

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE GRAETZ EM PLACAS
PARALELAS, COM CONDUÇÃO AXIAL DE CALOR NO FLUÍDO
E NA PAREDE.

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

Milton Biage

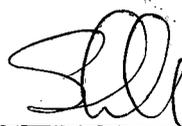
FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1983

UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE GRAETZ EM PLACAS
PARALELAS, COM CONDUÇÃO AXIAL DE CALOR NO FLUÍDO
E NA PAREDE

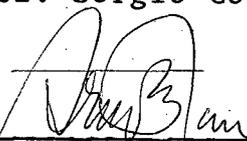
Milton Biage

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA, NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO TER-
MOTÉCNICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO.



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.



Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador do Curso

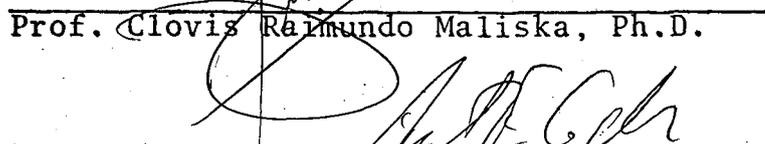
Banca Examinadora:



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.



Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.



Prof. Antonio Fabio C. da Silva - M.Eng.

A Ros-Mari e Pedro,
pelo estímulo e compreensão

A meus pais
pela orientação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que de uma forma ou de outra me transmitiram apoio e incentivo; aos professores deste curso de Pós-Graduação que me fizeram compreender melhor os horizontes da ciência da engenharia; ao CNPq e ao CNEN pelo suporte financeiro; e finalmente ao Professor Sérgio Colle pela orientação eficaz que me foi transmitida.

Í N D I C E

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	01
2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ.....	07
2.1. O problema de Graetz.....	07
2.2. Equação para a placa.....	11
2.3. Equação para o fluido.....	14
3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....	19
3.1. Obtenção das equações integrais.....	19
3.2. Solução das equações integrais.....	26
3.2.1. Divisão do contorno.....	26
3.2.2. Formulação aproximada para a solução de integrais.	28
3.2.3. Aplicação do método numérico às equações integrais	31
3.3. Formulação variacional para os extremos do duto.....	41
3.4. Discretização da equação da energia para a placa.....	52
3.5. Resumo do problema discretizado.....	55
3.6. Número de Nusselt.....	56
3.7. Temperatura no infinito.....	58
4. APLICAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO AO PROBLEMA.....	60
5. RESULTADOS.....	75
6. CONCLUSÃO.....	94

	Pág.
BIBLIOGRAFIA.....	97
APÊNDICE A	
A.1. A função "Delta de Dirac".....	100
A.2. A função de Green.....	101
A.3. Propriedades da função de Green.....	109
APÊNDICE B - A funcional para a equação da energia.....	111
APÊNDICE C - Obtenção dos sistemas de equações diferenciais lineares, homogênea, de segunda ordem, que possibilitam às soluções de $a_i^+(z)$ e $a_i^-(z)$..	121
APÊNDICE D - Solução analíticas dos núcleos que compõe as equações integrais.....	127
APÊNDICE E - Cálculo das integrais que define os coeficientes das matrizes A, B, H, E^- e E^+	135
APÊNDICE F - Relação entre os grupos adimensionais deste trabalho e os apresentados por 12 , para comparação de resultados.....	140

SIMBOLOGIA

- $a^+(z)$ - Função incôgnita aplicada para definir a temperatura para a região $z > \ell$.
 $a^-(z)$ - Função incôgnita aplicada para definir a temperatura para a região $z < 0$.
 c_p - Calor específico a pressão constante.
 c_v - Calor específico a volume constante.
 dA - Elemento de área.
 dS - Elemento de arco.
 D_h^* - Diâmetro hidráulico.
 D - Região regular em R^2 .
 ∂D - Fronteira da região D .
 D_1, D_2 e D_3 - Regiões regulares em R^2 que compõe a região D .
 ∂D_i - Fronteira do subdomínio D_i .
 e^* - Espessura da placa condutora.
 g - Função de Green associada ao operador de Laplace.
 ∂g - $\frac{\partial g}{\partial n}$ (derivada da Green com relação a normal).
 h' - Coeficiente de transmissão de calor por convecção.
 h^* - Distância da origem do sistema de coordenadas às placas superior ou inferior.
 k_f - Condutividade térmica do fluido.
 k_s - Condutividade térmica do sólido.
 ℓ^* - Comprimento da placa superior onde ocorre a troca de calor.
 ℓ - Comprimento adimensional da placa superior onde ocorre a troca de calor.

\dot{m}	- Fluxo de massa.
n_i	- Número de pontos nodais que a superfície ∂D_{2i} ou da região D_2 .
N_u	- Número de Nusselt.
P_e	- Número de Peclet.
q^*	- Fluxo de calor na fronteira ∂D_{21} .
q	- Fluxo de calor adimensional na fronteira ∂D_{21} .
\bar{q}^*	- Fluxo de calor médio na fronteira ∂D_{21} .
\bar{q}	- Fluxo de calor médio adimensional na fronteira ∂D_{21} .
T^*	- Temperatura do fluido.
T_b^*	- Temperatura média de mistura.
T_0^*	- Temperatura do fluido em $-\infty$.
T_∞^*	- Temperatura do fluido em $+\infty$.
T_i^*	- Temperatura do fluido na região D_i .
T_{ij}^*	- Temperatura do fluido na fronteira ∂D_{ij} da região D_i .
\hat{T}_i^*	- Temperatura variada aplicada na região D_i .
T	- Temperatura adimensional do fluido.
T_b	- Temperatura adimensional média de mistura.
T_∞	- Temperatura adimensional do fluido em $+\infty$.
T_i	- Temperatura adimensional do fluido na região D_i .
T_{ij}	- Temperatura adimensional do fluido na fronteira ∂D_{ij} da região D_i .
\hat{T}_i	- Temperatura adimensional variada aplicada na região D_i .
T_w	- Temperatura adimensional da superfície superior ou inferior.
∂T	- $\frac{\partial T}{\partial n}$
∂T_{ij}	- $\frac{\partial T_{ij}}{\partial n}$
U^*	- Velocidade do fluido.

- U_m^* - Velocidade média.
 \bar{U} - Velocidade adimensional definida por $\frac{1}{4} \frac{U^*}{U_m^*}$.
 x^*, y^*, z^* - Sistema de coordenadas Cartesianas.
 x, y, z - Sistema de coordenadas Cartesianas adimensional.
 w - Par ordenado (y, z) .
 w' - Par ordenado (y', z') .
 $[]$ - Simbologia para matriz.
 $\{ \}$ - Simbologia para vetores.
 $[I]$ - Matriz identidade.
 α - Difusibilidade térmica definida por $\frac{k_f}{\rho c_p}$.
 β - Fator que expressa a condutância térmica axial na parede definido por $(\frac{e^* k_s}{h^* k_f})$.
 $\delta(w-w')$ - Distribuição singular "Delta de Dirac".
 ξ - Constante arbitrária.
 $\Psi(y)$ - Função de uma sequência.
 λ^- - Autovalores para $z < 0$.
 λ^+ - Autovalores para $z > l$.
 $\eta(z)$ - ~~Função variação.~~
 μ - Viscosidade absoluta.
 V - Volume.
 ρ - Densidade do fluido.

S U M Á R I O

Neste trabalho foi resolvido um problema de transmissão de calor em placas paralelas de largura infinita, com condução axial de calor na parede e no fluido. Considerou-se escoamento laminar em regime permanente, com perfil de velocidade plenamente desenvolvido para um fluido Newtoniano.

O duto é constituído de uma porção inicial, de comprimento infinito, isolada em ambas as placas (superior e inferior); de uma porção intermediária, de comprimento finito, aquecida por um fluxo de calor prescrito na placa superior e isolada na placa inferior; e de uma porção final, de comprimento in finito, isolada também em ambas as placas (superior e inferior).

O problema foi resolvido através de uma combinação numérica entre o método de equações integrais e o método variacional. Foi feita uma análise da técnica numérica empregada e dos resultados obtidos neste trabalho. É demonstrado que a condução axial de calor na parede modifica significativamente os parâmetros de transmissão de calor.

A B S T R A C T

In this work it has been solved a heat transfer problem in parallel plates with infinite width, with axial heat conduction in the fluid and in the wall, considering steady-state laminar flow for a Newtonian fluid and a fully developed velocity profile.

The duct consists of an infinite initial part, insulated on both plates, an intermediate part of finite length, with a prescribed heat flux in the upper plate and insulated on the bottom plate, and by another infinite part also insulated on both plates.

The problem has been solved by a numerical combination^{of} the integral equation method and the variational method. Both, the performance of the numerical technique employed and results obtained are analyzed in this work. It is demonstrated that the heat conduction in the wall significantly modifies the heat transfer parameters.

1. INTRODUÇÃO

Historicamente, tem-se estudado problemas de transferência de calor em que se assume os perfis de velocidade e temperatura como sendo não plenamente desenvolvidos, ou se admite o perfil de velocidade plenamente desenvolvido e o perfil de temperatura em desenvolvimento. Além disso, nesse tipo de problema considera-se que a distribuição de temperatura na região inicial do duto é uniforme e que não há fluxo de calor nesta região, iniciando-se a transmissão de calor nas regiões subsequentes [1].

Estes problemas são denominados "problemas de entrada" ou "problemas de Graetz", em homenagem a este pesquisador, o qual foi o primeiro a estudá-lo, analisando a troca de calor num tubo caracterizado pelas condições acima expostas. Neste trabalho, Graetz, desprezou a condução axial de calor, e mostrou que o problema podia ser formulado como um problema de auto-valores [13].

As soluções para o problema de Graetz tem sido frequentemente pesquisadas, nas mais variadas abordagens e generalizações. Inicialmente Schneider [14], estudou o efeito da condução axial na troca de calor, em dutos de placas paralelas e tubos, mostrando que a condução axial de calor no fluido não apresenta influência, quando o número de Peclet for maior que 100. A partir desta análise, grande parte de trabalhos realizados adota esta hipótese. Assim, a maioria destes problemas foram abordados, considerando que a condução axial de calor no fluido

é desprezível, se comparada com a convecção axial, para Peclet maior que 100.

Seguindo este caminho, os seguintes trabalhos foram desenvolvidos:

- Singh [15], resolveu o problema de Graetz para escoamento laminar em um tubo, considerando: temperatura na superfície uniforme e desprezível a condução de calor axial no fluido, geração interna de calor e dissipação viscosa. Obteve uma solução exata para o problema, determinando um conjunto de autovalores e autofunções associadas, para um sistema de equações diferenciais de Sturm-Liouville.
- Siegel et al [16], determinou a solução do problema de Graetz para escoamento laminar, desprezando a condução axial de calor no fluido, dissipação viscosa e geração interna de calor. Considerou fluxo de calor uniforme na superfície, e usou como solução a expansão em série.

- Dennis et al [17], estendeu o problema com temperatura na superfície uniforme para dutos retangulares. Utilizou como solução o método de separação de variáveis.
- Heston et al [18], resolveu o problema para um espaço anular, com fluxo de calor uniforme na superfície. Considerou os perfis de velocidade e temperatura em desenvolvimento, e utilizou como solução o método integral.
- Reynolds [19], resolveu o problema para escoamento laminar num tubo, com fluxo de calor variável prescrito na superfície, uti

lizando o método de separação de variáveis.

Quando o número de Prandtl é maior que 1, para problemas de interesse prático, obtém-se geralmente números de Peclet maior que 100, o que permite desprezar a condução axial de calor no fluido. Entretanto, existem casos de interesse da engenharia, onde mesmo com altos números de Reynolds tem-se números de Peclet baixos, sendo necessário então considerar a condução axial de calor no fluido. Estes casos são caracterizados pelos escoamentos de metais líquidos, que podem apresentar números de Prandtl até de 0,003.

A literatura especializada apresenta uma série de problemas de Graetz, que considera o efeito da condução axial de calor no fluido, em escoamento laminar ou turbulento através de dutos, como:

- Jones [20], estudou a influência do número de Peclet num escoamento de Poiseuille, para um duto cilíndrico, em uma região infinita sujeita a um salto de temperatura. Utilizou-se para a solução a transformada de Laplace.
- Michelsen et al [21], resolveu o problema para escoamento laminar, em um tubo infinito, considerando a temperatura da superfície uniforme. Para a solução de tal problema, utilizou uma combinação dos métodos da colocação e diagonalização de matriz.
- Tay [22], analisou o problema para escoamento laminar, em um duto de placas paralelas infinitas, com temperatura da parede ou fluxo de calor uniforme. Nesta análise, utilizou o método de elementos finitos para a solução.

- Burchill et al [12], estudou analiticamente a influência da condução axial de calor no fluido, em escoamento laminar sem atrito, para um espaço anular, isolado nas regiões infinitas a montante e a jusante de uma secção de tamanho finito, aquecida com um fluxo de calor prescrito.
- HSU [23], obteve soluções analíticas para um escoamento laminar, num espaço anular infinito, para baixos números de Peclet, considerando fluxo de calor e temperatura prescrita.
- Groff [5], estudou analiticamente o problema de escoamento laminar, num espaço anular infinito, com temperatura ou fluxo de calor prescrito, usando o método variacional de Ritz-Galerkin.

Como pode ser visto, os problemas onde a condução axial de calor no fluido é desprezível ou não, com fluxo de calor ou temperatura prescrita, foram consideravelmente pesquisados. Entretanto, o mesmo não aconteceu para problemas em que a condução axial de calor no fluido e na parede, formam um processo iterativo com transmissão de calor por convecção entre a parede e o fluido. Nesta circunstância, para escoamento laminar, a parede oferece um caminho alternativo para o fluxo de calor, àquele oferecido pela convecção na interface parede-fluido.

O efeito da condução axial de calor na parede e no fluido simultaneamente, tem sido estudado por alguns pesquisadores. Entretanto, o trabalho de maior relevância, foi abordado por Sparrow [24], que estudou o problema para um escoamento laminar num tubo infinito. Neste trabalho, foi considerado que uma porção inicial do tubo, de tamanho infinito, é isolada

na superfície externa, e a porção subsequente é aquecida por um fluxo de calor uniforme prescrito. Neste caso, a condução axial de calor na parede do tubo é permitida de $-\infty$ a ∞ . Utilizou-se para a solução o método de diferenças finitas.

No presente trabalho, é efetuada uma análise para escoamento laminar em placas paralelas, com condução axial de calor no fluido e na placa, para baixos números de Peclet. Um diagrama da geometria da região que compreende o escoamento, está esquematizado na figura 2.1. Tal como é mostrado, a região do duto definida por $0 < z^* < \ell^*$, é aquecida por um fluxo de calor prescrito na superfície externa da placa superior, e isolada na placa inferior. Nas regiões definidas por $z^* < 0$ e $z^* > \ell^*$, tanto a placa superior como a placa inferior são isoladas.

A placa aquecida é isolada em $z^* = 0$ e $z^* = \ell$, de modo que não permite a condução de calor axial através da parede para as regiões $z^* < 0$ e $z^* > \ell^*$. Neste caso, ocorre um fluxo de calor de alta intensidade nos extremos desta placa (isto é; em $z^* = 0$ e $z^* = \ell^*$), alterando a distribuição dos parâmetros de troca de calor. A intensidade da variação destes parâmetros, é caracterizada em função da condutância de calor da parede e da condutância de calor no fluido.

Considera-se ainda, que para a presente análise, a espessura da placa aquecida é relativamente pequena, de modo que o gradiente de temperatura na parede, na direção vertical, não precisa ser considerado.

O método utilizado para a solução, foi uma combinação entre os métodos de equações integrais e método varia

cional. A combinação entre estes métodos, teve como objetivo, ve rificar o comportamento do método de equações integrais, quando a fonte térmica na fronteira exige uma solução iterativa.

Tal trabalho, fornece dados que possibilitam fazer uma análise qualitativa e quantitativa, tanto do método nu métrico empregado quanto do problema em questão, podendo servir de base ao desenvolvimento de estudos com condição de contorno não linear, e ter aplicações em escoamento de metais líquidos.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ

2.1. O problema de Graetz

Neste trabalho será analisado o problema de Graetz, num duto de placas paralelas, considerando-se um fluido em escoamento laminar e perfil de velocidade plenamente desenvolvido.

A secção em que serão analisados os parâmetros de troca de calor, será a região bidimensional D , compreendida entre as placas paralelas, cujo contorno ∂D é formado por segmentos de curvas diferenciáveis, que não formam cúspides nas intersecções. Nesta secção, será considerado que o eixo z^* do sistema de coordenadas Cartesianas (x^*, y^*, z^*) , será a direção de escoamento do fluido no duto e o eixo y^* será a direção em que as placas encontram-se separadas. Tal situação pode ser visualizada através da figura abaixo.

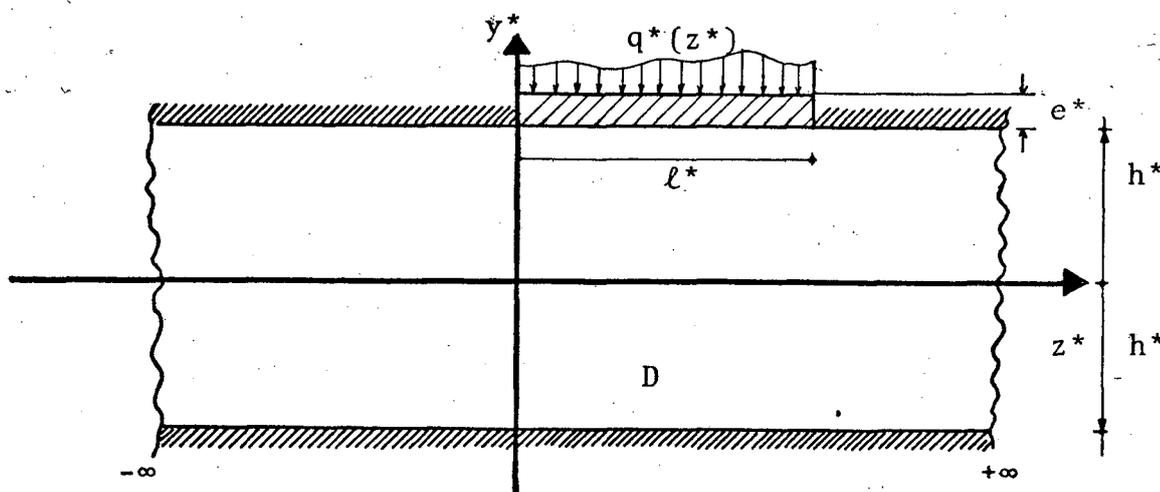


Figura 2.1

O duto apresenta a superfície da placa inferior isolada, assim como, a superfície da placa superior nas regiões definidas como $z^* < 0$ e $z^* > \ell^*$. Na região do duto, definida como $0 < z^* < \ell^*$, a superfície externa da placa superior é aquecida por um fluxo de calor qualquer.

A placa aquecida é considerada de espessura pequena de maneira que o gradiente de temperatura na direção vertical nesta placa é desprezado, é isolada nas extremidades $z^* = 0$ e $z^* = \ell^*$ e tem largura infinita, de forma que não há fluxo de calor na direção x^* , tanto na placa como no fluido.

A região D será subdividida nos subdomínios D_1 , D_2 e D_3 , onde os contornos serão referenciados por ∂D_1 , ∂D_2 e ∂D_3 , respectivamente.

As fronteiras que constituem o contorno de cada subdomínio, serão referenciadas por um duplo índice (pois nos contornos dos subdomínios, existem partes contíguas de fronteiras, submetidas a condições de contorno diferentes), de modo que o primeiro especifica o subdomínio e o segundo especifica uma parte contínua de fronteira do subdomínio.

A região D é mostrada na Figura abaixo, tal como foi subdividida e como foram referenciadas as fronteiras de cada subdomínio.

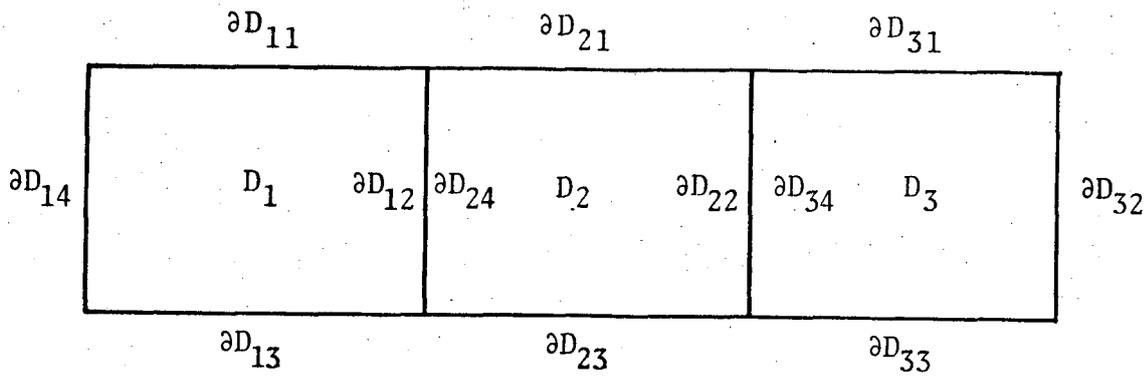


Figura 2.2

A continuidade da função a ser determinada (temperatura), ao longo das superfícies em comum entre os subdomínios D_1 , D_2 e D_3 , é garantida, fazendo um balanço de energia em $z^* = 0$ e $z^* = \ell^*$, lembrando que uma superfície não acumula energia.

Aplicando o princípio da conservação da energia no volume de controle elementar em $\pm\infty$, conforme a figura a baixo, resulta:

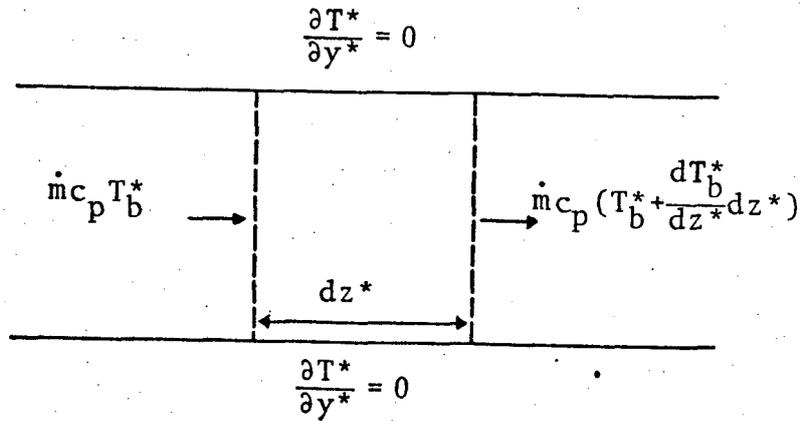


Figura 2.3

$$\left. \frac{dT_b^*}{dz^*} \right|_{\pm\infty} = 0 \quad (2.1)$$

Da equação (2.1) e do fato de que $\left. \frac{dT^*}{dy} \right|_{\pm\infty} = 0$ em ambas as placas (superior e inferior), conclui-se que $T(y^*, \pm\infty)$ é constante.

A figura abaixo mostra a região D como foi caracterizada, juntamente com as condições de contorno definidas para o problema.

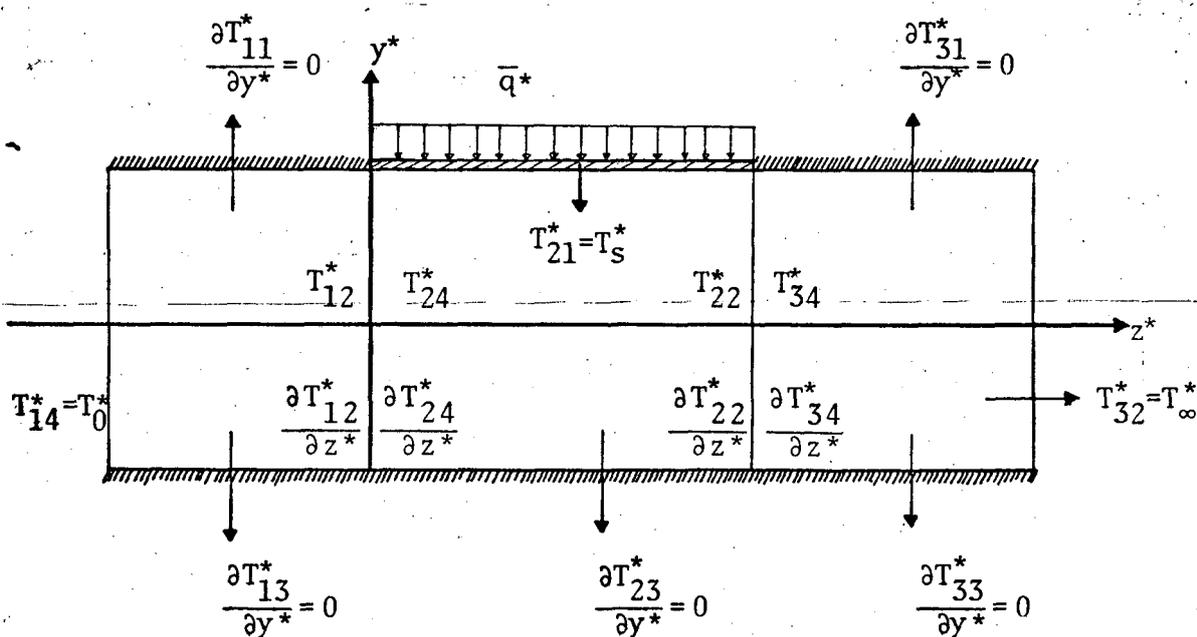


Figura 2.4

As hipóteses simplificativas abaixo serão associadas ao escoamento:

- a) Fluido Newtoniano.
- b) Propriedades termofísicas do fluido independentes da temperatura.
- c) Escoamento unidirecional com convecção forçada.
- d) Os efeitos de dissipação viscosa não são considerados.
- e) Forças gravitacionais desprezíveis.

A hipótese de escoamento laminar restringe o presente estudo para o escoamento a baixo número de Reynolds. As forças gravitacionais e a conversão de energia cinética em energia térmica são irrelevantes, em relação às grandezas similares do conjunto, por isso, elas podem ser desprezadas.

2.2. Equação para a placa

Para obter a condição que estabelece a troca de calor na interface parede-fluido na fronteira ∂D_{21} , é necessário fazer um balanço de energia. Para isto, considera-se um elemento infinitesimal da placa condutora, conforme a figura abaixo,

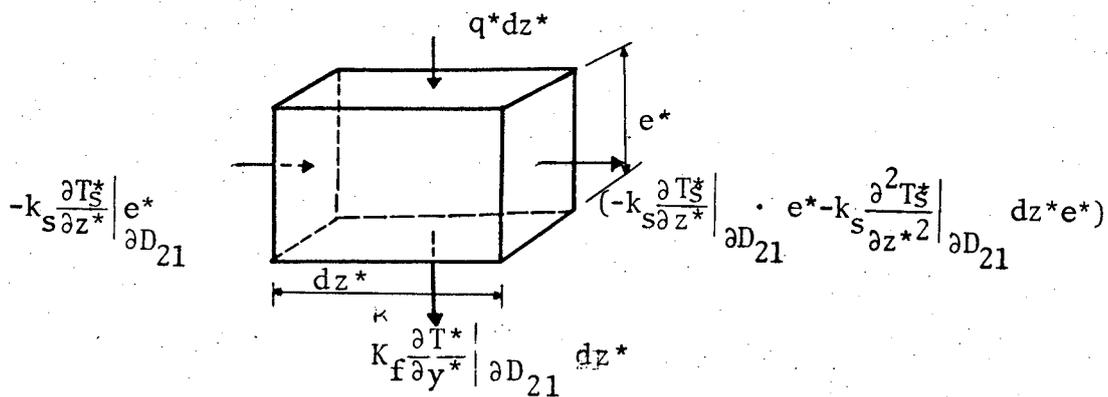


Figura 2.5

obtendo-se:

$$\frac{\partial T_{21}^*}{\partial y^*} = \frac{q^*}{k_f} + \frac{e^* k_f}{k_f} \frac{d^2 T_s^*}{dz^{*2}} \quad (2.2)$$

Para a equação (2.2) são admitidas as seguintes condições de fronteiras:

$$\frac{d}{dz^*} T_s^*(0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dz^*} T_s^*(l^*) = 0 \quad (2.4)$$

A partir das variáveis definidas no contexto, as seguintes variáveis adimensionais são estabelecidas:

$$z = \frac{z^*}{h^*} \quad (2.5)$$

$$y = \frac{y^*}{h^*} \quad (2.6)$$

$$q = \frac{qh^*}{k_f T_0} \quad (2.7)$$

$$T_s^* = \frac{T_s^* - T_0^*}{T_0^*} \quad (2.8)$$

$$T^* = \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \quad (2.9)$$

e

$$\beta = \frac{k_f e^*}{k_f h^*} \quad (2.10)$$

onde β representa a relação entre a condutância térmica da parede e a condutância térmica do fluido.

As equações (2.2) a (2.4), podem ser adimensionalizadas através das equações (2.5) a (2.10), obtendo-se:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y} = q + \beta \frac{d^2 T_s}{dz^2} \quad (2.11)$$

com,

$$\frac{d}{dz} T_s(0) = 0 \quad (2.12)$$

e

$$\frac{d}{dz} T_s(\ell) = 0 \quad (2.13)$$

A equação (2.11), juntamente com as condições de contorno (2.12) e (2.13), rege a distribuição de temperatura ao longo da placa para distribuições de fluxo térmico conhecidas.

2.3. Equação para o fluido

Na obtenção da equação diferencial da energia para o problema proposto, serão aplicadas as hipóteses citadas anteriormente. Portanto, a equação diferencial da energia em Coordenadas Cartesianas adquire a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = \frac{\rho c_p U^*}{k_f} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é uma equação diferencial parcial elíptica, que rege o campo de temperatura em toda a região D.

Como a região D foi subdividida em três regiões distintas, a equação (2.14) aplicada em cada região separadamente, é escrita a seguir:

— Para a região D_1 :

$$\frac{\partial^2 T_1^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial y^{*2}} = \frac{\rho c_p U^*}{k_f} \frac{\partial T_1^*}{\partial z^*} \quad (2.15)$$

— Para a região D_2 :

$$\frac{\partial^2 T_2^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 T_2^*}{\partial y^{*2}} = \frac{\rho c_p U^*}{k_f} \frac{\partial T_2^*}{\partial z^*} \quad (2.16)$$

— Para a região D_3 :

$$\frac{\partial^2 T_3^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 T_3^*}{\partial y^{*2}} = \frac{\rho c_p U^*}{k_f} \frac{\partial T_3^*}{\partial z^*} \quad (2.17)$$

Utilizando-se as variáveis adimensionais definidas pelas equações (2.5) a (2.10), e definindo a variável adimensional escrita abaixo,

$$\bar{U} = \frac{1}{4} \frac{U^*}{U_m^*} \quad (2.18)$$

as equações (2.15) a (2.17), com as condições de contorno definidas para cada região, mostradas através da Figura - 2.3, adquirem as formas adimensionais que seguem:

— Para a região D_1 :

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = P_e \bar{U} \frac{\partial T_1}{\partial z} \quad (2.19)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial z} = \frac{\partial T_{24}}{\partial z} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial y} = 0 \quad (2.22)$$

e

$$T_{14} = 0 \quad (2.23)$$

— Para a região D_2 :

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = P_e \bar{U} \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad (2.24)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$T_{21} = T_s \quad (2.25)$$

$$T_{22} = T_{34} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

$$T_{24} = T_{12} \quad (2.28)$$

— Para a região D_3 :

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} = P_e \bar{U} \frac{\partial T_3}{\partial z} \quad (2.29)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial y} = 0 \quad (2.30)$$

$$T_{32} = T_\infty \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial T_{33}}{\partial y} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial T_{34}}{\partial z} = \frac{\partial T_{22}}{\partial z} \quad (2.33)$$

onde P_e é o número de Peclet, definido como segue

$$P_e = \frac{\rho c_p U_m^* D^* h}{K_f} \quad (2.34)$$

O número de Peclet é um parâmetro adimensional que estabelece fisicamente a relação entre a quantidade de calor transmitida por convecção e a quantidade de calor transmitida por condução.

Como pode ser visto, o conjunto de equações (2.19) a (2.23) define matematicamente o problema para a região D_1 , assim como os conjuntos de equações (2.24) a (2.28) e (2.29) a (2.33) definem também matematicamente os problemas para as regiões D_2 e D_3 , respectivamente.

As conexões entre as distribuições de temperaturas de região para região, são fornecidas pelas condições de contorno dadas por (2.21), (2.26), (2.28) e (2.33), enquanto que a conexão da distribuição de temperatura do fluido com a distribuição de temperatura na placa aquecida é dada pela equação (2.25).

Portanto, apesar da região D ter sido dividida em três regiões distintas, o fluido é aquecido de uma maneira contínua, através dos processos de convecção e condução axial de calor, estabelecendo um perfil de temperatura contínuo de $-\infty$ a ∞ .

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

3.1. Obtenção das equações integrais

O método de equações integrais consiste em obter, a partir de equações diferenciais parciais lineares, equações integrais. Para isto, utiliza-se o segundo teorema de Green, as propriedades da função "Delta de Dirac" e as propriedades da função de Green.

Como é do conhecimento, o segundo teorema de Green é dado pela seguinte relação:

$$\int_D (t\nabla^2 v - v\nabla^2 t) \, dA = \int_{\partial D} \left(t \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial t}{\partial n} \right) \, dS \quad (3.1)$$

Este teorema é aplicado para todas as regiões chamadas normais [2] em \mathbb{R}^n , t e v são funções que apresentam derivadas parciais de segunda ordem, contínuas em D , dA é o elemento de área do domínio, dS é o elemento de arco, e n é a normal a superfície ∂D .

Para a obtenção e solução das equações integrais, será utilizada a função de Green fundamental associada ao operador de Laplace, que constitui a solução da seguinte equação diferencial parcial:

$$-\nabla^2 g(w, w') = \delta(w - w'), \quad w = (y, z) \quad \text{e} \quad w' = (y', z') \in \mathbb{R}^2 \quad (3.2)$$

onde $\delta(w-w')$ é a função "Delta de Dirac", e $g(w,w')$ é a função de Green.

O problema termico a ser resolvido pelo método de equações integrais é o definido na região D_2 , descrito pela equação (2.24), que satisfaz as condições de contorno especificadas por (2.25) a (2.28).

A equação (2.25) será transcrita a seguir:

$$\nabla^2 T_2(w) = P_e \bar{U} \frac{\partial T_2(w)}{\partial z} \quad (3.3)$$

onde T_2 é a distribuição de temperatura na região D_2 .

Multiplicando-se a equação (3.2) por $T(w)$ e a equação (3.3) por $g(w,w')$, adicionando estas equações e integrando-as ao longo da região D_2 , obtém-se:

$$\int_{D_2} (g(w,w') \nabla^2 T_2(w) - T_2(w) \nabla^2 g(w,w')) dA(w) =$$

$$\int_{D_2} T_2(w) \delta(w-w') dA(w) + \int_{D_2} P_e \bar{U}(w) \frac{\partial T_2(w)}{\partial z} g(w,w') dA(w) \quad (3.4)$$

No termo antes da igualdade da equação (3.4), será aplicado o segundo teorema de Green, expresso pela equação (3.1), enquanto, que no primeiro termo desta equação após o sinal de igualdade, será aplicado a propriedade A-2 (Apêndice A), da função "Delta de Dirac". Deste modo, a equação (3.4) adquire a seguinte forma:

$$T_2(w') = \int_{\partial D_2} (g(w,w') \frac{\partial T_2(w)}{\partial n_2} - T_2(w) \frac{\partial g(w,w')}{\partial n_2}) dS(w) -$$

$$\int_{D_2} P_2 \bar{U}(w) \frac{\partial T_2(w)}{\partial z} g(w, w') dA(w') \quad (3.5)$$

Na equação (3.5), aplica-se a propriedade de simetria apresentada pela função de Green (A-28, Apêndice A), e troca-se w por w' , resultando:

$$T_2(w) = \int_{\partial D_2} (g(w, w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial n'_2} - T_2(w') \frac{\partial g(w, w')}{\partial n'_2}) dS(w') - \int_{D_2} P_e \bar{U}(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} g(w, w') dA(w') \quad (3.6)$$

A derivada normal em w' da temperatura com relação a superfície ∂D_2 , doravante será denominada por ∂T_2 , assim como, a derivada normal em w' da função de Green com relação a superfície ∂D_2 , será denominada por ∂g ; isto por questão de simplificação.

Escrevendo-se a equação (3.6) em função de cada fronteira que compõe o subdomínio D_2 (∂D_{21} , ∂D_{22} , ∂D_{23} e ∂D_{24}), resulta:

$$T_2(w) = \int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w') - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') + \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') + \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') +$$

$$\int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24}(w') \partial g(w, w')) dS(w') - \int_{D_2} P_e \bar{U}(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} g(w, w') dA(w') \quad (3.7)$$

para todo ponto w sobre D_2

Observando-se a equação (3.7), nota-se que as condições de contorno T_{21} , ∂T_{21} , T_{22} , ∂T_{22} , T_{23} , ∂T_{23} , T_{24} , ∂T_{24} e $\frac{\partial T_2}{\partial z}$ forem conhecidas, esta equação permite o cálculo da temperatura em qualquer ponto do interior da região D_2 . Como T_{21} , T_{22} , ∂T_{23} e T_{24} são conhecidas pelas condições de contorno expressas pelas equações (2.25) a (2.28) respectivamente, torna-se necessário determinar uma equação para w que poderá ser aplicado em ∂D_2 , pois quando $w = w'$ surge uma singularidade, de modo que a equação (3.7) não poderá ser aplicada sobre este contorno (∂D_2). Isto pode ser verificado facilmente, uma vez que para o problema bidimensional, a função de Green e sua derivada com relação a normal são definidas conforme (A-10) e (A-16). Tal singularidade poderá ser contornada, se os pontos w e w' forem isolados através de um semi-circulo (ver Apêndice A).

Neste caso, aplica-se as propriedades (A-28) a (A-30) na equação (3.7), nos pontos sobre as fronteiras ∂D_{21} , ∂D_{22} , ∂D_{23} e ∂D_{24} , obtendo-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{21}(w) &= \int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w') - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') + \\
&+ \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&- \int_{D_2} P_e \bar{U}(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} g(w, w') dA(w') \tag{3.8}
\end{aligned}$$

para todo ponto w sobre ∂D_{21}

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{22}(w) &= \int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w') - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&- \int_{D_2} P_e \bar{U}(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} g(w, w') dA(w') \tag{3.9}
\end{aligned}$$

para todo ponto w sobre ∂D_{22}

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{23}(w) &= \int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w') - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&- \int_{D_2} P_e \bar{U}(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} g(w, w') dA(w') \tag{3.10}
\end{aligned}$$

para todo ponto w sobre ∂D_{23}

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{24}(w) &= \int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w') - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&+ \int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
&- \int_{D_2} (P_e U(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} g(w, w') dA(w')) \tag{3.11}
\end{aligned}$$

para todo ponto w sobre ∂D_{24}

Verificando-se as equações de (3.8) a (3.11) , nota-se que estas equações são independentes da temperatura do interior da região D_2 , sendo dependentes somente de ∂T_{21} , T_{21} , ∂T_{22} , T_{22} , ∂T_{23} , T_{23} , ∂T_{24} , T_{24} e $\frac{\partial T_2}{\partial z}$.

Através das condições de contorno (2.25) a (2.28), conhece-se T_{21} , T_{22} , ∂T_{23} e T_{24} respectivamente. Neste caso, o problema a ser resolvido conta com quatro equações, quatro condições de contorno conhecidas, e nove variáveis a serem determinadas.

Portanto, para que haja paridade entre o número de incógnitas e o número de equações, deve-se obter uma equação que forneça $\frac{\partial T_2(w')}{\partial z}$ para o interior da região. Esta equação é obtida, derivando a equação (3.7) com relação a z , que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2(w)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w) - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \right) \\ &+ \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') + \\ &+ \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') + \\ &+ \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS \\ &+ \int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24} \partial g(w, w')) dS(w') + \\ &- \int_{D_2} P e \bar{U}(w') \frac{\partial T_2(w')}{\partial z} g(w, w') dA(w') \end{aligned} \quad (3.12)$$

para todo w sobre D_2

As equações de (3.8) a (3.12), associadas às condições de contorno estabelecidas pelas equações (2.25) a (2.28), proporcionam os parâmetros de troca de calor na fronteira da região D_2 (temperatura e gradiente da temperatura).

Determinadas estas incógnitas, são elas substituídas na equação (3.7) obtendo a distribuição de temperatura para a região D_2 .

3.2. Solução das equações integrais

3.2.1. Divisão do contorno

Como foi visto, as equações que serão resolvidas para obter a distribuição de temperatura na região descrita pelo método integral, compõem-se de integrais de linha e integrais de área. Para obter uma solução numérica destas equações, tem-se, inicialmente que dividir o contorno da região e a região em elementos de arcos e elementos de áreas respectivamente, de forma que possibilite a solução destas integrais.

O critério escolhido para subdividir o contorno, foi utilizado em [35], que estabelece que no segmento de arco, deverá existir um ponto nodal (no centro do segmento), sobre o qual será aplicado a equação integral obtida para o determinado contorno. E, com o objetivo de avaliar o comportamento das equações integrais em torno deste ponto nodal, é necessário que os elementos de arcos sejam segmentos retos ou que possam ser a-

proximados por segmentos retos.

Os pontos correspondentes à subdivisão dos arcos serão denominados de pontos subnodais. Os segmentos de arcos devem ser escolhidos, de tal forma, que os pontos subnodais incluam todos os cantos envolvidos no contorno, assim como, os pontos onde ocorrem mudanças nas condições de contorno. Esta técnica garante que o vetor normal em cada ponto nodal dos segmentos, apresente uma direção normal ao segmento bem definida.

A subdivisão da região em elementos de áreas (no caso de uma região retangular), deve ser feita, unindo os pontos subnodais simétricos do contorno, onde será fixado no centro de cada área, um ponto, também chamado de ponto nodal. Para um melhor entendimento, veja a figura abaixo.

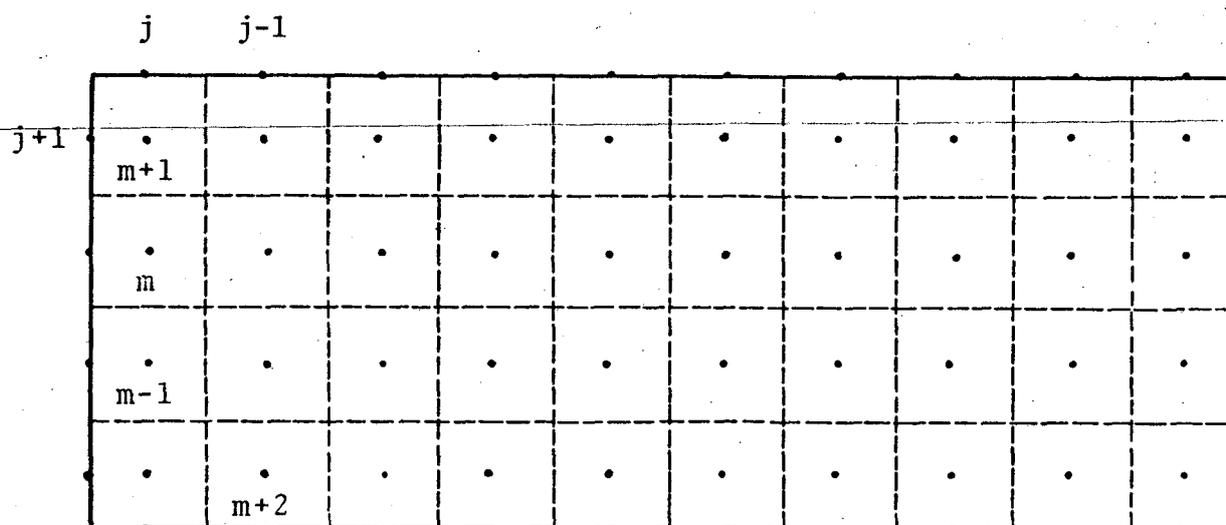


Figura 3.1

Nesta Figura j é o ponto nodal no j -ésimo elemento de arco e m é o ponto nodal no m -ésimo elemento de área.

O sentido de integração para as integrais de linha sobre o contorno, deverá ser coerente com o sentido utilizado na teoria empregada para a obtenção das equações integrais; isto é, o contorno é descrito de modo que guarda o domínio sobre o lado esquerdo. Por isso, os pontos são numerados de uma forma crescente com o sentido positivo de integração.

3.2.2. Formulação aproximada para a solução das integrais

Com a região e o contorno já subdivididos, o próximo passo, é estabelecer uma maneira que possibilite efetuar a integração das integrais de linha e de área, contidas nas equações integrais que serão aplicadas em cada elemento do contorno e do domínio.

A solução numérica de um problema, como foi descrito anteriormente, pode ser obtido pelo procedimento descrito em [3], como segue:

As integrais que deverão ser resolvidas no problema consistem em integrais da seguinte forma:

$$\phi_1(w) = \int_{\partial D} K(w, w') f(w') dS(w') \quad (3.13)$$

$$\phi_2(w) = \int_D K(w, w') f(w') dA(w') \quad (3.14)$$

Onde $K(w, w')$ é um núcleo correspondente à solução fundamental do operador Laplaceano, ou a derivada da solução fundamental deste operador com relação a normal. A função $f(w')$ normalmente é desconhecida, constituindo-se uma incognita do presente problema.

Para obter a solução numérica do problema, o contorno ∂D foi subdividido em n_t intervalos suaves e suficientemente pequenos, de modo que a função $f(w')$ possa ser aproximada pela função-degrau $\bar{f}(w')$, que assume valor constante para cada intervalo. Portanto,

$$\bar{f}(w) = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_t \quad \text{para todo ponto } w' \text{ sobre } \Delta S$$

O mesmo pode ser estendido para o subdomínio D_2 , que foi dividido em n_0 elementos de áreas uniforme, de forma retangular, suficientemente pequenos, de modo que a função $f(w')$ pode também ser aproximada pela função-degrau $\bar{f}(w)$, que se mantém constante para cada elemento de área, conforme [25]. Desta forma:

$$\bar{f}(w') = f_m, \quad m = 1, \dots, n_0 \quad \text{e para todo ponto } w' \text{ sobre } \Delta A$$

e conseqüentemente as equações (3.13) e (3.14) podem ser aproximadas por:

$$\phi_1(w) = \int_{\partial D} K(w, w') \bar{f}(w') \, dS(w') \quad (3.15)$$

$$\bar{\theta}_2(w) = \int_D K(w, w') \bar{f}(w') dA(w') \quad (3.16)$$

As equações (3.15) e (3.16) podem ser escritas nas seguintes formas:

$$\bar{\theta}_1(w) = \sum_{j=1}^{n_t} f_j \int_{\Delta S_j} K(w, w') dS(w') \quad (3.17)$$

$$\bar{\theta}_2(w) = \sum_{m=1}^{n_0} f_m \int_{\Delta A_m} K(w, w') dA(w') \quad (3.18)$$

Cada equação integral aplicada num determinado ponto nodal, deve ser formulada, conforme (3.17) e (3.18), onde os coeficientes

$$\int_{\Delta S_j} K(w, w') dS(w')$$

e

$$\int_{\Delta A_m} K(w, w') dA(w')$$

para o problema proposto, podem ser calculados analiticamente conforme [25].

3.2.3. Aplicação do método numérico às equações integrais

A equação integral que fornece a distribuição de temperatura no domínio D_2 é dada pela equação (3.7), isto é:

$$\begin{aligned}
 T_2(w) = & \int_{\partial D_{21}} (g(w, w') \partial T_{21}(w') - T_{21}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
 & + \int_{\partial D_{22}} (g(w, w') \partial T_{22}(w') - T_{22}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
 & + \int_{\partial D_{23}} (g(w, w') \partial T_{23}(w') - T_{23}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
 & + \int_{\partial D_{24}} (g(w, w') \partial T_{24}(w') - T_{24}(w') \partial g(w, w')) dS(w') \\
 & - \int_{\partial D_2} P e \bar{U} \frac{\partial T_2(w')}{\partial z'} \partial g(w, w') dA(w') \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w sobre D_2

Para resolver a equação (3.19), serão aplicadas as formulações aproximadas, apresentadas no item anterior, expressas de acordo com (3.17) e (3.18), resultando:

$$\begin{aligned}
 T_2(w_m) = & \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w'_j) \int_{\Delta S_{21)j}} g(w_m, w'_j) dS(w') - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w'_j) \int_{\Delta S_{21)j}} \partial g(w_m, w'_j) dS(w') \\
 & + \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w'_j) \int_{\Delta S_{22)j}} g(w_m, w'_j) dS(w') - \sum_{j=1}^{n_2} T_{22}(w'_j) \int_{\Delta S_{22)j}} \partial g(w_m, w'_j) dS(w')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w'_j) \int_{\Delta S_{23)j}} g(w_m, w'_j) dS(w') - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w'_j) \int_{\Delta S_{23)j}} g(w_m, w'_j) dS(w') \\
& + \sum_{j=1}^{n_4} \partial T_{24}(w'_j) \int_{\Delta S_{24)j}} g(w_m, w'_j) dS(w') - \sum_{j=1}^{n_4} T_{24}(w'_j) \int_{\Delta S_{24)j}} \partial g(w_m, w'_j) dS(w') \\
& - \sum_{j=1}^{n_0} P_e \bar{U}(w'_j) \frac{\partial T_2(w'_j)}{\partial z'} \int_{\Delta A_j} g(w_m, w'_j) dA(w') \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre D_2

onde,

n_0 = número de pontos nodais contidos na região D_2

n_1 = número de pontos nodais em ∂D_{21}

n_2 = número de pontos nodais em ∂D_{22}

n_3 = número de pontos nodais em ∂D_{23}

n_4 = número de pontos nodais em ∂D_{24}

A equação (3.20) deve ser resolvida pelo método da colocação [3], que consiste em aplicar a equação em cada ponto nodal w_m , impondo deste modo, que as condições de contorno sejam satisfeitas pontualmente.

Denotando-se os núcleos contidos na equação (3.20) e nas equações subsequentes por;

$$\begin{aligned}
G_{\ell i}^{mj} = \int_{\Delta S_{2\ell)j}} g(w_m, w'_j) dS(w'), \quad \ell \text{ e } i = 0, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, n_i \\
\text{e } j = 1, \dots, n_\ell
\end{aligned}$$

$$(\Delta G) \ell_{mj}^i = \int_{\Delta S_{2\ell}^j} \partial g(w_m, w_j') dS(w'), \quad \ell \text{ e } i = 0, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, n_i \\ \text{ e } j = 1, \dots, n_\ell$$

e

$$(GA) \ell_{mj}^i = \int_{\Delta A_j} g(w_m, w_j') dA(w'), \quad \ell \text{ e } i = 0, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, n_i \text{ e } j = 1, \dots, n_\ell$$

Nos núcleos acima, ℓ representa a fronteira da região D_2 ou a região D_2 , onde o ponto w_j' está situado, e i representa a fronteira desta região ou esta região, cujo ponto w_m está localizado.

Obtém-se, a seguinte equação:

$$T_2(w_m) = \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w_j') G_{10}{}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w_j') (\Delta G)_{10}{}_{mj} \\ + \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w_j') G_{20}{}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_2} T_{22}(w_j') (\Delta G)_{20}{}_{mj} \\ + \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w_j') G_{30}{}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w_j') (\Delta G)_{30}{}_{mj} \\ + \sum_{j=1}^{n_4} \partial T_{24}(w_j') G_{40}{}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_4} T_{24}(w_j') (\Delta G)_{40}{}_{mj} \\ - \sum_{j=1}^{n_0} P_{e\bar{U}}(w_j') \frac{\partial T_2(w_j')}{\partial z'} (GA)_{00}{}_{mj} \quad (3.21)$$

Para todo ponto w_m sobre D_2

ou na forma matricial, como segue:

$$\begin{aligned}
 & [I] \{T_2\} - [G10_{mj}] \{\partial T_{21}\} + [(\Delta G)10_{mj}] \{T_{21}\} - [G20_{mj}] \{\partial T_{22}\} + \\
 & [(\Delta G)20_{mj}] \{T_{22}\} - [G30_{mj}] \{\partial T_{23}\} + [(\Delta G)30_{mj}] \{T_{23}\} - [G40_{mj}] \{\partial T_{24}\} + \\
 & [(\Delta G)40_{mj}] \{T_{24}\} + P_e [(GA)00_{mj} \times \bar{U}_j] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_j \right\} = \{0\} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre D_2

Em (3.22), assim como, para todas as equações que serão escritas na forma matricial daqui para frente, o símbolo $[]$ representa matrizes quadradas, $\{ \}$ representa matrizes colunas, e $[I]$ a matriz identidade.

Para a utilização da equação (3.22), é necessário conhecer os valores da derivada normal da temperatura, assim como, a temperatura em cada ponto nodal sobre o contorno da região D_2 , e a derivada com relação a direção z em cada ponto desta região. Para isto, necessita-se resolver as equações de (3.8) a (3.12), que serão discretizadas, aplicando-se todos os conceitos introduzidos para obter a equação (3.22), a partir de (3.7).

Conseqüentemente, de forma análoga ao procedimento anterior, obtém-se:

- A partir da equação (3.8):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} T_{21}(w_m) &= \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w'_j) G_{11}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w'_j) (\Delta G)_{11}_{mj} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w'_j) G_{21}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_2} T_{21}(w'_j) (\Delta G)_{21}_{mj} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w'_j) G_{31}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w'_j) (\Delta G)_{31}_{mj} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_4} \partial T_{24}(w'_j) G_{41}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_4} T_{24}(w'_j) (\Delta G)_{41}_{mj} \\
&- \sum_{j=1}^{n_0} P_e \bar{U}(w'_j) \frac{\partial T_2(w'_j)}{\partial z'} (GA)_{01}_{mj} \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{21}

A equação (3.23) pode ser escrita na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&[1/2 [I] + [(\Delta G)_{11}_{mj}]] \{T_{21}\} - [G_{11}_{mj}] \{\partial T_{21}\} - [G_{21}_{mj}] \{\partial T_{22}\} + \\
&[(\Delta G)_{21}_{mj}] \{T_{22}\} - [G_{31}_{mj}] \{\partial T_{23}\} + [(\Delta G)_{31}_{mj}] \{T_{23}\} - [G_{41}_{mj}] \{\partial T_{24}\} + \\
&[(\Delta G)_{41}_{mj}] \{T_{24}\} + P_e [(GA)_{01}_{mj} \times \bar{U}_j] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z'} \right)_j \right\} = \{0\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{21}

- A partir da equação (3.9):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} T_{22}(w_m) &= \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w_j') G_{12}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w_j') (\Delta G)_{12}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w_j') G_{22}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_2} T_{22}(w_j') (\Delta G)_{22}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w_j') G_{32}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w_j') (\Delta G)_{32}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_4} \partial T_{24}(w_j') G_{42}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_4} T_{24}(w_j') (\Delta G)_{42}_{mj} \\
 &- \sum_{j=1}^{n_0} P_e \bar{U}(w_j') \frac{\partial T_2(w_j')}{\partial z'} (GA)_{02}_{mj} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{22}

A equação (3.25) pode ser escrita na forma matricial, conforme segue:

$$\begin{aligned}
 &[1/2 [I] + [(\Delta G)_{22}_{mj}]] \{T_{22}\} - [G_{12}_{mj}] \{\partial T_{21}\} + [(\Delta G)_{12}_{mj}] \{T_{21}\} - \\
 &[G_{22}_{mj}] \{\partial T_{22}\} - [G_{32}_{mj}] \{\partial T_{23}\} + [(\Delta G)_{32}_{mj}] \{T_{23}\} - [G_{42}_{mj}] \{\partial T_{24}\} + \\
 &[\Delta G_{42}_{mj}] \{T_{24}\} + P_e [(GA)_{02}_{mj} \times \bar{U}_j] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z'} \right)_j \right\} = \{0\} \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{22}

- A partir da equação (3.10):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} T_{23}(w_m) &= \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w_j') G_{13}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w_j') (\Delta G)_{13}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w_j') G_{23}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_2} T_{22}(w_j') (\Delta G)_{23}_{mj} \\
 &\Delta \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w_j') G_{33}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w_j') (\Delta G)_{33}_{mj} \\
 &\sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{24}(w_j') G_{43}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{24}(w_j') (\Delta G)_{43}_{mj} \\
 &- \sum_{j=1}^{n_0} P_e \bar{U}(w_j') \frac{\partial T_2(w_j')}{\partial z_j'} (GA)_{03}_{mj} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{23}

A equação (3.27) pode ser colocada na forma matricial, como segue:

$$\begin{aligned}
 [1/2 [I] + [(\Delta G)_{33}_{mj}]] \{T_{23}\} - [G_{13}_{mj}] \{\partial T_{21}\} + [(\Delta G)_{13}_{mj}] \{T_{21}\} - \\
 [G_{23}_{mj}] \{\partial T_{22}\} + [(\Delta G)_{23}_{mj}] \{T_{22}\} - [G_{33}_{mj}] \{\partial T_{23}\} - [G_{43}_{mj}] \{\partial T_{24}\} \\
 + [(\Delta G)_{43}_{mj}] \{T_{24}\} + P_e [(GA)_{03}_{mj} \times \bar{U}_j] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z_j'} \right) \right\} = \{0\} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{23}

- Para a equação (3.11):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} T_{24}(w_m) &= \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w'_j) G_{14}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w'_j) (\Delta G)_{14}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w'_j) G_{24}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_2} T_{22}(w'_j) (\Delta G)_{24}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w'_j) G_{34}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w'_j) (\Delta G)_{34}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_4} \partial T_{24}(w'_j) G_{44}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_4} T_{24}(w'_j) (\Delta G)_{44}_{mj} \\
 &- \sum_{j=1}^{n_0} P_e \bar{U}(w'_j) \frac{\partial T_2(w'_j)}{\partial z'} (GA)_{04}_{mj} \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{24} .

Na forma matricial, (3.29) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 [1/2 [I] + [(\Delta G)_{44}_{mj}]] \{T_{24}\} - [G_{14}_{mj}] \{\partial T_{21}\} + [(\Delta G)_{14}_{mj}] \{T_{21}\} - \\
 [G_{24}_{mj}] \{\partial T_{22}\} + [(\Delta G)_{24}_{mj}] \{T_{22}\} - [G_{34}_{mj}] \{\partial T_{23}\} + [(\Delta G)_{34}_{mj}] \{T_{23}\} - \\
 [G_{44}_{mj}] \{\partial T_{24}\} + P_e [(GA)_{04}_{mj} \times \bar{U}_j] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z'} \right)_j \right\} = \{0\} \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Para todo ponto w_m sobre ∂D_{24}

- Finalmente, para a equação (3.12):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_2(w_m)}{\partial z} &= \sum_{j=1}^{n_1} \partial T_{21}(w'_j) \partial G_{10}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_1} T_{21}(w'_j) \partial (\Delta G)_{10}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_2} \partial T_{22}(w'_j) \partial G_{20}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_2} T_{22}(w'_j) \partial (\Delta G)_{20}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_3} \partial T_{23}(w'_j) \partial G_{30}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_3} T_{23}(w'_j) \partial (\Delta G)_{30}_{mj} \\
 &+ \sum_{j=1}^{n_4} \partial T_{24}(w'_j) \partial G_{40}_{mj} - \sum_{j=1}^{n_4} T_{24}(w'_j) \partial (\Delta G)_{40}_{mj} \\
 &- \sum_{j=1}^{n_0} P_e \bar{U}(w'_j) \frac{\partial T_2(w'_j)}{\partial z'} \partial (GA)_{00}_{mj}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Para todo ponto w_m sobre D_2

onde,

$$\begin{aligned}
 \partial G_{\ell 1}_{mj} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\Delta S_{2\ell} j} g(w_m, w'_j) dS(w') \right), \quad \ell \text{ e } i = 0, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, n_i \\
 &\text{e } j = 1, \dots, n_\ell
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial (\Delta G)_{\ell i}_{mj} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\Delta S_{2\ell} j} \partial g(w_m, w'_j) ds(w') \right), \quad \ell \text{ e } i = 0, \dots, 4, \quad m = 1, \dots, n_i \\
 &\text{e } j = 1, \dots, n_\ell
 \end{aligned}$$

e

$$\partial(GA)_{\ell i} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\Delta S_{2\ell}} g(w_m, w'_K) dA(w') \right), \ell \text{ e } i = 0, \dots, 4, m = 1, \dots, n_i$$

$$\text{e } j = 1, \dots, n_\ell$$

Nos núcleos acima, ℓ representa a fronteira da região D_2 ou a região D_2 , onde o ponto w'_j está situado, e i representa a fronteira desta região ou esta região, cujo ponto w_m está localizado.

Na forma matricial, (3.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left[[I] + P_e \left[\partial(GA)_{00} \bar{x} \bar{U}_j \right] \right] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_j \right\} - [\partial G_{10}]_{mj} \{ \partial T_{21} \} + [\partial (\Delta G)_{10}]_{mj} \{ T_{21} \} \\ & - [\partial G_{20}]_{mj} \{ \partial T_{22} \} + [\partial (\Delta G)_{20}]_{mj} \{ T_{22} \} - [\partial G_{30}]_{mj} \{ \partial T_{23} \} + [\partial (\Delta G)_{30}]_{mj} \{ T_{23} \} - \\ & [\partial G_{40}]_{mj} \{ \partial T_{24} \} + [\partial (\Delta G)_{40}]_{mj} \{ T_{24} \} = \{ 0 \} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para todo ponto w_m sobre D_2

Para que o sistema de equações composto por (3.24), (3.26), (3.28), (3.30) e (3.32) possa ser resolvido, é necessário associar a estas equações às condições de contornos do problema, que são prescritas através de (2.25) a (2.28).

Resolvido este sistema de equações, a distribuição de temperatura e fluxo de calor nas fronteiras do subdomínio D_2 são conhecidas, o que permite obter a distribuição de tem

peratura em qualquer ponto da região D_2 , por meio da equação (3.22).

O número de equações a serem resolvidas simultaneamente no sistema, depende do comprimento a ser especificado para a secção aquecida (∂D_{21}), e do comprimento dos segmentos de arcos que compõem o contorno. Neste caso, a variação do comprimento da secção aquecida acarreta uma mudança no tempo de computação, enquanto, que a variação do comprimento de arco acarreta uma mudança no tempo de computação e precisão dos resultados.

3.3. Formulação variacional para os extremos do duto

O princípio do método variacional, consiste em encontrar uma função T^* , tal que o integrando - funcional - de uma integral definida, seja dependente desta função, e cujo comportamento de T^* nos extremos do intervalo de integração, sejam conhecidos.

Para um problema de transmissão de calor, a funcional é obtida através da equação da energia, conforme [5], e o comportamento de T^* nos extremos do intervalo é conhecido através das condições de contorno do problema físico a ser resolvido.

As equações (2.19) e (2.29), juntamente com as condições de contorno de (2.20) a (2.23) e de (2.30) a (2.33), descrevem o problema térmico a ser resolvido pelo método variacional nos sub

domínio D_1 e D_3 . Transcrevendo-se as equações (2.19) e (2.29) a seguir:

$$\nabla^2 T_1 = P_e \bar{U} \frac{\partial T_1}{\partial z} \quad (3.33)$$

e

$$\nabla^2 T_2 = P_e \bar{U} \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad (3.34)$$

Conforme [6] e o apêndice B, as equações (3.33) e (3.34) e as condições de contorno adjuntas ((2.20) a (2.23) e (2.30) a (2.33)), estão associadas ao funcional dado por (B-35), adimensionalizado através dos grupos adimensionais definidos por (2.5) a (2.10), (2.18) e (2.34). Transcrevendo-se o funcional a seguir:

$$j(T, \hat{T}) = \int_{D_1} \int_{D_3} P_e \bar{U} \frac{\partial T}{\partial z} \times (\hat{T} + 1) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right)^2 \right) dA$$

$$- \int_{\partial D_1} \int_{\partial D_3} q(\hat{T} + 1) dS \quad (3.35)$$

onde,

$T = \hat{T}$ é a distribuição de temperatura procurada

$\hat{T} = T + \delta T$

$\delta T = \hat{\epsilon}$ é o incremento de \hat{T}

Os problemas de valores de contorno (3.33) e (3.34) com (3.35), serão divididos em dois problemas distintos: um será aplicado no subdomínio D_1 , e o outro no subdomínio D_3 .

Neste caso, será proposto duas distribuições de temperaturas: $T_1(y,z)$ para a região $D_1(z < 0)$ e $T_3(y,z)$ para a região $D_3(z > \ell)$, tal que satisfaça as condições de contorno para as regiões D_1 e D_3 respectivamente.

Através do método de Ritz Galerkin [5], podem ser propostas as seguintes distribuições de temperaturas aproximadas de ordem n para $T_1(y,z)$ e $T_3(y,z)$:

$$T_1(y,z) = \sum_{i=0}^n a_i^-(z) \psi_i(y) \quad (3.36)$$

e

$$T_3(y,z) = \sum_{i=0}^n a_i^+(z-\ell) \psi_i(y) \quad (3.37)$$

onde $a_i^+(z-\ell)$ e $a_i^-(z)$ são funções a determinar, e as funções $\psi_i(y)$ formam uma sequência completa de funções linearmente independentes, que devem satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\left. \frac{\partial \psi_i(y)}{\partial y} \right|_{\partial D_{11}} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.38)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_i(y)}{\partial y} \right|_{\partial D_{13}} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_i(y)}{\partial y} \right|_{\partial D_{31}} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_i(y)}{\partial y} \right|_{\partial D_{33}} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.41)$$

O procedimento utilizado para obter as funções $a^+(z-\ell)$ e $a^-(z)$, contidas nas equações (3.36) e (3.37), está apresentado no apêndice C, que obteve os seguintes sistemas de equações diferenciais lineares, homogênea e de segunda ordem:

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{0\} \quad (3.42)$$

e

$$[H] \{\ddot{a}^-\} - [A] \{\dot{a}^-\} - [B] \{a^-\} = \{0\} \quad (3.43)$$

onde,

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \psi_i(y) \psi_j(y) dy \quad (3.44)$$

$$B_{ij} = \int_{-1}^1 \nabla \psi_i(y) \cdot \nabla \psi_j(y) dy \quad (3.45)$$

e

$$A_{ij} = \int_{-1}^1 P_e \bar{U}(y) \psi_i(y) \psi_j(y) dy \quad (3.46)$$

Para encontrar a solução do sistema de equações (3.42), será apresentado o procedimento apresentado em [5], que se caracteriza em tomar as seguintes expressões:

$$\{a^+\} = \{C^+\} e^{\lambda(z-\ell)} \quad (3.47)$$

Substituindo (3.47) em (3.42), obtém-se o seguinte problema no espaço R^{n+1} :

$$\lambda^2 [H] \{C^+\} - \lambda [A] \{C^+\} - [B] \{C^+\} = \{0\} \quad (3.48)$$

Conforme [5], o procedimento caracterizado por (3.48), é equivalente ao problema no espaço $R^{2(n+1)}$, dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\lambda[R] \{Y^+\} - [S] \{Y^+\} = \{0\} \quad (3.49)$$

onde,

$$[R] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [0] \end{bmatrix}$$

e

$$\{Y^+\} = \begin{Bmatrix} \lambda \{C^+\} \\ \{C^+\} \end{Bmatrix}$$

Deve ser salientado, que a matriz B dada por:

$$B_{ij} = \int_{-1}^1 \nabla \psi_i(y) \cdot \nabla \psi_j(y) dy$$

Apresente uma característica especial; isto é, possui a primeira linha e a primeira coluna nula, pelo fato de que $\psi_0(y) = 1$.

Deste modo, o sistema de equações diferenciais lineares e homogêneas, representado por (3.49) no espaço $R^{2(n+1)}$ pode ser perfeitamente representado no espaço R^{2n+1} , sem perda de generalidade, se eliminada a linha e a coluna $(n+2)$, que são nulas nas matrizes R e S , conforme [5].

A matriz R é positiva definida, pelo fato de que sua diagonal ser composta em blocos, pelas matrizes hermitianas H e B . Deste modo, o problema de autovalores (3.49) pode ser colocado na forma canônica, pois é possível encontrar uma matriz Q , tal que:

$$[Q]^T [R] [Q] = [I] \quad (3.50)$$

onde,

$[I]$ = a matriz identidade

$[Q]^T$ = a transposta da matriz Q .

Aplicando-se Q e Q^T na expressão (3.49), obtêm-se:

$$([I] - [Q]^T [S] [Q]) [Q]^T \{Y^+\} = \{0\} \quad (3.51)$$

Para que (3.51) não apresente somente a solução trivial, a seguinte igualdade deve ocorrer:

$$\det(\lambda[I] - [Q]^T[S][Q]) = 0 \quad (3.52)$$

A equação (3.52) pode ser resolvida por métodos convencionais, como apresentado em [8], e apresenta $(2n+1)$ autovalores e $(2n+1)$ autovetores reais, dado que a matriz do problema é real e simétrica. Denotando-se os autovetores por X_i , $i = 1, 2, \dots, 2n+1$, os vetores Y_i^+ são obtidos pela seguinte expressão:

$$\{Y_i^+\} = [Q] \{X_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1 \quad (3.53)$$

Como consequência da singularidade apresentada pelas matrizes R e S, pelo procedimento anterior, são encontrados $2n+1$ autovalores e $2n+1$ autovetores, sendo $n+1$ autovalores positivos e n autovalores negativos, isto, pelo fato de que a matriz do problema (3.51) é real e simétrica.

Para que o problema (3.49) fique representado no espaço R^{2n+2} , torna-se necessário definir mais um autovalor e mais um autovetor. Conforme [5], um dos autovetores que satisfazem o problema, está associado ao autovalor zero, sendo definido como o vetor abaixo:

$$\{Y^+\}^T = \{0, 0, \dots, 0, C, 0, \dots, 0\} \quad (3.54)$$

onde

C = é uma constante arbitrária, localizada na coluna $(n+2)$.

Com a supressão da linha $n+2$ e da coluna $n+2$ das matrizes S e R do problema (3.49), os auto-vetores não são obtidos completamente, restando determinar justamente o $(n+2)$ -ésimo elemento de cada auto-vetor. Este elemento pode ser encontrado, lembrando que:

$$\{Y_i^+\} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \{C_i^+\} \\ \{C_i\} \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.55)$$

Donde, deduz que:

$$Y_{n+2} = Y_1^+ / \lambda$$

Desta forma, todos os autovalores e auto-vetores do problema (3.49) são obtidos. Destes $2n+2$ autovalores : $n+1$ são positivos, n são negativos e um é nulo. Isto conforme [10], é garantido pelo fato de que o auto-valor nulo está associado à região D_3 , juntamente com os n autovalores negativos, para garantir que (3.42) apresente solução finita em $z = \infty$.

De posse destes autovalores e destes autovetores, pode-se obter os autovetores do problema espectral - (C_i^+) - associado a (3.52), através da equação (3.55), que combinados linearmente e aplicados às funções $e^{\lambda_j(z-\ell)}$, fornece a solução de (3.42), isto é,

$$\{a^+\} = \sum_{j=0}^n A_j^+ \{C_j^+\} e^{\lambda_j^+(z-\ell)} \quad (3.56)$$

onde, A_j^+ são constantes a determinar, λ_j^+ são os autovalores negativos, incluindo o nulo.

Substituindo (3.56) em (4.46), resulta:

$$T_3(y, z) = \sum_{j=0}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+(z-\ell)} \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(y) \quad (3.57)$$

onde, C_{ij}^+ é elemento da matriz $|C^+|$, constituindo pelas colunas correspondentes aos auto-vetores $\{C^+\}$, e os coeficientes A_j^+ são desconhecidos.

Procedendo de maneira análoga para a região D_1 , pode ser obtido uma expressão para $T_1(y, z)$, que adquire a seguinte forma:

$$T_1(y, z) = \sum_{j=0}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \psi_i(y) \quad (3.58)$$

Neste caso, os autovalores são os positivos, que garantem que (3.53) seja finita quando $z = -\infty$. C_{ij}^- são os elementos da matriz $[C^-]$, onde cada coluna é constituída por um auto-vetor correspondentes aos autovalores positivos, e A_j^- são desconhecidos.

Desenvolvendo o primeiro termo da primeira somatória da equação (3.57), lembrando que $\lambda_0^+ = 0$, e que todos os componentes do autovetor associado a $\lambda_0^+ - C_0^+$ - são nulos, exceto o primeiro que é arbitrário, obtém-se:

$$T_3(z, y) = A_0^+ + \sum_{j=1}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+(z-\ell)} \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(y) \quad (3.59)$$

Aplicando a equação (3.59) em $z = \infty$, obtém-se que $A_0^+ = T_\infty$, conseqüentemente:

$$T_3(z, y) = T_\infty + \sum_{j=1}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+(z-\ell)} \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(y) \quad (3.60)$$

As equações (3.58) e (3.60) serão escritas numa forma mais adequada como a seguir:

$$T_1(z, y) = \sum_{j=0}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} F_j^-(y) \quad (3.61)$$

e

$$T_3(z, y) = T_\infty + \sum_{j=1}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+(z-\ell)} F_j^+(y) \quad (3.62)$$

onde,

$$F_j^-(y) = \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \psi_i(y)$$

e

$$F_j^+(y) = \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \psi_i(y)$$

As equações (3.61) e (3.62), representam as distribuições de temperaturas nos subdomínios D_1 e D_3 respectivamente. Nestas equações, os coeficientes A_j^- e A_j^+ são desconhecidos,

tornando-se necessário determinar uma expressão que possibilite a sua solução. Para isto, devem ser calculadas as derivadas com relação a z , das equações (3.61) e (3.62), e aplicá-las em $z = 0$ e $z = l$ respectivamente. Posteriormente, substituir a derivada obtida de (3.61) na condições de fronteira (2.21) e a derivada obtida de (3.62) em (2.33), obtendo-se as seguintes relações:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} T_2(y, z) \right|_{\partial D_{24}} = \sum_{j=0}^n A_j^- \lambda_j^- F_j^-(y) \quad (3.63)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} T_2(y, z) \right|_{\partial D_{22}} = \sum_{j=1}^n A_j^+ \lambda_j^+ F_j^+(y) \quad (3.64)$$

Multiplicando-se (3.63) e (3.64) por $F_k^-(y)$ e $F_k^+(y)$ respectivamente, em ambos os lados destas equações, e integrando-as em relação a y , no intervalo $(-1, 1)$, obtém:

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial T_2(y, z)}{\partial z} \Big|_{\partial D_{24}} F_k^-(y) dy = \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^n A_j^- \lambda_j^- F_j^-(y) F_k^-(y) dy \quad (3.65)$$

com $k = 0, \dots, n$

e

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial T_2(y, z)}{\partial z} \Big|_{\partial D_{22}} F_k^+(y) dy = \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^n A_j^+ \lambda_j^+ F_j^+(y) F_k^+(y) dy \quad (3.66)$$

com $k = 1, \dots, n$.

neste caso, todos os coeficientes de (3.61) e (3.62) são conhecidos, conseqüentemente, as distribuições de temperaturas nas regiões D_1 e D_3 são conhecidas.

A precisão da discretização apresentada pelo método variacional, é dado pelo número de seqüências que são incluídas na série estabelecida para a obtenção das distribuições de temperaturas. Neste caso, quanto maior for n nas equações (3.61) e (3.62), maior será a precisão nas distribuições de temperatura.

3.4. Discretização da equação da energia para a placa.

A equação (2.11), juntamente com as equações (2.12) e (2.13) descreve o problema térmico para a placa condutora (isto é, a placa superior em $0 < z < \ell$). Estas equações serão transcritas a seguir:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y} = q + \beta \frac{d^2 T_s}{dz^2} \quad (3.67)$$

com,

$$\frac{d}{dz} T_s(0) = 0 \quad (3.68)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} T_S(\ell) = 0 \quad (3.69)$$

As equações (3.67) a (3.69) serão resolvidas pelo método de diferenças finitas. Para isto, a placa condutora será dividida em elementos de áreas, conforme a figura abaixo.

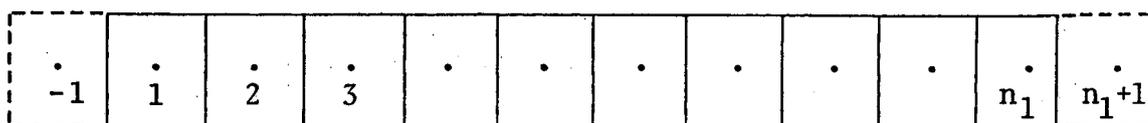


Figura 3.2.

onde n_1 é o número de pontos na placa condutora e -1 e (n_1+1) são pontos fictícios, utilizados como artifício para que seja possível aplicar a equação (3.67) na forma discretizada pelo método de diferenças finitas, nos pontos das extremidades da placa condutora.

Aplicando-se o método de diferenças finitas nas equações (3.67) a (3.69), obtêm-se:

$$\frac{\partial T_{21}(j)}{\partial y} = q(j) + \frac{\beta}{\Delta z} (T_S(j+1) - 2T_S(j) + T_S(j-1)), \quad (3.70)$$

$$j = 1, \dots, n_1$$

com,

$$T_S(1) - T_S(-1) = 0 \quad (3.71)$$

e

$$T_S(n_1+1) - T_S(n_1) = 0 \quad (3.72)$$

ou em uma forma mais adequada, conforme abaixo:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y}(j) = q(j) + \frac{\beta}{\Delta z^2} (T_S(j+1) - 2T_S(j) + T_S(j-1)), \quad j = 2, \dots, n_1 - 1 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y}(1) = q(j) + \frac{\beta}{\Delta z^2} (T_S(2) - T_S(1)), \quad j = 1 \quad (3.74)$$

e

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y}(n_1) = q(j) + \frac{\beta}{\Delta z^2} (T_S(n_1-1) - T_S(n_1)), \quad j = n_1 \quad (3.75)$$

Os coeficientes do sistema de equações expressos por (3.73) a (3.75), formam uma matriz singular, portanto, este sistema de equações apresenta infinitas soluções. Neste caso, na solução do problema, as equações (3.73) a (3.75) serão substituídas nos lugares de $\frac{\partial T_{21}(j)}{\partial y}$ contidos nas equações discretizadas pelo método de equações integrais.

3.5. Resumo do Problema discretizado

O problema térmico a ser resolvido, constitui num acoplamento de quatro regiões distintas: a região descrita pela placa condutora, e as regiões D_1 , D_2 e D_3 , que compõem a região D , estabelecida para determinar os parâmetros de troca de calor. As regiões D_1 , D_2 e D_3 estão conectadas através das condições de contorno dadas por (2.21), (2.26), (2.28) e (2.33) que garantem a continuidade da distribuição de temperatura ao longo de toda a região D , enquanto que a conexão da distribuição de temperatura do fluido com a distribuição de temperatura da placa aquecida é dada pela equação (2.25).

O problema definido para a região D_2 , foi discretizado pelo método de equações integrais, obtendo-se as equações (3.24), (3.26), (3.28) e (3.30) aplicadas nas fronteiras do domínio e (3.22) e (3.32) aplicadas no domínio. As equações aplicadas na fronteira do domínio D_2 , associadas às condições de contorno dadas por (2.25) a (2.28), e às equações (3.73) a (3.75) e (3.32); constituem um sistema de equações independentes, que podem ser resolvidas simultaneamente ou iterativamente, obtendo-se como solução os seguintes parâmetros: ∂T_{22} , T_{21} , ∂T_{22} , T_{23} , ∂T_{24} e $\frac{\partial T_2(y,z)}{\partial y}$.

Para o problema definido pelas regiões D_1 e D_3 , foi aplicado o método variacional, obtendo-se as equações (3.61) e (3.62), que representam as distribuições de temperaturas nestas regiões respectivamente, e as equações, (3.65) que fornece os coeficientes A_j^- e (3.66) que fornece os coeficientes A_j^+ .

A sequência lógica para a solução do problema, é estabelecida, de modo que inicialmente devem ser admitidos os parâmetros T_{22} , T_{24} e $\frac{\partial T_2}{\partial z}$, para obter a solução do sistema de equações composto por (3.24), (3.26), (3.28) e (3.30), pelas condições de contorno (2.25) a (2.28) e pelas equações (3.73) a (3.75). Através da solução deste sistema, encontram-se ∂T_{21} , T_{21} , ∂T_{22} , T_{23} e ∂T_{24} , que associadas aos parâmetros admitidos inicialmente e as condições de contorno dadas por (2.26) a (2.28), obtém-se o novo $\frac{\partial T_2}{\partial z}$ para o problema. Substituindo-se ∂T_{22} e ∂T_{24} em (3.66) e (3.65) respectivamente, obtém-se os coeficientes A_j^+ e A_j^- . Calculados estes coeficientes, podem ser obtidas as soluções de (3.61) e (3.62), que aplicadas nas fronteiras ∂D_{22} e ∂D_{24} , encontram-se as novas T_{22} e T_{24} respectivamente, através das condições de encontros (2.26) e (2.28). Com os valores admitidos inicialmente recalculados, torna-se a repetir o processo até que haja convergência do problema, cujo critério utilizado para determinar a aproximação desejada, constitui no procedimento de comparação entre as variáveis calculadas na última e penúltima iteração. Posteriormente, com os parâmetros finais calculados, pode-se conseguir a distribuição de temperatura em toda a região D, através de (3.22), (3.61) e (3.62).

3.6. Número de Nusselt

O número de Nusselt, representa a relação entre o gradiente térmico próximo a parede do sólido, e a diferença entre a temperatura da superfície e a temperatura média de

mistura. Portanto, pode-se obter o número de Nusselt, fazendo um balanço térmico local na superfície de troca de calor (∂D_{21}), que resulta na seguinte expressão:

$$h'(T_{21}^* - T_b^*) = K_f \left. \frac{\partial T_2^*}{\partial n^*} \right|_{\partial D_{21}} \quad (3.76)$$

onde h' é o coeficiente de troca de calor por convecção e $T_b^*(z^*)$ é a temperatura média de mistura, definida por:

$$T_b^*(z^*) = \frac{\int_{A^*} U^*(y^*) T^*(y^*, z^*) dA^*}{\int_{A^*} U^*(y^*) dA^*} \quad (3.77)$$

adimensionalizando-se (3.76) e (3.77), através dos grupos adimensionais expressos por (2.5) a (2.10), (2.28) e (2.34), resulta:

$$h'(T_{21} - T_b) = \frac{K_f}{h^*} \left. \frac{\partial T_2}{\partial n} \right|_{\partial D_{21}} \quad (3.78)$$

e

$$T_b(z) = \frac{\int_A U(y) T(y, z) dA}{\int_A U(y) dA} \quad (3.79)$$

reorganizando-se a equação (3.78), conforme segue:

$$\frac{h'h^*}{K_f} = \frac{\left. \frac{\partial T_2}{\partial n} \right|_{\partial D_{21}}}{(T_{21} - T_b)} \quad (3.80)$$

e lembrando-se da definição do número de Nusselt, resulta:

$$N_u(z) = \frac{\left. \frac{\partial T_2}{\partial n} \right|_{\partial D_{21}}}{(T_{21} - T_b)} \quad (3.81)$$

3.7. Temperatura no infinito

A temperatura no infinito, para o problema proposto, pode ser obtida fazendo um balanço de energia ao longo da região D, mostrada pela Figura 2.1, obtendo-se

$$\int_0^{\ell^*} \frac{\partial T_{21}^*}{\partial y^*} dz^* = - \dot{m} C_p (T_0^* - T_\infty^*) \quad (3.82)$$

onde,

$$\dot{m} = \rho U_m^* (2h^*)$$

adimensionalizando-se a equação (3.82) através dos grupos adimensionais definidos por (2.5) a (2.10), (2.18) e (2.34), resulta:

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial T_{21}}{\partial y} dz = - \dot{m} C_p T_\infty \quad (3.83)$$

multiplicando-se a equação (3.83) por $(1/K_f)$ em ambos os lados da equação, resulta:

$$\frac{1}{K_f} \int_0^{\ell} \frac{\partial T_{21}}{\partial y} dz = \frac{P_e}{2} T_{\infty} \quad (3.84)$$

onde,

$$P_e = 2 \frac{\dot{m} C_p}{K_f} = \frac{\rho C_p U_m^* Dh}{K_f}$$

A equação (3.84) pode ser escrita em uma forma mais adequada, como segue:

$$T_{\infty} = 2 \frac{\ell \bar{q}}{P_e} \quad (3.85)$$

onde,

$$\bar{q} = \frac{1}{\ell} \int \frac{1}{K_f} \frac{\partial T_{21}}{\partial y} dz.$$

4. APLICAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO AO PROBLEMA

Nos capítulos anteriores foi apresentado um problema físico, e um esquema numérico que possibilita obter a sua solução. Nesse problema, foi levado em consideração a condução axial de calor no fluido e na parede, para um fluxo laminar, num problema de Graetz em placas paralelas, cuja superfície externa da placa superior, na região $0 < z < \ell$ (ver Figura 2.1, Capítulo 2), é aquecida por um fluxo de calor especificado.

A condução axial de calor no fluido exerce uma influência considerável quando o número de Prandtl é pequeno (isto, porque torna-se difícil obter escoamentos laminares com $P_e > 100$, o que possibilita desprezar a condução axial de calor). A condução axial de calor na parede, altera o fluxo de calor local que é absorvido pelo fluido, consequentemente, mudando a distribuição de calor que é admitido no mesmo. Desta forma, os parâmetros de troca de calor são alterados, quando se considera esses fatores.

O método numérico que será utilizado para a solução do problema definido pela região D, conforme a discretização apresentada anteriormente, constitui uma combinação entre os métodos numéricos de equações integrais e variacional. Tal procedimento, teve como objetivo verificar o comportamento do método de equações integrais, unido com o método variacional.

Portanto, no problema a ser resolvido, especial destaque deve ser dado aos parâmetros que caracterizam a

condutância na parede e a condutância no fluido, assim como, ao método numérico utilizado para a solução do problema. Neste caso, os seguintes fatores básicos devem ser analisados:

- a) O comportamento do método numérico utilizado na solução.
- b) A influência do parâmetro que governa a condução axial de calor no fluido (P_e).
- c) A influência do parâmetro que governa a condução axial de calor na parede (β).

Para tal análise, o estudo será efetuado na geometria apresentada na Figura abaixo, semelhante a Figura 2.4 do Capítulo 2, cujas condições de contorno são especificadas através das equações (2.20) a (2.23), (2.25) a (2.28) e (2.30) a (2.33). Portanto, a região a ser considerada, juntamente com as condições de contorno do problema é a seguinte:

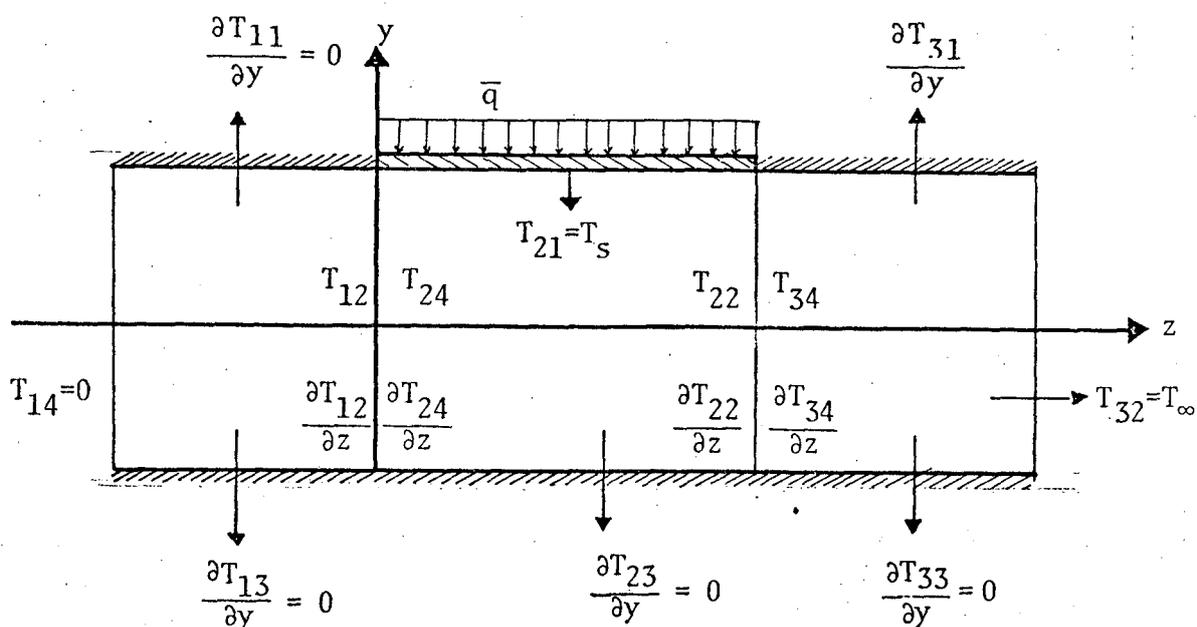


Figura 4.1

onde T_∞ é definida pela equação (3.85), isto é:

$$T_\infty = \frac{2 \cdot \ell \cdot \bar{q}}{P_e} \quad (4.1)$$

As equações (3.73), (3.74) e (3.75) expressam os valores locais de $\frac{\partial T_{21}}{\partial y}$ em função de valores locais de T_s . Portanto, se substituir a condição de contorno dada por (2.25) nas equações (3.73), (3.74) e (3.75), resulta:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y}(j) = q(j) + \frac{\beta}{\Delta z^2} (T_{21}(j+1) - 2T_{21}(j) + T_{21}(j-1)), \quad j = 2, n_1 - 1 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y}(1) = q(1) + \frac{\beta}{\Delta z^2} (T_{21}(2) - T_{21}(1)) \quad (4.3)$$

ou

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial y}(n_1) = q(n_1) - \frac{\beta}{\Delta z^2} (T_{21}(n_1) - T_{21}(n_1 - 1)) \quad (4.4)$$

Nas equações (3.22), (3.24), (3.26), (3.28), (3.30) e (3.32), obtidas no capítulo anterior, são substituídas: a função de Green fundamental e sua derivada com a relação a normal, definidas pelas equações (A-10) e (A-16) respectivamente, assim como, as condições de contorno especificadas na região D_2 da figura 4.1 ou pelas equações (2.26) a (2.28) e a condição de con

torno especificada por (4.2), (4.3) e (4.4). Posteriormente, estas equações são escritas na forma matricial, de modo que (3.24), (3.26), (3.28) e (3.30) são aglutinadas numa única matriz. Portanto, resulta:

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} [S11_{mj}] & - \left[\frac{1}{2} I \right] \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} G21_{mj} \\ (\Delta G)31_{mj} \\ G41_{mj} \end{matrix} \right] & \left\{ \begin{matrix} (T_{21})_j \\ (\partial T_{22})_{mj} \\ (T_{23})_j \\ (\partial T_{24})_j \end{matrix} \right\} \\ \left[\begin{matrix} [S12_{mj}] & + [(\Delta G)12_{mj}] \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} G22_{mj} \\ (\Delta G)32_{mj} \\ G42_{mj} \end{matrix} \right] & \\ \left[\begin{matrix} [S13_{mj}] & + [(\Delta G)13_{mj}] \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} G23_{mj} \\ - \frac{1}{2} I \\ G43_{mj} \end{matrix} \right] & \\ \left[\begin{matrix} [S14_{mj}] & [(\Delta G)14_{mj}] \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} G24_{mj} \\ (\Delta G)34_{mj} \\ G44_{mj} \end{matrix} \right] & \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} (\Delta G)21_{mj} & [(\Delta G)41_{mj}] \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} - \frac{1}{2} I & [(\Delta G)42_{mj}] \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} (\Delta G)23_{mj} & [(\Delta G)43_{mj}] \end{matrix} \right] \\ \left[\begin{matrix} (\Delta G)24_{mj} & \left[- \frac{1}{2} I \right] \end{matrix} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} (T_{22})_j \\ (T_{24})_j \end{matrix} \right\} \\ P_e \\ + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} (GA)01_{mj} \cdot \bar{U}_j \\ (GA)02_{mj} \cdot \bar{U}_j \\ (GA)03_{mj} \cdot \bar{U}_j \\ (GA)04_{mj} \cdot \bar{U} \end{matrix} \right] \\ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [G11_{mj}] \\ [G12_{mj}] \\ [G13_{mj}] \\ [G14_{mj}] \end{bmatrix} \left\{ q(j) \right\}$$

(4.5)

$$[I]\{T_{2m}\} = \left[\begin{array}{c} [S10_{mj}] + [(\Delta G)10_{mj}] \\ [G20_{mj}] \\ [(\Delta G)20_{mj}] \\ [(\Delta G)30_{mj}] \\ [G40_{mj}] \\ [(\Delta G)40_{mj}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{(T_{21})_j\} \\ \{(\partial T_{22})_j\} \\ \{(T_{22})_j\} \\ \{(T_{23})_j\} \\ \{(\partial T_{24})_j\} \\ \{(T_{24})_j\} \end{array} \right\}$$

$$- P_e [(GA)00_{mj} \cdot \bar{U}_j] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_j \right\} - [G10_{mj}] \{q(j)\} \quad (4.6)$$

$$\left[[I] + P_e [\partial (GA)00_{mj} \cdot \bar{U}_j] \right] \left\{ \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_j \right\} =$$

$$\left[\begin{array}{c} [\partial S10_{mj}] + [\partial (\Delta G)10_{mj}] \\ [\partial G20_{mj}] \\ [\partial (\Delta G)20_{mj}] \\ [\partial (\Delta G)30_{mj}] \\ [\partial G40_{mj}] \\ [\partial (\Delta G)40_{mj}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{(T_{21})_j\} \\ \{(\partial T_{22})_j\} \\ \{(T_{22})_j\} \\ \{(T_{23})_j\} \\ \{(\partial T_{24})_j\} \\ \{(T_{24})_j\} \end{array} \right\}$$

$$- [\partial G10_{mj}] \{q(j)\} \quad (4.7)$$

para as equações acima,

$$S1i_{mj} = \left(\frac{\beta}{\Delta z^2}\right) (G1i_{m(j+1)} - 2G1i_{mj} + G1i_{m(j-1)}), \quad i = 0, \dots, 4$$

se $j = 1$

$$S1_{m1} = \left(\frac{\beta}{\Delta z^2}\right) (G1i_{m2} - G1i_{m1}), \quad i = 0, \dots, 4$$

se $j = n_1$

$$S1_{mn_1} = \left(\frac{\beta}{\Delta z^2}\right) (G1i_{m(n_1-1)} - G1i_{mn_1}), \quad i = 0, \dots, 4$$

$$\partial S10_{mj} = \left(\frac{\beta}{\Delta z^2}\right) (\partial G10_{m(j+1)} - 2\partial G10_{mj} + \partial G10_{m(j-1)})$$

se $j = 1$

$$\partial S10_{m1} = \left(\frac{\beta}{\Delta z^2}\right) (\partial G10_{m2} - \partial G10_{m1})$$

se $j = n_1$

$$\partial S10_{mn_1} = \left(\frac{\beta}{\Delta z^2}\right) (\partial G10_{m(n_1-1)} - \partial G10_{mn_1}).$$

para as equações acima,

[I] = a matriz identidade

$G\ell_{mj}$, $(\Delta G)\ell_{mj}$, $\partial G\ell_{mj}$, $\partial(\Delta G)\ell_{mj}$, $(GA)\ell_{mj}$ e $\partial(GA)\ell_{mj}$, com ℓ e $i = 0, \dots, 4$, $m = 1, \dots, n_i$ e $j = 1, \dots, n_\ell$, são núcleos, cujos índices ℓ e i , especificam a fronteira da região D_2 ou a região D_2 , onde estão situados os pontos nodais w'_j e w_m respectivamente. Onde,

$$G\ell_{mj} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta s_{2\ell}j} \ln|w_m - w'_j| ds(w') \quad (4.8)$$

$$(\Delta G)\ell_{mj} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta s_{2\ell}j} \frac{(w_m - w'_j) \cdot n'}{|w_m - w'_j|^2} ds(w') \quad (4.9)$$

$$\partial G\ell_{mj} = \frac{\partial}{\partial z_m} \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta s_{2\ell}j} \ln|w_m - w'_j| ds(w') \right) \quad (4.10)$$

$$\partial(\Delta G)\ell_{mj} = \frac{\partial}{\partial z_m} \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta s_{2\ell}j} \frac{(w_m - w'_j) \cdot n'}{|w_m - w'_j|^2} ds(w') \right) \quad (4.11)$$

$$(GA)\ell_{mj} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta A_j} \ln|w_m - w'_j| ds(w'), \quad (4.12)$$

e

$$\partial(GA)\ell i_{mj} = \frac{\partial}{\partial z_m} \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta A_1} \ell n |w_m - w'_j| ds(w') \right) \quad (4.13)$$

Os núcleos definidos pelas equações (4.12) e (4.13), podem ser transformados de integral de área em integral de linha, conforme a equação (A-27), como segue:

$$(GA)\ell i_{mj} = -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Delta s_j} \ell n |w_m - w'_j| ds(w') - A(\Delta A_j) \right) \quad (4.14)$$

e

$$\partial(GA)\ell i_{mj} = \frac{\partial}{\partial z_m} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{\Delta s_j} \ell n |w_m - w'_j| ds(w') - A(\Delta A_j) \right) \right\} \quad (4.15)$$

As soluções analíticas para os núcleos expressos pelas equações de (4.8) a (4.11), (4.14) e (4.15), encontram-se definidas no apêndice D, através das equações (D-14) e de (D-27) a (D-34).

Pelo método variacional, no procedimento apresentado no capítulo anterior, foram encontrados as equações (3.61) e (3.62) que estabelecem as distribuições de temperaturas nas regiões D_1 e D_3 respectivamente, assim como, (3.65) fornece os coeficientes A_j^- contidos na equação (3.61) e (3.66) fornece os coeficientes A_j^+ contidos em (3.62).

Substituindo (5.2) em (4.71), e transcrevendo as demais, resulta:

$$T_1(y, z) = \sum_{j=0}^n A_j^- e^{\lambda_j^- z} F_j^-(y) \quad (4.16)$$

$$T_3(y, z) = \left(\frac{z}{P_e}\right) \cdot \ell \cdot \bar{q} + \sum_{j=1}^n A_j^+ e^{\lambda_j^+ (z-\ell)} F_j^+(y) \quad (4.17)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} T_2(y, z) \Big|_{\partial D_{24}} F_k^-(y) dy = \sum_{j=0}^n A_j^- \int_{-1}^1 \lambda_j^- F_j^-(y) F_k^-(y) dy, \quad (4.18)$$

Com $k = 0, \dots, n$

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} T_2(y, z) \Big|_{\partial D_{22}} F_k^+(y) dy = \sum_{j=1}^n A_j^+ \int_{-1}^1 \lambda_j^+ F_j^+(y) F_k^+(y) dy \quad (4.19)$$

com $k = 1, \dots, n$

onde,

$$F_j^-(y) = \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \Psi_i(y), \quad \text{com } j = 0, \dots, n$$

$$F_j^+(y) = \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \Psi_i(y), \quad \text{com } j = 1, \dots, n$$

Nas equações (4.18) e (4.19), as soluções dos termos antes da igualdade são obtidos numericamente pelo método de integração de simpso, e as integrais contidas nos termos após a igualdade, são obtidos conforme as equações (E-13) e (E-14), (apeêndice E).

A sequência de funções $\Psi_i(y)$, foi escolhida, de modo que satisfaça as condições de contorno em $y = 1$ e $y = -1$, sendo que, tais funções são dadas pelas seguintes relações:

$$\Psi_i(y) = \cos \left(i\pi \frac{(y+1)}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n \quad (4.20)$$

Os sistemas de equações (3.42) e (3.43), serão transcritos a seguir:

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{0\} \quad (4.21)$$

$$[H] \{\ddot{a}^-\} - [A] \{\dot{a}^-\} - [B] \{a^-\} = \{0\} \quad (4.22)$$

onde,

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \cos \left(i\pi \frac{(y+1)}{2} \right) \cos \left(j\pi \frac{(y+1)}{2} \right) dy \quad (4.23)$$

$$A_{ij} = \int_{-1}^1 P_e \bar{U}(y) \cos\left(i\pi \frac{(y+1)}{2}\right) \cos\left(j\pi \frac{(y+1)}{2}\right) dy \quad (4.24)$$

e

$$B_{ij} = \frac{(i\pi)(j\pi)}{2} \int_{-1}^1 \text{sen}\left(i\pi \frac{(y+1)}{2}\right) \text{sen}\left(j\pi \frac{(y+1)}{2}\right) dy \quad (4.25)$$

As soluções de (4.23), (4.24) e (4.25), encontram-se apresentadas no apêndice E, através das equações (E-1) a (E-12).

Aos sistemas (4.21) e (4.22), está associado o seguinte problema de autovalores:

$$\det \left[\lambda [I] - [Q]^T [S] [Q] \right] = 0 \quad (4.26)$$

onde,

$$[S] = \begin{bmatrix} [H] & [B] \\ [B] & [0] \end{bmatrix}$$

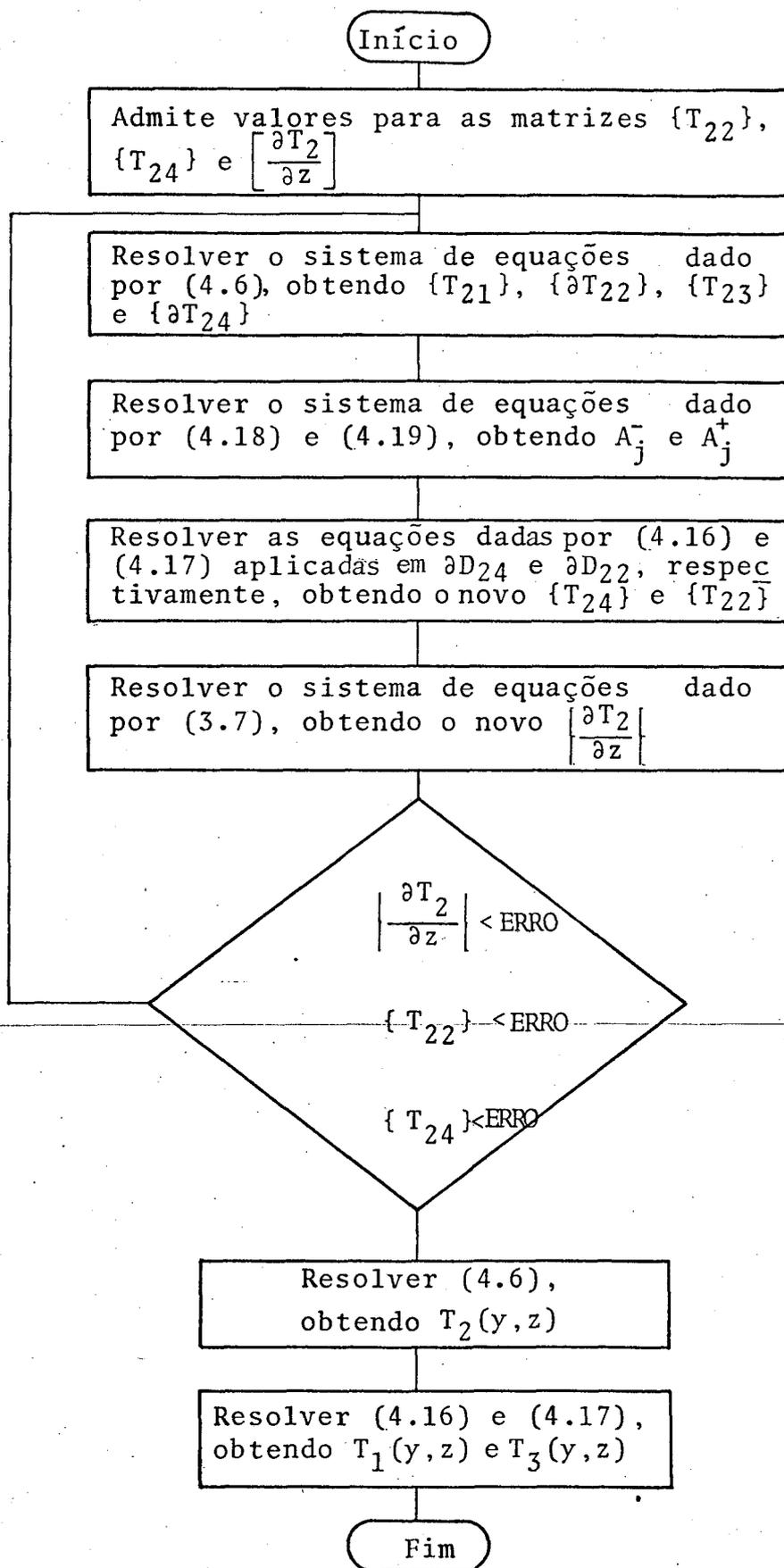
e Q é uma matriz, cujas colunas constituem uma base de vetores ortonormais em relação a matriz R, sendo que:

$$[R] = \begin{bmatrix} [H] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix}$$

Para as matrizes acima, R e S, deve ser levado em consideração a redução da dimensão do problema pela supressão da linha $(n+2)$ e da coluna $(n+2)$, devido a singularidade apresentada pela matriz B.

Para a solução de (4.26), utilizou-se o método de Gram-Schmith para a obtenção da matriz Q, enquanto, que o método de Jacobi foi utilizado para a determinação simultânea dos autovalores e autovetores.

Como pode ser notado, para a solução do problema, é necessário seguir uma sequência de cálculo. Esta sequência é esquematizada através de diagramas de blocos, como apresentado abaixo, para uma melhor visualização do problema.



Na região D_2 , as equações integrais foram discretizadas, conforme apresentado no Capítulo 3 (item 3.2), de conformidade com figura 3.1. Para a discretização do contorno, foram usados 100 pontos nodais, sendo: 30 em ∂D_{21} , 20 em ∂D_{22} , 30 em ∂D_{23} e 20 em ∂D_{24} , e como consequência, a região apresenta 600 pontos nodais.

O sistema de equações dado (4.6) é da ordem de 100×100 ; os dados por (5.17) e (5.18) são da ordem 13×13 e 12×12 respectivamente, e finalmente, o fornecido por (5.5) é da ordem de 600×600 .

O sistema de 100×100 é resolvido simultaneamente, calculando-se a inversa dos núcleos, pelo fato destes serem constantes. Isto, apresenta a vantagem que nas iterações posteriores a primeira, basta simplesmente multiplicar a matriz inversa pelo vetor independente recalculado.

O sistema 600×600 é resolvido simultaneamente em blocos de 30×30 , calculando-se também a inversa destes blocos de matrizes, pelo fato de que os núcleos que formam os coeficientes da matriz (600×600) serem constantes, apresentando, neste caso, a mesma vantagem citada anteriormente. Para os demais sistemas mostrados no diagrama de blocos, estes foram resolvidos simultaneamente, em cada iteração executada.

Ainda deve-se ressaltar, que na obtenção dos núcleos que compõe as equações integrais, foi aplicada a propriedade simétrica apresentada por estes, tornando possível uma economia de tempo e principalmente de memória de computador.

O programa foi escrito em FORTRAN IV e processado no computador IBM 4341, com um tempo dispendioso que dependendo do valor de P_e e β assumido, variava entre 10 e 40 minutos. Sob o ponto de vista computacional, para o presente problema, o método equações integrais apresenta desvantagens em relação aos métodos de diferenças finitas e elementos finitos, porque de tais métodos derivam-se sistemas de equações lineares, cujas matrizes são esparças, portanto, dispendem de menor tempo de computação para a solução do sistema linear.

5. RESULTADOS

Inicialmente, foi resolvido o problema anulando-se o fator que caracteriza a condutância térmica axial na parede (β), de modo que o problema de transmissão de calor ficou reduzido ao caso em que são considerados os seguintes fatores: escoamento laminar, fluxo de calor prescrito e condução axial de calor somente no fluido, para a geometria apresentada na Figura 2.1.

Este problema foi resolvido analiticamente por Burchil et al [12], que abordou a influência da condução axial de calor no fluido em escoamento laminar não viscoso num espaço anular, cuja porção inicial do duto, de comprimento infinito, é isolada; as superfícies da parede interna e externa da parte intermediária, de comprimento finito, são aquecidas por fluxos de calor uniformes; e a porção final de comprimento finito, também é isolada.

Dentre as soluções obtidas por estes pesquisadores, encontra-se a solução para o caso em que somente a superfície da parede externa é aquecida, e no caso limite, quando a relação entre os raios da parede externa e interna é igual a 1, o que caracteriza como um problema de placas paralelas e é equivalente ao problema aqui abordado quando $\beta = 0$.

A Figura 5.1 mostra as curvas para a temperatura da superfície da placa aquecida e para a temperatura média de mistura, obtidas neste trabalho e por [12]. Deve-se salientar que as variáveis apresentadas na Figura 5:1, por questões práticas encontram-se mostradas na forma adimensionalizada apresentada por [12].

As relações entre os grupos adimensionais apresentados neste trabalho e os grupos adimensionais apresentados por [12], estão mostrados no Apêndice F:

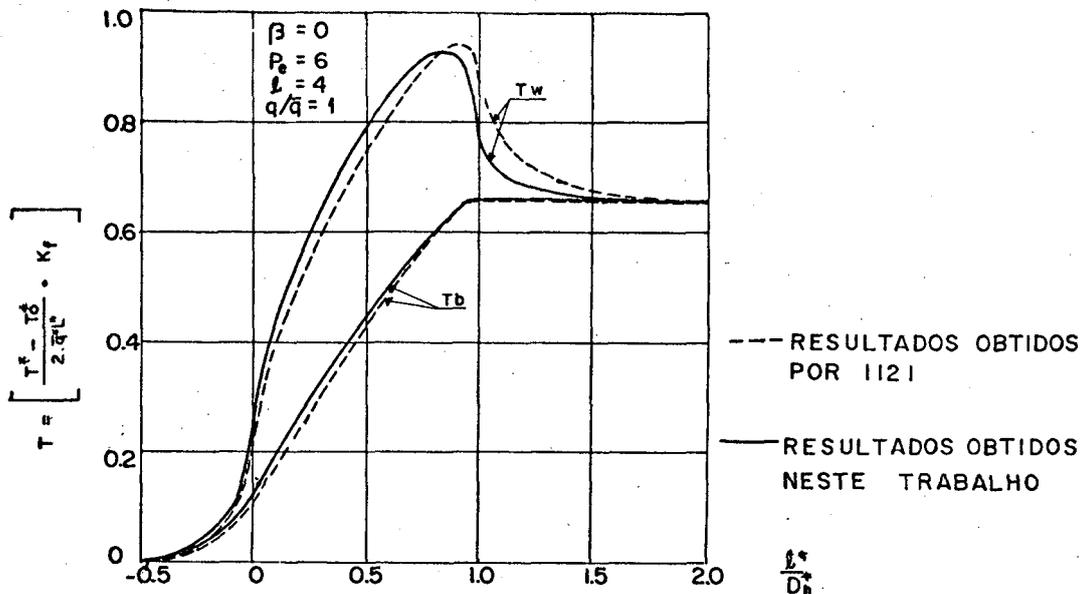


Figura 5.1 - Distribuição da temperatura da superfície da placa aquecida e da temperatura média de mistura, obtidas neste trabalho e obtidas em [12].

Pode ser visto através da Figura 5.1, que se comparados os resultados apresentados pelas curvas da temperatura da superfície aquecida, verifica-se que a máxima discrepância encontrada é de 7%, enquanto que se comparados os resultados mostrados pelas curvas da temperatura média de mistura, a máxima discrepância observada é de 4%. Neste caso, é verificada uma diferença mais acentuada entre as curvas da temperatura da superfície aquecida do que entre as curvas da temperatura média de mistura. Esta discrepância ocorre devido ao fato de que nas soluções obtidas por [12], foi considerado escoamento sem atrito, ao passo que nes

te trabalho foi assumido perfil de velocidade parabólico; consequentemente, a medida que os pontos se aproximam das placas, o erro torna-se mais acentuado.

Fisicamente, este fato pode ser compreendido, verificando-se que ao assumir o perfil de velocidade parabólico, as camadas de partículas do fluido apresentam velocidades que diminuem gradativamente ao se aproximarem da parede do duto. Neste caso, o efeito da condução axial de calor no fluido é mais intenso na região próxima da parede e menos intenso na região central do duto, de forma que maior quantidade de calor se difunde para a região a montante da secção aquecida na região próxima a parede do que na região central do duto.

Nas Figuras 5.2 - 5.4 são mostradas as distribuições das temperaturas das placas superior e inferior e temperatura média de mistura, para $Pe = 2,4$ e 8 respectivamente, sob as condições de fluxo uniforme sobre a placa aquecida e desprezando-se a condução axial de calor na parede ($\beta = 0$).

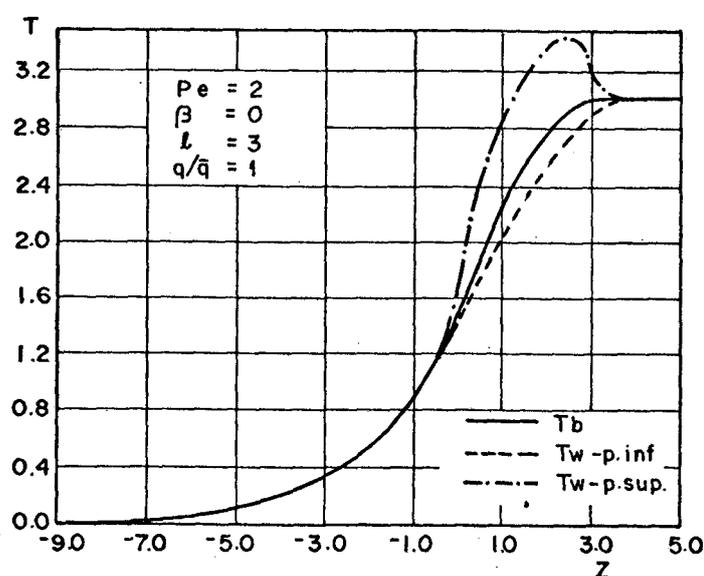


Figura 5.2 - Distribuição de temperatura da placa superior, da placa inferior e da temperatura média de mistura.

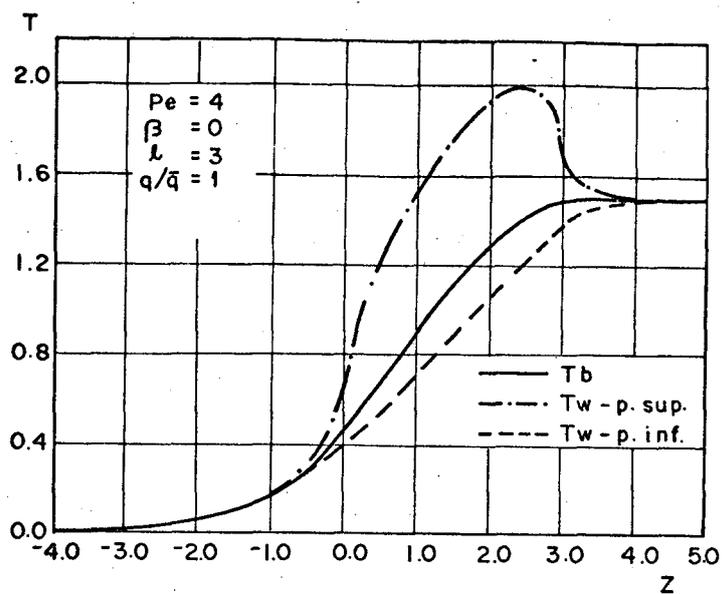


Figura 5.3 - Distribuição de temperatura da placa superior , da placa inferior e da temperatura média de mistura.

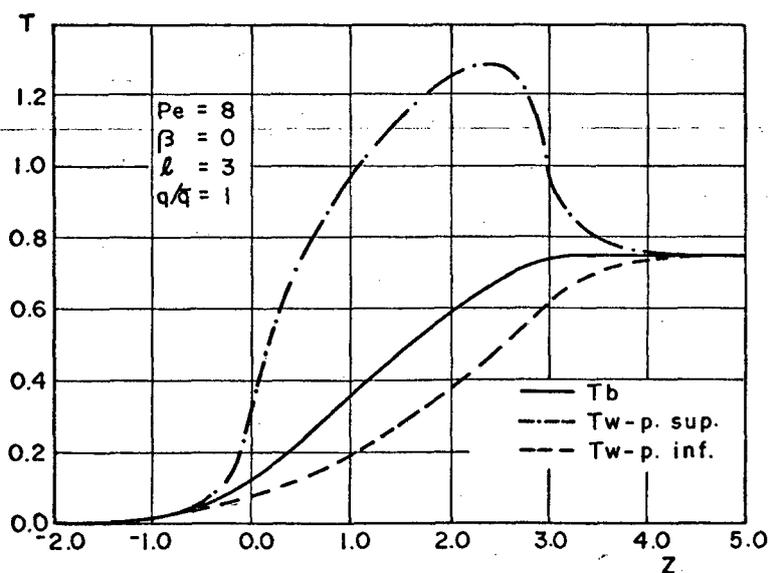


Figura 5.4 - Distribuição de temperatura da placa superior , da placa inferior e da temperatura média de mistura.

Nestas Figuras (5.2 a 5.4), observa-se que T_w da placa superior, T_w da placa inferior e T_b crescem na região a montante da secção aquecida para valores maiores que o valor admitido para a temperatura na região de entrada do duto (zero), na medida em que z cresce. A temperatura da placa superior atinge um valor máximo na região próxima ao centro da secção aquecida e decresce deste ponto até a jusante para o valor da temperatura na saída do duto (T_∞), enquanto que T_w da placa inferior e T_b continuam a crescerem até atingirem o valor de T_∞ na região a jusante da secção aquecida.

O aquecimento do fluido na região $z < 0$, ocorre em consequência da condução axial de calor no fluido nesta região. O fato de T_w da superfície aquecida crescer mais acentuadamente do que T_b e T_w da placa inferior, ocorre devido ao efeito da condução axial de calor ser mais intenso na região próxima a parece, como explicado anteriormente. Neste caso, T_w da placa superior atinge um valor máximo próximo ao centro da secção aquecida, gerando um gradiente axial de temperatura negativo a partir deste ponto de máxima temperatura até a região a jusante da secção aquecida.

O crescimento de T_w na placa inferior é menor que o crescimento de T_w na placa superior, devido ao fato de que na região central do duto, o efeito da convecção axial de calor sobrepõe-se ao efeito da condução axial. Neste caso, grande parte da energia térmica absorvida pela massa de fluido contida na região central do duto, é transportada no sentido da região a jusante da secção aquecida, e uma pequena parte desta energia se difun

de para as camadas de partículas próximas a parede da placa inferior e para a região $z < 0$.

A Figura 5.5 mostra as temperaturas médias de mistura para $Pe = 2$, $Pe = 4$ e $Pe = 8$, também para fluxo uniforme sobre a placa aquecida e condução axial de calor na parede desprezível ($\beta = 0$).

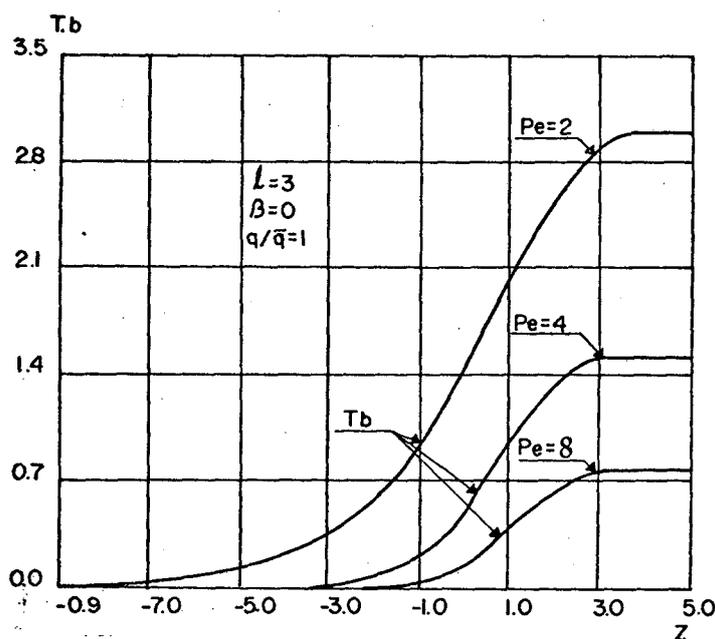


Figura 5.5 - Distribuição de temperatura média de mistura para $Pe = 2$, $Pe = 4$ e $Pe = 8$.

Nesta figura, verifica-se a variação dos efeitos da condução axial de calor no fluido em função do número de Peclet. Nota-se que para $Pe = 2$, a curva de temperatura média de mistura (T_b) inicia seu crescimento em relação a temperatura admitida na entrada do duto (zero), na posição axial $z = -9$; para $Pe = 4$, o aumento de T_b começa na posição axial $z = -3$, assim como, para

$Pe = 8$, T_b inicia-se o crescimento na posição axial $z = -1$. Este fato caracteriza que a medida que o número de Peclet decresce, o efeito da condução axial de calor no fluido aumenta.

As Figuras de 5.6 a 5.8 mostram as distribuições de temperaturas nas placas superior e inferior e da temperatura média de mistura, com condução axial de calor nula na parede ($\beta = 0$), e com fluxo de calor variável sobre a superfície externa da placa superior. A média deste fluxo é igual a média do fluxo de calor uniforme considerado nas Figuras 5.2 a 5.5.

Nas curvas destas figuras, observa-se uma variação dos valores locais das temperaturas (T_w da placa superior, T_w da placa inferior e T_b), em relação às temperaturas obtidas para um fluxo de calor uniforme, mostrado nas Figuras de 5.2 a 5.4. Este fato ocorre devido a variação local no coeficiente de troca de calor h' , quando se muda a intensidade pontual do fluxo de calor sobre a secção aquecida, apesar do fluxo médio ser a mesma.

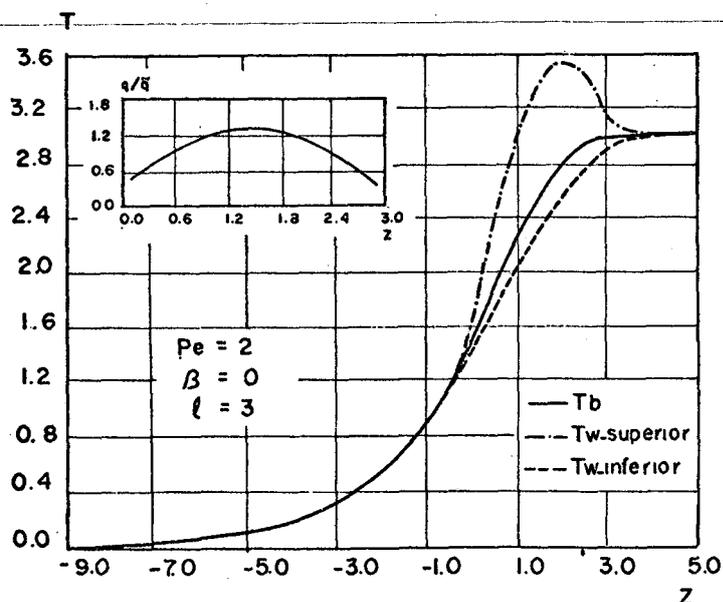


Figura 5.6 - Distribuição de temperatura da placa superior, da placa inferior e temperatura média de mistura.

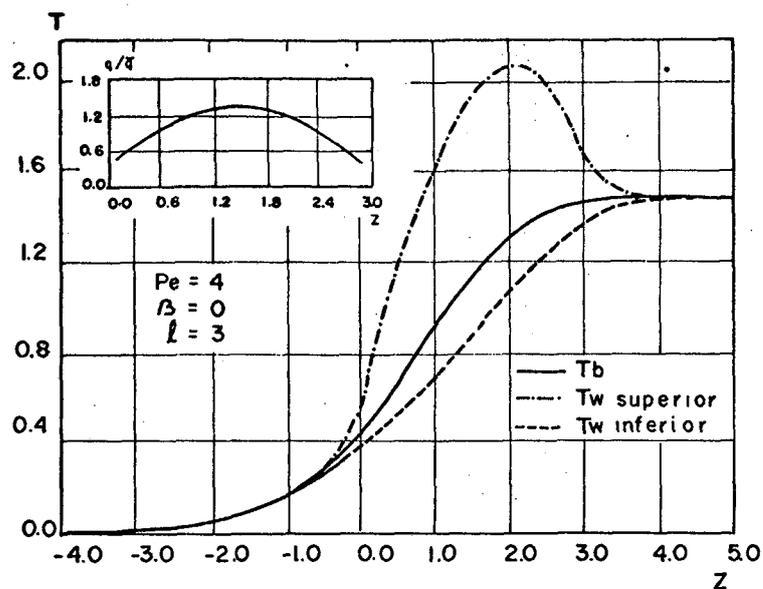


Figura 5.7 - Distribuição de temperatura da placa superior, da placa inferior e temperatura média de mistura.

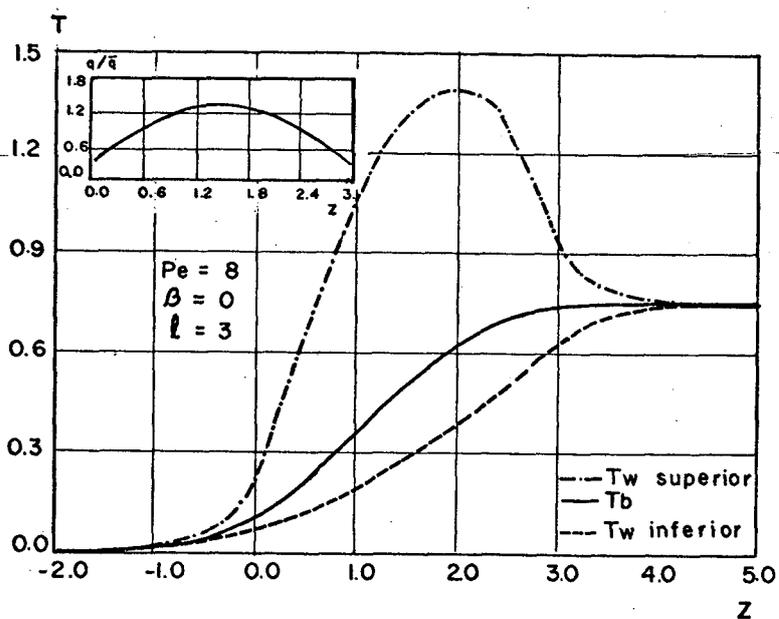


Figura 5.8 - Distribuição de temperatura da placa superior, da placa inferior e temperatura média de mistura.

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram o número de Nu_{selt} para fluxo de calor uniforme e fluxo de calor variável respectivamente, cujas médias para o fluxo de calor uniforme e o fluxo de calor variável são iguais, e em ambos a condução axial de calor na parede foi desprezada ($\beta = 0$).

Na Figura 5.9, verifica-se que o número de Nu_{selt} decresce da entrada da secção aquecida até aproximadamente ao centro, e volta a crescer do centro até a saída desta secção. Tal fato se verifica devido ao efeito da condução axial de calor no fluido sobre as temperaturas da superfície aquecida (T_w) e média de mistura (T_b), que pode ser observado através das Figuras 5.2 a 5.4.

Nestas Figuras (5.2 a 5.4), verifica-se que T_w da placa superior aumenta em relação a temperatura na entrada do duto (zero), mais acentuadamente do que T_b , quando z cresce; isto da região a montante até aproximadamente ao centro da secção aquecida (devido ao fato já explicado na análise das Figuras 5.2 a 5.4), de modo que $(T_w - T_b)$ sofre uma variação crescente nesta região do duto. Na região do ponto de máxima temperatura da placa superior até a jusante da secção aquecida, T_w decresce mais notadamente do que T_b cresce, de forma que $(T_w - T_b)$ diminui nesta região do duto.

Como o fluxo de calor na secção aquecida é uniforme, a variação do número de Nusselt mostrada pela Figura 5.9 é compreensível, se observamos a definição deste número dada pela equação (3.81).

Na Figura 5.10, onde o fluxo de calor sobre a

superfície da secção aquecida é variável, verifica-se o mesmo efeito observado para o caso de fluxo de calor uniforme. Entretanto, os valores do número de Nusselt no início da secção aquecida são menores do que os valores no início da secção aquecida no caso de fluxo de calor uniforme (conforme Figura 5.9). Além disso, na Figura 5.10 verifica-se que o valor do número de Nusselt decresce a partir do início da secção aquecida até próximo a saída desta secção, enquanto que na Figura 5.9 verifica-se que o valor do número de Nusselt diminui do início da secção aquecida até aproximadamente ao centro. Assim sendo, conclui-se que o coeficiente de troca de calor por convecção local (h'), sofre uma substancial variação quando se estabelece um fluxo de calor uniforme ou um fluxo de calor variável sobre a secção aquecida.

Nas Figuras 5.9 e 5.10 pode também ser observada a variação do número de Nusselt em consequência da variação do número de Peclet. Este fenômeno pode ser compreendido, pelo fato de que a intensidade da condução axial de calor no fluido depender diretamente do número de Peclet. Variando o número de Peclet, a diferença de temperatura ($T_w - T_b$) é alterada e em consequência o número de Nusselt também sofre alteração como pode ser observado através da equação (3.81).

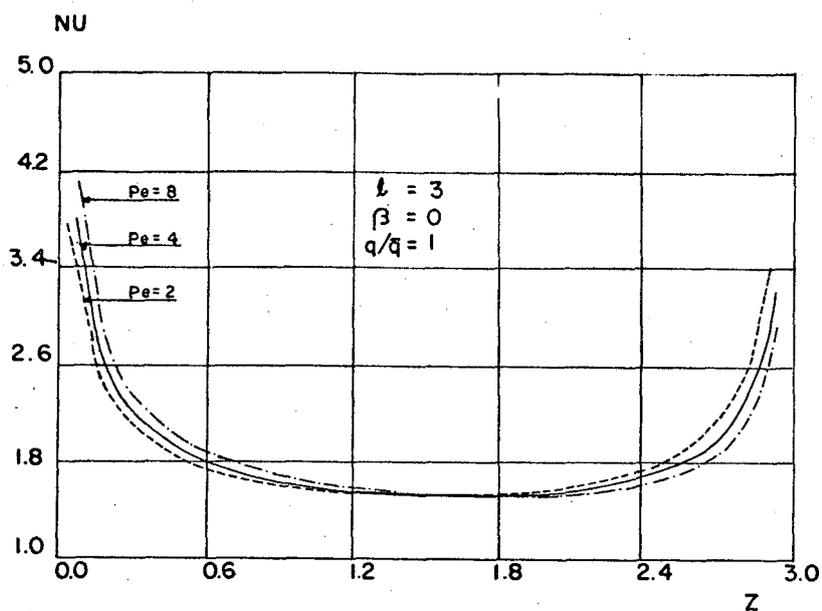


Figura 5.9 - Número de Nusselt local, para $Pe=2$, $Pe=4$, e $Pe=8$, desprezando a condução axial de calor na parede e para fluxo de calor uniforme ($\bar{q}=1$).

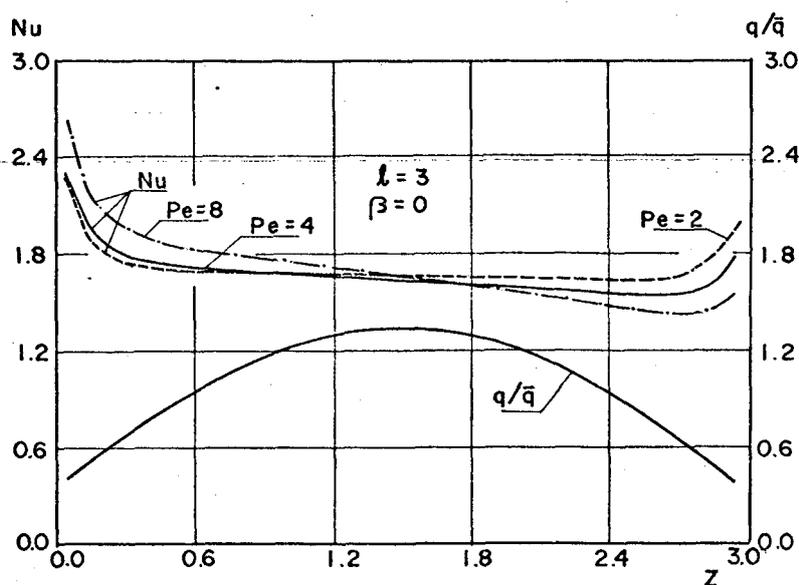


Figura 5.10 - Número de Nusselt local, para $Pe=2$, $Pe=4$ e $Pe=8$, desprezando a condução axial de calor na parede, e fluxo de calor incidente sobre a superfície da placa superior variável ($\bar{q}=1$).

As Figuras 5.11 a 5.13 representam a distribuição do fluxo de calor absorvido pelo fluido por convecção na interface parede-fluido, em função da condução axial de calor na parede β e da condução axial de calor no fluido P_e , para um fluxo de calor na superfície externa da placa aquecida uniforme. Em cada Figura, os resultados são apresentados para um certo número de Peclet fixo e num certo intervalo de valores do parâmetro β , com o objetivo de observar a interrelação entre as várias curvas apresentadas para vários valores de β .

O principal fato observado através destas Figuras, é a substancial quantidade de calor absorvida pelo fluido por convecção nas extremidades da secção aquecida. Pode ser verificado que esta quantidade de calor aumenta com o crescimento do parâmetro de condutância de calor na parede e decresce com o aumento do número de Peclet; isto na vizinhança de $z = 0$. Na vizinhança de $z = \ell$, o fluxo de calor absorvido diminui quando β cresce e aumenta quando P_e cresce (para $\beta > 0$).

Este comportamento é explicado pela existência de condução axial de calor no fluido e na parede. Pode ser observado através das Figuras 5.14 a 5.16, que ao aumentar o fator β ou diminuir o fator P_e , aumenta-se a condução axial de calor no fluido na região a montante da secção aquecida. Em consequência disto o ponto de máxima temperatura da superfície da placa aquecida se desloca para mais perto da extremidade $z = \ell$. Neste caso, é gerado um gradiente de temperatura axial na placa positivo, isto da extremidade $z = 0$ até o ponto de máxima temperatura T_w , tal que parte do fluxo de calor uniforme incidente sobre esta região é conduzido pela placa no sentido de $z = 0$ e parte é absorvido pelo

fluido por convecção. Por outro lado, um gradiente de temperatura negativo é gerado na placa aquecida, do ponto de máxima temperatura T_w até a extremidade $z = \ell$, de forma que parte do calor uniforme incidente sobre esta região, é conduzido pela parede no sentido de $z = \ell$ e parte é absorvido pelo fluido. Assim, maior quantidade de calor se dissipa no sentido de $z = 0$ através da placa, quando β aumenta ou Pe diminui, e menor quantidade de calor se dissipa no sentido de $z = \ell$.

Observa-se também através das Figuras 5.11 a 5.13, que as curvas que representam a distribuição do fluxo de calor admitido no fluido tornam-se mais graduais quando β diminui e Pe aumenta, e se aproximam do fluxo de calor uniforme especificado na superfície externa da placa aquecida quando β aproxima-se de zero e Pe tende a infinito.

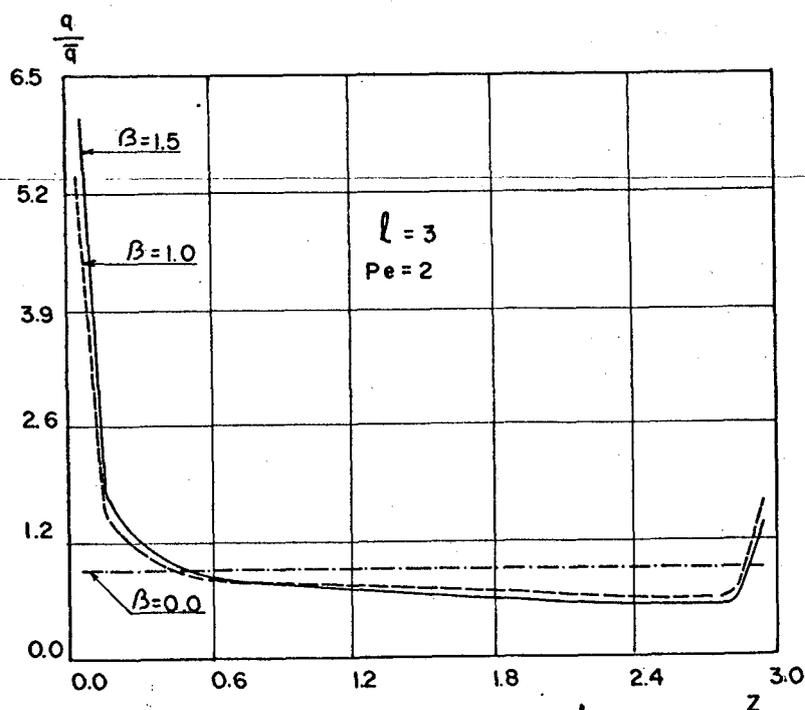


Figura 5.11 - Fluxo de calor na parede superior para vários valores de β e $Pe = 2$.

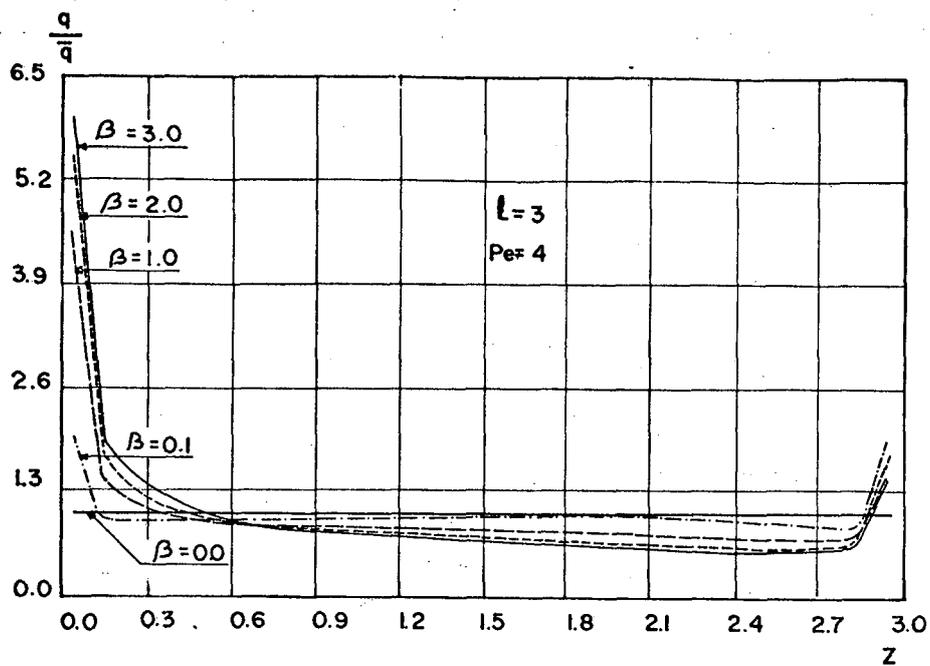


Figura 5.12 - Fluxo de calor na parede superior para vários valores de β e $Pe = 4$.

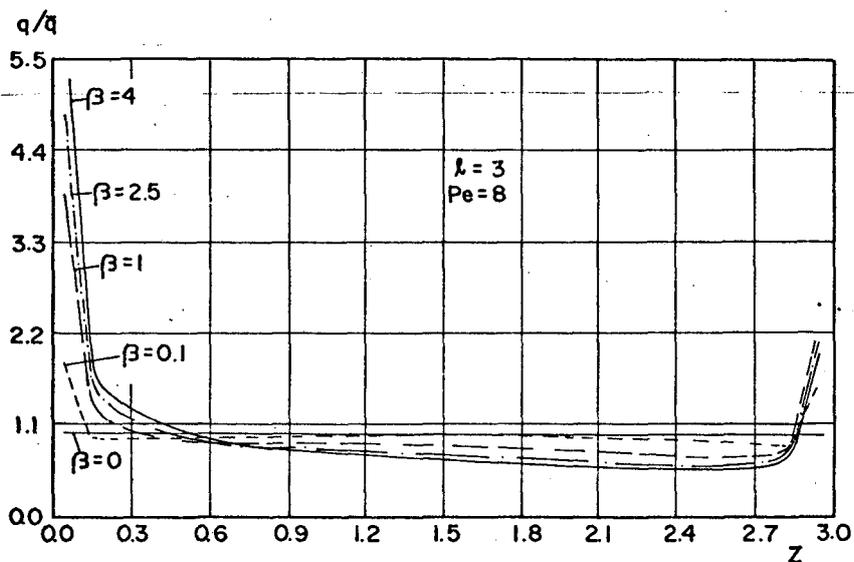


Figura 5.13 - Fluxo de calor na parede superior para vários valores de β e $Pe = 8$.

A distribuição axial de temperatura média de mistura e da temperatura da superfície aquecida, estão mostradas através das Figuras 5.14 a 5.16, para três números de Peclet e para diferentes valores do parâmetro de condutância de calor na parede β . O fator de condutância de calor na parede, tem um efeito acentuado sobre a distribuição de temperatura no fluido. Este efeito é observado por comparação entre as curvas com $\beta > 0$ e a curva de $\beta = 0$. A comparação mostra que as temperaturas média de mistura e da superfície da parede aquecida, crescem quando $\beta > 0$, em relação às curvas para estas temperaturas quando $\beta = 0$, da região a montante até próximo ao centro da secção aquecida. Por outro lado, da região central da placa aquecida até a saída desta, as curvas para $\beta > 0$ decrescem em relação às curvas para $\beta = 0$. Este fato pode ser explicado pelo aumento da condução axial de calor na placa quando β aumenta, facilitando a difusão de calor para os extremos da mesma. Assim, maior quantidade de calor é absorvido pelo fluido nos extremos da placa aquecida, de modo que a condução axial de calor no fluido para os extremos do duto é favorecida.

Nota-se que a elevação sofrida por T_b e T_w da parede aquecida quando $\beta > 0$, em relação a curvas para estas temperaturas quando $\beta = 0$, da região a montante até a entrada da secção aquecida, aumenta quando β aumenta até um certo limite (no caso da Figura 5.16 verifica-se que as curvas para $\beta = 2,5$ e $\beta = 4$ apresentam os mesmos valores locais para T_w e T_b nesta região). Este fato pode ser explicado considerando que quando β cresce, maior quantidade de calor é conduzida para os extremos da placa. Entretanto, a absorção de calor por convecção na interface parede-fluido é limitada pelo número de Peclet.

A temperatura T_w da parede aquecida, se comparada com T_b , é mais sensível a variação do fator de condução de calor na parede β . Isto pode ser verificado, observando-se que nas regiões vizinhas de $z = 0$ e $z = \ell$, as curvas de T_w apresentam uma mudança brusca, como consequência da alta intensidade de calor nas regiões destes pontos e baixa intensidade de calor nas regiões dos pontos intermediários.

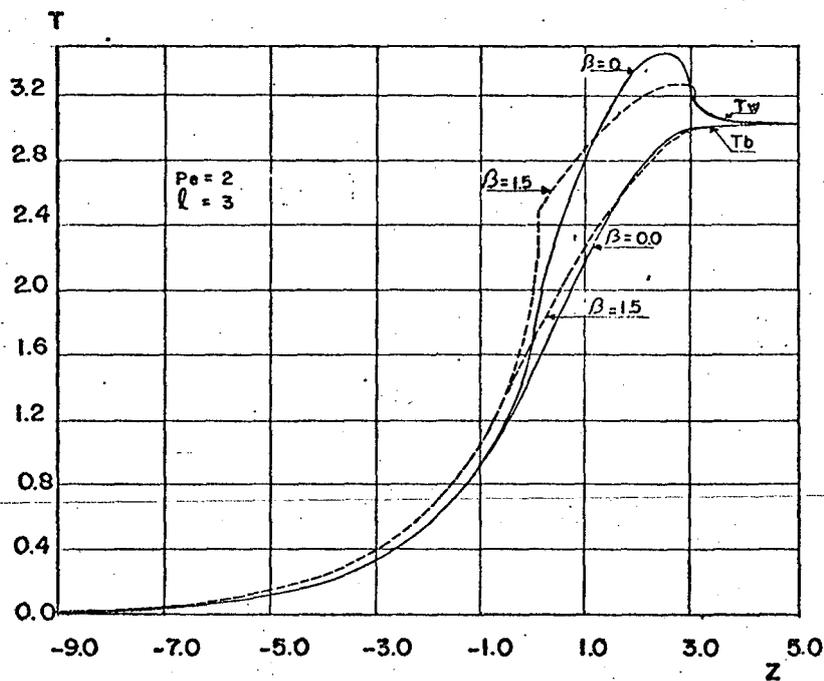


Figura 5.14 - Distribuição axial das temperaturas média de mistura e da superfície da placa aquecida para vários valores de β e $Pe = 2$.

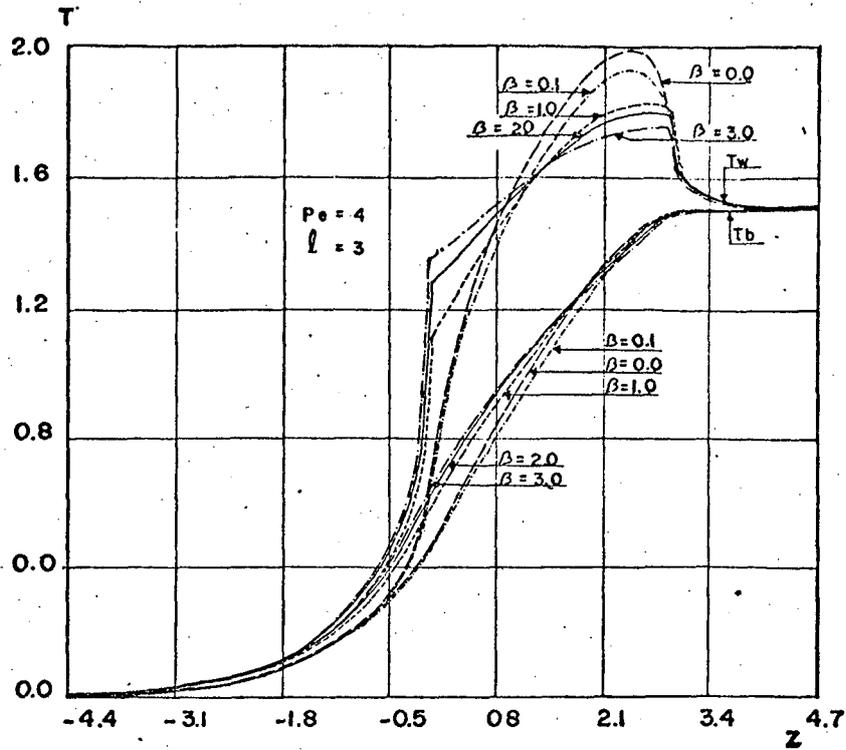


Figura 5.15 - Distribuição axial das temperaturas média de mistura e da superfície da placa aquecida para vários valores de β e $Pe = 4$.

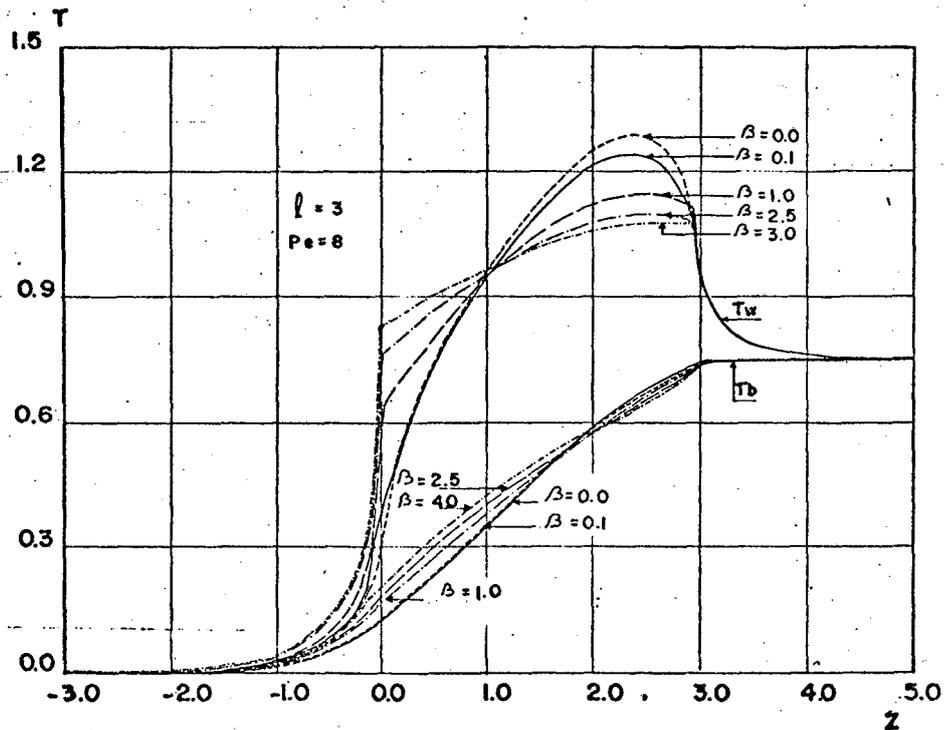


Figura 5.16 - Distribuição axial das temperaturas média de mistura e da superfície da placa aquecida para vários valores de β e $Pe = 8$.

As Figuras 5.17 a 5.19 apresentam a distribuição do número de Nusselt, para números de Peclet fixos (iguais a 2, 4 e 8) e para diversos valores do parâmetro de condutância de calor β .

As figuras abaixo mostram que o número de Nusselt apresenta um pico nas regiões próximas às extremidades da placa aquecida, cujo valor cresce quando β aumenta, se o número de Peclet é mantido fixo. Este fato acontece devido a alta intensidade de calor nas vizinhanças das extremidades da placa aquecida, que aumenta quando β cresce, até um certo limite, como explicado anteriormente.

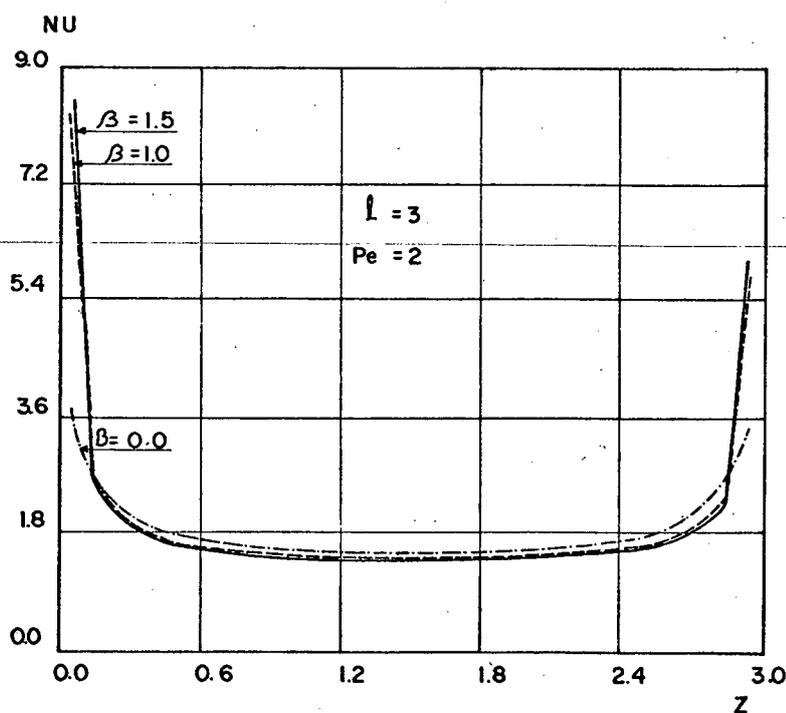


Figura 5.17 - Número de Nusselt local para $Pe = 2$ e vários valores de β .

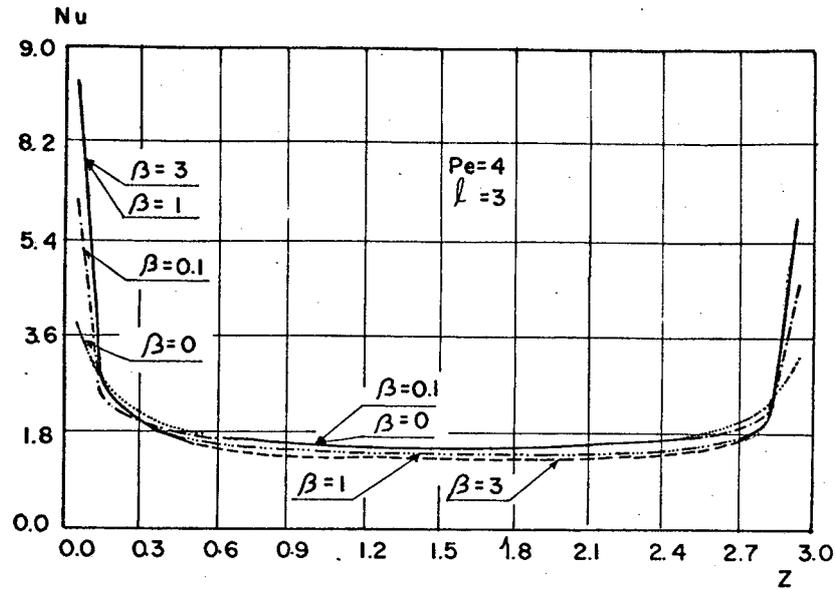


Figura 5.18 - Número de Nusselt local para $Pe = 4$ e vários valores de β .

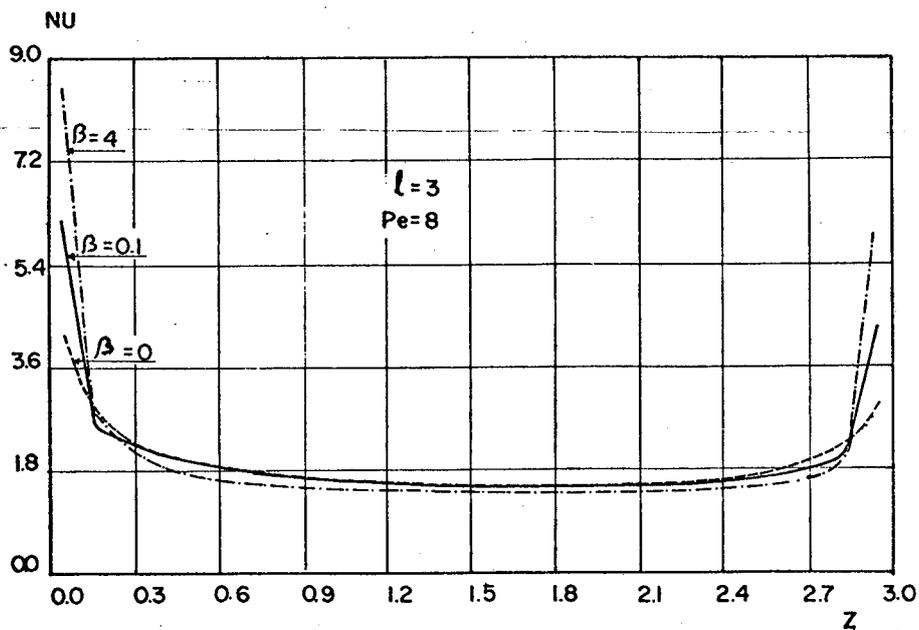


Figura 5.19 - Número de Nusselt local para $Pe = 8$ e vários valores de β .

6. CONCLUSÃO

Ao formular o problema foram caracterizados dois objetivos básicos: verificar o comportamento da combinação dos métodos utilizados para a solução do problema e estudar a influência dos parâmetros de condutância de calor axial na parede e no fluido.

Na combinação dos métodos numéricos aplicados para a solução do problema, foram utilizados o método de equações integrais e o método variacional; o primeiro um método numérico e o segundo um método analítico.

O método de equações integrais foi utilizado com sucesso em soluções de problemas de engenharia em diversos ramos de pesquisas [3], onde as condições de contorno são assumidas parcialmente. No presente problema, as condições de contorno são em geral acopladas em regiões contiguas, envolvendo convecção no fluido e condução na parede (placa superior). Na solução do problema, observou-se que a combinação destes métodos, apresenta uma melhor convergência quando o número de Peclet aproxima-se de 4 e β aproxima-se de zero. A medida em que Peclet aumenta ou diminui, ou então β cresce, diminui a velocidade de convergência do processo numérico utilizado, portanto, limitando a solução do problema para $P_e < 8$ e para um certo intervalo de valores β que depende do número de Peclet assumido para a solução do problema.

Pode-se concluir que o método de equações integrais apresenta dificuldades em aplicações neste tipo de pro-

blema, pelos seguintes motivos:

- i) os coeficientes das equações lineares aplicadas no contorno da região D_2 , são constantes e pequenos, enquanto que o vetor independente depende do número de Peclet admitido para o problema, do gradiente axial de temperatura na região e das temperaturas das fronteiras ∂D_{22} e ∂D_{24} . Ao aumentar o número de Peclet (acima de 4), crescem os valores dos termos do vetor independente, gerando instabilidade no processo iterativo, limitando, assim, a convergência do método para um intervalo de valores do número de Peclet bastante restrito.
- ii) o sistema de equações que define o gradiente de temperatura axial na região D_2 , apresenta os elementos da diagonal da matriz com o valor unitário, os elementos fora da diagonal com valores em função do número de Peclet e o vetor independente em função do gradiente de temperatura e temperatura no contorno. Neste caso, quando o número de Peclet diminui (abaixo de 4), o gradiente de temperatura axial torna-se mais sensível às variações impostas pelo processo de solução iterativa, dificultando a convergência do método.

Para os casos aqui resolvidos, foi observado a dificuldade de convergência do processo numérico utilizado. A convergência é lenta, de modo a exigir aproximadamente entre 15 e 40 iterações, dependendo dos valores de β e P_e utilizados. Ao utilizar o método de equações integrais aplicado individualmente para a solução do problema, considerando uma malha fictícia de tamanho igual ao dobro da malha caracterizada pela região D_2 definida no problema resolvido (neste caso o fluxo térmico é fixado diretamente no contorno), a convergência é rápida necessitando no máximo de quatro iterações.

O efeito dos fatores β e P_e altera significativamente o fluxo de calor local na interface parede-fluido, a distribuição de temperatura média de mistura e das temperaturas das superfícies das placas e número de Nusselt, devido a variação da condução axial de calor no fluido em função da variação destes parâmetros. Em consequência desta influência na prática a condução axial de calor na parede é um fator que deve ser considerado em função da relação $\beta = \frac{e^* K_s}{h^* K_f}$ e do número de Peclet utilizado.

BIBLIOGRAFIA

- 1 KAYS, W.M., Convective heat and mass transfer. McGraw - Hill Publishing Co. Ltda., New York, 1966.
- 2 KELLOG, O.D. - foundations of potential theory. Dover Publications Inc., New York, 1953.
- 3 JASWON, M.A., e SYMM, G.T. - integration equation methods in potential theory and elastostatic. Academic Press, London, 1977.
- 4 PRATA, A.T., Aplicação do método de equações integrais ao problema de transferência de calor em regime Laminar com condução e convecção combinadas, Dissertação de Mestrado, UFSC, 1981.
- 5 GROFF, R., Aplicação do método variacional à solução do problema de Graetz generalizado, Dissertação de Mestrado, UFSC, 1980.
- 6 COLLE, S., Princípio variacional para a equação da energia - aplicação à solução do Problema de Graetz generalizado. Trabalho apresentado na UFSC no concurso de professor titular da cadeira de Termodinâmica, 1980.
- 7 GELFAND, I.M., FOMIN, S.V., Calculus of variations. Prentice - Hall, Inc., New Jersey, 1963.
- 8 CARNAHAN, B. et al., Applied numerical methods, John Wiley, New York, 1969.
- 9 MEIROVICH, L., Analytical methods in mechanical vibrations, John Wiley, 1969.
- 10 SPARROW, E.M. and SIEGEL, R., Application of variational methods to the thermal entrance region of ducts. In. J. H. and mass transfer, Vol. 1, 161-172, 1960.
- 11 STAKGOLD, I., Boundary value problems of mathematical phy-

- sics, vol. II, Macmillan, London, 1972.
- 12 BURCHILL, W.E., JONES, B.G. and STEIN, R.P., Influence of axial Heat diffusion in liquid metal - cooled ducts with specified Heat flux, Journal of heat transfer, pp 283-290, august 1968.
 - 13 SPARROW, E.M. and SIEGEL, R., Application of variational methods to the thermal entrance region of ducts. Int. J.H. and M. Transfer, vol. 1, 161-172, 1960.
 - 14 SCHNEIDER, P.J., Effect of axial fluids conduction on heat transfer in the entrance regions of parallel plates and tubes. Transactions of the ASME, p. 765, May 1957.
 - 15 SINGH, S.N., Heat Transfer by laminar flow in a cylindrical tube, Appl. Sei. Res., Section A, vol. 7, pp. 325-340, october, 1957.
 - 16 SIEGEL, R., SPARROW, E.M. and HALLMAN, T.M., Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux, Appl. Sci. Res., Section A, vol. 7, January, 1958.
 - 17 DENNIS, S.C.R., MERCER, A. MacD. and POOTS, G., Forced heat convection in laminar flow through rectangular ducts, Quart. Appl. Math., vol. XVII, n° 3, pp. 285-297, october, 1959.
 - 18 HEATON, H.S., REYNOLDS, W.C. and KAYS, W.M., Heat transfer simultaneous development of velocity and temperatura fields in laminar flow, Int. J. heat and mass transfer, vol. 7, pp. 763-781, 1964.
 - 19 REYNOLDS, W.C., Heat transfer to fully developed laminar flow in a circular tube with arbitrary circumferential heat flux, J. of Heat Transfer, pp. 108-112, may, 1960.
 - 20 JONES, A.S., Extensions to the solution of the Graetz problem, Int. J. H. and M. Transfer, vol. 14, pp. 619-623, 1971.

- 21 MICHELSEN, M.L. and VILLADSEN, J., The Graetz problem with axial heat conduction, I.J.H. and M. Transfer, vol. 17 , pp. 1391-1402, 1974.
- 22 TAY, A.O. and DAVIS, G.D.F.V., Application of the finite element method to convection heat transfer between parallel planes, I.J.H. and M. Transfer, vol. 14, pp. 1057-1069 , 1971.
- 23 HSU , C.J., Theoretical solutions for low-Peclet number thermal - entry-region heat transfer in laminar flow through concentric annuli, I.J.H. and M. Transfer, vol. 13, pp. 1907-1924, 1970.
- 24 FAGHRI, M. and SPARROW, E.M., Simultaneous wall and fluid axial conduction in laminar pipe flow heat transfer, J.of Heat Transfer, vol. 102, pp. 58-63, february, 1980.
- 25 COLLE, S., As integral equation approach to the heat transfer in laminar flow in ducts with axially uniform temperature, (a ser publicado) Proc. 3rd Int. Conf. Num. Methos in Heat Transfer, Seattle, USA, august, 1983.
- 26 JEFFREYS, M.A.H. and SWIRLES, B., Methods of mathematical physics, Cambridge at the University Press, 1972.
- 27 SOBOLEV, S.L., Partial differential equations of mathematical physics, Addison - Wesley Publishing Company, 1964.

APÊNDICE - A

A-1. A função "Delta de Dirac" - $\delta(w, w')$.

Em vários problemas físicos, encontram-se fontes que apresentam comportamento quase instantâneo (se o tempo é a variável independente) ou quase localizado (se a coordenada de espaço é a variável independente). Para evitar o trabalho incomodo, como detalhar o comportamento real destas fontes, introduziu-se o conceito de uma fonte idealizada — função "Delta de Dirac" — que apresenta um verdadeiro comportamento instantâneo ou localizado, simplificando o problema.

A função $\delta(w-w')$, representa um potencial em w , gerado por uma fonte unitária concentrado em w' . Também, pode-se visualizar $\delta(w-w')$ como um limite de uma função contínua por partes. Do pressuposto que $\delta(w-w')$ é uma fonte unitária concentrada em w' , deduz-se que:

$$\int_D \delta(w-w') dA(w') = \begin{cases} 1 & \text{se } D \text{ contém } w' \\ 0 & \text{se } D \text{ não contém } w' \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

De modo que, se $\psi(w)$ é uma função contínua em $w = w'$, por analogia com (A-1), tem-se:

$$\int_D \psi(w) \delta(w-w') dA(w) = \begin{cases} \psi(w) & \text{se } D \text{ contém } w' \\ 0 & \text{se } D \text{ não contém } w' \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

A análise matemática da função "Delta de Dirac" esta apresentada com detalhe em [11].

A-2. A função de Green

A função de Green associada ao operador Laplaceano é denominada função de Green fundamental, e satisfaz a equação:

$$-\nabla^2 g(w, w') = \delta(w, w') \quad \text{em } D \quad (A-3)$$

Onde D é uma região normal em R^n , e $\delta(w, w')$ é a função "Delta de Dirac", definida pelas condições dadas no item anterior.

Conforme [11], $g(w, w')$ pode ser interpretado como um potencial eletrostático, em um ponto arbitrário w , como consequência de uma fonte unitária atuando em w' . Considerando que o operador ∇^2 é invariante sob a rotação de coordenadas, torna-se necessário encontrar uma solução para (A-3), a qual depende somente de $|R| = |w - w'|$, onde:

$$|w - w'| = ((z-z')^2 + (y-y')^2)^{1/2} \quad (A-4)$$

Se considerar $D(w-w', R)$ um pequeno círculo centrado em w , com $w' \in \partial D$ e de raio R , onde ∂D é a superfície de $D(w-w', R)$. Isto é,

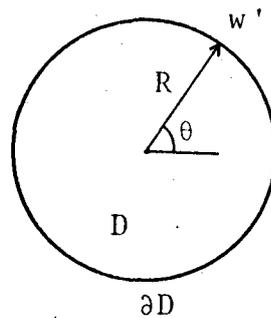


Figura A-1

Para $R > 0$, ou seja, para todo $w \neq w'$, $g(w, w')$ satisfaz a equação $\nabla^2 g(w, w') = 0$, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{R} \left(R \frac{\partial g(w, w')}{\partial R} \right) = 0 \quad (\text{A-5})$$

Integrando-se duas vezes consecutivas a equação (A-5), esta pode ser escrita como segue:

$$g(w, w') = C_1 \ln R + C_2, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes} \quad (\text{A-6})$$

Integrando-se (A-3) sobre a esfera $D(w-w', R)$, e fazendo R tender a zero, obtêm-se:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_D \nabla^2 g(w, w') dA(R) = \lim_{R \rightarrow 0} \int_D \text{div } \nabla g(w, w') dA(R') = - \lim_{R \rightarrow 0} \int_D \delta(w-w') dA(R') \quad (\text{A-7})$$

Aplicando-se na equação (A-7), no termo antes da igualdade, o teorema da divergência, e no termo após a igualdade a propriedade (A-1) da função "Delta de Dirac", obtêm-se:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\partial D} \nabla g(w, w') \cdot n \, dS = -1 \quad (\text{A-8})$$

Considerando-se na equação (A - 8) que $\nabla g \cdot n = \frac{\partial g}{\partial n}$, obtêm-se:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\partial B} \frac{\partial g(w, w')}{\partial n} \, dS = -1 \quad (\text{A-9})$$

Derivando-se com relação a normal (A-6), substituindo-se em (A-9), e considerando que $dS = R d\theta$, obtêm-se o valor de C_1 , e arbitrando $C_2 = 0$, de modo que não causa nenhuma consequência, a equação (A-6) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$g(w, w') = -\frac{1}{2\pi} \ln(R) \quad (\text{A-10})$$

A derivada normal da função de Green pode ser calculada, se considerar que:

$$\frac{\partial g(w, w')}{\partial n'} = \nabla g(w, w') \cdot n' \quad (\text{A-11})$$

Onde n' é a normal a superfície ∂D no ponto w' .

$$\nabla g(w, w') = \frac{\partial g}{\partial z'} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y'} \vec{j}, \text{ com } w' = (z', y') \quad (\text{A-12})$$

e

$$|R| = |w-w'| = ((z-z')^2 + (y-y')^2)^{1/2}, \quad (\text{A-13})$$

Com $w = (y, z)$ e $w' = (y', z')$

Da equação (A-10) conclui-se que:

$$\frac{\partial g(w, w')}{\partial z'} = \frac{1}{2\pi} \frac{(z-z')}{|w-w'|^2} \quad (\text{A-14})$$

e

$$\frac{\partial g(w, w')}{\partial y'} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y-y')}{|w-w'|^2} \quad (\text{A-15})$$

Desta forma, substituindo (A-14) e (A-15) em (A-12), e posteriormente em (A-11), obtêm-se

$$\frac{\partial g(w, w')}{\partial n'} = \frac{1}{2\pi} \frac{(w-w') \cdot n'}{|w-w'|^2} \quad (\text{A-16})$$

Por outro lado, a derivada da função de Green com relação a normal, pode ser expressa em função do ângulo Ψ' , conforme a figura abaixo.

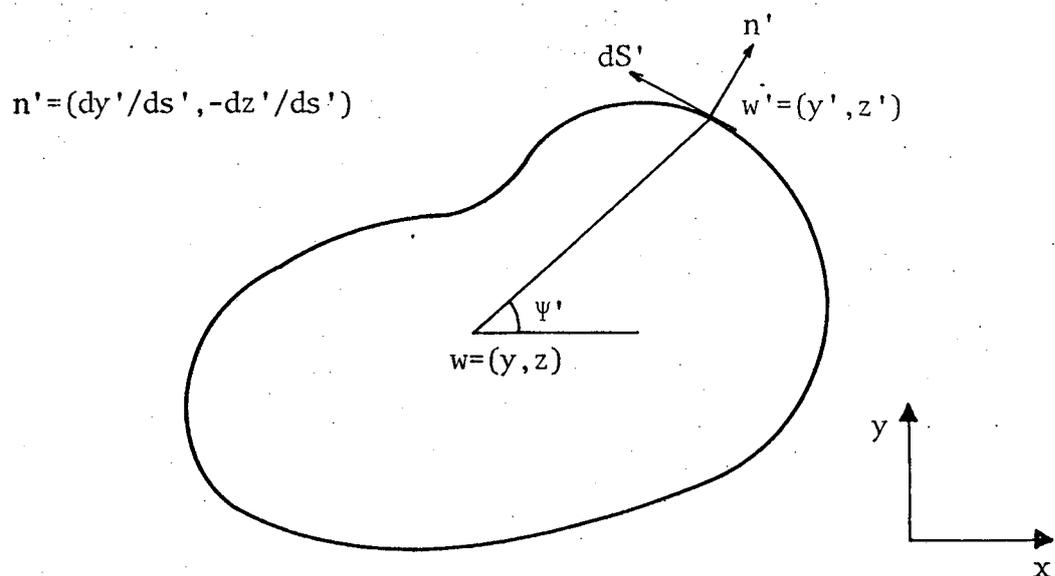


Figura A.2

De acordo com a figura A-2,

$$\psi' = \text{arc tg} \left(\frac{y' - y}{z' - z} \right) \quad (\text{A-17})$$

como

$$dS' = dz' \vec{i} + dy' \vec{j}$$

tem-se

$$\frac{d\psi'}{dS'} = \frac{d\psi'}{dz'} \frac{dz'}{dS'} + \frac{d\psi'}{dy'} \frac{dy'}{dS'} \quad (\text{A-18})$$

De acordo com (A-17),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z'} = - \frac{(y' - y)}{(z' - z)^2 + (y' - y)^2} \quad (\text{A-19})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y'} = \frac{(z - z')}{(z' - z)^2 + (y' - y)^2} \quad (\text{A-20})$$

Substituindo (A-19) e (A-20) em (A-18), e agrupando os termos, obtêm-se:

$$\frac{d\Psi'}{dS'} = \frac{(w' - w) \cdot n'}{|w' - w|^2} \quad (\text{A-21})$$

onde,

$$(w' - w) = (z' - z)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}$$

Substituindo (A-21) em (A-16) e considerando que:

$$|w - w'|^2 = |w' - w|^2$$

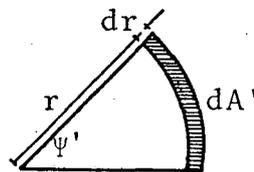
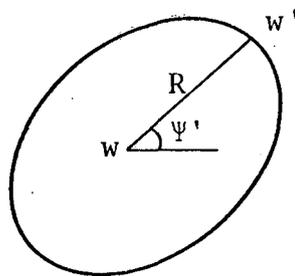
Obtêm-se:

$$\frac{\partial g(w, w')}{\partial n'} = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Psi'}{\partial S'} \quad (\text{A-22})$$

As equações (A-16) e (A-22) são equações similares que representam a derivada normal da função de Green com

relação a normal no ponto w' . O uso de uma ou outra depende da conveniência de cada um.

Quando se usa a função de Green fundamental na construção de equações integrais, é importante que a equação final possua somente integrais ao longo do contorno. Desta forma é preciso que a integral da função de Green fundamental na região, seja reduzida a uma integral de linha. Para isto, é necessário fixar um sistema de coordenadas polares em w , conforme a figura A-3.



$$\text{onde, } R = |w' - w|$$

$$dA' = r d\psi' dr$$

Figura A-3

A integral da função de Green ao longo da região D , torna-se:

$$\int_D g(w, w') dA(w') = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \ln(r) dr d\psi' \quad (\text{A-23})$$

onde

$$R = |w' - w|$$

Resolvendo a integral com relação a r , obtêm-se a seguinte equação:

$$\int_D g(w, w') dA(w') = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \frac{R^2}{2} d\psi' \quad (\text{A-24})$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo de (A-24) por dS' , e substituindo (A-21), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_D g(w, w') dA(w') &= - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \frac{(w' - w) \cdot n'}{2} dS(w') \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} g(w, w') (w' - w) \cdot n' dS(w') + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial D} (w' - w) \cdot n' dS(w') \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

De acordo com o teorema de Gauss [26],

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (w' - w) \cdot n' dS(w') \quad (\text{A-26})$$

Introduzindo (A-26) em (A-25), obtêm-se:

$$\int_D g(w, w') dA(w') = \frac{1}{2} \int_{\partial D} g(w, w') (w' - w) \cdot n' dS(w') + \frac{1}{4\pi} A(D) \quad (\text{A-27})$$

A equação (A-27) permite que seja calculada a integral da função de Green fundamental na região D , através de integrais ao longo do contorno, conforme [4].

A.3. Propriedades da função de Green

As funções de Green apresentam algumas propriedades que se caracteriza através de sua própria definição ; isto é, como mostrado anteriormente, isola polos por meio de uma região infinitamente pequena. Para o caso bidimensional, considere-se um pequeno círculo envolvendo o ponto w , cuja região será denominada D , e seu contorno ∂D , onde r é o raio do círculo e $w' \in \partial D$, como na figura abaixo.

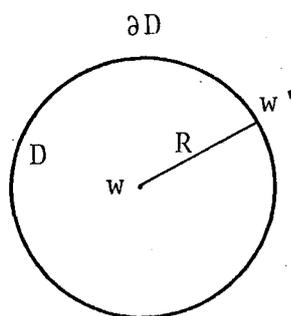


Figura A.4

Portanto, de acordo com a definição da função de Green, as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) A simetria da função de Green

$$g(w, w') = g(w', w) \quad (\text{A-28})$$

$$\text{II) } \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\partial D} g(w, w') dS(w') = 0, \quad w' \in \partial D \quad (\text{A-29})$$

$$\text{iii) } \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \bar{n}'} g(w, w') dS(w') = -1, \quad w' \in \partial D \quad (\text{A-30})$$

iv) Se o polo surge quando $w \in \partial B$, este pode ser isolado, traçando-se um pequeno semi-circulo de raio R e w no centro, como na figura abaixo:

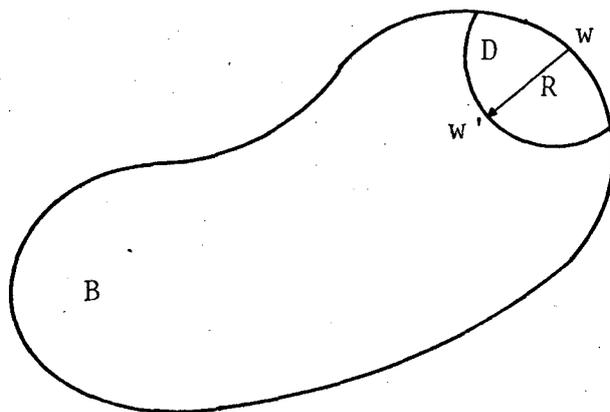


Figura A.5

Obtendo-se:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \bar{n}'} g(w, w') dS(w') = -1/2, \quad w \in \partial B \quad (\text{A-31})$$

$$w' \in \partial D$$

A propriedade (iii) encontra-se demonstrada no desenvolvimento para a obtenção da equação (A-9), assim como, (iv) pode ser demonstrado de uma maneira similar. A propriedade de simetria da função de Green (i) pode ser verificada, se analisar a equação (A-16), considerando que $|w-w'| = |w'-w|$, e finalmente (ii) pode ser verificado conforme em [4].

APÊNDICE B

A funcional para a equação da energia

Este apêndice mostra o desenvolvimento apresentado [5], que constitui uma generalização do princípio para a equação da energia, obtido por [6].

Para um fluido isotropico em escoamento laminar numa dada região R, a equação da energia adquire a seguinte forma:

$$\hat{\rho}c_v \left(\frac{\partial \hat{T}^*}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla \hat{T}^* \right) = - \nabla \cdot (-\hat{k}^* \nabla \hat{T}^*) \quad (\text{B-1})$$

onde,

$$\hat{\rho}c_v = \rho c_v(T^*)$$

e

$$\hat{k} = \tilde{k}(T^*) \quad (\text{B-2})$$

As variações das funções \hat{T}^* , $\hat{\rho}c_v$ e \hat{k} , podem ser escritas como se segue:

$$\hat{T}^* = T^* + \delta \hat{T}^*$$

$$\hat{k} = k + \delta \hat{k} \quad (\text{B-3})$$

e

$$\hat{\rho}c_v = \rho c_v + \delta \hat{\rho}c_v$$

substituindo as expressões dada em (B-3) na equação (B-1), ob-
tém-se:

$$\hat{\rho}c_v \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \delta \hat{T}^*}{\partial t^*} + \bar{V}^* \cdot \nabla T^* + \bar{V}^* \cdot \nabla (\delta \hat{T}^*) \right) = \nabla \cdot (\hat{k} \nabla \hat{T}^*) \quad (B-4)$$

multiplicando (B-4) por $\delta \hat{T}^*$, obtém-se:

$$\hat{\rho}c_v \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \delta \hat{T}^*}{\partial t^*} + \bar{V}^* \cdot \nabla T^* + \bar{V}^* \cdot \nabla (\delta \hat{T}^*) \right) \delta \hat{T}^* = \nabla \cdot (\hat{k} \nabla \hat{T}^*) \delta \hat{T}^* \quad (B-5)$$

mas,

$$\nabla \cdot (\hat{k} \nabla \hat{T}^*) \delta \hat{T}^* = \nabla \cdot (\hat{k} \nabla \hat{T}^* \delta \hat{T}^*) - \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla (\delta \hat{T}^*) \quad (B-6)$$

substituindo (B-6) em (B-5), tem-se:

$$-\hat{\rho}c_v \left(\frac{\partial \delta \hat{T}^*}{\partial t^*} \delta \hat{T}^* + \bar{V}^* \cdot \nabla (\delta \hat{T}^*) \delta \hat{T}^* \right) = \hat{\rho}c_v \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} \delta \hat{T}^* + \bar{V}^* \cdot \nabla T^* \delta \hat{T}^* \right) + \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla (\delta \hat{T}^*) - \nabla \cdot (\hat{k} \nabla \hat{T}^* \delta \hat{T}^*) \quad (B-7)$$

tem-se:

$$\frac{\partial \delta \hat{T}^*}{\partial t^*} \delta \hat{T}^* = \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{2} \right)^2 \quad (B-8)$$

e

$$\nabla(\delta\hat{T}^*) \delta\hat{T}^* = \nabla\left(\frac{(\delta\hat{T}^*)^2}{2}\right) \quad (\text{B-9})$$

Substituindo (B-8) e (B-9) em (B-7) e dividindo por $\hat{\rho}\hat{c}_v$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{(\delta\hat{T}^*)^2}{2}\right) - \tilde{V}^* \cdot \nabla\left(\frac{(\delta\hat{T}^*)^2}{2}\right) &= \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \delta\hat{T}^* + \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \delta\hat{T}^* \\ + \frac{\hat{k}}{\hat{\rho}\hat{c}_v} \nabla\hat{T}^* \cdot \nabla(\delta\hat{T}^*) - \nabla \cdot (\hat{k}\nabla\hat{T}^* \delta\hat{T}^*) &\frac{1}{\hat{\rho}\hat{c}_v} \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

mas,

$$\nabla \cdot (\hat{k}\nabla\hat{T}^* \delta\hat{T}^*) \frac{1}{\hat{\rho}\hat{c}_v} = \nabla \cdot \frac{(\hat{k}\nabla\hat{T}^* \delta\hat{T}^*)}{\hat{\rho}\hat{c}_v} - \hat{k}\nabla\hat{T}^* \cdot \nabla\left(\frac{1}{\hat{\rho}\hat{c}_v}\right) \delta\hat{T}^* \quad (\text{B-11})$$

e

$$\frac{\hat{k}}{\hat{\rho}\hat{c}_v} \nabla\hat{T}^* \cdot \nabla(\delta\hat{T}^*) = \frac{\hat{k}}{2\hat{\rho}\hat{c}_v} \delta(\nabla\hat{T}^*)^2 \quad (\text{B-12})$$

Substituindo (B-11) e (B-12) em (B-10), tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{(\delta\hat{T}^*)^2}{2}\right) - \tilde{V}^* \cdot \nabla\left(\frac{(\delta\hat{T}^*)^2}{2}\right) &= \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \delta\hat{T}^* + \\ \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \delta\hat{T}^* + \frac{\hat{k}}{2\hat{\rho}\hat{c}_v} \delta(\nabla\hat{T}^*)^2 - \nabla \cdot \frac{(\hat{k}\nabla\hat{T}^* \delta\hat{T}^*)}{\hat{\rho}\hat{c}_v} &+ \end{aligned}$$

$$\hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho \hat{c}_V} \right) \delta \hat{T}^* \quad (\text{B-13})$$

Integrando a equação (B-13) entre zero e t^* e na região R, resulta:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_R \frac{\partial}{\partial t^*} (\delta \hat{T}^*)^2 dV^* dt^* - \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_R \tilde{V}^* \cdot \nabla ((\delta \hat{T}^*)^2) dV^* dt^* = \\ & \int_0^{t^*} \int_R \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \right) \delta \hat{T}^* dV^* dt^* + \int_0^{t^*} \int_R \left(\frac{\hat{k}}{2 \rho \hat{c}_V} \delta (\nabla \hat{T}^*)^2 + \right. \\ & \left. \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho \hat{c}_V} \right) \delta \hat{T}^* \right) dV^* dt^* - \int_0^{t^*} \int_R \nabla \cdot \left(\frac{\hat{k} \nabla \hat{T}^* \delta \hat{T}^*}{\rho \hat{c}_V} \right) dV^* dt^* \quad (\text{B-14}) \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência no último termo do lado direito da equação (B-14), isto é:

$$\int_0^{t^*} \int_R \nabla \cdot \left(\frac{\hat{k} \nabla \hat{T}^* \delta \hat{T}^*}{\rho \hat{c}_V} \right) dV^* dt^* = \int_0^{t^*} \int_{\partial R} \frac{\hat{k}}{\rho \hat{c}_V} \nabla \hat{T}^* \cdot \tilde{n} \delta \hat{T}^* dA^* dt^* \quad (\text{5.15})$$

onde,

\tilde{n} = vetor normal a R.

mas,

$$\int_R \tilde{V}^* \cdot \nabla \left(\frac{(\delta \hat{T}^*)^2}{2} \right) dV^* = \int_R \nabla \cdot \left(\frac{\tilde{V}^* (\delta \hat{T}^*)^2}{2} \right) dV^* - \int_R \nabla \cdot \tilde{V}^* \frac{(\delta \hat{T}^*)^2}{2} dV^*$$

(B-16)

Aplicando no primeiro termo do lado direito de (B-16), também o teorema da divergência, obtêm-se:

$$\int_R \tilde{V}^* \cdot \nabla \left(\frac{(\delta \hat{T}^*)^2}{2} \right) dV^* = \frac{1}{2} \int_R \tilde{V}^* \cdot \tilde{n} (\delta \hat{T}^*)^2 dA^* - \int_R \nabla \cdot \tilde{V}^* \frac{(\delta \hat{T}^*)^2}{2} dV^* \quad (\text{B-17})$$

tem-se que a lei da conservação da massa é dada nos seguintes termos:

$$\nabla \cdot (\rho \tilde{V}^*) = - \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} \quad (\text{B-18})$$

e

$$\nabla \cdot (\rho \tilde{V}^*) = \rho \nabla \cdot \tilde{V}^* + \tilde{V}^* \cdot \nabla \rho \quad (\text{B-19})$$

portanto,

$$\nabla \cdot \tilde{V}^* = - \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla \rho \right) \quad (\text{B-20})$$

substituindo (B-20) no último termo de (B-17), obtêm-se:

$$\int_R \tilde{V}^* \cdot \nabla \left(\frac{(\delta \hat{T}^*)^2}{2} \right) dV^* = \frac{1}{2} \int_R \tilde{V}^* \cdot \tilde{n} (\delta \hat{T}^*)^2 dA^* + \frac{1}{2} \int_R \left(\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla \rho \right) \frac{(\delta \hat{T}^*)^2}{\rho} dV^* \quad (\text{B-21})$$

Substituindo (B-21) em (B-16), vem:

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \int_R \frac{\partial}{\partial t^*} (\delta \hat{T}^*)^2 d\tilde{V}^* dt^* - \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \tilde{V}^* \cdot \tilde{n} (\delta \hat{T}^*)^2 dA^* dt^* -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_R \left(\frac{\partial \rho}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla \rho \right) \frac{(\delta T^*)^2}{\rho} dV^* dt^* = \int_0^{t^*} \int_R \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \right) \delta \tilde{T}^* +$$

$$\frac{\hat{K}}{2\rho\hat{c}_v} \delta (\nabla \hat{T}^*)^2 + \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho\hat{c}_v} \right) \delta \hat{T}^* dV^* dt^* -$$

$$\int_0^{t^*} \int_{\partial R} \frac{\hat{K}}{\rho\hat{c}_v} \nabla \hat{T}^* \cdot \tilde{n} \delta \hat{T}^* dA^* dt^* \quad (B-22)$$

Admitindo que o escoamento é incompressível e lembrando que a velocidade é nula no contorno da região R, a equação (B-21) pode ser escrita como segue:

$$- \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_R \frac{\partial}{\partial t^*} (\delta \hat{T}^*)^2 dV^* dt^* = \int_0^{t^*} \int_R \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \right) \delta \hat{T}^* +$$

$$\frac{\hat{k} (\delta \hat{T}^*)^2}{2\rho\hat{c}_v} + \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho\hat{c}_v} \right) \delta \hat{T}^* dV^* dt^* -$$

$$\int_0^t \int_{\partial R} \frac{\hat{k}}{\rho\hat{c}_v} \nabla \hat{T}^* \cdot \tilde{n} \delta \hat{T}^* dA^* dt^* \quad (B-23)$$

mas,

$$\frac{\hat{k} \delta (\nabla \hat{T}^*)^2}{2\rho\hat{c}_v} + \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho\hat{c}_v} \right) \delta \hat{T}^* = \hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\rho\hat{c}_v} \right) \quad (B-24)$$

Utilizando as expressões (B-3) em (B-24), ob

têm-se:

$$\hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\hat{\rho} \hat{c}_V} \right) = (k + \delta \hat{k}) \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\rho c_V + \hat{\rho} \hat{c}_V} \right)$$

ou

$$\hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\hat{\rho} \hat{c}_V} \right) = (k + \delta \hat{k}) \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\rho c_V} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta \hat{\rho} \hat{c}_V}{\rho c_V}\right)} \right) \quad (\text{B-25})$$

mas, como $\delta \hat{\rho} \hat{c}_V / \rho c_V$ é insignificante, vale a expressão abaixo:

$$\frac{1}{1 + \frac{\delta \hat{\rho} \hat{c}_V}{\rho c_V}} \cong 1 - \frac{\delta \hat{\rho} \hat{c}_V}{\rho c_V} \quad (\text{B-26})$$

Substituindo (B-26) em (B-25), obtêm-se:

$$\hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\hat{\rho} \hat{c}_V} \right) = (k + \delta \hat{k}) \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\rho c_V} \left(1 - \frac{\delta \hat{\rho} \hat{c}_V}{\rho c_V}\right) \right) \quad (\text{B-27})$$

e, desprezando os termos de ordem superior em δ , (B-27) pode ser escrito conforme segue:

$$\hat{k} \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\hat{\rho} \hat{c}_V} \right) = k \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\rho c_V} \right) \quad (\text{B-28})$$

Substituindo (B-28) em (B-24), e posteriormente em (B-21), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
- \frac{1}{2} \int_0^t \int_R \frac{\partial}{\partial t^*} (\delta \hat{T}^*)^2 dV^* dt^* &= \int_0^t \int_R \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \right) \delta \hat{T}^* + \\
k \nabla \hat{T}^* \cdot \nabla \left(\frac{\delta \hat{T}^*}{\rho c_v} \right) dV^* dt^* &- \int_0^t \int_{\partial R} \frac{k^* \nabla \hat{T}^* \cdot \tilde{n}}{\rho c_v} \delta \hat{T}^* dA^* dt^* \quad (B-29)
\end{aligned}$$

As funções \hat{k} e $\hat{\rho} c_v$ do último termo da equação (B-29), foram substituídas por k e ρc_v , porque é possível obter de maneira análoga à equação (B-28), a seguinte expressão:

$$\frac{\hat{k} \nabla \hat{T}^*}{\hat{\rho} c_v} = \frac{k \nabla \hat{T}^*}{\rho c_v} \quad (B-30)$$

Admitindo-se que ρc_v é constante, e que o regime é permanente, (B-29) adquire a seguinte forma:

$$- \frac{1}{2} \int_R (\delta \hat{T}^*)^2 dV^* = \frac{1}{\rho c_v} \int_0^t \int_R (\rho c_v \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \delta \hat{T}^* + \frac{k}{2} \delta (\nabla \hat{T}^*)^2) dV^* dt^* -$$

$$- \frac{1}{\rho c_v} \int_0^t \int_{\partial R} k \nabla \hat{T}^* \cdot \tilde{n} \delta \hat{T}^* dA^* dt^* \leq 0 \quad (B-31)$$

Deve-se considerar as condições de contorno em que se encontra a equação (B-1). Como o problema a ser analisado é de fluxo prescrito na fronteira, isto é, $q^*|_{\partial R} = q^*(\partial R)$, tem-se:

$$k \nabla \hat{T} \cdot \tilde{n}^* = q^* \quad \text{em } \partial R \quad (B-32)$$

Portanto, substituindo (B-32) em (B-31) e alterando o sinal de integração com o sinal de variação 'δ' obtém-se:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_R (\delta \hat{T}^*)^2 dV^* &= \frac{1}{\rho c_v} \delta \int_R (\rho c_v \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \times \hat{T}^* + \frac{k}{2} (\nabla \hat{T}^*)^2) dV^* \\
 -\frac{1}{\rho c_v} \delta \int_{\partial R} q^* \hat{T}^* dA^* & \qquad \qquad \qquad (B-33)
 \end{aligned}$$

Pode-se notar que na expressão (B-33), o termo da esquerda é uma quantidade quadrática negativa definida, que só se anula quando $\delta \hat{T}^*$ for zero. Portanto, os termos da direita que são as primeiras variações das integrais, serão nulos quando $\delta \hat{T}^* = 0$ (isto é, $T^* = \hat{T}^*$). Como já é conhecido do cálculo variacional, as integrais são funcionais que são estremalizadas quando a função \hat{T}^* for solução de (B-1), isto, ocorre quando $\hat{T}^* = T^*$.

Então, pode-se propor a seguinte funcional, que é aplicável em problemas de fluxo prescrito.

$$J^*(T^*, \hat{T}^*) = \int_R (\rho c_v \tilde{V}^* \cdot \nabla T^* \times \hat{T}^* + \frac{k}{2} (\nabla \hat{T}^*)^2) dV^* - \int_{\partial R} q^* \hat{T}^* dA^* \qquad \qquad \qquad (B-34)$$

A equação (B-34), encontra-se na forma dimensional, e para adimensionalizá-la, será considerado os grupos adimensionais apresentados de (3.2) a (3.8), obtendo-se:

$$J(T, \hat{T}) = \int_R (P_e \tilde{V} \cdot \nabla T \times (\hat{T} + 1) + \frac{1}{2} (\nabla^2 \hat{T}) \, dV -$$

$$\int_{\partial R} q(\hat{T} + 1) \, dA.$$

(B-35)

APÊNDICE - C

Obtenção dos sistemas de equações diferenciais lineares, homogêneo de segunda ordem, que possibilitam às soluções de $a_i^+(z)$ e $a_i^-(z)$.

Conforme [5], com base no método de Ritz-Galerkin foram propostas as distribuições aproximadas de temperaturas, dadas pelas equações (3.36) e (3.37), para as regiões D_1 e D_3 respectivamente, transcritas a seguir:

$$T_1(y, z) = \sum_{i=0}^n a_i^-(z) \Psi_i(y) \quad (C-1)$$

e

$$T_3(y, z) = \sum_{i=0}^n a_i^+(z-\ell) \Psi_i(y) \quad (C-2)$$

Onde a_i^+ e a_i^- são funções a determinar e $\Psi_i(y)$ formam uma sequência completa de funções linearmente independentes, que satisfazem as condições de contorno dadas por (3.38) a (3.41).

Em consequência de (C-1) e (C-2), a distribuição de temperatura variada, adquire a seguinte forma:

$$\hat{T}_1(y, z) = \sum_{i=0}^n \hat{a}_i^-(z) \Psi_i(y) \quad (C-3)$$

e

$$\hat{T}_3(y, z) = \sum_{i=0}^n \hat{a}_i^+(z-\ell) \psi_i(y) \quad (C-4)$$

onde,

$$\hat{a}_i^+(z-\ell) = a_i^+(z-\ell) + \xi \eta_i(z-\ell) \quad i = 0, \dots, n \quad (C-5)$$

e

$$\hat{a}_i^-(z) = a_i^-(z) + \xi \eta_i(z), \quad i = 0, \dots, n \quad (C-6)$$

Onde ξ é um escalar e $\eta_i(z)$ sendo uma sequência de variações admissíveis [7].

As funções $\eta_i(z)$, apresentam a primeira derivada contínua e condições homogêneas nos limites de integração em z da funcional (4.44), isto é:

$$\eta_i(-\infty) = \eta_i(0) = \eta_i(\infty) = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (C-7)$$

$$\frac{d\eta_i(-\infty)}{dz} = \frac{d\eta_i(0)}{dz} = \frac{d\eta_i(\infty)}{dz} = 0, \quad i = 0, \dots, n \quad (C-8)$$

O funcional (3.35) será aplicado nas regiões D_1 e D_3 separadamente, pelo fato de que o problema original foi decomposto em três regiões distintas. Portanto, aplicando-se inicialmente as equações de (C-2) e (C-4), que correspondem as distribuições de temperaturas para a região D_3 , e impondo as condições de contorno (2.30), (2.31) e (2.32), em (3.35), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
J(T_3, \hat{T}_3) &= \int_{\ell}^{\infty} \int_{-1}^1 (P_e \bar{U}(y) \cdot \sum_{i,j=0}^n \dot{a}_i^+(z-\ell) a_j^+(z-\ell) \Psi_i(y) \Psi_j(y) \\
&+ P_e \bar{U}(y) \sum_{i,j=0}^n \dot{a}_i^+(z-\ell) \xi \eta_j(z-\ell) \Psi_i(y) \Psi_j(y) + P_e \bar{U}(y) \sum_{i=0}^n a_i^+(z-\ell) \Psi_i(y) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=0}^n (a_i^+(z-\ell) + \xi \eta_i(z-\ell)) (a_j^+(z-\ell) + \xi \eta_j(z-\ell)) \nabla \Psi_i(y) \cdot \nabla \Psi_j(y) \right. \\
&\left. + \sum_{i,j=0}^n (\dot{a}_i^+(z-\ell) + \xi \dot{\eta}_i(z-\ell)) (\dot{a}_j^+(z-\ell) + \xi \dot{\eta}_j(z-\ell)) \Psi_i(y) \Psi_j(y) \right) dy dz
\end{aligned}$$

(C-10)

Calculando-se a primeira e segunda derivada de (C-10) com relação a ξ , resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{dJ(T_3, \hat{T}_3)}{d\xi} &= \int_{\ell}^{\infty} \int_{-1}^1 (P_e \bar{U}(y) \sum_{i,j=0}^n \dot{a}_i^+(z-\ell) \eta_j(z-\ell) \Psi_i(y) \Psi_j(y) \\
&+ \frac{1}{2} (2 \sum_{i,j=0}^n \eta_i(z-\ell) (a_j^+(z-\ell) + \xi \eta_j(z-\ell)) \nabla \Psi_i(y) \cdot \nabla \Psi_j(y) \\
&+ 2 \sum_{i,j=0}^n \dot{\eta}_i(z-\ell) (a_j^+(z-\ell) + \xi \dot{\eta}_j(z-\ell)) \Psi_i(y) \Psi_j(y)) dy dz
\end{aligned} \tag{C-11}$$

e

$$\frac{d^2}{d\xi^2} (J(T_3, \hat{T}_3)) = \int_{\ell}^{\infty} \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^n \eta_i^2 (\nabla \Psi_i(y))^2 + \sum_{i=0}^n \dot{\eta}_i^2 (\Psi_i(y))^2 \right) dy dz \quad (C-12)$$

A equação (C-11) mostra que a funcional é minimizado, pois o integrando de (C-12) é uma forma quadrática positiva definida em $\xi = 0$.

Para encontrar a melhor aproximação para a solução dada por (C-2), basta fazer $\xi = 0$ em (C-11), e esta equação igual a zero, fazendo assim, com que a funcional se minimize. Neste caso, (C-11) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(T_3, \hat{T}_3)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} &= \int_{\ell}^{\infty} \int_{-1}^1 (P_e \bar{U}(y)) \sum_{i,j=0}^n \dot{a}^+(z-\ell) \eta_j(z-\ell) \Psi_i \Psi_j \\ &+ \sum_{i,j=0}^n \eta_i(z-\ell) a_j^+(z-\ell) \nabla \Psi_i(y) \cdot \nabla \Psi_j(y) + \sum_{i,j=0}^n \dot{\eta}_i(z-\ell) \dot{a}_j^+(z-\ell) \cdot \Psi_i(y) \Psi_j(y) dy dz = 0 \end{aligned} \quad (C-13)$$

Alternando os sinais de somatória e de integração da equação (C-13), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{\ell}^{\infty} \sum_{i,j=0}^n \dot{a}^+(z-\ell) \eta_j(z-\ell) \int_{-1}^1 P_e \bar{U}(y) \Psi_i(y) \Psi_j(y) dy dz + \\ \int_{\ell}^{\infty} \sum_{i,j=0}^n \eta_i(z-\ell) a_j^+(z-\ell) \int_{-1}^1 \nabla \Psi_i(y) \cdot \nabla \Psi_j(y) dy dz + \\ \int_{\ell}^{\infty} \sum_{i,j=0}^n \dot{\eta}_i(z-\ell) \dot{a}_j^+(z-\ell) \int_{-1}^1 \Psi_i(y) \Psi_j(y) dy dz = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\ell}^{\infty} \sum_{i,j=0}^n \eta_i(z-\ell) a_j^+(z-\ell) \int_{-1}^1 \psi_i(y) \psi_j(y) dy dz = 0 \quad (\text{C-14})$$

Na equação (C-14), apenas a última integral não apresenta a função $\eta_i(z-\ell)$, mas sim, sua derivada. Para fazer com que apareça nesta integral a função $\eta_i(z-\ell)$, basta integrá-la por partes. Portanto, alterando o sinal de integração com o sinal de somatória, e aplicando a condição (C-7), obtêm-se

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^n \int_{\ell}^{\infty} \dot{\eta}_i(z-\ell) \dot{a}_j^+(z-\ell) \int_{-1}^1 \psi_i(y) \psi_j(y) dy dz = \\ & - \int_{\ell}^{\infty} \sum_{i,j=0}^n \eta_i(z-\ell) \ddot{a}_j^+(z-\ell) \int_{-1}^1 \psi_i(y) \psi_j(y) dy dz \end{aligned} \quad (\text{C-15})$$

Substituindo-se (C-15) em (C-14), e trocando o sinal, resulta:

$$\int_{\ell}^{\infty} \left(\sum_{i,j=0}^n \ddot{a}_j^+ H_{ij} \eta_j - \sum_{i,j=0}^n \dot{a}_i^+ A_{ij} \eta_j - \sum_{i,j=0}^n a_{i,B_{ij}}^+ \eta_j \right) dz = 0 \quad (\text{C-16})$$

onde,

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \psi_i(y) \psi_j(y) dy \quad (\text{C-17})$$

$$B_{ij} = \int_{-1}^1 \nabla \psi_i(y) \cdot \nabla \psi_j(y) dy \quad (\text{C-18})$$

$$A_{ij} = \int_{-1}^1 P_e \bar{U}(y) \Psi_i(y) \Psi_j(y) dy \quad (C-19)$$

Nota-se que as matrizes H, A e B são matrizes hermitianas, uma vez que seus termos constituem produtos internos de uma sequência, conseqüentemente, são positivas definidas.

As funções $\eta_i(z-l)$ são funções arbitrárias, de modo que (C-16) será satisfeita, se a seguinte igualdade acontecer:

$$\sum_{i=0}^n \ddot{a}_i^+ H_{ij} - \sum_{i=0}^n \dot{a}_i^+ A_{ij} - \sum_{i=0}^n a_i^+ B_{ij} = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (C-20)$$

ou na forma matricial, como segue:

$$[H] \{\ddot{a}^+\} - [A] \{\dot{a}^+\} - [B] \{a^+\} = \{0\} \quad (C-21)$$

Por analogia ao procedimento apresentado para alcançar (C-21), obtém-se:

$$[H] \{\ddot{a}^-\} - [A] \{\dot{a}^-\} - [B] \{a^-\} = \{0\} \quad (C-22)$$

APÊNDICE D

Soluções analíticas dos núcleos que compõem as equações integrais

Conforme a referência [3], os núcleos que compõem as equações integrais do problema, podem ser resolvidos analiticamente. Para obter G , integra-se a equação (A-10) que define a função de Green associada ao operador Laplaceano, ao longo da superfície S de uma região D , conforme segue:

$$G = - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S} \ln R \, dS \quad (D-1)$$

onde,

$$R = |w - w'|$$

Considerando-se que o intervalo de integração pode ser aproximado por uma linha reta, conforme a figura abaixo.

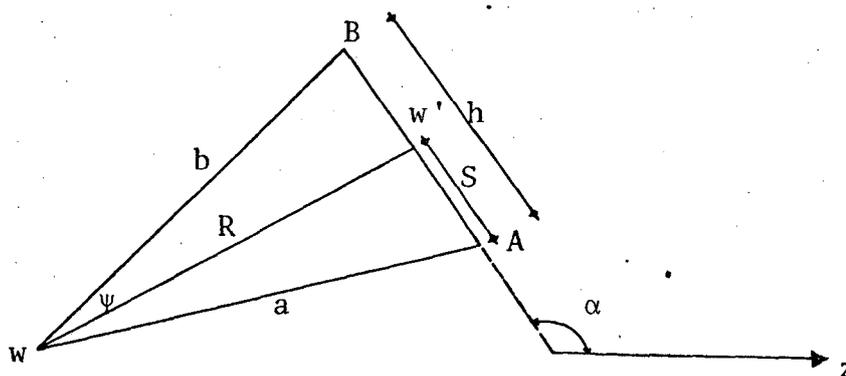


Figura D.1

onde,

- Ψ = o ângulo definido pelos os vetores \vec{wB} e \vec{wA}
 s = o arco, cujo o comprimento varia entre zero e h .
 a e b = as distâncias entre $w-A$ e $w-B$ respectivamente
 α = o ângulo entre o vetor AB e o eixo axial positivo z
 θ = o ângulo definidos pelos os vetores \vec{Aw} e \vec{AB} .

Considerando-se o triângulo wAB , as seguintes relações podem ser dadas:

$$\Psi = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - h^2}{2ab}\right), \quad 0 < \Psi \leq \Pi \quad (D-2)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + h^2 - b^2}{2ah}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \Pi \quad (D-3)$$

Para um ponto w' qualquer sobre AB , considerando-se o triângulo $ww'A$, pode-se definir r da seguinte maneira:

$$R^2 = S^2 + a^2 - 2a S \cos\theta \quad (D-4)$$

Como, $w' = (y', z')$, segue que:

$$\begin{aligned} z' &= z_a + S \cos\alpha \\ y' &= y_a + S \sin\alpha \end{aligned} \quad (D-5)$$

onde, (z_a, y_a) são coordenadas no ponto A .

Neste caso, substituindo (D-4) em (D-1), obtêm-se:

$$G = - \frac{1}{2\pi} I_1 \quad (D-6)$$

onde,

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^h \ln(S^2 + a^2 - 2 a S \cos\theta) dS \quad (D-7)$$

A equação (D-7) pode ser escrita na seguinte forma:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^h \ln\{[S - a(\cos\theta + \text{sen}\theta i)] \times [S - a(\cos\theta - \text{sen}\theta i)]\} dS \quad (D-8)$$

onde 'i' é a unidade imaginária, definida nos números complexos.

(D-8) pode ser escrita como segue:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^h \ln[S - a(\cos\theta + \text{sen}\theta i)] dS + \frac{1}{2} \int_0^h \ln[S - a(\cos\theta - \text{sen}\theta i)] dS$$

Integrando (D-9), obtêm-se a seguinte relação:

$$I_1 = a \cos\theta (\ln a - \ln b) + h(\ln b - 1) + \frac{1}{2} a S \text{sen}\theta i \ln \left[\frac{h - a(\cos\theta - \text{sen}\theta i)}{h - a(\cos\theta + \text{sen}\theta i)} \right] \\ + \frac{1}{2} a S \text{sen}\theta i \ln \left[\frac{\cos\theta + \text{sen}\theta i}{\cos\theta - \text{sen}\theta i} \right]$$

Aplicando-se a formula para a divisão de números complexos nos termos contidos nos argumentos da função logarítmica, e posteriormente aplicando-se em (D-10) a seguinte propriedade para número complexos:

$$\ln T = \log r_1 + i\theta_1 \quad (D-11)$$

Considerando-se que $T = C_1 + C_2i$, r_1 e θ_1 são definidos da seguinte maneira:

$$r_1 = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} \quad (D-12)$$

e

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

Conseqüentemente, obtêm-se para (D-10), a seguinte relação:

$$I_1 = a \cos\theta (\ln a - \ln b) + h(\ln b - 1) + \Psi a \sin\theta \quad (D-13)$$

Substituindo (D-13) em (D-6), obtêm-se

$$G = -\frac{1}{2\pi} [a \cos\theta (\ln a - \ln b) + h(\ln b - 1) + \Psi a \sin\theta] \quad (D-14)$$

Para obter ∂G , derivá-se a equação (D-1) com relação a z , isto é:

$$\partial G = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\partial S} \ln R \, dS \right) \quad (D-15)$$

Trocando o sinal de derivação com o sinal de integração, obtêm-se:

$$\partial G = - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S} \frac{(z \cdot z')}{R^2} \, dS \quad (D-16)$$

Substituindo (D-4) e (D-5) em (D-16), tem-se:

$$\partial G = - \frac{1}{2\pi} \int_0^h \frac{(z - z_a - S \cos \theta)}{(S^2 + a^2 - 2 a S \cos \theta)} \, ds \quad (D-17)$$

Reorganizando (D-17), obtêm-se:

$$\partial G = - \frac{1}{2\pi} \cdot ((z - z_A) I_2 - \cos \alpha I_3) \quad (D-18)$$

onde,

$$I_2 = \int_0^h \frac{1}{(S^2 + a^2 - 2 a S \cos \theta)} \, dS \quad (D-19)$$

e

$$I_3 = \int_0^h \frac{s}{(S^2 + a^2 - 2 a S \cos \theta)} \, dS \quad (D-20)$$

(D-19) pode ser escrita conforme segue:

$$I_2 = \int_0^h \frac{1}{[S-a(\cos\theta+\text{sen}\theta i)][s-a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)]} ds$$

ou

$$I_2 = \frac{1}{2a \text{sen}\theta i} \int_0^h \frac{1}{[S-a(\cos\theta+\text{sen}\theta i)]} ds - \frac{1}{2a \text{sen}\theta i} \int_0^h \frac{1}{[S-a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)]} ds \quad (\text{D-21})$$

Integrando (D-21), obtém-se:

$$I_2 = \frac{1}{2a \text{sen}\theta i} \ln[h-a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)] - \frac{1}{2a \text{sen}\theta i} \ln[-a(\cos\theta+\text{sen}\theta i)]$$

$$- \frac{1}{2a \text{sen}\theta i} \ln[h-a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)] + \frac{1}{2a \text{sen}\theta i} \ln[-a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)] \quad (\text{D-22})$$

Aplicando (D-11) e (D-12) em (D-22), obtém-se

$$I_2 = \frac{\psi}{a \text{sen}\theta} \quad (\text{D-23})$$

De maneira análoga para (D-19), (D-20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$I_3 = \frac{a(\cos\theta+\text{sen}\theta i)}{2a \text{sen}\theta i} \int_0^h \frac{1}{[s-a(\cos\theta+\text{sen}\theta i)]} ds -$$

$$\frac{a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)}{2a \text{sen}\theta i} \int_0^h \frac{1}{[s-a(\cos\theta-\text{sen}\theta i)]} ds \quad (\text{D-24})$$

Resolvendo (D-24), obtêm-se:

$$I_3 = \ln b - \ln a + \frac{a \cos \theta}{2 a \operatorname{sen} \theta i} \ln \left[\frac{h - a(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta i)}{h - a(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta i)} \right] \\ + \frac{a \cos \theta}{2 a \operatorname{sen} \theta i} \ln \left[\frac{a(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta i)}{a(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta i)} \right] \quad (\text{D-25})$$

Aplicando (D-11) e (D-12) em (D-22), obtêm-se:

$$I_3 = \ln b - \ln a + \frac{a \cos \theta}{a \operatorname{sen} \theta} \psi \quad (\text{D-26})$$

Substituindo-se (D-23) e (D-26) em (D-18), resulta a seguinte equação que define G:

$$\delta G = - \frac{1}{2\pi} ((z - z_a) \cdot \frac{\psi}{a \operatorname{sen} \theta} - \cos \alpha \cdot (\ln b - \ln a + \frac{a \cos \theta}{a \operatorname{sen} \theta} \cdot \psi)) \quad (\text{D-27})$$

Para as equações (D-14) e (D-27) é necessário fazer algumas considerações. Inicialmente, em (D-14), de acordo com a notação da figura (D-1), se w, A e B são colineares, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Se caso $\theta = \pi$, (D-14) adquire a seguinte forma:

$$G = - \frac{1}{2\pi} [b(\ln b - 1) - a \cdot (\ln a - 1)] \quad (\text{D-28})$$

E se $\theta = 0$, (D-14) pode ser escrito como se segue:

$$G = - \frac{1}{2\pi} [a(\ln a - 1) - b \cdot (\ln b - 1)] \quad (\text{D-29})$$

Para o caso em que $w = w'$, obtêm-se para (D-14) a seguinte relação:

$$G = -\frac{1}{2\Pi} \left(\ln\left(\frac{h}{2}\right) - 1 \right) \quad (D-30)$$

A equação (D-27), quando $\sin\theta = 0$ ou $\Psi = 0$, torna-se indeterminada. Para este caso, nota-se que $\theta = 0$ ou $\theta = \Pi$; conseqüentemente, $r = a-s$ ou $r = a+s$ respectivamente, que substituindo em (D-16), obtêm-se a seguinte equação:

$$\partial G = -\frac{1}{2\Pi} (z - z_a) \cdot \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] - \cos\alpha \left(\ln b - \ln a + \cos\theta \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \right) \quad (D-31)$$

Também, quando w pertence ao arco AB, nota-se que I_2 e I_3 , definidos pelas equações (D-23) e (D-26), torna-se infinitas. Conforme [3], a interpretação finita pode ser dado no sentido do valor principal de Cauchy, isto é:

$$G = -\frac{1}{2\Pi} (\ln a - \ln b) \cos\alpha, \quad w \in AB \quad (D-32)$$

Para obter ΔG , basta integrar a equação (A-22) ao longo da superfície ∂S da região D, conforme segue:

$$\Delta G = -\frac{1}{2\Pi} \int_{\partial S} \frac{\partial \Psi}{\partial S} dS = -\frac{1}{2\Pi} \Psi \quad (D-33)$$

finalmente, $\partial(\Delta G)$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\partial(\Delta G) = -\frac{1}{2\Pi} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi). \quad (D-34)$$

APÊNDICE E

Cálculo das integrais que define os coeficientes das matrizes A, B, H, E⁻ e E⁺.

Neste apêndice estão apresentadas as expressões que definem os termos das matrizes A, B, H, E⁺ e E⁻. Para a matriz H, cujos coeficientes são definidos pela integral abaixo,

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 \cos\left(i\pi \frac{(y+1)}{2}\right) \cos\left(j\pi \frac{(y+1)}{2}\right) dy$$

obtêm-se:

a) para $i = j \neq 0$

$$H_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (E-1)$$

b) para i e j qualquer, com $i \neq j$,

$$H_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \quad \text{e} \quad (E-2)$$

$$j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$$

c) para $i = 0$ e $j = 0$,

$$H_{ij} = 0 \quad (E-3)$$

Em resumo, a matriz H pode ser escrita como segue:

$$A_{0j} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{E-7})$$

g) $i \neq 0$ e $j = 0$,

Se i é par:

$$A_{i0} = -24.P_e \cdot \left(\frac{1}{i\Pi}\right)^2, \quad i = \dots, n \quad (\text{E-8})$$

e

Se i é impar:

$$A_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{E-9})$$

h) $i \neq j$ com i e $j \neq 0$

Se $(i-j)$ ou $(i+j)$ é par:

$$A_{ij} = -24.P_e \cdot \left(\left(\frac{1}{(i-j)\Pi}\right)^2 + \left(\frac{1}{(i+j)\Pi}\right)^2 \right), \quad i \text{ e } j = 1, \dots, n \quad (\text{E-10})$$

Se $(i-j)$ é impar:

$$A_{ij} = 0, \quad i \text{ e } j = 1, \dots, n \quad (\text{E-11})$$

De modo semelhante, para a matriz B, os coeficientes são definidos pela segunda integral:

$$B_{ij} = \frac{(i\Pi)(j\Pi)}{4} \int_{-1}^1 \text{sen}\left(i\Pi \frac{(y+1)}{2}\right) \text{sen}\left(j\Pi \frac{(y+1)}{2}\right) dy$$

Obtendo-se:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (n+1) \cdot (n+1)$$

Para a matriz A, na qual os coeficientes são definidos pela seguinte integral:

$$A_{ij} = \int_{-1}^1 P_e \bar{U}(y) \cos(i\pi \frac{y+1}{2}) \cos(j\pi \frac{y+1}{2}) dy$$

Onde \bar{U} é definido pela equação (3.4).

Obtêm-se:

d) $i = j \neq 0$,

$$A_{ii} = P_e \cdot (1 - 3(\frac{1}{i\pi})^2), \quad i = j = 1, \dots, n \quad (E-4)$$

e) $i = j = 0$,

$$A_{ij} = 2 \cdot P_e \quad (E-5)$$

f) $i = 0$ e $j \neq 0$

Se j é par:

$$A_{0j} = -24 \cdot P_e (\frac{1}{j\pi})^2, \quad j = 1, \dots, n \quad (E-6)$$

e

Se j é ímpar:

i) $i = j \neq 0$, com $i \neq j$,

$$B_{ii} = (i\pi)^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{E-12})$$

j) $i \neq j$ e $i = j = 0$,

$$B_{ij} = 0, \quad \begin{array}{l} i = 0, j-1, j+1, \dots, n \\ j = 0, i-1, i+1, \dots, n \end{array} \quad (\text{E-12})$$

Em resumo, a matriz B pode ser escrita da seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (i\pi)^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & (i\pi)^2 \end{bmatrix} (n+1) \cdot (n+1)$$

Finalmente, as matrizes E^+ e E^- , nas quais os elementos são definidos como a seguir:

$$E_{jk}^+ = \int_{-1}^1 \lambda_j^+ F_j^+(y) F_k^+(y) dy, \quad j \text{ e } k = 1, \dots, n$$

e

$$E_{jk}^- = \int_{-1}^1 \lambda_j^- F_j^-(y) F_k^-(y) dy, \quad j \text{ e } k = 0, \dots, n$$

onde,

$$F_j^+ = \sum_{i=0}^n C_{ij}^+ \cos(i\pi \frac{y+1}{2}), \quad j = 1, \dots, n$$

e

$$F_j^- = \sum_{i=0}^n C_{ij}^- \cos(i\pi \frac{y+1}{2}), \quad j = 0, \dots, n$$

Desta forma, os coeficientes de E^+ e E^- podem ser escritos da seguinte forma:

$$E_{jk}^+ = \sum_{i=0}^n \sum_{\ell=0}^n \lambda_j^+ C_{ij}^+ C_{ik}^+ H_{i\ell}, \quad \text{com } j \text{ e } k = 1, \dots, n \quad (\text{E-13})$$

e

$$E_{jk}^- = \sum_{i=0}^n \sum_{\ell=0}^n \lambda_j^- C_{ij}^- C_{ik}^- H_{i\ell}, \quad \text{com } k \text{ e } j = 1, \dots, n \quad (\text{E-14})$$

onde,

$$H_{i\ell} = \int_{-1}^1 \cos(i\pi \frac{y+1}{2}) \cos(j\pi \frac{y+1}{2}) dy \quad (\text{E-15})$$

cujas soluções de (D-15) encontra-se apresentado no início do apêndice, nos itens (a), (b) e (c).

APÊNDICE F

Relação entre os grupos adimensionais deste trabalho e os apresentados por [12], para comparação dos resultados.

Este apêndice tem como objetivo mostrar a relação entre os grupos adimensionais apresentados por [12] e os grupos adimensionais utilizados neste trabalho.

O número de Peclet utilizados em ambos trabalhos, são dados pela a mesma relação:

$$P_e = \frac{U_m^* D_h}{\alpha} \quad (F-1)$$

onde,

$$\alpha = \hat{e} \text{ a difusibilidade térmica}$$

No sistema de coordenadas cartesianas, z_B é definido como o eixo axial estabelecido em [12], e z_T como a coordenada axial definida neste trabalho, cujo parâmetro z_B é definido como a seguir:

$$z_B = \left(\frac{4}{P_e}\right) \left(\frac{z_B^*}{D^*}\right) \quad (F-2)$$

mas,

$$D_n^* = 4h^* \quad (F-3)$$

Substituindo-se (F-3) em (F-2), obtém-se:

$$z_B = \left(\frac{1}{P_e}\right) \cdot \left(\frac{z_B^*}{h^*}\right) \quad (\text{F-4})$$

mas,

$$z_T = \frac{z_T^*}{h^*} \quad (\text{F-5})$$

Substituindo (F-5) em (F-4), obtém-se:

$$z_T = 6z_B \quad (\text{F-6})$$

Doravante, o índice B especifica as variáveis dimensionais definidas por |12|, e o índice T especifica as variáveis dimensionais definidas neste trabalho.

De (F-6) define-se que a relação entre o comprimento da superfície aquecida é:

$$l_T = 6l_B \quad (\text{F-7})$$

Para as coordenadas verticais, existe a seguinte relação:

$$y_B = \frac{y_B^*}{2h^*} \quad (\text{F-8})$$

$$y_T = \frac{y_T^*}{h^*} \quad (\text{F-9})$$

Substituindo (F-9) em (F-8), obtêm-se:

$$y_B = \frac{1}{2} y_T \quad (\text{F-10})$$

A temperatura adimensional em [12] é definida conforme segue:

$$H(y_B, z_B) = \frac{T^* - T_0^*}{\frac{\bar{q}^* 2 \ell^* \cdot \Delta T^*}{k_f \Delta T^*}} \quad (\text{F-11})$$

onde,

$$\Delta T^* = T_\infty^* - T_0^*$$

e

$$\bar{q}_B = \frac{\bar{q}^* 2 h^*}{k_f \Delta T^*} \quad (\text{F-12})$$

Consequentemente,

$$H(y_B, z_B) = \frac{T^* - T_0^*}{\bar{q}_B (T_\infty^* - T_0^*)} \quad (\text{F-13})$$

A temperatura adimensionais definida neste trabalho é da seguinte forma:

$$T(y_T, z_T) = \frac{T^* - T_0^*}{T_0^*} \quad (\text{F-14})$$

Multiplicando e dividindo (F-13) por T_0^* , e substituindo (F-14), obtêm-se:

$$H(y_B, z_B) = \frac{T_0^*}{\bar{q}_B (T_\infty^* - T_0^*)} \cdot T(y_T, z_T) \quad (\text{F-15})$$

mas, fluxo de calor médio neste trabalho é definido como segue:

$$\bar{q}_T = \frac{\bar{q}^* h^*}{k_f T_0^*} \quad (\text{F-16})$$

Multiplicando e dividindo (F-16) por T_0^* , substituindo em (F-12), e reorganizando os termos, obtêm-se:

$$T_0^* = \frac{\Delta T}{2} \frac{\bar{q}_B}{\bar{q}_T} \quad (\text{F-17})$$

Substituindo (F-17) em (F-15), obtêm-se finalmente que:

$$T(y_T, z_T) = 2\bar{q}_T H(y_B, z_B). \quad (\text{F-18})$$