

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS  
ESTRUTURAIS NÃO CONSERVATIVOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

ISAIAS CAMILO BORATTI

FLORIANÓPOLIS  
SANTA CATARINA - BRASIL  
AGOSTO - 1983

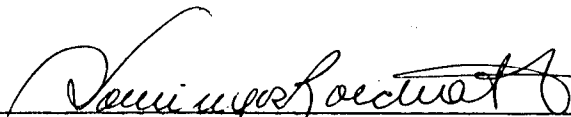
SOLUÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS  
NÃO CONSERVATIVOS

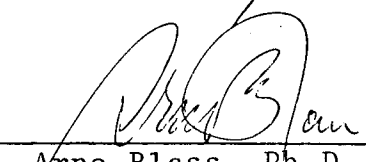
ISAIAS CAMILO BORATTI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE

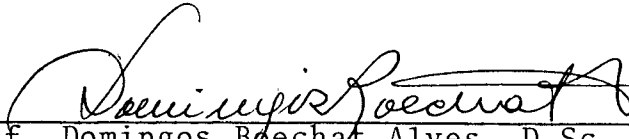
"MESTRE EM ENGENHARIA"


ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL  
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO.

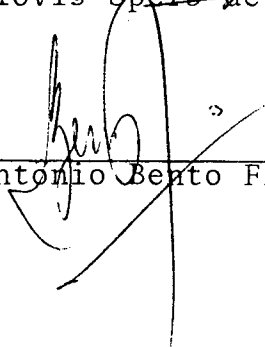
  
Prof. Domingos Boechat Alves, D.Sc.  
ORIENTADOR

  
Prof. Arno Blass, Ph.D.  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Domingos Boechat Alves, D.Sc.  
Presidente

  
Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D.

  
Prof. Antonio Bento Filho, M.Sc.

AOS MEUS PAIS

Mário e Lúcia

À MINHA ESPOSA

Lisete

À MINHA FILHA

Evelise

## S U M Á R I O

	Pág
<b>CAPÍTULO I</b>	
1. O PROBLEMA FÍSICO.....	1
1.1. Origem do Problema.....	1
1.2. Objetivos do Trabalho.....	2
1.3. Visão Global do Trabalho.....	3
1.4. Características Fundamentais do Método de Stodola....	3
1.5. Discretização de uma Estrutura.....	7
1.6. Equações de Movimento para Sistemas Conservativos....	10
1.7. Sistemas não Conservativos.....	14
1.8. Equações de Movimento Transformadas para Sistemas não Conservativos.....	16
 <b>CAPÍTULO II</b>	
2. O PROBLEMA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES.....	19
2.1. O Problema Padrão.....	19
2.2. O Método Geral.....	20
2.3. Teoremas Fundamentais.....	22
2.4. Autovetores à Direita e Autovetores à Esquerda.....	29
 <b>CAPÍTULO III</b>	
3. O MÉTODO QR.....	31
3.1. Introdução.....	31
3.2. Matriz Unitária de Householder.....	32
3.3. A Fatoração QR de uma Matriz.....	37
3.4. O Processo Iterativo do Método QR.....	39

3.5. A Convergência do Método QR.....	42
3.6. Redução à Forma de Hessenberg.....	47
3.7. Matrizes com Autovalores Complexos.....	49
3.8. Aceleração da Convergência.....	54
3.9. Determinação dos Autovetores.....	64

## CAPÍTULO IV

4. O MÉTODO DE STODOLA EM BLOCOS.....	68
4.1. Introdução.....	68
4.2. A Técnica Iterativa.....	70
4.3. O Cálculo de $[A]^{-1}$ .....	78
4.4. Autovalores e Autovetores Complexos.....	80
4.5. Autovetores à Esquerda.....	87
4.6. Fluxograma do Método de Stodola em Blocos.....	89
4.7. A Técnica de Stodola em Blocos para Problemas de Auto valores de Grau p.....	93
4.7.1. Um Problema de Autovalores de Grau p.....	93
4.7.2. A Técnica de Stodola para um Problema Quadrático...	95

## CAPÍTULO V

5. DISCUSSÕES E CONCLUSÕES.....	100
5.1. Aspectos de Armazenamento.....	100
5.2. Aspectos de Convergência.....	103
5.3. A Resolução da Equação $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$ .....	106
5.4. Aplicação Prática.....	108
5.5. Conclusões e Sugestões.....	116
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	119

APÊNDICE I - PROVA DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE STODOLA EM BLOCOS.....	121
APÊNDICE II - MANUAL DO USUÁRIO.....	127

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
FIGURA 1 - Discretização da massa e dos deslocamentos de uma estrutura em $n$ graus de liberdade..	8
FIGURA 2 - Forma de armazenamento para a matriz $[A]$ ..	101
FIGURA 3 - Forma de armazenamento para a matriz $[B]$ ..	101
FIGURA 4 - Asa uniforme engastada à massa da fuselagem	108
FIGURA 5 - Discretização dos deslocamentos de uma asa uniforme em 9 graus de liberdade.....	110
FIGURA 6 - Modos de vibração para uma asa uniforme...	112
FIGURA 7 - Significado da metade da largura de banda.	131

## LISTA DE TABELAS

	Pág.
TABELA 1 - Comparação entre o método QR normal e o método QR com aceleração da convergência.....	64
TABELA 2 - Comparação entre o método de Jacobi e o método QR.....	107
TABELA 3 - Valores de $\lambda$ para uma asa uniforme.....	110
TABELA 4 - Modos de vibração para uma asa uniforme.....	111
TABELA 5 - Valores de $\lambda$ para uma estrutura com amortecimento.....	114
TABELA 6 - Tempos de computação em segundos para um sistema do tipo $[A]\{X\} = \lambda [B]\{X\}$ de ordem 5.....	117
TABELA 7 - Tempos de computação em segundos para um sistema do tipo $[A]\{X\} = \lambda [B]\{X\}$ de ordem 32.....	117



## R E S U M O

A solução de grande parte dos problemas de análise estrutural dinâmica, depende da solução de um problema de autovalores e autovetores definido por um sistema algébrico do tipo  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$ .

É apresentado aqui, juntamente com uma rápida formulação de um problema de análise estrutural dinâmica, um método iterativo para a resolução da equação  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$ . Este método tem como características principais, o uso simultâneo de um conjunto de vetores iteração e a aplicação de uma transformação do espaço vetorial original, de forma a obter um problema equivalente num espaço reduzido.

A principal vantagem deste método é a redução do trabalho computacional, tornando-o especialmente aplicável à grandes sistemas algébricos.

Os autovalores e autovetores complexos, que podem surgir durante o processo iterativo, são tratados de forma que se continue trabalhando com aritmética real, sem que seja feito qualquer aumento na ordem do sistema.

São considerados também, problemas de graus superiores e como o método necessita da solução de um sistema do tipo  $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$ , é apresentada uma eficiente técnica para a resolução desta equação.

## A B S T R A C T

The solution to most of the problems related to dynamic structural analysis depends on the solution to the problem referring to eigenvalues and eigenvectors defined by an algebraic system of the kind  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$ .

An iterative method to the solution of this equation is presented here as well as a brief formulation of a problem about dynamic structural analysis. The method is characterized mainly by the simultaneous use of a set of iteration vectors and by the application of a transformation of the original vectorial space; thus, an equivalent problem in a reduced space is obtained.

The most important advantage of that method is to reduce the computational work being, therefore, especially useful in large algebraic systems.

The complex eigenvalues and eigenvectors which can come out during the iterative process are treated in such a way as to keep one working with real arithmetics without any increase in the system order being required.

Problems concerned with higher degrees are also considered here, and as the method requires a solution to a system of the kind  $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$ , an effective technique is put forward in the present work.

# C A P Í T U L O I

## 1. O PROBLEMA FÍSICO

### 1.1. Origem do Problema

A solução de grande parte dos problemas de análise estrutural, depende da solução de um sistema de  $n$  equações que pode ser escrito como:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (1)$$

onde  $[A]$  e  $[B]$  são matrizes quadradas de ordem  $n$ ,  $\{X\}$  é um vetor de ordem  $n$  e  $\lambda$  é um escalar. A equação (1) representa um clássico problema de autovalores e autovetores. Considerando  $[B]$  não singular, a equação (1) pode ser colocada como:

$$[C]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (2)$$

onde  $[C] = [B]^{-1}[A]$ .

Vários são os métodos existentes para a solução de um problema de autovalores e autovetores, dentre os quais pode-se destacar: o método geral, o método das rotações de Jacobi, o método de Lanczos, o método LR, o método QR, o método de

Stodola-Vianello, etc. A escolha deste ou daquele método depende muito das características do problema, isto é, das características da matriz envolvida, pois muitos métodos tem sua aplicação restrita a determinados tipos de matrizes.

A implementação de um determinado método em computador, exige que se faça uma análise de sua eficiência computacional. Esta eficiência se constitui em característica fundamental para a escolha do método e pode ser medida pelo tempo de computação exigido, pela memória requerida e pela precisão da solução.

O grande problema apresentado pela maioria dos métodos de solução de um problema de autovalores e autovetores, é o alto esforço computacional exigido, quando se trabalha com grandes sistemas algébricos.

## 1.2. Objetivos do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é apresentar e discutir um método para a solução da equação (1), que apresente uma boa eficiência computacional, quando aplicado a grandes sistemas algébricos. Este método é denominado método de Stodola em blocos. Serão discutidas também, algumas características importantes, que devem ser levadas em consideração, quando da implementação do método em um computador.

### 1.3. Visão Global do Trabalho

No capítulo inicial, é apresentada uma visão geral do problema, juntamente com uma rápida formulação física de um problema de autovalores e autovetores.

O capítulo II apresenta os conceitos e teoremas mais importantes que envolvem um problema de autovalores e autovetores. Estas informações apresentam influência direta no entendimento do método de Stodola em blocos.

Como o método de Stodola exige a solução de um problema do tipo colocado pela equação (2), no capítulo III é apresentado um eficiente método para a solução desta equação.

O método de Stodola em blocos é apresentado e discutido em detalhes no capítulo IV.

O capítulo V apresenta uma aplicação do método de Stodola, discute os problemas referentes a implementação do método em computador e apresenta as conclusões do trabalho.

### 1.4. Características Fundamentais do Método de Stodola

Vários métodos de solução do problema colocado pela equação (1) tem aparecido na literatura. Entre estes métodos, o que apresenta algumas características similares ao método de Stodola, é o método de Stodola-Vianello, também conhecido como método das potências.

O método de Stodola-Vianello se baseia em um processo iterativo para determinar uma primeira solução, e a partir desta solução, usando condições de ortogonalidade<sup>1</sup>, determina cada uma das demais soluções através de novos processos iterativos. Este método pode ser aplicado a um problema do tipo colocado pela equação (1), desde que se transforme esta equação para a forma definida pela equação (2). Devido a necessidade das condições de ortogonalidade, o método exige também que as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  sejam simétricas. Hurty e Rubinstein<sup>2</sup> discutiram as características deste método e aplicaram-no a problemas de vibrações livres com amortecimento.

Considerando os métodos menos populares, Moler e Stewart<sup>3</sup> apresentaram um algoritmo que pode ser aplicado diretamente à equação (1), com as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  não simétricas. O algoritmo é baseado na aplicação de transformações à equação (1), de forma que se obtenha matrizes mais simples, onde os autovalores podem ser facilmente determinados.

Jane Cullum<sup>4</sup> apresentou um algoritmo que consiste numa generalização do método de Lanczos, aplicando-o a grandes sistemas algébricos. O algoritmo determina os maiores e menores autovalores da equação (2), com  $[C]$  devendo ser simétrica.

---

<sup>1</sup> Veja o conceito de ortogonalidade dos autovetores no capítulo II.

<sup>2</sup> HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. *Dynamics of structures*. p. 313-37.

<sup>3</sup> MOLER, C.B. & STEWART, G.W. *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problem*. p. 241-56.

<sup>4</sup> CULLUM, J. *The simultaneous computation of a few algebraically largest and smallest eigenvalue of a large, sparse, symmetric matrix*. 19 p.

O método QR, que será apresentado no capítulo III, é um dos métodos mais eficientes para a solução do problema colocado pela equação (2), com  $[C]$  não simétrica, entretanto como nos métodos descritos anteriormente, apresenta um alto trabalho computacional quando aplicado a grandes sistemas algébricos.

O método de Stodola em blocos, ao invés de usar um processo iterativo para cada vetor iteração, como no método de Stodola-Vianello, faz com que um conjunto de vetores linearmente independentes, convirja simultaneamente aos verdadeiros autovetores através de um único processo iterativo. Este método, também denominado iteração em subespaço, usa um processo de redução das coordenadas do problema original, que o torna aplicável a problemas oriundos de sistemas estruturais complexos, com um grande número de graus de liberdade, sem que se trabalhe com um problema de autovalores e autovetores de igual ordem.

A iteração simultânea e a redução das coordenadas proporcionam uma sensível redução no trabalho computacional, quando da sua aplicação a grandes sistemas algébricos.

O processo de redução das coordenadas faz com que apenas um subconjunto de soluções seja determinado. Isto tem sua aplicação, pois em muitos problemas físicos, é suficiente a determinação das soluções que exercem influência fundamental no sistema.

Bathe e Wilson<sup>5</sup> analisaram a precisão do mé-

---

<sup>5</sup> BATHE, K.J. & WILSON, E.L. *large eigenvalue problems in dynamics analysis*. p. 1471-85.

todo de iteração simultânea com redução de coordenadas, comparando-o com outros processos de redução de coordenadas, tais como: o método de Rayleigh-Ritz e o método da condensação estática. Apresentaram também um estudo do número de operações requeridas pelo método iterativo sem redução de coordenadas e pelo método de iteração em subespaço, concluindo pela melhor eficiência da iteração em subespaço no caso de grandes sistemas algébricos.

A técnica de Stodola em blocos, objetivo principal deste trabalho, é aplicável diretamente ao problema colocado pela equação (1) com a matriz  $[A]$  podendo ser não simétrica e  $[B]$  devendo ser simétrica. Em muitos problemas físicos, as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são simétricas, entretanto, em alguns casos, como aqueles que envolvem forças não conservativas, rigidez de compressão diferente da rigidez de tração, apresentam a matriz  $[A]$  não simétrica.

Um possível problema da técnica de Stodola, surge quando do aparecimento de autovalores e autovetores complexos, que em princípio, exigem um maior esforço computacional. Dong<sup>6</sup>, na análise da técnica de Stodola, sugere um processo de combinação linear das partes reais e imaginárias das coordenadas dos autovetores, permitindo que se trabalhe exclusivamente com aritmética real, sem que haja qualquer aumento na ordem do sistema.

---

<sup>6</sup> DONG, S.B. *A Block-Stodola eigensolution technique for large algebraic systems with non-symmetrical matrices.* p. 155-61.



### 1.5. Discretização de uma Estrutura

Nos próximos itens deste capítulo, será apresentada uma rápida formulação de um problema físico, tendo como objetivo, mostrar uma das formas pela qual se obtém um problema de autovalores e autovetores.

Um dos objetivos da análise estrutural é a determinação dos esforços e deslocamentos que atuam num determinado sistema estrutural. Em sistemas sujeitos a cargas dinâmicas, a análise estrutural se preocupa também, com a determinação das frequências naturais e modos de vibração da estrutura. A determinação destas quantidades, requer sempre a execução dos seguintes passos:

- a) Escolha do modelo matemático que melhor represente o sistema físico.
- b) Determinação das equações de movimento do modelo matemático.
- c) Determinação das constantes físicas que ocorrem no modelo (Ex.: comprimentos, massas, amortecimentos, rigidez, etc.).
- d) Solução das equações matemáticas.

A análise de um modelo matemático pode ser feita de duas formas:

- a) Análise discreta
- b) Análise contínua.

A análise discreta consiste na discretização da estrutura, considerando-a com massas localizadas em vez de massas contínuas, onde as equações de movimento podem ser expressas através de quantidades  $q_1, q_2, \dots, q_n$  que serão determinadas por meio de equações diferenciais ordinárias. Em outras palavras, pode-se dizer que a discretização consiste em considerar a estrutura dividida em partes ou elementos, não infinitesimais, onde as solicitações e deformações estão discretizadas nos nós de cada elemento. Com a discretização, o sistema terá um número finito de graus de liberdade, e para estruturas que apresentam pequenos deslocamentos, as equações de movimento serão lineares e terão coeficientes constantes. A Figura 1 apresenta um exemplo de discretização.

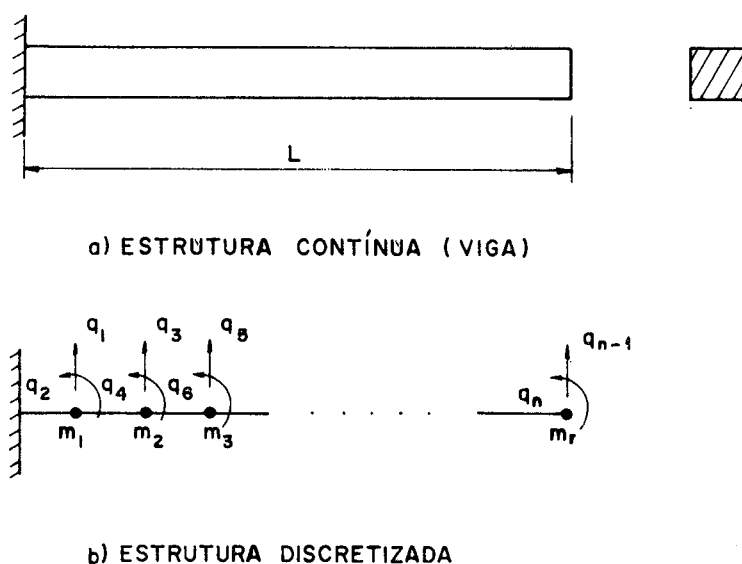


Figura 1 - Discretização da massa e dos deslocamentos de uma estrutura em  $n$  graus de liberdade.

As quantidades  $q_1, q_2, \dots, q_n$  da Figura 1, representam os possíveis deslocamentos da estrutura e são chamadas de coordenadas generalizadas. Estas coordenadas devem descrever da melhor forma possível os deslocamentos da estrutura. O não cumprimento desta observação na discretização, levará a uma solução falsa.

Na análise contínua de um sistema estrutural, as equações de movimento são expressas em termos de uma ou mais equações diferenciais parciais. Se o sistema apresenta pequenos deslocamentos, estas equações serão lineares, mas seus coeficientes não serão necessariamente constantes.

Na prática, a decisão de tratar um determinado sistema físico como discreto ou contínuo, depende muito do tipo de sistema. A grande vantagem da discretização é a simplificação do sistema e conseqüentemente o trabalho matemático será menor, ao ponto de ser mais conveniente a determinação da solução através da forma discreta, em detrimento da obtenção de uma solução exata. Deve-se salientar, que a obtenção de uma boa solução através da análise discreta, depende fundamentalmente de uma boa discretização. Se a discretização é feita de forma coerente com o sistema real, pode-se obter praticamente a mesma solução da análise contínua. Deve-se salientar ainda, que existem sistemas mais complexos, onde é praticamente impossível obter uma solução através da análise contínua.

### 1.6. Equações de Movimento para Sistemas Conservativos

Os movimentos de uma estrutura discretizada, podem ser obtidos através do princípio dos trabalhos virtuais e podem ser descritos através de um conjunto de equações chamadas de equações de Lagrange<sup>7</sup>. Estas equações, para sistemas conservativos podem ser escritas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = F_r \quad (3)$$

onde:  $r = 1, 2, \dots, n$

$n$  - número de graus de liberdade do sistema

$T$  - energia cinética do sistema (supondo forma quadrática)

$U$  - energia potencial do sistema (supondo forma quadrática)

$q_r$  -  $r$ -ésima coordenada generalizada

$F_r$  -  $r$ -ésima força generalizada externa.

O ponto indica a derivação em relação ao tempo e portanto, se  $q_r$  é um deslocamento,  $\dot{q}_r$  é uma velocidade. Para uma estrutura com  $n$  graus de liberdade, a expressão da energia cinética pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} (m_{11} \dot{q}_1^2 + m_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + m_{nn} \dot{q}_n^2 + 2m_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2m_{n-1n} \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n) \quad (4)$$

<sup>7</sup> Veja HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. Op. Cit. nota 2. p.90-102.

onde  $m_{ij}$  são os elementos de uma matriz que contém as massas discretizadas da estrutura.

Em forma matricial, a equação (4) pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^t [M] \{\dot{q}\} \quad (5)$$

onde  $[M] = [m_{ij}]$

$$\{\dot{q}\}^t = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$$

A expressão da energia potencial pode ser escrita como:

$$U = \frac{1}{2} (k_{11}q_1^2 + k_{22}q_2^2 + \dots + k_{nn}q_n^2 + 2k_{12}q_1q_2 + \dots + 2k_{n-1n}q_{n-1}q_n) \quad (6)$$

onde  $k_{ij}$  são os elementos da matriz de rigidez. Em forma matricial vem:

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} \quad (7)$$

Substituindo as expressões de U e T nas equações de Lagrange vem:

$$\begin{aligned}
m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \dots + m_{1n}\ddot{q}_n + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \dots + k_{1n}q_n &= f_1 \\
m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \dots + m_{2n}\ddot{q}_n + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + \dots + k_{2n}q_n &= f_2 \\
\vdots & \\
m_{n1}\ddot{q}_1 + m_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + m_{nn}\ddot{q}_n + k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \dots + k_{nn}q_n &= f_n
\end{aligned} \tag{8}$$

que em forma compactada pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \tag{9}$$

A solução geral da equação (9) é constituída pela soma de duas soluções, uma chamada solução particular e outra chamada solução complementar. A solução complementar é determinada pela solução da parte homogênea da equação (9), ou seja:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \tag{10}$$

No estudo de vibrações livres tem-se  $\{F\} = \{0\}$ , e conseqüentemente a equação (9) será idêntica à equação (10).

Considerando que o sistema apresenta oscilações harmônicas, a solução da equação (10) será do tipo:

$$\{q\} = \{a\}e^{i\omega t} \tag{11}$$

onde  $\{a\}$  é um vetor que contém as amplitudes dos deslocamentos  $\{q\}$ ,  $\omega$  é a frequência circular de oscilação e  $t$  é o tempo.

Colocando  $\{X\} = \{q\}$  e considerando a equação (11) tem-se

$$\{\ddot{q}\} = -\omega^2\{X\} \quad (12)$$

Substituindo-se a equação (12) na equação (10) vem

$$[M]\{X\} = \lambda[K]\{X\} \quad (13)$$

onde  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ .

Algebricamente, a equação (13) se constitui em um problema de autovalores e autovetores e tem como solução um conjunto de  $n$  valores para  $\lambda$ , ou seja

$$\lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (14)$$

e a cada  $\lambda_i$  corresponderá, também como solução, um vetor  $\{X\}_i$ . Fisicamente, cada  $\omega_i$  é denominado de frequência natural de vibração e cada  $\{X\}_i$  é denominado de modo natural de vibração. O modo natural de vibração especifica a forma de vibração da estrutura sem carregamento externo.

### 1.7. Sistemas não Conservativos

As equações apresentadas no ítem anterior, se aplicam a sistemas ideais, onde a energia total é constante no tempo. Sistemas deste tipo não ocorrem na prática, pois qualquer sistema físico em seu estado dinâmico, sempre apresenta uma dissipação de energia devido a algum tipo de amortecimento. Saliemta-se no entanto, que em alguns sistemas esta dissipação é tão pequena, quando comparada com as demais características do sistema, que pode ser negligenciada. A dissipação faz com que haja uma diminuição na amplitude do movimento vibratório livre com o passar do tempo.

A função que define a energia dissipada pode ser escrita como:

$$V = \frac{1}{2} (c_{11}\dot{q}_1^2 + c_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + c_{nn}\dot{q}_n^2 + 2c_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + 2c_{n-1n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n)$$
(15)

que em forma matricial pode ser escrita como:

$$V = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^t [C] \{\dot{q}\}$$
(16)

A matriz  $[C]$  é denominada matriz de amortecimento.

As equações de Lagrange para sistemas não conservativos podem ser escritas como:



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r} = F_r \quad (17)$$

Após a substituição das expressões de T, U e V tem-se:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (18)$$

Em alguns sistemas físicos, faz-se a matriz de amortecimento proporcional à matriz massa ou à matriz de rigidez ou ainda à uma combinação linear de ambas. Para amortecimento proporcional à matriz massa tem-se:

$$[C] = 2\alpha[M] \quad (19)$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Para proporcionalidade em relação à matriz de rigidez tem-se:

$$[C] = 2\beta[K] \quad (20)$$

onde  $\beta$  é uma constante. Nestes casos, as equações de movimento ficam:

$$[M]\{\ddot{q}\} + 2\alpha[M]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (21)$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + 2\beta[K]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (22)$$

### 1.8. Equações de Movimento Transformadas para Sistemas não Conservativos

Seja a equação que define o movimento de um sistema com amortecimento:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (23)$$

Seja também a equação:

$$[M]\{\dot{q}\} - [M]\{\dot{q}\} = \{0\} \quad (24)$$

Combinando as equações (23) e (24) tem-se:

$$\left[ \begin{array}{c|c} [0] & [M] \\ \hline [M] & [C] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\ddot{q}\} \\ \{\dot{q}\} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c|c} -[M] & [0] \\ \hline [0] & [K] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\} \\ \{F\} \end{array} \right\} \quad (25)$$

Colocando

$$[A] = \left[ \begin{array}{c|c} [0] & [M] \\ \hline [M] & [C] \end{array} \right]$$

$$[B] = \left[ \begin{array}{c|c} -[M] & [0] \\ \hline [0] & [K] \end{array} \right]$$

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{q}\} \\ \hline \{q\} \end{array} \right\}$$

e considerando somente a parte homogênea da equação (25) vem:

$$[A]\{\dot{X}\} + [B]\{X\} = \{0\} \quad (26)$$

A solução desta equação é da forma  $e^{\omega t}$  e portanto,

$$\{\dot{X}\} = \omega\{X\} \quad (27)$$

Substituindo-se a equação (27) na equação (26) vem:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (28)$$

onde  $\lambda = -\frac{1}{\omega}$ .

A equação (28) consiste em um problema de autovalores e autovetores.

Pode ser demonstrado<sup>8</sup> que quando uma estrutura vibra com amortecimento proporcional, todos os pontos da estrutura vibram com a mesma frequência e com o mesmo ângulo de fase. Já quando o amortecimento não é proporcional, cada ponto da estrutura vibra com a mesma frequência, mas com diferentes ângulos de fase. Desta forma, para amortecimento não proporcional,

---

<sup>8</sup> Veja HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. Op. Cit. nota 2. p. 314-8.

cada componente do vetor que especifica o modo de vibração, é distinguida não somente pela amplitude, mas também pelo ângulo de fase. Isto explica porque uma estrutura que tem  $n$  graus de liberdade, resulta em um sistema algébrico com  $2n$  equações.

As matrizes  $[M]$ ,  $[K]$  e  $[C]$  são chamadas também de matrizes dos coeficientes de influência e normalmente são simétricas, com exceção de alguns casos onde  $[K]$  ou  $[C]$  podem ser não simétricas. Como exemplo de não simetria pode-se colocar o caso de sistemas dinâmicos cuja solução é obtida através de equações diferenciais não simétricas e, em geral, não lineares. Muitas vezes essas equações podem ser linearizadas dentro de certos limites. Para verificar se esta linearização é aceitável e, se o for, para uma solução mais fácil do sistema linearizado, é necessária a determinação dos autovalores e autovetores.

Pode-se concluir pelo exposto até aqui, que a resolução de um problema estrutural dinâmico, depende da solução de um problema de autovalores e autovetores, onde os autovalores correspondem às frequências naturais de vibração e os autovetores aos modos naturais de vibração.

## C A P Í T U L O   I I

### 2. O PROBLEMA DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

#### 2.1. O Problema Padrão

Um problema padrão de autovalores e autovetores é definido pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (29)$$

que também pode ser escrito como:

$$[C]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (30)$$

A solução completa deste problema, consiste na determinação dos  $n$  autovalores, ou seja

$$\lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (31)$$

e dos  $n$  autovetores, ou seja

$$X^* = (\{X\}_1, \{X\}_2, \dots, \{X\}_n) \quad (32)$$

Pela equação (29) pode ser visto que a cada distinto autovalor  $\lambda_i$ , corresponderá pelo menos um autovetor  $\{X\}_i$ .

Conforme já foi colocado no Capítulo I, em engenharia, um problema de autovalores e autovetores se apresenta frequentemente sob a forma:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (33)$$

A equação (33) pode ser resolvida diretamente, através de um método apropriado, ou pode ser transformada para a forma padrão, para posteriormente ser resolvida. Esta transformação consiste em se reduzir uma das matrizes da equação (33), à matriz identidade.

## 2.2. O Método Geral

Conforme já foi dito no Capítulo I, vários são os métodos existentes para a solução de um problema de autovalores e autovetores. Cada um destes métodos apresenta sempre suas vantagens e desvantagens. Muitas vezes, a maior ou menor eficiência de um determinado método, depende das características da matriz envolvida. As principais características que podem e-

xerker influência sobre a eficiência de um método são:

- a) Simetria ou não da matriz.
- b) Quantidade e disposição dos elementos nulos dentro da matriz.
- c) Ordem da matriz.
- d) Número de autovalores e autovetores a ser de terminado.
- e) Relação entre os módulos dos autovalores.

Dentre os métodos existentes, o que pode ser aplicado a qualquer tipo de matriz, sem restrições, é o método geral, cuja principal desvantagem é o alto trabalho computacional exigido, quando comparado com outros métodos. Este método inicia escrevendo-se a equação (30) na forma:

$$([C] - \lambda[I])\{X\} = \{0\} \quad (34)$$

Colocando

$$[F(\lambda)] = [C] - \lambda[I] \quad (35)$$

vem

$$[F(\lambda)]\{X\} = \{0\} \quad (36)$$

A matriz  $[F(\lambda)]$  é denominada matriz característica. Os autovalo-

res são determinados a partir da solução de uma equação polinomial de grau  $n$ , denominada equação característica, que é definida por:

$$f(\lambda) = \det[F(\lambda)] \quad (37)$$

Após a determinação dos autovalores, para cada autovalor distinto, são determinados os autovetores correspondentes, através da solução do seguinte sistema linear homogêneo:

$$[F(\lambda_i)]\{X\}_i = \{0\} \quad (38)$$

### 2.3. Teoremas Fundamentais

São apresentados aqui, alguns conceitos e teoremas importantes que devem ser levados em consideração, quando da análise de um problema de autovalores e autovetores.

Teorema 1: Se  $\{X\}$  é um autovetor de uma matriz  $[C]$ , então qualquer outro vetor que seja combinação linear de  $\{X\}$ , também será um autovetor<sup>9</sup>.

Com este teorema, conclui-se que a determinação dos autovetores de uma matriz, consiste em encontrar-se vetores linearmente independentes, que junto com seus correspondentes autovalores, satis

---

<sup>9</sup> Veja ALVES, D.B. *Algebra linear e matrizes*. p. 138.



façam a equação (30).

Teorema 2: Se os autovalores de uma matriz  $[C]$  arbitrária, são todos distintos, então o conjunto dos autovetores correspondentes é linearmente independente<sup>10</sup>.

Teorema 3: Se  $[C]$  é uma matriz simétrica, então os autovetores correspondentes a distintos autovalores, são ortogonais em relação a  $[C]$ <sup>11</sup>.

Teorema 4: Se  $[C]$  é uma matriz simétrica, positiva definida, com autovalores distintos, então:

$$[M]^t[C][M] = [I] \quad (39)$$

onde  $[M]$  é uma matriz onde cada coluna é um autovetor de  $[C]$ , ou seja:

$$[M] = [ \{X\}_1 \{X\}_2 \dots \{X\}_n ] \quad (40)$$

Prova: Seja  $\{X\}_i$  um autovetor de  $[C]$ , correspondente ao autovalor  $\lambda_i$ . Logo pode-se escrever:

$$[C]\{X\}_i = \lambda_i\{X\}_i \quad (41)$$

<sup>10</sup> Veja RALSTON, A. *A first course in numerical analysis*. p. 470.

<sup>11</sup> Veja WILKINSON, J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. p. 4.

Seja  $\{X\}_j$  um autovetor de  $[C]$ , correspondente ao autovalor  $\lambda_j$  ( $i \neq j$ ). Assim,

$$[C]\{X\}_j = \lambda_j \{X\}_j \quad (42)$$

Multiplicando a equação (41) por  $\{X\}_j^t$  e a equação (42) por  $\{X\}_i^t$  vem:

$$\frac{1}{\lambda_i} \{X\}_j^t [C] \{X\}_i = \{X\}_j^t \{X\}_i \quad (43)$$

$$\frac{1}{\lambda_j} \{X\}_i^t [C] \{X\}_j = \{X\}_i^t \{X\}_j \quad (44)$$

Transpondo a equação (44) e subtraindo da equação (43) vem:

$$\left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j}\right) (\{X\}_j^t [C] \{X\}_i) = 0 \quad (45)$$

como  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , então

$$\{X\}_j^t [C] \{X\}_i = 0 \quad (46)$$

Por outro lado, tem-se:

$$\{X\}_i^t [C] \{X\}_i = b \quad (47)$$

onde  $b$  é um escalar. Os autovetores de  $[C]$ , podem ser ajustados, de forma que se tenha  $b = 1$ . Seja a equação (41) multiplicada por  $\{X\}_i^t$ :

$$\{X\}_i^t [C] \{X\}_i = \lambda_i \{X\}_i^t \{X\}_i \quad (48)$$

Dividindo a equação (48) por  $\lambda_i \{X\}_i^t \{X\}_i$  tem-se:

$$\frac{1}{\lambda_i \{X\}_i^t \{X\}_i} \{X\}_i^t [C] \{X\}_i = 1 \quad (49)$$

Como  $[C]$  é positiva definida então  $\lambda_i > 0$ . Logo a equação (49) pode ser escrita como:

$$\frac{\{X\}_i^t}{\sqrt{\lambda_i \{X\}_i^t \{X\}_i}} [C] \frac{\{X\}_i}{\sqrt{\lambda_i \{X\}_i^t \{X\}_i}} = 1 \quad (50)$$

Colocando uma redefinição de  $\{X\}_i$ , da forma:

$$\{X\}_i = \frac{\{X\}_i}{\sqrt{\lambda_i \{X\}_i^t \{X\}_i}} \quad (51)$$

vem

$$\{X\}_i^t [C] \{X\}_i = 1 \quad (52)$$

Considerando todos os autovetores dispostos como colunas de uma matriz  $[M]$  e considerando as equações (46) e (52), pode-se escrever<sup>12</sup> :

$$[M]^t[C][M] = [I] \quad (53)$$

Teorema 5: Se  $[C]$  é uma matriz real e simétrica, então todos os seus autovalores serão reais<sup>13</sup> .

Teorema 6: Se  $\lambda$  é um autovalor complexo de uma matriz  $[C]$ , e  $\{X\}$  o seu correspondente autovetor, então os conjugados de  $\lambda$  e  $\{X\}$  também serão respectivamente um autovalor e um autovetor.

Prova: Seja  $\lambda = \zeta + \mu i$  um autovalor complexo de  $[C]$  e seja  $\bar{\lambda} = \zeta - \mu i$  o seu conjugado. Seja

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{array} \right\} = \{\xi\} + i\{\eta\} \quad (54)$$

o autovetor complexo correspondente a  $\lambda$  e seja

<sup>12</sup> A equação (53) também é válida para  $[C]$  negativa definida, apenas que neste caso,  $[M]$  conterá elementos complexos.

<sup>13</sup> Veja ALVES, D.B. *Métodos numéricos*. p. 133.

$$\{\bar{X}\} = \{\xi\} - i\{\eta\} \quad (55)$$

o seu conjugado. Pelo problema padrão de autovalores e autovetores, pode-se escrever:

$$[C](\{\xi\}+i\{\eta\}) = (\zeta+\mu i)(\{\xi\}+i\{\eta\}) \quad (56)$$

Tomando-se isoladamente a parte real e a parte imaginária da equação (56) vem:

$$[C]\{\xi\} = \zeta\{\xi\} - \mu\{\eta\} \quad (57)$$

$$[C]\{\eta\} = \zeta\{\eta\} + \mu\{\xi\} \quad (58)$$

Se  $\bar{X}$  e  $\bar{\lambda}$  são respectivamente um autovetor e um autovalor, então

$$[C](\{\xi\}-i\{\eta\}) = (\zeta-\mu i)(\{\xi\}-i\{\eta\}) \quad (59)$$

que tomando-se isoladamente a parte real e a parte imaginária, fornece:

$$[C]\{\xi\} = \zeta\{\xi\} - \mu\{\eta\} \quad (60)$$

$$[C]\{\eta\} = \zeta\{\eta\} + \mu\{\xi\} \quad (61)$$

As equações (57) e (58) são idênticas as equações (60) e (61) respectivamente, o que permite concluir que  $\bar{\lambda}$  é um autovalor e  $\{\bar{X}\}$  o seu correspondente autovetor.

Teorema 7: Se duas matrizes são similares, então elas tem os mesmos autovalores<sup>14</sup>.

Duas matrizes,  $[C]$  e  $[C]^*$  são ditas similares, se existir uma matriz  $[P]$ , não singular, tal que:

$$[C]^* = [P]^{-1}[C][P] \quad (62)$$

Pode ser verificado também, que se  $\{X\}$  é o autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda$  da matriz  $[C]$ , então

$$\{Y\} = [P]^{-1}\{X\} \quad (63)$$

será o autovetor correspondente a  $\lambda$  da matriz  $[C]^*$ .

Teorema 8: Se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz  $[C]$ , então  $\lambda^P$  é um autovalor<sup>15</sup> de  $[C]^P$ .

<sup>14</sup> Veja ATKINSON, K.E. *An introduction to numerical analysis*. p. 404.

<sup>15</sup> Veja RALSTON, A. *Op. Cit.* nota 10. p. 465.

Teorema 9: Se  $[M]$  é uma matriz cujas colunas são formadas por autovetores correspondentes a distintos autovalores da equação  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$ , com  $[A]$  e  $[B]$  simétricas e  $[B]$  positiva definida, então  $[M]$  tem as seguintes propriedades:

$$[M]^t[B][M] = [I] \quad (64)$$

$$[M]^t[A][M] = [\text{dia}(\lambda_i)] \quad (65)$$

#### 2.4. Autovetores à Direita e Autovetores à Esquerda

Para matrizes não simétricas, um problema padrão de autovalores e autovetores pode ser colocado de duas formas:

$$[C]\{X\} = \lambda\{X\} \quad (66)$$

$$\{Y\}^t[C] = \lambda\{Y\}^t \quad (67)$$

A solução  $\{X\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^t$  é denominada de autovetor à direita da matriz  $[C]$ , e a solução  $\{Y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^t$  é denominada de autovetor à esquerda da matriz  $[C]$ .

Transpondo a equação (67) vem:

$$[C]^t\{Y\} = \lambda\{Y\} \quad (68)$$

Comparando-se as equações (66) e (68), pode-se verificar que as matrizes  $[C]$  e  $[C]^t$  tem os mesmos autovalores e que os autovetores à esquerda de  $[C]$ , são os autovetores à direita de  $[C]^t$ . A equação (68) é chamada de equação adjunta da equação (66).

Teorema 10: Se  $\{X\}_i$  e  $\{Y\}_j$  são respectivamente um autovetor à direita e um autovetor à esquerda, correspondentes a distintos autovalores, então:

$$\{Y\}_j^t \{X\}_i = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (69)$$

Prova: Seja  $\{X\}_i$  um autovetor à direita de  $[C]$ , correspondente ao autovalor  $\lambda_i$ . Seja  $\{Y\}_j$  um autovetor à esquerda de  $[C]$ , correspondente a  $\lambda_j$ . Desta forma, pode-se escrever:

$$[C]\{X\}_i = \lambda_i \{X\}_i \quad (70)$$

$$\{Y\}_j^t [C] = \lambda_j \{Y\}_j^t \quad (71)$$

Multiplicando a equação (70) por  $\{Y\}_j^t$  e a equação (71) por  $\{X\}_i$  e subtraindo uma da outra vem:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \{Y\}_j^t \{X\}_i = 0 \quad (72)$$

Como  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , então

$$\{Y\}_j^t \{X\}_i = 0 \quad (73)$$



## C A P Í T U L O   I I I

### 3. O MÉTODO QR

#### 3.1. Introdução

Muitos métodos de determinação de autovalores e autovetores, tem como base a aplicação de transformações à matriz  $[C]$  do problema padrão, de forma que esta seja reduzida a uma forma mais simples, onde a determinação dos autovalores é quase que direta.

O método QR, a ser descrito neste capítulo, usa também esta técnica. Através da aplicação de sucessivas transformações unitárias<sup>16</sup> à matriz  $[C]$ , o método faz com que esta matriz seja reduzida a uma matriz triangular superior ou a uma matriz quase triangular superior. Este processo pode ser representado por:

$$[S] = [\bar{Q}]^t [C] [Q] \quad (74)$$

onde  $[Q]$  é a matriz representativa das várias transformações e  $[S]$  é a matriz na forma triangular superior ou quase triangular superior. A barra indica conjugação complexa.

---

<sup>16</sup> Veja ALVES, D.B. Op. Cit. nota 9. p. 182.

### 3.2. Matriz Unitária de Householder

Este ítem tem como objetivo a colocação de alguns conceitos importantes, que serão necessários no desenvolvimento do método QR.

Seja  $\{W\}$  um vetor pertencente ao espaço vetorial  $C^n$ , com

$$\|\{W\}\| = \sqrt{\{\bar{W}\}^t \{W\}} \quad (75)$$

A matriz

$$[U] = [I] - 2\{W\}\{\bar{W}\}^t \quad (76)$$

com  $\{\bar{W}\}^t \{W\} = 1$ , é chamada de matriz unitária de Householder<sup>17</sup>. Multiplicando  $[U]$  por  $[\bar{U}]^t$  vem

$$[U][\bar{U}]^t = [I] \quad (77)$$

o que demonstra que  $[U]$  é uma matriz unitária.

Considere o vetor  $\{W\}$  na seguinte forma:

---

<sup>17</sup> Veja ATKINSON, K.E. Op. Cit. nota 14. p. 521.

$$\{W\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ w_r \\ w_{r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{0\}_{r-1} \\ \hline \{V\} \end{array} \right\} \quad (78)$$

onde  $\{V\} = \{w_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}^t$  e  $\{0\}_{r-1}$  é o vetor nulo com  $r-1$  componentes. Note que  $\{V\}$  tem  $m$  componentes, onde  $m = n - r + 1$ .

Considerando a equação (78), a matriz  $[U]$  pode ser colocada como:

$$[U] = \left[ \begin{array}{c|c} [I_{r-1}] & [0] \\ \hline [0] & [I_{m-2}\{V\}\{\bar{V}\}^t] \end{array} \right] \quad (79)$$

A matriz  $[U]$ , colocada pela equação (79), tem as seguintes propriedades:

- As  $r-1$  primeiras linhas de uma matriz  $[C]$  permanecem inalteradas quando  $[C]$  for premultiplicada por  $[U]$ .
- As  $r-1$  primeiras colunas de  $[C]$  permanecem inalteradas quando esta for posmultiplicada por  $[U]$ .
- A submatriz  $[C_{r-1}]$  do canto superior esquer-

do de  $[C]$  permanece inalterada quando  $[C]$  for posmultiplicada e premultiplicada por  $[U]$ .

As matrizes unitárias de Householder podem ser usadas para transformar um vetor não nulo, em um vetor contendo todos os elementos nulos a partir de uma determinada posição. Assim, seja  $\{Z\}$  um vetor não nulo, pertencente ao espaço vetorial  $R^n$ . Suponha que se deseje produzir uma transformação  $[U]$  tal que o vetor  $[U]\{Z\}$  contenha todos os elementos nulos a partir da posição  $r+1$  até  $n$ , para algum  $r \geq 1$ . Tomando  $\{W\}$  conforme definido pela equação (78), então os  $r-1$  primeiros elementos de  $\{Z\}$  e  $[U]\{Z\}$  são idênticos.

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \{X\} \\ \hline \{Y\} \end{array} \right\} \quad (80)$$

$$[U]\{Z\} = \left[ \begin{array}{c|c} [I_{r-1}] & [0] \\ \hline [0] & [I_{m-2}\{V\}\{\bar{V}\}^t] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{X\} \\ \hline \{Y\} \end{array} \right\} \quad (81)$$

$$[U]\{Z\} = \left\{ \begin{array}{c} [I_{r-1}]\{X\} \\ \vdots \\ [I_{m-2}\{V\}\{\bar{V}\}^t]\{Y\} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (82)$$

O problema consiste em determinar  $\{W\}$  de forma que a equação (82) seja satisfeita. Da equação (82) tem-se:

$$[I_m - 2\{V\}\{\bar{V}\}^t]\{Y\} = \{\alpha, 0, \dots, 0\}^t \quad (83)$$

Como  $[I_m - 2\{V\}\{\bar{V}\}^t]$  é uma matriz unitária, então os vetores  $[I_m - 2\{V\}\{\bar{V}\}^t]\{Y\}$  e  $\{Y\}$  apresentam a mesma norma. Logo, pela equação (83) tem-se:

$$|\alpha| = \|\{Y\}\| = \sqrt{\{Y\}^t\{Y\}} \quad (84)$$

A equação (83) pode ser escrita como

$$\{Y\} - 2\{V\}\{\bar{V}\}^t\{Y\} = \{\alpha, 0, \dots, 0\}^t \quad (85)$$

Premultiplicando por  $\{\bar{V}\}^t$  e usando a condição de que  $\{\bar{V}\}^t\{V\} = 1$ , tem-se:

$$-\{\bar{V}\}^t\{Y\} = \{\bar{V}\}^t\{\alpha, 0, \dots, 0\}^t \quad (86)$$

A equação (86) permite concluir que:

$$p = \{\bar{V}\}^t\{Y\} = -\alpha v_1 \quad (87)$$

onde  $v_1$  é a primeira coordenada de  $\{V\}$ . Das equações (85) e (87) pode-se concluir que:

$$y_1 + 2v_1^2\alpha = \alpha \quad (88)$$

e vem que

$$v_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y_1}{\alpha}\right) \quad (89)$$

A coordenada  $\alpha$  pode ser negativa ou positiva, entretanto é conveniente selecionar o seu sinal de forma a fornecer um máximo valor para  $v_1$ , pois isto diminui um possível erro de truncamento. Assim,

$$\text{sinal}(\alpha) = - \text{sinal}(y_1) \quad (90)$$

Da equação (85) são obtidas as demais coordenadas de  $\{V\}$ .

$$y_j - 2v_j p = 0 \quad (91)$$

$$v_j = \frac{y_j}{2p} \quad \text{para } j = 2, m. \quad (92)$$

Desta forma, determinado  $\{V\}$  através das equações (89) e (92), fica determinada a matriz unitária de Householder, que quando aplicada a um vetor, faz com que este seja transformado em um vetor contendo todos os elementos nulos a partir da posição  $r+1$ .

### 3.3. A Fatoração QR de uma Matriz

Dada uma matriz  $[C]$  sobre um corpo complexo, pode-se demonstrar que existe uma matriz unitária  $[Q]$  e uma matriz triangular superior  $[R]$ , tal que:

$$[C] = [Q][R] \quad (93)$$

Seja a sequência de matrizes unitárias<sup>18</sup> de finida por:

$$[P_r] = [I] - 2\{W\}_r\{\bar{W}\}_r^t \quad \text{para } r = 1, n - 1 \quad (94)$$

onde  $\{W\}_r$  é definido conforme a equação (78) e o índice  $r$  indica a posição a partir da qual  $\{W\}$  tem elementos quaisquer. Considerando cada coluna de uma matriz  $[C]$  como um vetor, pode-se estabelecer para uma determinada coluna  $r$ , uma matriz  $[P_r]$  que aplicada à matriz  $[C]$ , produza uma matriz que tenha a coluna  $r$  com todos os elementos nulos a partir da linha  $r+1$ . Seja por exemplo,  $C_{*1}$  a primeira coluna de  $[C]$ . Seja  $[P_1]$  a matriz definida pela equação (94) para  $r=1$ , com  $\{W\}_1$  determinado em função do vetor  $C_{*1}$ . Conforme o que foi colocado no item 3.2., a matriz  $[C]$  quando for premultiplicada por  $[P_1]$ , fornecerá uma matriz cuja primeira coluna terá zeros nas posições abaixo da diagonal principal. Do mesmo modo, pode-se determinar para a matriz  $[P_1][C]$ , uma matriz  $[P_2]$  de forma que a segunda coluna de

<sup>18</sup> Quando está-se trabalhando no campo dos números reais, uma matriz unitária é dita ortogonal.

$[P_2][P_1][C]$  contenha zeros abaixo da diagonal. É conveniente observar que como o vetor  $\{W\}_2$ , determinado em função da segunda coluna de  $[P_1][C]$ , contém zero na sua primeira posição e como a primeira coluna de  $[P_1][C]$  tem zeros abaixo da diagonal, os produtos  $[P_2][P_1][C]$  e  $[P_1][C]$  tem os mesmos elementos na primeira linha e primeira coluna. O exposto até aqui, permite concluir que para uma matriz  $[C]$ , pode-se determinar uma série de matrizes  $[P_r]$  com  $r = 1, n - 1$ , que aplicadas em  $[C]$  determinarão uma matriz triangular superior. Desta forma, tem-se:

$$[R] = [P_{n-1}] \dots [P_2][P_1][C] \quad (95)$$

Colocando

$$[\bar{Q}]^t = [P_{n-1}] \dots [P_2][P_1] \quad (96)$$

vem

$$[R] = [\bar{Q}]^t [C] \quad (97)$$

Note que como cada matriz  $[P_r]$  é unitária então  $[\bar{Q}]^t$  será unitária e pode-se escrever:

$$[C] = [Q][R] \quad (98)$$



Pode ser demonstrado<sup>19</sup> que a fatoraçoão de uma matriz  $[C]$  não singular, num produto de duas matrizes, sendo uma unitária e outra triangular superior, é única.

### 3.4. O Processo Iterativo do Método QR

Conforme foi colocado no ítem anterior, para uma matriz  $[C]$  pode-se escrever:

$$[C] = [C_1] = [Q_1][R_1] \quad (99)$$

Seja a matriz  $[C_2]$  definida por:

$$[C_2] = [R_1][Q_1] \quad (100)$$

Da equação (99) tem-se

$$[R_1] = [\bar{Q}_1]^t [C_1] \quad (101)$$

Substituindo a equação (101) na equação (100) vem:

$$[C_2] = [\bar{Q}_1]^t [C_1] [Q_1] \quad (102)$$

---

<sup>19</sup> Veja ATKINSON, K.E. Op. Cit. nota 14. p. 526.

Note que como  $[Q_1]$  é unitária tem-se  $[\bar{Q}_1]^t = [Q_1]^{-1}$  e consequentemente, o processo de transformação de  $[C_1]$  em  $[C_2]$  representa uma transformação similar. Desta forma, conforme foi visto no capítulo II, a matriz  $[C_2]$  tem os mesmos autovalores de  $[C_1]$ .

Executando o mesmo processo para  $[C_2]$  tem-se:

$$[C_3] = [R_2][Q_2] \quad (103)$$

logo:

$$[C_3] = [\bar{Q}_2]^t [C_2] [Q_2] \quad (104)$$

Após a execução do processo k vezes, pode-se escrever:

$$[C_{k+1}] = [\bar{Q}_k]^t [C_k] [Q_k] \quad (105)$$

Quando k tende ao infinito, a matriz  $[C_{k+1}]$  converge para uma matriz triangular superior ou para uma matriz quase triangular superior. Note que uma matriz triangular superior apresenta seus autovalores na diagonal. Se uma matriz for quase triangular superior, seus autovalores podem ser calculados facilmente.

Estabelecendo um processo de substituição no lado direito da equação (105) chega-se à:

$$[C_{k+1}] = [\bar{Q}_k]^t \dots [\bar{Q}_2]^t [\bar{Q}_1]^t [C_1] [Q_1] [Q_2] \dots [Q_k] \quad (106)$$

Colocando

$$[q_k] = [Q_1][Q_2] \dots [Q_k] \quad (107)$$

vem:

$$[c_{k+1}] = [\bar{q}_k]^t [c_1] [q_k] \quad (108)$$

Seja

$$[r_k] = [R_k] \dots [R_2][R_1] \quad (109)$$

Como cada matriz  $[R_i]$  ( $i = 1, k$ ) é triangular superior, então  $[r_k]$  será triangular superior. Multiplicando  $[q_k]$  por  $[r_k]$  vem:

$$[q_k][r_k] = [Q_1][Q_2] \dots [Q_k][R_k] \dots [R_2][R_1] \quad (110)$$

Como  $[Q_k][R_k] = [C_k]$  tem-se:

$$[q_k][r_k] = [Q_1][Q_2] \dots [Q_{k-1}][C_k][R_{k-1}] \dots [R_2][R_1] \quad (111)$$

Da equação (106) tem-se:

$$[Q_1] \dots [Q_{k-1}][C_k] = [c_1][Q_1] \dots [Q_{k-1}] \quad (112)$$

Logo a equação (111) pode ser escrita como:

$$[q_k][r_k] = [C_1][Q_1] \dots [Q_{k-1}][R_{k-1}] \dots [R_1] \quad (113)$$

$$[q_k][r_k] = [C_1][q_{k-1}][r_{k-1}] \quad (114)$$

Considerando que

$$[q_1][r_1] = [Q_1][R_1] = [C_1] \quad (115)$$

por indução conclui-se que:

$$[q_k][r_k] = [C_1]^k \quad \text{para } k \geq 1. \quad (116)$$

### 3.5. A Convergência do Método QR

Se  $[C]$  é uma matriz com todos os autovalores  $\lambda_i$  reais e com

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \quad (117)$$

então o processo iterativo definido pela equação (105) converge para uma matriz triangular superior. Se  $[C]$  for simétrica, o processo converge para uma matriz diagonal.

Se  $[C]$  tem todos os autovalores distintos, e existe uma matriz não singular  $[M]$  tal que<sup>20</sup> :

$$[M]^{-1}[C][M] = [D] = [\text{dia}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)] \quad (118)$$

Considerando a equação (118) pode-se escrever:

$$[C]^k = [M][D]^k[M]^{-1} \quad (119)$$

Pode ser demonstrado<sup>21</sup> que  $[M]^{-1}$  pode ser decomposta num produto de duas matrizes, sendo uma triangular inferior e outra triangular superior. Assim,

$$[M]^{-1} = [L][r] \quad (120)$$

onde  $[L]$  é triangular inferior e  $[r]$  é triangular superior. Combinando as equações (119) e (120) vem:

$$[C]^k = [M]([D]^k[L][D]^{-k})[D]^k[r] \quad (121)$$

A matriz  $[L]$  pode ser determinada de forma a ter os elementos da diagonal iguais a 1. Deste modo,  $[D]^k[L][D]^{-k}$  é triangular inferior com os elementos da diagonal iguais a 1, e

---

<sup>20</sup> Veja WILKINSON, J.H. Op. Cit. nota 11. p. 6.

<sup>21</sup> Veja ATKINSON, K.E. Op. Cit. nota 14. p. 439.

$$([D]^k[L][D]^{-k})_{ij} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k \ell_{ij} \quad \text{para } 1 \leq j < i \leq n \quad (122)$$

Analisando a equação (122) pode-se definir:

$$[D]^k[L][D]^{-k} = [I] + [E_k] \quad (123)$$

onde  $[E_k]$  é uma matriz triangular inferior que tende à matriz nula quando  $k$  tende ao infinito.

A matriz  $[M]$  pode ser fatorada da forma:

$$[M] = [Q][R] \quad (124)$$

com  $[Q]$  unitária e  $[R]$  triangular superior. Considerando as equações (123) e (124), a equação (121) pode ser escrita como:

$$[C]^k = [Q][R]([I] + [E_k])[D]^k[r] \quad (125)$$

$$[C]^k = [Q]([I] + [R][E_k][R]^{-1})[R][D]^k[r] \quad (126)$$

Usando outra fatoração QR,

$$[I] + [R][E_k][R]^{-1} = [\tilde{Q}_k][\tilde{R}_k] \quad (127)$$

Note que  $[\tilde{R}_k]$  e  $[\tilde{Q}_k]$  tendem à matriz identidade quando  $k$  tende ao infinito. Substituindo a equação (127) na equação (126) vem:

$$[C]^k = [Q]([\tilde{Q}_k][\tilde{R}_k])[R][D]^k[r] \quad (128)$$

$$[C]^k = ([Q][\tilde{Q}_k])([\tilde{R}_k][R][D]^k[r]) \quad (129)$$

Como  $[Q]$  e  $[\tilde{Q}_k]$  são unitárias, então  $[Q][\tilde{Q}_k]$  é unitária. Como  $[R]$ ,  $[\tilde{R}_k]$  e  $[r]$  são triangulares superior e  $[D]^k$  é diagonal, então  $[\tilde{R}_k][R][D]^k[r]$  é triangular superior. Desta forma, pode-se considerar a equação (129) como uma fatoração QR de  $[C]^k$ . Comparando a equação (129) com a equação (116) pode-se escrever:

$$[q_k] = ([Q][\tilde{Q}_k)][\tilde{D}_k] \quad (130)$$

$$[r_k] = [\tilde{D}_k]([\tilde{R}_k][R][D]^k[r]) \quad (131)$$

onde  $[\tilde{D}_k]$  é uma matriz diagonal definida de forma que

$$[\tilde{D}_k]^2 = [I] \quad (132)$$

Conforme foi visto no ítem 3.4., o método iterativo QR pode ser definido pela equação

$$[C_{k+1}] = [\bar{q}_k]^t [C_1] [q_k] \quad (133)$$

Então, pode-se escrever:

$$[C_{k+1}] = [\tilde{D}_k]^t [\bar{Q}_k]^t [\bar{Q}]^t [c_1] [Q] [\tilde{Q}_k] [\tilde{D}_k] \quad (134)$$

Da equação (124) tem-se:

$$[Q] = [M][R]^{-1} \quad (135)$$

$$[\bar{Q}]^t = [Q]^{-1} = [R][M]^{-1} \quad (136)$$

Substituindo as equações (135) e (136) na equação (134) e considerando a equação (118) vem:

$$[C_{k+1}] = [\tilde{D}_k]^t [\bar{Q}_k]^t [R][D][R]^{-1} [\tilde{Q}_k] [\tilde{D}_k] \quad (137)$$

Como  $[\tilde{Q}_k]$  tende a identidade quando  $k$  tende ao infinito e  $[\tilde{D}_k]^2$  é igual a identidade, então

$$[C_{k+1}] = [R][D][R]^{-1} \quad \text{para } k \rightarrow \infty \quad (138)$$

Como  $[R]$  é triangular superior então  $[R][D][R]^{-1}$  é triangular superior e conseqüentemente  $[C_{k+1}]$  será triangular superior. Assim, com o decorrer do processo iterativo, os elementos abaixo da diagonal de  $[C_{k+1}]$  convergem a zero e a velocidade de convergência depende da velocidade com que  $[\tilde{Q}_k]$  tende a  $[I]$ . Note que a velocidade de convergência de  $[\tilde{Q}_k]$  a  $[I]$ , depende da velocidade de convergência de  $[E_k]$  a matriz nula e conseqüentemente dependerá da velocidade com que  $([D]^k [L][D]^{-k})$  tende a identidade. Pela



equação (122) pode-se verificar que quanto menor for o valor absoluto do quociente  $\lambda_i/\lambda_j$ , mais rapidamente  $([D]^k[L][D]^{-k})_{ij}$  com  $i > j$  tende a zero. Conclui-se com isto, que quanto maior for a diferença entre os módulos dos autovalores, maior será a velocidade de convergência do método QR.

### 3.6. Redução à Forma de Hessenberg

O método QR, definido pela equação (105), pode exigir um esforço computacional bastante grande, pois dependendo das características da matriz  $[C]$ , a convergência pode ser lenta, fazendo com que o tempo de computação exigido seja alto. Para reduzir o tempo de computação, é conveniente que a matriz  $[C]$  seja reduzida a uma forma mais simples antes de ser iniciado o processo iterativo. Um modo de obter uma forma mais simples para  $[C]$ , é reduzi-la a uma matriz de Hessenberg.

Uma matriz  $[H]$  é dita ser matriz de Hessenberg se:

$$h_{ij} = 0 \quad \text{para } i > j + 1 \quad (139)$$

ou seja, é uma matriz que tem todos os elementos abaixo da sub-diagonal inferior, iguais a zero.

A redução de  $[C]$  a uma matriz de Hessenberg, pode ser feita usando-se as matrizes unitárias de Householder. Desta forma, para cada coluna  $r$  da matriz  $[C]$ , deve ser determi-

nada uma matriz unitária que quando aplicada a  $[C]$ , faz com que se obtenha uma matriz com a coluna  $r$  contendo zeros nas posições abaixo da subdiagonal inferior. A sequência de matrizes unitárias para este caso, pode ser definida como:

$$[P_r] = [I] - 2\{W\}_{r+1}\{\bar{W}\}_{r+1}^t \quad \text{para } r = 1, n-2 \quad (140)$$

com  $\{W\}_{r+1} = \{0, \dots, 0, w_{r+1}, \dots, w_n\}^t$ . A determinação de cada matriz unitária é feita da mesma forma como no ítem 3.2., levando-se em consideração que a aplicação de cada  $[P_r]$  à matriz  $[C]$ , deve fazer com que a coluna  $r$  da matriz resultante tenha zeros a partir da posição  $r + 2$ .

Para  $r = 1$ , seja

$$[C_2] = [\bar{P}_1]^t [C] [P_1] \quad (141)$$

A matriz  $[\bar{P}_1]^t [C]$  terá a primeira coluna com zeros a partir da posição 3 e a posmultiplicação desta matriz por  $[P_1]$  não altera os elementos da primeira coluna. A técnica pode então ser descrita por:

$$[C_{r+1}] = [\bar{P}_r]^t [C_r] [P_r] \quad \text{para } r = 1, n-2 \quad (142)$$

com  $[C_1] = [C]$ . Para  $r = n-2$ , a equação (142) fica:

$$[C_{n-1}] = [\bar{P}_{n-2}]^t [C_{n-2}] [P_{n-2}] \quad (143)$$

Executando-se um processo de substituição no lado direito da equação (143) vem:

$$[C_{n-1}] = [\bar{P}_{n-2}]^t \dots [\bar{P}_2]^t [\bar{P}_1]^t [C] [P_1] [P_2] \dots [P_{n-2}] \quad (144)$$

onde cada  $[P_r]$  é definida conforme a equação (140) e  $[C_{n-1}]$  será a matriz na forma de Hessenberg. Se  $[C]$  for simétrica então a sequência de matrizes  $[P_r]$  aplicadas a  $[C]$ , conforme a equação (144), fornecerá uma matriz tridiagonal. Note que como cada  $[P_r]$  é unitária, a equação (144) representa uma transformação similar e portanto os autovalores são preservados.

Aparentemente pode parecer que o processo apresentado pela equação (144) pode ser utilizado para transformar a matriz  $[C]$  em uma matriz triangular superior. Entretanto, pode ser verificado facilmente, que devido as características de cada matriz unitária, isto não é possível.

### 3.7. Matrizes com Autovalores Complexos

Como já foi demonstrado no item 3.5., o método QR, definido pela equação (105) faz com que a matriz  $[C]$  convirja para uma matriz triangular superior quando  $[C]$  tem autovalores distintos em módulo. Entretanto, quando  $[C]$  for não simétrica, esta pode ter autovalores complexos, e neste caso os autovalores não serão todos distintos em módulo, pois quando complexos, os autovalores ocorrem em pares conjugados.



Cada  $[E_r]$  ( $r = 1, \ell$ ) é uma matriz de ordem 2 por 2, estando sobre a diagonal de  $[D]$  e tendo os autovalores  $\zeta_r \pm \mu_r i$ . Para provar a existência da matriz  $[Q]$ , basta mostrar que existe uma matriz  $[Q_1]$  tal que:

$$[\bar{Q}_1]^t [C] [Q_1] = \left[ \begin{array}{c|c} E_1 & P_1 \\ \hline 0 & C_2 \end{array} \right] \quad (147)$$

Seja  $\{\xi\}_1 \pm i\{\eta\}_1$  os autovetores correspondentes aos autovalores  $\zeta_1 \pm \mu_1 i$ . Desta forma, tem-se:

$$[C](\{\xi\}_1 \pm i\{\eta\}_1) = (\zeta_1 \pm \mu_1 i)(\{\xi\}_1 \pm i\{\eta\}_1) \quad (148)$$

Considerando apenas  $\zeta_1 + \mu_1 i$  e dividindo a equação (148) em parte real e imaginária, vem:

$$[C]\{\xi\}_1 = \zeta_1 \{\xi\}_1 - \mu_1 \{\eta\}_1 \quad (149)$$

$$[C]\{\eta\}_1 = \mu_1 \{\xi\}_1 + \zeta_1 \{\eta\}_1 \quad (150)$$

As equações (149) e (150) podem ser combinadas na forma:

$$[C][\{\xi\}_1 ; \{\eta\}_1] = [\{\xi\}_1 ; \{\eta\}_1] \begin{bmatrix} \zeta_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (151)$$

onde  $\{\xi\}_1$  e  $\{\eta\}_1$  formam uma matriz de ordem n por 2. Conforme já foi visto, é possível determinar uma matriz  $[Q_1]$  tal que:

$$[\bar{Q}_1]^t[\{\xi\}_1; \{\eta\}_1] = \begin{bmatrix} T_1 \\ -\frac{1}{0} \end{bmatrix} \quad (152)$$

onde  $[T_1]$  é uma matriz 2 por 2 da forma:

$$\begin{bmatrix} \times & \times \\ 0 & \times \end{bmatrix}$$

Colocando

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \zeta_1 \end{bmatrix} \quad (153)$$

e multiplicando a equação (151) por  $[\bar{Q}_1]^t$  vem:

$$[\bar{Q}_1]^t[C][Q_1][\bar{Q}_1]^t[\{\xi\}_1; \{\eta\}_1] = [\bar{Q}_1]^t[\{\xi\}_1; \{\eta\}_1][K_1] \quad (154)$$

Considerando a equação (152) tem-se:

$$[\bar{Q}_1]^t[C][Q_1] \begin{bmatrix} T_1 \\ -\frac{1}{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ -\frac{1}{0} \end{bmatrix} [K_1] \quad (155)$$

Pode-se imaginar a matriz  $[\bar{Q}_1]^t [C] [Q_1]$  como sendo da forma:

$$\left[ \begin{array}{c|c} E_1 & P_1 \\ \hline F_1 & C_2 \end{array} \right]$$

Logo pela equação (155) vem:

$$\left[ \begin{array}{c|c} E_1 & P_1 \\ \hline F_1 & C_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} T_1 \\ 0 \end{array} \right] [K_1] \quad (156)$$

que permite escrever:

$$[E_1][T_1] = [T_1][K_1] \quad (157)$$

$$[F_1][T_1] = [0] \quad (158)$$

Da equação (157) pode-se verificar que  $[E_1]$  é similar a  $[K_1]$  e portanto tem os autovalores  $\zeta_1 \pm \mu_1 i$ . Como  $[T_1]$  não é a matriz nula, então da equação (158) conclui-se que  $[F_1]$  tem todos os seus elementos iguais a zero. Desta forma, pode-se escrever:

$$[\bar{Q}_1]^t [C] [Q_1] = \left[ \begin{array}{c|c} E_1 & P_1 \\ \hline 0 & C_2 \end{array} \right] \quad (159)$$

Da mesma forma, pode-se determinar uma matriz  $[Q_2]$  tal que:

$$[\bar{Q}_2]^t [\bar{Q}_1]^t [C] [Q_1] [Q_2] = \begin{bmatrix} E_1 & X & & \\ \hline 0 & E_2 & & P_2 \\ \hline & & & \\ & 0 & & C_3 \end{bmatrix} \quad (160)$$

e por indução conclui-se que

$$[\bar{Q}_k]^t \dots [\bar{Q}_1]^t [C] [Q_1] \dots [Q_k] = [D] \quad \text{para } k = n - \ell \quad (161)$$

Colocando

$$[Q] = [Q_1] [Q_2] \dots [Q_k] \quad (162)$$

vem

$$[D] = [\bar{Q}]^t [C] [Q] \quad (163)$$

### 3.8. Aceleração da Convergência

O processo de redução da matriz  $[C]$  à forma de Hessenberg, antes de iniciar o processo iterativo do método QR, faz com que  $[C]$  seja de uma forma mais simples e consequentemente, de convergência mais rápida. Entretanto, mesmo quando  $[C]$



está na forma de Hessenberg, a velocidade de convergência pode ser pequena. Conforme foi colocado no ítem 3.5., quanto menor for o valor absoluto do quociente  $\lambda_i/\lambda_j$ , mais rapidamente os elementos  $c_{ij}^{(k)}$  ( $i > j$ ) de  $[C]$  tendem a zero. O índice superior ( $k$ ) indica a  $k$ -ésima iteração.

Considere que a matriz  $[C]$  seja substituída pela matriz  $([C] - b[I])$ , onde  $b$  é um escalar. Neste caso, a nova matriz terá os seguintes autovalores:

$$\lambda_i - b \quad \text{para } i = 1, n$$

Considerando que a nova matriz está na forma de Hessenberg, então quanto menor for o valor absoluto do quociente  $(\lambda_n - b)/(\lambda_{n-1} - b)$ , mais rapidamente o elemento da posição  $(n, n-1)$  tenderá a zero. Verifica-se então, que se  $b$  for uma boa aproximação de  $\lambda_n$ , tem-se  $\lambda_n - b \approx 0$  e conseqüentemente  $(\lambda_n - b)/(\lambda_{n-1} - b) \approx 0$ . Isto permite concluir que a convergência será mais rápida se em lugar de  $[C]$  for tomada a matriz  $([C] - b[I])$ , onde  $b$  é uma boa aproximação de  $\lambda_n$ .

Pelo método QR tem-se:

$$[C_k] = [Q_k][R_k] \quad (164)$$

$$[C_{k+1}] = [R_k][Q_k] \quad (165)$$

Seja então o processo iterativo definido por:

$$[C_k] - b_k[I] = [Q_k][R_k] \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (166)$$

$$[C_{k+1}] = b_k[I] + [R_k][Q_k] \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (167)$$

onde os  $b_k$  são escalares e  $[C_1] = [C]$ . Da equação (166) tem-se:

$$[R_k] = [\bar{Q}_k]^t ([C_k] - b_k[I]) \quad (168)$$

Substituindo a equação (168) na equação (167) vem:

$$[C_{k+1}] = b_k[I] + [\bar{Q}_k]^t [C_k][Q_k] - b_k[I] \quad (169)$$

$$[C_{k+1}] = [\bar{Q}_k]^t [C_k][Q_k] \quad (170)$$

A equação (170) representa o processo iterativo do método QR, observando-se desta forma, que o uso da matriz  $([C_k] - b_k[I])$  no lugar de  $[C]$ , não proporciona alterações nos autovalores, pois se no desenvolvimento da técnica fosse utilizada somente a matriz  $[C_k]$ , chegar-se-ia a mesma equação. Até o final deste ítem a matriz  $([C_k] - b_k[I])$  será denominada de  $[C_k]$ .

Conforme já foi colocado, a aceleração da convergência ocorrerá se o valor de  $b_k$  for uma boa aproximação de  $\lambda_n$ . Existem duas formas para escolher-se um valor de  $b_k$  que esteja próximo de  $\lambda_n$ :

$$a) b_k = c_{n,n}^{(k)} \quad (171)$$

$$b) b_k = \lambda_k^* \quad (172)$$

onde  $\lambda_k^*$  é um autovalor da submatriz do canto inferior direito da matriz  $[C_k]$ , ou seja:

$$\begin{bmatrix} c_{n-1,n-1}^{(k)} & c_{n-1,n}^{(k)} \\ c_{n,n-1}^{(k)} & c_{n,n}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Quando a matriz  $[C]$  tem todos os autovalores reais, então no decorrer do processo iterativo,  $c_{n,n-1}^{(k)}$  tende a zero e conseqüentemente  $c_{n,n}^{(k)}$  tenderá ao autovalor  $\lambda_n$ . Se a matriz apresentar alguns autovalores complexos, então  $c_{n,n-1}^{(k)}$  pode não tender a zero, mas os autovalores da submatriz do canto inferior direito de  $[C]$ , tendem aos autovalores de  $[C]$ .

A escolha de  $b_k$  segundo a equação (171) só terá eficiência quando a matriz  $[C]$  tem todos os autovalores reais. Neste caso, a influência de  $b_k$  sobre a velocidade de convergência se torna mais efetiva na medida em que o valor absoluto de  $c_{n,n-1}^{(k)}$  se tornar pequeno. Assim, é mais conveniente que a aceleração da convergência seja introduzida quando

$$|c_{n,n-1}^{(k)}| < \epsilon \quad (173)$$

onde  $\epsilon$  é algum valor pequeno, ou quando  $c_{n,n}^{(k)}$  mostrar sinais de convergência, isto é:

$$|1 - c_{n,n}^{(k)} / c_{n,n}^{(k-1)}| < \epsilon \quad (174)$$

É conveniente ainda, que a escolha de  $b_k$  segundo a equação (171), seja utilizada juntamente com um processo de redução de ordem da matriz envolvida no processo iterativo. Assim que  $c_{n,n}^{(k)}$  convergir a  $\lambda_n$  e  $c_{n-1,n-2}^{(k)}$  estiver próximo de zero, toma-se  $c_{n-1,n-1}^{(k)}$  como o próximo valor de  $b_k$  e passa-se a executar o processo iterativo com uma matriz de ordem  $n-1$ . Continuando desta forma, pode-se ir determinando cada um dos autovalores, e a cada autovalor determinado passa-se a trabalhar com uma matriz de menor ordem.

Quando a matriz  $[C]$  tem autovalores complexos, não é conveniente que se escolha o valor de  $b_k$  segundo a equação (171), pois é possível que  $c_{n,n-1}^{(k)}$  não convirja a zero, e consequentemente  $c_{n,n}^{(k)}$  não será uma boa aproximação de  $\lambda_n$ . Assim, quando  $[C]$  tem autovalores complexos, é usada a equação (172) para selecionar o valor de  $b_k$ . A escolha de  $b_k$  segundo a equação (172) apresenta boa eficiência tanto para matrizes que tenham todos os autovalores reais, como para matrizes que tenham autovalores complexos. Note que quando  $[C]$  tem todos os autovalores reais,  $c_{n,n-1}^{(k)}$  tende a zero e consequentemente os autovalores da submatriz do canto inferior direito de  $[C]$ , tendem a  $\lambda_{n-1}$  e  $\lambda_n$ . O processo de redução de ordem da matriz  $[C]$  pode também ser executado quando é utilizada a equação (172), devendo-se levar em consideração que neste caso, a convergência pode ocorrer simultaneamente para dois

autovalores.

Se a matriz  $[C]$  tem todos os autovalores reais e for utilizada a equação (172), então  $b_k$  ficará definido por dois valores, que correspondem aos dois autovalores da submatriz do canto inferior direito. Se os dois autovalores da submatriz são complexos, então eles ocorrem em um par conjugado e é conveniente que se tome  $b_k$  como a parte real de um autovalor<sup>22</sup>. Se os dois autovalores são reais e iguais a  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  respectivamente, então é conveniente que  $b_k$  seja selecionado da forma:

$$b_k = \lambda_1^* \quad \text{se} \quad |\lambda_1^* - c_{n,n}^{(k)}| < |\lambda_2^* - c_{n,n}^{(k)}| \quad (175)$$

$$b_k = \lambda_2^* \quad \text{se} \quad |\lambda_1^* - c_{n,n}^{(k)}| \geq |\lambda_2^* - c_{n,n}^{(k)}| \quad (176)$$

Quando a matriz  $[C]$  pode ter autovalores complexos, é possível acelerar o processo de convergência, usando os dois autovalores da submatriz do canto inferior direito, fazendo com que cada iteração do método QR, corresponda na realidade a duas iterações. Assim, seja  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  os dois autovalores da submatriz. Eles podem ser reais ou complexos. Para facilitar a colocação das equações que definem o uso de  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$ , o índice  $k$  será substituído por 1.

---

<sup>22</sup> Veja WILKINSON, J.H. Op. Cit. nota 11. p. 512.

Desta forma pode-se escrever<sup>23</sup> :

$$[C_1] - \lambda_1^*[I] = [Q_1][R_1] \quad (177)$$

$$[C_2] = [R_1][Q_1] + \lambda_1^*[I] \quad (178)$$

$$[C_2] - \lambda_2^*[I] = [Q_2][R_2] \quad (179)$$

$$[C_3] = [R_2][Q_2] + \lambda_2^*[I] \quad (180)$$

$$([Q_1][Q_2])([R_2][R_1]) = ([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I]) \quad (181)$$

$$[C_3] = [\bar{Q}_2]^t[\bar{Q}_1]^t[C_1][Q_1][Q_2] \quad (182)$$

Mesmo que  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  sejam complexos, a matriz do lado direito da equação (181) será real. Colocando

$$[Q_1][Q_2] = [Q] \quad (183)$$

$$[R_2][R_1] = [R] \quad (184)$$

a equação (181) fica:

---

<sup>23</sup> Veja WILKINSON, J.H. Op. Cit. nota 11. p. 529.

$$[Q][R] = ([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I]) \quad (185)$$

A equação (182) também pode ser escrita como:

$$[C_1][Q] = [Q][C_3] \quad (186)$$

O problema consiste, em a partir de  $[C_1]$ , obter  $[C_3]$  numa única iteração, sem usar aritmética complexa. Conforme foi colocado no ítem 3.6., usando matrizes unitárias de Householder, pode-se reduzir uma determinada matriz a forma de Hessenberg. Assim, para  $[C_1]$  pode-se escrever:

$$[\bar{Q}]^t [C_1] [\bar{Q}] = [H] \quad (187)$$

$$[C_1] [\bar{Q}] = [\bar{Q}] [H] \quad (188)$$

onde  $[\bar{Q}]$  é unitária e  $[H]$  é uma matriz de Hessenberg. Da equação (188), pode ser demonstrado<sup>24</sup> que dada a primeira coluna de  $[\bar{Q}]$ , então  $[\bar{Q}]$  e  $[H]$  são unicamente determinadas. Desta forma, comparando as equações (186) e (188), verifica-se que se  $[Q]$  e  $[\bar{Q}]$  tiverem a mesma primeira coluna, então  $[\bar{Q}]$  deve ser  $[Q]$  e  $[H]$  deve ser  $[C_3]$ . Da equação (185) tem-se:

$$[\bar{Q}]^t ([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I]) = [R] \quad (189)$$

<sup>24</sup> Veja WILKINSON, J.H. Op. Cit. nota 11. p. 352.

A matriz  $[Q]$  pode ser determinada por:

$$[Q] = [P_1][P_2]\dots[P_{n-1}] \quad (190)$$

onde cada  $[P_r]$  é uma matriz unitária. Pode ser verificado que  $[Q]$  tem a sua primeira coluna igual a primeira coluna de  $[P_1]$ . Desta forma pode-se determinar  $[P_1]$  em função da primeira coluna de  $([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I])$ , determinando conseqüentemente a primeira coluna de  $[Q]$ . Considerando que  $[C_1]$  está na forma de Hessenberg, então a primeira coluna de  $([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I])$  é dada por:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= c_{11}^2 + c_{12}c_{21} - c_{11}(\lambda_1^* + \lambda_2^*) + \lambda_1^*\lambda_2^* \\ q_2 &= c_{21}(c_{11} + c_{22} - \lambda_1^* - \lambda_2^*) \\ q_3 &= c_{32}c_{21} \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

onde  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  são os três primeiros elementos da primeira coluna de  $([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I])$ . Os demais elementos da primeira coluna são nulos e note que cada elemento  $q_i$  será sempre real.

Pela equação (182) tem-se:

$$[C_3] = [\bar{Q}]^t[C_1][Q] \quad (192)$$



logo, determinado  $[P_1]$  pode-se escrever:

$$[C_3^*] = [\bar{P}_1]^t [C_1] [P_1] \quad (193)$$

Considerando então que  $[C_3]$  corresponde a uma matriz de Hessenberg, a sua obtenção pode ser feita a partir de  $[C_3^*]$ . Isto pode ser feito usando as matrizes unitárias de Householder, conforme foi mostrado no ítem 3.6. Assim pode-se escrever:

$$[H] = [C_3] = [\bar{P}_{n-2}]^t \dots [\bar{P}_2]^t [\bar{P}_1]^t [C_1] [P_1] [P_2] \dots [P_{n-2}] \quad (194)$$

Desta forma, o processo de aceleração da convergência foi executado, usando-se simultaneamente  $\lambda_1^*$  e  $\lambda_2^*$  em uma iteração que na realidade corresponde a duas iterações e utilizando apenas a primeira coluna de  $([C_1] - \lambda_1^*[I])([C_1] - \lambda_2^*[I])$ .

Para verificar a eficiência do processo de aceleração da convergência, três matrizes foram processadas, usando-se o método QR normal e o método QR com aceleração da convergência. Foi usada a técnica proposta pela equação (172), tomando-se simultaneamente os dois autovalores da submatriz do canto inferior direito.

Matrizes processadas: Matriz 1 - matriz cheia de ordem 3 por 3, com todos os autovalores reais.

Matriz 2 - matriz cheia de ordem 7 por 7,

com todos os autovalores reais.

Matriz 3 - matriz cheia de ordem 7 por 7,  
com autovalores complexos.

Para verificar a convergência foi utilizada uma tolerância igual 0.000001. Os resultados são mostrados na tabela 1.

Modo Matriz	NORMAL		COM ACELERAÇÃO	
	Número de Iterações	Tempo de CPU (segundos)	Número de Iterações	Tempo de CPU (segundos)
1	22	0.69	4	0.25
2	172	33.75	14	4.13
3	212	41.14	34	9.41

Tabela 1. - Comparação entre o método QR normal e o método QR com aceleração da convergência.

### 3.9. Determinação dos Autovetores

Após a determinação dos autovalores, os autovetores podem ser determinados através da solução de n problemas lineares do tipo:

$$[F(\lambda_j)]\{X\}_j = \{0\} \quad \text{para } j = 1, n \quad (195)$$

onde

$$[F(\lambda_j)] = [C] - \lambda_j[I] \quad (196)$$

Se a matriz  $[C]$  apresentar autovalores complexos, então existirão autovetores complexos. Seja  $\lambda_r = \zeta_r + i\mu_r$  um autovalor complexo de  $[C]$  e seja  $\{X\}_r = \{\xi\}_r + i\{\eta\}_r$  o seu correspondente autovetor. Então pode-se escrever:

$$[C](\{\xi\}_r + i\{\eta\}_r) = (\zeta_r + i\mu_r)(\{\xi\}_r + i\{\eta\}_r) \quad (197)$$

Separando a parte real e a parte imaginária vem:

$$[C]\{\xi\}_r = \zeta_r\{\xi\}_r - \mu_r\{\eta\}_r \quad (198)$$

$$[C]\{\eta\}_r = \zeta_r\{\eta\}_r + \mu_r\{\xi\}_r \quad (199)$$

Isolando  $\{\eta\}_r$  na equação (198) vem:

$$\{\eta\}_r = \frac{-1}{\mu_r} [C]\{\xi\}_r + \frac{\zeta_r}{\mu_r}\{\xi\}_r \quad \text{para } \mu_r \neq 0 \quad (200)$$

Substituindo a equação (200) na equação (199) vem:

$$([C]^2 - 2\zeta_r[C] + (\zeta_r^2 + \mu_r^2)[I])\{\xi\}_r = \{0\} \quad (201)$$

que se constitui em um problema linear do tipo colocado pela equação (195). Assim, determina-se  $\{\xi\}_r$  pela equação (201) e após pode-se determinar  $\{\eta\}_r$  pela equação (200).

Conforme já foi mostrado, pelo método QR tem-se:

$$[S] = [\bar{Q}]^t[C][Q] \quad (202)$$

onde  $[Q]$  é uma matriz unitária que representa todas as transformações aplicadas a  $[C]$  e  $[S]$  é uma matriz triangular superior ou quase triangular superior. Como  $[S]$  se apresenta em uma forma mais simples, é conveniente que na determinação dos autovetores, se use a matriz  $[S]$  em vez de  $[C]$ , pois isto implica em um menor número de operações. Evidentemente que se  $\{Y\}_r$  é um autovetor de  $[S]$  então o correspondente autovetor de  $[C]$  é dado por:

$$\{X\}_r = [Q]\{Y\}_r \quad (203)$$

A solução do problema linear colocado pela equação (195) pode ser obtida, transformando a matriz  $[F(\lambda_j)]$  numa forma normal de Hermite (FNH)<sup>24</sup>. Uma matriz  $[H]$  está na FNH se:

- a) As linhas nulas de  $[H]$ , se existirem, aparecem abaixo de todas as linhas não nulas.
- b) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a 1, e todos os elementos abaixo e acima dele são nulos.
- c) Se  $[H]$  tem  $p$  linhas não nulas e  $k_i$  é o número da coluna na qual aparece o primeiro elemento não nulo da linha  $i$ , então

$$k_1 < k_2 < \dots < k_p$$

---

<sup>24</sup> Veja ALVES, D.B. Op. Cit. nota 13. p. 98.

A transformação da matriz  $[F(\lambda_j)]$  em uma FNH pode ser feita aplicando-se operações elementares<sup>25</sup> sobre as linhas de  $[F(\lambda_j)]$ . Após obtida a FNH da matriz  $[F(\lambda_j)]$  e considerando:

- que a FNH tenha  $p$  linhas não nulas e  $s$  linhas nulas;
- $k_i$  ( $i = 1, p$ ) como sendo igual ao número da coluna que apresenta o primeiro elemento não nulo da linha  $i$ ;
- $\bar{k}_\ell$  ( $\ell = 1, s$ ) como sendo igual ao número das demais colunas;

a determinação de cada  $\{X\}_j$  da equação (195), pode ser obtida através da equação:

$$\{X\}_j = [G^{(j)}]\{X\}_j^* \quad (204)$$

com  $[G^{(j)}]$  sendo uma matriz de ordem  $n$  por  $s$  com seus elementos definidos por:

$$g_{k_i \ell} = -h_{i \bar{k}_\ell} \quad \text{para } \ell = 1, s \quad \text{e} \quad i = 1, p \quad (205)$$

$$g_{\bar{k}_\ell m} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell = m \\ 0 & \text{se } \ell \neq m \end{cases} \quad \text{para } \ell = 1, s \quad \text{e} \quad m = 1, s \quad (206)$$

onde  $h_{i \ell}$  são elementos da FNH de  $[F(\lambda_j)]$ . O vetor  $\{X\}_j^*$  contém  $s$  elementos que são valores arbitrários, não todos nulos.

---

<sup>25</sup> Veja ALVES, D.B. Op. cit. nota 9. p. 96.

## C A P Í T U L O I V

### 4. O MÉTODO DE STODOLA EM BLOCOS

#### 4.1. Introdução

Conforme foi mostrado no Capítulo II, um problema de autovalores e autovetores é constituído por um sistema de  $n$  equações que pode se apresentar sob a forma:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (207)$$

Se alguma matriz da equação (207) for não simétrica, pode-se definir o problema de autovalores e autovetores como:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (208)$$

$$\{Y\}^t[A] = \lambda\{Y\}^t[B] \quad (209)$$

onde  $\{X\}$  é denominado autovetor à direita e  $\{Y\}$  é denominado autovetor à esquerda.

Através do princípio de Hamilton<sup>26</sup> verifica-se que, para um sistema estrutural, as equações (208) e (209) podem ser derivadas da variação de um funcional da forma:

---

<sup>26</sup>Veja HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. Op. Cit. nota 2. p. 80.

$$L(X,Y) = \{Y\}^t[A]\{X\} - \lambda\{Y\}^t[B]\{X\} \quad (210)$$

A equação (208) é obtida de

$$\frac{\partial L}{\partial \{Y\}} = 0 \quad (211)$$

e a equação (209) é obtida de

$$\frac{\partial L}{\partial \{X\}} = 0 \quad (212)$$

Considerando que  $\{X\}$  e  $\{Y\}$  são vetores que pertencem a um determinado espaço vetorial  $W_1$ , pode-se promover uma transformação linear tal que:

$$\{X\} = [T]\{x\} \quad (213)$$

$$\{Y\} = [T]\{y\} \quad (214)$$

onde  $\{x\}$  e  $\{y\}$  são vetores pertencentes a um espaço vetorial  $W_2$ , que correspondem a  $\{X\}$  e  $\{Y\}$  respectivamente. Considerando as equações (213) e (214), o funcional  $L$  no espaço vetorial  $W_2$  pode ser escrito como:

$$L(x,y) = \{y\}^t[T]^t[A][T]\{x\} - \lambda\{y\}^t[T]^t[B][T]\{x\} \quad (215)$$

Observa-se então que um problema de autovalores e autovetores definido em um espaço vetorial  $W_1$ , foi transformado em um problema pertencente a um espaço vetorial  $W_2$ . O processo de mudança do espaço vetorial é uma das características do método de Stodola em blocos. Este método determina os autovalores e autovetores associados às equações (208) e (209). A designação "em blocos" se deve ao fato do método executar um processo de iteração simultânea que faz com que um conjunto de vetores convirja simultaneamente aos verdadeiros autovetores.

A técnica de Stodola em blocos a ser descrita aqui, é aplicável às equações:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (216)$$

$$\{Y\}^t[A] = \lambda\{Y\}^t[B] \quad (217)$$

onde  $[A]$  é uma matriz real de ordem  $n$ , podendo ser não simétrica e  $[B]$  é uma matriz real, simétrica de ordem  $n$ .

#### 4.2. A Técnica Iterativa

Seja a equação:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (218)$$

Considerando um processo de mudança do espaço vetorial pode-se escrever:



$$\{X\} = [T_k]\{x\} \quad (219)$$

onde  $\{X\}_{n \times 1}$ ,  $[T_k]_{n \times m}$ ,  $\{x\}_{m \times 1}$  e o índice  $k$  é colocado devido a existência de um processo iterativo. Note que, neste caso pode-se considerar  $W_1$  como sendo o espaço vetorial complexo  $C^n$  e consequentemente  $W_2$  será o espaço vetorial  $C^m$ . Desta forma, a transformação  $[T_k]$  projeta o problema definido pela equação (218) no espaço vetorial  $C^m$ . Se  $m < n$ , então  $C^m$  será um subespaço de  $C^n$  e ocorrerá uma redução no número de coordenadas associadas a equação (218).

Para que a transformação  $[T_k]$  gere o subespaço  $C^m$  é necessário que cada coluna de  $[T_k]$  seja formada por vetores linearmente independentes. Assim, pode-se considerar cada coluna de  $[T_k]$  como sendo constituída por autovetores da equação (218), desde que estes vetores sejam correspondentes a distintos autovalores. Para um problema de vibrações livres não amortecidas, a matriz  $[A]$  da equação (218) pode representar a matriz de rigidez da estrutura e consequentemente a matriz  $[B]$  representará a matriz massa. Assim, pode-se escrever:

$$[A][T_k] = [P_k] \quad (220)$$

onde a matriz  $[P_k]$  representa a distribuição de carregamento inercial da estrutura que deve estar em equilíbrio dinâmico com as forças elásticas. Consequentemente, se  $[P_k]$  é conhecido e  $[A]$  é não singular, pode-se determinar  $[T_k]$ .

Substituindo a equação (219) na equação (218) vem:

$$[A][T_k]\{x\} = \lambda [B][T_k]\{x\} \quad (221)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (221) por  $[T_k]^t$  vem:

$$[T_k]^t[A][T_k]\{x\} = \lambda [T_k]^t[B][T_k]\{x\} \quad (222)$$

Colocando

$$[a] = [T_k]^t[A][T_k] \quad (223)$$

$$[b] = [T_k]^t[B][T_k] \quad (224)$$

tem-se:

$$[a]\{x\} = \lambda [b]\{x\} \quad (225)$$

onde  $[a]$  e  $[b]$  são matrizes de ordem  $m$ .

Observa-se desta forma, que um problema de autovalores e autovetores definido para o espaço  $C^n$ , foi transformado em um problema definido num subespaço  $m$ -dimensional. Segundo Dong<sup>27</sup> as equações (223) e (224) representam transformações congruentes. Na verdade, duas matrizes  $[C]$  e  $[\bar{C}]$  são ditas congruentes<sup>28</sup> se:

<sup>27</sup> DONG, S.B. Op. Cit. nota 6. p. 252.

<sup>28</sup> Veja GANTMACHER, F.R. *The Theory of matrices*. p. 296.

$$[\tilde{C}] = [T]^t [C] [T] \quad (226)$$

com  $\det[T] \neq 0$ . Como a matriz  $[T_k]$  das equações (223) e (224) é de ordem  $n$  por  $m$ , a colocação genérica do conceito de congruência para estas equações é falha.

Considerando a equação (220), a equação (223) também pode ser escrita como:

$$[a] = [T_k]^t [P_k] \quad (227)$$

Note que se a matriz  $[B]$  da equação (224) for simétrica, então  $[b]$  também será simétrica pois

$$[b]^t = ([T_k]^t [B] [T_k])^t \quad (228)$$

$$[b]^t = [T_k]^t [B] [T_k] \quad (229)$$

A solução do problema de autovalores e autovetores colocado pela equação (225) pode ser escrita como:

$$\{x\} = [d_k] \{z\} \quad (230)$$

onde cada coluna de  $[d_k]$  é um autovetor da equação (225) e  $\{z\}$  é o vetor coordenada normal<sup>29</sup>.

---

<sup>29</sup> Veja HURTY, W.C. & RUBINSTEIN, M.F. Op. Cit. nota 2. p. 135.

Se a equação (225) tem todos os autovalores distintos e as matrizes  $[a]$  e  $[b]$  são simétricas, então  $[d_k]$  tem as seguintes propriedades:

$$[d_k]^t [b] [d_k] = [I] \quad (231)$$

$$[d_k]^t [a] [d_k] = [\text{dia}(\lambda_i)] \quad (232)$$

Após a determinação dos autovetores no subespaço, os autovetores no espaço original podem ser determinados por:

$$[D_k] = [T_k][d_k] \quad (233)$$

Se  $[P_k]$  definir exatamente o carregamento inercial da estrutura, então  $[T_k]$  definirá exatamente o subespaço necessário e a solução  $[D_k]$  será exata.

Entretanto, a definição exata de  $[P_k]$ , na maioria dos casos não é possível e torna-se necessário um processo iterativo onde  $[P_1]$  ou  $[T_1]$  deverá ser estimada. A seleção de  $[P_1]$  ou  $[T_1]$  deve ser feita de forma que um subespaço fique definido matematicamente e portanto cada coluna de  $[P_1]$  ou  $[T_1]$  deve ser linearmente independente.

Considerando que  $[P_1]$  não representará o carregamento exato, então  $[P_2]$  ou  $[P_{k+1}]$  deverá ser calculada, iniciando desta forma o processo iterativo. A equação (218) também pode ser escrita como:

$$[A]^{-1}[B]\{X\} = p\{X\} \quad (234)$$

onde  $p = \frac{1}{\lambda}$ . Pelo método das potências, se  $\{X\}_1$  é um vetor inicial, então

$$[A]^{-1}[B]\{X\}_1 = \{X\}'_1 \quad (235)$$

Dividindo  $\{X\}'_1$  por  $p$  vem

$$[A]^{-1}[B]\{X\}_1 = p\{X\}_2 \quad (236)$$

Pode ser demonstrado<sup>30</sup> que substituindo  $\{X\}$  por  $\{X\}_2$  na equação (234) e estabelecendo-se um processo iterativo ocorrerá a convergência para o autovalor de maior valor absoluto. Desta forma, como cada coluna de  $[D_k]$  é um vetor que deverá convergir ao autovetor, pode-se escrever:

$$[D_{k+1}] = [A]^{-1}[B][D_k] \quad (237)$$

onde cada coluna de  $[D_{k+1}]$  deve ser dividida pelo maior elemento em módulo da coluna. Comparando a equação (237) com a equação

$$[T_k] = [A]^{-1}[P_k] \quad (238)$$

pode-se concluir que:

---

<sup>30</sup> Veja ALVES, D.B. *Métodos numéricos*. p. 134.

$$[P_{k+1}] = [B][D_k] \quad (239)$$

Com  $[P_{k+1}]$  determinado, volta-se à equação (220), estabelecendo-se com isto, um processo iterativo que deverá ser executado até a convergência<sup>31</sup>, determinando desta forma, os autovalores  $\lambda_i$  ( $i=1,m$ ) e os correspondentes autovetores  $[D_k]$ . A convergência pode ser medida pela variação acumulativa na magnitude dos módulos dos autovalores, que são determinados através da resolução da equação (225). Assim, a convergência ocorre quando

$$\sum_{j=1}^m \left| \frac{p_j - p_j^*}{p_j} \right| < \epsilon \quad (240)$$

onde  $p_j$  ( $j=1,m$ ) são os módulos dos autovalores do ciclo atual, isto é:

$$p_j = |\lambda_j| = |\zeta_j + \mu_j i| = \sqrt{\zeta_j^2 + \mu_j^2} \quad (241)$$

$p_j^*$  ( $j=1,m$ ) são os módulos dos autovalores do ciclo anterior e  $\epsilon$  é uma determinada tolerância.

Para a solução da equação (225), é conveniente transformá-la em uma equação representativa de um problema padrão de autovalores e autovetores, pois a maioria dos métodos de resolução se aplicam ao problema padrão. Uma das formas de trans-

---

<sup>31</sup> Veja demonstração da convergência no apêndice I.

formar o problema colocado pela equação (225) em um problema padrão, consiste em utilizar os autovetores da matriz  $[b]$  para reduzir esta matriz a identidade. Conforme foi colocado no Capítulo II, se  $[b]$  é uma matriz simétrica, positiva definida, pode-se ajustar os autovetores de  $[b]$  de forma que:

$$[d_b]^t [b] [d_b] = [I] \quad (242)$$

onde  $[d_b]$  é uma matriz em que cada coluna é formada por um autovetor de  $[b]$ .

Usando a transformação

$$\{x\} = [d_b] \{u\} \quad (243)$$

a equação (225) pode ser escrita como:

$$[a][d_b] \{u\} = \lambda [b][d_b] \{u\} \quad (244)$$

Multiplicando a equação (244) por  $[d_b]^t$  vem:

$$[d_b]^t [a][d_b] \{u\} = \lambda [d_b]^t [b][d_b] \{u\} \quad (245)$$

Como a matriz  $[B]$  é simétrica, então  $[b]$  também será simétrica. Desta forma, considerando a equação (242) e colocando

$$[c] = [d_b]^t [a][d_b] \quad (246)$$

pode-se escrever:

$$[c]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (247)$$

Note que em cada iteração do método de Stodola, deverá ser feita a resolução de dois problemas do tipo colocado pela equação (247). Desta forma, a técnica utilizada na resolução deste problema, exercerá influência direta sobre a eficiência do método de Stodola. O método QR, apresentado no Capítulo III, constitui-se em um eficiente método para a resolução do problema colocado pela equação (247).

#### 4.3. O Cálculo de $[A]^{-1}$

Conforme foi colocado no item anterior, a cada iteração uma nova matriz  $[T]$  deve ser determinada. Pela equação (220) pode-se escrever:

$$[T_k] = [A]^{-1}[P_k] \quad (248)$$

Como  $[A]$  é normalmente uma matriz banda, é conveniente que somente os elementos da banda sejam armazenados<sup>32</sup>. Desta forma, a inversão direta da matriz  $[A]$ , como sugere a equação (248), não é conveniente, pois mesmo que  $[A]$  seja banda,  $[A]^{-1}$  pode ser uma

---

<sup>32</sup> Veja as formas de armazenamento para  $[A]$  e  $[B]$  no Capítulo V.



matriz cheia e conseqüentemente, para grandes sistemas algébricos, a determinação de  $[A]^{-1}$  exigirá um grande esforço computacional para o seu armazenamento.

A matriz  $[T_k]$  pode ser determinada diretamente da equação

$$[A][T_k] = [P_k] \quad (249)$$

através da aplicação de operações elementares nas linhas da matriz  $[A]$ , fazendo com que se obtenha  $[A]$  triangularizada. Se as operações elementares aplicadas em  $[A]$ , forem também aplicadas em  $[P_k]$ , pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \cdots & p'_{1m} \\ p'_{21} & p'_{22} & \cdots & p'_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ p'_{n1} & p'_{n2} & \cdots & p'_{nm} \end{bmatrix} \quad (250)$$

Analisando a equação (250), pode-se observar que cada coluna da matriz  $[T_k]$  pode ser obtida através de um processo de substituição regressiva, valendo-se do fato que  $a'_{ij} = 0$  para  $i > j$ . Desta forma, pode-se escrever:

$$t_{n,i} = \frac{p'_{n,i}}{a'_{n,n}}$$

$$\begin{aligned}
 t_{n-1,i} &= \frac{p'_{n-1,i} - a'_{n-1,n} t_{n,i}}{a'_{n-1,n-1}} \\
 &\vdots \\
 t_{1,i} &= \frac{p'_{1,i} - a'_{1,2} t_{2,i} - a'_{1,3} t_{3,i} - \dots - a'_{1,n} t_{n,i}}{a'_{1,1}}
 \end{aligned} \tag{251}$$

para  $i = 1, m$ . Um processo de condensação pivotal, que diminui o erro de truncamento na computação de  $[A]$  triangularizada, não é necessário pois os maiores elementos em módulo da matriz  $[A]$ , estão normalmente concentrados junto à diagonal principal. Note também, que a condensação pivotal pode exigir uma maior área para o armazenamento de  $[A]$  triangularizada.

O processo de triangularização e posterior substituição regressiva exige apenas uma triangularização de  $[A]$ , já que a cada iteração  $[A]$  é constante. As operações elementares aplicadas em  $[A]$  devem ser guardadas para serem aplicadas à matriz  $[P_k]$  de cada iteração. Como a matriz  $[A]$  é utilizada apenas para a determinação de  $[T]$ ,  $[A]$  triangularizada pode ser armazenada na mesma área destinada ao armazenamento de  $[A]$ .

#### 4.4. Autovalores e Autovetores Complexos

Na resolução da equação (247), é possível que sua solução contenha vetores complexos, pois  $[c]$  é não simétrica. Conseqüentemente,  $[D_k]$  e  $[T_k]$  conterão elementos complexos,

fazendo com que as matrizes  $[a]$  e  $[b]$  da equação (225) conttenham também elementos complexos. Um problema de autovalores e autovetores relativo a uma matriz com elementos complexos, pode ser escrito como:

$$([R] + i[S])\{X\} = \lambda\{X\} \quad (252)$$

Multiplicando a equação (252) por  $-i$  vem:

$$([S] - i[R])\{X\} = -\lambda i\{X\} \quad (253)$$

Combinando as equações (252) e (253) vem:

$$\begin{bmatrix} [R] & -[S] \\ [S] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ -i\{X\} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \{X\} \\ -i\{X\} \end{Bmatrix} \quad (254)$$

A equação (254) permite concluir que um problema de autovalores e autovetores envolvendo matrizes complexas, pode ser tratado exclusivamente em aritmética real. A desvantagem deste procedimento é a duplicação da ordem da matriz.

Pode ser demonstrado, que através de um processo de combinação linear das partes reais e imaginárias dos vetores contidos em  $[D_k]$  ou  $[T_k]$ , é possível obter-se somente elementos reais para as matrizes  $[a]$  e  $[b]$ , sem que seja necessário qualquer aumento na dimensão do problema e sem que isto cause qualquer anormalidade na convergência da técnica de Stodola.

Seja

$$[T_k] = [T] = [\{t\}_1, \{t\}_2, \dots, \{t\}_m] \quad (255)$$

onde cada vetor  $\{t\}_j$  ( $j = 1, m$ ) é uma coluna da matriz  $[T]$ , e

$$\{t\}_j = \{\xi\}_j + i\{\eta\}_j \quad (256)$$

com  $\{\xi\}_j$  contendo a parte real das coordenadas e  $\{\eta\}_j$  a parte imaginária. Pode-se verificar que as redefinições

$$\{t\}_j = \{\xi\}_j + \{\eta\}_j \quad (257)$$

$$\{\bar{t}\}_j = \{\xi\}_j - \{\eta\}_j \quad (258)$$

onde  $\{\bar{t}\}_j$  representa o conjugado de  $\{t\}_j$ , produzirão uma transformação  $[T]$  real, que terá o mesmo efeito da transformação  $[T]$  com elementos complexos. Para comprovar esta característica, considere que as  $m$  colunas de  $[T]$  apresentam  $r$  vetores reais e  $2s$  vetores complexos, com  $s$  vetores complexos e  $s$  vetores complexos conjugados. Suponha que os vetores reais estejam nas  $r$  primeiras colunas de  $[T]$ , que os  $s$  vetores complexos estejam nas colunas seguintes e que os  $s$  vetores complexos conjugados estejam nas colunas restantes.

Sejam as matrizes:

$$[q] = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 1/2(1-i)I_s & 1/2(1+i)I_s \\ 0 & 1/2(1+i)I_s & 1/2(1-i)I_s \end{bmatrix} \quad (259)$$

$$[p] = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix} \quad (260)$$

onde  $I_r$  e  $I_s$  são matrizes identidade de ordens  $r$  e  $s$  respectivamente. Pode-se verificar que a matriz  $[p]$  quando premultiplicada pela matriz  $[T]$  faz com que haja a troca de posição dos vetores complexos com seus complexos conjugados. Desta forma, pode-se escrever:

$$[\bar{T}] = [T][p] \quad (261)$$

onde a barra indica conjugação complexa.

As matrizes  $[p]$  e  $[q]$ , conforme definidas pelas equações (259) e (260) tem ainda as seguintes propriedades:

$$[q]^2 = [p] \quad (262)$$

$$[p]^2 = [I] \quad (263)$$

$$[q][p] = [\bar{q}] = [q]^3 \quad (264)$$

Pode-se ainda concluir que:

$$\left. \begin{aligned}
 [q] &= [q] \\
 [q]^2 &= [p] \\
 [q]^3 &= [\bar{q}] \\
 [q]^4 &= [I] \\
 [q]^5 &= [q] \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

Seja agora a equação (223):

$$[a] = [T]^t[A][T] \quad (266)$$

Conjugando a equação (266) vem:

$$[\bar{a}] = [\bar{T}]^t[A][\bar{T}] \quad (267)$$

Considerando a equação (261) pode-se escrever:

$$[\bar{a}] = [p]^t[T]^t[A][T][p] = [p]^t[a][p] \quad (268)$$

Pode-se demonstrar que a transformação

$$[\phi] = [q]^t[a][q] \quad (269)$$

fornecerá sempre uma matriz  $[\phi]$  real. Conjugando a equação (269)

tem-se:

$$[\bar{\phi}] = [\bar{q}]^t [\bar{a}] [\bar{q}] \quad (270)$$

Substituindo a equação (268) na equação (270) vem:

$$[\bar{\phi}] = [\bar{q}]^t [p]^t [a] [p] [\bar{q}] \quad (271)$$

Considerando as equações (265) pode-se escrever:

$$[\bar{\phi}] = [q]^t [a] [q] \quad (272)$$

Comparando a equação (272) com a equação (269) tem-se:

$$[\bar{\phi}] = [\phi] \quad (273)$$

logo  $[\phi]$  é real.

A implementação deste processo na técnica de Stodola, consiste em tomar-se a transformação  $[T][q]$  em vez de  $[T]$ . Note que, se  $[T]$  for substituída por  $[T][q]$ , então a equação (266) fica:

$$[\phi] = [q]^t [T]^t [A] [T] [q] = [q]^t [a] [q] \quad (274)$$

que conforme já foi demonstrado será sempre real.

Pode ser verificado, através da multiplicação direta de  $[T][q]$ , que esta transformação produz o mesmo efeito matemático produzido pelo uso das combinações lineares propostas pelas equações (257) e (258). Seja por exemplo:

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & a_1+ib_1 & a_1-ib_1 \\ t_{21} & a_2+ib_2 & a_2-ib_2 \\ t_{31} & a_3+ib_3 & a_3-ib_3 \end{bmatrix} \quad (275)$$

Pela equação (259) tem-se:

$$[q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2(1-i) & 1/2(1+i) \\ 0 & 1/2(1+i) & 1/2(1-i) \end{bmatrix} \quad (276)$$

Executando as combinações lineares propostas pelas equações (257) e (258) tem-se:

$$[T_c] = \begin{bmatrix} t_{11} & a_1+b_1 & a_1-b_1 \\ t_{21} & a_2+b_2 & a_2-b_2 \\ t_{31} & a_3+b_3 & a_3-b_3 \end{bmatrix} \quad (277)$$

Efetando o produto  $[T][q]$  vem:



$$[\tilde{T}] = [T][q] = \begin{bmatrix} t_{11} & a_1+b_1 & a_1-b_1 \\ t_{21} & a_2+b_2 & a_2-b_2 \\ t_{31} & a_3+b_3 & a_3-b_3 \end{bmatrix} \quad (278)$$

Comparando (278) com (277) tem-se:

$$[T_c] = [\tilde{T}] \quad (279)$$

#### 4.5. Autovetores à Esquerda

Os autovetores à esquerda são obtidos através da resolução da equação

$$\{Y\}^t[A] = \lambda\{Y\}^t[B] \quad (280)$$

Transpondo a equação (280) vem:

$$[A]^t\{Y\} = \lambda[B]\{Y\} \quad (281)$$

A determinação dos autovetores à esquerda pode ser feita após a execução do processo iterativo da técnica de Stodola em blocos. Note que o processo iterativo, descrito no ítem 4.2., determina a transformação exata que projeta o problema no subespaço  $C^m$ . Assim, após, a determinação dos autovetores à direita e consequen-

temente da matriz  $[T]$  exata, tem-se:

$$\{Y\} = [T]\{y\} \quad (282)$$

Substituindo a equação (282) na equação (281) vem:

$$[T]^t[A]^t[T]\{y\} = \lambda[T]^t[B][T]\{y\} \quad (283)$$

Pela equação (223) tem-se:

$$[a] = [T]^t[A][T] \quad (284)$$

Logo, pode-se escrever:

$$[a]^t = [T]^t[A]^t[T] \quad (285)$$

Desta forma, a equação (283) pode ser escrita como:

$$[a]^t\{y\} = \lambda[b]\{y\} \quad (286)$$

Usando a transformação

$$\{y\} = [d_b]\{u\} \quad (287)$$

onde  $[d_b]$  é a matriz dos autovetores de  $[b]$ , e colocando

$$[c]^t = [d_b]^t [a]^t [d_b] \quad (288)$$

tem-se:

$$[c]^t \{u\} = \lambda \{u\} \quad (289)$$

Denominando de  $[E]$  a matriz dos autovetores à esquerda, esta pode ser determinada pela equação

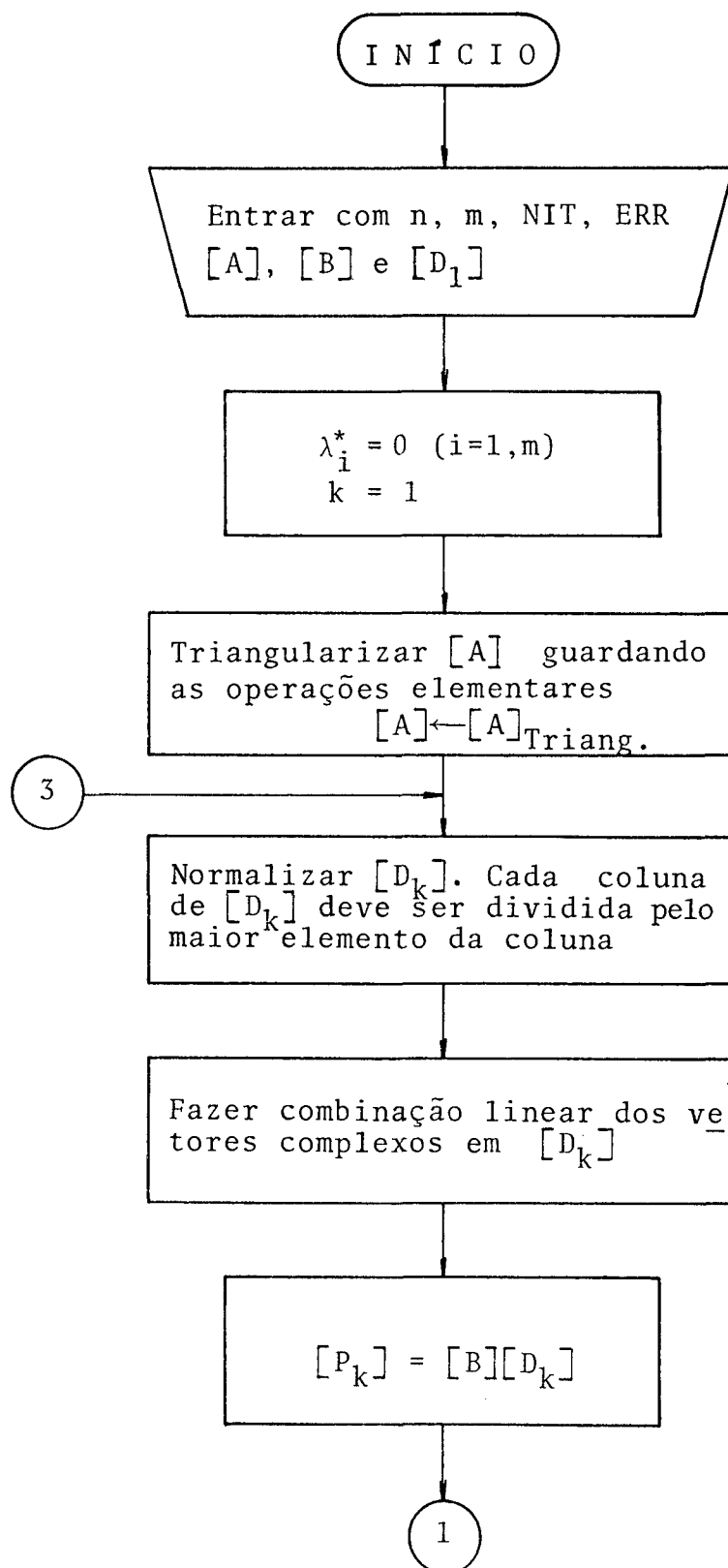
$$[E] = [T][d_b][U] \quad (290)$$

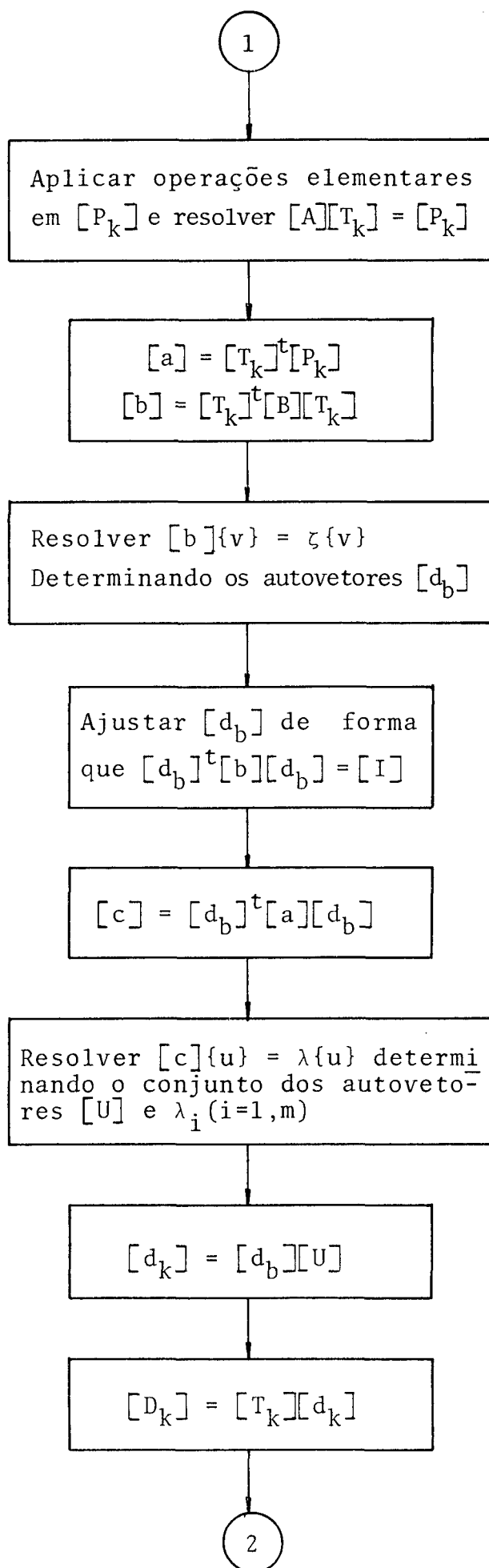
onde  $[U]$  é uma matriz cujas colunas são formadas pelos autovetores da equação (289).

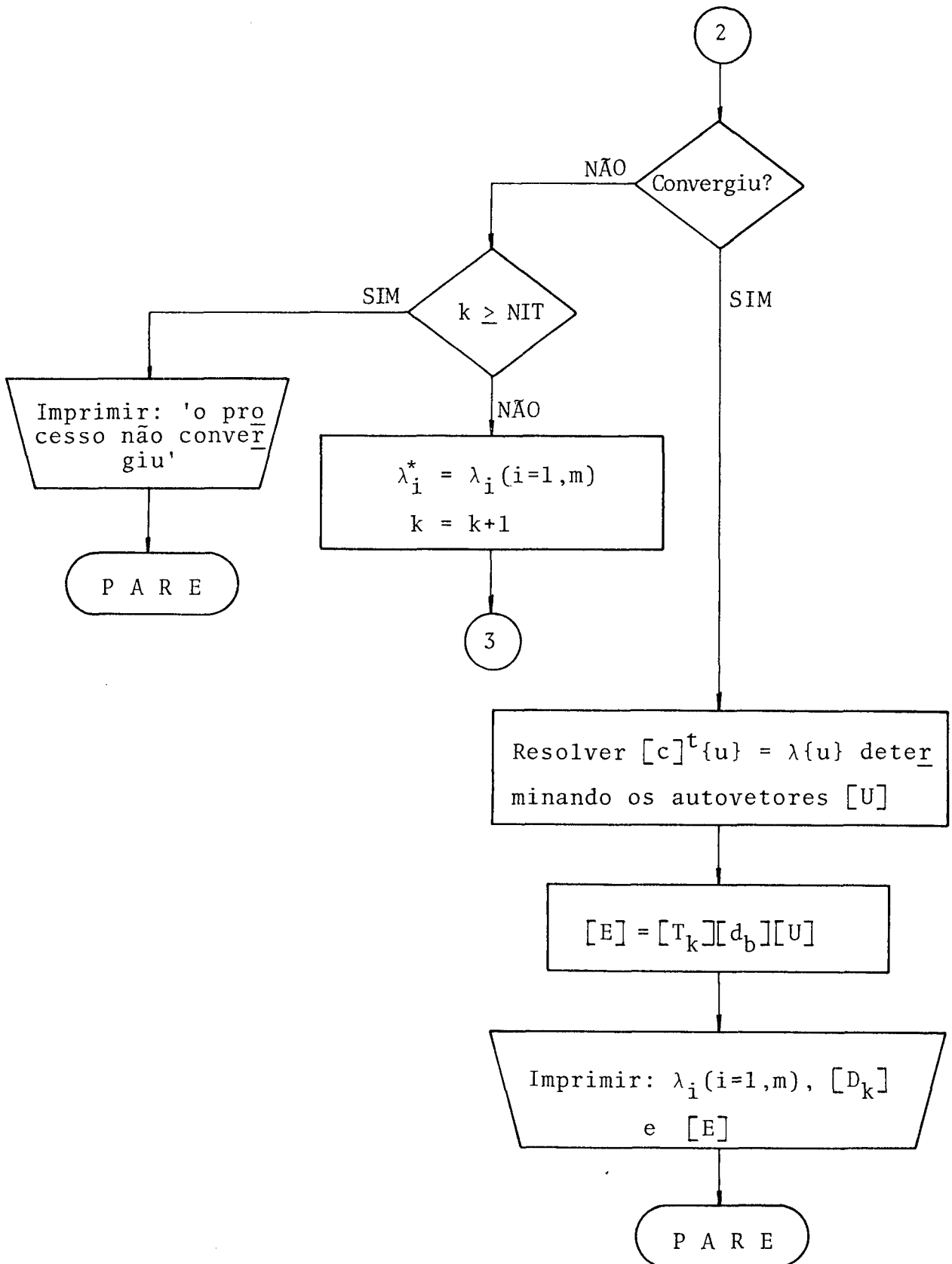
Note que, como o processo iterativo de Stodola aplicado a equação  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$ , determina a transformação  $[T]$  exata, automaticamente ficam determinadas também as matrizes  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[d_b]$  e  $[c]$ . Desta forma, basta apenas resolver a equação (289) e determinar os autovetores à esquerda pela equação (290).

#### 4.6. Fluxograma do Método de Stodola em Blocos

É apresentado neste ítem um fluxograma compactado que especifica os passos fundamentais da técnica iterativa de Stodola.







OBS: NIT - Número máximo de iterações

ERR - Erro admissível

#### 4.7. A Técnica de Stodola em Blocos para Problemas de Autovalores de Grau p.

##### 4.7.1. Um Problema de Autovalores de Grau p.

Um problema de autovalores e autovetores de grau p, pode ser definido pela seguinte equação:

$$([A_0] + \lambda[A_1] + \lambda^2[A_2] + \dots + \lambda^p[A_p])\{X\}_0 = \{0\} \quad (291)$$

Quando  $p = 1$ , a equação (291) fica:

$$([A_0] + \lambda[A_1])\{X\}_0 = \{0\} \quad (292)$$

ou

$$[A_0]\{X\}_0 + \lambda[A_1]\{X\}_0 = \{0\} \quad (293)$$

Observa-se que a equação (293) representa um problema de autovalores na sua forma clássica.

Um problema de autovalores de grau p, com p maior que 1, não apresenta uma complexidade maior quando comparado com um problema comum de autovalores. Através da aplicação de transformações à equação (291) pode-se reduzir este problema de grau p para um problema de grau 1. Assim, seja a seguinte sequên

cia de transformações:

$$\left. \begin{aligned} \{X\}_1 &= \lambda \{X\}_0 \\ \{X\}_2 &= \lambda \{X\}_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \{X\}_{p-1} &= \lambda \{X\}_{p-2} \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

Note que estas transformações são baseadas no teorema que diz: Se  $\{X\}$  é um autovetor, então  $a\{X\}$  também será um autovetor.

As equações (291) e (294) podem ser combinadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \dots & -A_{p-2} & -A_{p-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{p-2} \\ X_{p-1} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{p-2} \\ X_{p-1} \end{Bmatrix} \quad (295)$$

A equação (295) representa um problema de autovalores de grau  $p$ , e é análoga à equação

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (296)$$

de forma que a técnica de Stodola em blocos pode ser aplicada di



retamente. Note que, para um problema de grau  $p$ , as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  serão de ordem  $np$ .

Conforme foi colocado no ítem 4.3., a determinação da transformação  $[T_k]$ , que projeta o problema num subespaço, exige a inversão da matriz  $[A]$  ou a triangularização com substituição regressiva. Para o problema colocado pela equação (295), a determinação de  $[T_k]$  exigirá um maior esforço computacional, pois a matriz  $[A]$  não será matriz banda, mesmo que  $[A_0]$ ,  $[A_1], \dots, [A_p]$  sejam matrizes banda. Esta dificuldade pode ser contornada usando o conceito de matrizes particionadas, que será mostrado na discussão de um problema quadrático de autovalores ( $p = 2$ ).

#### 4.7.2. A Técnica de Stodola para um Problema Quadrático.

Um problema quadrático de autovalores pode ser definido pela equação:

$$([A_0] + \lambda[A_1] + \lambda^2[A_2])\{X\}_0 = \{0\} \quad (297)$$

A equação (297) pode também ser escrita na forma

$$[A_0]\{X\}_0 + \lambda[A_1]\{X\}_0 + \lambda^2[A_2]\{X\}_0 = \{0\} \quad (298)$$

ou

$$[A_0]\{X\}_0 + \lambda([A_1]\{X\}_0 + \lambda[A_2]\{X\}_0) = \{0\} \quad (299)$$

Considerando a transformação

$$\{X\}_1 = \lambda\{X\}_0 \quad (300)$$

As equações (298) e (299) podem ser escritas como:

$$[A_0]\{X\}_0 + [A_1]\{X\}_1 + \lambda[A_2]\{X\}_1 = \{0\} \quad (301)$$

$$[A_0]\{X\}_0 + \lambda([A_1]\{X\}_0 + [A_2]\{X\}_1) = \{0\} \quad (302)$$

As equações (300) e (301) podem ser combinadas e escritas na seguinte forma:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (303)$$

onde

$$[A] = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -A_0 & -A_1 \end{array} \right] \quad (304)$$

$$[B] = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right] \quad (305)$$

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} X_0 \\ \hline X_1 \end{array} \right\} \quad (306)$$

O mesmo resultado pode ser obtido combinando as equações (300) e (302).

Note que a equação (303) representa um problema de autovalores e autovetores na sua forma clássica, de modo que a técnica de Stodola pode ser aplicada diretamente. Conforme já foi mostrado, para obter o problema no subespaço, usa-se a transformação

$$\{X\} = [T_k]\{x\} \quad (307)$$

Usando matrizes particionadas, a equação (307) pode ser escrita como:

$$\{X\} = \left\{ \begin{array}{c} X_0 \\ \hline X_1 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} T'_k \\ \hline T''_k \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_0 \\ \hline x_1 \end{array} \right\} \quad (308)$$

Pelas equações da técnica de Stodola tem-se<sup>33</sup>:

$$[A][T_k] = [P_k] \quad (309)$$

$$[P_k] = [B][D_{k-1}] \quad (310)$$

Substituindo a equação (310) na equação (309) vem:

$$[A][T_k] = [B][D_{k-1}] \quad (311)$$

---

<sup>33</sup>Veja ítem 4.2.

Considerando as equações (304), (305), (306) e (308), a equação (311) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_k \\ T''_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{k-1} \\ D''_{k-1} \end{bmatrix} \quad (312)$$

onde

$$[D_{k-1}] = \begin{bmatrix} D'_{k-1} \\ D''_{k-1} \end{bmatrix} \quad (313)$$

A equação (312) permite concluir que:

$$[T''_k] = [D'_{k-1}] \quad (314)$$

$$-[A_0][T'_k] - [A_1][T''_k] = [A_2][D''_{k-1}] \quad (315)$$

A equação (315) também pode ser escrita como:

$$[T'_k] = -[A_0]^{-1}([A_2][D''_{k-1}] + [A_1][D'_{k-1}]) \quad (316)$$

Desta forma, a transformação  $[T_k]$  pode ser determinada pelas equações (314) e (316), exigindo apenas a inversão de  $[A_0]$ , o que facilita o trabalho computacional.

Após a determinação de  $[T_k]$ , as matrizes correspondentes a  $[A]$  e  $[B]$  no subespaço, podem ser determinadas por:

$$[a] = [T_k]^t [A] [T_k] \quad (317)$$

$$[b] = [T_k]^t [B] [T_k] \quad (318)$$

Considerando que

$$[A][T_k] = [P_k] = [B][D_{k-1}] \quad (319)$$

a equação (317) pode ser escrita como:

$$[a] = \begin{bmatrix} T'_k \\ T''_k \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \hline 0 & | & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_{k-1} \\ \hline D''_{k-1} \end{bmatrix} \quad (320)$$

ou

$$[a] = [T'_k]^t [D'_{k-1}] + [T''_k]^t [A_2] [D''_{k-1}] \quad (321)$$

Da equação (318) conclui-se que:

$$[b] = [T'_k]^t [T'_k] + [T''_k]^t [A_2] [T''_k] \quad (322)$$

O restante do procedimento é idêntico ao apresentado no item 4.2.

## C A P Í T U L O   V

5. DISCUSSÕES E CONCLUSÕES5.1. Aspectos de Armazenamento

A técnica de Stodola em blocos, descrita no capítulo IV, é aplicável à equação

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (323)$$

com  $[B]$  devendo ser uma matriz simétrica. As matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são normalmente matrizes banda. Em termos de construção do programa de computador, para a matriz  $[A]$  é conveniente que somente os elementos  $a_{ij}$  da banda sejam armazenados. Por outro lado, devido a simetria de  $[B]$ , é conveniente que sejam armazenados apenas os elementos  $b_{ij}$  da banda, com  $i \leq j$ . Este processo de armazenar apenas os elementos da banda, proporcionará uma sensível economia de memória, especialmente no caso de grandes sistemas algébricos. As formas de armazenamento para  $[A]$  e  $[B]$  são mostradas nas figuras 2 e 3.

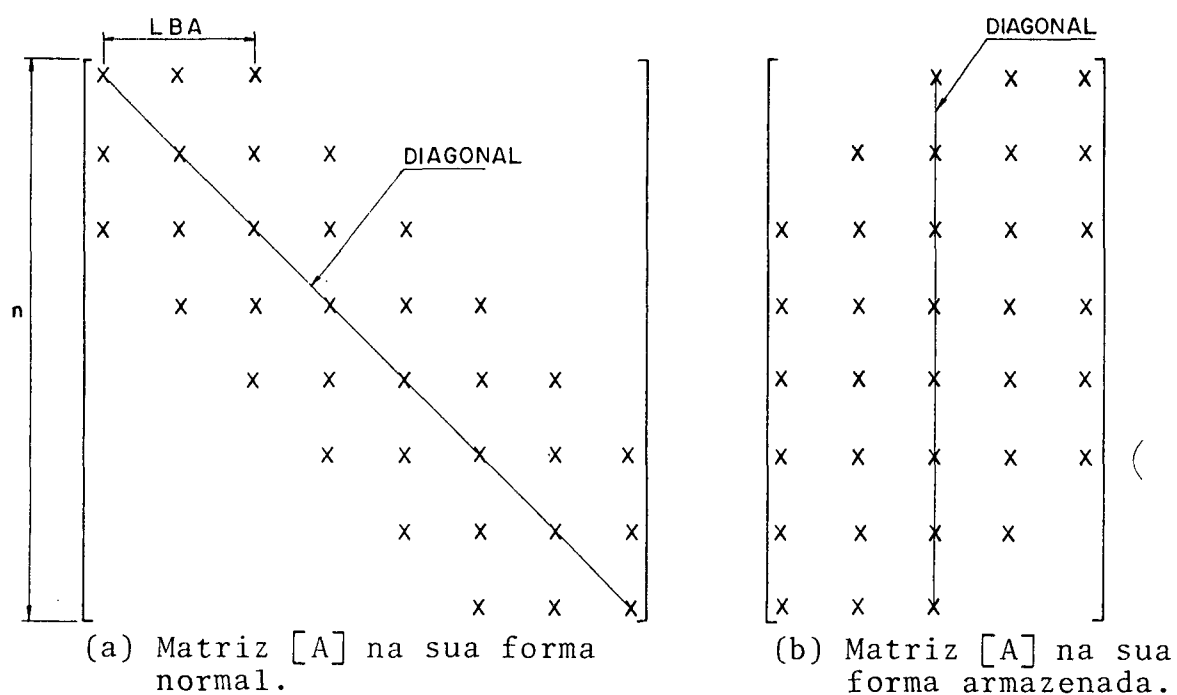


Figura 2 - Forma de armazenamento para a matriz  $[A]$ .

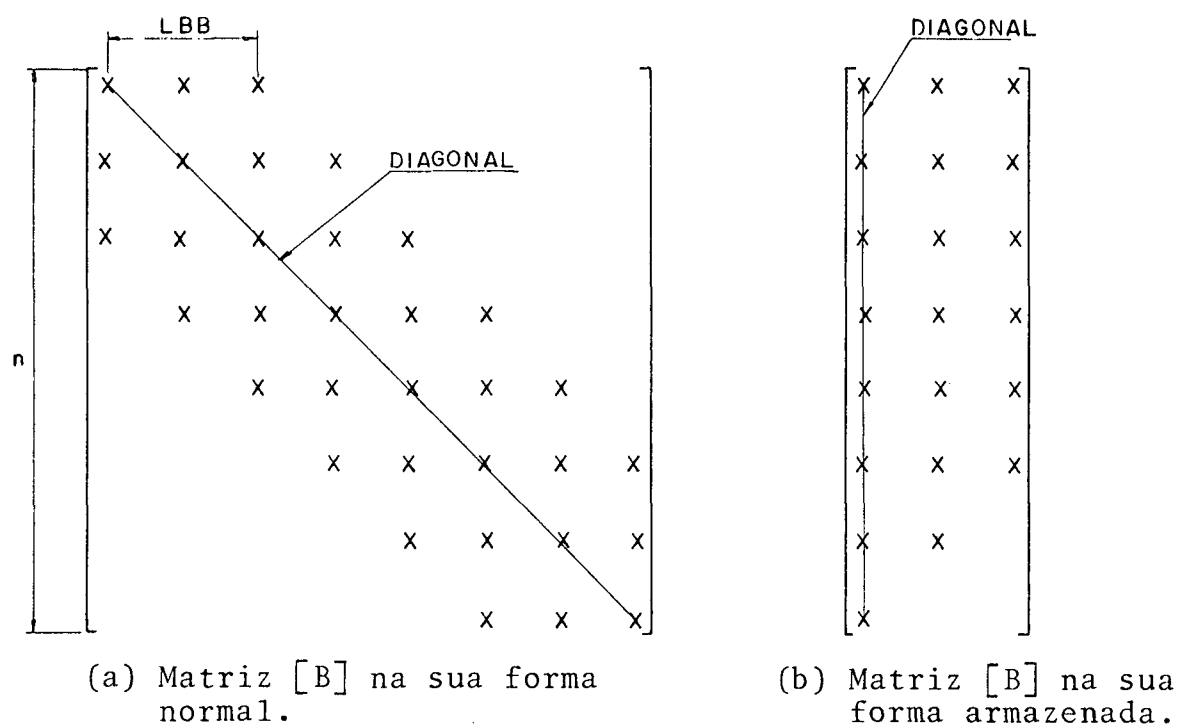


Figura 3 - Forma de armazenamento para a matriz  $[B]$ .

Para as figuras 2 e 3 tem-se:

LBA - Metade da largura de banda da matriz [A]

LBB - Metade da largura de banda da matriz [B]

n - Ordem das matrizes [A] e [B]

Pode-se verificar facilmente para a matriz [A], que sua forma de armazenamento especificada na figura 2, não causará economia de memória quando  $n < 2.LBA$ . Neste caso, é conveniente que seja utilizada a forma normal de armazenamento.

Conforme foi mostrado no Capítulo IV, na resolução da equação

$$[a]\{x\} = \lambda[b]\{x\} \quad (324)$$

é possível que sua solução  $[d_k]$  contenha autovetores complexos. Note que  $[d_k]$  é uma matriz de ordem m por m onde cada coluna é constituída por um autovetor da equação (324). O aparecimento de autovetores complexos exigirá uma maior área de armazenamento, já que um vetor complexo é constituído de um vetor real e um vetor imaginário. Esta dificuldade pode ser contornada através do não armazenamento dos conjugados dos autovetores complexos, possibilitando desta forma, que a parte real e a parte imaginária de um autovetor complexo sejam armazenadas em duas colunas adjacentes da matriz  $[d_k]$ .



## 5.2. Aspectos de Convergência

O método de Stodola em blocos converge para os  $m$  autovalores de menor valor absoluto, sendo que a convergência ocorre de baixo para cima, isto é, entre os  $m$  autovalores que estão sendo determinados, a convergência ocorre mais rapidamente para o autovalor de menor módulo.

A velocidade de convergência dependerá da diferença entre os módulos dos autovalores e da matriz dos vetores iniciais, ou seja, da matriz  $[P]$  que representa um determinado carregamento inercial. Assim, quanto maior for a diferença entre os módulos dos autovalores, maior será a velocidade de convergência. Da mesma forma, na medida em que  $[P]$  inicial melhor representar o carregamento inercial da estrutura, mais rapidamente ocorrerá a convergência.

Note que os autovalores são determinados através da resolução da equação

$$[c]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (325)$$

Esta equação é solucionada através do algoritmo QR que é um processo iterativo. Assim, na sua resolução, ocorre a convergência para um conjunto de autovalores e autovetores que apresentam um certo nível de erro. Este erro é transferido para as demais equações da técnica de Stodola que irão determinar uma nova matriz  $[c]$ . Se entre os  $m$  autovalores que vão ser determinados existir dois ou mais autovalores cujos módulos são bastante próximos, o

erro introduzido na resolução da equação (325) pode fazer com que, para estes autovalores com módulos bastante próximos, ocorra uma alternância dos autovalores calculados em cada iteração, não permitindo a convergência.

Foi verificado que em muitas situações deste tipo, a multiplicação da equação (325) por um fator de escala  $\gamma$  ( $\gamma > 1$ ) antes da sua resolução, pode permitir e até acelerar a convergência. Seja por exemplo, o sistema  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$  onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 10.00 & 4.00 & -5.00 & 0.00 & 2.00 & 0.00 \\ 4.00 & 9.00 & 7.00 & -6.00 & 5.00 & 0.00 \\ 3.00 & 4.00 & 7.00 & 2.00 & 4.00 & 0.00 \\ 8.00 & 12.00 & -2.00 & 9.00 & 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 5.00 & 2.00 & 7.00 & 4.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 9.06 \end{bmatrix} \quad (326)$$

$$[B] = [I] \quad (327)$$

Este sistema tem os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = 3.61719$$

$$\lambda_2 = 6.65093$$

$$\lambda_3 = 6.03627 + 6.73517i$$

$$\lambda_4 = 6.03627 - 6.73517i$$

$$\lambda_5 = 9.06000$$

$$\lambda_6 = 16.65932$$

note que

$$|\lambda_5| \cong |\lambda_4|$$

O sistema foi processado para dois valores de  $m$  :  $m = 5$  e  $m = 6$  . Nos dois casos, após 80 iterações, não houve a convergência. Utilizando um fator de escala igual a  $1 \times 10^3$ , no caso de  $m = 5$  a convergência ocorreu após 20 iterações e no caso de  $m = 6$  após 4 iterações. Em ambos os casos foi considerado um erro admissível de  $1 \times 10^{-5}$ . Em alguns casos, o fator de escala pode ser substituído por uma tolerância menor para o processo iterativo que resolve a equação (325).

Um outro aspecto que deve ser levado em consideração é uma possível proximidade entre um autovalor que está sendo determinado e um outro autovalor do sistema. Seja  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  os autovalores que estão sendo determinados. Se a diferença entre os módulos de  $\lambda_m$  e  $\lambda_{m+1}$  for pequena, então será difícil obter a convergência. Este caso pode ser observado, por exemplo, no sistema definido pelas equações (326) e (327). Note que como  $|\lambda_4| \cong |\lambda_5|$ , para  $m = 4$  será difícil obter a convergência. O mesmo caso ocorre quando  $\lambda_m$  é um autovalor complexo e  $\lambda_{m+1}$  é o seu complexo conjugado. A solução para estes casos é determinar  $m + 1$  autovalores em vez de  $m$ .

Ainda no caso de autovalores com módulos bastante próximos, é conveniente que os autovalores determinados através da equação (325), sejam ordenados a cada iteração da técnica de Stodola. Devido a proximidade dos autovalores, é possível

que ocorra alguma inversão na ordem destes autovalores, dificultando desta forma, o processo de convergência.

### 5.3. A Resolução da Equação $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$

Seja a equação:

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (328)$$

Foi verificado que quando  $[A]$  e  $[B]$  são matrizes simétricas, no decorrer do processo iterativo da técnica de Stodola, as matrizes  $[a]$  e  $[b]$  assumem formas bandas cuja largura de banda tende a diminuir a cada iteração. Já quando  $[A]$  é não simétrica, a matriz  $[a]$  não necessariamente assume a forma banda. Note que se  $[a]$  e  $[b]$  assumem formas bandas, que durante o processo iterativo tendem a uma forma diagonal, então a matriz  $[c]$  da equação (325) também terá uma forma banda. Caso  $[a]$  não seja uma matriz banda então  $[c]$  tenderá a ser uma matriz cheia.

Na resolução da equação (325), esta característica de  $[c]$  ter ou não uma forma banda, exerce papel importante na escolha do método de resolução desta equação. Conforme foi colocado em capítulos anteriores, o método QR constitui-se em uma eficiente técnica para a resolução da equação (325). Entretanto quando  $[c]$  tem uma forma banda, foi verificado que o método de Jacobi tende a ser mais eficiente que o método QR. Seja por exemplo, as seguintes matrizes:

Matriz 1 - matriz cheia de ordem 3

Matriz 2 - matriz cheia de ordem 7

Matriz 3 - matriz banda de ordem 8 com largura de banda igual a 5.

Para efeito de comparação, foram determinados os autovalores e autovetores destas três matrizes, usando-se o método QR e o método de Jacobi. O tempo de execução em computador e o número de iterações obtidos para cada caso, são mostrados na Tabela 2. Para efeito de medir a convergência, considerou-se um erro igual a  $1 \times 10^{-6}$ .

Matriz \ Método	JACOBI		QR	
	Tempo execução(s)	Número iterações	Tempo execução(s)	Número iterações
1	0.25	7	0.24	3
2	12.19	56	7.48	18
3	14.60	48	27.90	61

Tabela 2 - Comparação entre o método de Jacobi e o método QR.

A Tabela 2 mostra que o método QR é mais eficiente que o método de Jacobi quando trabalha-se com matrizes cheias. Já para matrizes do tipo banda, o método de Jacobi tende a ser mais eficiente. Pode-se concluir então que quando a matriz  $[A]$  da equação (328) é não simétrica, é conveniente que a equa-

ção (325) seja solucionada pelo método QR. Já se  $[A]$  e  $[B]$  são simétricas é mais conveniente o uso do método de Jacobi.

#### 5.4. Aplicação Prática

A técnica de Stodola em blocos foi aplicada na determinação das frequências naturais e modos de vibração de uma estrutura tipo asa de avião. Considerou-se a massa total da asa como sendo uniformemente distribuída sobre a asa de comprimento  $L$ . O total da massa da fuselagem é de  $2M_f$ .

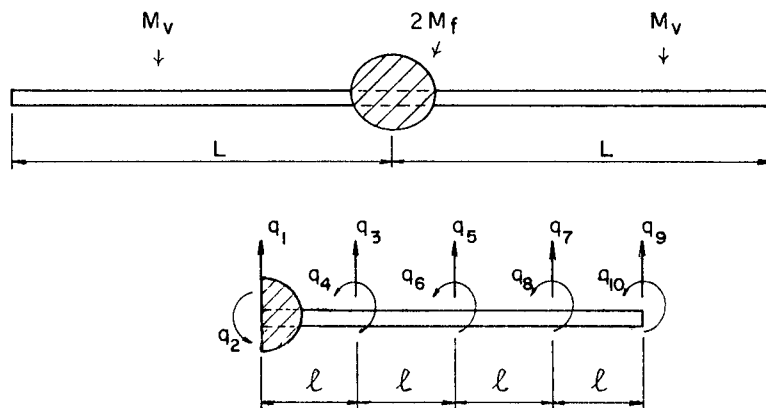


Figura 4 - Asa uniforme engastada à massa da fuselagem.

Para uma discretização em 10 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 4, as matrizes dos coeficientes de influência são dadas por<sup>34</sup> :

<sup>34</sup> Veja PRZEMIENIECKI, J.S. *Theory of matrix structural analysis*. p. 333.

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

(329)

$$[M] = \frac{M_V}{1680} \begin{bmatrix} 156+1.68R & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 312 & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

(330)

onde  $R = M_f/M_V$ .

A estrutura foi processada inicialmente considerando-se o caso não amortecido. Considerou-se também,  $R = 0$ ,  $\ell = 0.25$  e  $q_2 = 0$  (veja Figura 5). Para  $q_2 = 0$  são removidas das matrizes  $[M]$  e  $[K]$  a linha 2 e a coluna 2. A Tabela 3 mostra os valores obtidos considerando-se a determinação de 6 frequências naturais. As coordenadas dos respectivos modos de vibração são mostradas na Tabela 4 e a Figura 6 apresenta quatro destes modos plotados.

Número da frequência	Valor de $\lambda$
1	0.1889417E 02
2	0.5432822E 01
3	0.1741874E 01
4	0.6988604E 00
5	0.2951601E 00
6	0.1179729E 00

Tabela 3 - Valores de  $\lambda = \frac{107520EI}{\omega^2 M_V L^3}$  para uma asa uniforme.

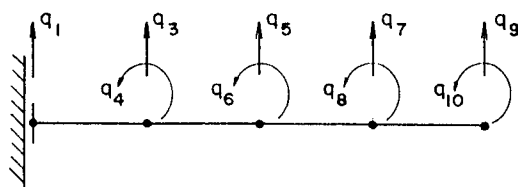


Figura 5 - Discretização dos deslocamentos de uma asa uniforme em 9 graus de liberdade.



Modo n° q <sub>k</sub>	1	2	3	4	5	6
1	-0.81827E-01	0.66212E-01	-0.36364E-01	0.25421E-01	-0.15511E-01	0.11358E-02
3	0.45382E-01	-0.64480E-01	0.30033E-01	-0.51776E-02	-0.86698E-02	0.13798E-02
4	0.58648E 00	-0.14677E 00	-0.45424E 00	0.79788E 00	-0.77548E 00	0.73546E-01
5	0.32507E-01	0.59541E-01	-0.13218E-01	-0.23304E-01	0.58240E-02	0.22199E-02
6	-0.64148E 00	0.28762E 00	0.75068E 00	-0.32488E 00	-0.86683E 00	0.17874E 00
7	-0.73684E-01	-0.48823E-01	-0.72586E-02	0.15144E-01	0.15492E-01	0.42569E-02
8	0.18941E 00	-0.38290E 00	-0.77243E 00	-0.65806E 00	-0.18827E 00	0.36497E 00
9	0.11508E 00	0.82979E-01	0.58917E-01	0.42919E-01	0.31884E-01	0.24818E-01
10	0.10000E 01	0.10000E 01	0.10000E 01	0.10000E 01	0.10000E 01	0.10000E 01

Tabela 4 - Modos de vibração para uma asa uniforme.

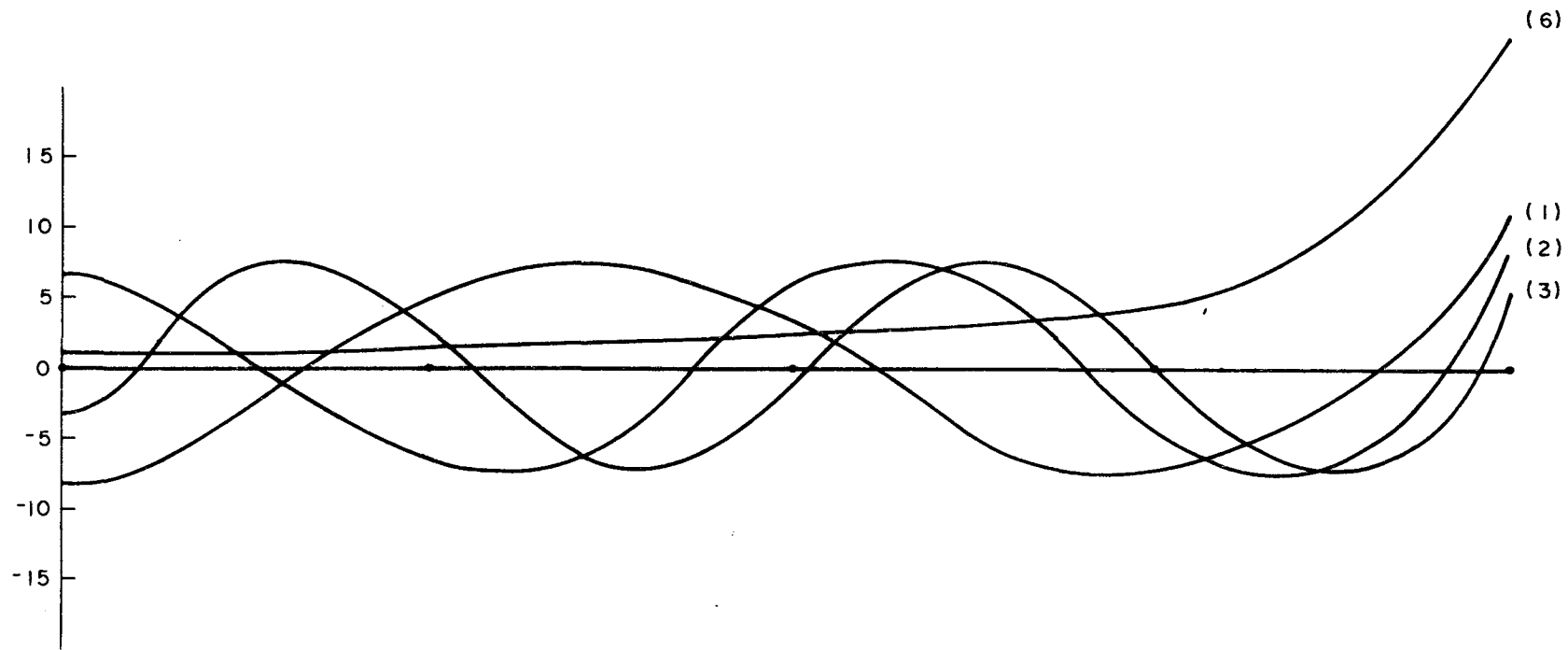


Figura 6 - Modos de vibração para uma asa uniforme.

A estrutura também foi processada para o caso amortecido, considerando  $q_1 = q_2 = 0$ . Para  $q_1 = q_2 = 0$ , são removidas das matrizes  $[M]$  e  $[K]$  as linhas 1 e 2 e as colunas 1 e 2. Considerou-se a seguinte matriz de amortecimento:

$$[C] = \frac{\sqrt{M_V EI}}{10^2 \ell} \begin{bmatrix} 0.50 & 1.70 & 0.80 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.70 & 1.80 & 0.40 & 0.40 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.80 & 0.40 & 3.80 & 0.40 & -0.10 & -0.20 & 0.00 & 0.00 \\ 0.50 & 0.40 & 0.40 & -41.20 & 0.11 & -0.34 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.10 & 0.11 & -2.14 & 1.10 & 19.00 & -0.20 \\ 0.00 & 0.00 & -0.20 & -3.40 & 1.10 & -0.09 & 1.20 & 0.60 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 19.00 & 1.20 & 9.50 & -0.70 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & 0.60 & -0.70 & 0.70 \end{bmatrix} \quad (331)$$

Os valores de

$$\lambda = -\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{M_V \ell^4}{EI}} \quad (332)$$

são mostrados na Tabela 5. Os respectivos modos de vibração  $\{X\}_j$  são determinados através de:

$$\{Y\}_j = \frac{1}{p} \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{X}\}_j \\ \{X\}_j/p \end{array} \right\} \quad (333)$$

onde

$$p = \sqrt{\frac{M_V \ell^4}{EI}} \quad (334)$$

Número do autovalor	Valor de $\lambda$
1	0.1515267E-01 + 0.4186007E-01i
2	0.1515267E-01 - 0.4186007E-01i
3	0.2781845E-01
4	0.1197707E-01
5	-0.1565410E-02

Tabela 5 - Valores de  $\lambda$  para uma estrutura com amortecimento.

Foram determinados os seguintes  $\{Y\}_j$ :

$$\{Y\}_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0.34036E-02 - 0.18061E-02i \\ 0.10000E-01 - 0.11775E-00i \\ -0.14707E-01 + 0.84715E-02i \\ 0.14923E-01 - 0.35336E-01i \\ 0.27998E-02 - 0.26843E-02i \\ -0.36488E-01 + 0.14841E-00i \\ 0.13143E-02 - 0.87154E-02i \\ 0.55296E-01 - 0.19088E-00i \\ -0.12717E-03 - 0.11510E-03i \\ -0.20081E-01 - 0.40075E-01i \\ 0.57745E-03 + 0.48728E-03i \\ -0.17052E-02 - 0.89181E-04i \\ -0.15478E-03 - 0.76522E-04i \\ 0.67656E-02 - 0.72127E-03i \\ -0.38474E-03 + 0.77036E-04i \\ -0.88282E-02 + 0.57765E-03i \end{array} \right\}$$

$$\{Y\}_2 = \{\bar{Y}\}_1$$

$$\{Y\}_3 = \left\{ \begin{array}{l} -0.18544E-03 \\ -0.68573E-02 \\ 0.12660E-02 \\ 0.19042E-02 \\ 0.35230E-02 \\ 0.20178E 00 \\ 0.32782E-01 \\ 0.10000E 01 \\ 0.51572E-05 \\ 0.19039E-03 \\ -0.35210E-04 \\ -0.52999E-04 \\ -0.98002E-04 \\ -0.56131E-02 \\ -0.91194E-03 \\ -0.27818E-01 \end{array} \right\}, \quad \{Y\}_4 = \left\{ \begin{array}{l} -0.20347E-03 \\ -0.82440E-02 \\ 0.16762E-02 \\ 0.82135E-02 \\ 0.48465E-02 \\ 0.23693E 00 \\ 0.29216E-01 \\ 0.10000E 01 \\ 0.24361E-05 \\ 0.98523E-04 \\ -0.20071E-04 \\ -0.98387E-04 \\ -0.58045E-04 \\ -0.28377E-02 \\ -0.34991E-03 \\ -0.11977E-01 \end{array} \right\}$$

$$\{Y\}_5 = \left\{ \begin{array}{l} 0.10099E-01 \\ 0.35277E 00 \\ 0.16778E-02 \\ 0.10000E 01 \\ -0.68084E-02 \\ 0.56946E 00 \\ 0.89983E-02 \\ 0.52523E 00 \\ 0.15811E-04 \\ 0.55243E-03 \\ 0.26228E-05 \\ 0.15654E-02 \\ -0.10657E-04 \\ 0.89146E-03 \\ 0.14086E-04 \\ 0.82221E-03 \end{array} \right\}$$

### 5.5. Conclusões e Sugestões

Através de vários testes realizados, verificou-se que o método de Stodola em blocos constitui-se em um eficiente método para a determinação de um subconjunto de autovalores e autovetores. Esta eficiência se caracteriza pelo tempo de computação e se deve ao processo de mudança do espaço vetorial com a redução das coordenadas do problema original.

Entretanto, é conveniente salientar que o método de Stodola em blocos é uma técnica que se destaca das técnicas convencionais, no aspecto eficiência, somente para grandes sistemas algébricos. Foi observado também, que sua eficiência diminui quando o número de autovalores e autovetores a ser determinado está próximo da ordem do sistema.

Estas características podem ser observadas a partir de uma comparação dos tempos de computação obtidos no processamento de um sistema pelo método de Stodola em blocos e do mesmo sistema pelo método de Stodola-Vianello (Potências). Foram processados dois sistemas do tipo

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (335)$$

sendo um sistema de ordem 5 e outro de ordem 32. Os tempos de computação obtidos para cada sistema são mostrados nas tabelas 6 e 7, onde  $m$  representa o número de autovalores e autovetores determinados.

m \ Método	Stodola-Vianello	Stodola em blocos
1	0.37	0.82
2	0.90	5.60
3	1.12	5.96
4	1.37	10.00
5	1.50	14.76

Tabela 6 - Tempos de computação em segundos para um sistema do tipo  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$  de ordem 5.

m \ Método	Stodola-Vianello	Stodola em blocos
1	23.06	3.99
2	32.25	4.57
3	40.02	17.80
4	49.27	24.65
5	57.91	32.94

Tabela 7 - Tempos de computação em segundos para um sistema do tipo  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$  de ordem 32.

Para efeito de medir a convergência, em cada caso considerou-se um erro admissível de  $10^{-5}$ .

Apesar dos tempos de computação apresentados pelas tabelas 6 e 7 serem restritos a sistemas específicos, de alguma forma já fica demonstrado que a técnica de Stodola em blocos tem boa eficiência para grandes sistemas algébricos.

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se colocar:

- a) Desenvolvimento de técnicas de seleção da matriz dos vetores iniciais (matriz  $[P_k]$  da equação 220), de forma a melhorar a eficiência da técnica de Stodola.
- b) Desenvolvimento da técnica de Stodola para as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  quaisquer. Para este caso, pode-se estudar a possibilidade de dividir as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  em parte simétrica e parte antisimétrica, tentando obter desta forma, dois problemas: um envolvendo matrizes simétricas e outro envolvendo matrizes antisimétricas.
- c) Implementação em computador da técnica de Stodola para sistemas genéricos de grau  $p$ .



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALVES, D.B. *Métodos numéricos*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica.
2. \_\_\_\_\_. *Algebra linear*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica.
3. ANDERSON, A. Roger. *Fundamentals of vibrations*. New York , Macmillan Company, 1967.
4. ATKINSON, Kendall E. *An introduction to numerical analysis* . New York, John Wiley & Sons, 1978.
5. BATHE, K.J. & WILSON, E.L. *Large eigenvalue problems in dynamics analysis*. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 98(6):1471-85, Dec. 1972.
6. CULLUM, Jane. *The simultaneous computation of a few algebraically largest and smallest eigenvalues of a large, sparse, symmetric matrix*. New York, IBM Research Division, Research Report, 1977, 19p.
7. DONG, Stanley B. *A Block-Stodola eigensolution technique for large algebraic systems with non-symmetrical matrices*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , New York, 2:247-67, 1977.
8. DONG, Stanley B. et alli. *On a direct-iterative eigensolution technique*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, New York, 4:155-61, 1972.
9. FICKEN, F.A. *Linear transformations and matrices*. New Jersey, Prentice-Hall, 1964.

10. GANTMACHER, F.R. *The theory of matrices*. New York, Chelsea Publishing Company, 1960. v. I.
11. HURTY, Walter C. & RUBINSTEIN, Moshe F. *Dynamics of structures*. New Jersey, Prentice-Hall, 1964.
12. KELLY, L.G. *Handbook of numerical methods and applications*. Cambridge, Mass., Addison-Wesley, 1967.
13. KETTER, R.L. & PRAWEL, P.S. *Modern methods of engineering computation*. New York, McGraw-Hill Book company, 1965.
14. KUO, S.S. *Numerical methods and computers*. Cambridge, Mass., Addison-Wesley, 1965.
15. MOLER, C.B. & STEWART, G.W. *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*. Siam Journal on Numerical Analysis, Philadelphia, 10(2):241-56, Apr. 1973.
16. PENNINGTON, R.H. *Introductory computer methods and numerical analysis*. New York, Macmillan, 1965.
17. PIPES, L.A. & HOVANESSIAN, S.A. *Matrix - computer methods in engineering*. New York, John Wiley & Sons, 1969.
18. PRZEMIENIECKI, J.S. *Theory of matrix structural analysis*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.
19. RALSTON, A. *A first course in numerical analysis*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1965.
20. WILKINSON, J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford, Clarendon Press, 1965.

A P Ê N D I C E I

PROVA DA CONVERGÊNCIA DO MÉTODO  
DE STODOLA EM BLOCOS

A técnica de Stodola em blocos aplicada a equação

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (336)$$

converge para os autovalores de menor valor absoluto. A prova desta afirmação pode ser baseada na prova da convergência para o autovalor de menor valor absoluto do método de Stodola-Vianello.

Considerando  $[A]$  não singular, a equação (336) também pode ser escrita como:

$$[A]^{-1}[B]\{X\} = \frac{1}{\lambda}\{X\} \quad (337)$$

Colocando

$$[C] = [A]^{-1}[B] \quad (338)$$

vem

$$[C]\{X\} = \frac{1}{\lambda}\{X\} \quad (339)$$

Conforme foi mostrado no capítulo IV, para projetar o problema colocado pela equação (336) num subespaço de  $C^n$ , tem-se:

$$\{X\} = [T]\{x\} \quad (340)$$

Considerando as equações relativas à técnica de Stodola, pode-se escrever a matriz  $[T]$  como:

$$[T] = [T_k] = [A]^{-1}[B][D_{k-1}] = [C][D_{k-1}] \quad (341)$$

Sabe-se que a matriz  $[T]$  é de ordem  $n$  por  $m$ . Considerando  $m = 1$ ,  $\{x\}$  da equação (340) será um escalar, de forma que a equação (340) pode ser escrita como:

$$\{X\} = p[T] \quad (342)$$

Para uma primeira iteração, a equação (341) pode ser escrita como:

$$[T_1] = [C][D_0] \quad (343)$$

e desta forma

$$\{X\} = [D_1] = p[C][D_0] \quad (344)$$

Substituindo a equação (344) na equação (339) vem:

$$p[C]^2[D_0] = \frac{p}{\lambda} [C][D_0] \quad (345)$$

A equação (345) só será verdadeira se  $[D_0] = \{D\}_0$  for o verdadeiro autovetor. Como  $\{D\}_0$  se constitui em um vetor inicial, então

$$p[C]^2\{D\}_0 = \{D\}_2 \quad (346)$$

Com  $\{D\}_1$  é iniciado o processo iterativo e se  $\{D\}_k$  ( $k=1,2,\dots$ ) for dividido pela sua maior coordenada em módulo, após  $r$  iterações pode-se escrever:

$$[C]^r\{D\}_0 = p_r\{D\}_r \quad (347)$$

Considerando que  $\{X\}_1, \{X\}_2, \dots, \{X\}_n$  são os verdadeiros autovetores da equação (339) e que esta equação tenha os autovalores  $\lambda_i$  todos distintos, então qualquer vetor  $\{D\}_0$  pode ser escrito como:

$$\{D\}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \{X\}_i \quad (348)$$

Multiplicando a equação (348) por  $[C]^r$  vem:

$$[C]^r\{D\}_0 = \sum_{i=1}^n a_i [C]^r\{X\}_i \quad (349)$$

Considerando a equação (339), pela teoria de autovalores e autovetores tem-se:

$$[C]^r\{X\}_i = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^r \{X\}_i \quad (350)$$

Substituindo a equação (350) na equação (349) vem:

$$[C]^r \{D\}_0 = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^r \{X\}_i \quad (351)$$

Explicitando  $\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^r$  na equação (351), pode-se escrever:

$$[C]^r \{D\}_0 = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^r \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^r \{X\}_i \quad (352)$$

A equação (352) pode ser escrita na forma:

$$[C]^r \{D\}_0 = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^r (a_1 \{X\}_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^r \{X\}_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^r \{X\}_n) \quad (353)$$

Considerando que os autovalores são todos distintos e que

$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| > \dots > \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \quad (354)$$

então  $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^r$  para  $i \neq 1$ , tende a zero quando  $r$  tende a infinito. Desta forma, para  $r$  tendendo a infinito, a equação (353) pode ser escrita como:

$$[C]^r \{D\}_0 = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^r (a_1 \{X\}_1) \quad (355)$$

que é análoga à equação (347) com

$$p_r = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^r a_1 \quad (356)$$

Logo, como  $(\frac{1}{\lambda_1})^r$  é o autovalor de maior valor absoluto de  $[C]^r$ ,  $\frac{1}{\lambda_1}$  será o autovalor de maior valor absoluto de  $[C]$  e consequentemente  $\lambda_1$  será o autovalor de menor valor absoluto da equação (336)

Para a determinação de  $m$  soluções, a transformação  $[T]$  terá  $m$  colunas. Como cada coluna de  $[T]$  é linearmente independente, pode-se aplicar o mesmo raciocínio feito para  $m = 1$  e concluir que para  $1 \leq m \leq n$ , a técnica de Stodola converge para os  $m$  autovalores de menor valor absoluto. O perigo de uma instabilidade numérica no sentido de que todos os  $m$  autovalores convirjam para o autovalor de menor valor absoluto, não existe já que  $[T_k]$  de cada iteração, é determinada em função dos autovetores da equação  $[a]\{x\} = \lambda[b]\{x\}$ , que para autovalores distintos, são linearmente independentes. A velocidade de convergência dependerá da escolha inicial de  $[P]$  e da diferença entre os módulos dos autovalores.

Uma observação deve ser feita no caso da equação (336) ter autovalores complexos. Sabe-se que se  $\lambda = \zeta + i\mu$  é um autovalor, então o seu conjugado também será. Neste caso, a equação (354) não será verdadeira, e se  $\lambda_1$  é complexo, então para  $m = 1$  não será garantida a convergência. Assim, para  $\lambda_1$  complexo, o mínimo valor de  $m$  deve ser dois para que haja a convergência. O mesmo raciocínio se aplica a um  $m$  qualquer.



A P Ê N D I C E I I

MANUAL DO USUÁRIO

## 1. Introdução

Será colocado neste apêndice as informações necessárias para que um usuário consiga utilizar o conjunto de programas que resolve a equação

$$[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\} \quad (357)$$

através da técnica de Stodola em blocos. Note que  $[A]$  é uma matriz real de ordem  $n$  e  $[B]$  é uma matriz real, necessariamente simétrica, de ordem  $n$ .

O conjunto de programas foi construído em linguagem Fortran e foi processado em um IBM 4341. Este conjunto tem como base um programa principal que lê os parâmetros iniciais, calcula o posicionamento das variáveis em um vetor dinâmico e procede a chamada das várias subrotinas que determinarão a solução. Para que seja viável a resolução da equação (357) com grandes valores de  $n$ , o sistema cria um arquivo em disco onde são armazenados temporariamente alguns conjuntos de dados intermediários do problema.

## 2. Arquivo dos Dados de Entrada

Os registros do arquivo dos dados de entrada devem ser colocados na seguinte ordem:

- 1) Registros relativos ao cabeçalho.
- 2) Registro dos parâmetros iniciais.
- 3) Registros relativos à matriz [A].
- 4) Registros relativos à matriz [B].
- 5) Registros relativos aos vetores iniciais  
(matriz  $[P_1]_{n \times m}$ ).

Os primeiros registros do arquivo dos dados de entrada devem conter o cabeçalho que será impresso antes da impressão dos resultados. Este cabeçalho será impresso na mesma forma como for colocado nos registros de dados. Além de parte de um determinado cabeçalho, cada um destes registros deve conter na sua primeira posição o valor 0 (zero), exceto o último registro do cabeçalho que deve conter o valor 1 (um). O comando de leitura para cada registro relativo ao cabeçalho é definido como:

```
READ(IENT, ℓf) IFL, (CABE(I), I=1,10)
ℓf FORMAT(I1,9A8,A7)
```

Note que o valor de IFL de cada registro define a existência ou não de um novo registro para o cabeçalho. Se o usuário não desejar a impressão de cabeçalho, deve ser colocado um único registro contendo apenas o valor 1 (um) na sua primeira posição. Considera-se cada registro do arquivo de dados definido com 80 posições.

Após os registros relativos ao cabeçalho é colocado o registro dos parâmetros iniciais, que deve conter as seguintes informações:

- 1) n - Ordem das matrizes  $[A]$  e  $[B]$ .  
Campo: I3
- 2) m - Especifica o número de autovalores e autovetores que se deseja determinar. O valor de m deve ser menor ou igual a n.  
Campo: I3
- 3) NIT - Determina o número máximo de iterações.  
Campo: I3
- 4) LBA - Metade da largura de banda da matriz  $[A]$  (Veja figura 7).  
Campo: I3
- 5) LBB - Metade da largura de banda da matriz  $[B]$ .  
Campo: I3
- 6) ERR - Especifica o erro admissível no cálculo dos autovalores da equação (357).  
Campo: D10.4
- 7) EQR - Especifica o erro admissível no cálculo dos autovalores de uma equação do tipo  $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$ ,
- 8) IVER - Determina a verificação ou não dos resultados obtidos.  

$$\text{IVER} = 0 - \text{n\~{a}o verifica}$$

$$\text{IVER} = 1 - \text{verifica}$$
 Campo: I1
- 9) FE - Especifica o fator de escala a ser usado no cálculo dos autovalores de uma equação do tipo  $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$ . Se o sistema tem autovalores

bastante próximos use um FE maior que 1, caso contrário, use FE = 1.

Campo: D10.4

O comando de leitura dos parâmetros iniciais é definido como:

```
READ(IENT,ℓf)n,m,NIT,LBA,LBB,ERR,EQR,IVER,FE
ℓf FORMAT(5I3,2D10.4,I1,D10.4)
```

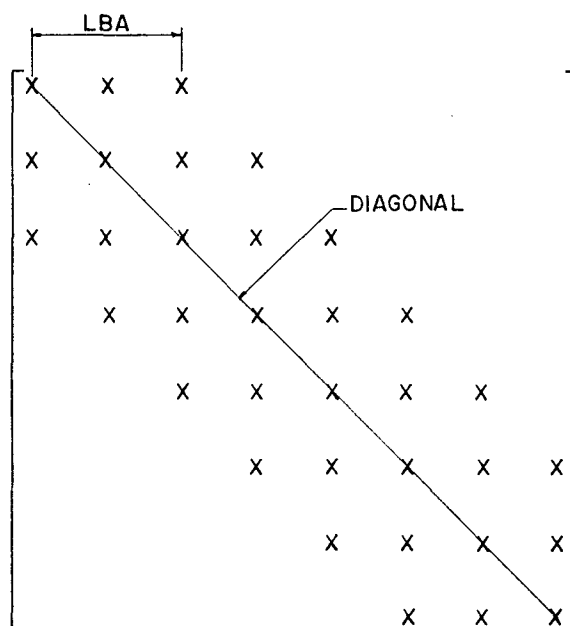


Figura 7 - Significado da metade da largura de banda. Nesta figura LBA = 3.

Após o registro dos parâmetros iniciais são colocados os registros relativos à matriz  $[A]$ . Como  $[A]$  é normalmente uma matriz banda, somente os elementos  $a_{ij}$  da banda são armazenados. Desta forma, cada linha da banda de  $[A]$  deve ser colocada em um registro, com cada elemento num campo de F10.5, a partir do início do registro. Se  $n < 2 \cdot LBA - 1$  então  $[A]$  é armazenada

na sua forma normal, e neste caso todos os elementos da linha de vem ser colocados no registro.

Os elementos da matriz  $[B]$  são colocados em seguida. Como  $[B]$ , além de ser normalmente matriz banda, também é simétrica, somente os elementos  $b_{ij}$  ( $i \leq j$ ) da banda são armaze nados. Assim, para cada linha de  $[B]$ , os elementos  $b_{ij}$  ( $i \leq j$ ) da banda são colocados em um registro, num campo de F10.5.

Por último são colocados os elementos da matriz  $[P_1]$ . Como esta matriz é armazenada na sua forma normal, cada linha deve ser colocada em um registro, com cada elemento num campo de F10.5. Note que  $[P_1]$  deve ser linearmente independente.

Se os elementos de uma linha de qualquer uma das matrizes não couberem em um registro, deve ser utilizado um novo registro.

### 3. Arquivo Temporário em Disco

Para que seja possível a resolução da equação (357) para grandes valores de  $n$ , o sistema cria um arquivo tem porário em disco, onde são armazenadas as matrizes  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[V]$  (matriz dos autovetores obtidos em uma iteração) e a matriz  $[A]$  na sua forma triangularizada. Cada registro deste arquivo tem tamanho fixo. Este tamanho é definido através do comando DEFINE FILE, devendo ser maior ou igual a  $8n$  bytes.

Cada matriz é gravada sem formato, a partir

de um determinado registro  $i$ . O valor de  $i$  é definido como segue:

a) Para  $n \geq 2 \cdot \text{LBA} - 1$

$$[A] \quad - \quad i = 1$$

$$[B] \quad - \quad i = 2 \cdot \text{LBA}$$

$$[V] \quad - \quad i = 2 \cdot \text{LBA} + \text{LBB}$$

$$[A]_{\text{Trg.}} \quad - \quad i = 2 \cdot \text{LBA} + \text{LBB} + m$$

b) Para  $n < 2 \cdot \text{LBA} - 1$

$$[A] \quad - \quad i = 1$$

$$[B] \quad - \quad i = n + 1$$

$$[V] \quad - \quad i = n + \text{LBB} + 1$$

$$[A]_{\text{Trg.}} \quad - \quad i = n + m + \text{LBB} + 1$$

O comando DEFINE FILE genérico pode ser escrito como:

```
DEFINE FILE 10(NR,TR,L,ID)
```

onde o valor de NR (número de registros) deve ser:

a) maior ou igual a  $4 \cdot \text{LBA} + \text{LBB} + m - 2$  para o caso de  $n \geq 2 \cdot \text{LBA} - 1$

b) maior ou igual a  $2 \cdot n + m + \text{LBB}$  para  $n < 2 \cdot \text{LBA} - 1$ .

#### 4. Dados de Saída

O sistema tem como saída as seguintes informações:

- 1) Matriz [A]
- 2) Matriz [B]
- 3) Matriz [T] (Transformação aplicada)
- 4) Autovalores
- 5) Autovetores à direita
- 6) Autovetores à esquerda
- 7) Número de iterações executadas
- 8) Erro admissível
- 9) Código de retorno

Estas informações somente serão impressas se não ocorrer nenhuma anormalidade durante o processo de execução do programa. Caso ocorra alguma anormalidade será impresso somente o código de retorno, cujo valor especifica o tipo de anormalidade, conforme é mostrado no próximo item.

#### 5. Códigos de Retorno (IRT)

IRT = 1 - O tamanho do arquivo definido no DEFINE FILE não é suficiente para armazenar os dados exi



gidos pelo sistema. O arquivo em disco deve ser redimensionado (veja ítem 3.). Os novos valores das dimensões do arquivo devem também ser atribuídos às variáveis NR (número de registros) e IS (tamanho do registro) do programa principal.

IRT = 2 - O vetor que aloca os dados na memória (vetor {A} do programa principal) não tem dimensão suficiente para armazenar o conjunto de dados requeridos pelo sistema. A dimensão necessária é determinada pelo valor de  $d_1$  ou  $d_2$  (toma-se o máximo valor), calculados da forma:

$$d_1 = m(2n + 7m + 4) + LBA(n-1) + n + 1$$

$$d_2 = \begin{cases} m(2n + 4) + LBA(n-1) + n^2 + 1 & \text{se } n < 2 \cdot LBA - 1 \\ m(2n + 4) + LBA(n-1) + 1 + x & \text{se } n \geq 2 \cdot LBA - 1 \end{cases}$$

onde x tem o valor  $n(2LBA-1)$  ou  $n \cdot LBB$ , devendo-se tomar o valor máximo. Assim, caso ocorra este código de retorno, deve ser redimensionado o vetor {A} do programa principal. O valor da nova dimensão de {A} deve também ser atribuído à variável ID do programa principal.

IRT = 3 - Não foi possível triangularizar a matriz [A].  
Elemento  $a_{jj} = 0$ .

- IRT = 4 - Não foi possível normalizar os vetores obtidos em uma iteração do método de Stodola em blocos. Existe solução trivial.
- IRT = 5 - Na determinação dos autovalores da equação  $[b]\{q\} = \zeta\{q\}$  pelo método QR, não houve convergência.  
Sugestão: Aumentar o valor do parâmetro EQR ou NIT.
- IRT = 6 - Para a equação  $[b]\{q\} = \zeta\{q\}$ , os autovalores calculados não são corretos.  
Sugestão: Diminuir o valor do parâmetro EQR.
- IRT = 7 - Não foi possível o ajustamento dos autovalores da equação  $[b]\{q\} = \zeta\{q\}$ . A matriz  $[b]$  não é positiva definida.
- IRT = 8 - A matriz  $[b]$  tem autovalor nulo.
- IRT = 9 - Na determinação dos autovalores da equação  $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$  pelo método QR, não houve convergência.  
Sugestão: Aumentar o valor do parâmetro EQR ou NIT.
- IRT = 10 - Para a equação  $[c]\{u\} = \lambda\{u\}$ , os autovalores calculados não são corretos.  
Sugestão: Diminuir o valor do parâmetro EQR.
- IRT = 11 - Na determinação dos autovalores da equação  $[c]^t\{u\} = \lambda\{u\}$  pelo método QR, não houve con

vergência.

Sugestão: Aumentar o valor do parâmetro EQR ou NIT.

IRT = 12 - Para a equação  $[c]^t\{u\} = \lambda\{u\}$ , os autovalores calculados não são corretos.

Sugestão: Diminuir o valor do parâmetro EQR.

IRT = 13 - Os valores calculados para a equação  $[A]\{X\} = \lambda[B]\{X\}$  pela técnica de Stodola, convergiram, mas não são corretos.

Sugestão: Diminuir o valor do parâmetro ERR.

IRT = 14 - Os valores calculados pela técnica de Stodola em blocos convergiram e estão corretos.

IRT = 15 - Os valores calculados pela técnica de Stodola em blocos não convergiram.

Sugestão: Aumente o valor do parâmetro ERR ou aumente o valor para o parâmetro FE.

IRT = 16 - Os valores calculados pela técnica de Stodola em blocos convergiram, mas não foram verificados.