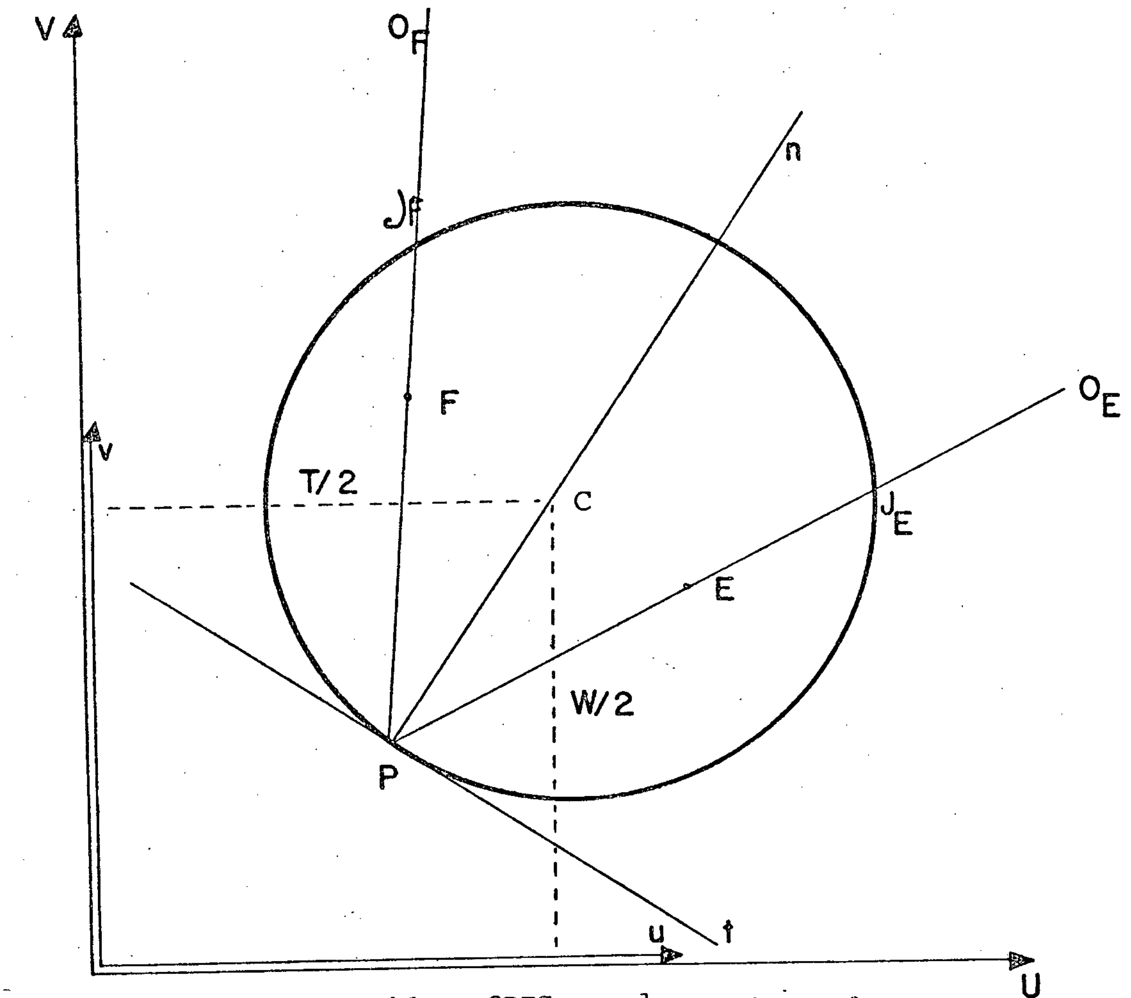


Fig. 2.3e. - O problema 3PIS quando $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=0$

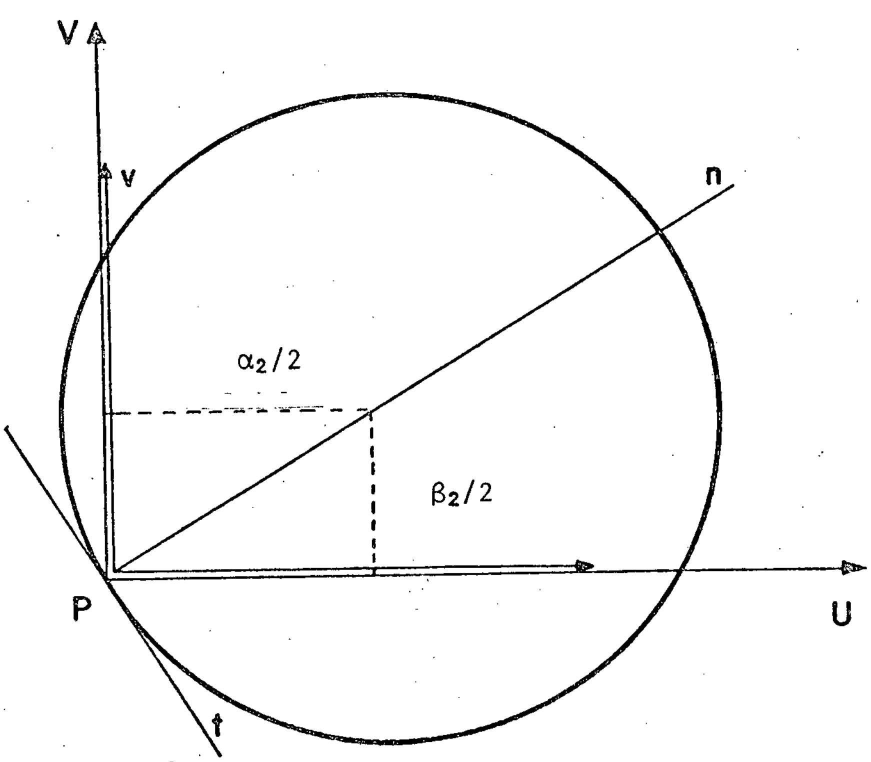


Fig. 2.3f. - O problema 3PIS quando $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=\alpha_1=\beta_1=0$

3 - Uma situação muito útil é quando $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \gamma_0 = 0$ na qual somente β_2 é deixado para ser determinado. Como o polo está sobre a circunferência, a sua tangente e a normal, fornecem um novo sistema de referência onde β_2 é o diâmetro da circunferência.(Fig. 2.3.g)

$$\alpha_2 = 0$$
$$\beta_2 = 2.\text{raio} = W \qquad (2.37)$$

4 - Com as características do item 3, reduzindo à unidade o diâmetro da circunferência tem-se:

$$\alpha_2 = 0$$
$$\beta_2 = 1 \qquad (2.38)$$

A teoria 3 PIS desenvolvida nesta secção pode ser usada para determinar α_2 e β_2 nos seguintes casos: PPP-P-P e PPP-PP.

2.4. QUATRO POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS (PPPP)

No caso (PPPP), requer-se em adição a α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, α_2, β_2 os parâmetros α_3 e β_3 para $(j,k,\ell) = (0,3,3)$.

Se k = 3 para 4 PIS, a equação (2.5) resulta:

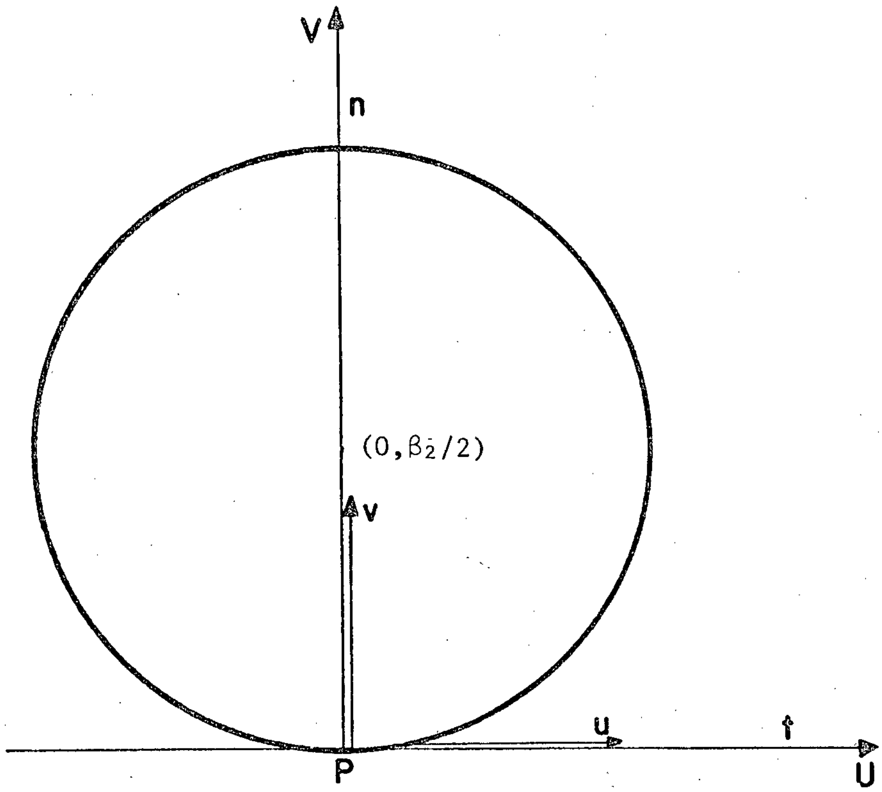


Fig. 2.3g. - O sistema especial de referência

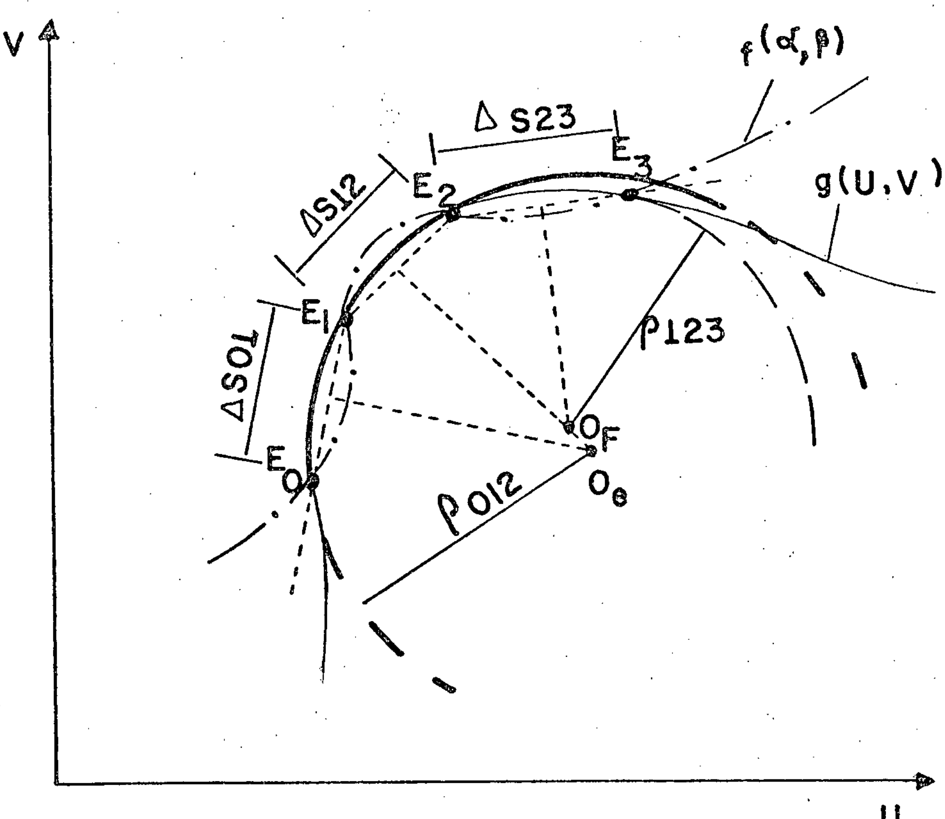


Fig. 2.4a. - 4PFS - Define três secantes e
duas circunferências

$$U_3 = U''' = u\,\text{sen}\gamma_0 + v\cos\gamma_0 + \alpha_3$$
$$V_3 = V''' = -u\cos\gamma_0 + v\,\text{sen}\gamma_0 + \beta_3 \qquad (2.39)$$

Considerando a fig. 2.4a observa-se que a interseção das curvas gerada e desejada em quatro posições finitamente separadas definem três secantes e duas circunferências. Os primeiros três pontos E_0, E_1, E_2 definem a curva com raio de curvatura ρ_1 e os últimos três pontos E_1, E_2, E_3 definem uma curva com raio de curvatura ρ_2. Observando-se a figura 2.4b, quando 4 PIS são definidas, um contato de terceira ordem ocorre entre a curva desejada e a curva gerada[6].

Uma nova derivação da equação (2.18) define a variação de curvatura (K') como segue:

$$K' = \frac{dK}{d\gamma} = \frac{\left[U'^2+V'^2\right](U'V'''-V'U''')-3(U'V''-V'U'')\left[U'U''+V'V''\right]}{\left[U'^2 + V'^2\right]^{5/2}} \qquad (2.40)$$

K' = 0 implica em se ter o numerador da expressão (2.40) igual a zero, o que conduz ao conceito importante em 4 PIS que é o da cúbica de curvatura estacionária.

Para reduzir o número de termos envolvidos quando da aplicação de K' = 0, optou-se pela utilização do sistema especial de referência, isto é, $\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \gamma_0 = 0$, resultando:

$$(u^2 + v^2)(\alpha_3 u + \beta_3 v) + 3\beta_2 u(u^2 + v^2 - \beta_2 v) = 0 \qquad (2.41)$$

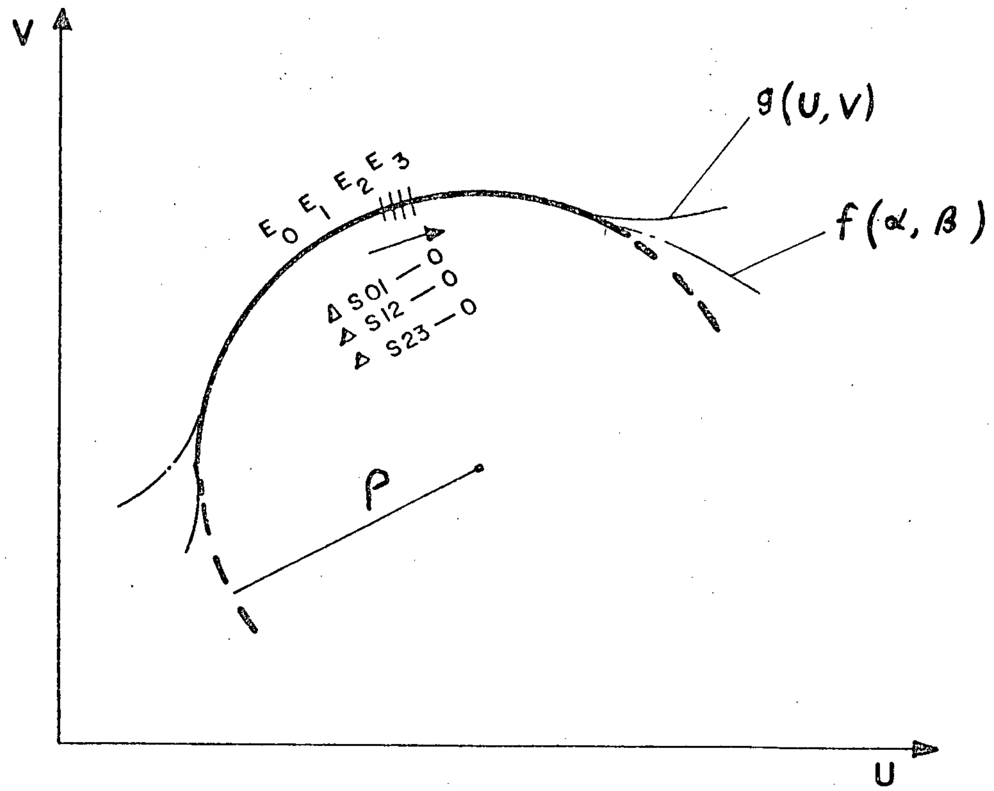


Fig. 2.4b. - 4PIS - Contato de terceira ordem

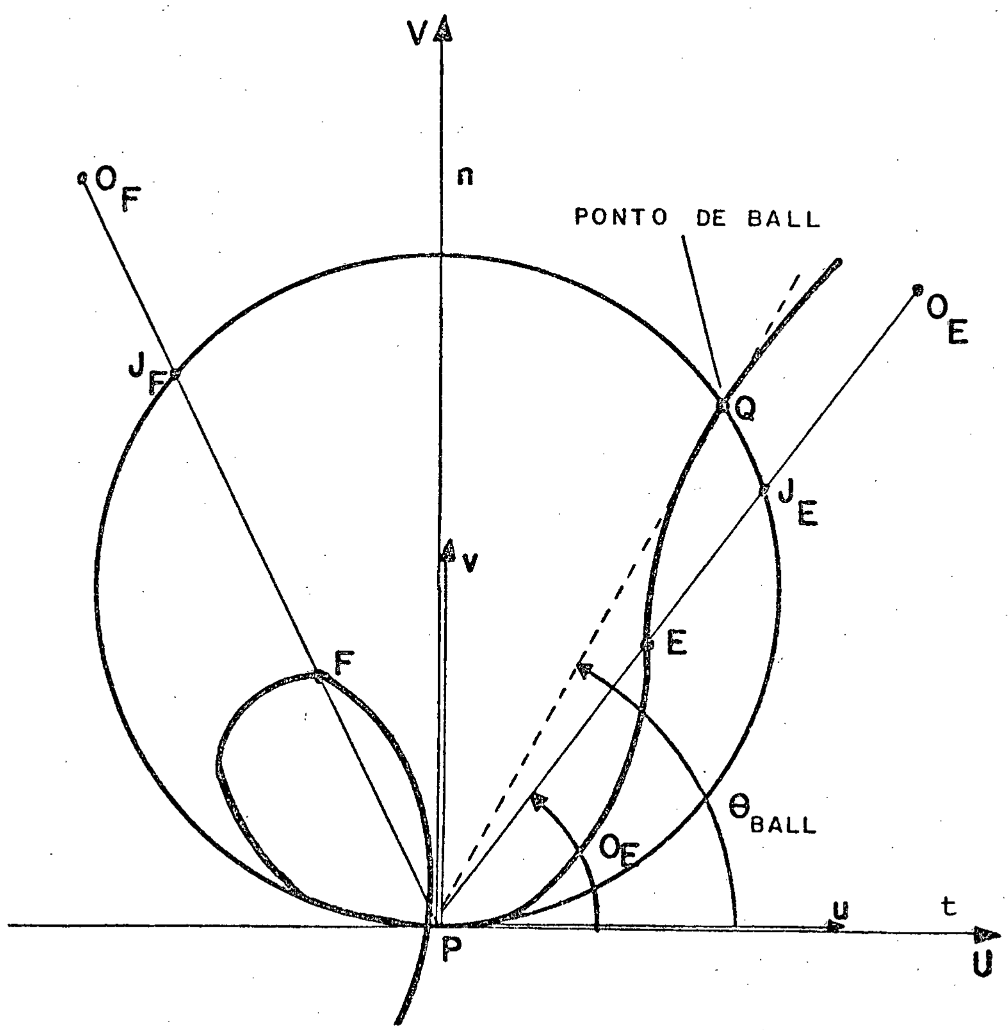


Fig. 2.4c. - A cúbica de curvatura estacionária

que é a expressão da cúbica de curvatura estacionária cuja representação gráfica é mostrada na figura 2.4c.

Na expressão (2.41) fazendo

$u = r \cos\theta$

$v = r \operatorname{sen}\theta$

resulta,

$$\frac{1}{M \operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{N \cos\theta} = \frac{1}{r} \tag{2.42}$$

que é a equação da cúbica de curvatura estacionária em coordenadas polares onde M e N são dados por:

$$M = \frac{3\,(\beta_2)^2}{(\alpha_3 + 3\beta_2)} \tag{2.43}$$

$$N = \frac{3\,(\beta_2)^2}{\beta_3}$$

que são os diâmetros das circunferências que osculam a cúbica no polo (fig. 2.4d).

Considerando os pontos $E(r_E, \theta_E)$ e $F(r_F, \theta_F)$ do plano móvel e aplicando-os sobre a equação (2.42) obtém-se o sistema:

$$\frac{1}{M.\operatorname{sen}\theta_E} + \frac{1}{N.\cos\theta_E} = \frac{1}{r_E}$$

$$\frac{1}{M.\operatorname{sen}\theta_F} + \frac{1}{N.\cos\theta_F} = \frac{1}{r_F} \tag{2.44}$$

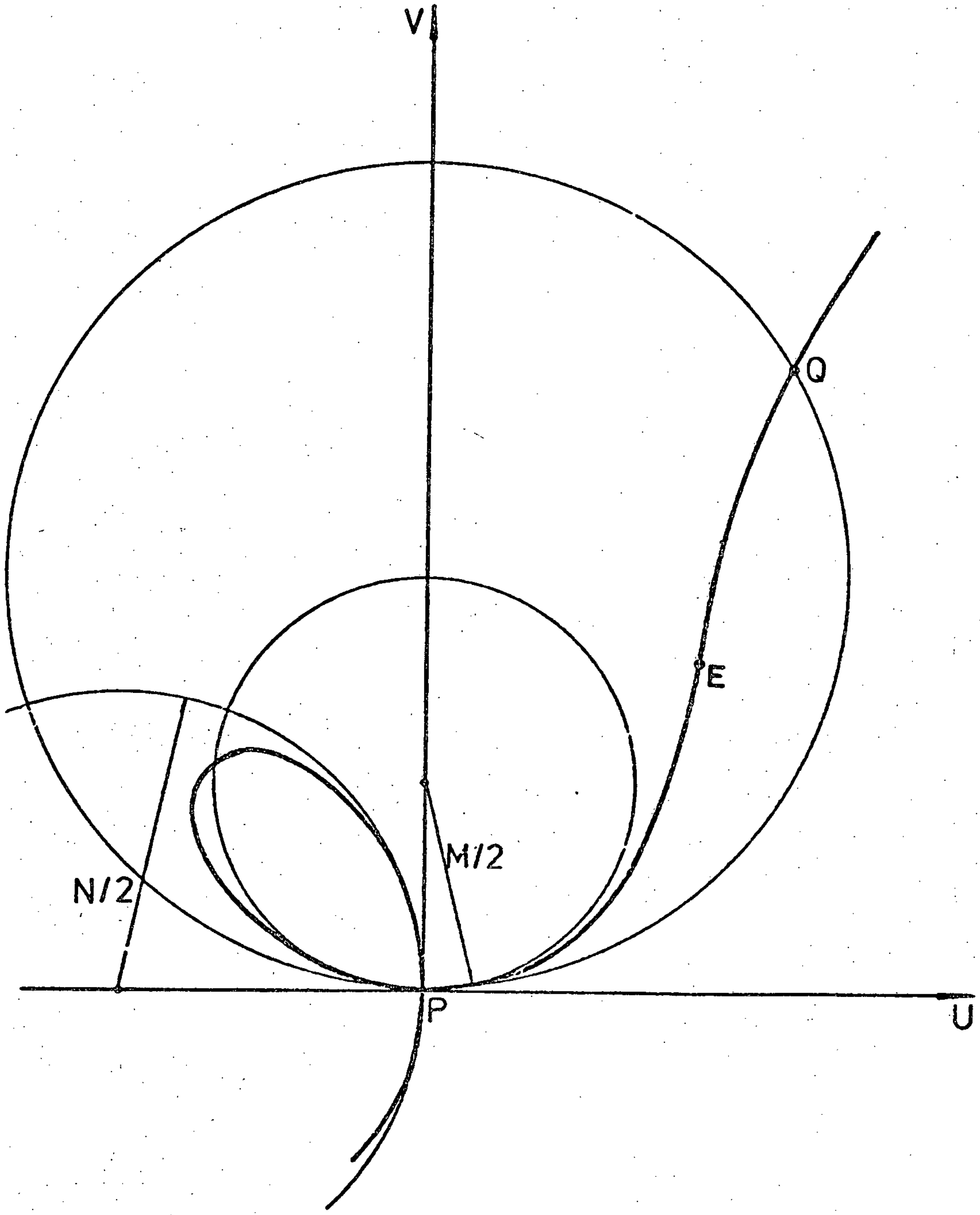


Fig. 2.4d. - As circunferências de curvatura
da cúbica no polo P.

Os parâmetros θ_E, $r_E(\overline{EP})$ e θ_F, $r_F(\overline{FP})$ são determinados em função do sistema operacional de acordo com o quadrante em que estão localizados. (Fig. 2.4e e Fig. 2.4f)

Para o 1º quadrante tem-se:

$$\theta_E = \text{arc sen } \frac{PJ_E}{d}$$

onde d é o diâmetro da circunferência do círculo de inflexão.

Para o 2º, 3º e 4º quadrantes tem-se respectivamente.

$$\theta_E = 180 - \text{arc sen } \frac{PJ_E}{d}$$

$$\theta_E = 180 + \text{arc sen } \frac{PJ_E}{d}$$

$$\theta_E = 360 - \text{arc sen } \frac{PJ_E}{d}$$

O sistema em 2.44 resolvido para M e N permite determinar α_3 e β_3 pelas expressões:

$$\alpha_3 = \frac{3(\beta_2)^2}{M} - 3\beta_2 \qquad (2.45)$$

$$\beta_3 = \frac{3(\beta_2)^2}{N}$$

onde β_2 é o diâmetro da circunferência.

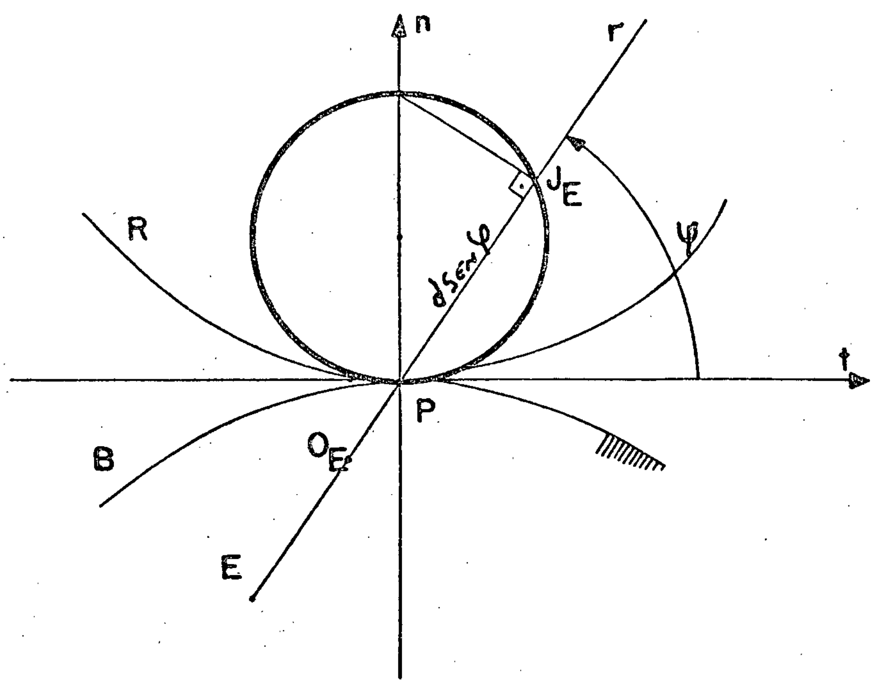


Fig. 2.4e. - A normal e a tangente ao círculo de inflexão e a reta r.

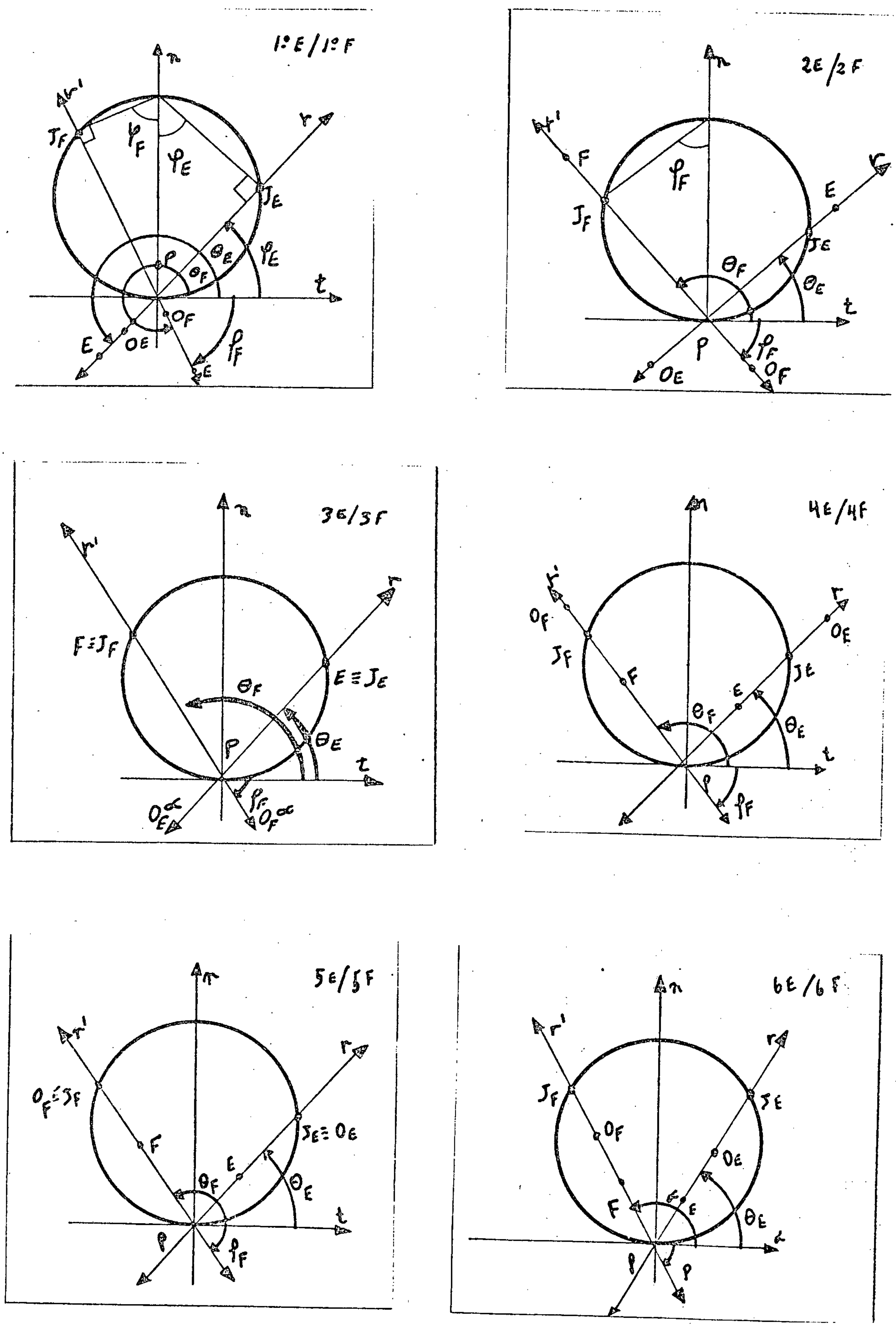


Fig. 2.4 ρ:

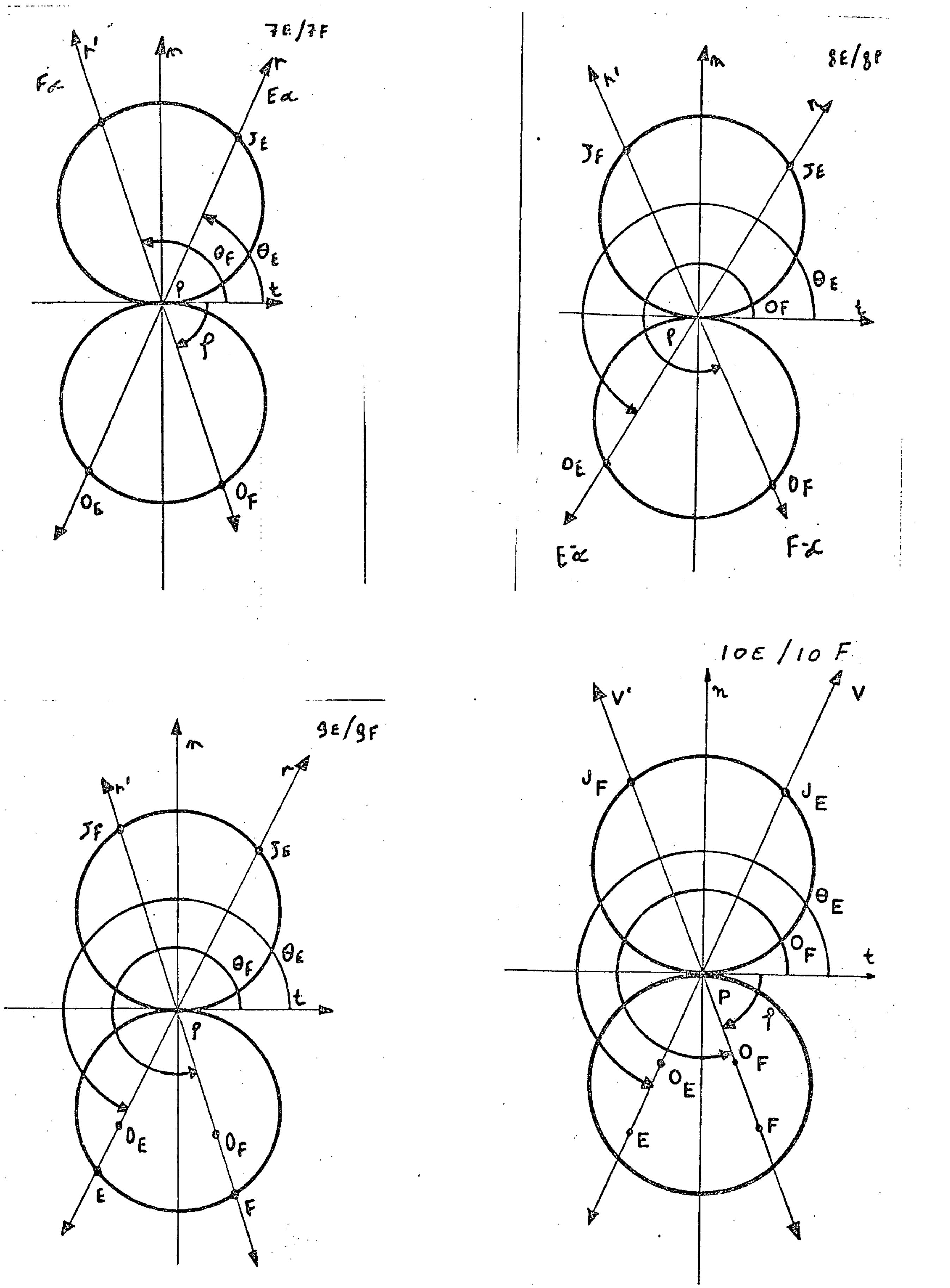


Fig. 2.4f. - Os dez casos do posicionamento dos pontos E e F.

Se o diâmetro da circunferência é tomado como unitário a expressão (2.45) reduz-se:

$$\alpha_3 = \frac{3}{M} - 3 \qquad \beta_3 = \frac{3}{N} \tag{2.46}$$

Adotando na equação 2.44 a seguinte notação:

$$G_{11} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_E} \qquad G_{12} = \frac{1}{\cos\theta_E} \qquad H_1 = \frac{1}{R_E}$$

$$G_{21} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_F} \qquad G_{22} = \frac{1}{\cos\theta_F} \qquad H_2 = \frac{1}{R_F} \tag{2.47}$$

$$x = \frac{1}{M} \qquad y = \frac{1}{N}$$

Obtem-se as equações

$$G_{11}x + G_{12}y = H_1$$

$$G_{21}x + G_{22}y = H_2$$

que resolvidas, determinam M e N conforme as seguintes expressões:

$$M = \frac{G_{11}.G_{22} - G_{21}.G_{12}}{H_1.G_{22} - H_2.G_{12}} \qquad (2.48)$$

$$N = \frac{G_{11}.G_{22} - G_{21}.G_{12}}{H_2.G_{11} - H_1.G_{21}} \qquad (2.49)$$

Operando sobre as equações 2.48 e 2.49 determina-se

$$HG_{12} = (H_1.G_{22} - H_2.G_{12})$$

$$HG_{21} = (H_2.G_{11} - H_1.G_{21})$$

de onde se conclui:

1. Quando $HG_{12}=0$ na equação (2.48), $M=\infty$, o que significa pela equação (2.42) que a cúbica se transforma em uma circunferência de raio = $\frac{N}{2}$ e na reta que contem a tangente t conforme mostrado na fig. 2.4g.

2. Quando $HG_{21}=0$ na equação (2.52), $N=\infty$, o que significa, pela equação (2.42) que a cúbica se transforma em uma circunferência de raio = $\frac{M}{2}$ e na reta que contem a normal n conforme mostrado na fig. 2.4h.

Nestes casos as expressões (2.45) se resumem, respectivamente, em:

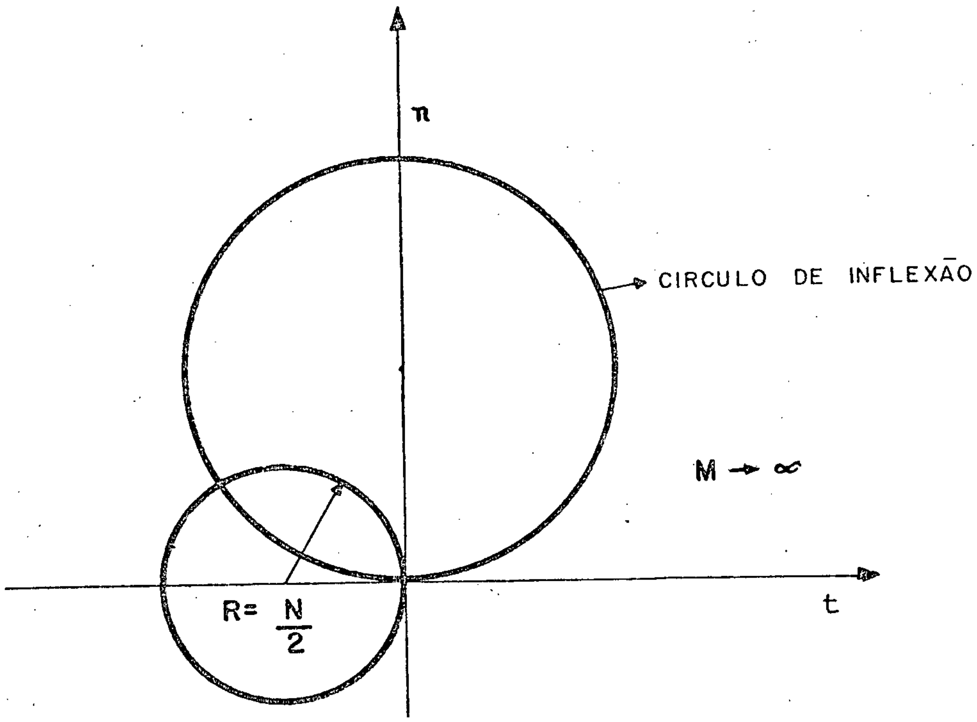


Fig. 2.4g. - Degeneração da cúbica em uma circunferência, e uma reta sobre o eixo t.

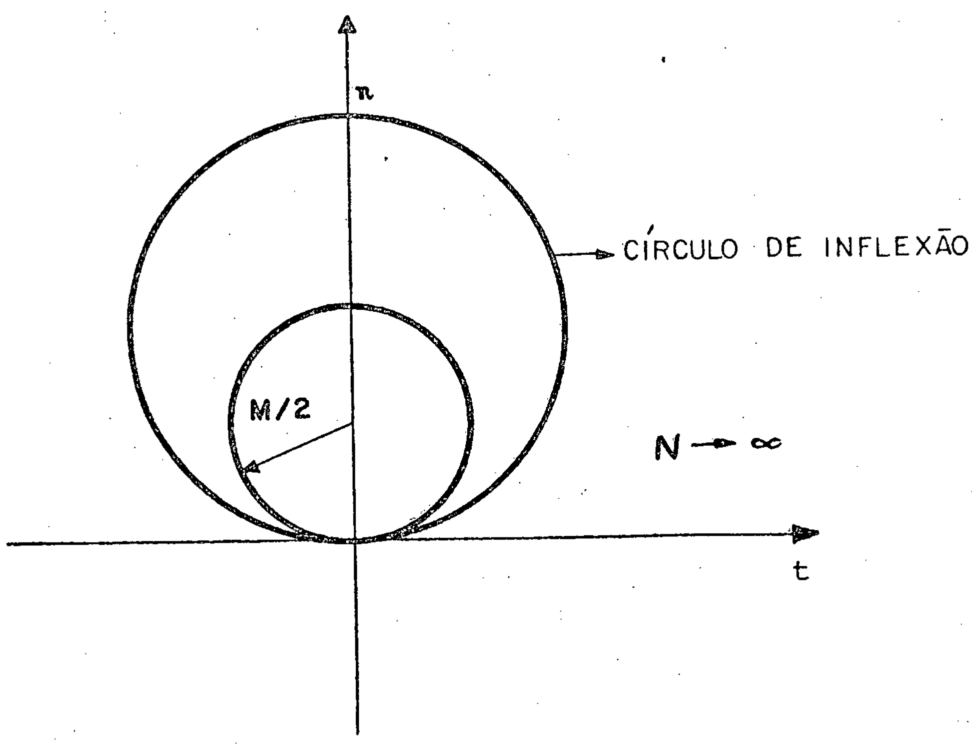


Fig. 2.4h. - Degeneração da cúbica em uma circunferência e uma reta sôbre o eixo n.

1. Se $M = \infty$ então resulta:

$$\alpha_3 = -3\beta_2$$

$$\beta_3 = \frac{3(\beta_2)^2}{N}$$

2. Se $N = \infty$ então resulta:

$$\alpha_3 = \frac{3(\beta_2)^2}{M} - 3\beta_2$$

$$\beta_3 = 0$$

3. Quando $HG_{12} \neq 0$ e $HG_{21} \neq 0$

$$M = (G_{11}.G_{22} - G_{21}.G_{12})/HG_{12}$$

$$N = (G_{11}.G_{22} - G_{21}.G_{12})/HG_{21}$$

e as expressões 2.45 valem e são as mesmas,

$$\alpha_3 = 3(\beta_2)^2/M - 3\beta_2$$

$$\beta_3 = 3(\beta_2)^2/N$$

A teoria 4 PIS desenvolvida nesta secção pode ser usada para determinar α_3 e β_3 no seguinte caso PPPP-P, sendo que α_4 e β_4 são determinados usando a transformação entre dois sistemas de referência*.

2.5. CINCO POSIÇÕES INFINITESIMALMENTE SEPARADAS (PPPPP)

Para o caso PPPPP, em acréscimo a α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1 α_2, β_2, α_3, β_3, é necessário especificar α_4 e β_4 para $(j,k,\ell) = (0,4,4)$.

Se k = 4 para 5 PIS, a equação (2.5) resulta

$$
\begin{aligned}
U_4 &= U^{IV} = u \cos\gamma_0 + -V \operatorname{sen}\gamma_0 + \alpha_4 \\
V_4 &= V^{IV} = u \operatorname{sen}\gamma_0 + V \cos\gamma_0 + \beta_4
\end{aligned}
\qquad (2.50)
$$

Considerando as curvas desejada e gerada, para PFS a aproximação entre elas se dá pela sua intersecção nos pontos de precisão. Na figura 2.5a observa-se que a intersecção das duas curvas em cinco posições finitamente separadas definem quatro secantes e três circunferências. Os primeiros três pontos E_0, E_1, E_2 definem a curva com raio de curvatura ρ_1 os segundos três pontos E_1, E_2, E_3 definem uma curva com raio de curvatura ρ_2 e os últimos três pontos E_2, E_3, E_4 definem uma curva com raio de curvatura ρ_3. Observando-se a figura 2.5b quando 5 PIS são definidos, uma quarta ordem de contato ocorre entre a curva desejada e a curva gerada [6].

A teoria 5 PIS está calcada na condição de se ter

* Ver apêndice 4.

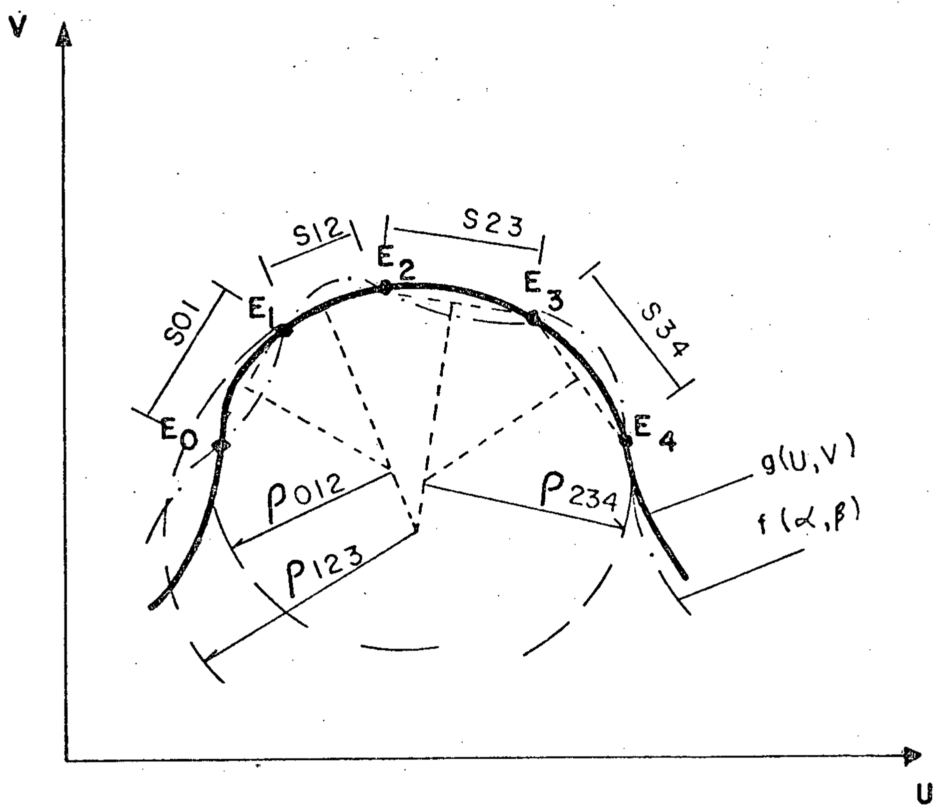


Fig. 2.5a. - 5PFS - Define quatro secantes e três circunferências.

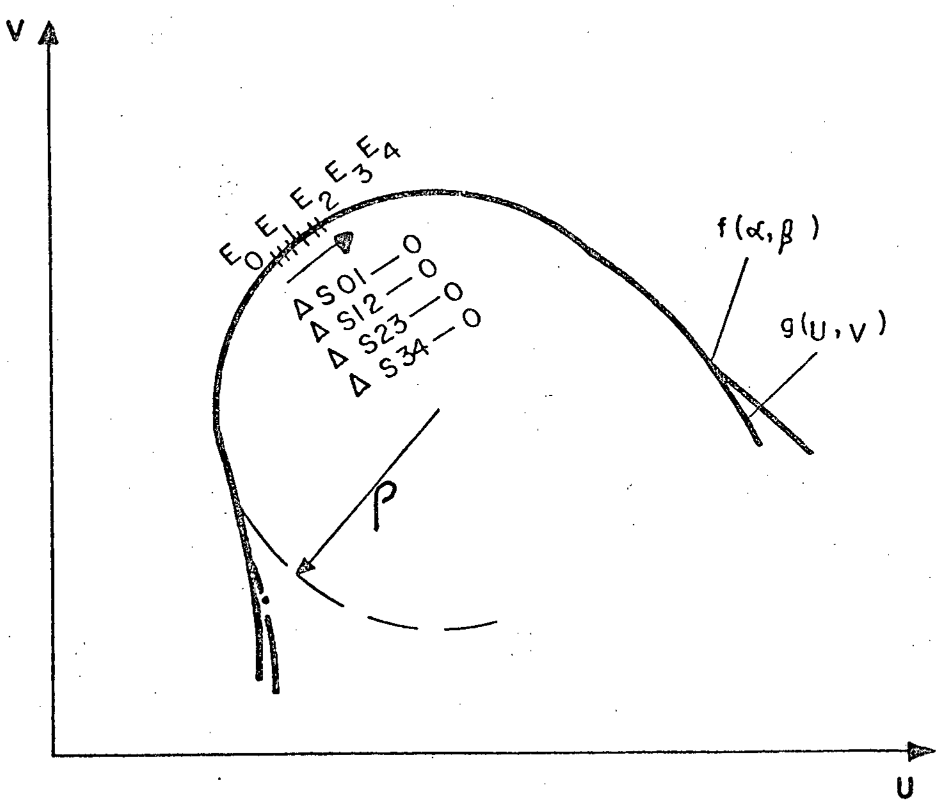


Fig. 2.5b. - Contato de quarta ordem (5PIS)

(K') e sua derivada (K") ambas iguais a zero, ou seja,

$$K' = K'' = 0 \tag{2.51}$$

resultando

$$K'' = \frac{dK'}{d\gamma} = 0 \tag{2.52}$$

Os pontos que satisfazem esta condição são chamados de Burmester. No ponto de Burmester a ordem de contato entre a trajetória traçada pelo ponto com sua circunferência de osculação é pelo menos, de quarta ordem, conforme a figura 2.5c.

Considerando o sistema especial de referência e as derivadas em todas as ordens de I a IV de U e V e, fazendo o numerador da expressão 2.52 igual a zero, utilizando coordenadas polares,

$$u = r\cos\theta$$

$$v = r\,\text{sen}\theta$$

obtém-se a equação da cúbica:

$$\alpha_4 + 4\beta_3 + (-4\alpha_3 + \beta_4 + \frac{3}{r^2} - 5)\,\text{tg}\theta + \frac{3\alpha_3+6}{r}\,\text{tg}\theta\,\text{sen}\theta - \frac{4\beta_3\,\text{sen}\theta}{r} - \frac{3}{r\cos\theta} = 0 \tag{2.53}$$

que aplicada a dois pontos $E(r_E, \theta_E)$ e $F(r_F, \theta_F)$, gera as equações

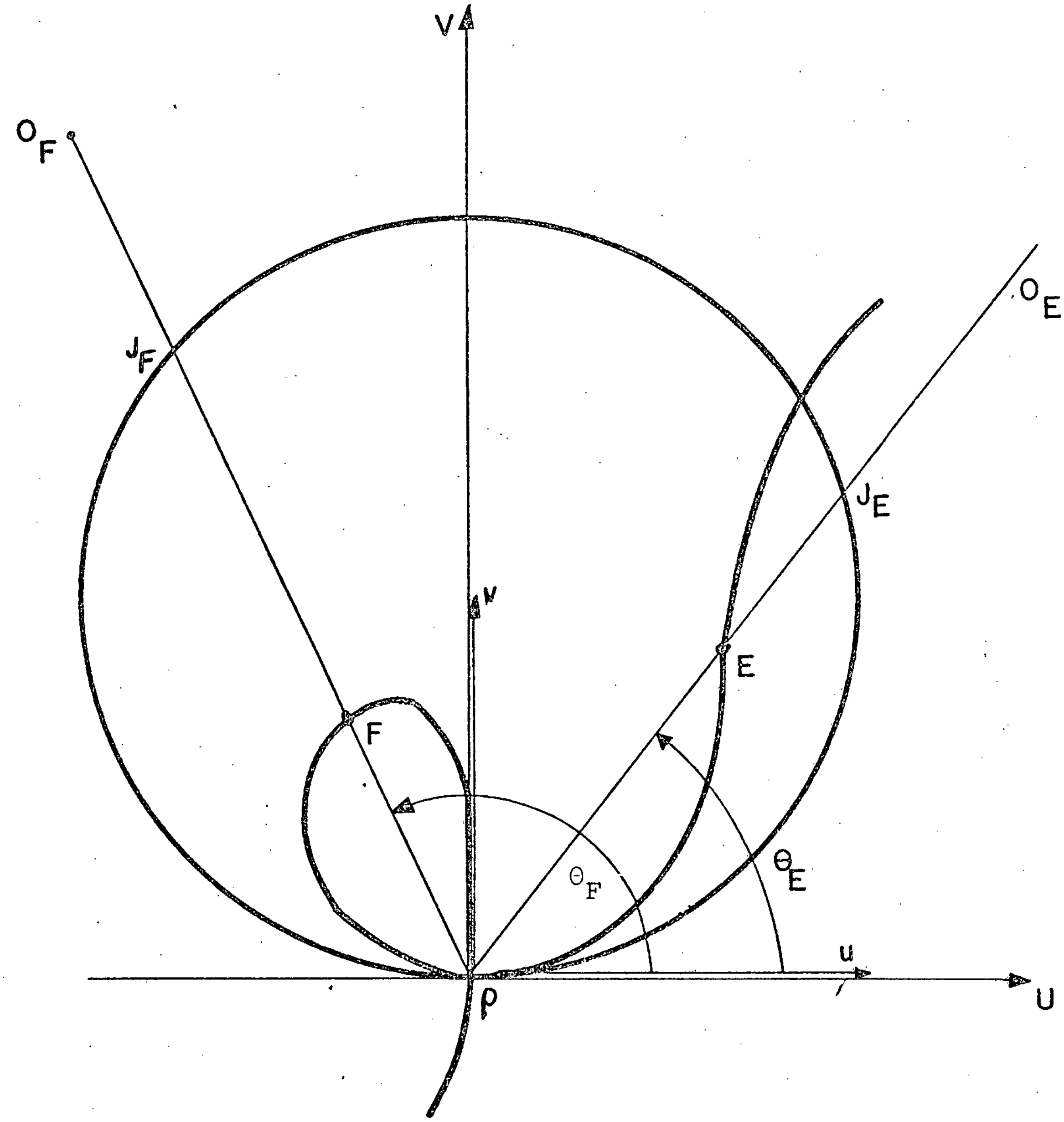


Fig. 2.5c. - Pontos de Burmester

$$\alpha_4+\beta_4 tg\theta_E=-4\beta_3+(4\alpha_3-\frac{3}{r_E^2}+5)tg\theta_E-\frac{3\alpha_3+6}{r_E}tg\theta_E sen\theta_E+\frac{4\beta_3}{r_E}sen\theta_E+\frac{3}{r_E cos\theta_E} \tag{2.54}$$

$$\alpha_4+\beta_4 tg\theta_F=-4\beta_3+(4\alpha_3\frac{-3}{r_F^2}+5)tg\theta_F-\frac{3\alpha_3+6}{r_F}tg\theta_F sen\theta_F+\frac{4\beta_3}{r_F}sen\theta_F+\frac{3}{r_F cos\theta_F} \tag{2.55}$$

onde as incógnitas α_4 e β_4 são determinadas.

Adotando nas equações (2.54) e (2.55) a seguinte notação:

$P_{11} = 1$ $\quad$ $P_{12} = tg\theta_E$

$P_{21} = 1$ $\quad$ $P_{22} = tg\theta_F$

$x = \alpha_4$ $\quad$ $y = \beta_4$

$$Q_1=-4\beta_3+(4\alpha_3\frac{-3}{r_E^2}+5)tg\theta_E-\frac{(3\alpha_3+6)}{r_E}tg\theta_E sen\theta_E+\frac{4\beta_3}{r_E}sen\theta_E+\frac{3}{r_E cos\theta_E}$$

$$Q_2=-4\beta_3+(4\alpha_3\frac{-3}{r_F^2}+5)tg\theta_F-\frac{(3\alpha_3+6)}{r_F}tg\theta_F sen\theta_F+\frac{4\beta_3}{r_F}sen\theta_F+\frac{3}{r_F cos\theta_F} \tag{2.56}$$

Obtem-se as equações

$$\begin{aligned} P_{11}x + P_{12}y &= Q_1 \\ P_{21}x + P_{22}y &= Q_2 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Resolvendo a equação 2.57 obtem-se α_4 e β_4 como segue

$$\alpha_4 = \frac{(Q_1 P_{22} - Q_2 P_{12})}{(P_{11} P_{22} - P_{21} P_{12})} = \frac{(Q_1 P_{22} - Q_2 P_{12})}{(P_{22} - P_{12})}$$

(2.58)

$$\beta_4 = \frac{(Q_2 P_{11} - Q_1 P_{21})}{(P_{11} P_{22} - P_{21} P_{12})} = \frac{(Q_2 - Q_1)}{(P_{22} - P_{12})}$$

Adotando nas equações (2.58) $PP_{12} = (P_{22} - P_{12})$ chega-se as seguintes conclusões:

1 - Quando $PP_{12} < 0$ ou $PP_{12} > 0$, α_4 e β_4 são dados pelas equações (2.58).

2 - Quando $PP_{12} = 0$, o denominador da equação (2.58) é zero, e pelas expressões (2.56) $\Theta_F = \Theta_E$, então deve-se redefinir o ponto F, sobre uma reta que passe pelo ponto (P) e não seja colinear com a reta que passa pelo ponto do acoplador (E) e o polo (P).

A teoria 5 PIS desenvolvida nesta secção pode ser usada para determinar α_4 e β_4 no caso PPPPP.

CAPÍTULO III

COMPATIBILIZAÇÃO DO PROCESSO DE ESPECIFICAÇÃO DE PIS COM O PROGRAMA PMS-MODIFICADO (SIMAPM)

3.1. INTRODUÇÃO

A subrotina das posições infinitesimalmente separadas (PISEP), desenvolvida e implantada no sistema IBM/4341 na UFSC, durante a elaboração deste trabalho, possibilita criar a especificação para os grupos de 2 PIS, 3 PIS, 4 PIS e 5 PIS(*).

Esta subrotina PISEP foi acoplada ao programa PMS(*)(*) já existente e utiliza basicamente a especificação para as posições finitas que são relativamente fáceis de especificar pelo projetista e mais a especificação do polo (P_1) ou dos polos P_1 e P_2 e os pontos E, F e seus centros de curvatura O_E e O_F(m), conforme será visto no processo de especificação que segue.

Entrando com 11 (onze) cartões de dados, a subrotina PISEP procura o caso PMS, calcula as posições infinitesimalmente separadas necessárias e armazena estes valores numa memória. As outras subrotinas do programa SIMAPM utilizam os valores desta memória e calculam o mecanismo articulado.

No cálculo das posições infinitesimais a subrotina PISEP utiliza dois sistemas.

(*) Observe-se que o termo grupo aqui introduzido serve para indicar a existência de duas ou mais posições infinitesimalmente separadas do ponto do acoplador.

(*)(*) Vide apêndice 1.

1º Sistema geral de referência (S.G.R.)

2º Sistema especial de referência (S.E.R.)

No S.G.R. são calculados até 3 PIS inclusive, utilizando as expressões gerais apresentadas no capítulo anterior; neste sistema o mecanismo é obtido de forma direta.

No S.E.R. o cálculo dos 4 PIS e 5 PIS é feito por expressões especiais que contêm simplificações, mas que não perdem em generalidade na solução do problema. O mecanismo obtido neste sistema sofre uma transformação de coordenadas para retornar ao sistema geral de referência.

3.2. PROCESSO DE ESPECIFICAÇÃO DE PIS

3.2.1. Duas posições infinitesimalmente separadas (2 PIS)

Para especificar PP é necessário conhecer a primeira posição $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ e o polo (U_{P_1}, V_{P_1}). Na figura 3.1 vê-se as coordenadas do polo em relação ao plano fixo, e as coordenadas da posição inicial da origem do plano móvel.

A teoria (2 PIS) é aplicada ao caso 6 (PP-P-P-P) onde as posições separadas finitamente são conhecidas e especificadas diretamente e, a posição do polo fornecida para o grupo PP, e ao caso 5 (PP-PP-P) onde se torna necessário especificar outro polo para o segundo grupo PP, ou seja, (U_{P_2}, V_{P_2}). A figura 3.2, mostra as coordenadas dos dois polos, para o primeiro e segundo grupos de posições infinitesimalmente separadas. Assim, com os polos e com as coordenadas das posições finitas, pode-se através da subrotina PISEP determinar as posições infinitesimais dos dois

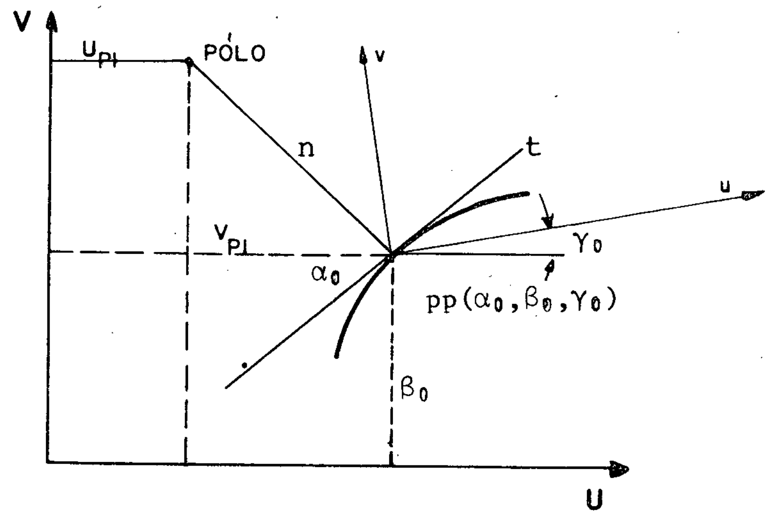


Fig. 3.1. - A especificação para um grupo (PP)

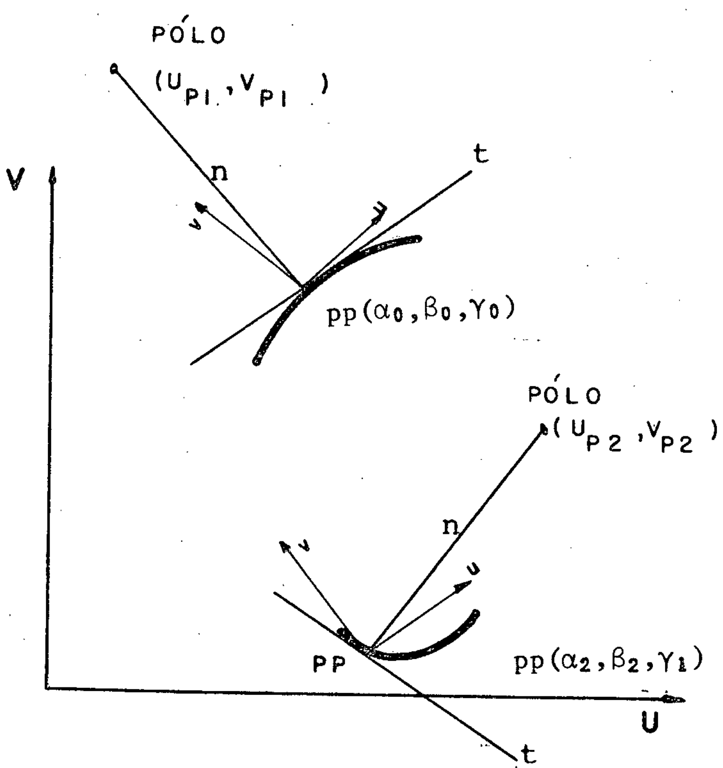


Fig. 3.2. - A especificação para dois grupos (PP-PP)

grupos de 2 PIS, que juntos com as posições finitas formam 5 PMS, podendo ser resolvido pelo programa SIMAPM gerando, assim, o mecanismo articulado desejado.

3.2.2. Três posições infinitesimalmente separadas (3 PIS)

Para especificar PPP é necessário complementar o que fora determinado para 2 PIS com as seguintes variáveis:

m = coeficiente real $(-\infty , +\infty)$

E = ponto da origem do plano móvel

O_E = centro da curvatura que a trajetória do ponto E assume

F = ponto qualquer com trajetória arbitrada.

Observa-se que o coeficiente real m deve ser utilizado como parâmetro de otimização para posicionar o ponto O_F sobre $\overline{FP}$ (fig. 3.3).

Esta teoria aplica-se aos casos 4 (PPP-P-P) e 3 (PPP-PP) conforme as figuras 3.3 e 3.4 respectivamente. Na figura 3.3 tem-se a especificação para 3 PIS, destacando-se no sistema geral as variáveis:

F (U_F, V_F)

P (U_{P_1}, V_{P_1})

E (U_E, V_E)

O_E (U_{OE}, V_{OE})

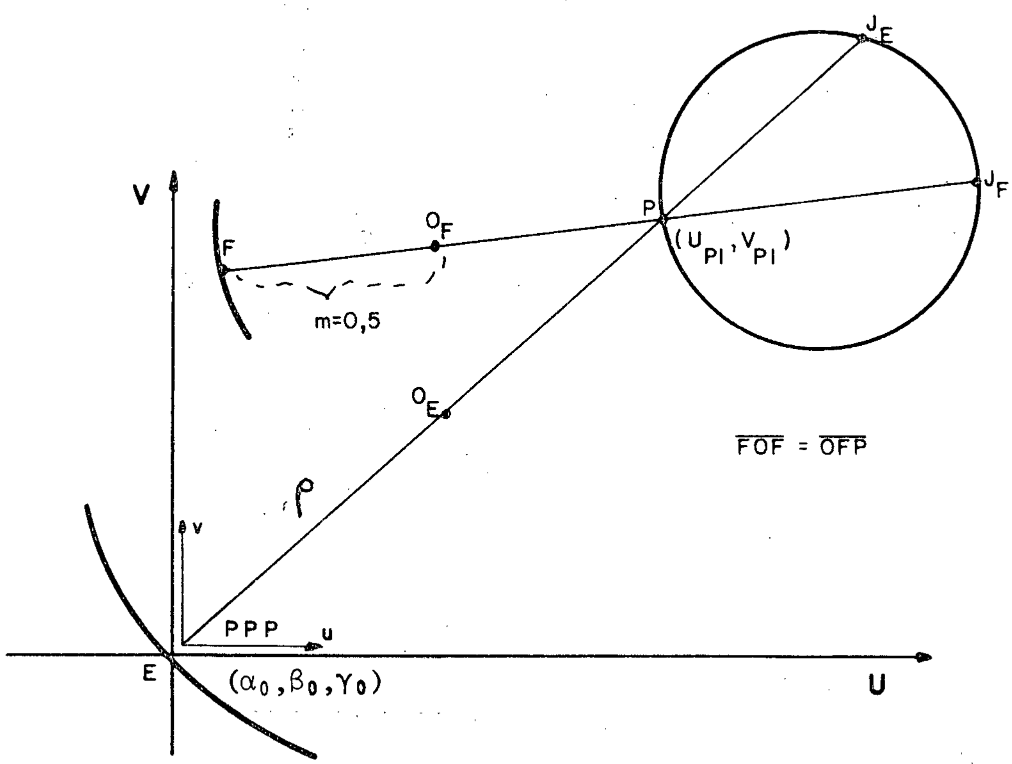


Fig. 3.3. - A especificação de 3PIS (PPP)

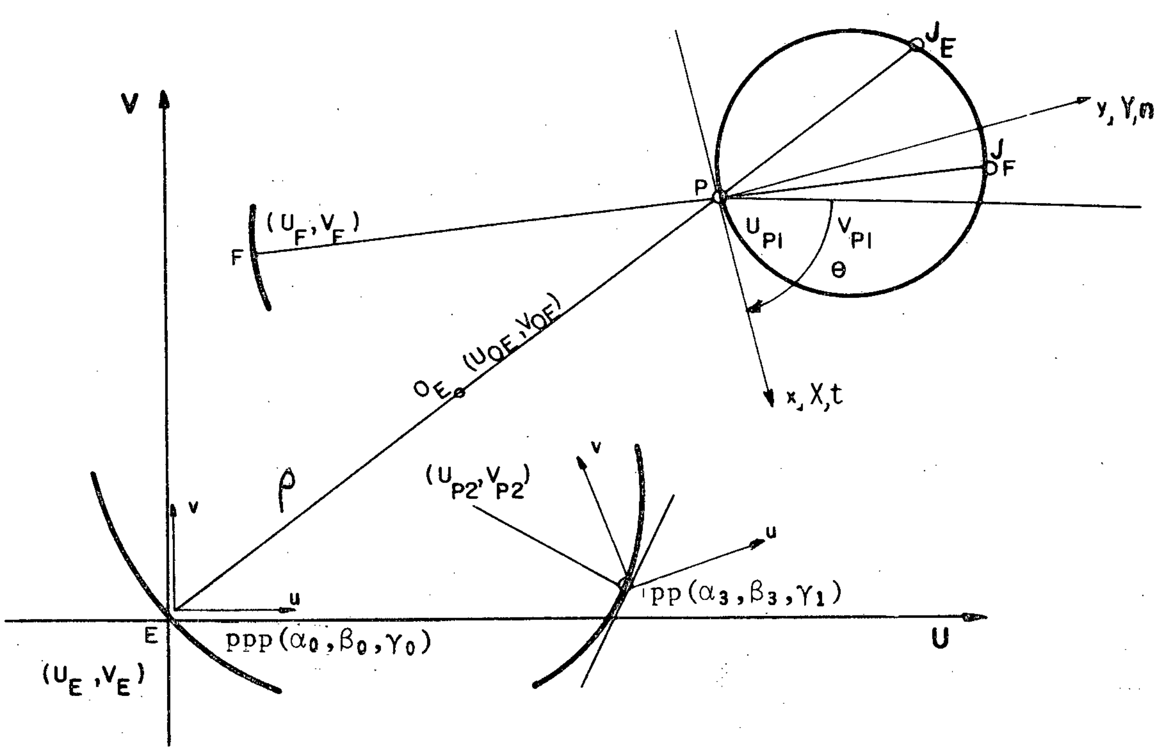


Fig. 3.4. - A especificação de 3PIS e 2PIS (PPP-PP)

Apenas como exemplo, m=0,5 significa que O_F está localizado na metade do segmento $\overline{FP}$.

A figura 3.3 mostra também o círculo de inflexão gerado pelas três posições infinitesimalmente separadas satisfazendo as equações de Euler-Savary. Apresenta também a trajetória do ponto E cujo raio de curvatura $\rho = \overline{EO_E}$, e a posição finita conhecida $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Na figura 3.4 tem-se além do já mencionado na figura 3.3, ainda a especificação para dois PIS onde se deseja obter a característica de tangência à trajetória dada, especificada pelo polo (U_{P_2}, V_{P_2}), e $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_1)$ para a posição finita no segundo grupo. E, finalmente a fig. 3.4 ainda apresenta o sistema XY cuja origem é o polo (U_{P_1}, V_{P_1}) que será utilizado na solução de problemas com 4 PIS e 5 PIS. O sistema XY é chamado sistema especial de referência. Apresenta ainda o avanço θ, que o eixo X do S.E.R. faz com o eixo U do S.G.R.; este ângulo é calculado na subrotina PISEP.

Resumindo: com o polo (U_{P_1}, V_{P_1}) e $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ para as três posições PPP a subrotina PISEP calcula $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_0)$ e $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_0)$. No caso 4 (PPP-P-P) as outras duas posições finitas $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_1)$ e $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_2)$ são especificadas diretamente.

3.2.3. Quatro posições infinitesimalmente separadas (4 PIS)

Na especificação de 4 PIS (PPPP) são aplicados os conhecimentos anteriores e surge de forma complementar o conceito de cúbica de curvatura estacionária que é gerado por 4 PIS. Assim a especificação é feita a partir das variáveis,

$F\ (U_F,\ V_F)$

$P\ (U_{P_1},\ V_{P_1})$

$E\ (U_E,\ V_E)$

$O_E\ (U_{OE},\ V_{OE})$

$m\ (-\infty,\ +\infty)$

$(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0)$

$(\alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_1)$

Na figura 3.5 aparecem os pontos E e F, que aplicados a equação de Euler-Savary servem para a determinação dos raios de curvatura da cúbica no polo, dados respectivamente por $M/_2$ e $N/_2$. Estes serão utilizados nas expressões de α_3 e β_3 (quarta posição do plano móvel), lembrando, que a quinta posição $(\alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_1)$ é finita e é especificada diretamente em relação ao sistema geral de referência.

3.2.4. Cinco posições infinitesimalmente separadas (5 PIS)

Na especificação de (PPPPP) é válido o que foi determinado para os casos anteriores, sendo importante mencionar que duas curvas cúbicas são consideradas e que se interceptam em 9 pontos. Havendo 4 intersecções reais das duas cúbicas, 4 pontos de Burmester serão determinados gerando assim seis mecanismos de 4 (quatro) barras ao todo. Se somente duas intersecções forem reais dois pontos de Burmester serão determinados, gerando assim um único mecanismo de 4 barras. Se as intersecções forem todas imaginárias não existirá nenhum ponto de Burmester no plano real e o problema correspondente não terá solução.

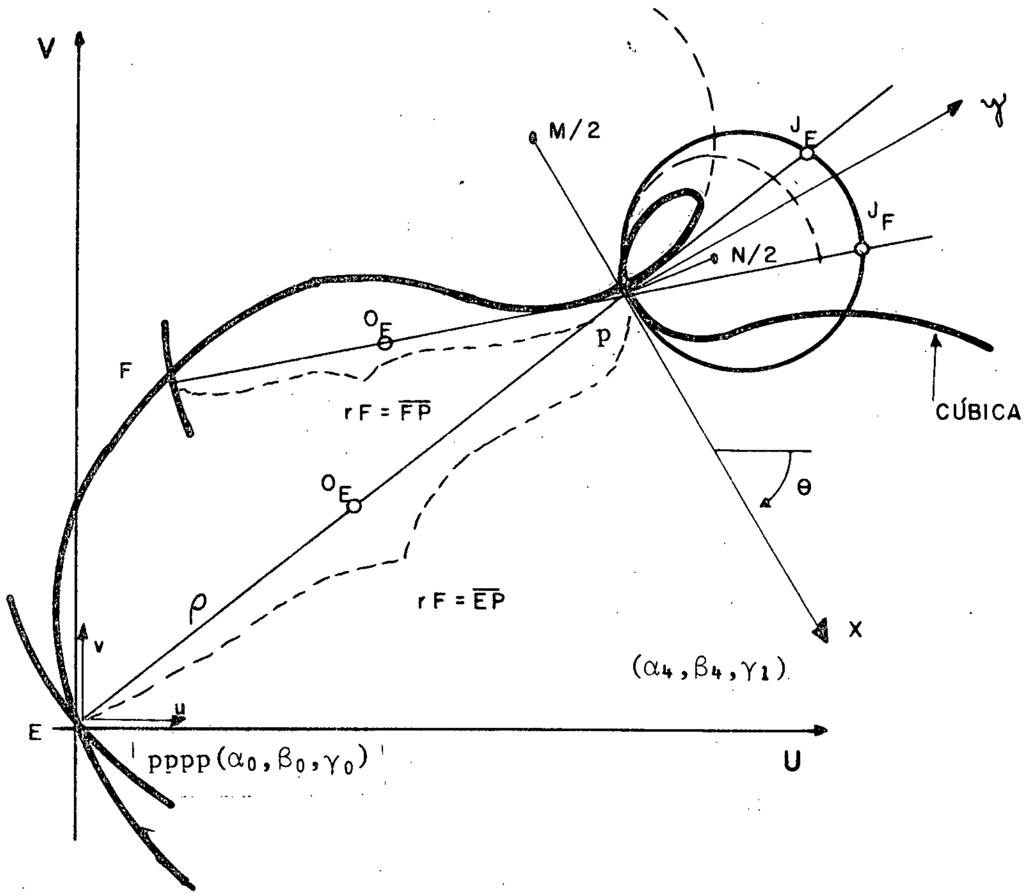


Fig. 3.5. - A especificação de 4PIS (PPPP)

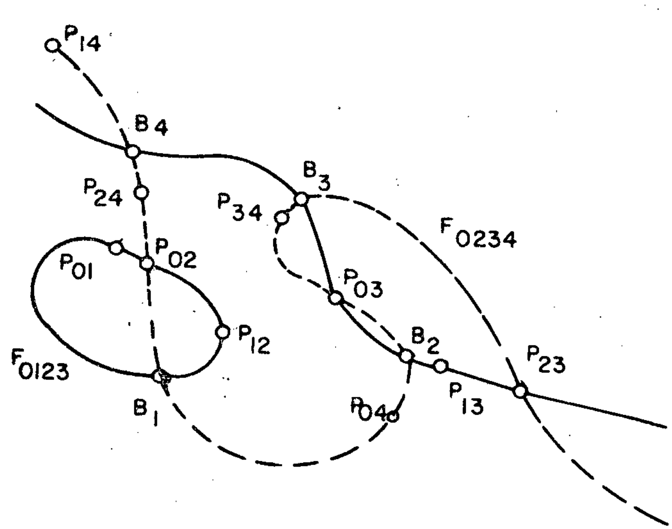


Fig. 3.6. - 5PIS - Os pontos de Burmester (B_1 B_2 B_3 B_4)

A especificação de 5 PIS é feita como segue:

F (U_F, V_F)

P $(U_{P_1} V_{P_1})$

E (U_E, V_E)

O_E (U_{OE}, V_{OE})

m $(-\infty, +\infty)$

$(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$

As intersecções entre as duas cúbicas são mostradas na figura 3.6 - onde o problema da transformação da curvatura para 5 PMS sucessivas $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ apresenta um número finito de soluções. Considerando f 0123 como a cúbica dos pontos de círculo correspondente a quatro posições $\ell = 0, 1, 2, 3$, e f 0234 o mesmo em relação as posições $\ell = 0, 2, 3, 4$ então as intersecções dessas cúbicas constituem-se nos pontos do plano móvel que assumem 5 PMS sobre um arco de circunferência no plano fixo. Dessas intersecções os polos ou centro instantaneos P02, P03, P23 são pontos comuns as cúbicas f 0123 e f 0234 apresentando-se portanto, como três intersecções reais. Dois pontos complexos representam mais duas intersecções. São as quatro intersecções restantes que satisfazem ao problema de 5 PMS. Estas intersecções são na figura 3.6 os pontos B1, B2, B3, B4 que são os pontos de Burmester que neste caso geram seis mecanismos de quatro barras, quando combinados dois a dois.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DA TEORIA PIS

4.1 - INTRODUÇÃO

A teoria PIS, conforme foi desenvolvida nos capítulos anteriores, será aplicada para os diferentes casos de 5 PMS, ou seja PP-P-P-P, PP-PP-P, PPP-P-P, PPP-PP, PPPP-P e PPPPP, onde P-P e PP significam respectivamente duas posições finitamente e infinitesimalmente separadas.

São apresentados a seguir alguns exemplos com a finalidade de mostrar a metodologia ora implantada na UFSC através do programa PMS-modificado, tendo como base o programa SIMAP (Síntese de Mecanismos Articulados Planos)(**).

Caso 6 (PP-P-P-P)

A aplicação deste caso envolve, além da especificação das posições finitas o conceito de tangente de $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, necessário à determinação inicial do polo (U_{P_1}, V_{P_1}), (fig.4.1).

As 3 PFS restantes completam a especificação do problema de 5 PMS.

Para o problema em questão o seguinte conjunto de dados da Tabela 1 deverá ser fornecido ao programa SIMAPM.

(**) Apêndice 1.

U_E	V_E	U_F	V_F	U_{OE}	V_{OE}
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
α	β	γ			
0.0	0.0	0.0			
0.0	0.0	0.0			
0.49	-0.24	5.0			
0.59	-0.07	-20.0			
0.35	0.07	-23.0			
U_{P1}	V_{P1}	U_{P2}	V_{P2}	m	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	

TABELA 1

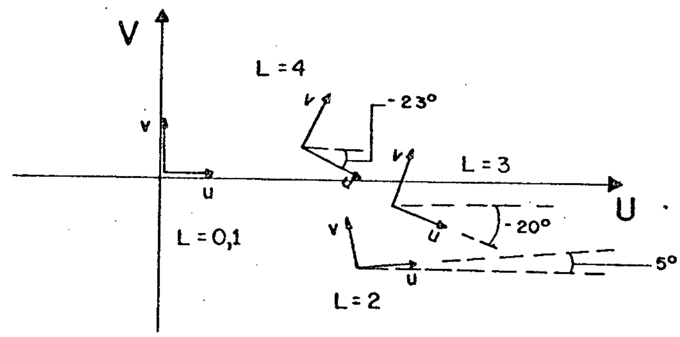
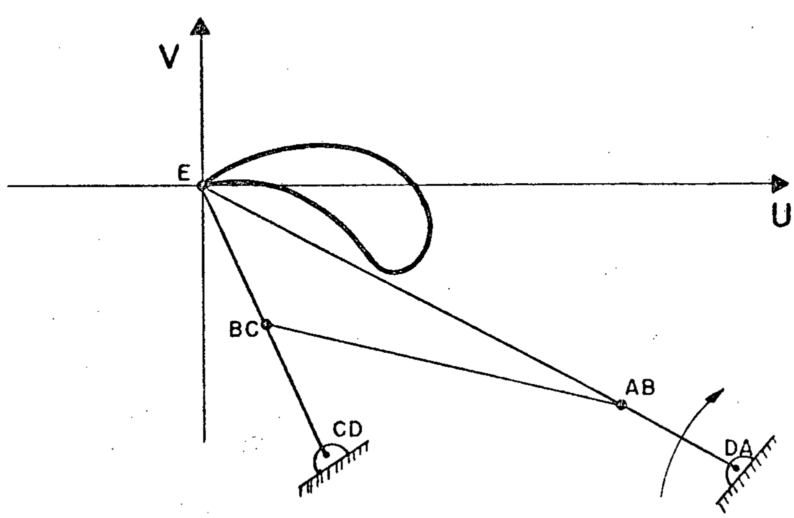


Fig. 4.1. - Especificação para o mecanismo caso 6 (PP - P - P - P)



PP-P-P-P

Fig. 4.2. - Mecanismo e sua trajetória

O mecanismo articulado (fig. 4.2) obtido através das especificações contidas na tabela 1 obedece à condição imposta pela posição PP, ou seja, desloca o plano do acoplador, instantâneamente na direção da tangente.

Os parâmetros de movimento α e β são determinados na subrotina PISEP sem a necessidade, portanto, da interferência direta do projetista, facilitando assim, a aplicação de PIS na solução de problemas de mecanismos articulados.

Caso 5 (PP-PP-P)

A característica deste caso é a de envolver duplamente o conceito de tangente, estabelecido no caso anterior. A sua especificação necessita da determinação de dois polos, sendo respectivamente um para cada par de posições infinitesimalmente separadas. (fig. 4.3).

A especificação das 3 PFS restantes completa a configuração de 5 PMS.

Para o caso 5 é necessário que se forneça o conjunto de dados da tabela 2.

U_E	V_E	U_F	V_F	U_{OE}	V_{OE}
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
α	β	γ			
0.424	0.245	30.0			
0.0	0.0	0.0			
0.424	0.245	55.0			
0.0	0.0	0.0			
0.49	0.0	70.0			
U_{P1}	V_{P1}	U_{P2}	V_{P2}	m	
0.6	2.019	0.65	0.05	0.0	

TABELA - 2

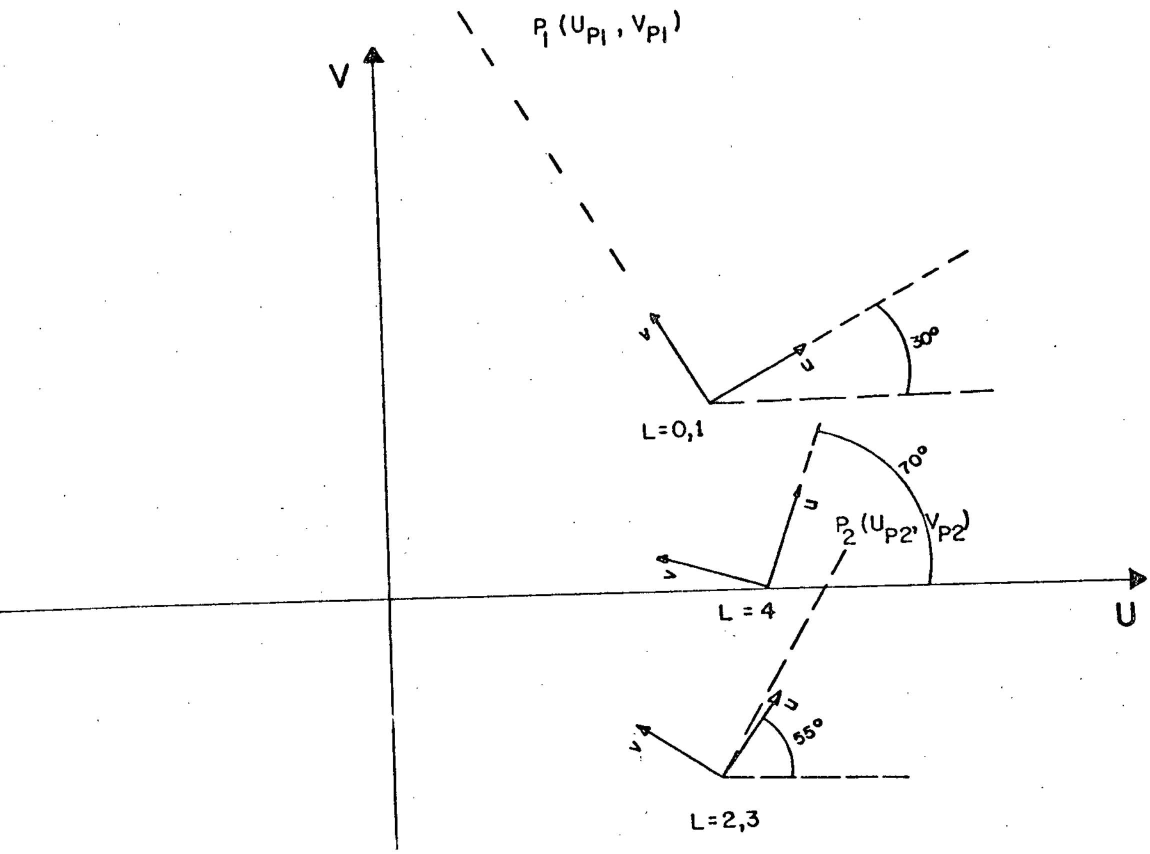


Fig. 4.3. - Especificação para o mecanismo caso 5 (PP - PP - P)

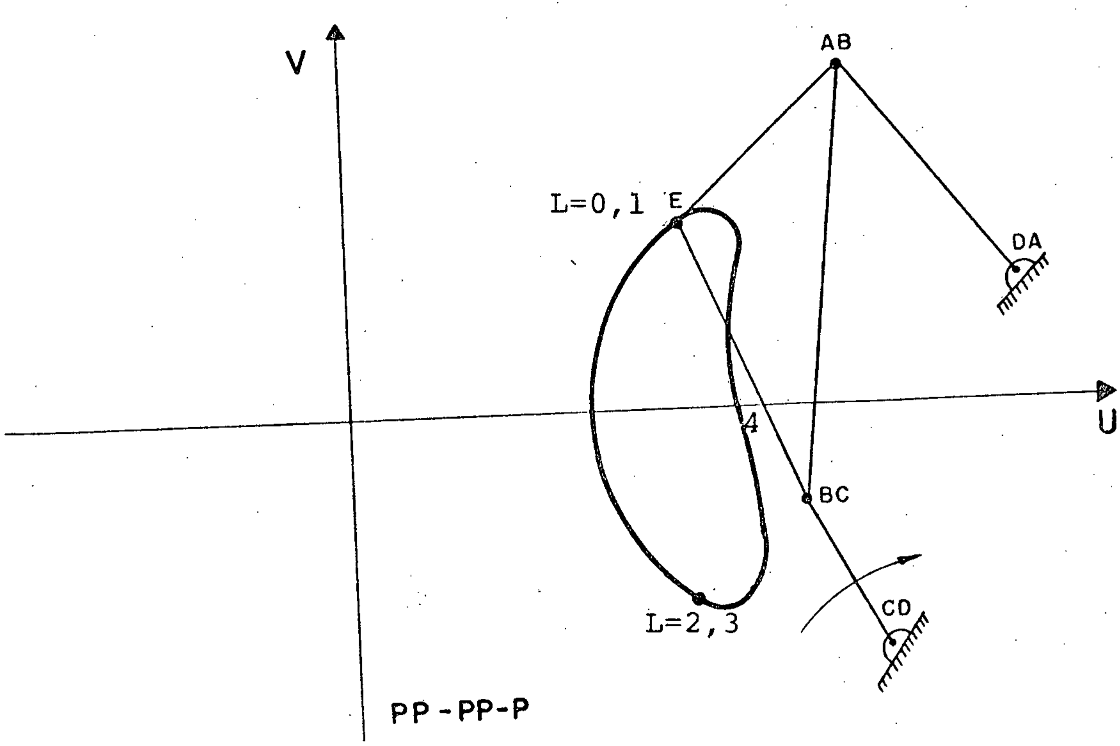


Fig. 4.4. - Mecanismo e sua trajetória

O mecanismo obtido (fig. 4.4) tem os seus parâmetros de movimento α_1, β_1 e α_3, β_3 determinados diretamente através da subrotina PISEP, com a característica de que o plano do acoplador percorre, instantâneamente,nas posições PP, a direção das tangentes especificadas.

Caso 4 (PPP-P-P)

A aplicação deste caso envolve além da especificação das posições finitas o conceito de círculo de inflexão para 3 PIS (PPP).

Para a tangente é definido o polo (U_{P1} , V_{P1}) em relação ao sistema fixo de referência e, para o círculo de inflexão são definidos os pontos E, F, O_F e o parâmetro de otimização m (real) que posicionará o ponto O_F sobre a reta $\overline{FP}$. (fig. 4.5)

Os dados contidos na tabela 3, abaixo são necessários para a especificação do caso 4.

U_E	V_E	U_F	V_F	U_{OE}	V_{OE}
0.0	0.0	0.75	2.0	3.0	2.6
α	β	γ			
0.0	0.0	30.0			
0.0	0.0	0.0			
0.0	0.0	0.0			
2.25	-1.2	52.0			
4.0	-1.0	65.0			
U_{P1}	V_{P1}	U_{P2}	V_{P2}	m	
3.75	3.25	0.0	0.0	0.58	

TABELA-3

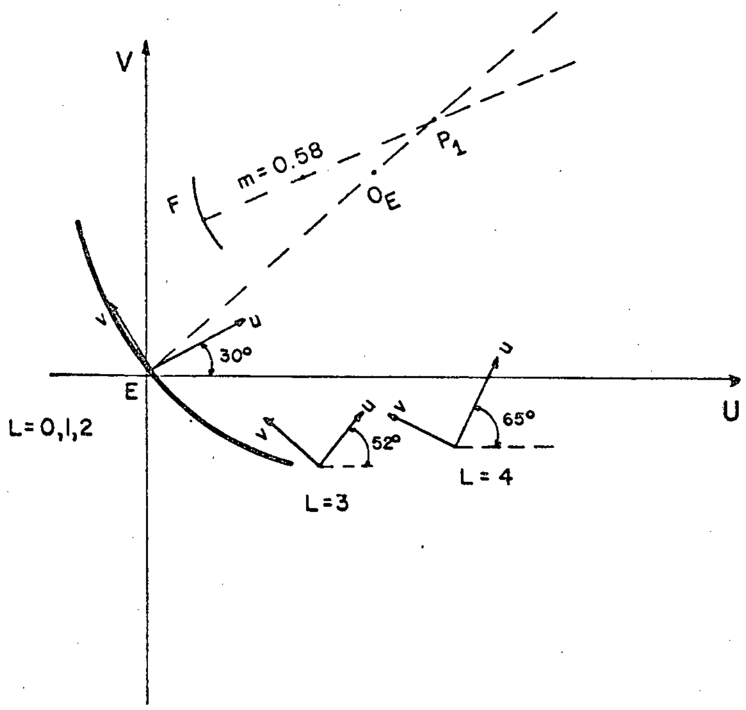


Fig. 4.5. - Especificação para o mecanismo
caso 4 (PPP - P - P)

Os parâmetros de movimento α_1, β_1, α_2, β_2 envolvendo os conceitos de tangente e círculo de inflexão são determinados diretamente através da subrotina PISEP. O mecanismo obtido satisfaz as condições impostas para PPP, ou seja, que o plano do acoplador se desloque instantâneamente na direção da tangente dada, obedecendo a trajetória de raio de curvatura ρ pré-estabelecida. (Fig. 4.6)

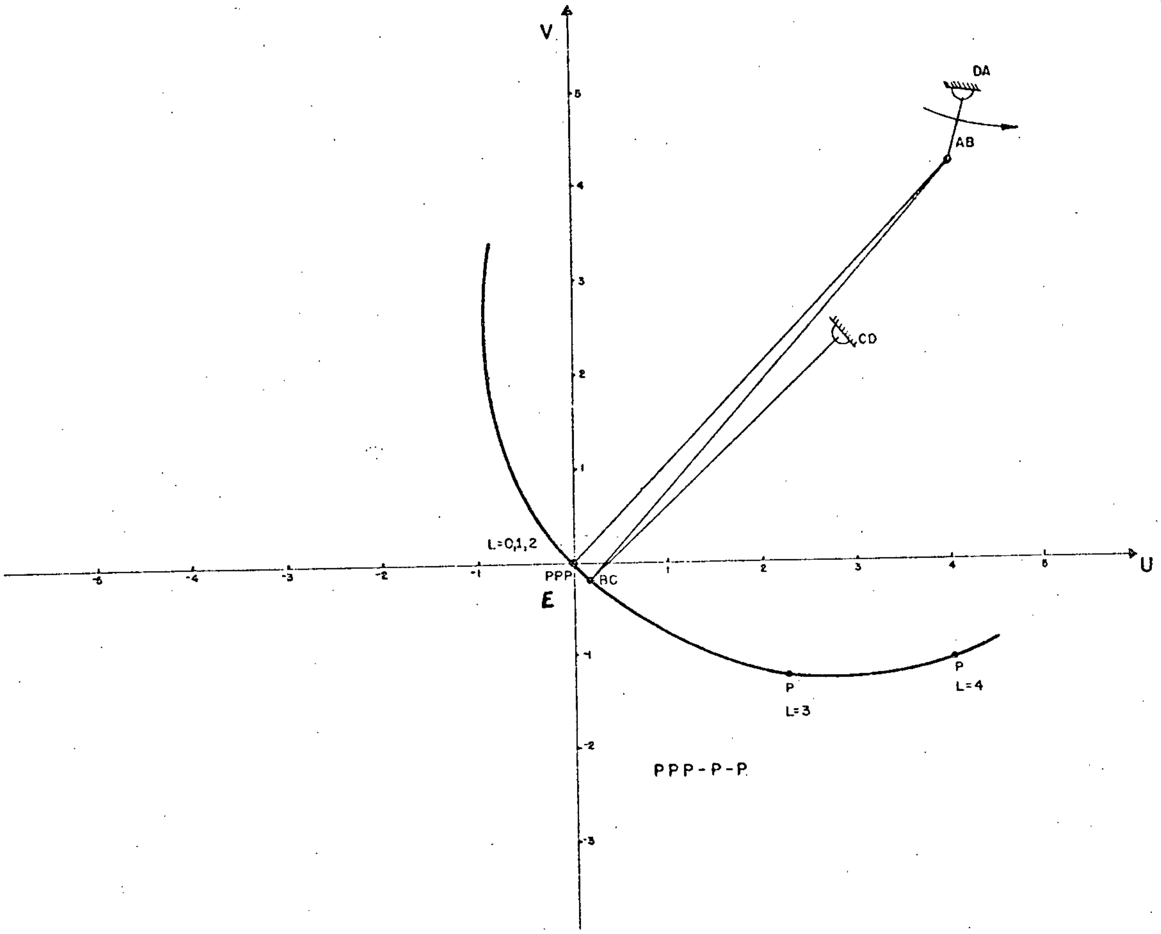


Fig. 4.6. Mecanismo e sua trajetória

Caso 3 (PPP-PP)

A especificação do caso 3 envolve o conceito de tangente aplicado duplamente para as posições infinitesimalmente separadas (PP), bem como o conceito de círculo de inflexão para as 3 PIS (PPP).

Para as tangentes são definidos os respectivos polos (U_{P_1}, V_{P_1}) e (U_{P_2}, V_{P_2}), em relação ao sistema fixo de referência.

De forma similar ao caso anterior, para o círculo de inflexão são definidos os pontos E, O_E, F e o parâmetro de otimização m (real) que posiciona o ponto O_F sobre a reta $\overline{FP}$. (fig. 4.7)

A tabela 4 contém o conjunto de dados para a execução do caso 3.

Os parâmetros de movimento α_1, β_1, α_2, β_2 e α_4, β_4 são determinados diretamente através da subrotina PISEP, gerando a solução mostrada na fig. 4.8.

U_E	V_E	U_F	V_F	U_{OE}	V_{OE}
0.0	0.0	0.75	2.0	3.0	2.6

α	β	γ
0.0	0.0	30.0
0.0	0.0	0. 0
0.0	0.0	0. 0
2.85	0.075	55.0
0.0	0.0	0.0

U_{P1}	V_{P1}	U_{P2}	V_{P2}	m
3.75	3.25	2.26	2.26	0.58

TABELA 4

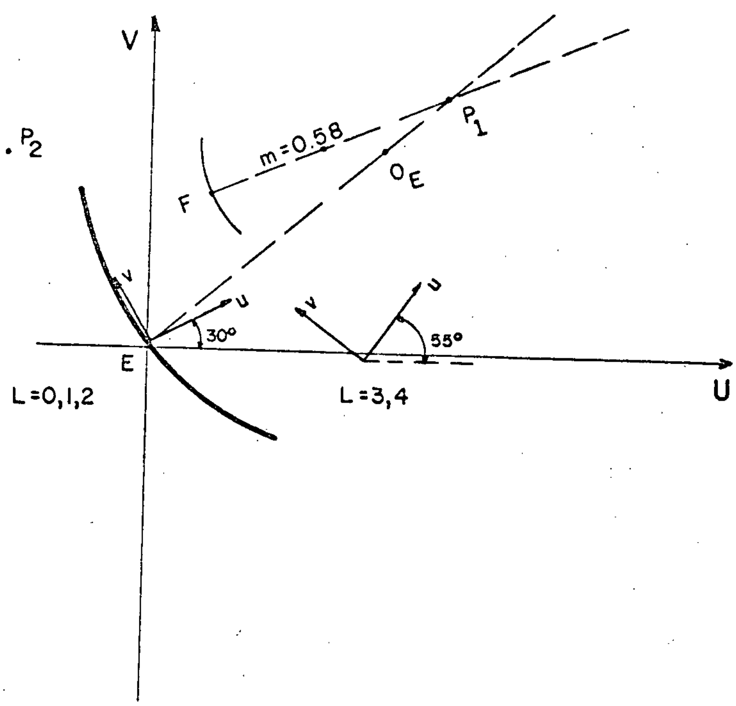


Fig. 4.7. - Especificação para o mecanismo caso 3 (PPP - PP)

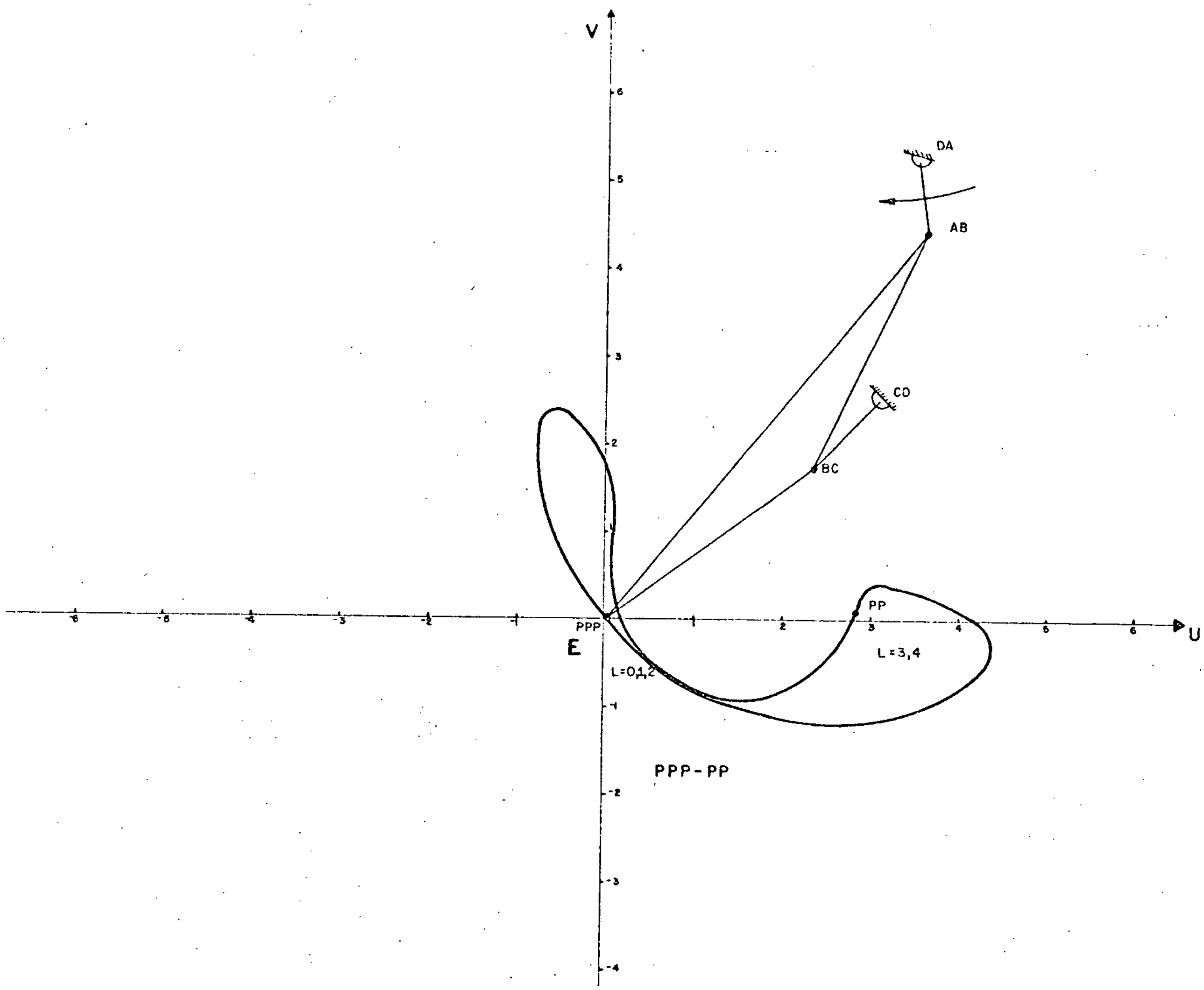


Fig. 4.8. - Mecanismo e sua trajetória

Caso 2 (PPPP-P)

A especificação para o caso 2 envolve os conceitos de tangente, círculo de inflexão e cúbica de curvatura estacioná ria.

Para a tangente é definido o polo (U_{P_1}, V_{P_1}) em re lação ao sistema fixo de referência.

Para o círculo de inflexão são definidos os pontos E, O_E e F e o parâmetro m (real) que posiciona o ponto O_F sobre a reta $\overline{FP}$ (fig. 4.9).

Tomando a origem do plano móvel como o ponto do acoplador e coincidente com a origem do sistema fixo de referência, e utilizando o sistema geral de referência, tem-se o conjunto de dados da tabela 5.

E	V_E	U_F	V_F	U_{OE}	V_{OE}
).0	0.0	0.75	2.0	3.0	2.6

α	β	γ
.0	0.0	0.0
.0	0.0	0.0
.0	0.0	0.0
.0	0.0	0.0
.0	0.0	27.0

P1	V_{P1}	U_{P2}	V_{P2}	m
75	3.25	0.0	0.0	0.58

TABELA 5

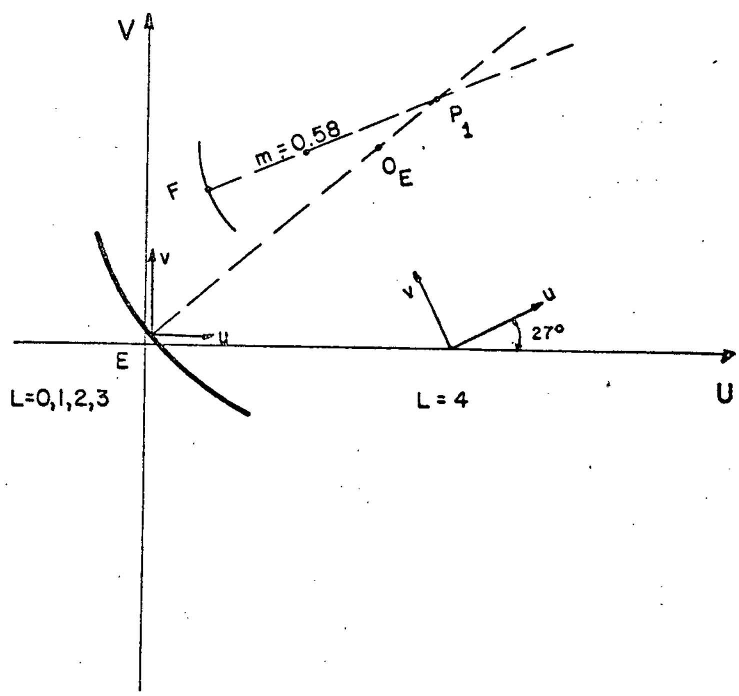


Fig. 4.9. - Especificação para o mecanismo caso 2 (PPPP - P)

Os parâmetros de movimento α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 envolvendo os conceitos de tangente, círculo de inflexão e cúbica de curvatura estacionária são determinados através da subrotina PISEP do programa SIMAPM.

O mecanismo obtido satisfaz as condições impostas para PPPP, ou seja, que o plano do acoplador se desloque instan-tâneamente na direção da tangente dada, obedecendo a trajetória de curvatura ρ estacionária pré-estabelecida (fig. 4.10).

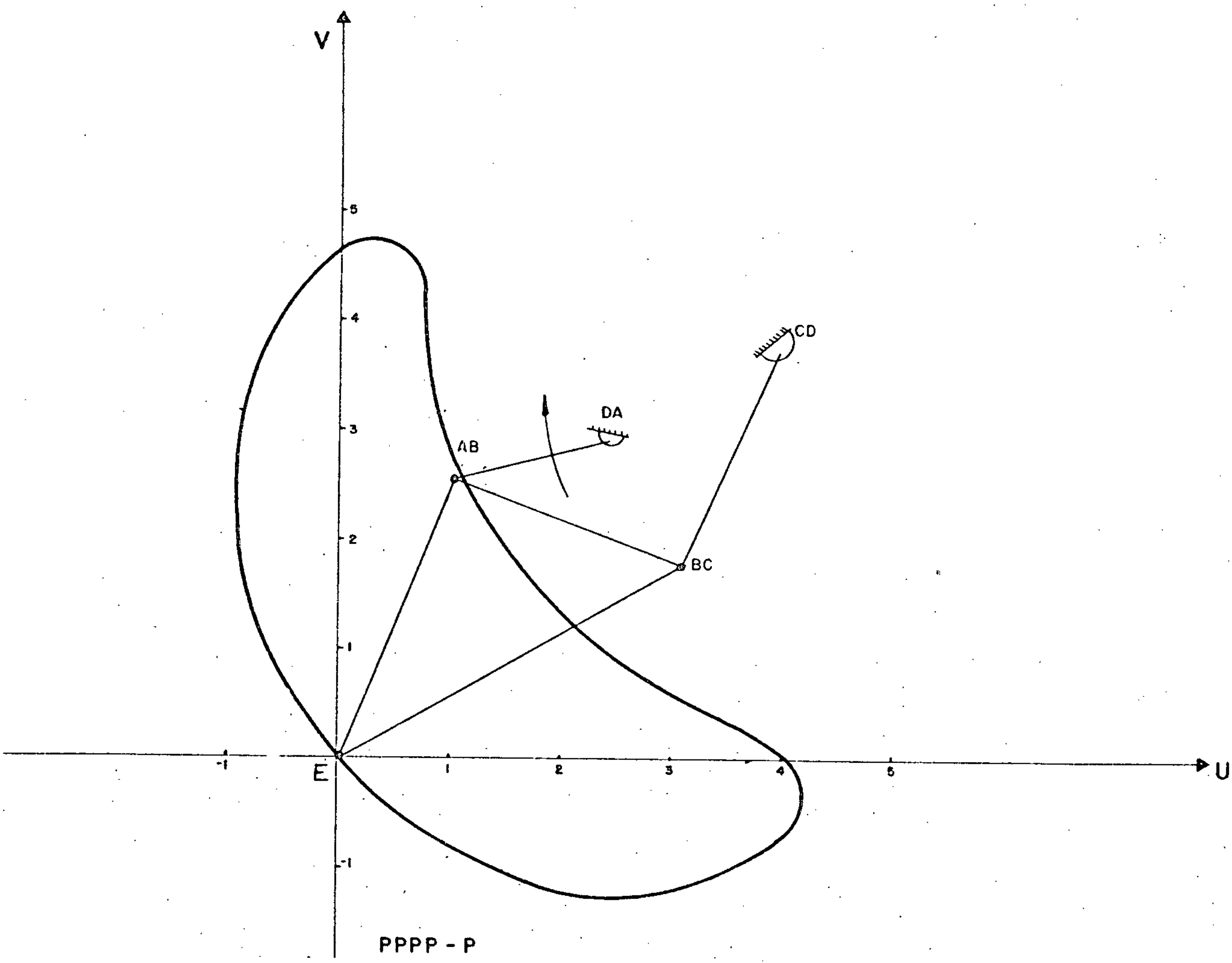


Fig. 4.10. - Mecanismo e sua trajetória

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1. Conclusões

As propriedades de ordem superior do movimento do plano móvel foram estudadas em detalhe para cada um dos 4 casos, PP, PPP, PPPP, PPPPP e a partir do significado geométrico já estabelecido para os parâmetros de movimento de ordem superior, foi desenvolvido um método analítico, que determina o fundamento da teoria PMS, que é a especificação do problema, usando somente os três parâmetros (α,β,γ), permitindo a formulação destes de forma compacta e particularmente conveniente na subrotina PISEP.

As subrotinas INPUT e PISEP podem ser especificadas do mesmo modo para cada um dos sete casos da Teoria 5PMS. Nesta especificação, em acréscimo aos (α,β,γ) necessários para posições finitas tornou-se necessário especificar o polo para dois PP, e mais dois pontos $E(U_E, V_E)$ e $F(U_F, V_F)$ e os pontos $O_E(U_{O_E}, V_{O_E})$ e $m(-\infty, +\infty)$ que posiciona $O_F(U_{O_F}, V_{O_F})$ sobre $\overline{FP}$ dados em relação ao sistema geral de referência, para os casos PPP, PPPP, PPPPP.

Desta forma esta sistemática auxilia o projetista a especificar os (α,β,γ) necessários ao problema de modo mais rápido,compacto e eficaz; pois evita erros provenientes de cálculos de α e β em expressões muito complexas a partir de 3 PIS, ao mesmo tempo auxilia-o na interpretação geométrica da teoria PIS, facilitando a síntese do mecanismo articulado, através do sistema geral de referência. Nos casos de 4PIS e 5PIS a subrotina PISEP utiliza expressões no sistema especial de referência para evitar o número elevado de termos, mas estas expressões não perdem em generalidade na resolução dos problemas.

No sistema geral de referência o ponto de origem do plano móvel é o ponto (E) e é chamado de ponto do acoplador, o polo por sua vez está afastado deste ponto.

No sistema especial de referência o ponto da origem do plano móvel é o polo (P) e é ele que determina as posições do plano móvel e é através dele que é especificado o seu movimento através dos termos (a, b, Ø), que são gerados internamente na subrotina PISEP,a qual determina o mecanismo articulado através das outras subrotinas do programa PMS - Modificado.
Em síntese o projetista especifica no sistema geral e obtém o mecanismo no sistema geral de referência, e a partir daí faz uma análise cinemática do mecanismo obtido verificando se o mesmo satisfaz as posições finitas e a trajetória desejada do ponto do acoplador.

Nesta sistemática de especificação para as posições infinitesimalmente separadas na síntese de mecanismos articulados o conceito de curvatura é importante, auxiliando através da equação de Euler Savary na determinação do círculo de inflexão, a partir dos pontos E, F, O_E, O_F, e P.

Conforme apresentado, as equações da curvatura se apresentam na forma paramétrica, já no apêndice é dado o enfoque em forma reduzida.

A aplicação da teoria a problemas práticos revela as vantagens da nova sistemática uma vez que o processo de especificação do problema é bastante simplificado com relação a PIS e integrado à teoria PMS.

5.2. Recomendações

Na síntese de mecanismos articulados, a aplicação do conceito de ângulo de transmissão ótimo seria importante se implantado no programa SIMAPM, com a finalidade de selecionar a solução mais eficaz em termos de transmissão de forças. Sendo o ponto (F) um parâmetro de otimização, seria de valia, associar um método de otimização à sistemática ora desenvolvida para a síntese, de tal sorte a compor uma especificação ao problema que viesse otimizar a solução obtida tendo como parâmetro de controle desse processo o ângulo de transmissão ótimo. Assim sendo, da família de mecanismos obtidos aqueles que apresentassem uma melhor qualidade de transmissão do movimento seriam analizados e selecionados compondo a solução final do problema.

APÊNDICE 1

O PROGRAMA PMS - MODIFICADO

O programa PMS também chamado SIMAP está escrito em linguagem Fortran IV e permite a utilização da teoria PMS, tanto com o sistema geral quanto com o sistema especial de referência. Este programa foi desenvolvido pelo Professor José Carlos Zanini, durante a elaboração de sua tese de doutoramento[6]. Bernardo Riso [9] implantou-o no sistema IBM/360 na UFSC, em sua dissertação de mestrado, utilizando precisão dupla para as variáveis reais.

Hoje o sistema utilizado é o IBM/4341 e o programa PMS - modificado difere do programa PMS apenas pela introdução da sub-rotina PISEP que tem a capacidade de calcular as posições infinitesimais (α_ℓ, β_ℓ) necessárias para a especificação de PIS.

O Programa PMS - modificado foi elaborado de tal modo que é permitido ao usuário a especificação de um conjunto de parâmetros angulares (γ) para as posições finitas, tendo em vista que cada conjunto de (α,β) infinitesimalmente separado depende do γ especificado para a posição finita.

No programa principal são lidos alguns dados de entrada e é exercido o controle geral sobre todo o programa.

A subrotina MSP5 comanda os cálculos mais importantes realizados no programa e imprime alguns resultados.

A subrotina INPUT lê e imprime os dados de entrada.

A subrotina EQUATN identifica o caso especificado de PMS e calcula os coeficientes generalizados da curvatura, $A_{m\ell}$, que são utilizados em outras subrotinas.

A subrotina MATEST aplica testes sobre as matrizes para verificar casos de degeneração.

A subrotina INFPTY calcula os coeficientes da cúbica de curvatura estacionária, suas coordenadas, ponto focal e assíntota. Calcula o centro e o raio do círculo de inflexão.

A subrotina ZIZO verifica os casos de degeneração das cúbicas, calcula os coeficientes da quártica, calcula as coordenadas dos pontos de Burmester e imprime esses resultados.

A subrotina STLINE trata o problema da especificação de posições sobre uma reta.

As subrotinas MATRX3 e MATRX4 calculam determinantes de terceira e de quarta ordem, respectivamente.

A subrotina COG calcula as coordenadas dos pivôs dos mecanismos cognados e imprime resultados.

A subrotina MOTION classifica os mecanismos originais e cognados, de acordo com o critério de Grashof.

As subrotinas MOVE 1, MOVE 2 e MOVE 3 estão relacionadas à utilização do traçador de gráficos para desenhar as cúbicas.

O diagrama de fluxo apresentado na figura 1 pretende mostrar a estrutura lógica do programa PMS modificado.

O programa PMS modificado reconhece sete casos de 5PMS. Esses casos são mostrados a seguir:

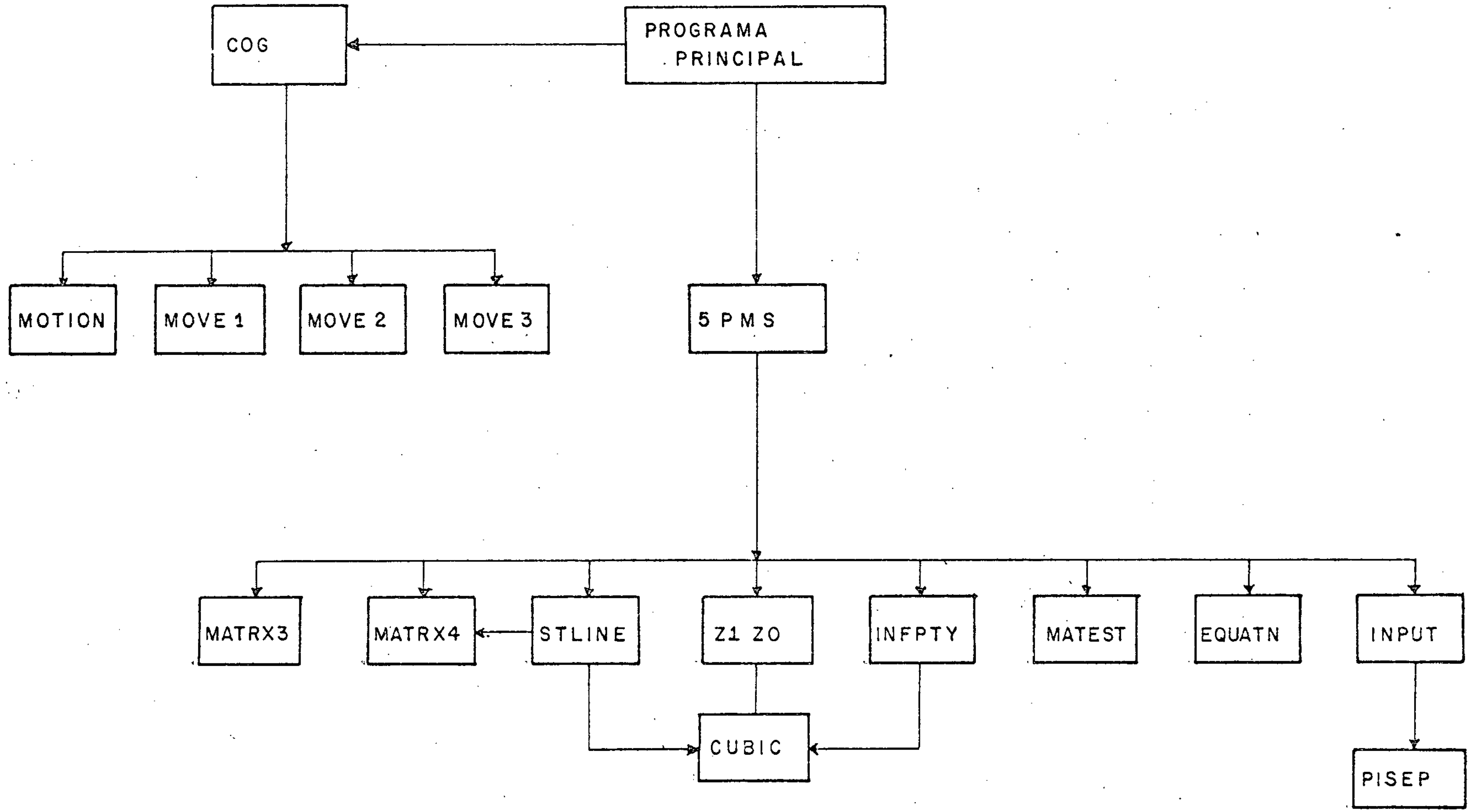


FIG. 1 – DIAGRAMA DE FLUXO DO PROGRAMA PMS-MODIFICADO

CASO 1	PPPPP	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	3	4
		j	0	0	0	0	0
CASO 2	PPPP-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	3	0
		j	0	0	0	0	1
CASO 3	PPP-PP	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	0	1
		j	0	0	0	1	1
CASO 4	PPP-P-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	2	0	0
		j	0	0	0	1	2
CASO 5	PP-PP-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	0	1	0
		j	0	0	1	1	2
CASO 6	PP-P-P-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	1	0	0	0
		j	0	0	1	2	3
CASO 7	P-P-P-P-P	ℓ	0	1	2	3	4
		k	0	0	0	0	0
		j	0	1	2	3	4

A seguir são apresentadas as instruções para a entrada de dados no programa SIMAPM. Para cada problema, todos os cartões devem ser repetidos.

Um asterísco no número da coluna indica formato inteiro.

CARTÃO	COLUNAS E FORMATOS	DEFINIÇÃO	VARIÁVEL LIDA
1	1 a 2*	Número de problemas a serem resolvidos.	N PROB
2	1 a 2*	Número do caso PMS	N CASE
3	1 a 10	1.0 se forem especificadas posições sobre a reta. Para todos os outros casos, deixar em branco.	GOSTLN
	11 a 20	Controle de impressão dos resultados. Colocar 0.0	TRACE
	21 a 30	1.0 para saída em formato F.	VARFMT
4	1 a 10 11 a 20	Abscissa do ponto E Ordenada do ponto E	U_E V_E
	21 a 30 31 a 40	Abscissa do ponto F Ordenada do ponto F	U_F V_F
	41 a 50 51 a 60	Abscissa do ponto OE Ordenada do ponto OE	U_{OE} V_{OE}

CARTÃO	COLUNAS E FORMATOS	DEFINIÇÃO	VARIÁVEL LIDA
5 até 9	1 a 10	Valor de α_ℓ $\ell=0,1,2,3,4$	HANGA
	11 a 20	Valor de β_ℓ $\ell=0,1,2,3,4$	HANGB
	21 a 30	Valor do parâmetro angular γ_j, em graus. $j=0,1,2,3,4$	P (5)
10	1 a 10 11 a 20	Valores de abscissa do polo 1 Ordenada do polo 1	U_{P1} V_{P1}
	21 a 30 31 a 40	Abscissa do polo 2. Ordenada do polo 2.	U_{P2} V_{P2}
	41 a 50	Valor do parâmetro m, Ponto que divide um seguimento FP numa razão dada, para posicionar OF sobre FP.	m
11	1 a 10	Valor inicial de y para o traçado da cúbica.	STARTY
	11 a 20	Incrementos de y	STEPY
	21 a 25*	Número de valores de y a serem usados no gráfico da cúbica.	NOYYLS

APÊNDICE 2

CURVATURA E RAIO DE CURVATURA

Seja AB a trajetória de um ponto E e representado por S o comprimento do Arco AE (fig. 1) ao passar da posição E à posição vizinha E' o ponto móvel descreve um arco de curvatura elementar ΔS.

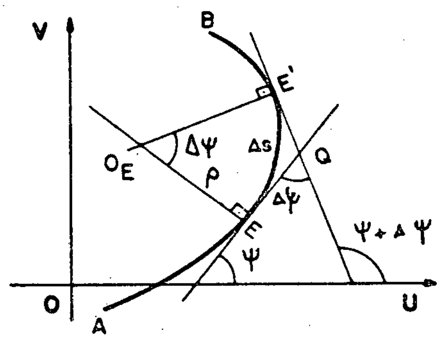


Fig. 1

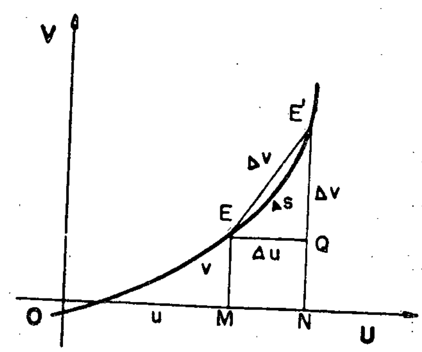


Fig.2

Seja EQ e tangente à curva em E e E'Q a tangente em E'. Representando por ψ a inclinação da tangente em E, pode-se representar por $\psi + \Delta\psi$ a inclinação da tangente em E', dizendo que a inclinação da tangente sofre um incremento $\Delta\psi$ quando o ponto de contato descreve um arco ΔS. Traçando, enfim, as perpendiculares EO_E e $E'O_E$ às tangentes em E e E'; o ângulo formado em O_E é igual a $\Delta\psi$ (no quadrilátero) $EQE'O_E$, o ângulo em O_E é suplemento do ângulo oposto formado em Q.

A maior ou menor variação do ângulo $\Delta\psi$ em relação a um dado acréscimo ΔS do arco, indica uma curvatura mais ou menos acentuada nas proximidades do ponto E.

Chama-se de curvatura média Km relativa a um arco elementar ΔS, a razão de variação do ângulo em relação à variação do arco S, a saber:

$$Km = \frac{\Delta\psi}{\Delta S}$$

O limite desta razão incremental quando o arco ΔS tende a zero, dá a derivada de ψ em relação ao arco S e é por definição, a curvatura no ponto E; e escreve-se:

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta S} = \frac{d\psi}{dS} \qquad (1)$$

O recíproco da curvatura K se denomina o <u>raio de curvatura</u> no mesmo ponto e se representa por ρ:

$$\rho = 1/K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\psi} = \frac{dS}{d\psi} \qquad (2)$$

REDUÇÃO A COORDENADAS CARTESIANAS

Dada a equação da curva

$$V = f(U)$$

Sejam (U_E, V_E) as coordenadas de E e $(U_E + \Delta U,\ V_E + \Delta V)$ as coordenadas de E' (fig. 2), de modo que os incrementos ΔS do arco e $\Delta\psi$ da inclinação da tangente, correspondam os incrementos ΔU e ΔV de U_E e V_E respectivamente.

Introduzindo o incremento ΔU na razão incremental ΔS, cujo limite define o raio de curvatura, pode-se escrever a identidade:

$$\frac{\Delta S}{\Delta\psi} = \frac{\Delta S}{\Delta U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta\psi}$$

Estas razões incrementais tem por limites as derivadas de S em relação a U e de U em relação a ψ, na pressuposição de que S seja função de ψ por intermédio de U; desde:

$$\rho = \frac{dS}{d\psi} = \frac{dS}{dU} \cdot \frac{dU}{d\psi}$$

ou ainda:

$$\rho = \frac{dS}{d\psi} = \frac{\frac{dS}{dU}}{\frac{d\psi}{dU}} \tag{3}$$

Concebendo ambas as variáveis S e ψ como funções de U e lembrando a regra de derivação de funções inversas. Resta calcular estas duas derivadas, relacionando-se à equação da curva.

Uma vez determinados os valores de $\frac{dS}{dU}$ e $\frac{d\psi}{dU}$ e substituindo em (3), resulta:

$$\rho = \frac{\pm(1 + V'^2)^{3/2}}{V''} \tag{4}$$

que exprime o raio de curvatura em função das derivadas de 1ª e

2ª ordem da equação da curva. Assumindo o raio de curvatura como um número essencialmente positivo, convenciona-se tomar, em cada caso, o sinal da expressão irracional de acordo com o sinal de V" toma-se inicialmente o sinal positivo do radical $\sqrt{1 + V'^2}$, tomando V" em módulo, escreve-se:

$$\rho = \frac{(1 + V'^2)^{3/2}}{|V''|} \tag{5}$$

CENTRO E CÍRCULO DA CURVATURA

O raio de curvatura de uma curva em um ponto $E(U_E, V_E)$ é um segmento $EO_E = \rho$ da normal à curva neste ponto, do lado côncavo da curva (fig. 3).

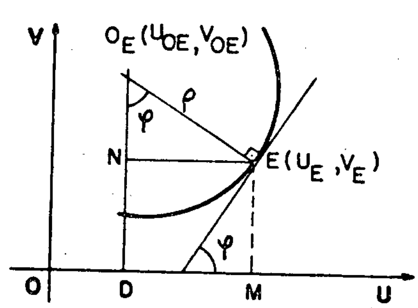


Fig. 3

O ponto O_E assim determinado se diz o centro de curvatura da curva no ponto E. Conhecidas as coordenadas de E e o raio de curvatura ρ, podemos obter as coordenadas do centro de curvatura. Com efeito, sejam $U_{O_E} = OD$ e $V_{O_E} = DO_E$ estas coordena das; pelo ponto E traça-se EN perpendicular a DO_E, formando o triângulo retangulo E O_E N, cujo ângulo em O_E é igual a ψ , de modo que pode-se escrever:

$$U_{O_E} = U_E - \rho \ \mathrm{sen}\psi$$

$$V_{O_E} = V_E + \rho \cos\psi$$

e as coordenadas do centro de curvatura serão

$$U_{O_E} = U_E - \frac{V'(1 + V'^2)}{V''}$$

$$V_{O_E} = V_E + \frac{(1 + V'^2)}{V''} \tag{6}$$

OBSERVAÇÃO: Quando $V'' > 0$ resulta $V_{O_E} > V_E$, isto é, o centro de curvatura está acima do ponto E e a concavidade da curva está voltada para cima, quando $V'' < 0$ e $V_{O_E} < V_E$ e a concavidade está voltada para baixo.

Dá-se o nome de círculo de curvatura ou círculo osculador da curva no ponto E ao círculo de centro $O_E(U_{O_E}, V_{O_E})$ e raio $\rho = O_E E$. Resulta imediatamente desta definição que a equação do círculo de curvatura é

$$(U - U_{O_E})^2 + (V - V_{O_E})^2 = \rho^2 \tag{7}$$

APÊNDICE 3

A EQUAÇÃO DE EULER-SAVARY E O CÍRCULO DE INFLEXÃO

Para determinar a curvatura da trajetória traçada pelo ponto do acoplador E tem-se que ter ou:

a) $A_{Centripeta} = \dfrac{V_E^{\,2}}{\rho}$ (método indireto).

b) Usando o método direto que consiste na aplicação da equação de Euler-Savary.

Considerando a cinemática instantânea conforme a figura 1, onde tem-se o ponto E, sua trajetória, seu raio de curvatura e sua velocidade.

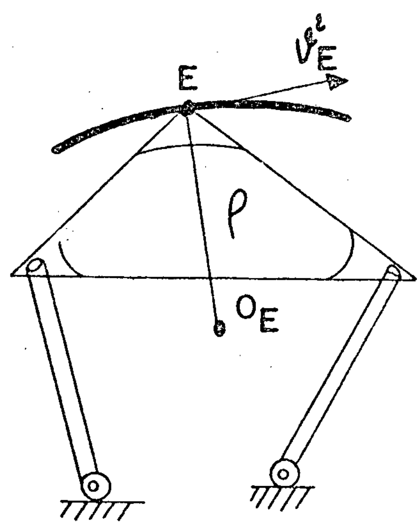


Fig. 1. - O mecanismo articulado com o ponto (E) do acoplador

Considere o movimento do ponto E, ligado ao centro do móvel, a figura 2.

O centro de curvatura instantâneo está em O_E, se E desloca-se para E' girando o centrodo móvel de $\delta\Psi$.

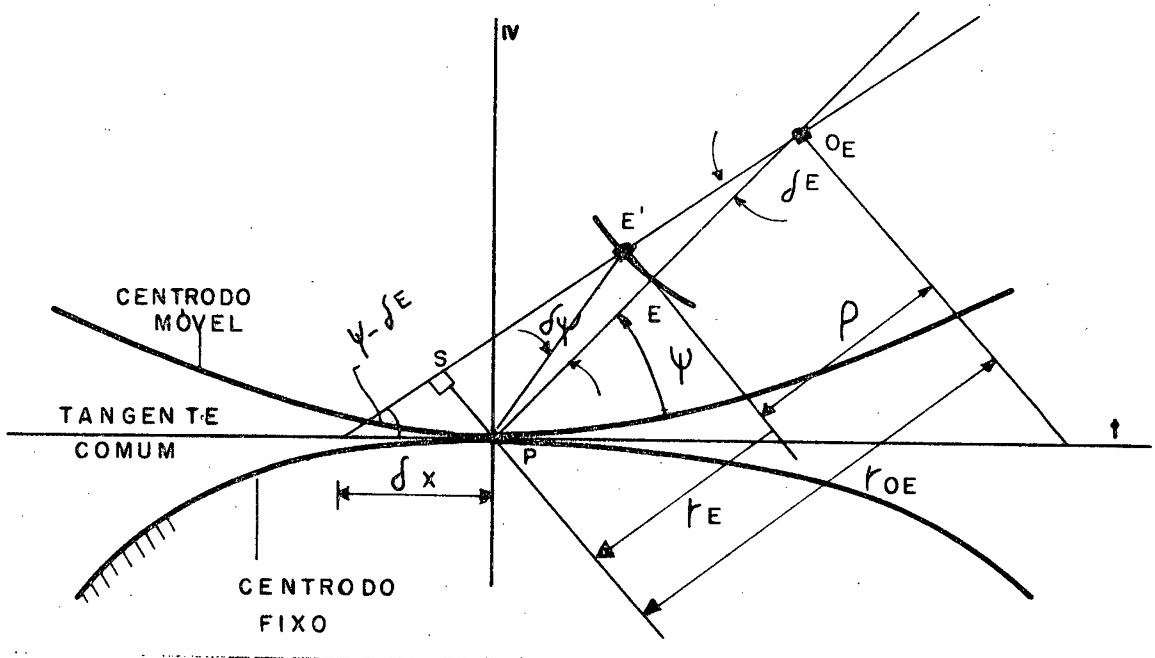


Fig. 2 - O movimento do ponto do acoplador do centrodo móvel.

Assim os triângulos semelhantes

$$\Delta\, O_E PS \qquad \text{e} \qquad \Delta\, O_E EE',$$

fornecem,

$$\frac{O_E E}{O_E P} = \frac{EE'}{PS}$$

$$\frac{rO_E - rE}{rO_E} = \frac{r_E \;\; \delta\Psi}{\delta X . \text{sen}\, (\Psi - \delta E)} = \frac{r_E \cdot \frac{\delta\Psi}{\delta t}}{\frac{\delta X}{\delta t} . \text{sen}\ \Psi}$$

$$\text{Para} \begin{bmatrix} t \\ \\ \delta t = 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\delta\Psi}{\delta t} = \frac{d\Psi}{dt} = W$$

Velocidade angular de barra móvel.

$$\frac{\delta X}{\delta t} = \frac{dX}{dt} = V_p$$

Velocidade do polo (Centro instantâneo)

$$\therefore \quad \frac{rO_E - r_E}{rO_E \cdot r_E} = \frac{W}{V_p \cdot \text{sen } \Psi}$$

$\left[\frac{W}{Vp}, = \right.$ Constante, para uma dada posição. $\left.\right]$

Considerando $\frac{W}{Vp} = \frac{1}{d} = Cte$

$$\frac{1}{r_E} - \frac{1}{rO_E} = \frac{1}{d \text{ sen } \Psi}$$

<u>Equação de Euler-Savary</u>

Se O_E tender para o infinito tal que a trajetória de E torna-se uma reta,

$$rO_E \longrightarrow \infty \qquad \frac{1}{r_E} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{d \text{ sen } \Psi}$$

onde $r_E = d \text{ sen } \Psi$

O que fornece um círculo de diâmetro d, passando por P, Chamado de <u>círculo de inflexão</u>, conforme a figura 3.

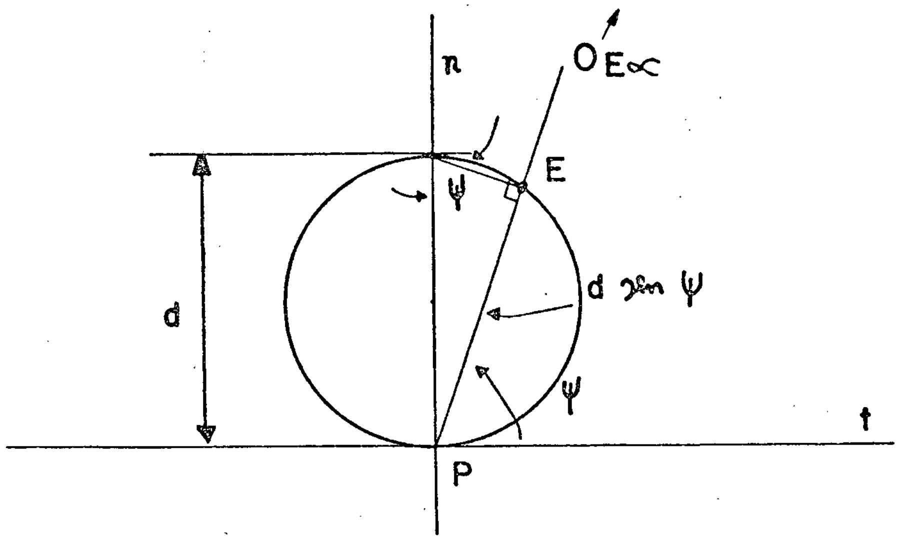


Fig. 3 - O ponto (E) de raio de curvatura infinita sobre o círculo de inflexão

Todos os pontos ligados ao centrodo móvel e sobre este círculo estão instantaneamente deslocando-se sobre linhas retas.

Pontos dentro do círculo possuem curvatura - convexa

Pontos fora do círculo possuem curvatura - côncava

A figura 4 apresenta o ponto E com seu raio de curvatura finito.

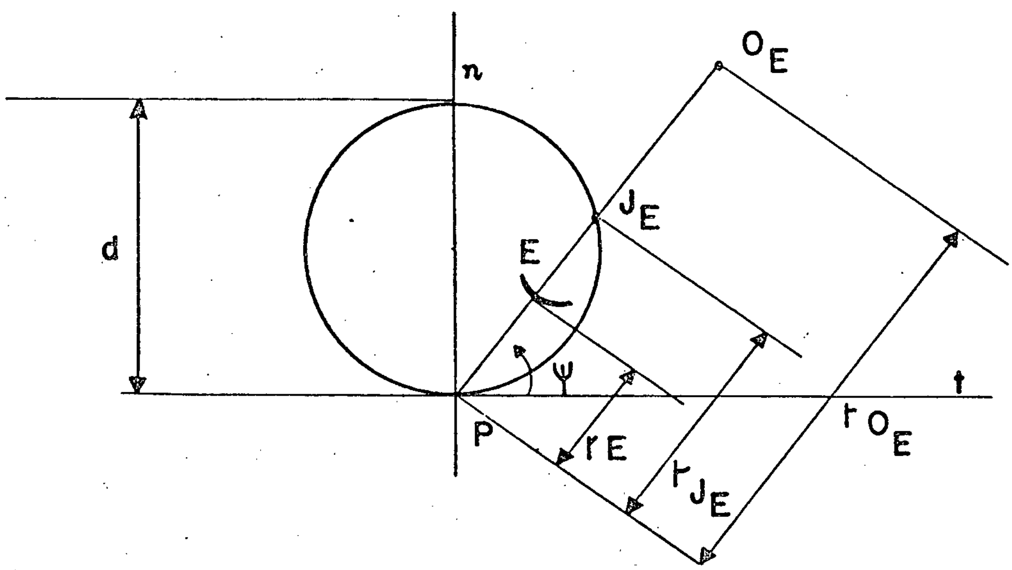


Fig. 4 - O ponto (E) de raio de curvatura finito dentro do círculo de inflexão

A seguir apresenta-se a dedução das equações de Euler-Savary sob outra forma.

$$PJ_E = d \text{ sen } \Psi$$

então $$\frac{1}{r_E} - \frac{1}{rO_E} = \frac{1}{rJ_E}$$

ou, $$\frac{1}{PE} - \frac{1}{PO_E} = \frac{1}{PJ_E}$$

$$\overrightarrow{r_E} = \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{-EP}$$

$$\overrightarrow{rO_E} = \overrightarrow{PO_E} = \overrightarrow{-EP} + \overrightarrow{EO_E}$$

$$\overrightarrow{PJ_E} = \overrightarrow{-EP} + \overrightarrow{EJ_E}$$

$$\frac{1}{-EP} - \frac{1}{-EP + EO_E} = \frac{1}{-EP + EJ_E}$$

que fornece

$$EO_E \cdot EJ_E = (EP)^2$$ outra forma de expressar a equação de Euler-Savary.

Supondo uma série de pontos A,B,C,D,...N sobre a reta r na figura 5 os centros de curvatura das trajetórias O_A, O_B, O_C, O_D ... O_N, se obtêm fazendo a aplicação da equação de Euler-Savary.

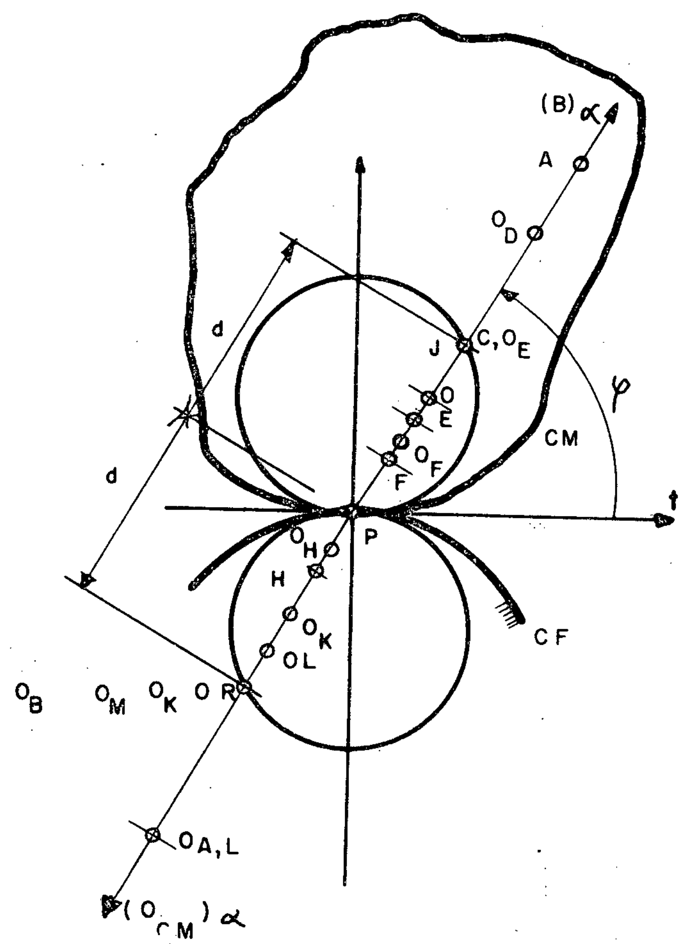


Fig. 5 - Os pontos A, B, C, D...M e seus centros de curvatura O_A, O_B, O_C,... O_M obtidos pela aplicação da equação de Euler Savary.

As seguintes observações se deduzem sem dificuldade da equação de Euler-Savary.

1. A equação de Euler-Savary representa uma relação entre quatro pontos alinhados, E, P, O_E, J_E e três distâncias EP, EO_E, EJ_E.

Quando se conhecem três pontos ou três distâncias, é possível determinar a incógnita restante. Onde:

E = ponto do plano móvel

P = polo, ou centro instantâneo de rotação

O_E= centro de curvatura da trajetória do ponto E

J_E= intersecção da reta r com a circunferência de inflexão.

EP= distância do ponto E até o polo P.

EO_E= distância do ponto E até o centro de curvatura do ponto E, ou seja OE.

EJ_E= distância do ponto E até o ponto J_E.

2. (a) EJ_E e EO_E devem ter sempre o mesmo sentido com respeito a E, qualquer que seja a posição de E, ou seja, isto estabelece que O_E e J_E estão do mesmo lado de E.

(b) Já que O_E e J_E deverão estar sempre do mesmo lado de E, se o ponto E está dentro do círculo de inflexão a curvatura será convexa para quem olha de P, se o ponto E está fora do círculo de inflexão a curvatura será côncava olhando do mesmo P. Conforme a fig. 6.

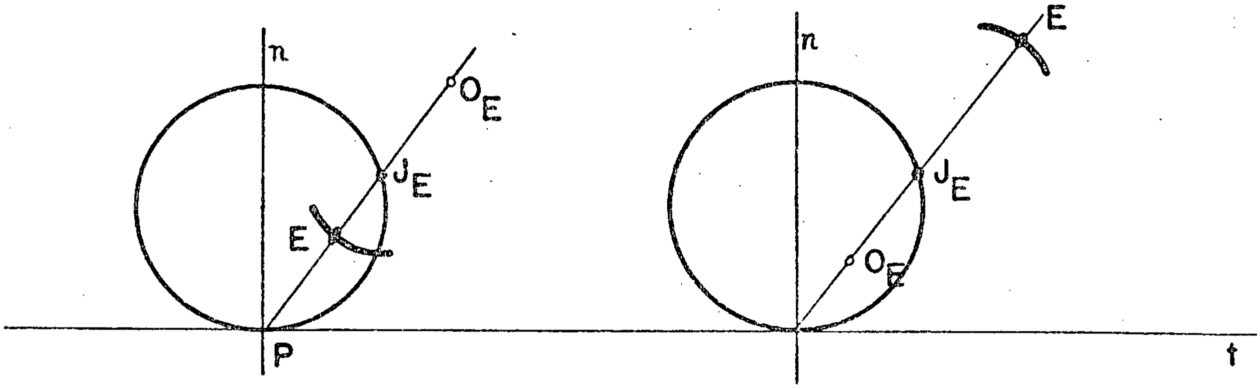


Fig. 6 - A trajetória convexa ou côncava para o ponto E.

(c) A equação $\dfrac{1}{PJ_E} = \dfrac{1}{P_E} - \dfrac{1}{PO_E}$

é aplicável para 'E' compreendido entre 'J_E' e 'P' e, para 'E' compreendido entre J_E e ∞ por

$$\frac{1}{PJ_E} = \frac{1}{PO_E} - \frac{1}{P_E}$$

e para qualquer posição de 'E' é aplicável a equação:

$$\frac{1}{PJ_E} = \frac{1}{P_E} + \frac{1}{PO_E}$$

3. Estas três equações podem ser observadas, quando para valores de 'd''e''ψ' dados, Rosenauer realizou a constru

ção de uma hipérbole equilatera (fig. 7)

$$xy - PJ_E x - PJ_E y = 0$$

ao fazer: $EP = x$

$EO_E = x+y$

na equação $EP^2 = EO_E \cdot EJ_E$

onde para se obter EP e EO_E - EP se procede do seguinte modo:

Leva-se a partir de 0 a distância OM = EP.

Traça-se uma perpendicular por M, obtendo-se E sobre a reta e O_E sobre a hipérbole.

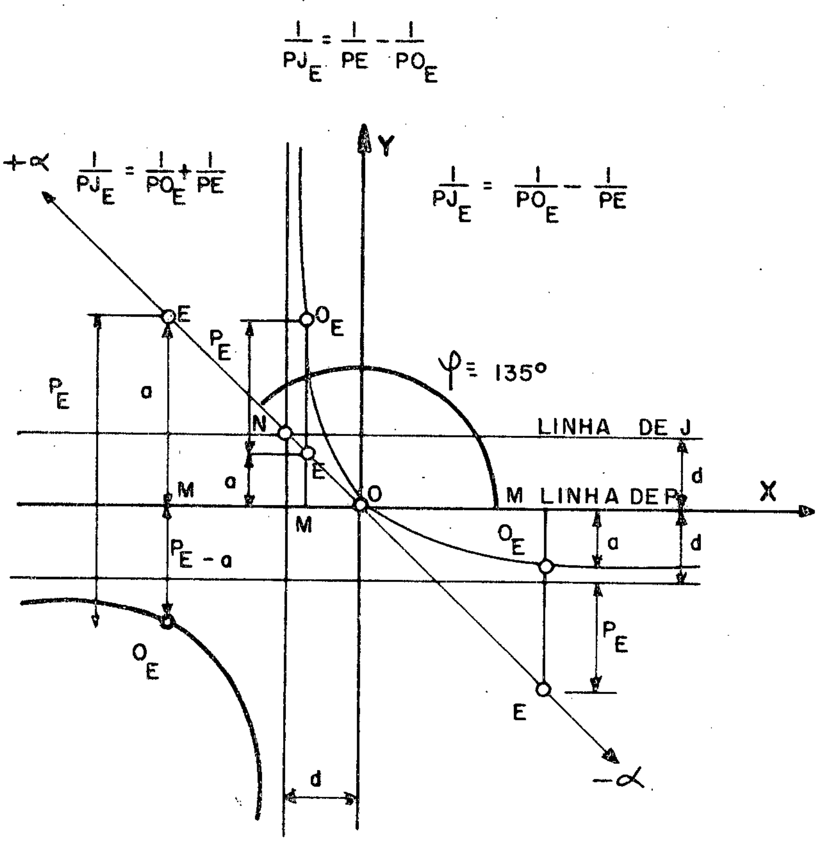


Fig. 7 - A hiperbole equilátera.

4. Se os pontos se encontram na tangente 't' do centro instantâneo P, então os centros de curvatura se encontram em P, conforme a figura 8.

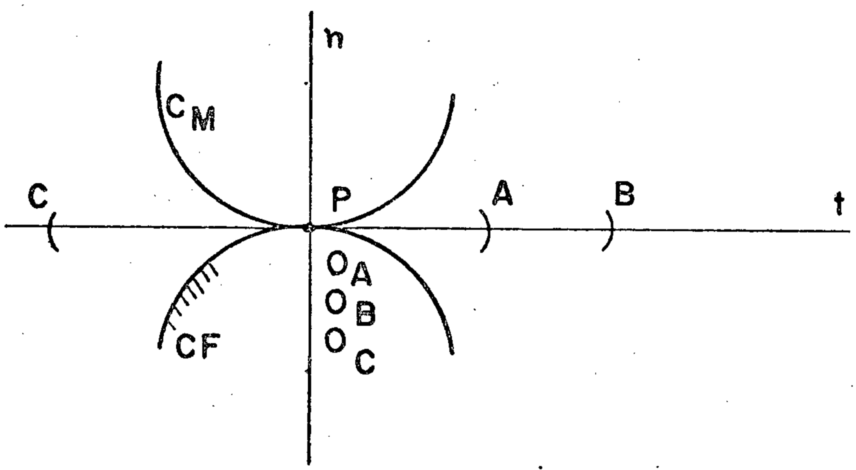


Fig. 8 - Os centros de curvatura no polo para os pontos sobre a tangente t.

As trajetórias descritas por P; tem raio de curvatura nulo, o que significa a formação de uma cúspide na trajetória gerada.

5. O lugar dos pontos do plano móvel cujas trajetórias tem o centro de curvatura do infinito é a cirdunferência de inflexão. O lugar de centros de curvatura, no plano fixo, que corresponde a pontos de distância infinita é a circunferência cuspidal, conforme a figura 9.

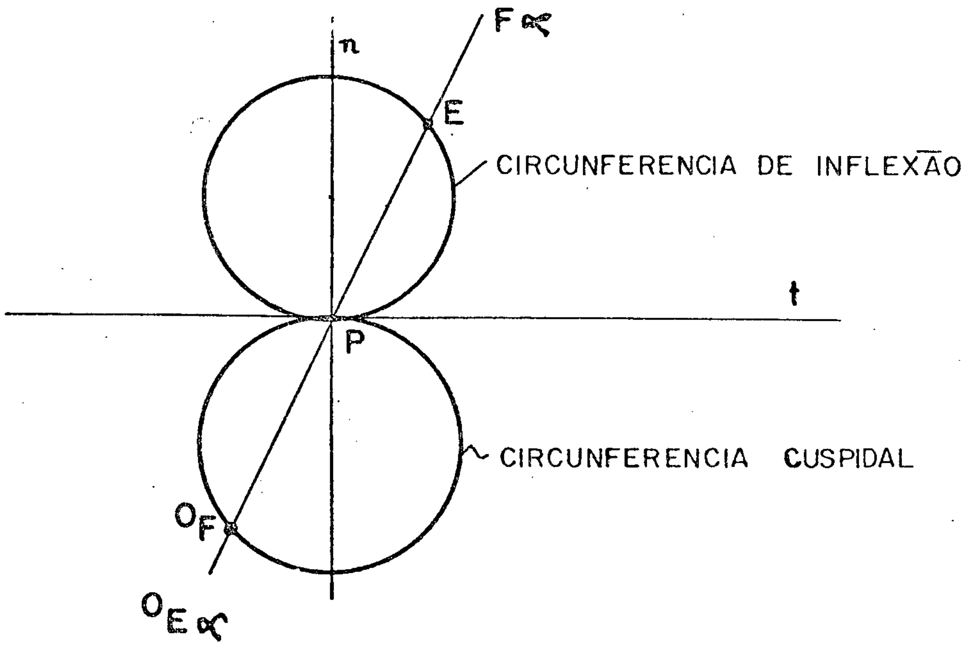


Fig. 9 - O ponto (E) e (F) de raios de curvatura infinitas e a circunferência cuspidal e de inflexão.

COMENTÁRIOS ÀS EQUAÇÕES DE EULER-SAVARY

A subrotina PISEP, para verificar se os pontos 'E' e 'F' satisfazem as equações de Euler-Savary, se vale da seguinte restrição:

"Os pontos 'O_E' e 'J_E' devem estar no mesmo lado de 'E', ou, de outra forma, os segmentos $\overline{EO_E}$ e $\overline{EJ_E}$ devem ter o mesmo sentido". Esta restrição é satisfeita para o ponto 'E' se forem obedecidas pelo menos uma das seguintes condições:

1. $TX_EJ_E > 0$

   $TX_EO_E > 0$

2. $TX_EJ_E < 0$

   $TX_EO_E < 0$

3. $TX_EJ_E = 0$

   $TX_EO_E > 0$

4. $TX_EJ_E = 0$

   $TX_EO_E < 0$

onde $TX_E J_E = X_E - XJ_E$

$TX_E O_E = X_E - XO_E$

Para isto, como os pontos E, O_E, J_E, são definidos em relação ao sistema de eixo UV eles sofrem uma transformação de coordenadas envolvendo rotação e translação, do sistema UV para o sistema de eixos XY, dada pela equação:

$$X_E = (U_E - U_{P_1}) \cos (GGAMA) + (V_E - V_{P_1}) . \text{sen } (GGAMA)$$

para o ponto 'E' é similarmente para O_E e J_E,

onde E (U_E, V_E)

P (U_{P_1}, V_{P_1})

Θ=GGAMA

onde: 'E' é o ponto analisado, (definido para 3PIS).

P é o polo origem do sistema XY, (definido em 2PIS).

Θ é o ângulo que o eixo dos x faz com o eixo dos U do sistema de eixos UV (definido em 3PIS).

"De modo semelhante deve ocorrer para o ponto 'F', para que o mesmo, satisfaça as equações de Euler-Savary.

APÊNDICE 4

TRANSFORMAÇÃO ENTRE DOIS SISTEMAS DE REFERÊNCIA

No sistema especial de referência é o movimento do polo P, que define (a,b) e a transformação dá-se em duas partes:

a) Uma rotação e translação para definir o polo P no sistema geral de referência UV. A rotação dos eixos de UV para os de XY é Θ. As coordenadas do polo P para as posições ℓ=0,1 no sistema UV são: definidas pelo par (U_{P_1}, V_{P_1}), que é mostrado na figura 1.

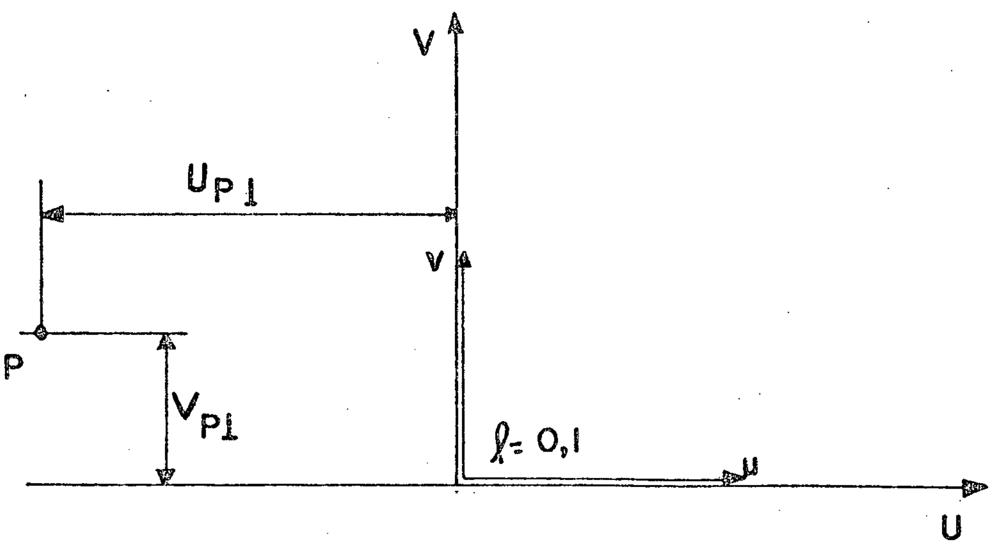


Fig. 1 - As coordenadas do polo P (U_{P1}, V_{P1}) no sistema geral de referência UV, na posição l = 0,1

b) Uma transformação de coordenadas do sistema geral de referência para o sistema especial de referência aplicada ao polo; de $P(U_{P_1}, V_{P_1})$ para $P(X,Y)$. Quando o plano móvel formado pelos eixos u e v se desloca da posição inicial finita $\ell=0$, para a posição enézima n=4 e sofre uma rotação finita γ_n o valor desta rotação finita γ_n é igual em ambos os sistemas e os eixos x e y sofrerão a mesma rotação, portanto $\gamma_n = \phi_n = \gamma_4$, assim quando o plano móvel vai a posição $\ell=4$ o polo como ponto deste plano móvel passa para cima nova posição ou seja, as coordenadas de P para $\ell=n=4$ no sistema fixo UV de referências serão dadas por:

$$U_{P_4} = U_{P_1} \times \cos\gamma_4 - V_{P_1} \operatorname{sen}\gamma_4 + \alpha_4$$

$$V_{P_4} = U_{P_1} \times \operatorname{sen}\gamma_4 + V_{P_1} \cos\gamma_4 \quad \beta_4$$

Na figura 2, vê-se este deslocamento do polo da posição (U_{P_1}, V_{P_1}) para a posição (U_{P_4}, V_{P_4}).

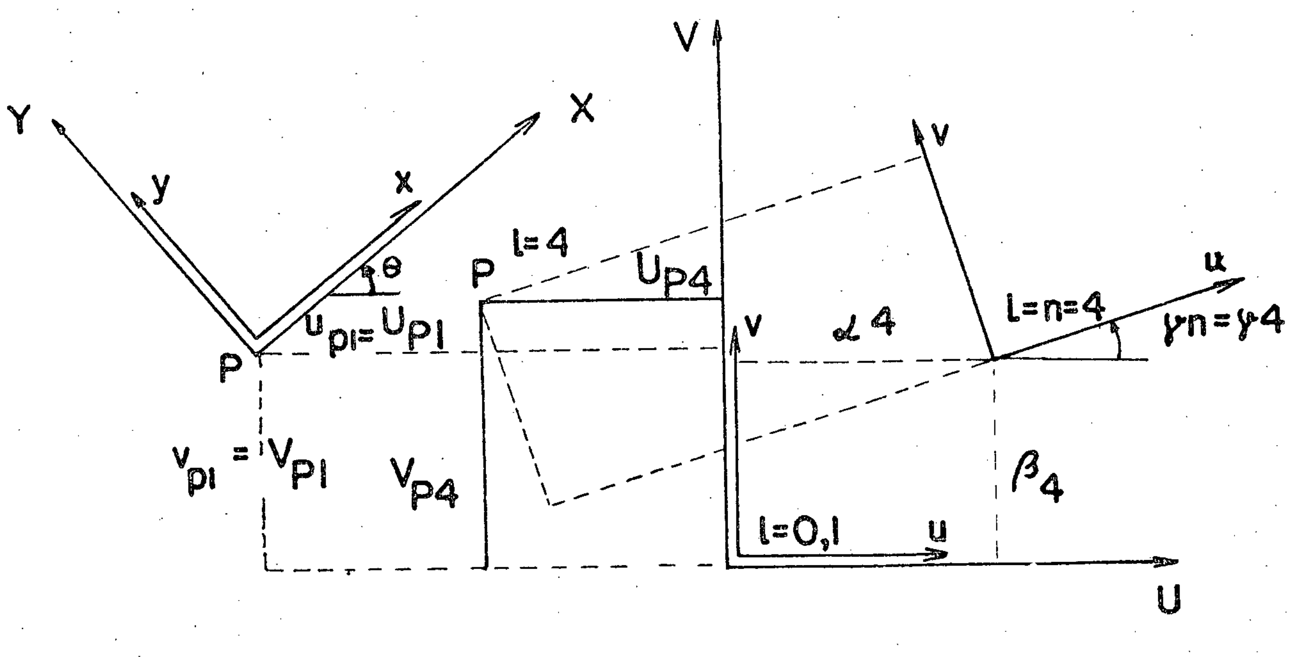


Fig.2 - Coordenadas do polo (P) no sistema UV na posição l = 4

A figura 3 apresenta geometricamente todos os elementos da equação das coordenadas do polo na posição $\ell=4$ em relação ao sistema UV.

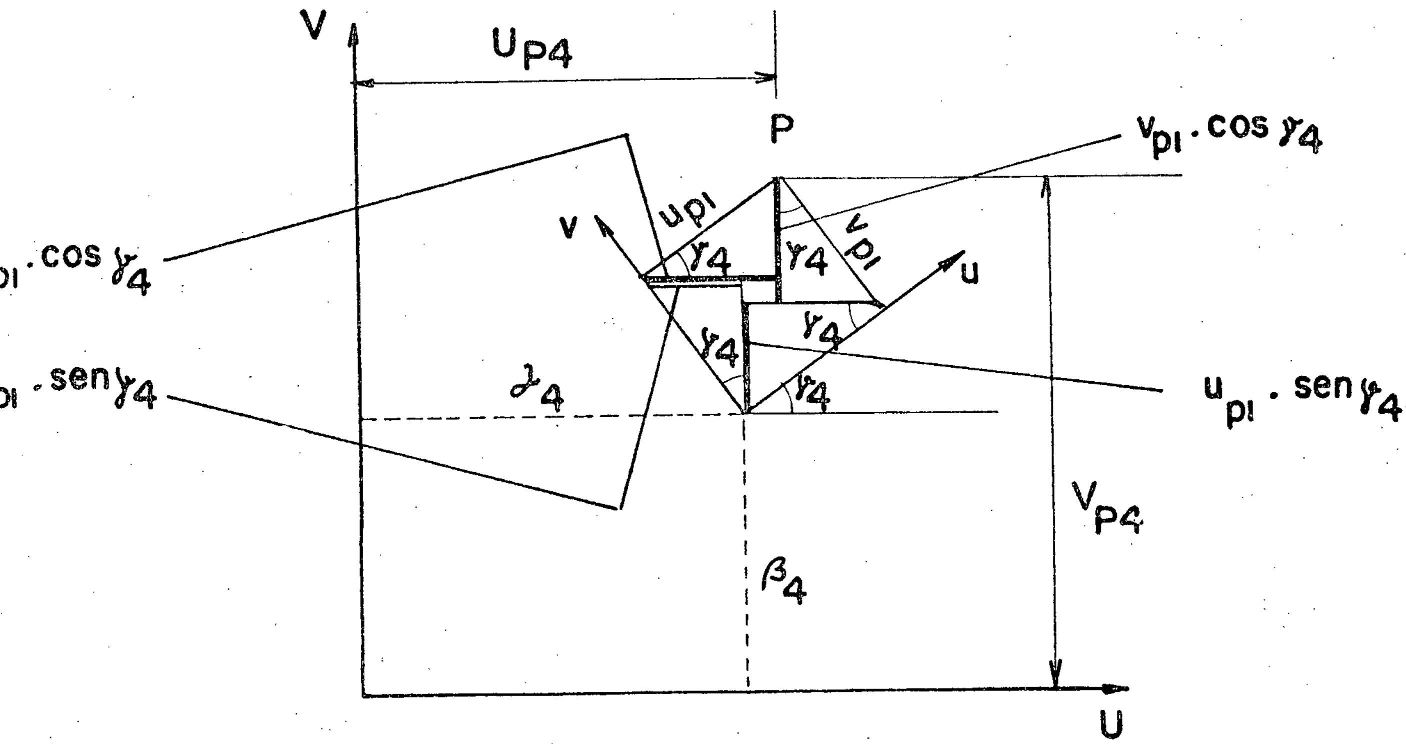


Fig. 3 - Demonstração geométrica das equações de α_4 e β_4.

As coordenadas do polo na posição $\ell=4$ no sistema XY são dadas por:

$$a_4 = (U_{P_4} - U_{P_1}) \cos\Theta + (V_{P_4} - V_{P_1}) \operatorname{sen}\Theta$$

$$b_4 = -(U_{P_4} - U_{P_1}) \operatorname{sen}\Theta + (V_{P_4} - V_{P_1}) \cos\Theta$$

Na figura 4 tem-se a transformação de coordenadas entre dois sistemas de referência (caso PPPP-P)

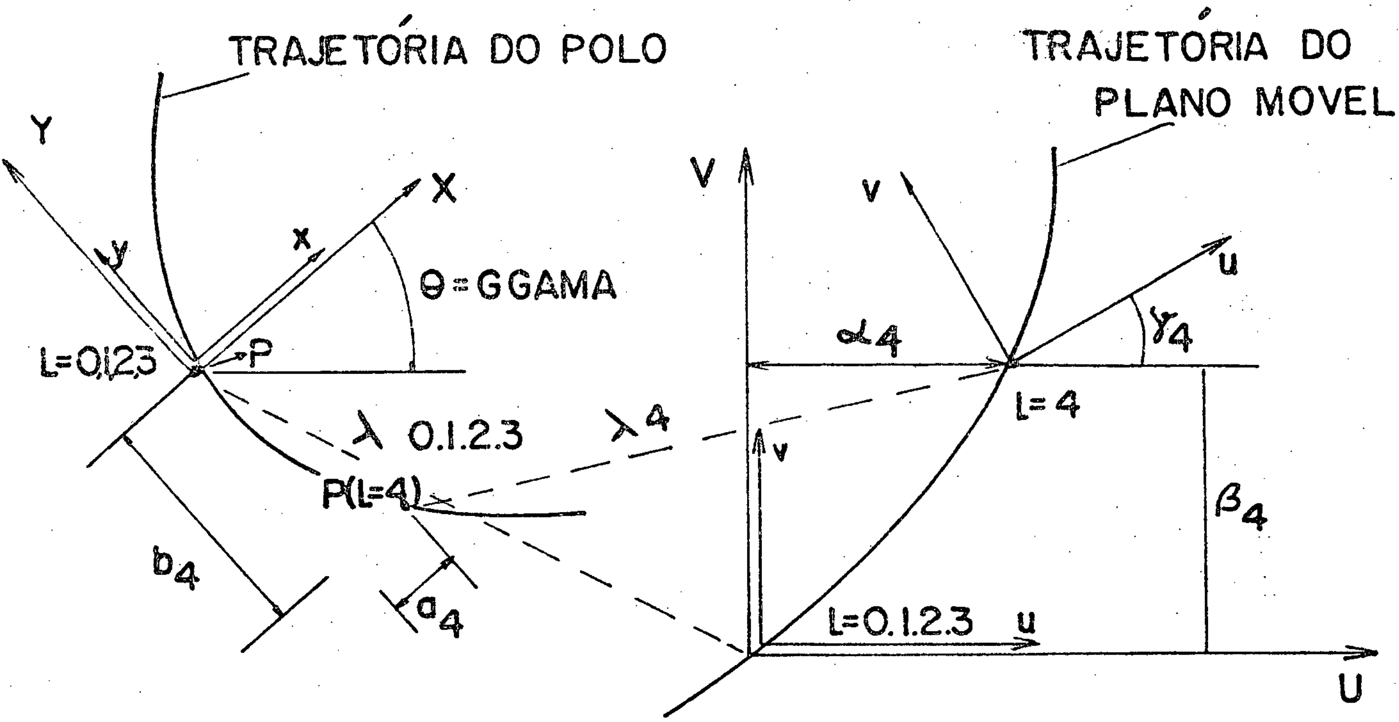


Fig. 4 - Transformação entre dois sistemas de referência (caso PPPP-P)

A figura 5 apresenta a demonstração geométrica das equações de a_4 e b_4 quando o polo se desloca para a posição $\ell=4$ como ponto do plano móvel x, y.

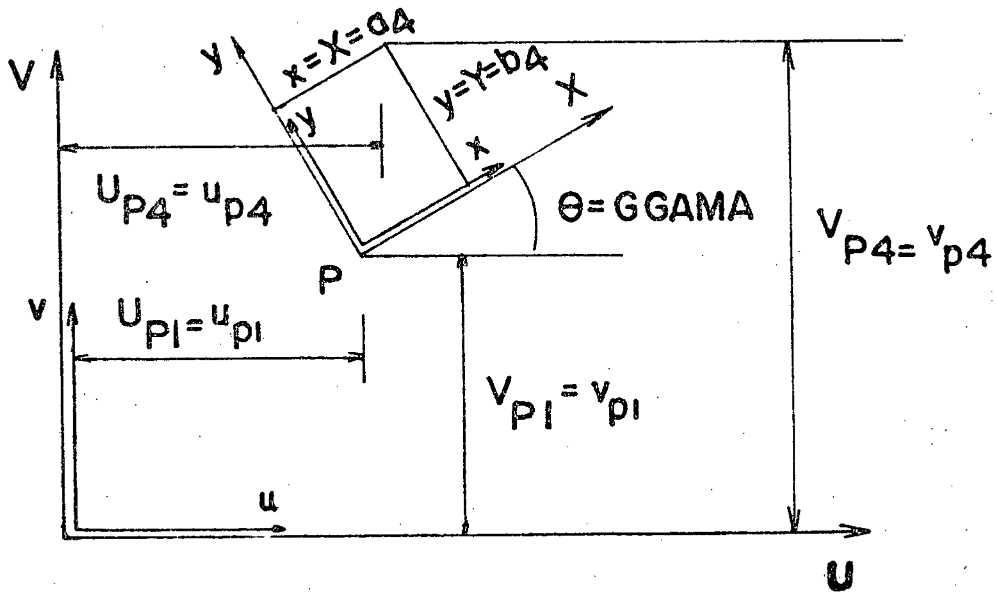


Fig. 5 - Demonstração geométrica das equações de a_4 e b_4

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - TESAR, D.; ESCHENBACH, P.W., "Four Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Engineering for Industry, maio, 1967, pp. 231-234.

2 - TESAR, D., "The Generalized Concept of Three Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Mechanisms, Vol. 2, 1967, pp. 461-474.

3 - TESAR, D., "The Generalized Concept of Four Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Mechanisms, Vol. 3, 1968, pp. 11-23.

4 - TESAR, D.; SPARKS, J.W., "The Generalized Concept of Five Multiply Separated Positions in Coplanar Motion", Journal of Mechanisms, Vol. 3, 1968, pp. 25-33.

5 - TESAR, D.; SPARKS, J.W.; WALTERS, W.T., "Multiply Separated Position Synthesis", publicação da ASME, Conferência de Mecanismos de Atlanta, Gainesville, Flórida, outubro,1968.

6 - ZANINI, J.C., "Investigation of Methods of Linkage Synthesis", tese de doutoramento, Victoria University of Manchester, junho, 1975.

7 - TESAR, D.; DOWLER, H.J.; DUFFY, J., "A Generalized Study of Three Multiply Separated Positions in Spherical Kinematics", Mechanism and Machine Theory, Vol. 11, 1976, pp. 395-410.

8 - TESAR, D.; DOWLER, H.J.; DUFFY, J., "A Generalized Study of Four and Five Multiply Separated Positions in Spherical Kinematics - II", Mechanism and Machine Theory, Vol. 13, 1978, pp. 409-435.

9 - RISO, B.G., "Síntese de Mecanismos com a Utilização da Teoria das Posições Multiplamente Separadas", tese de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, fevereiro, 1980.