

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS INCERTOS
USANDO A TEORIA DO CONTORNO FINAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MES
TRE EM ENGENHARIA.

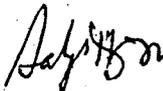
Antonio Augusto Rodrigues Coelho

Florianópolis, Março - 1983.

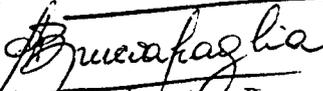
CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS INCERTOS USANDO A TEORIA DO CON
TORNO FINAL

Antonio Augusto Rodrigues Coelho

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM ENGENHARIA - ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA E APROVADA EM
SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.



Prof. Sahjendra Narain Singh, Ph.D.
Orientador



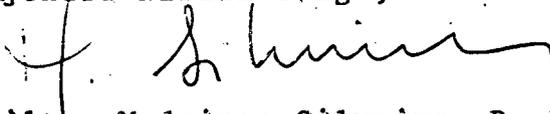
Prof. Augusto Humberto Bruciapaglia, Dr. Ing.
Coordenador do Curso de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA

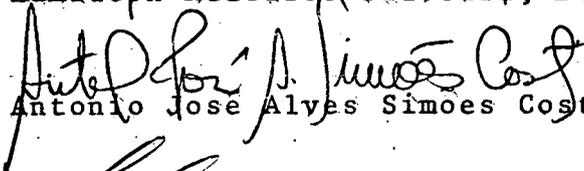
DOS PROFESSORES:



Prof. Sahjendra Narain Singh, Ph.D.



Prof. Hamilton Medeiros Silveira, D. Et.



Prof. Antonio Jose Alves Simoes Costa, Ph.D.



Prof. Liu Hsu, D. Sc.

À minha família

Aos amigos Hahn.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Sahjendra N. Singh pela orientação durante a realização deste trabalho, ao corpo docente e aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina pela ampla e constante colaboração.

À Luiz Pereira e Vilson Wronski pelo apoio computacional.

À Emília e Airton Silva pela parte de datilografia.

À Antônio da Silva Neto pelos desenhos.

Ao CNPq e UFPA pelo apoio financeiro.

R E S U M O

Usando a teoria do contorno final, um controlador não-linear para sistemas dinâmicos incertos é apresentado. O controle de realimentação garante que cada resposta seja contornada finalmente em uma pequena vizinhança de um estado desejável. Os parâmetros incertos e entradas exteriores incertas são variantes no tempo e seus valores devem variar dentro de conjuntos conhecidos.

Foi desenvolvido uma condição suficiente para existência de uma transformação de estados para transformar uma classe de sistemas não-projetáveis em sistemas projetáveis. Aplicado aos sistemas de potência e helicóptero, esta transformação foi possível somente no primeiro, e portanto, neste caso não existe diminuição na faixa de variação permitida aos parâmetros incertos.

Devido à necessidade em obter um novo ponto de operação com um pequeno erro em regime permanente e acoplamento entre as variáveis, foi desenvolvido uma nova lei de controle, sendo esta mais geral do que a estabelecida por Leitmann. Isto foi demonstrado pelo projeto do controlador e simulação digital para o sistema do helicóptero (VTOL="vertical takeoff and landing") e sistema de potência.

A B S T R A C T

Using the theory of ultimate boundness, a nonlinear controller for uncertain dynamical systems is presented. The feedback control guarantees that every system response is ultimately bounded in a small neighborhood of the desirable state. The uncertain parameters and uncertain external inputs are time-varying and their values range in known bounded sets.

A sufficient condition was developed for the existence of a state transformation to transform a class of mismatched systems into matched systems. This approach was applied to a power system and a helicopter system. However, this transformation was possible only for the power system, and thus, in this case, it was not required to reduce the range of permissible variations of uncertain parameters.

In order to get a new point of operation with a small steady state error and coupling between the variables, a new control law, more general than those established by Leitmann, was developed. This was demonstrated by design of controller and digital simulation for the helicopter system and the power system.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	1
------------------	---

CAPÍTULO 2

TEORIA DO CONTROLE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS PARA OBTENÇÃO DO CONTORNO FINAL.....	6
2.1. Introdução.....	6
2.2. O Sistema, Suposições e Definições	6
2.3. Controle Não-Linear sujeito a Matrizes Inteiramente Proj _{et} áveis	9
2.4. O Controle Não-Linear sujeito a Matrizes Decomponível em Partes Proj _{et} áveis e Não-Proj _{et} áveis	15

CAPÍTULO 3

TEORIA DA TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-PROJETÁVEIS EM SISTEMAS PROJ _{et} ÁVEIS.	22
3.1. Introdução	22
3.2. Transformação de um Sistema Não-Proj _{et} ável	22
3.3. Exemplo de Aplicação	30

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES DO CONTROLE NÃO-LINEAR	35
4.1. Introdução	35
4.2. O Controle Não-Linear Aplicado ao Sistema Helicóptero ..	35
4.2.1. Limites sobre os Parâmetros para o Controle Não Linear e Controle Linear	46

4.2.2. Resultados da Simulação para o Helicóptero	47
4.3. O Controle Não-Linear Aplicado ao Sistema de Potência..	50
4.3.1. Resultados da Simulação para o Sistema de Potência	66

CAPÍTULO 5

O NOVO CONTROLE NÃO-LINEAR PARA O CONTROLE DO PONTO DE AJUSTE NÃO-NULO	70
5.1. Introdução	70
5.2. O Controle do Ponto de Ajuste Não-Nulo em Sistemas Dinâmicos Incertos Projetáveis	70
5.3. O Controle do Ponto de Ajuste Não-Nulo em Sistemas Dinâmicos Incertos Não-Projetáveis	79

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES DO NOVO CONTROLE NÃO-LINEAR PARA OBTENÇÃO DO PONTO DE AJUSTE NÃO-NULO	84
6.1. Introdução	84
6.2. O Controle do Ponto de Ajuste Não-Nulo para o Modelo do Helicóptero	84
6.2.1. Cálculo da Faixa dos Parâmetros Usando o Controle Linear	87
6.2.2. Resultados da Simulação para o modelo do Helicóptero Usando o Novo Controle Não-Linear	88
6.3. O Controle do Ponto de Ajuste Não-Nulo para o Sistema de Potência	92

6.3.1. Resultados da Simulação para o Sistema de Potência Usando o Novo Controle Não-Linear.....	93
--------------------------------------------------------------------------------------------------	----

CAPÍTULO 7

COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E INDICAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.	97
7.1. Comentários e Conclusões	97
7.2. Indicações para Futuros Trabalhos	99

APÊNDICE I

O MÉTODO DE LYAPUNOV PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE	101
----------------------------------------------------------	-----

APÊNDICE II

EQUAÇÕES DE ESTADO NÃO-LINEARES E SUA LINEARIZAÇÃO	104
----------------------------------------------------------	-----

APÊNDICE III

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCONSISTENTES	110
------------------------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112
----------------------------------	-----

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em geral, a descrição matemática é somente uma aproximação de um sistema físico real e trata com parâmetros fixos. Usualmente, estes parâmetros não são exatamente conhecidos devido a imperfeita identificação ou medida, ou porque os métodos de medida são também dispendiosos. É também possível que alguns parâmetros sejam função do tempo, que troquem seus valores durante o funcionamento, mudando portanto a dinâmica do sistema.

Nos últimos anos, algumas novas abordagens têm sido desenvolvidas para controlar sistemas dinâmicos incertos, ou seja, sistemas que contêm elementos incertos e estão sujeitos a entradas incertas, veja [3], [4], [11], [12], [13] e [19].

De forma diferente da teoria de controle estocástico, conforme [2], em que propriedades estatísticas das quantidades incertas são assumidas serem conhecidas, um tratamento determinístico é apresentado. Assume-se que as quantidades incertas são funções contínuas por partes, cujos valores devem variar em conjuntos compactos e somente os limites de variação das quantidades incertas são conhecidos. Com este conhecimento, projeta-se um controle de realimentação de estados estimados ou medidos, que garanta que a resposta do sistema entre e permaneça dentro de uma certa vizinhança particular de estado zero, após um intervalo de tempo finito (limitada uniformemente e limitada ultimamente) ou seja, pretende-se ter um controle que assegure um desejado comportamento, não importando quais valores estão os parâmetros incertos assumindo.

A análise está restrita a sistemas em que os correspondentes sistemas nominais são lineares e invariantes no tempo. Para tais sistemas, o controle de realimentação proposto está dividido em uma parte linear e uma parte não-linear. A parte linear é usada para estabilizar o sistema nominal e para obter um comportamento transitório desejado. O projeto é baseado sobre o sistema nominal, e utiliza a teoria de controle ótimo linear (formalismo de Riccati). Por outro lado, a parte não-linear é projetada para ir contra as incertezas. É uma função não-linear de um estado estimado ou medido. Este controle é deduzido pela construção da função de Lyapunov para o sistema incerto.

Antes de aplicar o controle, faz-se necessário conhecer se o sistema em estudo satisfaz ou não as condições projetáveis a serem oportunamente definidas; em caso negativo deve-se calcular um valor não-projetável \tilde{M} e que não deva exceder o valor limiar não-projetável M^* pois, se isto acontecer, existirá uma diminuição na faixa de variação permitida aos elementos incertos. Este problema deixará de existir caso o sistema satisfaça às condições projetáveis. Muitas vezes, como alternativa, torna-se possível passar de um sistema não-projetável a um sistema projetável através de uma mudança dos estados. Para isto, deve-se ter conhecimento dos novos estados escolhidos, como também dispor de suas medidas, e assim o problema de diminuição da faixa deixará de existir. As etapas corretas para o projeto do controle de realimentação de estados pode ser idealizadas através da figura 1.1.

Para estudar a eficiência deste controle, usou-se inicialmente o modelo do helicóptero baseado nas referências [8], [14] e [18], onde rápidas manobras sobre o aparelho foram efetuadas ou seja, a suposição de pequena variação sobre os parâmetros não

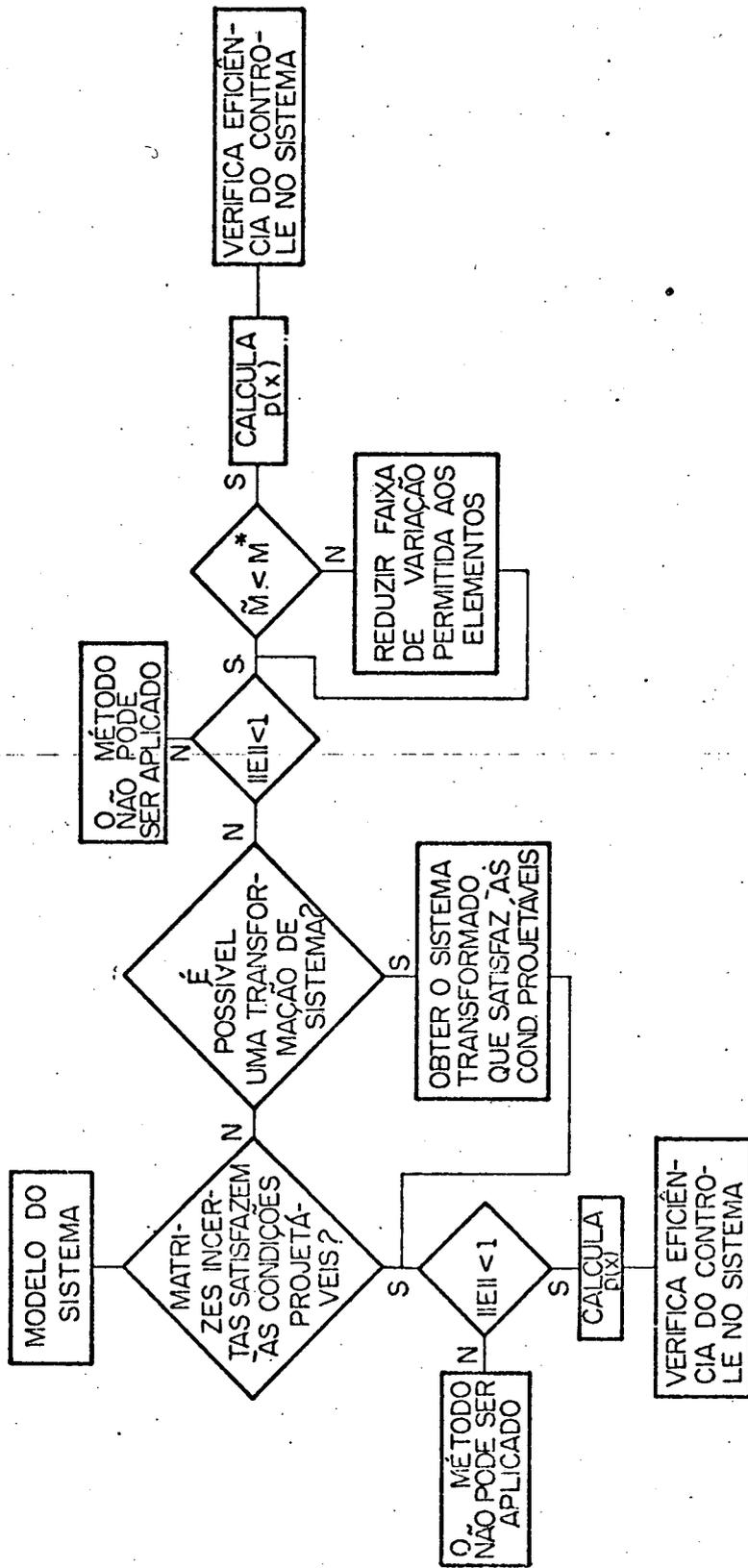


FIGURA 1.1 - Diagrama de fluxo mostrando a abordagem para o controle de sistemas

com incertezas onde

- E - vetor erro projetável
- \tilde{M} - valor não-projetável
- M^* - valor limiar não-projetável
- $p(x)$ - controle

foi considerado conforme referências anteriormente citadas. Notou-se que este modelo não satisfaz às condições projetáveis. De pois, aplicou-se o controle ao modelo de uma máquina síncrona ligada a um barramento infinito conforme [1] e [17], e ainda considerou-se variação na demanda de carga como também os parâmetros do sistema são desconhecidos (incertos). É visto que uma nova representação para o sistema de potência pode ser encontrada que satisfaça às condições projetáveis. Em ambos os modelos, os resultados obtidos referentes à estabilização (dada uma condição inicial, saber de que maneira o sistema retorna ao ponto de equilíbrio) foram bons. Alguma dificuldade surge quando diretamente tenta-se aplicar os resultados existentes para o controle (rastreamento) destes sistemas incertos. Para contornar este problema, uma mudança de variável de estados dada por $z = x - \alpha$ foi efetuado, onde α é o ponto de ajuste e será facilmente obtido no novo espaço de estado; desta maneira, generalizou-se o controle estabelecido conforme [3] e [13] e assim o novo controle $u = Kz + p(z) - L\alpha$ aplicado ao sistema proporcionará estabilização como também obterá um novo ponto de operação em vizinhanças próximas estabelecidas pelos elipsóides de Lyapunov. Os programas utilizados nas simulações encontram-se em disponibilidade na biblioteca de programas da UFSC e não serão apresentados. Os gráficos relacionados com a aplicação dos controles apresentam curvas cheias (não pontilhadas) e curvas pontilhadas referentes ao uso do controle não-linear e controle linear, respectivamente.

A organização deste trabalho é mostrada a seguir.

O capítulo 2 apresenta o projeto para obtenção do controle de realimentação de estados baseado na teoria do contorno final, quando o sistema satisfaz ou não às condições projetáveis.

veis.

A transformação de estados para obtenção de um sistema projetável a partir de um sistema não-projetável é apresentada no capítulo 3.

No capítulo 4, apresenta-se a aplicação do controle nos sistemas helicóptero e máquina síncrona ligada a um barramento infinito através de uma linha de transmissão com os seus respectivos resultados de simulação.

A teoria da nova lei de controle para o controle do ponto de ajuste não nulo, tanto a sistemas que satisfaçam as condições projetáveis como os que não satisfazem é encontrada no capítulo 5.

Os resultados da simulação para o controle do ponto de ajuste não nulo nos dois sistemas anteriormente citados, são vistos no capítulo 6.

O capítulo 7 apresenta comentários, conclusões e indicações para futuros trabalhos.

Alguns conceitos de estabilidade e definição de estado de equilíbrio se encontram no apêndice I.

O apêndice II mostra o processo de linearização das equações de estado não-lineares do sistema de potência.

E finalmente, o apêndice III apresenta a solução de equações inconsistentes (mínimos quadrados) usada ao aplicar o controle não-linear no modelo do helicóptero.

CAPÍTULO 2

TEORIA DO CONTROLE DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS PARA OBTENÇÃO DO CONTORNO FINAL

2.1. Introdução

Neste capítulo, considera-se um sistema dinâmico contendo elementos incertos e sujeito a entradas incertas. As únicas informações concernentes a estas incertezas são os conjuntos compactos dentro dos quais elas podem variar. Com este conhecimento, é requerido o projeto de um controle de realimentação de estados que garanta cada resposta do sistema seja limitada ultimamente e uniformemente dentro de uma certa vizinhança de estado zero em um intervalo de tempo finito.

A seguir, mostra-se o projeto de construção do controle em sistemas que contêm as matrizes incertas projetáveis, como também quando estas matrizes incertas são não-projetáveis. Antes, porém, algumas definições e suposições são apresentadas.

2.2. O Sistema, Suposições e Definições

Considere o sistema dinâmico descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A + \Delta A(r(t))] x(t) + [B + \Delta B(s(t))] u(t) + Cv(t) \\ x(t_0) &= x_0, \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $x(t) \in R^n$ é o estado, $u(t) \in R^m$ é a entrada, $v(t) \in R^l$ é a perturbação e A, B, C são matrizes nominais do sistema de dimensões $(n \times n)$, $(n \times m)$ e $(n \times l)$ respectivamente. Finalmente $\Delta A(r(t))$ e $\Delta B(s(t))$ são matrizes que representam incertezas na matriz do sistema e incertezas na matriz de entrada de dimensões $(n \times n)$ e $(n \times m)$.

Faz-se necessário as seguintes suposições:

(i) $\Delta A(r)$ e $\Delta B(s)$ são contínuas em R^p e R^q respectivamente.

(ii) os parâmetros incertos

$$r(t) : R^1 \rightarrow \hat{R} \subset R^p$$

$$s(t) : R^1 \rightarrow \hat{S} \subset R^q$$

$$v(t) : R^1 \rightarrow V \subset R^l$$

são funções contínuas por partes, onde \hat{R}, \hat{S} e V são conjuntos compactos de dimensões apropriados.

(iii) o par (A, B) é controlável (ou seja, a matriz $\begin{bmatrix} B & AB \dots \\ A^{n-1}B \end{bmatrix}$ deve possuir colunas linearmente independentes).

Duas definições são importantes:

(i) Dada uma solução $x(t) : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $x(t_0) = x_0$, de (2.1) diz-se que $x(t)$ é limitada uniformemente se existe uma constante positiva $d(x_0) < \infty$ possivelmente dependente de x_0 mas não de t_0 , de modo que

$$\|x(t)\| \leq d(x_0) \text{ para todo } t \in [t_0, t_1].$$

(ii) Dada uma solução $x(t) : [t_0, \infty) \rightarrow R^n$, $x(t_0) = x_0$, de (2.1), diz-se que é limitada ultimamente e uniformemente com respeito a um conjunto S , se existe uma constante não-negativa $T(x_0, S) < \infty$, possivelmente dependente de x_0 e S , e não de t_0 , de modo que

$$x(t) \in S \text{ para todo } t \geq t_0 + T(x_0, S)$$

Aqui, $\|x(t)\|$ denotará norma Euclidiana e dada por

$$(x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t))^{1/2}$$

Seja o seguinte lemma:

LEMMA 2.1.

Se A é uma matriz real $n \times m$, então $\|A\| = \|A^T\|$ e ambas iguais a raiz quadrada do máximo autovalor de $A^T A$ que torna igual a raiz quadrada do máximo autovalor de AA^T .

Isto é conhecido como norma induzida pela norma euclidiana, e suas propriedades básicas são dadas pelo seguinte teorema:

TEOREMA 2.1.

Se A e B são matrizes reais, então

(i) $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e somente se $A = 0$

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ (2.2)

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

(v) $\|A^T\| = \|A\|$

desde que as dimensões de A e B são tais, que as operações indicadas tem sentido (as provas do lemma e teorema são dadas em Brockett [5]).

A transposta de um vetor ou de uma matriz está indicado por $(\cdot)^T$. O mínimo (máximo) autovalor de uma matriz M está denotado por $\lambda_{\min}(M)$ [$\lambda_{\max}(M)$].

A seguir, resolve-se o problema de construção de um controle de realimentação de estados que assegure que cada solução de (2.1) seja limitada uniformemente e limitada ultimamente com respeito a um conjunto S a ser especificado. Para efeito de simplicidade, algumas vezes usa-se a seguinte notação:

$$x(t) = x, u(t) = u, v(t) = v, r(t) = r, s(t) = s, \rho_V(x(t)) = \rho_V(x), \\ p(x(t)) = p(x).$$

2.3. Controle Não-Linear sujeito a Matrizes Inteiramente Projetáveis

Uma suposição adicional referida à parte projetável faz-se necessário, ou seja: existem funções matriciais (de dimensões apropriadas) $D(r)$ contínuas sobre R^p , $E(s)$ contínuas sobre R^q e matriz constante F , de modo que

$$\begin{cases} \Delta A(r) = BD(r) & \text{para todo } r \in \tilde{R} \\ \Delta B(s) = BE(s) & \text{para todo } s \in \tilde{S} \\ C = BF \end{cases} \quad (2.3)$$

onde (2.3) será identificado como sendo as condições projetáveis.

Por motivo de generalidade, supor que A de (2.1) é instável. Em vista da suposição (iii), existe uma matriz constante K ($m \times n$) tal que $\bar{A} = A + BK$ seja estável, isto é, todos os autovalores de \bar{A} tem parte real negativa, conforme Kuo [10].

Agora considerar o controle

$$u = Kx + p(x) \quad \text{para todo } x \in R^n \quad (2.4)$$

sendo a função $p(x) : R^n \rightarrow R^m$ tal que

$$p(x) = \begin{cases} - \frac{(B^T P x)}{\|B^T P x\|} \rho_V(x), & \text{se } \|B^T P x\| > \epsilon \\ - \frac{(B^T P x)}{\epsilon} \rho_V(x), & \text{se } \|B^T P x\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (2.5)$$

onde ϵ é constante positiva escolhida pelo projetista, P é a solução da equação de Lyapunov (ver apêndice I)

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} = -Q \quad (2.6)$$

para uma dada matriz Q definida positiva e a função $\rho_V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ descrita em detalhes subseqüentemente. Antes de especificar $\rho_V(x)$, bem como introduzir algumas outras quantidades, reescreve-se a equação (2.1) com o controle u dado por (2.4) de modo que

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A(r))x + (B + \Delta B(s)) (Kx + p(x)) + Cv \\ \dot{x} &= Ax + \Delta A(r)x + BKx + Bp(x) + \Delta B(s)Kx + \Delta B(s)p(x) + Cv \\ \dot{x} &= (A + BK)x + Bp(x) + \Delta A(r)x + \Delta B(s)Kx + \Delta B(s)p(x) + Cv\end{aligned}$$

de (2.3) e (2.6) encontra-se

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + Bp(x) + BD(r)x + BE(s)Kx + BE(s)p(x) + BFv \\ \dot{x} &= \bar{A}x + Bp(x) + Be(x,t)\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde

$$e(x,t) \triangleq D(r)x + E(s)Kx + E(s)p(x) + Fv \quad (2.8)$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. Logo a norma da equação (2.8) será:

$$\begin{aligned}\|e(x,t)\| \leq \max_{r \in \hat{R}} \|D(r)x\| + \max_{s \in \hat{S}} \|E(s)Kx\| + \max_{s \in \hat{S}} \|E(s)\| \rho_V(x) + \\ \max_{v \in V} \|Fv\| \triangleq \rho_V(x)\end{aligned}\quad (2.9)$$

A definição de $\rho_V(x)$ em (2.9) é válido se

$$1 - \max_{s \in \hat{S}} \|E(s)\| > 0 \quad (2.10)$$

Desde que a condição (2.10) seja satisfeita, define-se $\rho_V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\begin{aligned}\rho_V(x) = [1 - \max_{s \in \hat{S}} \|E\|]^{-1} [\max_{r \in \hat{R}} \|D(r)\| \|x\| + \max_{s \in \hat{S}} \|E(s)K\| \|x\| + \\ + \max_{v \in V} \|Fv\|]\end{aligned}\quad (2.11)$$

$$\rho_V(x) \triangleq a + b \|x\| \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \left[1 - \max_{s \in \hat{S}} \|E\| \right]^{-1} \left[\max_{v \in V} \|Fv\| \right] \\ b &= \left[1 - \max_{s \in \hat{S}} \|E\| \right]^{-1} \left[\max_{r \in \hat{R}} \|D(r)\| + \max_{s \in \hat{S}} \|E(s)K\| \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para construir o conjunto limitado ultimamente S, escolhe-se uma candidata função de Lyapunov (conforme [9]) onde $P > 0$, e a função $V(x): R^n \rightarrow R$ é dada por

$$V(x) = x^T P x \quad (2.14)$$

No intuito de mostrar que $V(x)$ é sem dúvida uma função de Lyapunov, com controle dado em (2.4) e possíveis incertezas, considere a derivada de $V(x)$ onde, utilizando-se o sistema equivalente (2.7) tem-se para todo $(x, t) \in R^n \times R^1$

$$L(x, t) \triangleq \text{grad } V(x) \left[\bar{A}x + B p(x) + B e(x, t) \right] \quad (2.15)$$

Com as equações (2.6) e (2.9) obtém-se

$$L(x, t) = -x^T Q x + 2 x^T P B \left[p(x) + e(x, t) \right]$$

$$L(x, t) = -x^T Q x + 2 (B^T P x)^T \left[p(x) + e(x, t) \right]$$

$$L(x, t) \leq -x^T Q x + 2 (B^T P x)^T \left[p(x) + \frac{B^T P x}{\|B^T P x\|} \rho_V(x) \right] \quad (2.16)$$

Como consequência de (2.5), o segundo termo do lado direito de (2.16) desaparece para $\|B^T P x\| > \epsilon$; se $\|B^T P x\| \leq \epsilon$ seu valor é

$$2 (B^T P x)^T \left[\frac{-(B^T P x)}{\epsilon} \rho_V(x) + \frac{(B^T P x)}{\|B^T P x\|} \rho_V(x) \right]$$

fazendo $\theta = \|B^T P x\|$

$$- 2 \frac{\theta^2}{\epsilon} \rho_V(x) + 2 \theta \rho_V(x) \quad (2.17)$$

para se encontrar o máximo de (2.17.), derivar em relação a θ

$$- 4 \frac{\theta}{\epsilon} \rho_V(x) + 2 \rho_V(x) = 0$$

$$\theta = \epsilon/2 ; \text{ logo } \|B^T P x\| = \epsilon/2 \quad (2.18)$$

Com (2.18) resulta

$$L(x,t) \leq -x^T Q x + (\epsilon/2) \rho_V(x)$$

Para obter o contorno final

$$L(x,t) < 0 \quad (2.19)$$

para todo $t \in R^1$ e todo x de modo que

$$x^T Q x - (\epsilon/2) \rho_V(x) > 0$$

Entretanto

$$\lambda_{\min}^{(Q)} \|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{\max}^{(Q)} \|x\|^2$$

A condição (2.19) é encontrada para todo $t \in R^1$ e todo x , de modo que

$$\lambda_{\min}^{(Q)} \|x\|^2 - (\epsilon/2) \rho_V(x) > 0 \quad (2.20)$$

Com (2.12) tem-se de (2.20) que

$$\lambda_{\min}^{(Q)} \|x\|^2 - (\epsilon/2)b \|x\| - (\epsilon/2)a > 0$$

$$\|x\| = \frac{(\epsilon/2)b + \sqrt{(\epsilon/2)^2 b^2 + 4 (\epsilon/2)a \lambda_{\min}^{(Q)}}}{2 \lambda_{\min}^{(Q)}}$$

$$\|x\| = \frac{\epsilon}{4 \lambda_{\min}^{(Q)}} b + \left[\left[\frac{\epsilon}{4 \lambda_{\min}^{(Q)}} \right]^2 b^2 + \frac{\epsilon}{2 \lambda_{\min}^{(Q)}} a \right]^{1/2} \triangleq \eta \quad (2.21)$$

Conseqüentemente, a condição (2.19) é assegurada para todo $t \in \mathbb{R}^1$ e todo $x \in B(\eta)$, onde $B(\eta)$ é uma bola fechada centrada em $x = 0$ e com raio dado por (2.21).

Define-se uma família de elipsóides

$$X(k) \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n / x^T P x \leq k = \text{constante} > 0 \} \quad (2.22)$$

onde / significa tal que, e considere

$$\underline{k} \triangleq \min \{ k / X(k) \supseteq B(\eta) \} \quad (2.23)$$

de maneira que $X(\underline{k})$ é o menor elipsóide contendo $B(\eta)$, logo

$$\underline{k} \triangleq \lambda_{\max}(P) \eta^2 \quad (2.24)$$

Sejam todos os elipsóides

$$\begin{cases} X(\bar{k}) & \text{com } \bar{k} > \underline{k}, \text{ e} \\ X(k_0) & \text{com } k_0 = x_0^T P x_0 \end{cases}$$

como é mostrado na figura 2.1.a) para $x_0 \notin X(\bar{k})$ e $x_0 \in X(\bar{k})$ na figura 2.1.b)

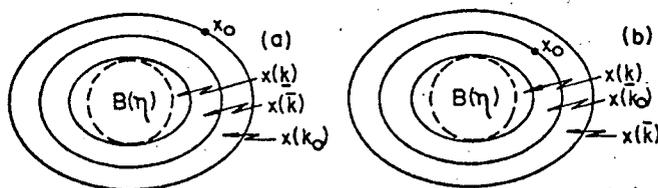


FIGURA 2.1-Elipsóides de Lyapunov.

Se $x_0 \notin X(\bar{k})$ então defina

$$C_0(x_0, \bar{k}) \triangleq \min \{x^T Q x - (\epsilon/2) \rho_V(x) / x \in X(k_0) \setminus X(\bar{k})\} \quad (2.24a)$$

(taxa de decrescimento de energia)

onde $X^0(\cdot)$ denota o interior do conjunto $X(\cdot)$.

TEOREMA 2.2.

Considere o sistema (2.1) com controle (2.4) satisfazendo as suposições (i), (ii), (iii) e (2.10). Então, para cada condição inicial $(x_0, t_0) \in R^n \times R^1$ existe uma solução de (2.1) que pode ser estendida sobre $[t_0, \infty)$. Além do mais, dado um $Q > 0$ e um $\bar{k} > \underline{k}$, onde \underline{k} é dado por (2.24), uma solução correspondente a condição inicial (x_0, t_0) é limitada uniformemente com

$$d(x_0) = \begin{cases} \|x_0\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} & \text{para } x_0 \notin X(\bar{k}) \\ \sqrt{\frac{\bar{k}}{\lambda_{\min}(P)}} & \text{para } x_0 \in X(\bar{k}) \end{cases}$$

e é limitada ultimamente e uniformemente com respeito a $X(\bar{k})$, onde $X(\bar{k})$ é dado por (2.22) e

$$T(x_0, X(\bar{k})) = \begin{cases} \frac{k_0 - \bar{k}}{C_0} & \text{para } x_0 \notin X(\bar{k}) \\ 0 & \text{para } x_0 \in X(\bar{k}) \end{cases}$$

com C_0 dado por (2.24a).

A demonstração deste teorema pode ser vista em [13]. Com isto, garante-se que cada solução de (2.1) seja limitada ultimamente e uniformemente dentro de uma certa região, estabelecida por η em (2.21), onde as condições projetáveis (2.3) são satisfeitas. Agora, trata-se do projeto do controle não-linear quando

as matrizes incertas não satisfazem às condições projetáveis.

2.4. O Controle Não-Linear sujeito a Matrizes Decomponível em Partes Projetáveis e Não-Projetáveis

Considere novamente o sistema descrito por (2.1), as suposições (i), (ii), (iii) e as definições (i), (ii). Uma definição adicional é requerida, ou seja: (iii) Um sistema dinâmico descrito por (2.1) é dito ser decomponível, se existem funções matriciais contínuas $\Delta A_m(\cdot)$, $\Delta \tilde{A}(\cdot)$, $\Delta B_m(\cdot)$, $\Delta \tilde{B}(\cdot)$ e matrizes constantes C_m e \tilde{C} tendo as seguintes propriedades:

$$P.1) \quad \Delta A(r) = \Delta A_m(r) + \Delta \tilde{A}(r) \quad \text{para todo } r \in \tilde{R}$$

$$P.2) \quad \Delta B(s) = \Delta B_m(s) + \Delta \tilde{B}(s) \quad \text{para todo } s \in \tilde{S}$$

$$P.3) \quad C = C_m + \tilde{C}$$

P.4) o sistema dinâmico reduzido

$$\dot{x}_m = [A + \Delta A_m(r)] x_m + [B + \Delta B_m(s)] u + C_m v \quad (2.25)$$

admite um controle de realimentação

$$u = K x_m + p(x_m) \quad (2.26)$$

(onde K é uma matriz constante $n \times m$ e $p(\cdot): R^n \rightarrow R^m$) que leva cada solução de (2.1) ser limitada uniformemente e limitada ultimamente uniformemente com respeito a algum conjunto compacto S .

De acordo com a decomposição apresentada na definição (iii), quebra-se as matrizes do sistema $\Delta A(r)$, $\Delta B(s)$ e C em duas partes. A parte projetável $\Delta A_m(r)$, $\Delta B_m(s)$ e C_m que pode ser controlada por técnicas existentes e a parte não-projetável $\Delta \tilde{A}(r)$, $\Delta \tilde{B}(s)$ e \tilde{C} , cujos componentes são vistos como incertezas residuais.

Esta decomposição pode ser feita de modo que $\Delta A_m(r)$, $\Delta B_m(s)$ e C_m satisfaçam às condições projetáveis, ver referências [3], [4] e [13], onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A_m(r) = BD(r) \\ \Delta B_m(s) = BE(s) \\ C_m = BF \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{A}(r) = \Delta A(r) - BD(r) \\ \Delta \tilde{B}(s) = \Delta B(s) - BE(s) \\ \tilde{C} = C - BF \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Usando tal decomposição, P.1) - P.3) na definição (iii) é satisfeita. Se, além disso, $E(s)$ é escolhido de modo que

$$\|E(s)\| < 1 \quad \text{para todo } s \in \tilde{S}$$

então P.4) será satisfeita também.

Como resultado desta decomposição, um certo valor não-projetável \tilde{M} será definido e é mostrado que o controle torna-se eficaz tanto quanto \tilde{M} não exceda um valor limiar não-projetável M^* . Para isto, (2.1), (2.4), (2.27) e (2.28) são requeridas de forma que o controle de realimentação de malha fechada torne-se

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bp(x) + e_m(x,t) + \tilde{e}(x,t) \quad (2.29)$$

onde $\bar{A} = A + BK$ é estável, $p(x)$ satisfaz (2.5) e, para as incertezas admissíveis $r(\cdot)$, $s(\cdot)$ e $v(\cdot)$; $e_m(x,t) \triangleq \Delta A_m(r)x + \Delta B_m(s)Kx + \Delta B_m(s)p(x) + C_mv$

$$(2.30)$$

$\tilde{e}(x,t) \triangleq \Delta \tilde{A}(r)x + \Delta \tilde{B}(s)Kx + \Delta \tilde{B}(s)p(x) + \tilde{C}v$

$$(2.31)$$

Chama-se $e_m(x,t)$ e $\tilde{e}(x,t)$ vetor erro projetável e vetor erro não-projetável respectivamente.

O sistema reduzido está agora descrito por

$$\dot{x}_m = \bar{A} x_m + Bp(x_m) + e_m(x,t) \quad (2.32)$$

onde o controle não-linear possui constantes não negativas a e b tal que

$$\|p(x)\| \leq a + b \|x\| \quad \text{para todo } x \in R^n \quad (2.33)$$

a, b está dado em (2.13)

O sistema reduzido (2.32) admite função de Lyapunov definida positiva $V(\cdot) : R^n \rightarrow R$ com valor $V(x) = x^T P x$, $P > 0$ (também serve para (2.1)) e a derivada da função de Lyapunov está dada por

$$L_m(x_m, t) \triangleq \text{grad } V(x_m) \left[\bar{A} x_m + Bp(x_m) + e_m(x_m, t) \right] \quad (2.34)$$

Para o sistema (2.1) a derivada

$$\begin{aligned} L(x,t) &= \text{grad } V(x) \left[\bar{A}x + Bp(x) + e_m(x,t) + \tilde{e}(x,t) \right] \\ &= L_m(x,t) + \text{grad } V(x) \tilde{e}(x,t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Antes de prosseguir define-se

$$\tilde{M}_v \triangleq a \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)\| + \max_{v \in V} \|\tilde{C}v\| \quad (2.36)$$

$$\tilde{M} \triangleq \max_{r \in \hat{R}} \|\Delta \tilde{A}(r)\| + \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)K\| + b \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)\| \quad (2.37)$$

$$M^* \triangleq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (2.38)$$

\tilde{M} e M^* são conhecidos como valor não-projetável e valor limiar não projetável respectivamente de modo que

$$\tilde{M} < M^* \quad (2.39)$$

De posse de (2.31),

$$\|\tilde{e}(x,t)\| \leq \max_{r \in \hat{R}} \|\Delta \tilde{A}(r)\| \|x\| + \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)K\| \|x\| +$$

$$\max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)\| \max \|p(x)\| + \max_{v \in V} \|\tilde{C}v\|$$

com (2.33) temos

$$\|\tilde{e}(x,t)\| \leq a \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)\| + \max_{v \in V} \|\tilde{C}v\| +$$

$$\left[\max_{r \in \hat{R}} \|\Delta \tilde{A}(r)\| + \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)K\| + b \max_{s \in \hat{S}} \|\Delta \tilde{B}(s)\| \right] \|x\|$$

de acordo com (2.36) e (2.37)

$$\|\tilde{e}(x,t)\| \leq \tilde{M}_V + \tilde{M} \|x\| \quad (2.40)$$

Reescrevendo (2.35)

$$L(x,t) \leq -x^T Q x + (\epsilon/2) \cdot p_V(x) + 2 x^T P \tilde{e}(x,t) \quad (2.41)$$

ou seja

$$L(x,t) \leq \left[2 \tilde{M} \|P\| - \gamma_2 \right] \|x\|^2 + \left[2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1 \right] \|x\| + \gamma_0 \quad (2.42)$$

onde

$$\begin{cases} \gamma_2 = \lambda_{\min}(Q) \\ \gamma_1 = (b \epsilon)/2 \\ \gamma_0 = (a \epsilon)/2 \end{cases}$$

De (2.19) ; (2.42) torna-se

$$\left[2 \tilde{M} \|P\| - \gamma_2 \right] \|x\|^2 + \left[2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1 \right] \|x\| + \gamma_0 < 0$$

ou

$$\left[\gamma_2 - 2 \tilde{M} \|P\| \right] \|x\|^2 - \left[2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1 \right] \|x\| - \gamma_0 > 0 \quad (2.43)$$

Se $\gamma_2 - 2 \tilde{M} \|P\| > 0$ ou seja

$$\tilde{M} < \frac{\gamma_2}{2 \|P\|} = M^* \quad (2.44)$$

então (2.43) é verdadeiro e a condição (2.19) é satisfeita. Caso a condição (2.44) não seja satisfeita, deve-se diminuir os limites de variação dos parâmetros, consequentemente alterar \tilde{M} .

Logo de (2.43), resulta

$$\|x\| = \frac{2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1}{2[\gamma_2 - 2 \tilde{M} \|P\|]} + \left[\frac{2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1}{2[\gamma_2 - 2 \tilde{M} \|P\|]} \right]^2 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2 - 2 \tilde{M} \|P\|} \Bigg]^{1/2} \triangleq \tilde{\eta} \quad (2.45)$$

onde $\tilde{\eta}$ é o raio de uma bola fechada $B(\tilde{\eta})$ completamente contido em um conjunto limitado ultimamente S que satisfaz as definições (i) e (ii); e a condição (2.43) é assegurada para $x \notin B(\tilde{\eta})$. Comparando (2.45) com (2.21), $\tilde{\eta} = \eta$ desde que as matrizes incertas satisfaçam as condições projetáveis, ou seja $\tilde{M}_V = \tilde{M} = 0$.

Como mostrado no item 2.3., define-se uma família de elipsóides

$$X(k) \triangleq \{x \in R^n / x^T P x \leq k = \text{constante} > 0\} \quad (2.46)$$

considerando k tal que

$$X(k) \supseteq B(\tilde{\eta}) \triangleq \{x \in R^n / \|x\| \leq \tilde{\eta}\}$$

de maneira que

$$k \triangleq \lambda_{\max}(P) \tilde{\eta}^2$$

Para um dado $\bar{k} > k$, com condição inicial $x_0 \in X(\bar{k})$, define-se a constante $k_0 \triangleq x_0^T P x_0$ e

$$C_0(x_0, \bar{k}) \triangleq \min \{(\gamma_2 - 2 \tilde{M} \|P\|) \tilde{\eta}^2 - (2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1) \tilde{\eta} - \gamma_0 /$$

$$\left. \sqrt{\frac{\bar{k}}{\lambda_{\max}(P)}} \leq \tilde{\eta} \leq \sqrt{\frac{k_0}{\lambda_{\min}(P)}} \right\} \quad (2.47)$$

note que $C_0(x_0, \bar{k})$ é um número positivo.

O teorema a seguir, mostra que cada elipsóide $X(\bar{k})$, com $\bar{k} > k$, serve como um conjunto limitado ultimamente S.

TEOREMA 2.3

Considere o sistema dinâmico (2.29) e o sistema reduzido associado (2.32), tendo as propriedades P.1) - P.4).

Suponha que o valor não-projetável \tilde{M} obedece $\tilde{M} < M^*$, onde M^* é dado por (2.38). Com $u = K x_m + p(x_m)$ sendo o controle de realimentação para (2.32) satisfazendo (2.33) e (2.34), então este mesmo controle de realimentação, aplicado a (2.29), leva cada solução $x(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow R^n$ a ser limitada uniformemente e cada solução estendida sobre $[t_0, \infty)$ ser limitada ultimamente. Além do mais, dado um $\bar{k} > k$, cada solução correspondente a condição inicial $(x_0, t_0) \in R^n \times R$ é limitada uniformemente com

$$d(x_0) = \begin{cases} \|x_0\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} & \text{para } x_0 \notin X(\bar{k}) \\ \sqrt{\frac{\bar{k}}{\lambda_{\min}(P)}} & \text{para } x_0 \in X(\bar{k}) \end{cases}$$

e é limitada ultimamente e uniformemente com respeito a $S \triangleq X(\bar{k})$, onde $X(k)$ é dado por (2.46) e

$$T(x_0, S) = \begin{cases} \frac{k_0 - \bar{k}}{C(x_0, \bar{k})} & \text{para } x_0 \notin S \\ 0 & \text{para } x_0 \in S \end{cases}$$

com $C(x_0, \bar{k})$ dado por (2.47).

A demonstraçãõ deste teorema pode ser visto em [3]. Com isto, torna-se possível fazer aplicaçãõ do controle não-linear em sistemas que apresentam incertezas, onde o problema do sistema ser ou não-projetãvel deve ser verificado antes de se partir para o projeto do controle. A seguir, trata-se do problema de transformar sistemas não-projetãveis em projetãveis, pois assim, não existirá diminuiçãõ na faixa de variaçãõ permitida aos elementos incertos.

CAPÍTULO 3

TEORIA DA TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS

NÃO-PROJETÁVEIS EM SISTEMAS PROJETÁVEIS

3.1. Introdução

Certos sistemas não satisfazem às condições projetáveis, sendo que a faixa de variação permitida aos elementos incertos diminui. Para que esta faixa não sofra alteração, uma transformação de estados para este sistema é efetuada, de modo que o sistema que antes era não-projetável tornar-se-á um sistema projetável, e portanto a faixa de variação permitida não sofrerá alteração.

É apresentado um novo método para transformação de uma classe de sistemas, sendo esta transformação constituída de uma transformação linear e um deslocamento da origem. Para melhorar o entendimento desta teoria, um exemplo é apresentado na última seção deste capítulo.

3.2. Transformação de um Sistema Não-Projetável

Seja o sistema

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(g(t))]x(t) + [B + \Delta B(g(t))]u(t) + Cv(t) \quad (3.1)$$

onde $x(t) \in R^n$ é o estado, $u(t) \in R^m$ é o controle e $v(t) \in R^l$ é a entrada incerta. As incertezas na matriz do sistema $\Delta A(g)$ e matriz entrada $\Delta B(g)$, dependem dos parâmetros $g(t) \in R^d$. Considere

$$g^{(i)}(.) : R^1 \quad \Omega_i \subset R^d$$

$$v^{(i)}(.) : R^1 \quad V_i \subset R^\ell, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

onde Ω_i e V_i são subconjuntos compactos de espaços apropriados, $g^{(i)} \triangleq d^i g / dt^i$, $v^{(i)} \triangleq d^i v / dt^i$, $g^{(0)} \triangleq g$ e $v^{(0)} \triangleq v$. O par (A, B) é considerado ser controlável. Aqui, as matrizes $\Delta A(.)$, $\Delta B(.)$ e C em (3.1) não estão satisfazendo as condições projetáveis, e uma transformação de estados sobre o sistema é efetuada. Para isso, faz-se necessário a definição do operador $L(.)$ dado por

$$L(h_i)(t, g) \triangleq \frac{dh_i(t)}{dt} + h_i(t) [A + \Delta A(g(t))]$$

$$L^2(h_i)(t, g, \dot{g}) \triangleq \frac{dL(h_i)}{dt} + L(h_i) [A + \Delta A(\dot{g}(t))], \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$L^k(.) \triangleq L(L^{k-1}(.)) \quad , \quad L^0(.) \triangleq (.)$$

$$\text{sendo} \quad \frac{dL(h_i)}{dt}(t, g) = \frac{\partial L(h_i)}{\partial t} + \frac{\partial L(h_i)}{\partial g} \dot{g}$$

como também define-se d_i como o inteiro mínimo não negativo j tal que

$$L^j(h_i)(t, g(t), \dots, g^{(j-1)}(t)) [B + \Delta B(g(t))] \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

para todo $t \in [0, \infty)$ e todos os valores permitidos de $g^{(i)}(t)$ em R^d .

Associando com o sistema (3.1), considere

$$w(t) = H(t) x(t)$$

onde

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_m \end{bmatrix}, \text{ um vetor de dimensão } m$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_m \end{bmatrix} \text{ uma matriz diferenciável continuamente e}$$

h_i é um vetor linha de dimensão n .

Diferenciando o i -ésimo elemento w_i de $w(t)$ e considerando a definição anterior como também (3.1) tem-se

$$\begin{aligned} w_i(t) &= h_i(t) x(t) \\ \dot{w}_i(t) &= \dot{h}_i(t) x(t) + h_i(t) \left[[A + \Delta A] x(t) + [B + \Delta B] u(t) + C v(t) \right] \\ &= \left[\dot{h}_i(t) + h_i(t) [A + \Delta A] \right] x(t) + h_i(t) C v(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando a definição do operador $L(h_i)$ em (3.4)

$$\dot{w}_i(t) = L(h_i)(t, g) x(t) + h_i(t) C v(t) \quad (3.5)$$

fazendo uma nova diferenciação em (3.5)

$$\begin{aligned} \ddot{w}_i(t) &= \left[\frac{\partial L(h_i)}{\partial t} + \frac{\partial L(h_i)}{\partial g} \dot{g} \right] x(t) + L(h_i) \left[(A + \Delta A) x(t) + \right. \\ &\quad \left. (B + \Delta B) u(t) + C v(t) \right] + (h_i(t) C v(t))^{(1)} \end{aligned}$$

$$\dot{w}_i(t) = \left[\frac{dL}{dt}(h_i) + L(h_i)(A + \Delta A) \right] x(t) + L(h_i) C v(t) + (h_i(t) C v(t))^{(1)} \quad (3.5)$$

$$\ddot{w}_i(t) = L^2(h_i)(t, g, \dot{g}) x(t) + L(h_i) C v(t) + (h_i(t) C v(t))^{(1)} \quad (3.6)$$

Admitindo agora, que a definição de d_i é cumprida, e, uma outra diferenciação em (3.6) é feita de modo

$$\ddot{w}_i(t) = \left[\frac{dL^2}{dt^2}(h_i) + L^2(h_i)(A + \Delta A) \right] x(t) + L^2(h_i) C v(t) + [L(h_i) C v(t)]^{(1)} + (h_i C v(t))^{(2)} + L^2(h_i)(B + \Delta B) u(t)$$

$$\ddot{w}_i(t) = L^3(h_i)(t, g, \dot{g}, \ddot{g}) x(t) + L^2(h_i) C v(t) + [L(h_i) C v(t)]^{(1)} + (h_i C v(t))^{(2)} + L^2(h_i)(t, g, \dot{g})(B + \Delta B) u(t)$$

De posse das equações de derivadas para w_i , monta-se as expressões gerais dada por

$$w_i^{(k)}(t) = L^k(h_i)(t, g, \dots, g^{(k-1)}) x(t) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d^j}{dt^j} \left[L^{k-1-j}(h_i)(t, g, \dots, g^{(k-2-j)}) C v(t) \right] \quad k = 0, 1, \dots, d_i \quad (3.7)$$

$$w_i^{(k)}(t) = L^k(h_i)(t, g, \dots, g^{(k-1)}) x(t) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d^j}{dt^j} \left[L^{k-1-j}(h_i)(t, g, \dots, g^{(k-2-j)}) C v(t) \right] + L^{k-1}(h_i)(t, g, \dots, g^{(k-2)}) [B + \Delta B(g)] u(t) \quad (3.8)$$

$$k = d_i + 1, \quad i = 1, \dots, m$$

onde por convenção, o somatório que apresenta como característica o contador inicial maior que o contador final, é chamado de "somatório vazio", tendo valor zero, e $L^0(h_i) = h_i$.

Escreve-se agora a equação para $w_i^{(j)}$, com $j \leq d_i$ e

$i = 1, \dots, m$ na forma de

$$z(t) = P(t) x(t) + R(t) \quad (3.9)$$

onde

$$z = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ (d_1) \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \\ \vdots \\ (d_m) \\ w_m \end{bmatrix}, \text{ um vetor } \left(m + \sum_{i=1}^m d_i \right) \times 1 \quad (3.10)$$

$$P(t) = P(t, g(t), \dots, g^{(d^*-1)}(t)) = \begin{bmatrix} L^0(h_1) \\ \vdots \\ L^{d_1}(h_1) \\ \vdots \\ L^0(h_m) \\ \vdots \\ L^{d_m}(h_m) \end{bmatrix}, \text{ uma matriz}$$

$\left(m + \sum_{i=1}^m d_i \right) \times n$, $t \in [0, \infty)$ e $g^i(t) \in \Omega_i$

$$R(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 Cv \\ L(h_1) Cv + (h_1 Cv)^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{d_1-1} \frac{d^j}{dt^j} (L^{d_1-1-j}(h_1) (t, g, \dots, g^{(d_1-2-j)}(t)) Cv) \\ \vdots \\ 0 \\ h_m Cv \\ L(h_m) Cv + (h_m Cv)^{(1)} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{d_m-1} \frac{d^j}{dt^j} (L^{d_m-1-j}(h_m) (t, g, \dots, g^{(d_m-2-j)}(t)) Cv) \end{bmatrix}$$

$R(t) = R(t, g, \dots, g^{(d^*-2)}, \dots, v^{(d^*-1)})$ um vetor $(m + \sum_{i=1}^m d_i) \times 1$

sendo que $d^* = \max \{d_i, i = 1, \dots, m\}$

Com a transformação dada em (3.9), resultante da escolha de uma base variante no tempo e uma translação dada por $R(t)$ em um espaço de estado, torna-se possível obter um sistema projetável. Visto que é de interesse que o sistema transformado possua mesma dimensão do sistema original, considerar as suposições

$$(i) \quad m + \sum_{i=1}^m d_i = n$$

$$(ii) \quad 0 < p_1 \leq |\det P(t)| \leq p_2 < \infty, \text{ para todo } t \in [0, \infty),$$

$$(i) \quad g(t) \in \Omega_i$$

(iii) $g(\cdot)$ e $v(\cdot)$ são d^* vezes diferenciáveis continuamente.

De (3.9) tira-se

$$x(t) = \bar{P}^{-1}(t) (z(t) - R(t)) \quad (3.11)$$

e substituindo (3.11) em (3.8)

$$W_i^{(d_i+1)} = L^{d_i+1}(h_i) \left[\bar{P}^{-1}(z-R) \right] + \sum_{j=0}^{d_i} \frac{d^j}{dt^j} \left[L^{d_i-j}(h_i) C v \right] + L^{d_i}(h_i)$$

$(B + \Delta B) u$

$$W_i^{(d_i+1)} = L^{d_i+1}(h_i) P^{-1}(t) z(t) + L^{d_i}(h_i) (B + \Delta B) u(t) - L^{d_i+1}(h_i)$$

$$\bar{P}^{-1}(t) R(t) + \sum_{j=0}^{d_i} \frac{d^j}{dt^j} \left[L^{d_i-j}(h_i) C v(t) \right]$$

$$W_i^{(d_i+1)} = \tilde{a}_i(t, g, \dots, g^{(d_i^*)}) z + \tilde{b}_i(t, g, \dots, g^{(d_i-1)}) u + \tilde{v}_i(t, g, \dots, g^{(d_i^*)}, v, \dots, v^{(d_i^*)})$$

onde

$$\tilde{a}_i = L^{d_i+1}(h_i) P^{-1}(t), \tilde{a}_i^T \in R^n$$

$$\tilde{b}_i = L^{d_i}(h_i) (B + \Delta B), \tilde{b}_i^T \in R^m$$

$$\tilde{v}_i = -L^{d_i+1}(h_i) P^{-1} R + \sum_{j=0}^{d_i} \frac{d^j}{dt^j} \left[L^{d_i-j}(h_i) C v(t) \right], \tilde{v}_i \in R^1$$

Considere $\tilde{g} \triangleq (g, \dots, g^{(d_i^*)}) \in \Omega$, $\tilde{v} \triangleq (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m)^T$ para os valores admissíveis de $g^{(i)}$ e $v^{(i)}$. Definindo

$$z = (z_1^T, \dots, z_m^T)^T, z_i \in R^{d_i+1}$$

$$\tilde{a}_i = (\tilde{a}_{i1}, \dots, \tilde{a}_{im}), \tilde{a}_{ij}^T \in R^{d_j+1}$$

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ \dots & \dots & & \dots \\ & & & \tilde{a}_{ii} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ii} \in R^{(d_i+1) \times (d_i+1)}$$

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \tilde{a}_{ij} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ij} \in R^{(d_i+1) \times (d_j+1)}$$

(3.12)

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}, \tilde{B}_i \in R^{(d_i+1) \times m}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & & \tilde{A}_{mm} \end{bmatrix}, \tilde{A} \in R^{n \times n}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_m \end{bmatrix}, \tilde{B} \in R^{n \times m}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}, \tilde{C} \in R^{n \times m}$$

onde a \tilde{a} -ésima linha não zero ($\sum_{k=1}^i (d_k+1)$) de \tilde{C} é e_i .

Usando (3.7), (3.10) e (3.12) pode-se escrever

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}(t, \tilde{g}(t)) z(t) + \tilde{B}(t, \tilde{g}(t)) u + \tilde{C} \tilde{V}(t) \quad (3.13)$$

e com isso, o problema da diminuição da faixa de variação permi

tida aos elementos incertos deixará de existir, pois o sistema transformado (3.13) satisfará as condições projetáveis. Para um melhor esclarecimento um exemplo é apresentado.

3.3. Exemplo de Aplicação

Como ilustração do resultado mostrado na seção anterior, um exemplo é apresentado. Para simplicidade, supõe-se que $\Delta A = \Delta B = 0$ e v diferenciável. Seja o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$\dot{x} = Ax + Bu + Cv$, onde $x \in \mathbb{R}^4$, $u \in \mathbb{R}^2$ e $v \in \mathbb{R}^1$

e associado a este sistema uma matriz invariante no tempo

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = Hx$$

Inicialmente calcula-se os valores para d_1 e d_2 apresentado na definição (3.3); porém é necessário o conhecimento antecipado do operador $L(\cdot)$ dado em (3.2), de forma que

$$\begin{aligned}
 L^0(h_i) &= h_i \\
 L^1(h_i) &= h_i A \\
 L^2(h_i) &= h_i A^2, \quad i = 1, 2
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.3)

$$\begin{aligned}
 L^0(h_1) B = h_1 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, & L^0(h_2) B = h_2 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 L^1(h_1) B = h_1 AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, & L^1(h_2) B = h_2 B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Assim, $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$. Note que

$$m + \sum_{i=1}^m d_i = 2 + d_1 + d_2 = 4$$

e a transformação pode ser realizada.

para escrever na forma $\dot{z} = Px + R$, conforme (3.9), deve-se manipular com (3.7), logo

$$w_1 = h_1 x$$

$$\dot{w}_1 = L(h_1)x + h_1 Cv = h_1 Ax + h_1 Cv$$

$$w_2 = h_2 x$$

$$\dot{w}_2 = L(h_2)x + h_2 Cv = h_2 Ax + h_2 Cv$$

Substituindo os valores de $h_1 A$, $h_1 C$, $h_2 A$ e $h_2 C$, tem-se

$$\dot{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + v$$

$$\dot{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + v$$

Consequentemente

$$z = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dot{w}_1 \\ w_2 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

$$= Px + R.$$

Para fazer uma representação em \tilde{z} , devemos diferenciar uma vez mais \dot{w}_1 e \dot{w}_2 , então

$$\ddot{w}_1 = L^2(h_1) x + L(h_1) Bu + L(h_1) Cv + (h_1 C) \dot{v} \quad (1)$$

(3.15)

$$\ddot{w}_2 = L^2(h_2) x + L(h_2) Bu + L(h_2) Cv + (h_2 C) \dot{v} \quad (1)$$

Aplicando (3.14) em (3.15)

$$\ddot{w}_1 = h_1 A^2 x + h_1 ABu + h_1 ACv + (h_1 C) \dot{v}$$

$$\ddot{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} u + (3v + \dot{v})$$

$$\ddot{w}_2 = h_2 A^2 x + h_2 ABu + h_2 ACv + (h_2 C) \dot{v}$$

$$\ddot{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} u + (2v + \dot{v})$$

Tirando o valor de x em (3.9), tem-se

$$x = P^{-1} (z - R) \quad (3.16)$$

onde $P^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com as derivadas para w_1 , w_2 e (3.16), pode-se escrever a nova representação para o sistema dada por

$$\dot{z} = \tilde{A} z + \tilde{B} u + \tilde{C} v$$

onde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e \quad \tilde{v} = v + \dot{v}$$

Este método apresentado para transformação de um sistema não-projetável em um projetável, baseia-se no conhecimento de $H(t)$, e não é único, existindo outros métodos que proporcionam tal transformação como o de Wolovich [21]. Tais métodos são aplicados somente a uma certa classe de sistemas, pois muitas vezes torna-se difícil identificar o ponto de ajuste, como também o vetor z' da do em (3.9) pode apresentar variáveis acopladas, dificultando suas medidas.

Esta teoria será aplicada no capítulo seguinte no sistema de controle de um helicóptero e sistema de potência, pois ambos não satisfazem às condições projetáveis, e será visto que tal teoria somente pode ser aplicado ao sistema de potência.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES DO CONTROLE NÃO-LINEAR

4.1. Introdução

Este capítulo apresenta a aplicação do controle não-linear nos sistemas helicóptero e máquina síncrona ligada a um barramento infinito através de uma linha de transmissão. Os modelos matemáticos encontram-se descritos por variáveis de estado e foram linearizados, em torno de um certo ponto de equilíbrio x_e . Será visto que tais sistemas não satisfazem às condições projetáveis, e, com o uso da teoria da transformação de sistemas, tornou-se possível passar do sistema de potência inicialmente não-projetável a um projetável. As vantagens e desvantagens com a utilização deste controle nos dois sistemas são apresentadas.

4.2. O Controle Não-Linear Aplicado ao Sistema Helicóptero

Nestes últimos anos, o projeto de controle para o helicóptero tem chamado atenção de diversos pesquisadores e muitas teorias tem surgido para tentar solucionar este problema, como Narendra [14], que utiliza um computador a bordo para o Controle Adaptativo e os Métodos de Redução de Sensitividade, conforme Sundararajam em [18]. Embora estes controladores trabalhem satisfatoriamente,

eles não garantem que a resposta do sistema seja estável quando existe variação dos parâmetros, pois a dinâmica do aparelho é alterada quando variam as condições de vôo. O projeto para o controle deste aparelho, baseado na teoria de contorno final [3], [13], quando existe variação dos parâmetros é apresentado.

O modelo dinâmico foi linearizado no plano vertical (VTOL) e está descrito por

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A) x(t) + (B + \Delta B) u(t) \quad (4.1)$$

O vetor estado $x \in R^4$, e seus componentes são

x_1 : velocidade horizontal (nós)

x_2 : velocidade vertical (nós)

x_3 : taxa de inclinação (graus/seg.)

x_4 : ângulo de inclinação (graus)

A unidade dada à velocidade será nós e para obtê-la em Km/h, deve-se multiplicar o valor dado em nós por 1,8532.

O vetor controle é $u = [u_1 \ u_2]^T$ onde

u_1 : controle coletivo

u_2 : controle longitudinal

O controle u_1 localiza-se ao lado do piloto, sendo usado para controlar o movimento do aparelho verticalmente, tendo algum efeito sobre a velocidade horizontal. O controle u_2 está localizado em frente ao piloto e seu principal uso é controlar a velocidade horizontal do aparelho.

Segundo [18], a "airspeed" é assumida ser 135 nós, e o intervalo de variação vai de 60 nós até 170 nós. Entende-se por a "airspeed" a velocidade relativa do avião com respeito ao ar. Para uma "airspeed" de 135 nós ΔA e ΔB são matrizes zero em (4.1). Considerando as condições de voo para o helicóptero no plano vertical para uma "airspeed" de 135 nós, as matrizes A e B são

$$A = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,01 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,3681 & -0,707 & 1,42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.2)

$$B = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,5446 & -7,5922 \\ -5,52 & 4,49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a "airspeed" muda, todos elementos das três primeiras linhas de ambas as matrizes mudam. As mudanças mais significativas ocorrem nos elementos a_{32} , a_{34} e b_{21} , tendo como limites

$$0,06635 < a_{32} < 0,5044$$

$$0,1198 < a_{34} < 2,5260$$

$$0,9775 < b_{21} < 5,1120$$

sendo que os demais elementos são assumidos constantes. Portanto, nas matrizes $\Delta A(t)$ e $\Delta B(t)$ os parâmetros diferentes de zero são $\Delta a_{32}(t)$, $\Delta a_{34}(t)$, $\Delta b_{21}(t)$, onde seus intervalos são dados por

$$\begin{cases} 0,5044 - 0,3681 = 0,1363 \\ -0,3681 + 0,06635 = 0,30175 \end{cases} \longrightarrow |\Delta a_{32}(t)| \leq 0,30175 = \bar{\Delta a}_{32}$$

$$\begin{cases} 2,5260 - 1,4200 = 1,106 \\ -1,4200 + 0,1198 = 1,3002 \end{cases} \longrightarrow |\Delta a_{34}(t)| \leq 1,3002 = \bar{\Delta a}_{34} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} 5,1120 - 3,5446 = 1,5674 \\ -3,5446 - 0,9775 = -2,5771 \end{cases} \longrightarrow |\Delta b_{21}(t)| \leq 2,5771 = \bar{\Delta b}_{21}$$

Conforme mostra a figura 4.1, a matriz A do sistema dada em (4.2) apresenta dois autovalores no semiplano direito, o que caracteriza o sistema como instável. Isto foi contornado através de uma otimização quadrática linear, ver [10], onde o controle de entrada $u(t)$ que minimizou o custo funcional

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \hat{Q} x + u^T \hat{R} u) dt$$

para o sistema (4.1) com $\Delta A = \Delta B = 0$ e

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

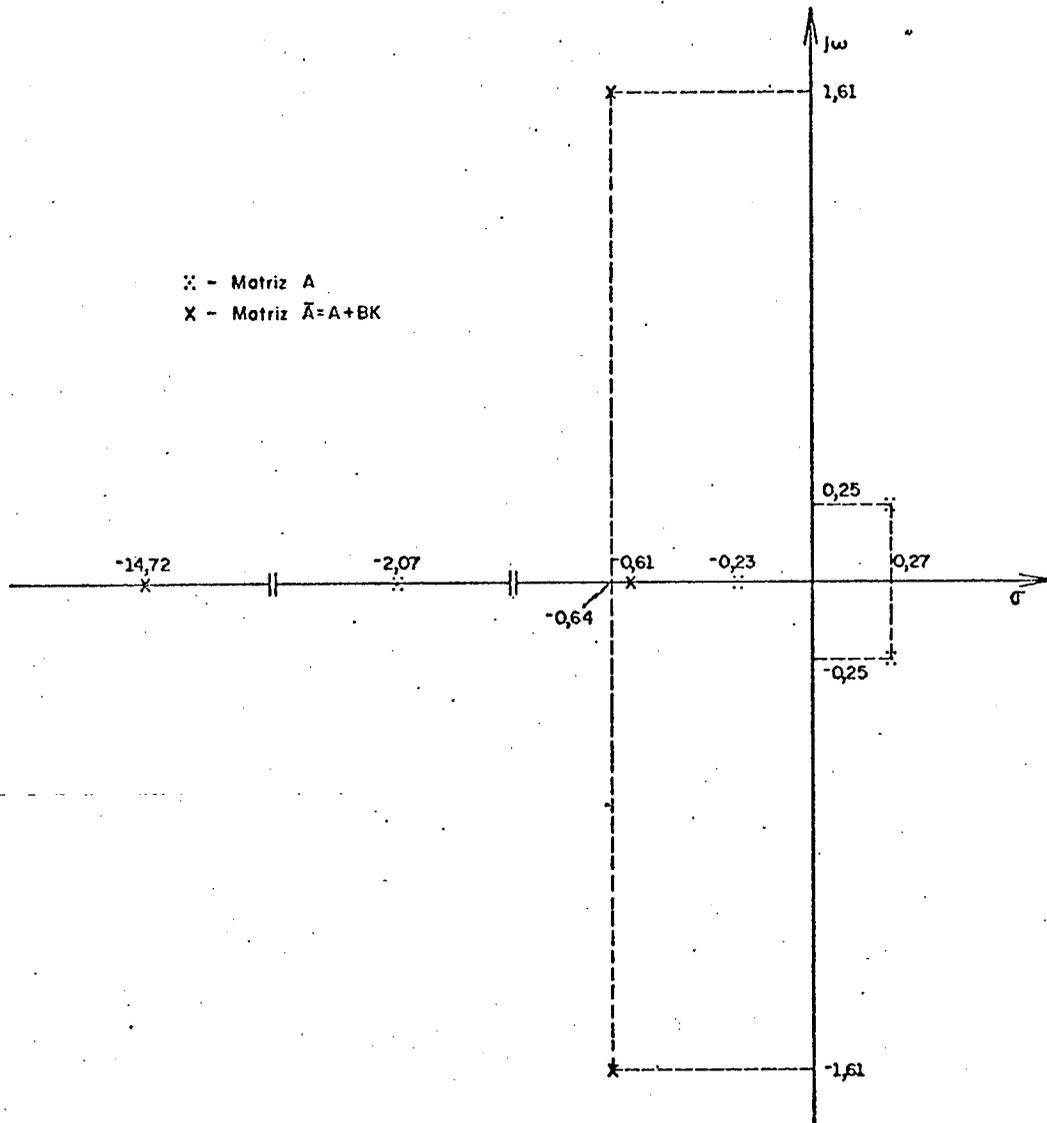


FIGURA 4.1. Localização da raízes para o modelo do helicóptero no plano s .

é dado por (veja |18|),

$$u = -\hat{R}^{-1} B^T \hat{P} x = Kx \quad (4.3a)$$

onde a matriz \hat{P} em (4.3a) é encontrada através da solução da equação de Riccati

$$A^T \hat{P} + \hat{P} A - \hat{P} B \hat{R}^{-1} B^T \hat{P} + \hat{Q} = 0,$$

de modo que

$$K = \begin{bmatrix} -0,8143 & -1,2207 & 0,266 & 0,826 \\ -0,2582 & 1,178 & 0,062 & -0,212 \end{bmatrix}$$

$\bar{A} = A + BK$ é dado por

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0,4421 & -0,3052 & 0,1474 & -0,1275 \\ -0,8778 & -14,28 & 0,4722 & 0,5165 \\ 3,4358 & 12,3951 & -1,8955 & -4,0914 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{bmatrix}$$

e, como se nota pela figura 4.1, o sistema apresentará um comportamento transitório desejado.

Antes de prosseguir ao projeto do controle não-linear, deve ser observado que as matrizes ΔA e ΔB não satisfazem às condições projetáveis

$$\begin{cases} \Delta A = BD \\ \Delta B = BE \end{cases} \quad (4.4)$$

pois fica impossível identificar as matrizes D e E que satisfazem (4.4). Usando a teoria da transformação de sistemas apresentado no capítulo 3, como tentativa para obter um sistema que satisfic

faça (4.4), verifica-se que, escolhendo

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{w}_1 = h_1 (A + \Delta A) x + h_1 (B + \Delta B) u$$

$$\dot{w}_2 = h_2 (A + \Delta A) x + h_2 (B + \Delta B) u$$

tanto \dot{w}_1 como \dot{w}_2 contêm o controle, o que implica em $d_1 = d_2 = 0$ e a condição $m + \sum_{i=1}^m d_i = n$ não é cumprida. Logo, a teoria da transformação de sistemas, que possibilitaria a passagem do sistema não-projetável a um projetável, para este caso, não pode ser aplicada e conseqüentemente existirá uma redução na faixa de variação permitida aos elementos com a aplicação do controle não-linear no sistema helicóptero não-projetável.

Para encontrar o controle de contorno final, decompõem-se ΔA e ΔB segundo Barmish [3], em

$$\begin{cases} \Delta A = \Delta A_m + \tilde{\Delta A} \\ \Delta B = \Delta B_m + \tilde{\Delta B} \\ \Delta A_m = BD, \quad \Delta B_m = BE \end{cases} \quad (4.5)$$

A solução de (4.5), necessita do conhecimento das matrizes D e E , que serão obtidas através da solução dos mínimos quadrados, veja apêndice III, logo

$$\begin{cases} D = (B^T B)^{-1} B^T \Delta A_m \\ E = (B^T B)^{-1} B^T \Delta B_m \end{cases}$$

ou seja

$$D = \begin{bmatrix} 0,0621 & -0,1657 & -0,2826 & 0 \\ 0,0435 & -0,2074 & -0,1297 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta a_{32} & 0 & \Delta a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -0,2826 \Delta a_{32} & 0 & -0,2826 \Delta a_{34} \\ 0 & -0,1297 \Delta a_{32} & 0 & -0,1297 \Delta a_{34} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0,0621 & -0,1657 & -0,2826 & 0 \\ 0,0435 & -0,2074 & -0,1297 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -0,1657 \Delta b_{21} & 0 \\ -0,2074 \Delta b_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) e (4.7) em (4.5) tem-se

$$\Delta A_m = \begin{bmatrix} 0 & -0,1478 \Delta a_{32} & 0 & -0,1478 \Delta a_{34} \\ 0 & -0,0169 \Delta a_{32} & 0 & -0,0169 \Delta a_{34} \\ 0 & 0,9776 \Delta a_{32} & 0 & 0,9776 \Delta a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B_m = \begin{bmatrix} -0,1098\Delta b_{21} & 0 \\ 0,9873\Delta b_{21} & 0 \\ -0,0165\Delta b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1478\Delta a_{32} & 0 & 0,1478\Delta a_{34} \\ 0 & 0,0169\Delta a_{32} & 0 & 0,0169\Delta a_{34} \\ 0 & 0,0224\Delta a_{32} & 0 & 0,0224\Delta a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0,1098\Delta b_{21} & 0 \\ 0,0127\Delta b_{21} & 0 \\ 0,0165\Delta b_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O controle pode ser aplicado, desde que $\|E\| < 1$. Então com (4.7),

$$\max \|E\| = \lambda_{\max}^{1/2}(E^T E) = \sqrt{0,0704 \Delta \bar{b}_{21}^2} < 1 \quad (4.8)$$

logo, para manobras entre 60 e 170 nós esta condição é satisfeita.

Para obter a parte não-linear do controle, calcula-se $\rho(x)$ dado pela equação (4.9)

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \left[1 - \max \|E\| \right]^{-1} \left[\max \|D\| + \max \|EK\| \right] \|x\| \\ &= b \|x\| \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo necessário o conhecimento de $\max \|D\|$ e $\max \|EK\|$. Com (4.6) e (4.7), obtem-se

$$\begin{aligned} \max \|D\| &= \sqrt{0,0966 \Delta \bar{a}_{32}^2 + 0,0966 \Delta \bar{a}_{34}^2} \\ \max \|EK\| &= \max \|E\| \|K\| = 0,52 \Delta \bar{b}_{21} \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $\|K\| = 1,94$ e substituindo (4.10) em (4.9)

$$\rho(x) = \left[1 - 0,265 \Delta \bar{b}_{21} \right]^{-1} \left[\sqrt{0,0966 \Delta \bar{a}_{32}^2 + 0,0966 \Delta \bar{a}_{34}^2} + 0,52 \Delta \bar{b}_{21} \right] \|x\|$$

Para o movimento do helicóptero ser limitado ultimamente uniformemente, deve-se escolher os limites de variação dos parâmetros de modo que

$$\tilde{M} \leq M^* \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \max \|\Delta \tilde{A}\| + \max \|\Delta \tilde{B}\| + b \max \|\Delta \tilde{BK}\| \\ M^* &= \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Com as matrizes $\Delta \tilde{A}$, $\Delta \tilde{B}$, $\Delta \tilde{BK}$, dadas anteriormente, tem-se que suas respectivas normas são dadas por

$$\begin{aligned} \max \|\tilde{\Delta A}\| &= \sqrt{0,0266 \Delta \bar{a}_{32}^2 + 0,0266 \Delta \bar{a}_{34}^2} \\ \max \|\tilde{\Delta B}\| &= 0,112 \Delta \bar{b}_{21} \\ \max \|\tilde{\Delta BK}\| &= 0,217 \Delta \bar{b}_{21} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aplicando (4.13) em (4.12), obedecendo a condição (4.11)

$$\begin{aligned} &\sqrt{0,0266 \Delta \bar{a}_{32}^2 + 0,0266 \Delta \bar{a}_{34}^2} + 0,112 \Delta \bar{b}_{21} + b 0,112 \Delta \bar{b}_{21} \\ &< \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Portanto, se os limites dos parâmetros satisfazem (4.14), então qualquer movimento do aparelho entrará e permanecerá após um tempo finito dentro de um elipsóide $X(k)$ para qualquer $k > \underline{k}$, onde \underline{k} é dado por

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{k} &= \lambda_{\max}(P) \eta^2 \\ \eta &= \frac{\epsilon b}{2[\lambda_{\min}(Q) - 2M\lambda_{\max}(P)]} \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

Note de (4.15) que, para um dado Q , $\eta \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, pela escolha apropriada de ϵ , pode-se reduzir o tamanho do elipsóide $X(k)$ para uma extensão desejada. Caso ϵ assumia valor zero, tem-se o controle dado em (2.5) descontínuo, e consequentemente não será realizável na prática.

Há necessidade de se encontrar os limites permitidos aos parâmetros que estão variando,

$$|\Delta a_{32}(t)| \leq \Delta \bar{a}_{32}$$

$$|\Delta a_{34}(t)| \leq \Delta \bar{a}_{34}$$

$$|\Delta b_{21}(t)| \leq \Delta \bar{b}_{21}$$

tanto para o controle não-linear como também para o controle linear.

4.2.1. Limites sobre os Parâmetros para o Controle Não-Linear e Controle Linear.

É de interesse comparar o efeito do controle não linear e o controle linear $u=Kx$ ($p(x) = 0$), sobre os limites de variação dos parâmetros. Para isto, calcula-se a derivada de $V(x) = x^T P x$, considerando (4.1) e $u = Kx$, logo

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T (P\bar{A} + \bar{A}^T P) x + 2 x^T P (\Delta A(t) + \Delta B(t) K) x \leq -x^T Q x + \\ & 2 \|x^T P\| \left[\|\Delta A(t)\| + \|\Delta B(t) K\| \right] \|x\| \\ & \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 + 2 \left[\|\Delta A(t)\| + \|\Delta B(t) K\| \lambda_{\max}(P) \right] \|x\|^2 \\ & \leq \left[-\lambda_{\min}(Q) + \{2 \|\Delta A(t)\| + 2 \|\Delta B(t) K\|\} \lambda_{\max}(P) \right] \|x\|^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\dot{V}(x) < 0$ se

$$\lambda_{\min}(Q) - 2 \max_t \left[\|\Delta A(t)\| + \|\Delta B(t) K\| \right] \lambda_{\max}(P) > 0 \quad (4.16)$$

e $x=0$ é estável assintoticamente. Escrevendo (4.16) em função dos limites de variação dos parâmetros

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} > \max_t \left[\sqrt{\Delta\bar{a}_{32}^2(t) + \Delta\bar{a}_{34}^2(t)} + 1,94 \Delta\bar{b}_{21}(t) \right] \quad (4.17)$$

Usando (4.14) e (4.17), para um melhor valor típico de $Q=I$, os seguintes limites sobre os parâmetros são obtidos para os controles não-linear e linear.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\bar{a}_{32} = 0,2 \\ \Delta\bar{a}_{34} = 0,3 \\ \Delta\bar{b}_{21} = 0,3 \end{array} \right. \quad (\text{controle não-linear})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\bar{a}_{32} = 0,05 \\ \Delta\bar{a}_{34} = 0,01 \\ \Delta\bar{b}_{21} = 0,04 \end{array} \right. \quad (\text{controle linear})$$

disto conclui-se que, o controle não-linear tolera uma variação maior nos parâmetros do que o controle linear, sendo que ambos admitem uma variação inferior aquela estabelecida em (4.3).

4.2.2. Resultados da Simulação para o Helicóptero

Os resultados da simulação foram obtidos para $Q=I$. O valor de ϵ foi 0,01 e portanto, de (4.15), $\eta = 0,0141$. A resposta para entrada $u = Kx + p(x) + R$ e $u = Kx + R$, onde o comando $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}^T$ dado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $x(0) = 0$, com velocidade de 60 nós, estão mostrados nas figuras 4.2 e 4.3 respecti

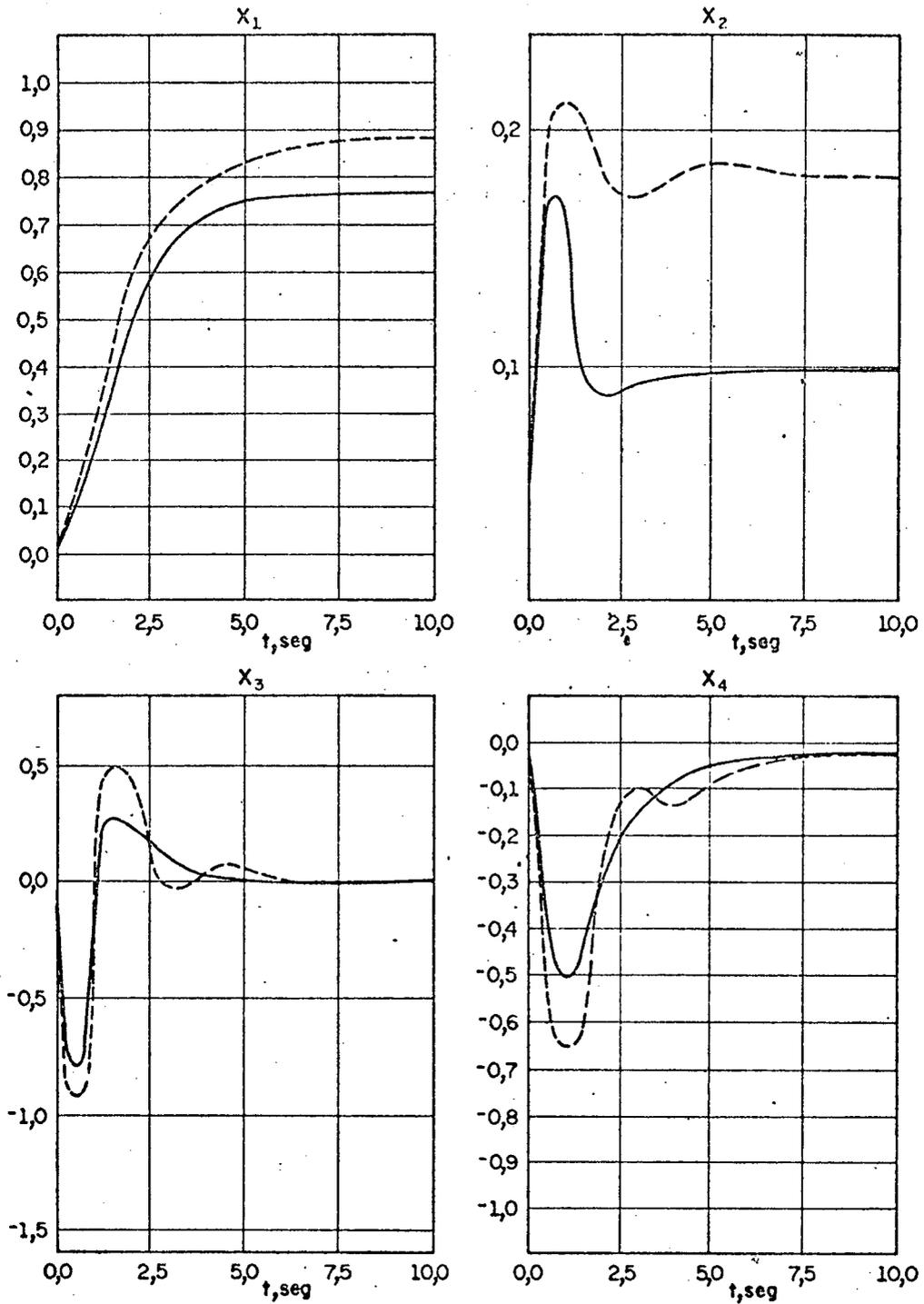


FIGURA 4.2 - Helicóptero deslocando-se a 60 nós com $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

---- aplicação do controle linear

— aplicação do controle não-linear

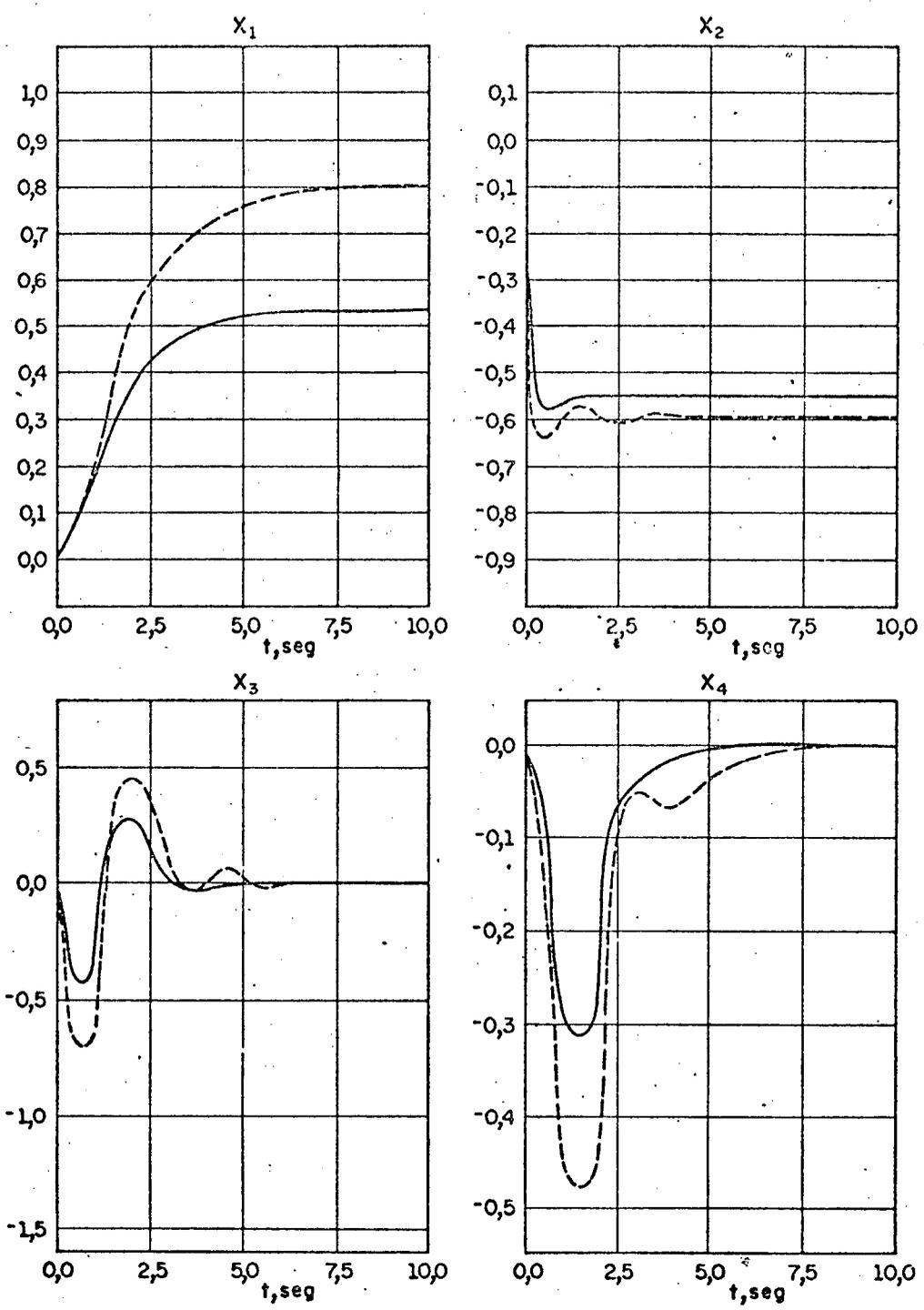


FIGURA 4.3 - Helicóptero deslocando-se a 60 nós com $R = [0 \ 1]^T$.

vamente e para o caso de $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ as magnitudes dos controles são dados por:

$$\begin{cases} 0,02 < u_1 < 1,0 \\ 0,04 < u_2 < 0,25 \end{cases} \quad \text{controle não-linear}$$

$$\begin{cases} -0,07 < u_1 < 1,0 \\ 0,04 < u_2 < 0,3 \end{cases} \quad \text{controle linear}$$

As curvas nas figuras 4.4 e 4.5, mostram o movimento do aparelho para uma condição inicial de $\begin{bmatrix} 0,88 & 0,2 & 0 & -0,03 \end{bmatrix}^T$ e nestas duas figuras, os parâmetros variam conforme a figura 4.6 (dentro de seus verdadeiros intervalos), sendo que na primeira não existe perturbação, enquanto na segunda existe, e este tipo de perturbação pode ser visto na figura 4.7. Como se observa pelas figuras, o controle não-linear torna-se mais efetivo em trazer o sistema à origem, enquanto que, pelo rastreamento, apresenta menos oscilações e não atinge o valor R desejado. Para que isto aconteça o piloto deve operar os controles.

Outras simulações foram feitas para 135 e 170 nós e conclui-se que a resposta do sistema para uma entrada R e perturbação no estado inicial para o controle não-linear são melhores do que aquelas estabelecidas pelo controle linear. Estes resultados serão omitidos.

4.3. O Controle Não-Linear Aplicado ao Sistema de Potência

O Controle de sistemas de potência constituído de redes interconectadas de linhas de transmissão que ligam geradores e carga é um problema importante. Idealmente, as cargas devem

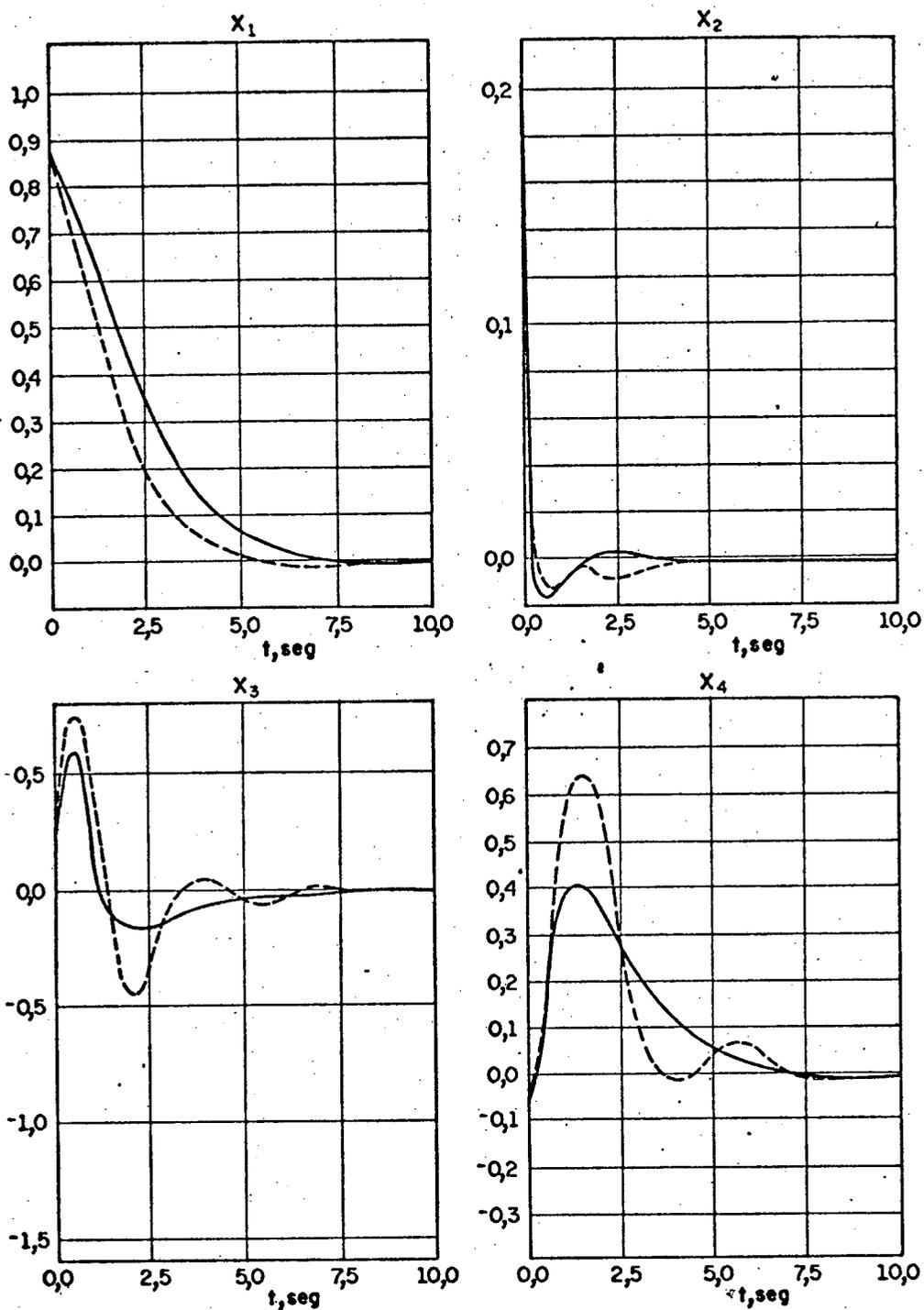


FIGURA 4.4 - Resposta para perturbação na condição inicial $x(0) = [0,88 \ 0,2 \ 0,0 \ -0,03]^T$ com parâmetros variando no tempo.

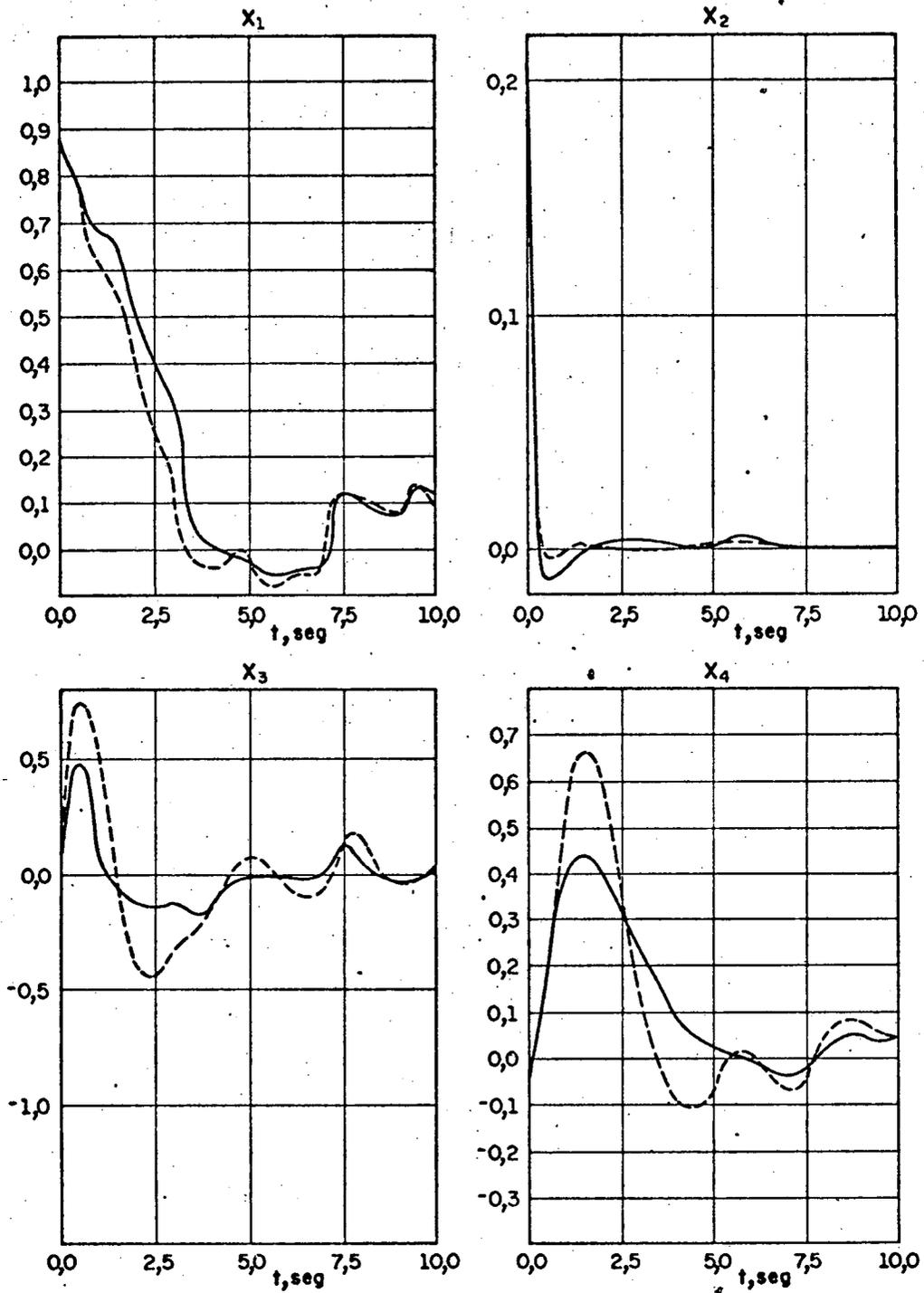


FIGURA 4.5 - Resposta para perturbação na condição inicial $x(0) = [0,88 \ 0,2 \ 0,0 \ 0,03]^T$ com parâmetros variando no tempo e perturbação conforme figura 4.7.

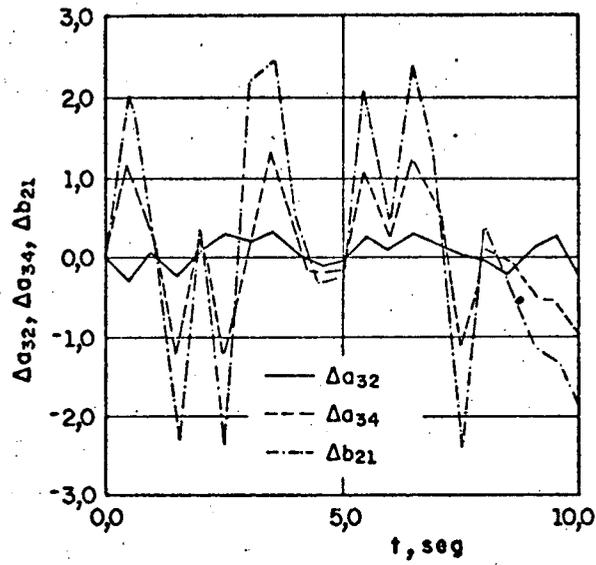


FIGURA 4.6 - Parâmetros variando no tempo, correspondendo as respostas com o estado $x(0)$ deslocado..

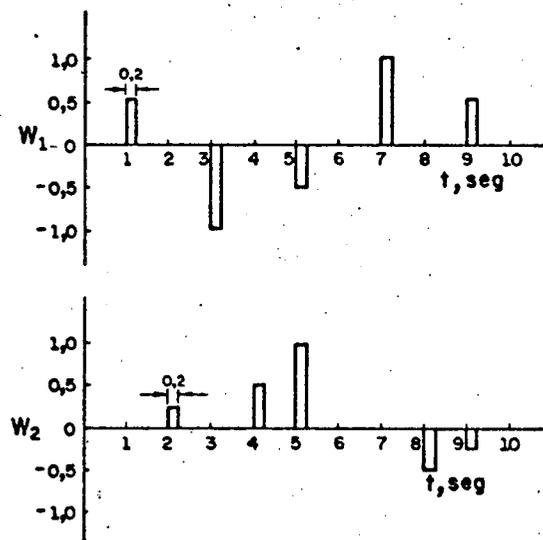


FIGURA 4.7 - Vetor perturbação $w = [w_1 \ w_2]^T$ usado no estudo da regulação.

ser alimentadas em tensão e frequência constante em todo instante. Em termos práticos, isto significa que ambas, tensão e frequência, devem ser mantidas dentro de pequenas tolerâncias. É também necessário que as máquinas não percam sincronismo após uma falta no sistema. Impactos de potência aleatórios ocorrem durante a operação normal de um sistema de potência e esta potência extra deve ser suprida pelo gerador. Além do mais, é requerido manter sem mudança a potência programada na linha de interligação no sistema interconectado. O controle deve ser projetado para desempenhar estas funções. Estes problemas tem merecido a atenção de muitos pesquisadores como [1], [15], [16], e [17]

Aqui, projeta-se um controle não-linear de modo que o sistema de malha fechada seja estável em uma larga região no espaço de estado e que a tensão terminal, frequência e fluxo de potência de interligação possam rastrear seus valores nominais sob variação dos parâmetros e carga.

O modelo do sistema é mostrado na figura 4.8. O gerador está representado por um modelo de terceira ordem baseado nas equações de Park, veja Anderson [1], com δ , $\dot{\delta}$ e ψ_f sendo as três variáveis de estado, onde δ e ψ_f são ângulo do rotor e fluxo de campo, respectivamente. Assume-se que a dinâmica do conjunto turbina e governador de velocidade é representado por um sistema de primeira ordem com constante de tempo T_p e que o sistema de excitação é suficientemente rápido de modo que sua dinâmica pode ser desprezada. Embora a inclusão de uma dinâmica de ordem maior não cause qualquer problema teórico, a implementação do controle necessita que a derivada de certas saídas sejam conhecidas.

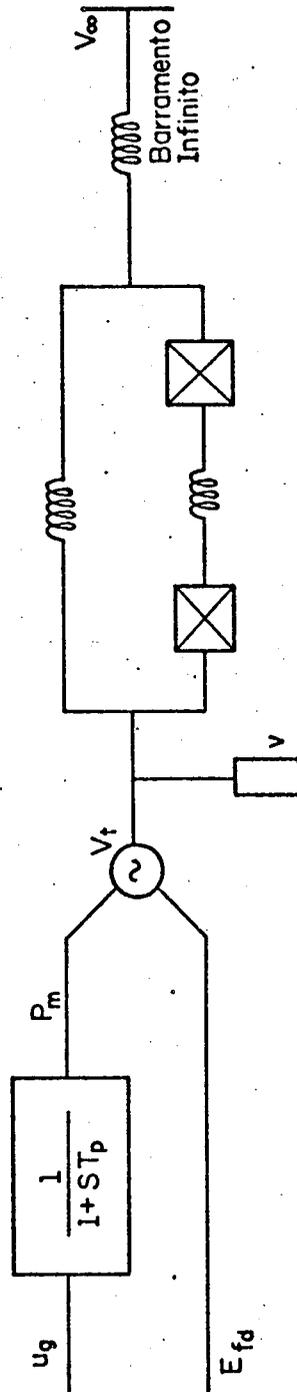


FIGURA 4.8 - O modelo de malha - aberta do sistema de potência .

O conjunto de equações para o modelo simplificado é dado por [1].

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta} = w \\ \ddot{\delta} = p_1 \sin 2\delta - p_2 w - p_3 \dot{\psi}_f \sin \delta + p_4 P_m - p_4 v \\ \dot{P}_m = (-P_m + u_g) / T_p \\ \dot{\psi}_f = p_5 \cos \delta - p_6 \dot{\psi}_f + p_7 E_{fd} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = w_0 V^2 (x_q - x'_d) / (4 H(x_t + x'_d) (x_t + x_q)) \\ p_2 = w_0 K_d / 2H \\ p_3 = w_0 V x_{af} / (2H x_f (x_t + x'_d)) \\ p_4 = w_0 / 2H \\ p_5 = w_0 r_f V x_{af} / (x_f (x_t + x'_d)) \\ p_6 = w_0 r_f (x_t + x'_d) / (x_f (x_t + x'_d)) \\ p_7 = w_0 r_f / x_f \end{array} \right. \quad (4.19)$$

são constantes dependentes de vários parâmetros, tais como reatâncias da máquina e linha de transmissão, inércia, etc(ver [1], [17] para maiores detalhes). O sinal u_g atua como entrada para o conjunto turbina e governador de velocidade e considere $T_q = (1/T_p)$. Na equação (4.18), v representa a variação na demanda de carga. Fazendo uma linearização em (4.18), que pode ser

visto no apêndice II, obteve-se

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \dot{\bar{\delta}} + \tilde{\delta} \\ \ddot{\delta} &= (2p_1 \cos 2\bar{\delta} - p_3 \psi_f \cos \bar{\delta}) \tilde{\delta} - p_2 \dot{\tilde{\delta}} - p_3 \sin \bar{\delta} \tilde{\psi}_f + p_4 (\dot{\tilde{P}}_m - \tilde{v}) \\ &\triangleq a_{21} \tilde{\delta} + a_{22} \dot{\tilde{\delta}} + a_{23} \tilde{P}_m + a_{24} \tilde{\psi}_f + c_{21} \tilde{v} \\ \dot{\tilde{P}}_m &= (-\tilde{P}_m + \tilde{u}_g) T_q \triangleq a_{33} \tilde{P}_m + b_{31} \tilde{u}_g \\ \dot{\tilde{\psi}}_f &= -p_5 \sin \bar{\delta} \tilde{\delta} - p_6 \tilde{\psi}_f + p_7 \tilde{E}_{fd} \\ &\triangleq a_{41} \tilde{\delta} + a_{44} \tilde{\psi}_f + b_{42} \tilde{E}_{fd} \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $\bar{\delta}$, $\bar{\psi}_f$ são os valores nominais do ângulo rotor δ e fluxo de campo ψ_f ; $\tilde{\delta}$, $\tilde{\psi}_f$ e \tilde{P}_m são perturbações no ângulo do rotor, fluxo de campo, torque de entrada mecânico respectivamente, e \tilde{u}_g , \tilde{E}_{fd} denotam perturbações nos controles de entrada.

Escrevendo as equações (4.20) na forma vetorial, tem-se

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v} \quad (4.21)$$

$$\triangleq (A + \Delta A) \tilde{x} + (B + \Delta B) \tilde{u} + C \tilde{v}$$

onde a_{ij} , b_{ij} e c_{21} estão dados em (4.20),

$$\tilde{x} = (\tilde{\delta} \quad \dot{\tilde{\delta}} \quad \tilde{P}_m \quad \tilde{\psi}_f)^T \quad \text{e} \quad \tilde{u} = (\tilde{u}_g \quad \tilde{E}_{fd})^T$$

As matrizes perturbação ΔA , ΔB , consideram variações no ponto de operação $(\bar{\delta} \quad \bar{\psi}_f)$, nos parâmetros da máquina e linha de transmissão. Embora estas matrizes possam ser tratadas como variáveis no

tempo sem dificuldade, em vista de considerações práticas e por simplicidade supõe-se que ΔA e ΔB são constantes.

É visto que, ΔA , ΔB e C não satisfazem as condições projetáveis, pois fica impossível identificar as matrizes D , E e F que satisfaçam $\Delta A = BD$, $\Delta B = BE$ e $C = BF$. Logo, aplica-se a teoria da transformação de sistemas no intuito de que as condições projetáveis sejam cumpridas, pois caso não seja possível, haverá uma redução na faixa de variação permitidas aos elementos incertos, como foi visto no caso do sistema helicóptero.

Para isto, escolhe-se

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = Hx \quad (4.22)$$

onde sem dúvida, o ângulo rotor e o fluxo de campo são as duas variáveis que determinam o ponto de operação do sistema e pelo controle delas, pode-se controlar a tensão terminal, frequência e potência de interligação.

De posse de (3.3), calcula-se os valores de d_1 e d_2 , sendo para isto necessário usar (3.2), logo

$$L^0 (h_1) [B + \Delta B] = h_1 [B + \Delta B] = 0$$

$$L^1 (h_1) [B + \Delta B] = h_1 [A + \Delta A] [B + \Delta B] = 0$$

$$L^2 (h_1) [B + \Delta B] = h_1 [A + \Delta A] [B + \Delta B] \neq 0$$

O que implica em $d_1 = 2$

$$L^0 (h_2) [B + \Delta B] \neq 0 \rightarrow d_2 = 0$$

e a suposição $m + \sum_{i=1}^m d_i = n$ é cumprida

Escrevendo as equações para $w_i^{(j)}$, $j \leq d_i$, $i = 1, 2$ dada em (3.7), tem-se

$$w_1 = h_1 x$$

$$\dot{w}_1 = (0 \ 1 \ 0 \ 0) x$$

$$\ddot{w}_1 = (a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24}) x + c_{21} v$$

$$w_2 = h_2 x$$

na forma vetorial.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \dot{w}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23a)$$

ou

$$z \underline{\Delta} P x + R \quad (4.23b)$$

Com os valores de $\dot{w}_1, \ddot{w}_1, w_2$, $x = \bar{P}^{-1}(z-R)$ e mais (4.23), pode-se escrever o novo espaço de estado z dado por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{41} & 0 & 0 & \tilde{a}_{44} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_{31} & \tilde{b}_{32} \\ 0 & \tilde{b}_{42} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p_4 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v} \quad (4.24)$$

$$\underline{\Delta} (A_0 + \Delta \tilde{A}) z + (B_0 + \Delta \tilde{B}) u + C \tilde{v}$$

onde

$$z = \begin{bmatrix} \bar{\delta} \\ \dot{\bar{\delta}} \\ \ddot{\bar{\delta}} \\ \psi_f \end{bmatrix}^T \text{ e os valores de } a_{ij}, b_{ij} \text{ e } \tilde{v} \text{ são}$$

$$\tilde{a}_{31} = p_3 p_5 \sin^2 \bar{\delta} + (2p_1 \cos 2\bar{\delta} - p_3 \bar{\psi}_f \cos \bar{\delta}) T_q$$

$$\tilde{a}_{32} = (2p_1 \cos 2\bar{\delta} - p_3 \bar{\psi}_f \cos \bar{\delta} - T_q p_2)$$

$$\tilde{a}_{33} = -(p_2 + T_q)$$

$$\tilde{a}_{34} = (p_6 - T_q) p_3 \sin \bar{\delta}$$

$$\tilde{a}_{41} = a_{41}$$

$$\tilde{a}_{44} = a_{44}$$

$$\tilde{b}_{31} = p_4 T_q$$

$$\tilde{b}_{32} = -p_3 p_7 \sin \bar{\delta}$$

$$\tilde{b}_{42} = b_{42}$$

$$\tilde{v} = T_q v + \dot{v}$$

Aqui, as matrizes A_0 , B_0 foram calculadas no ponto de operação nominal $\bar{\delta} = 1,26$ rad., $\bar{\psi}_f = 0,8228$ e $\dot{\delta} = 0$. Os valores nominais dos parâmetros e matrizes são

$$p_1 = 29,7428, \quad p_2 = 0,2961, \quad p_3 = 79,1855, \quad p_4 = 49,3444$$

$$p_5 = 0,7259, \quad p_6 = 0,9528, \quad p_7 = 0,2717, \quad T_q = 0,3$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -175,2931 & -69,2445 & -3,6261 & -179,0266 \\ -0,6904 & 0 & 0 & -0,9528 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 164,3168 & -20,4617 \\ 0 & 0,2717 \end{bmatrix}$$

e $\Delta \tilde{a}_{ij}$, Δb_{ij} são as perturbações nos elementos a_{ij} e b_{ij} das matrizes A_0 e B_0 .

Evidentemente, com esta nova representação, as condições projetáveis são cumpridas, onde

$$D = (B_0^T B_0)^{-1} B_0^T \Delta \tilde{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0061\Delta \tilde{a}_{31} + 0,4583\Delta \tilde{a}_{41} & 0,0061\Delta \tilde{a}_{32} & 0,0061\Delta \tilde{a}_{32} & 0,0061\Delta \tilde{a}_{34} + 0,4583\Delta \tilde{a}_{34} \\ 3,6805 \Delta \tilde{a}_{41} & 0 & 0 & 3,6805 \Delta \tilde{a}_{44} \end{bmatrix}$$

$$E = (B_0^T B_0)^{-1} B_0^T \Delta \tilde{B} \quad (4.25)$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0061\Delta \tilde{b}_{31} & 0,0061\Delta \tilde{b}_{32} + 0,4583\Delta \tilde{b}_{42} \\ 0 & 3,6805 \Delta \tilde{b}_{42} \end{bmatrix}$$

$$F = (B_0^T B_0)^{-1} B_0^T c = \begin{bmatrix} 0,301 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como mostra a figura 4.9, obteve-se uma matriz K de realimentação de estados através do uso da teoria de controle ótimo e da solução da equação de Riccati

$$A_0^T \hat{P} + \hat{P} A_0 + \hat{Q} + \hat{P} B_0 R^{-1} B_0^T \hat{P} = 0$$

a matriz de realimentação de estados encontrada é dada por

$$K = \begin{bmatrix} -0,5125 & -0,4617 & -0,1699 & 0,8085 \\ 0,1247 & 0,0536 & 0,0225 & -0,4916 \end{bmatrix}$$

de modo que $(A_0 + B_0 K)$ apresentou uma característica de resposta desejável e as matrizes \hat{Q} e \hat{R} usadas foram

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,037 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Usando (4.25) pode-se facilmente calcular que

$$\| E \| = \left[0,000037 (\Delta b_{31}^2 + \Delta b_{32}^2) + 0,0056 \Delta b_{32} \Delta b_{42} + 13,7562 \Delta b_{42}^2 \right]^{1/2}$$

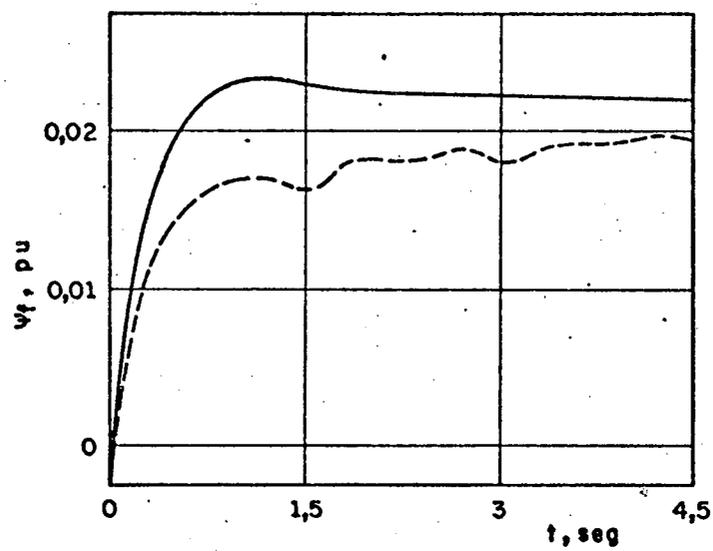
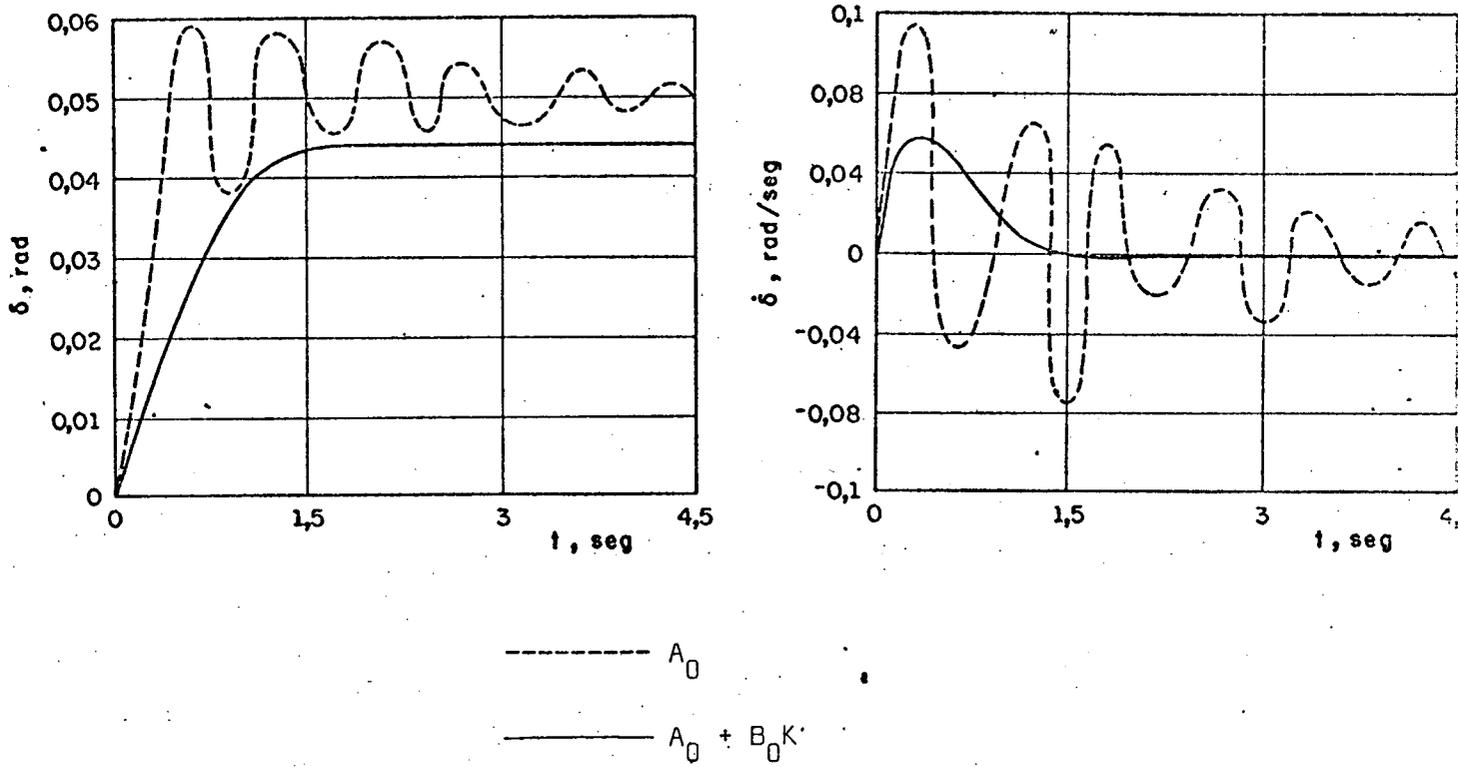


FIGURA 4.9 - Características de resposta sem e com a matriz K de realimentação.

e em vista de (2.8), assume-se que $\Delta \tilde{b}_{ij}$ são tais que $\|E\| < 1$.
Os limites de variação dos parâmetros são:

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{a}_{31}| &\leq 17,53 & , & & |\Delta \tilde{a}_{32}| &\leq 6,92 \\ |\Delta \tilde{a}_{33}| &\leq 0,36 & , & & |\Delta \tilde{a}_{34}| &\leq 17,9 \\ |\Delta \tilde{a}_{41}| &\leq 0,069 & , & & |\Delta \tilde{a}_{44}| &\leq 0,095 \\ |\Delta \tilde{b}_{31}| &\leq 16,43 & , & & |\Delta \tilde{b}_{32}| &\leq 2,05 \\ |\Delta \tilde{b}_{42}| &\leq 0,027 & & & & \end{aligned} \quad (4.26)$$

que representa um caso ruim, ou seja, uma variação de $\pm 10\%$ nas reatâncias da máquina e linha de transmissão, constante de inércia, $\bar{\delta}$, $\bar{\psi}_f$, T_p , resistência de campo, voltagem de barramento infinito e p_2 . Assume-se que v é tal que $|\dot{v} + T_q v| \leq 0,3$, então de (2.10)

$$\begin{aligned} \rho(z) &= 0,1054 + 0,75 \|z\| \\ &= a + b \|z\| \end{aligned} \quad (4.27)$$

que dá $\max \|E\| = 0,1431 < 1$

Perturbações ainda maiores $\Delta \tilde{b}_{ij}$ podem ser permitidas sem violar a condição (2.8). Usando (2.19), tem-se

$$\eta = 23,43 \varepsilon + (550 \varepsilon^2 + 6,58 \varepsilon)^{1/2} \quad (4.28)$$

Ovviamente, o tamanho da bola $B(\eta)$ pode ser reduzida pela escolha de um menor valor de ε . Observa-se que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$, e portanto, o tamanho do conjunto final limitado $S_{\Delta Z}(\bar{K}I) \supset B(\eta)$ pode ser reduzido arbitrariamente. Para obter o controle,

deve-se resolver (2.4) e, para Q escolhido como

$$Q = \begin{bmatrix} 0,008 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,008 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

a solução da equação de Lyapunov é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0,5079 & 0,1288 & 0,0027 & -1,0693 \\ 0,1288 & 0,0492 & 0,0009 & -0,2044 \\ 0,0027 & 0,0009 & 0,0002 & -0,0056 \\ -1,0693 & -0,2044 & -0,0056 & 3,8691 \end{bmatrix}$$

Agora, a lei de controle $u = Kz + p(z)$ pode ser determinada usando (2.5) e (2.10) por uma escolha de $\epsilon > 0$.

Assume-se que todos os estados são disponíveis para realimentação. Claramente, $\tilde{\delta}$ e $\dot{\tilde{\delta}}$ podem ser medidos e $\tilde{\delta}$ pode ser obtido usando-se um acelerômetro linear sobre o rotor para medir o componente tangencial da aceleração a_T a uma distância r do eixo de rotação. Sabe-se que $a_T = \dot{w}_m r$ e $\ddot{\tilde{\delta}} = p \dot{w}_m$ onde p é o número par de polos e w_m é a velocidade angular do rotor. Portanto, $\ddot{\tilde{\delta}} = (p a_T / r)$: A medida do fluxo de campo ψ_f , pode ser obtida usando-se um observador para estimá-la, entretanto, este assunto não será tratado aqui. Alternativamente, um valor aproximado de $\tilde{\psi}_f$ pode ser obtido usando a equação linearizada para tensão terminal e potência de interligação e, neste caso, os parâmetros do sistema não são precisamente conhecidos.

4.3.1. Resultados da Simulação para o Sistema de Potência

Os resultados da simulação digital foram obtidos pela escolha apropriada de $\varepsilon = 0,0001$ e portanto (4.28) fornece $\eta = 0,063$. Usou-se as perturbações $\Delta \tilde{a}_{ij}$, $\Delta \tilde{b}_{ij}$ dados em (4.26) e para um distúrbio $(\dot{v} + T_q v)$ da forma dada na figura 4.10 satisfazendo $|\dot{v} + T_q v| \leq 0,3$.

A figura 4.11, mostra a resposta do sistema com controle não-linear e linear. A condição inicial é $z(0) = [0,126 \quad 0,1 \quad 0 \quad 0,08226]^T$ com $\Delta \tilde{a}_{ij} \neq 0$, $\Delta \tilde{b}_{ij} \neq 0$ e $v \neq 0$. O controle não-linear dirige o sistema para $(\tilde{\delta}, \tilde{\delta}, \tilde{\psi}_f) = (-0,00056, 0,0008, -0,00012)$ em 3 segundos, que está muito próximo de zero, enquanto que os estados obtidos com o uso do controle linear foram $(-0,041, -0,035, -0,0155)$. Portanto, o controle não-linear é mais efetivo em trazer o sistema à origem do que o controle linear.

As trajetórias correspondentes a aplicação dos controles $u = Kz + p(z) + R$ e $u = Kz + R$ para uma condição inicial $z(0) = 0$ e $R = [0,045 \quad 0,103]^T$ são mostrados na figura 4.12 e indicam que fica difícil atingir tais valores. Outros resultados foram obtidos e mostram que, através do conhecimento de R , não se consegue atingir um valor para $\tilde{\delta}$ e $\tilde{\psi}_f$, pois em regime permanente seus valores são não-nulos, e não é possível controlar, por exemplo, somente ângulo ou fluxo. Assim, existe um acoplamento no controle R com $\tilde{\delta}$, $\tilde{\psi}_f$ em regime. Por esta razão, desenvolveu-se uma nova lei de controle que eliminou este problema, onde um valor de $\tilde{\delta}$ ou $\tilde{\psi}_f$ pode ser atingido. Isto é conhecido como o controle do sistema num ponto não-nulo no espaço

de estado e será apresentado no capítulo seguinte.

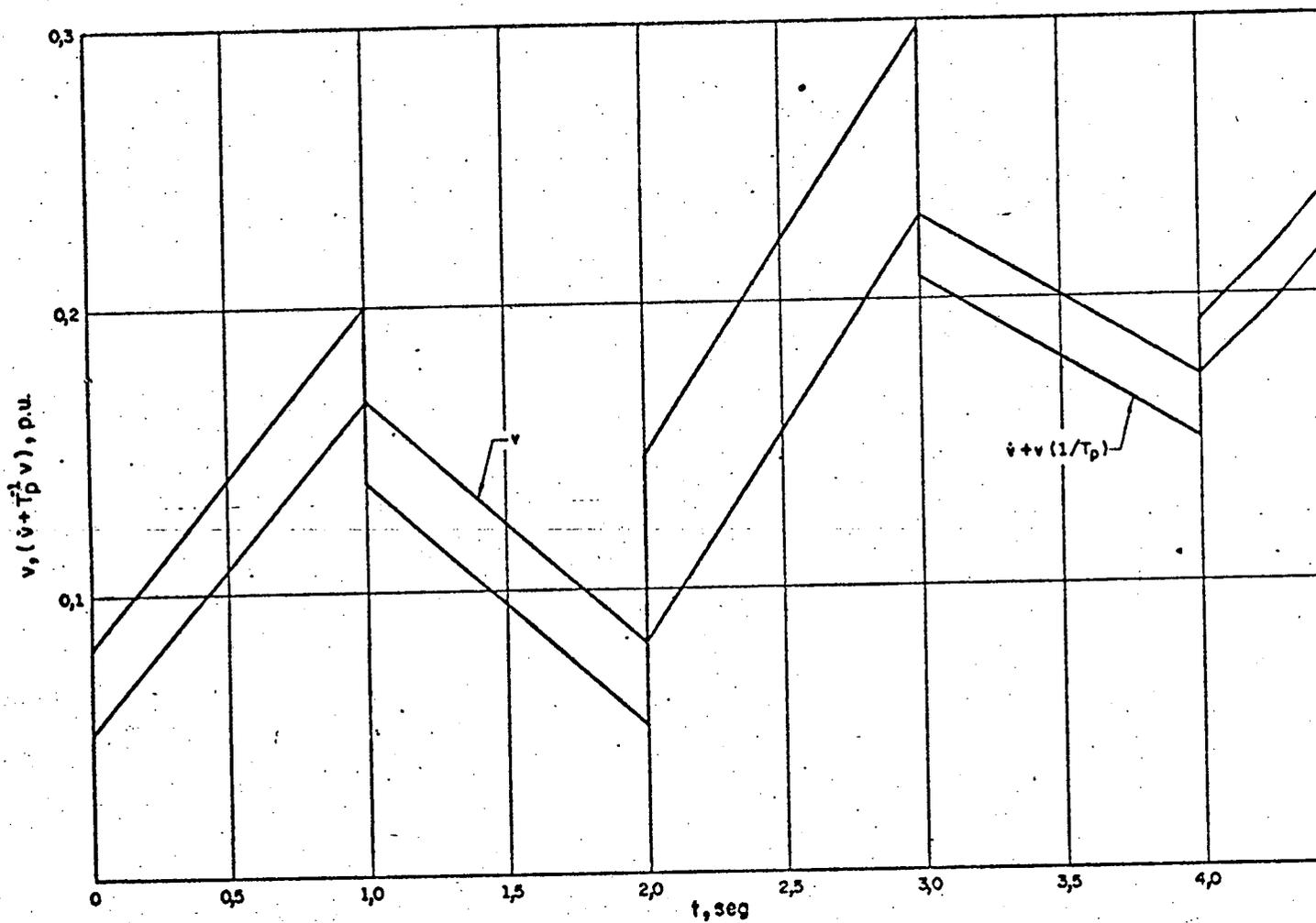


FIGURA 4.10 - Curva de variação de carga local.

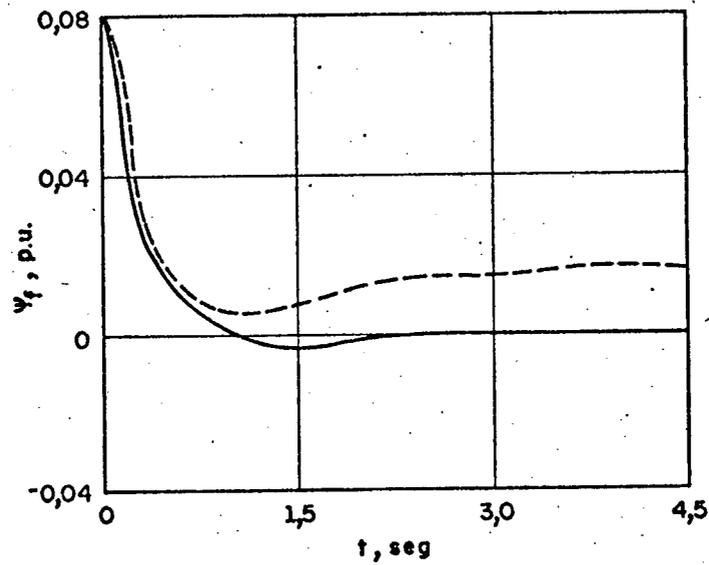
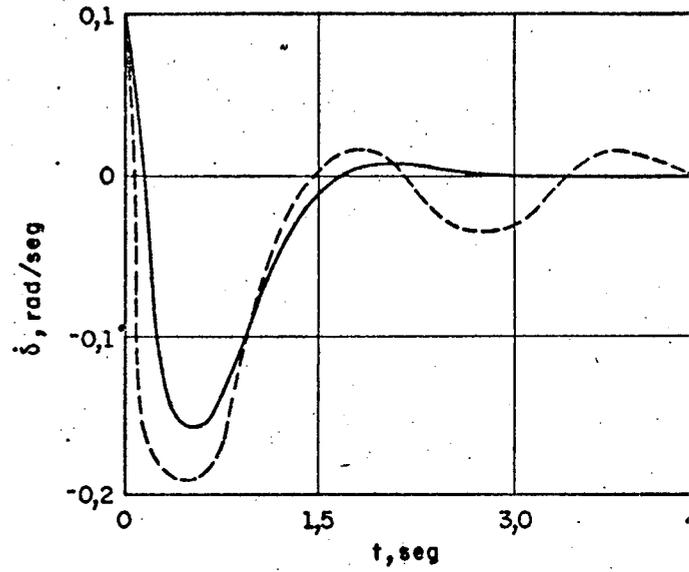
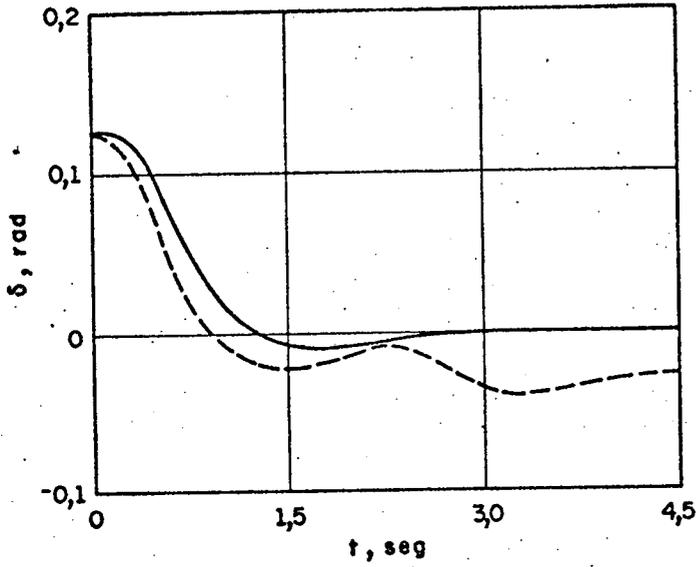


FIGURA 4.11 - Resposta para perturbação na condição inicial $z(0) = [0,126 \ 0,1 \ 0,0 \ 0,08226]^T$, com incerteza nos parâmetros de $\pm 10\%$.

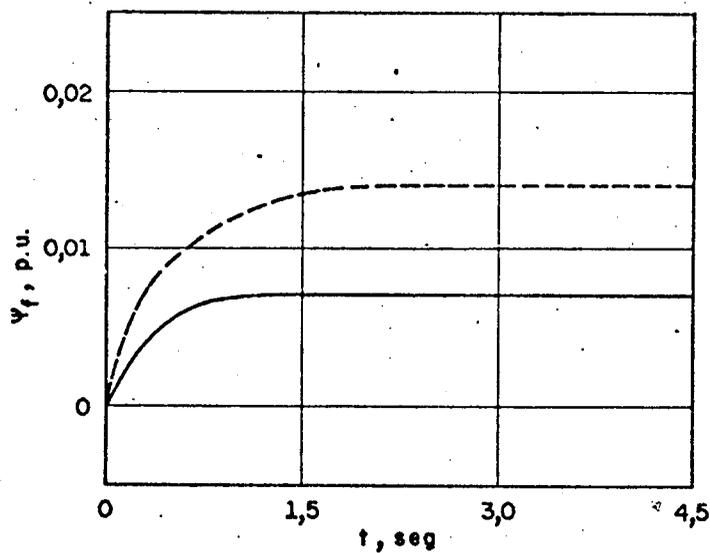
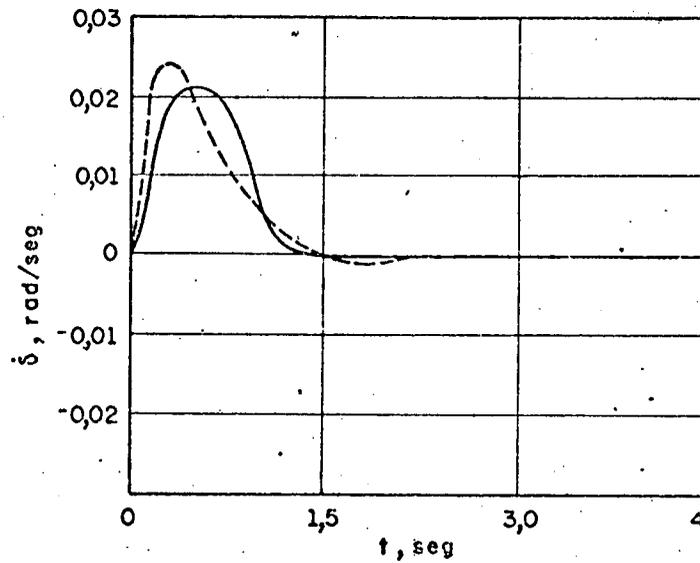
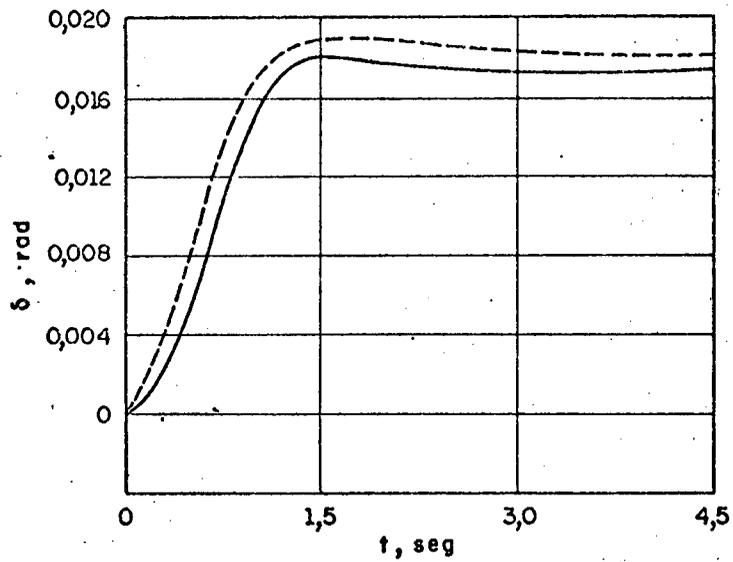


FIGURA 4.12 - Resposta para $R = \begin{bmatrix} 0,045 & \\ & 0,103 \end{bmatrix}^T$.

CAPÍTULO 5

O NOVO CONTROLE NÃO-LINEAR PARA O CONTROLE DO PONTO DE AJUSTE NÃO-NULO

5.1. Introdução

Diversos trabalhos tem surgido com o projeto de controladores para sistemas dinâmicos incertos, ver [3], [4] e [13]. Nestes trabalhos, somente a questão da estabilização de trajetórias de sistemas incertos na proximidade de estado zero tem sido tratado. Alguma dificuldade surge, quando diretamente tenta-se aplicar os resultados existentes, para fazer uma mudança no ponto de operação em sistemas incertos (veja capítulo anterior). Isto motivou o tratamento do problema do controle de sistemas dinâmicos incertos num novo espaço de estado, com a construção de um controle de realimentação de estados que garanta que cada resposta do sistema entre e permaneça dentro de uma pequena vizinhança de um ponto de ajuste desejável não-nulo.

Neste capítulo é apresentado a teoria para projeto do controle do ponto de ajuste não-nulo, em sistemas projetáveis e não-projetáveis.

5.2. O Controle do Ponto de Ajuste não-Nulo em Sistemas Dinâmicos Incertos Projetáveis.

Através das simulações anteriores, notou-se que o controle não-linear não atua bem para rastrear um degrau (ou

seja, modificar o ponto de operação) em sistemas incertos. Para contornar tal problema, aplicou-se uma mudança de estado dada por $z = x - \alpha$, isto é, assumimos uma nova equação em z e com o novo controle garantindo estabilidade assintótica para o sistema, $z \rightarrow 0$, logo $x \rightarrow \alpha$ onde α é o ponto de ajuste, e bons resultados foram obtidos. Para isto, considere o sistema

$$\dot{x} = (\Delta + \Delta A) x + (B + \Delta B) u + Cv \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o controle e $v \in \mathbb{R}^l$ é a entrada incerta. As matrizes ΔA e ΔB são incertezas na matriz do sistema e matriz entrada respectivamente.

Admitir que as suposições (i), (ii) e (iii) vistas no capítulo 2, item 2.2, são satisfeitas.

Seja o controle (verifique figura 5.1)

$$u = Kz + p(z) - L\alpha \quad (5.2)$$

onde K é uma matriz constante ($m \times n$), a função $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é tal que

$$p(z) = \begin{cases} - \frac{(B^T P z)}{\|B^T P z\|} \rho(z), & \text{se } \|B^T P z\| > \epsilon \\ - \frac{(B^T P z)}{\epsilon} \rho(z), & \text{se } \|B^T P z\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (5.3)$$

ϵ é uma constante positiva, P uma matriz simétrica definida positiva e é solução da equação Lyapunov

$$\bar{A}^T P + P \bar{A} = -Q$$

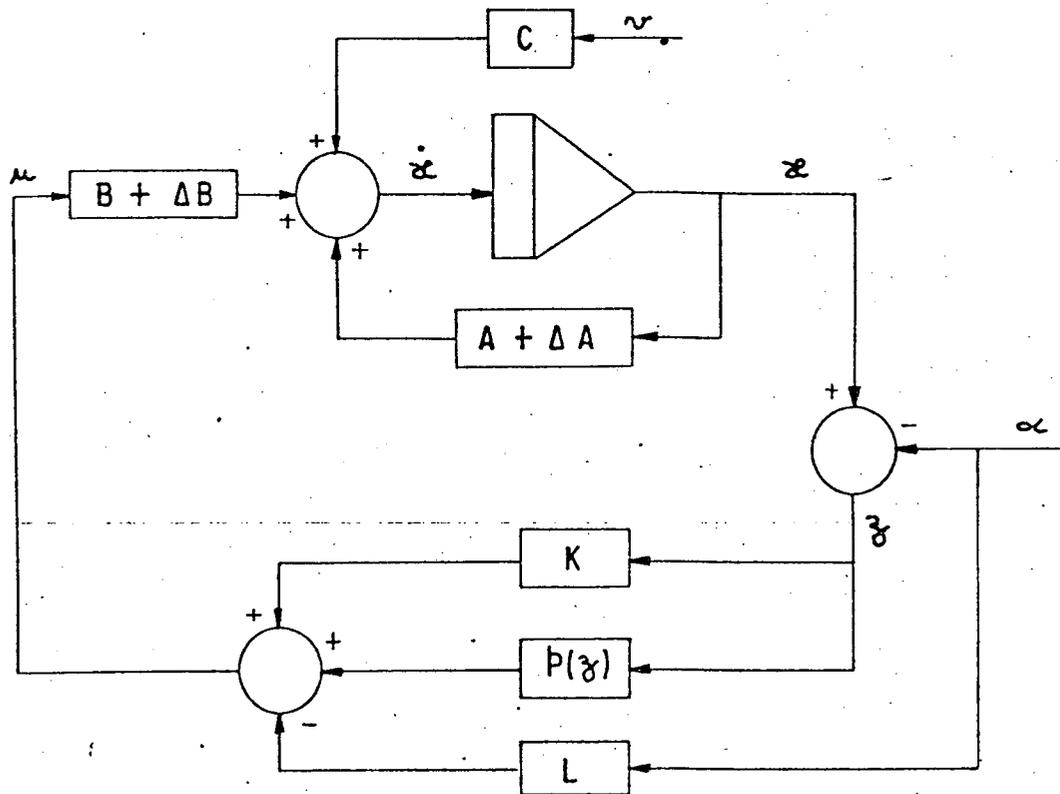


FIGURA 5.1 - Diagrama de blocos do controle do ponto de ajuste não nulo ($u = Kz + p(z) - Lz$).

para uma dada matriz Q constante simétrica definida positiva ($n \times n$), onde

$$\bar{A} = A + BK$$

e $p_V(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ será visto posteriormente.

Considere A decomposta como

$$A = A_m + \tilde{A} = BL + \tilde{A} \quad (5.4)$$

sendo que A_m e \tilde{A} representam a parte projetável e não-projetável da matriz A , respectivamente. Supor que α é o ponto de ajuste desejável, então define-se

$$z = x - \alpha \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) e (5.2) em (5.1) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (A + \Delta A) (z + \alpha) + (B + \Delta B) (Kz + p(z) - L\alpha) + Cv \\ &= (A + BK) z + A\alpha - BL\alpha + \Delta A (z + \alpha) + \Delta B (Kz + p(z) - L\alpha) \\ &\quad + B p(z) + Cv \end{aligned} \quad (5.6)$$

De (5.4)

$$A\alpha = BL\alpha + \tilde{A}\alpha \quad (5.7)$$

O tratamento dado aqui considera

$$\tilde{A}\alpha = 0 \quad (5.8)$$

sendo que no ítem seguinte não será usado (5.8). Em vista de (5.8), reescreve-se a equação (5.6)

$$\dot{z} = \bar{A}z + B p(z) + \Delta A (z + \alpha) + \Delta B (Kz + p(z) - L\alpha) + Cv$$

De posse das condições projetáveis vistas no capítulo 2, tem-se

$$\dot{z} = \bar{A}z + B p(z) + B e(z,t) \quad (5.9)$$

onde

$$e(z,t) = D (z + \alpha) + E (Kz + p(z) - L\alpha) + Fv \quad (5.10)$$

A norma da equação (5.10) será

$$\begin{aligned} \|e(z,t)\| \leq & \left[\max \|D\| + \max \|EK\| \|z\| + \max \|D\alpha\| + \right. \\ & \left. \max \|EL\alpha\| + \max \|Fv\| + \max \|E\| \rho(z) \right] \triangleq \rho(z) \end{aligned} \quad (5.11)$$

A equação (5.11) pode ser resolvida para $\rho(z)$ se

$$1 - \max \|E\| > 0 \quad (5.12)$$

Portanto se (5.12) é satisfeita, obtém-se

$$\rho(z) = \left[1 - \max \|E\| \right]^{-1} \left[\left(\max \|D\| + \max \|EK\| \right) \|z\| + \max \|EL\alpha\| + \max \|Fv\| \right]$$

$$\triangleq a + b \|z\| \quad (5.13)$$

onde a e b são constantes que satisfazem (5.13).

Agora, considere a bola fechada, $B(\eta)$, centrada em $z=0$ e com raio

$$\eta = \frac{\epsilon/4}{\lambda_{\min}(Q)} b + \left[\left[\frac{\epsilon/4}{\lambda_{\min}(Q)} b \right]^2 + \frac{\epsilon/2}{\lambda_{\min}(Q)} a \right]^{1/2} \quad (5.14)$$

Define-se os elipsóides

$$Z(k) \triangleq \{z \in \mathbb{R}^n / z^T P z \leq k = \text{constante} > 0\}$$

sendo que

$$\underline{k} \triangleq \min \{ k / Z(k) \supseteq B(\eta) \}$$

$Z(\underline{k})$ é o menor elipsóide contendo a bola $B(\eta)$, de maneira que

$$\underline{k} = \lambda_{\max}(P) \eta^2 \quad (5.15)$$

Considere todos elipsóides $Z(\bar{k})$ com $\bar{k} > \underline{k}$, e $Z(k_0)$ com $k_0 = z_0^T P z_0$. Finalmente, se $z_0 \notin Z(\bar{k})$, então

$$C_0 \triangleq \min \{ z^T Q z - \epsilon/2 \rho(z) / z \in Z(k_0) \setminus \overset{0}{Z}(\bar{k}) \} \quad (5.16)$$

onde $\overset{0}{Z}$ é o interior do conjunto Z .

O teorema a seguir, mostra cada elipsóide $X(\bar{k})$ como um conjunto limitado ultimamente.

Teorema 5.1

Considere o sistema (5.1) com controle (5.2), satisfazendo as condições projetáveis, como também (5.8) e (5.12). Então, para cada condição inicial (x_0, t_0) e $\bar{k} > \underline{k}$, a solução correspondente para (\tilde{z}_0, t_0) é limitada uniformemente com

$$d(\tilde{z}_0) = \begin{cases} \|\tilde{z}_0\| (\lambda_{\max}(P) / \lambda_{\min}(P))^{1/2} & \text{para } \tilde{z}_0 \notin Z(\bar{k}) \\ \bar{k} / \lambda_{\min}(P)^{1/2} & \text{para } \tilde{z}_0 \in Z(\bar{k}) \end{cases}$$

e é limitada ultimamente uniformemente com respeito a $Z(\bar{k})$ com

$$T(\tilde{z}_0, Z(\bar{k})) = \begin{cases} (k_0 - \bar{k}) / c_0 & \text{para } \tilde{z}_0 \notin Z(\bar{k}) \\ 0 & \text{para } \tilde{z}_0 \in Z(\bar{k}) \end{cases}$$

Prova.

Começando com a função de Lyapunov $V = z^T P z$, onde $P > 0$ e encontrando sua derivada usando o controle dado em (5.2) e a equação (5.9), obtém-se

$$L(z, t) < -z^T Q z + (\epsilon/2) \rho_V(z)$$

de maneira que

$$L(z, t) < 0 \tag{5.17}$$

$$z^T Q z - (\epsilon/2) \rho_V(z) > 0$$

Conseqüentemente a condição (5.17) é assegurada para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $z \in B(\eta)$, onde η é dado em (5.14). Esta demonstração pode ser vista em mais detalhes no capítulo 2, item 2.3.

Agora, considere o menor elipsóide de Lyapunov que contém a bola $B(\eta)$, chamado $Z(\underline{k})$, onde \underline{k} está dado em (5.15).

Sob o aspecto de

$$\lambda_{\min}(P) \|z\|^2 \leq z^T P z \leq \lambda_{\max}(P) \|z\|^2 \quad (5.18)$$

onde $\lambda_{\min}(P) > 0$, existem dois casos a analisar pela condição (5.17) que implica em contorno à todas soluções, isto é, se $z(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$, é uma solução de (5.9) com controle (5.2), então

$$a) z_0 \notin Z(\bar{k}) \rightarrow z(t) \in Z(k_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$b) z_0 \in Z(\bar{k}) \rightarrow z(t) \in Z(\bar{k}) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

então segundo (5.18)

$$0 < \lambda_{\min}(P) \|z(t)\|^2 \leq z^T(t) P z(t) \leq z_0^T P z_0 \leq \lambda_{\max}(P) \|z_0\|^2$$

para o caso a), e

$$0 < \lambda_{\min}(P) \|z(t)\|^2 \leq z^T(t) P z(t) \leq \bar{k}$$

Para o caso b), o qual conduz de uma vez para o resultado do contorno uniforme.

Para o resultado do contorno final do teorema, segue-se novamente da condição (5.17). Se $z_0 \in Z(\bar{k})$ então $T(z_0, Z(\bar{k})) = 0$. Se $z_0 \notin Z(\bar{k})$, então $V(z(t))$ decresce tanto quanto $z(t) \notin Z(\bar{k})$ e a trajetória da solução atinge a fronteira de $Z(\bar{k})$ em um intervalo de tempo finito. O limite superior deste intervalo é obtido considerando

$$\frac{dV(z(t))}{dt} = L(z, t) \leq -C_0 \quad (5.19)$$

com C_0 dado por (5.16). Se \bar{t} é tal que $z(\bar{t})$ pertence a fronteira $Z(\bar{k})$, isto é, \bar{t} é o instante de uma trajetória solução interceptar a linha demarcadora de $Z(\bar{k})$, então (5.19) leva para

$$V(z(\bar{t})) - V(z_0) \leq -C_0 (\bar{t} - t_0)$$

de modo que

$$[\bar{t} - t_0] \leq \frac{k_0 - \bar{k}}{C_0} \triangleq T(z_0, Z(\bar{k}))$$

que conclui a prova do teorema. A seguir, mostra-se como proceder para o controle do ponto de ajuste não-nulo em sistemas não projetáveis.

5.3. O Controle do Ponto de Ajuste não-Nulo em Sistemas Dinâmicos Incertos não-Projetáveis.

Agora, supor que as matrizes incertas do sistema não satisfazem às condições projetáveis e uma decomposição nestas matrizes faz-se necessário. Para isto, considere o sistema dado em (5.1), o controle em (5.2), que a matriz A obedece (5.4) e seja a equação em z dada por (5.6) com $Cv = 0$, isto é

$$\dot{z} = \bar{A}z + A\alpha - BL\alpha + \Delta A(z + \alpha I) + \Delta B(Kz + p(z) - L\alpha I + Bp(z))$$

onde de (5.7) tem-se

$$A\alpha - BL\alpha = \tilde{A}\alpha$$

e introduzindo na equação acima fica-se com

$$z = \bar{A}z + Bp(z) + \tilde{A}\alpha + \Delta A(z + \alpha) + \Delta B(Kz + p(z) - L\alpha) \quad (5.20)$$

As matrizes ΔA , ΔB são dadas por

$$\begin{aligned} \Delta A &= \Delta A_m + \tilde{\Delta A} = BD + \tilde{\Delta A} \\ \Delta B &= \Delta B_m + \tilde{\Delta B} = BE + \tilde{\Delta B} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) em (5.20)

$$\dot{z} = \bar{A} z + Bp(z) + B [D(z+\alpha) + E(p(z) + Kz - L\alpha)] + \bar{A}\alpha + \Delta A(z+\alpha) + \Delta B(p(z) + Kz - L\alpha)$$

ou então

$$\dot{z} = \bar{A}z + Bp(z) + B e_m + \tilde{e}$$

onde

$$e_m(z,t) = D(z+\alpha) + E(p(z) + Kz - L\alpha) \quad (5.22)$$

$$\tilde{e}(z,t) = \bar{A}\alpha + \Delta A(z+\alpha) + \Delta B(p(z) + Kz - L\alpha) \quad (5.23)$$

Os termos e_m e \tilde{e} são chamados de vetor de erro projetável e vetor de erro não-projetável respectivamente.

Para encontrar a função $\rho_V(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, considere a norma da equação (5.22), logo

$$\|e_m(z,t)\| \leq [\max \|D\| + \max \|EK\|] \|z\| + \max \|D\alpha\| + \max \|EL\alpha\| + \max \|E\| \rho_V(z) \triangleq \rho_V(z) \quad (5.24)$$

e foi usado $\|p(z)\| \leq \rho_V(z)$ em vista de (5.3). Note que a condição $[1 - \max \|E\| > 0]$ deve ser cumprida, então

$$\rho_V(z) = (1 - \max \|E\|)^{-1} \left[[\max \|D\| + \max \|EK\|] \|z\| + \max \|D\alpha\| + \max \|EL\alpha\| \right]$$

$$\triangleq a + b \|z\| \quad (5.25)$$

sendo que

$$a = [1 - \max \|E\|]^{-1} (\max \|D\alpha\| + \max \|EL\alpha\|)$$

$$b = [1 - \max \|E\|]^{-1} (\max \|D\| + \max \|EK\|)$$

e com isto, o problema de construção do controlador está resolvido. Agora, faz-se necessário ter conhecimento de que maneira a parte não-projetável está influenciando nos limites permitido de variação aos elementos incertos. Para isto, considere inicialmente a norma da equação (5.23)

$$\|\tilde{e}(z, t)\| \leq \max \|\tilde{A}\alpha\| + \max \|\Delta\tilde{A}(z + \alpha)\| + \max \|\Delta\tilde{B}(p(z) + Kz - L\alpha)\| \quad (5.26)$$

introduzindo (5.25) em (5.26) tem-se

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}(z, t)\| &\leq \{ \max \|\Delta\tilde{A}\| + b \max \|\Delta\tilde{B}\| + \max \|\Delta\tilde{B}K\| \} \|z\| + \\ &+ \{ \max \|\tilde{A}\alpha\| + \max \|\Delta\tilde{A}\alpha\| + a \max \|\Delta\tilde{B}\| + \max \|\Delta\tilde{B}L\alpha\| \} \\ &= \tilde{M}_V + \tilde{M} \|z\| \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\tilde{M} = \max \|\Delta\tilde{A}\| + b \max \|\Delta\tilde{B}\| + \max \|\Delta\tilde{B}K\| \quad (5.28)$$

$$\tilde{M}_V = \max \|\tilde{A}\alpha\| + \max \|\Delta\tilde{A}\alpha\| + a \max \|\Delta\tilde{B}\| + \max \|\Delta\tilde{B}L\alpha\| \quad (5.29)$$

Agora, seja a função de Lyapunov do tipo $V(z) = z^T Pz$ e calculando a derivada da função de Lyapunov tem-se

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial z} (\bar{A} z + B[p(z) + e_m]) + \tilde{e}^T$$

ou seja

$$\dot{V} \leq -\gamma_2 \|z\|^2 + \gamma_1 \|z\| + \gamma_0 + 2z^T P \tilde{e} \quad (5.30)$$

a demonstração desta parte pode ser vista em mais detalhes no capítulo 2, item 2.4. Os valores dos

γ_i , $i = 0, 1, 2$ são

$$\gamma_2 = \lambda_{\min}(Q)$$

$$\gamma_1 = b\epsilon / 2$$

$$\gamma_0 = a\epsilon / 2$$

Substituindo (5.27) em (5.30) e agrupando os termos, tem-se

$$\dot{V} \leq (2 \tilde{M} \|P\| - \gamma_2) \|z\|^2 + (2 \|P\| \tilde{M}_V + \gamma_1) \|z\| + \gamma_0 \quad (5.31)$$

Para que $\dot{V} < 0$, deve-se ter

$$2 \tilde{M} \|P\| - \gamma_2 < 0 \rightarrow \gamma_2 > 2 \tilde{M} \|P\|$$

$$\tilde{M} < \frac{\gamma_2}{2 \|P\|}$$

Se $\tilde{M}^* = \frac{\gamma_2}{2 \|P\|}$, então

$$\tilde{M} < M^*$$

e com mais esta restrição, existirá uma redução na faixa permitida dos elementos incertos. O resto da demonstração que calcula o raio $\tilde{\eta}$, como também os elipsóides que estão envolvendo a bola $B(\tilde{\eta})$ seguem o mesmo procedimento dado no capítulo 2. Portanto o problema de obtenção de um novo ponto de operação não-nulo tanto em sistemas projetáveis como em sistemas não-projetáveis, deixará de existir. Isto pode ser melhor visualizado no capítulo seguinte que mostra aplicação desta teoria nos dois sistemas já estudados anteriormente.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES DO NOVO CONTROLE NÃO-LINEAR PARA OBTENÇÃO DO PONTO DE AJUSTE NÃO-NULO

6.1. Introdução

Devido a dificuldade surgida em aplicar os resultados existentes em sistemas incertos, veja capítulo 4, onde somente a questão da regulação das trajetórias em pequenas vizinhanças de um particular estado de equilíbrio tem sido tratado, desenvolveu-se uma nova lei de controle para o controle do ponto de ajuste não-nulo, veja capítulo 5. Os resultados usando este controle tanto no modelo do helicóptero como também no modelo do sistema de potência serão apresentados a seguir.

6.2. O Controle do Ponto de Ajuste não-Nulo para o Modelo do Helicóptero.

Nesta seção, aplica-se os resultados obtidos para projeto de novo controle não-linear no modelo do helicóptero. A dinâmica do aparelho no plano vertical pode ser vista no capítulo 4, item 4.2. Antes de mostrar os resultados com a aplicação do controle,

$$u = Kz + p(z) \quad (6.1)$$

faz-se necessário ter conhecimento da matriz L e de $p_v(z)$.

Para o cálculo desta matriz, decompõem-se segundo (5.7), ou seja

$$A = A_m + \tilde{A}$$

definindo

$$A_m \triangleq BL$$

onde

$$L = (B^T B)^{-1} B^T A$$

$$= B^+ A, \quad B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$$

portanto

$$L = \begin{bmatrix} -0,038 & 0,065 & 0,201 & 0,2366 \\ -0,024 & 0,163 & 0,092 & 0,63 \end{bmatrix}$$

e as matrizes A_m e \tilde{A} são dadas por

$$A_m = BL = \begin{bmatrix} -0,021 & 0,057 & 0,1051 & 0,2155 \\ 0,047 & -1,0 & 0,0142 & -3,9430 \\ 0,102 & 0,373 & -0,696 & 1,5226 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = A - BL = \begin{bmatrix} -0,0156 & -0,03 & -0,0863 & -0,671 \\ 0,0012 & -0,01 & -0,0118 & -0,0778 \\ -0,0018 & -0,0049 & -0,011 & -0,1026 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo (5.25)

$$a = (1 - \max \|E\| I^{-1} (\max \|D^\alpha\| + \max \|EL^\alpha\| I)^{-1}$$

$$b = (1 - \max \|E\| I^{-1} (\max \|D\| + \max \|EK\| I)^{-1}$$

e para um $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$\rho_V(z) = 0,2 + 0,29 \|z\| \quad (6.2)$$

Efetuada o cálculo de $\tilde{\eta}$ nas condições apresentadas no capítulo 4, ou seja, a matriz $Q = I$, $\epsilon = 0,01$ e a mesma faixa de variação dos elementos, notou-se que o contorno final, do elipsóide de Lyapunov envolvente de $\tilde{\eta}$, tornou-se bem maior do que o estabelecido no capítulo 4, ítem 4.2.2. Por conseguinte, foi necessário uma nova redução na faixa de variação permitida aos elementos incertos de modo que

$$|\Delta a_{32}| \leq 0,02$$

$$|\Delta a_{34}| \leq 0,03$$

$$|\Delta b_{21}| \leq 0,03$$

(6.3)

e assim, atinge-se um valor $\tilde{\eta} = 0,0578$, proporcionando um elipsóide de Lyapunov envolvente pequeno, e portanto, valores próximos ao ponto de ajuste α serão obtidos. Isto pode ser observado com os resultados apresentados na simulação.

6.2.1. Cálculo da Faixa dos Parâmetros usando o Controle Linear

Antes de mostrar os resultados da simulação, é interessante comparar o efeito do controle não-linear (6.1) com o controle linear $u = Kz - L\alpha$, ($p(z) = 0$), sobre os limites de variação dos parâmetros. Sendo assim, calcula-se a derivada de $V = z^T Pz$, considerando (5.1) com $v = 0$, $u = Kz - L\alpha$, $z = x - \alpha$ e $A = BL - A$ de modo que

$$\dot{V} = -z^T Qz + 2 z^T P(\Delta A + \Delta BK)z + 2 z^T P(\bar{A} + \Delta A - \Delta BL)\alpha$$

onde $\bar{A}^T P + PA = -Q$ e $\bar{A} = A + BK$, ou seja

$$\dot{V} \leq -(\lambda_{\min}(Q) - 2 \lambda_{\max}(P) \bar{M}) \|z\|^2 + 2 \lambda_{\max}(P) \bar{M}_V \|z\| \|\alpha\| \quad (6.4)$$

$$\bar{M} = \|\Delta A\| + \|\Delta BK\|$$

$$\bar{M}_V = (\|\bar{A}\| + \|\Delta A\| + \|\Delta BL\|) \|\alpha\|$$

Para que (6.4) seja satisfeita

$$\lambda_{\min}(Q) - 2 \lambda_{\max}(P) \bar{M} > 0$$

$$\bar{M} < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2 \lambda_{\max}(P)} = M^* \quad (6.5)$$

Para obter resultado do contorno final, $\dot{V} < 0$, ou $(\lambda_{\min}(Q) -$

$$- 2 \lambda_{\max}(P) \bar{M}) \|z\| - 2 \lambda_{\max}(P) \bar{M}_V > 0$$

logo

$$\|z\| \geq \frac{2 \lambda_{\max}(PI \tilde{M}_v)}{\lambda_{\min}(Q) - 2 \lambda_{\max}(PI \tilde{M})} \underline{\Delta} \tilde{\eta} \quad (6.6)$$

portanto, para encontrar os limites de variação dos parâmetros, a condição (6.5) deve ser assegurada de modo a proporcionar um $\tilde{\eta}$ em (6.6) pequeno. Testando com os limites encontrados no capítulo 4, ou seja

$$\begin{cases} \Delta \bar{a}_{32} = 0,05 \\ \Delta \bar{a}_{34} = 0,01 \\ \Delta \bar{b}_{21} = 0,04 \end{cases} \quad (6.7)$$

e para a mesma matriz $Q = I$, encontra-se um $\tilde{\eta}$ na ordem de 10; isto quer dizer que uma redução maior em (6.7) deve acontecer de modo que, $\tilde{\eta}$ alcance um valor pequeno. Portanto, o controle não linear para o controle do ponto de ajuste não-nulo tolera uma faixa de variação maior do que o controle linear.

6.2.2. Resultados da Simulação para o Modelo do Helicóptero usando o Novo Controle Não-Linear

Embora a faixa de variação dos elementos tenham diminuído, os resultados da simulação apresentam estes elementos variando em seus verdadeiros intervalos, conforme (4.3). Pretende-se primeiro fazer o controle da velocidade horizontal para depois então, alterando o valor de α , controlar a velocidade vertical. O valor de $\tilde{\eta}$ usado foi 0,0578 para um $\epsilon = 0,01$, sendo a

matriz $Q = I$. A resposta para entrada $u = Kz + p(z) - L\alpha$ e $u = Kz - L\alpha$ ($p(z) = 0$) com $\alpha = (0,9 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $z(0) = 0$ e o aparelho deslocando-se a uma velocidade de 60 knots está mostrando na figura 6.1. Os valores alcançados pela velocidade horizontal e vertical foram 0,85 e 0,0 respectivamente e estão bem próximos do ponto de ajuste. As variações nas magnitudes do controle não-linear são

$$0,034 \leq u_1 \leq 1,22$$

$$0,02 \leq u_2 \leq 0,22$$

A figura 6.2 mostra que para um $\alpha = (0 \ 0,9 \ 0 \ 0)^T$, os valores da velocidade horizontal e vertical são -0,083 e 0,9 respectivamente e as duas outras variáveis, taxa de inclinação (x_3) e ângulo de inclinação (x_4), alcançam valores próximos de zero com pequenas oscilações. Logo, pode-se dizer que, para um α controlando a velocidade horizontal ou vertical, o erro em regime é pequeno pois valores na proximidade de α são atingidos. Outras simulações foram feitas para 135 e 170 nós, apresentando bons resultados, e não constam aqui.

Evidentemente estes resultados apresentados não são únicos, podendo ser melhorados através da manipulação de ϵ , matriz Q e matrizes peso \tilde{Q} e \tilde{R} . De uma maneira geral, pode-se dizer que o controle não-linear é superior ao controle linear.

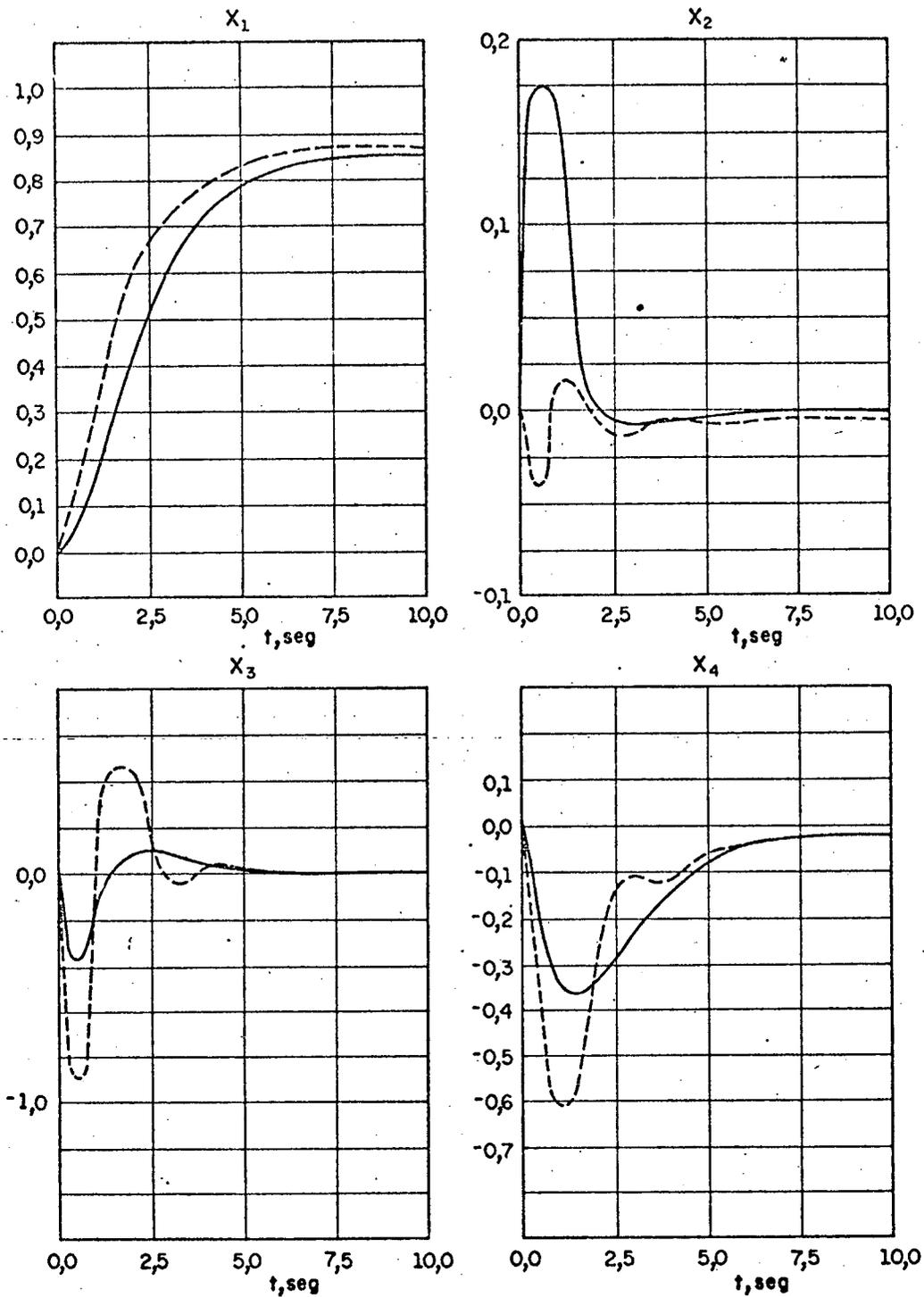


FIGURA 6.1 - Resposta do controle do ponto de ajuste $(0,9 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ com o aparelho deslocando-se a 60 nós . (Controle da velocidade horizontal).

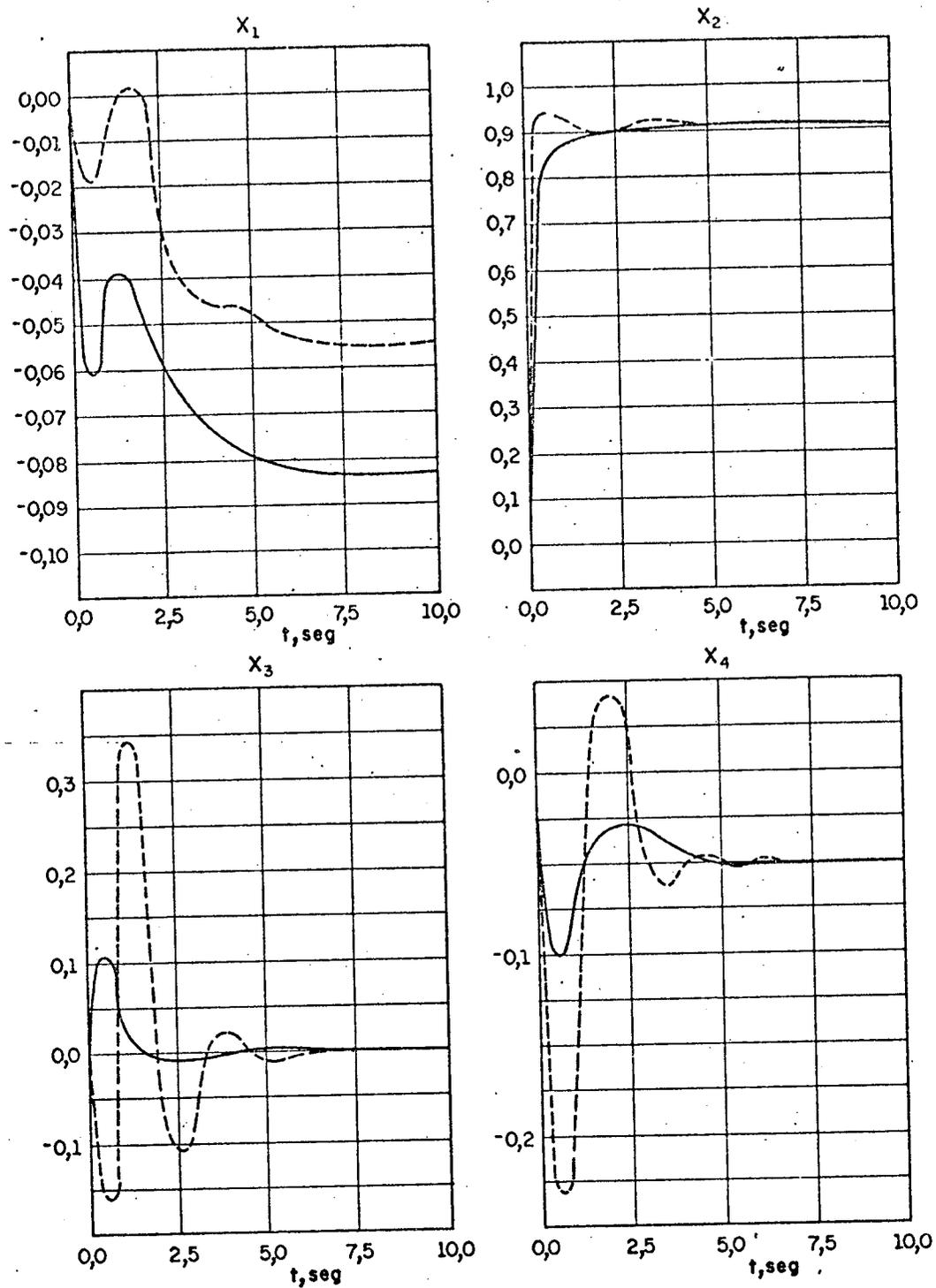


FIGURA 6.2 - Resposta do controle do ponto de ajuste $(0 \ 0,9 \ 0 \ 0)^T$ com aparelho deslocando-se a 60 nós . (Controle da velocidade vertical).

6.3. O Controle do Ponto de Ajuste não-Nulo para o Sistema de Potência

Aqui, faz-se o controle de um sistema de potência incerto, consistindo de uma máquina síncrona conectada a um barramento infinito. O modelo do sistema linearizado e transformado (projetável) pode ser visto no capítulo 4, item 4.3.

Para o controle

$$u = Kz + p(z) - L \alpha \quad (6.8)$$

somente a matriz L e $p_V(z)$ são desconhecidos. Decompondo A_0 em parte projetável e não-projetável, conforme (5.4), tem-se

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ A_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{02} \in R^{2 \times 4}$$

$$\underline{\underline{A}} = A_{0m} + \tilde{A}_0$$

onde

$$A_{0m} = B_0 L$$

e a matriz L será

$$L = B_0^+ A_{0m}, \quad B_0^+ = (B_0^T B_0)^{-1} B_0^T$$

ou seja

$$L = \begin{bmatrix} -1,38 & -0,42 & -0,02 & -1,527 \\ -2,54 & 0 & 0 & -3,5 \end{bmatrix}$$

Para o cálculo de $\rho_V(z)$, assume-se que os limites de variação dos parâmetros obedecem (4.26), γ é tal que $|\dot{v} + (1/T_p) v| \leq 0,3$ e $\|\alpha\| \leq 0,128$ para $\alpha = [0,1 \ 0 \ 0 \ 0,08]^T$.

Sendo assim, com (5.13) obtém-se

$$\rho_V(z) = 0,25 + 0,75 \|z\|$$

onde a condição (5.12) é satisfeita, pois

$$\max \|E\| = 0,1431 < 1$$

Usando (5.14), tem-se

$$\eta = 23,43 \epsilon + (550 \epsilon^2 + 15,62 \epsilon)^{1/2} \quad (6.9)$$

Obviamente, o tamanho da bola $B(\eta)$ pode ser reduzida pela escolha apropriada de um valor de ϵ , pois quando $\epsilon \rightarrow 0$, a região do contorno final $S = Z(\bar{k}) \supset B(\eta) \rightarrow 0$ de modo que a estabilidade as sintótica é assegurada e portanto $x \rightarrow \alpha$.

6.3.1. Resultados da Simulação para o Sistema de Potência usando o Novo Controle Não-Linear

Os resultados da simulação digital foram obtidos pela escolha de $\epsilon = 0,0001$, valor que substituído em (6.9) fornece $\eta = 0,042$. As perturbações Δa_{ij} e Δb_{ij} estão dadas em (4.26), com distúrbio $[\dot{v} + (1/T_p) v]$ da figura 4.10 satisfazendo $|\dot{v} + (1/T_p) v| \leq 0,3$. As trajetórias correspondentes ao controle do sistema (4.24), com lei de controle (6.8) e condição inicial $z(0) = 0$, e para um ponto de ajuste $\alpha = [0,088 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, são mostrados na figura 6.3. A figura mostra

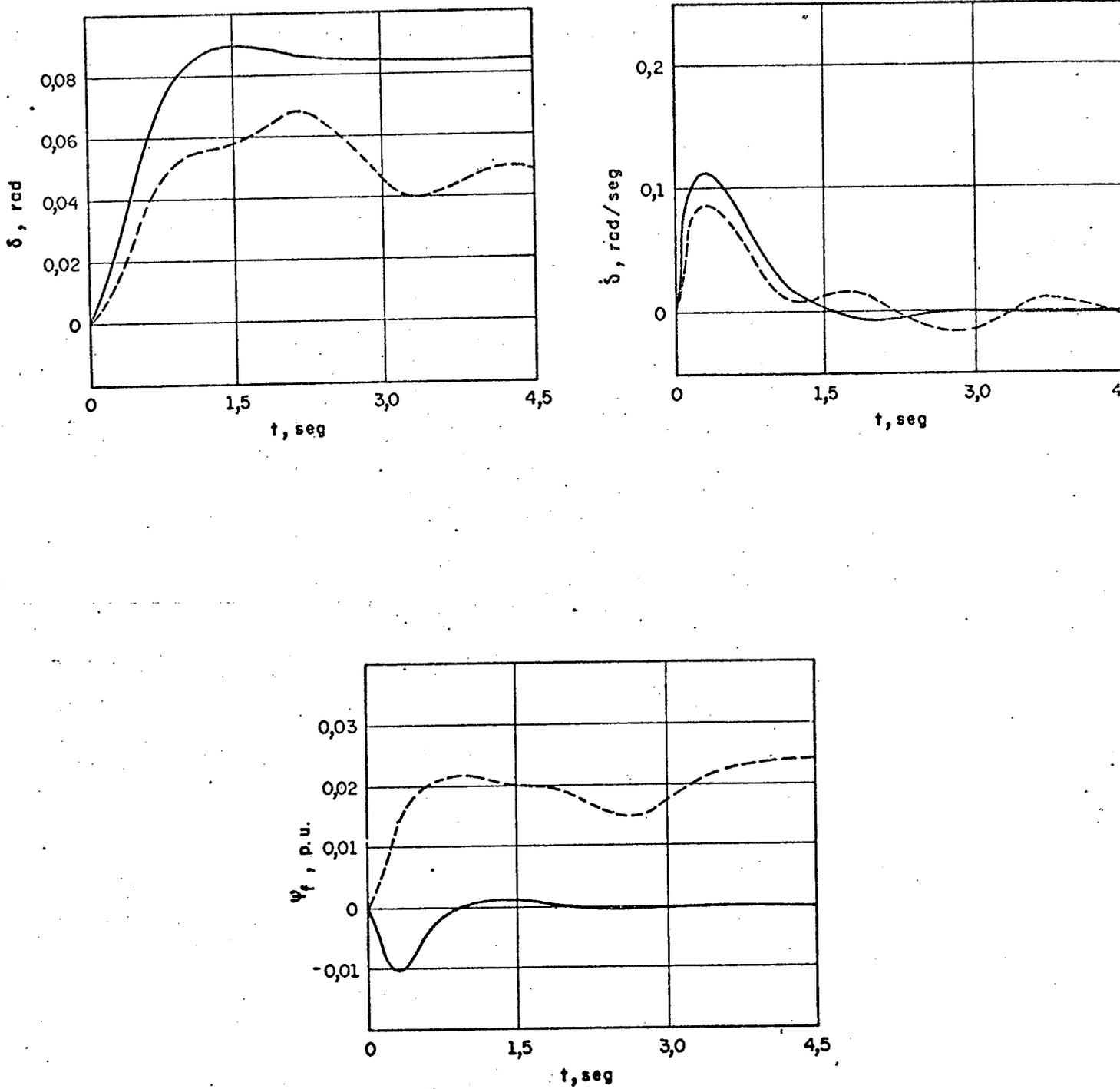


FIGURA 6.3 - Resposta do controle do ponto de ajuste

$(0,088 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ com $\Delta \tilde{a}_{ij} \neq 0$ $\Delta \tilde{b}_{ij} \neq 0$ e $v(t) \neq 0$

que $\tilde{\delta}$ e $\tilde{\psi}_f$ alcançam os valores 0,087 e -0,000056, respectivamente em 2,4 segundos, que estão próximo do ponto de ajuste desejado e $\tilde{\delta}$, $\dot{\tilde{\delta}}$ e $\tilde{\psi}_f$ apresentam respostas bem amortecidas.

Para efeito de comparação, as respostas para o sistema (4.24) com controle linear $u = Kz - L\alpha$ obtido de (6.8) fazendo $p(z) = 0$ são vistas na mesma figura. Nota-se que o desempenho do controle não-linear é melhor do que o controle linear. Observe que as perturbações na tensão terminal, ΔV_t , e potência de interligação, ΔP_{tie} , são combinações lineares de $\tilde{\delta}$ e $\tilde{\psi}_f$ e portanto uma boa trajetória para estas variáveis torna-se necessário.

A figura 6.4 mostra as respostas quando considera-se $\alpha = [0 \ 0 \ 0 \ 0,08]^T$. Os valores alcançados por $\tilde{\delta}$ e $\tilde{\psi}_f$ são 0,0005 e 0,08, respectivamente, em 2,4 segundos e o erro em regime permanente destas variáveis está bem próximo de zero. No caso do controle não-linear, as variações nas magnitudes do controle são

$$\begin{aligned} 0,08 &\leq \tilde{P}_m(t) \leq 0,43 \\ 0,13 &\leq \tilde{E}_{fd} \leq 0,56 \end{aligned}$$

Devido a interdependência existente entre as características de resposta e magnitudes do controle, os resultados apresentados na simulação (para valores especificados de ϵ , \hat{Q} , $\hat{\tilde{Q}}$ e \hat{R}), podem ser modificados pelo projetista alterando-se o valor de ϵ como também trocando-se as matrizes \hat{Q} , $\hat{\tilde{Q}}$ e \hat{R} .

Como se observou com as aplicações, o novo controle não-linear mostrou boa capacidade de regulação ($u = Kz + p(z) - L\alpha$ com $\alpha = 0$) e rastreamento de um novo ponto de ajuste, onde existe incerteza nos parâmetros.

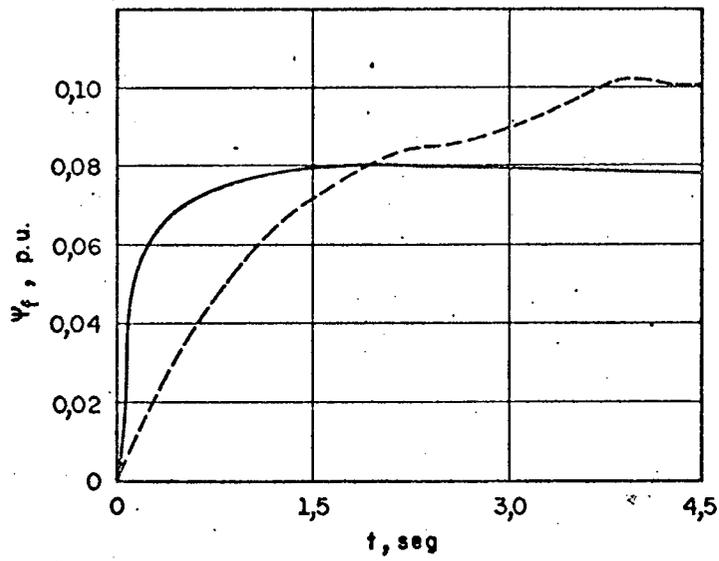
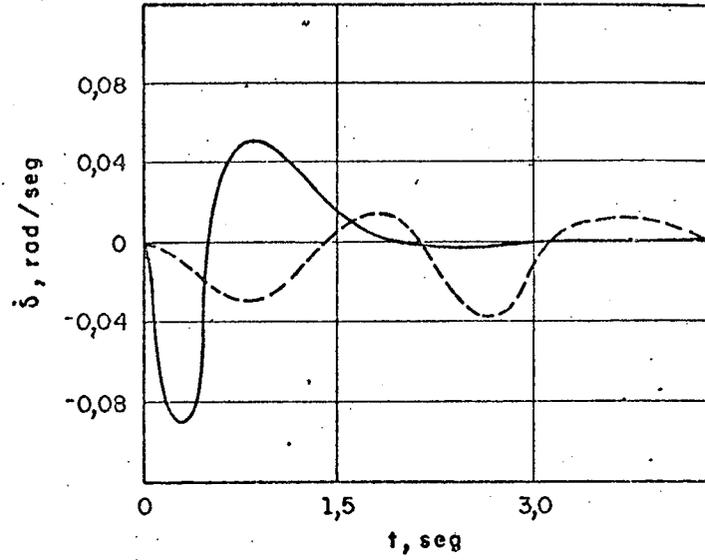
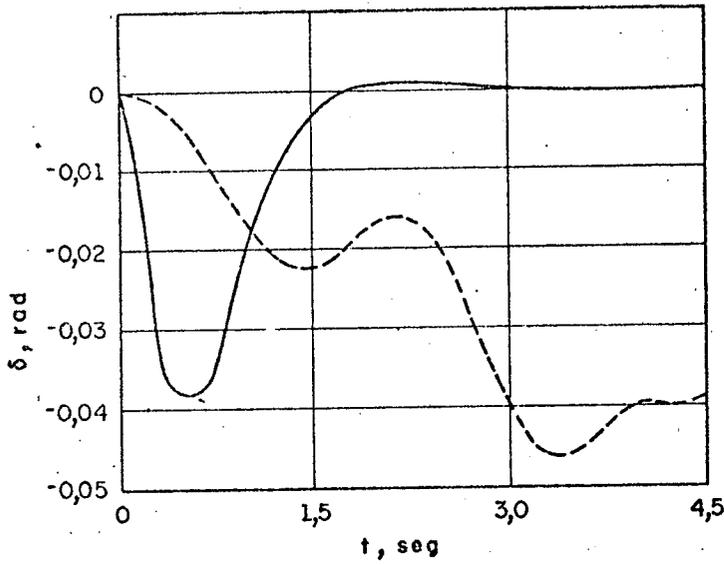


FIGURA 6.4 - Resposta do controle do ponto de ajuste $(0 \ 0 \ 0 \ 0,08)^T$ com $\Delta \tilde{a}_{ij} \neq 0$, $\Delta \tilde{b}_{ij} \neq 0$ e $v(t) \neq 0$.

CAPÍTULO 7

COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E INDICAÇÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

7.1. Comentários e Conclusões

O projeto para controle de sistemas lineares multivariáveis invariantes no tempo, que contém elementos incertos e estão sujeito a entradas incertas, foi apresentado. O controle de realimentação assegura que cada resposta do sistema seja limitada finalmente dentro de uma certa vizinhança de um estado desejado; não importando qual seja a evolução atual das quantidades incertas. O controle de realimentação é composto de um controle linear e um controle não-linear. A adição do controle não-linear melhora o desempenho pelo decréscimo do tamanho da região do contorno final.

Devido a imposição das condições projetáveis, a aplicação do controle nos sistemas de potência e helicóptero, levou o sistema do helicóptero a uma redução na faixa de variação permitida aos elementos incertos. As simulações indicam que a resposta do aparelho para um vetor entrada R e perturbação na condição inicial são satisfatórias quando os parâmetros variam dentro de seus verdadeiros intervalos e não os intervalos obtidos com o uso do controle. Isto não é surpresa, desde que a aproximação de Lyapunov concede somente uma condição suficiente para os limites. Trabalhos anteriores [1], [8], [9], [14], [15], [16] e [18], requerem que os parâmetros variem vagarosamente

e não garantem que o controle do movimento seja estável quando rápidas manobras sobre o aparelho estão presentes. Além disto, o controle deduzido aqui pode ser facilmente implementado e um computador a bordo não se faz necessário.

Com o desenvolvimento de uma nova teoria que passa uma certa classe de sistemas não-projetáveis para projetáveis, foi possível obter uma boa faixa de variação para os elementos incertos do sistema de potência, visto que esta nova representação de estados satisfaz às condições projetáveis. A escolha do ponto de operação para o uso da teoria da transformação de sistemas no sistema de potência deve-se ao fato de que pelo controle do ângulo rotor, δ , e fluxo de campo, ψ_f , pode-se controlar a tensão terminal, frequência e potência de interligação. Já para o sistema do helicóptero, a escolha de um novo ponto de operação é bastante difícil. Os resultados de simulação indicam que comandos de entrada aplicados para obter um novo ponto de operação desejado, não são conseguidos rigorosamente, apresentando um grande erro em regime, enquanto que, para perturbação na condição inicial bons resultados fossem obtidos.

Para evitar que estes novos pontos de operação não sejam atingidos, desenvolveu-se uma nova lei de controle para controlar o ponto de ajuste não-nulo de sistemas lineares incertos. Com o novo controle não-linear, aplicações foram feitas nos dois sistemas e mostraram ser este controle mais eficiente para atingir o novo ponto de operação estabelecido. Portanto, este novo controle tornou-se mais geral do que o estabelecido por Leitmann. Este último apresenta bons resultados para estabilização, enquanto que, para comandos aplicados, fica difícil atingir o ponto de

operação, em virtude de não ser permitido à trajetória abandonar o último elipsóide que assegura que a derivada da função de Lyapunov seja menor que zero.

Os resultados de simulação podem ser melhorados com uma escolha mais apropriada das matrizes K e Q , que também influenciam nos limites de variação dos parâmetros.

Estabelecer alguma relação analítica entre os limites dos parâmetros do sistema original e o sistema projetável transformado para o controle do contorno final é extremamente difícil. Entretanto em vários sistemas incluindo sistemas de potência e sistemas aeroespaciais, a teoria da transformação permite obter limites mais largos do que os encontrados pelo uso da teoria não-projetável de Barmish [3].

Na tentativa de melhorar os limites de variação dos parâmetros para o sistema do helicóptero, utilizou-se um controle linear dado por $u = Kz - 2\gamma_0 B^T Pz - L\alpha$. Para chegar a este controle, partiu-se do estabelecido por Barmish [4]. O valor de γ_0 encontrado no projeto foi bastante grande, de modo que a magnitude do controle também será grande, e portanto, a implementação deste controle não tem sentido prático.

7.2. Indicações para Futuros Trabalhos

Devido aos bons resultados encontrados com o uso do controle não-linear em sistemas dinâmicos incertos, apresenta-se a seguir algumas sugestões para continuação deste estudo:

- admitir erro na medida dos estados $y = x + w$, onde w é o erro de medida, usar um observador para reconstituir os estados e estudar eficiência do controle não-linear;
- obter algum tipo de transformação de estados pa

ra o modelo do helicóptero que satisfaça às condições projetáveis para aumentar a faixa de variação dos parâmetros. Além disto, esta transformação deve ser tal que o ponto de operação possa ser identificado no novo espaço;

- fazer aplicação do controle no sistema de potência multi-máquinas;

- desenvolver uma programação para calcular

$$\max \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$$

$$\text{onde } \bar{A}^T P + P \bar{A} = -Q$$

e assim aumentar os limites de variação dos parâmetros.

Alguns destes problemas estão presentemente sob consideração.

APÊNDICE I

O MÉTODO DE LYAPUNOV PARA O ESTUDO DA ESTABILIDADE

O segundo método de Lyapunov estabelece condições suficientes para a estabilidade de uma solução de equilíbrio de um sistema dinâmico. O teorema de Lyapunov sobre a estabilidade se fundamenta em um conceito físico que pode ser assim descrito: "Se a taxa de mudança $dE(x)/dt$ da energia $E(x)$ de um sistema físico isolado é negativa para cada estado x , exceto para um único estado de equilíbrio x_e , então a energia diminuirá continuamente até atingir o valor $E(x_e)$ que é mínimo".

Definição I.1.

Seja um sistema descrito pela equação diferencial vetorial

$$\dot{x} = f(x) \quad (I.1)$$

o vetor $x_e \in \mathbb{R}^n$ é dito ser estado de equilíbrio (ou ponto de equilíbrio) de (I.1) se

$$f(x_e) = 0$$

Definição I.2.

Um estado de equilíbrio x_e de (I.1) é estável, se para cada $\epsilon > 0$, existe um $\gamma(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \gamma \rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t > 0$$

Definição I.3.

Um estado de equilíbrio x_e é estável assintoticamente se

- a) x_e for estável (Definição I.2)
- b) existe um número $\gamma_1 > 0$ tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \gamma_1 \rightarrow \|x(t) - x_e\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

Teorema I.1. [20]

Uma matriz simétrica M é definida positiva, se e somente se, qualquer uma das seguintes condições são asseguradas:

- 1) todos os autovalores de M são positivos
- 2) todos os menores determinantes principais são positivos
- 3) se existe uma matriz não singular N tal que $M = N^T N$

Teorema I.2. [20]

O estado zero de $\dot{x} = Ax$ é estável assintoticamente, se e somente se, para qualquer matriz simétrica definida positiva dada Q , existe uma única solução P de

$$A^T P + PA = -Q \quad (I.2)$$

e esta solução $P > 0$ (matriz simétrica definida positiva)

Esta equação dá a taxa de mudança de $V(x) = x^T P x$ ao longo de uma trajetória de $\dot{x} = Ax$. Se Q é definida positiva, a função $-x^T Q x$ é sempre negativa. Isto implica que $V(x)$ diminui com o tempo ao longo de qualquer trajetória do sistema, e portanto, $V(x)$ aproxima-se de zero quando $t \rightarrow \infty$. Desde que $V(x)$ é definida positiva, tem-se que $V(x) = 0$ somente quando $x = 0$, e portanto, conclui-se que pode-se encontrar matrizes definida positiva P e Q , que estão relacionadas em (I.2), então, cada trajetória do sistema aproxima-se do vetor zero quando $t \rightarrow \infty$. A função $V(x)$ é chamada função Lyapunov de $\dot{x} = Ax$. A função Lyapunov pode ser considerada como uma generalização do conceito de distância ou energia. Se a "distância" do estado ao longo de qualquer trajetória do sistema diminui com o tempo, então $x(t)$ deve tender a zero quando $t \rightarrow \infty$.

APÊNDICE II

EQUAÇÕES DE ESTADO NÃO-LINEARES E SUA LINEARIZAÇÃO

Quando um sistema dinâmico tem características não lineares, as equações de estado do sistema podem ser representadas pela forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f [x(t), r(t)] \quad (\text{II.1})$$

onde $x(t)$ representa o vetor estado $n \times 1$, $r(t)$ o vetor entrada $p \times 1$ e $f [x(t), r(t)]$ denota um vetor função $n \times 1$. Em geral, f é uma função do vetor estado e vetor entrada.

Os sistemas não lineares, são usualmente difíceis de analisar e projetar, daí a necessidade de se executar uma linearização. O processo de linearização, depende de uma expansão das equações de estado não lineares em série de Taylor sobre um ponto de operação nominal. Todos os termos da série de Taylor de ordem maior que 1 são descartados, e resulta uma aproximação linear das equações de estado não linear em um ponto nominal. Considere o ponto de operação nominal ser denotado por x_0 , que corresponde a uma entrada nominal r_0 e algum estado inicial fixado. Expandido a equação de estado não linear de (II.1) em série de Taylor sobre $x(t) = x_0$ e desprezando todos os termos de alta ordem, tem-se

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_0, r_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial x_j} \bigg|_{x_0, r_0} (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial r_j} \bigg|_{x_0, r_0} (r_j - r_{0j}) \quad (\text{II.2})$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

seja

$$\Delta x_i = x_i - x_{0i}$$

$$\Delta r_j = r_j - r_{0j}$$

então

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i}$$

desde que $\dot{x}_{0i} = f_i(x_0, r_0)$.

a equação (II.2) pode ser escrita como

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial x_j} \bigg|_{x_0, r_0} \Delta x_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial r_j} \bigg|_{x_0, r_0} \Delta r_j \quad (\text{II.3})$$

Escrevendo a equação (II.3) na forma matriz-vetor,

$$\Delta \dot{x} = A^* \Delta x + B^* \Delta r \quad (\text{II.4})$$

sendo

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_0, r=r_0}$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial r_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial r_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial r_p} \end{bmatrix}_{x=x_0, r=r_0}$$

onde A^* e B^* são calculados no ponto nominal.

Agora, apresentarse a linearização efetuada no sistema de potência. O modelo matemático utilizado, possui as seguintes equações:

$$\dot{\delta} = w = f_1$$

$$\ddot{\delta} = p_1 \sin 2\delta - p_2 w - p_3 \psi_f \sin \delta + p_4 P_m - p_4 v = f_2$$

$$\dot{P}_m = (-P_m + u_g) / T_p = f_3$$

$$\dot{\psi}_f = p_5 \cos \delta - p_6 \psi_f + p_7 E_{fd} = f_4$$

seja $x = (\delta, \dot{\delta}, P_m, \psi_f)^T$, $x_0 = (\bar{\delta}, 0, \bar{P}_m, \bar{\psi}_f)^T$, $x = x_0 + \tilde{x}$,

$$u_0 = (u_{g0}, E_{fd0})^T, u = u_0 + \tilde{u}, v_0 = 0$$

$$e v = \tilde{v}.$$

fazendo uma representação na forma

$$\dot{x} = A^* x + B^* \tilde{u} + C^* \tilde{v}$$

implica em encontrar as matrizes A^* , B^* e C^* , calculando as derivadas para f_1 tem-se

$$\frac{\partial f_1}{\partial \delta} = \frac{\partial f_1}{\partial P_m} = \frac{\partial f_1}{\partial \psi_f} = \frac{\partial f_1}{\partial u_g} = \frac{\partial f_1}{\partial E_{fd}} = \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{\delta}} = 1 = a_{12}$$

as derivadas para f_2 são

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_g} = \frac{\partial f_2}{\partial E_{fd}} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta} = 2p_1 \cos 2\delta - p_3 \psi_f \cos \delta = a_{21}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \delta} = -p_2 = a_{22}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P_m} = p_4 = a_{23}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \psi_f} = -p_3 \cdot \overline{\delta} = a_{24}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} = -p_4 = c_{21}$$

as derivadas para f_3 são

$$\frac{\partial f_3}{\partial \delta} = \frac{\partial f_3}{\partial \delta} = \frac{\partial f_3}{\partial \psi_f} = \frac{\partial f_3}{\partial E_{fd}} = \frac{\partial f_3}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial P_m} = -T_q = a_{33}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_g} = T_q = b_{31}$$

as derivadas para f_4 são

$$\frac{\partial f_4}{\partial \delta} = \frac{\partial f_4}{\partial P_m} = \frac{\partial f_4}{\partial u_g} = \frac{\partial f_4}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \delta} = -p_5 \operatorname{sen} \bar{\delta} = a_{41}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \psi_f} = -p_6 = a_{44}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial E_{fd}} = p_7 = b_{42}$$

portanto, escrevendo na forma vetorial

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \tilde{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v}$$

Os elementos a_{ij} , b_{ij} e c_{ij} foram calculados anteriormente, os vetores \tilde{x} , \tilde{u} e \tilde{v} denotam perturbação nas variáveis de estado, entrada e distúrbio, respectivamente. Com este procedimento, foi obtido a forma vetorial apresentada no capítulo 4, item 4.3, equação número (4.21).

APÊNDICE III

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCONSISTENTES

Considere a equação

$$Bx = y \quad (\text{III-1})$$

onde $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $\text{rank}\{B\} = m$

A equação (III-1) pode ser inconsistente, e portanto não existe solução. Em tal caso, y não pertence a imagem de B . Muitas vezes é tentado encontrar um vetor \hat{x} tal que

$$\|B\hat{x} - y\|^2 = \text{mínimo}$$

Pode ser mostrado que existe uma solução única \hat{x} se $\text{rank}\{B\} = m$, de maneira que

$$\hat{x} = (B^T B)^{-1} B^T y \quad (\text{III-2})$$

Note que \hat{x} não é uma solução de (III-1), isto é, não necessariamente satisfaz $Bx = y$. A equação (III-2) é conhecida como solução dos mínimos quadrados.

Interpretação Geométrica (Figura III-1)

Se (III-1) não tem solução, $y \notin \text{Im}(B)$, mas pode-se projetá-la na $\text{Im}(B)$ para obter um novo vetor \hat{y} na $\text{Im}(B)$. Então, resolve-se a equação

$$B\hat{x} = \hat{y}$$

para obter uma solução

$$\hat{x} = (B^T B)^{-1} B^T \hat{y}$$

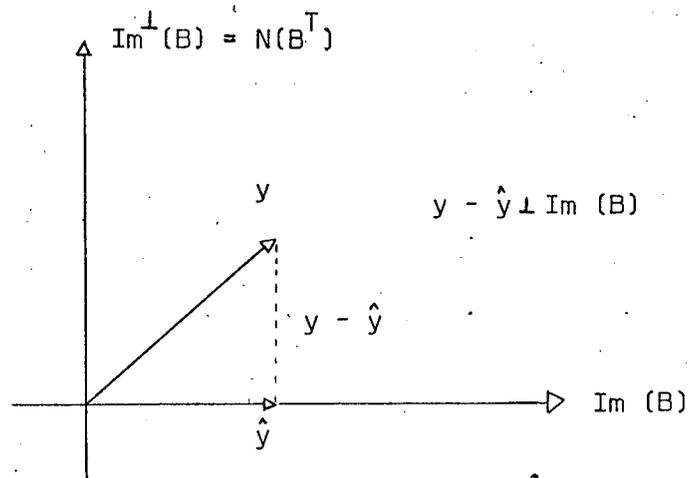


FIGURA III.1 - A geométrica da equação $Bx = y$.

Para o caso do modelo do helicóptero, equação (4.5), tem-se

$$\begin{cases} BD = \Delta A \\ BE = \Delta B \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

onde

$$\begin{cases} B[D_1 \ D_2 \ \dots \ D_n] = [\Delta A_1 \ \Delta A_2 \ \dots \ \Delta A_n] \\ B[E_1 \ E_2 \ \dots \ E_m] = [\Delta B_1 \ \Delta B_2 \ \dots \ \Delta B_m] \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} \Delta A_i = BD_i, & i = 1, \dots, n \\ \Delta B_j = BE_j, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

apresenta a solução dada para a equação (III-1), ou seja

$$\begin{cases} D = (B^T B)^{-1} B^T \Delta A \\ E = (B^T B)^{-1} B^T \Delta B \end{cases}$$

- [13] LEITMANN, G. On the Efficacy of Nonlinear Control in Uncertain Linear Systems. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 102, 95-102, julho 1981.
- [14] NARENDRA, K. S. & TRIPATHI, S. S. Identification and Optimization of Aircraft Dynamics. Journal Aircraft. vol. 10, nº 4, 193 - 199, abril 1973.
- [15] OKONGWU, E. H., WILSON, W. J. e ANDERSON J. H. Optimal State Feedback Control of a Microalternator Using an Observer. IEEE Pes Summer Meeting, julho 1977.
- [16] RAINA, V. M., WILSON, W. J. e ANDERSON, J.H: Nonlinear Output Feedback Excitation Controller Design Based on Nonlinear Optimal Control and Identification Methods. IEEE Pes Summer Meeting, julho 1976.
- [17] SINGH, S. N. Nonlinear State - Variable - Feedback Excitation and Governor - Control Design Using Decoupling Theory. IEE Proceedings, vol. 127, nº 3, 131-141, maio 1980.
- [18] SUNDARARAJAN, N. Sensitivity Reduction in Aircraft Control Systems. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol, AES-14, nº 2, 292-297, março, 1978.
- [19] THORP, J. S e BARMISH, B. R. On Guaranteed Stability of Uncertain Linear Systems via Linear Control - Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 35, nº 4, 559 - 579, dezembro 1981.
- [20] VIDYASAGAR, M. Nonlinear Systems Analysis. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1978.
- [21] WOLOVITCH, W. A. On the Stabilization of Controllable Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-13, 569-572, outubro 1968.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANDERSON, J. H. e RAINA, V.M. Power System Excitation and Governor Design Using Optimal Control Theory. International Journal Control, vol. 19, nº 2. 289 - 308, 1974.
- [2] ASTROM, K. J. Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, Nova York, 1970.
- [3] BARMISH, B. R. e LEITMANN, G. On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. Ac - 27, nº 1, 153 - 158, fevereiro 1982.
- [4] BARMISH, B. R., LEITMANN, G. e CORLESS, M. A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems. Sian Journal on Control and Optimization (a publicar).
- [5] BROCKETT, R. W. Finite Dimensional Linear Systems. John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- [6] DESOER, C. A. e VIDYASAGAR, M. Feedback Systems: Input Output Properties - Academic Press, 1975.
- [7] ELGERD, O. L. Electric Energy Systems Theory. McGraw - Hill do Brasil, 1977.
- [8] GOURISHANKAR, V. e ZACKOWSKI, G.V. Minimum Sensitivity Controller with Application to VTOL Aircraft. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES -16, nº 2, 217 - 226, março 1980.
- [9] KALMAN, R. E. & BERTRAM, J. E. Control System Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov. ASME Journal of Basic Engineering, vol. 82, nº 2, 371 -393, junho 1960.
- [10] KUO, B. C. Automatic Control Systems. Prentice - Hall, INC., Englewood Cliffs, 1975.
- [11] LEITMANN, G. Guaranteed Asymptotic Stability for a Class of Uncertain Linear Dynamical Systems. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 27, nº 1, 99-106, janeiro 1979.
- [12] LEITMANN, G. Guaranteed Asymptotic Stability for some Linear Systems with Bounded Uncertainties - Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 101, 212-216, setembro 1979.