UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE ELEMENTOS FINITOS PARA FLEXÃO DE PLACAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE
FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA OBTENÇÃO
DO GRAU DE " MESTRE EM ENGENHARIA "

EDILSON DIAS SIQUEIRA

FLORIANÓPOLIS, MARÇO DE 1984

UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE ELEMENTOS
FINITOS PARA FLEXÃO DE PLACAS

EDILSON DIAS SIQUEIRA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

" MESTRE EM ENGENHARIA "

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS
ORIENTADOR

ARNO BLASS
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

CLÓVIS SPERB DE BARCELLOS (Ph.D.)
PRESIDENTE

DOMINGOS BOECHAT ALVES (D.Sc.)

LUIZ TEIXEIRA DO VALLE PEREIRA (M.Sc.)

À Silvia, Mateus e meus pais

AGRADECIMENTOS

- À Universidade Federal do Ceará por ter proporcionado a realização deste trabalho.
- Ao Professor Barcellos pela orientação.
- A todos que contribuiram com apoio e sugestões para o desenvolvimento desta pesquisa.

ÍNDICE

SIMBOLOGIA

1 - Sinais e convenções

$\int$	→	Integração
$\oint$	→	Integração fechada
Σ	→	Somatório
.	→	Produto interno
[A]	→	Matriz, onde A é o nome da matriz
[n]	→	Referência, onde n é o número da referência
$\vert\ \vert$	→	Determinante de uma matriz
$[\ ]^T$	→	Transposto de uma matriz
{ }	→	Vetor coluna
$\lfloor\ \rfloor$	→	Vetor linha
$\lfloor\ \rfloor^T$	→	Transposto de um vetor linha
$\{\ \}^T$	→	Transposto de um vetor coluna
(n.m)	→	Numeração das equações, onde n e m são números
$w,_x$	→	A vírgula indica derivada parcial, ou seja: $\frac{\partial w}{\partial x}$

2 - Símbolos

A	→	Área
{a}	→	Vetor de variáveis nodais
$[D_f]$	→	Matriz de propriedades elásticas de flexão
$[D_s]$	→	Matriz de propriedades elásticas de cisalhamento
E	→	Módulo de elasticidade longitudinal(Young)
[E]	→	Matriz de propriedades elásticas de flexão e cisalhamento
{F}	→	Vetor forças cortantes
G	→	Módulo de elasticidade transversal

h	$\rightarrow$	Semi-espessura da placa(t/2)
$[J]$	$\rightarrow$	Matriz jacobiana
$\|J\|$	$\rightarrow$	Determinante da matriz jacobiana
$[K]$	$\rightarrow$	Matriz de rigidez para um elemento(flexão e cisalhamento)
$[K_f]$	$\rightarrow$	Matriz de rigidez de flexão para um elemento
$[K_s]$	$\rightarrow$	Matriz de rigidez de cisalhamento para um elemento
L	$\rightarrow$	Comprimento do lado de uma placa quadrada
$[M]$	$\rightarrow$	Vetor momentos fletores e torsores
N_i	$\rightarrow$	Funções de interpolação lagrangeanas($i = 1,2,\ldots,n$)
$\{Q\}$	$\rightarrow$	Vetor carga nodal
q	$\rightarrow$	Carga distribuída transversal
S_i	$\rightarrow$	Funções de interpolação serendipity($i = 1,2,\ldots,n$)
s,t	$\rightarrow$	Coordenadas retangulares(sistema local)
t	$\rightarrow$	Espessura da placa
u,v,w	$\rightarrow$	Deslocamentos
V	$\rightarrow$	Volume
X,Y,Z	$\rightarrow$	Coordenadas retangulares(sistema global)
x,y,z	$\rightarrow$	Coordenadas retangulares(sistema local)
α	$\rightarrow$	Fator de correção para tensões cisalhantes transversais
δ	$\rightarrow$	Operador, indica variação
$\{\delta\}$	$\rightarrow$	Vetor deslocamentos
ε	$\rightarrow$	Deformações(x,y,z)
$\bar{\varepsilon}$	$\rightarrow$	Deformações no plano(x-y)
ζ,η,ξ	$\rightarrow$	Coordenadas isoparamétricas
θ_x	$\rightarrow$	Rotação no plano(y-z)
θ_y	$\rightarrow$	Rotação no plano(x-z)
ν	$\rightarrow$	Razão de Poisson
Π	$\rightarrow$	Funcional

σ	→	Tensões(x,y,z)
$\bar{\sigma}$	→	Tensões no plano(x-y)
$\{\phi\}$	→	Vetor deformações cisalhantes
$\{\chi\}$	→	Vetor deformações de flexão

3 - Elementos

ACM(R-12)	→	Adini, Clough and Melosh(Rectangle - 12 degrees-of-freedom)
A-9	→	Triangle - 9 degrees-of-freedom
CQ	→	Cubic Quadrilateral
CLN,CLR,CSN,CSR	→	C-Cubic, L-Lagrangian, S-Serendipity, N-Normal, R-Reduced. Quadrilateral
DKQ	→	Discrete Kirchhoff Quadrilateral
DKT	→	Discrete Kirchhoff Triangle
H5	→	Hybrid-stress 5-parameter. Quadrilateral
H9	→	Hybrid-stress 9-parameter. Quadrilateral
HCT(LCCT-9)	→	Hsieh, Clough and Tocher(Linear Curvature Compatible Triangle - 9 degrees-of-freedom)
HCR	→	Hybrid-stress Conforming Rectangle
HETEROSIS	→	Quadrilateral, Quadratic, Lagrangian and Serendipity
HSM	→	Hybrid-stress Model Triangle
HT	→	Hybrid-stress Triangle
LH3,LH4,LH5,LH11	→	Linear Hybrid-stress. Quadrilateral
LORA	→	LOckheed Robinson and Associates. Quadrilateral
M	→	Melosh. Rectangle
MR24(PLAT8(8α))	→	Modified Hellinger-Reissner Principle, 24 degrees-of-freedom, 8-parameter. Quadrilateral

MR24A(PLAT8(6α))	→	Modified Hellinger-Reissner Principle, 24 degrees-of-freedom, 6-parameter. Quadrilateral
MR18	→	Modified Hellinger-Reissner Principle, 18 degrees-of-freedom, 6-parameter. Triangle
MR18A	→	Modified Hellinger-Reissner Principle, 18 degrees-of-freedom, 4-parameter. Triangle
PLAT8H(5α, 6α, 8α)	→	Modified Hellinger-Reissner Principle(HETEROSIS), 24 degrees-of-freedom, 5-6-8-parameter. Quadrilateral
Q-19	→	Quadrilateral - 19 degrees-of-freedom
QH1,QH2,QH3,QH4	→	Quadratic Hybrid-stress. Quadrilateral
QLR/S	→	Quadratic Lagrangian Reduced/Selective Integration. Quadrilateral
QLR,QLN,QSR,QSN	→	Q-Quadratic, L-Lagrangian, S-Serendipity, R-Reduced, N-Normal. Quadrilateral
QUAD4	→	Quadrilateral 4-node
QUS4(LR)	→	Quadrilateral Serendipity 4-node(Linear Reduced)
R18	→	Hellinger-Reissner Principle, 18 degrees-of-freedom. Triangle
R24	→	Hellinger-Reissner Principle, 24 degrees-of-freedom. Quadrilateral
SRI	→	Selective Reduced Integration. Triangle
T1	→	Four-node Bilinear Isoparametric Element Quadrilateral
UH	→	Universal Hybrid Element. Triangle

RESUMO

Nestas três últimas décadas, o desenvolvimento e aperfeiçoamento de elementos finitos para problemas de flexão de placas tem sido uma meta constante de muitos pesquisadores. No entanto, apesar dos esforços, ainda não se dispõe de um elemento ideal.

O objetivo deste trabalho é selecionar dentre todas estas formulações existentes, e as quais teve-se acesso e conhecimento, um ou alguns elementos que apresentem o melhor comportamento quando utilizados em um programa de elementos finitos para aplicação geral.

Inicialmente são estabelecidos alguns requisitos, os quais servem de base para uma pré-seleção dos elementos. A seleção final é feita após a implementação computacional de seis elementos, baseados na teoria de placa de Mindlin e considerados como os mais promissores. Para esta seleção, após terem sido obtidos os resultados numéricos para placas finas e semi-espessas, é feito um estudo comparativo, onde se verifica basicamente os seguintes aspectos: convergência em função do número de graus de liberdade exigidos pela discretização, sensibilidade à distorção da malha, presença de modos falsos de energia e eficiência computacional.

ABSTRACT

In the last thirty years, the development and improvement of the finite element technique for the plate bending problem has recieved a constant effort of many studies. In spite of this, a perfect element is not achieved yet.

The main purpose of this work is to choose among several formulations, one or more elements that has the best behavior when used in a general purpose finite element program.

A first selection of the elements is based in some requirements previously set up. For the final one, six elements are studied, based on the Mindlin's theory of plates. With the numerical results obtained for thin and thick plates, a comparative study is made and the following aspects are analysed: convergence versus number of freedom degrees required for discretization, the mesh distortion sensibility, the spurious zero energy mode presence and computational efficiency.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

A análise por elementos finitos para problemas de flexão de placas tem sido bastante explorada, e isto se comprova pela existência de inúmeras formulações a respeito deste assunto.

Quanto aos elementos, pode-se afirmar que muitos funcionam bem para uma determinada situação, porém não satisfazem para outros casos. Alguns são indicados para uma aplicação geral por apresentarem um comportamento satisfatório na maioria dos testes realizados. No entanto, ainda não se dispõe do elemento ideal para aplicação em um programa de elementos finitos para uso geral.

O objetivo atual é selecionar um elemento para problemas de flexão de placas finas e espessas, submetidas a um carregamento estático. Este elemento deve apresentar a melhor performance num conjunto global, mas não necessariamente para todos os casos específicos, pois são notórias as dificuldades para se atingir algumas metas. Conseqüentemente tal elemento não será nenhuma panacéia.

Um elemento finito deve, em primeiro lugar, convergir para a solução exata do problema, pois isto garante que a solução da equação diferencial que rege o problema está bem representada pela discretização. No caso específico de flexão de placas, relaciona-se a seguir os requisitos básicos desejáveis para o elemento a ser selecionado, ou seja:

a) A convergência deve ser rápida e monotônica;

b) A energia de cisalhamento deve estar inclusa;

c) Não deve apresentar o fenômeno de travamento ("locking");

d) Deve dar bons resultados também para tensões;

e) Não deve apresentar modos falsos de energia;

f) Deve ser rotacionalmente e translacionalmente invariante;

g) Deve ser compatível e completo(conforme);

h) Deve ser pouco sensível à distorção da malha;

i) Deve ser computacionalmente eficiente.

Neste trabalho, analisa-se uma série de elementos, mostra-se os resultados numéricos da implementação computacional dos elementos mais promissores e faz-se a seleção dos melhores elementos dentro dos requisitos acima citados.

1.2 - Revisão bibliográfica

A maioria dos artigos que versam sobre elementos de flexão de placas trazem estudos comparativos entre o elemento proposto e outros elementos já publicados. Também existem trabalhos exclusivamente comparativos, enfocando os seguintes aspectos: convergência em função do refino da malha ou do número de graus de liberdade exigidos, e convergência com o esforço computacional.

A seguir são citados aqueles elementos que foram considerados como os melhores por ocasião dos referidos estudos.

CLOUGH e TOCHER[20] fizeram um dos primeiros estudos comparativos de que se tem conhecimento. Foram analisadas placas retangulares e quadradas, por uma série de elementos triangulares e retangulares, onde ficou evidenciada a superioridade dos elementos retangulares em relação aos triangulares, sob o aspecto de convergência com o refino da malha. Os melhores elementos foram, respectivamente, o retângulo M de MELOSH, o retângulo ACM(R-12) de ADINI, CLOUGH e MELOSH e o triângulo HCT(LCCT-9) de HSIEH, CLOUGH e TOCHER. Neste estudo ficou comprovada a maior flexibilidade dos elementos não compatíveis, M e ACM, em relação ao elemento compatível HCT. Todos estes elementos são formulados pelo modelo dos deslocamentos.

ABEL[4] fez também um trabalho comparativo, verificando a eficiência computacional de uma série de doze elementos; entre eles o ACM, M e HCT. Isto foi feito verificando a convergência em função do produto NB^2, onde N é o número de equações algébricas e B^2 é a largura da banda do sistema global elevada à potência de 2. ABEL concluiu que os melhores elementos eram, respectivemente, o M de MELOSH, o CQ de FRAEIJS DE VEUBEKE e o Q-19 de CLOUGH e FELIPPA. Os elementos CQ e Q-19 são formulados pelo modelo dos deslocamentos. Eles são compatíveis, cúbicos, quadriláteros e são formados pela junção de quatro triângulos. O elemento não compatível M mostrou novamente a sua melhor convergência em relação aos elementos compatíveis. Discorda-se aqui da maneira como é feita esta comparação, pois o tempo de computação para formação da matriz de rigidez do elemento não é considerado, e sabe-se que, se por exemplo, for necessária integração numérica, uma grande parcela de tempo será desperdiçada nessa etapa.

COOK[10] formulou dois elementos pelo modelo híbrido-tensões("hybrid-stress"), os elementos H5 e H9, e os considerou como os melhores para problemas de flexão de placas. Estes elementos são quadriláteros, com doze graus de liberdade, e são formados pela junção de quatro triângulos, tendo incluso o efeito de cisalhamento. Nada, porém, foi assegurado sobre o fenômeno de travamento, bem como quanto à presença de modos falsos de energia. O H5, o melhor dos dois, que usa uma polinomial incompleta para representação do campo de tensões, é não invariante, portanto deve ser formulado num sistema local de coordenadas.

ROBINSON e HAGGENMACHER[7], em trabalho mais recente, formularam pelo método de equilíbrio um quadrilátero com doze graus de liberdade, tendo incluso o efeito de cisalhamento. O elemento, chamado de LORA, também é considerado por seus autores como o melhor elemento para flexão de placas. Infelizmente, a referência não traz maiores detalhes sobre a formulação da matriz de rigidez do elemento, e os resultados apresentados são apenas para deslocamentos. Verifica-se também que, embora o efeito de cisalhamento esteja incluso, nada foi dito sobre o fenômeno de travamento.

HERRMANN[41] desenvolveu pelo modelo misto, um dos primeiros elementos triangulares, considerando as deformações cisalhantes transversais (Teoria de Reissner). Entretanto, posteriores estudos feitos por BRON e DHATT[36] comprovaram que este elemento diverge da solução exata do problema, para algumas situações em que foi testado.

Muitos esforços têm sido feitos em busca de um elemento simples e eficiente. Cita-se, por exemplo, alguns elementos triangulares com nove graus de liberdade como o A-9[31], UH[34], SRI[6] e HSM[6 e 42] e os quadriláteros com doze graus de liberdade mais pesquisados são o QUS4[31] e suas versões (Referências 39 e 40), e o elemento QUAD4 de MacNEAL[5, 37 e 39]. Alguns destes elementos são empregados em programas de uso geral, como é o caso do QUS4 e do QUAD4, por serem simples e eficientes. Porém, a maioria dos elementos acima citados apresentam problemas tais como a presença de modos falsos de energia, invariância e dependência de ajuste de parâmetros para estabilização da matriz de rigidez.

BATOZ e TAHAR[5] apresentaram o elemento DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral) e fizeram um estudo comparativo com outros dezessete elementos; entre eles, o H5, H9, LORA, M, ACM, QUAD4 e Q-19. Somente placas finas foram testadas, e em alguns casos de deflexões foram mostrados resultados para os elementos LORA e QUAD4, os quais se mostraram superiores ao DKQ. Nos demais casos, inclusive para tensões e malha distorcida, onde o elemento LORA não entrou na comparação, o DKQ apresentou bons resultados em relação aos demais elementos. Acredita-se que o elemento funcione bem para placas bastante finas, pois a energia cisalhante transversal é desprezada pelas suposições de Kirchhoff.

BATOZ, BATHE e LEE-WING[6] fizeram um estudo do elemento triangular DKT(Discrete Kirchhoff Triangle) e o compararam com outros elementos triangulares. Neste estudo foram considerados como melhores os elementos DKT e HSM(Hybrid-Stress Model). Convém mencionar que o DKT e o DKQ são compatíveis, formulados pelo modelo dos deslocamentos e, assim como o HSM, baseiam-se na teoria de placa de Kirchhoff.

Uma série de quadriláteros isoparamétricos, baseados na teoria de placa de Mindlin e com estudos do fenômeno de travamento foram apresentados por vários autores: HUGHES e COHEN[18]; SPILKER[11, 12, 13, 14 e 15]; PUGH, HINTON e ZIENKIEWICZ[3]; LEE e WONG[16]; e HUGHES e TEZDUYAR[37]. Os melhores elementos indicados por estes autores são: QLR, CLR, CLN, QH1, QH3, HETEROSIS, T1 e PLAT8H. Como será visto, os elementos citados aqui serão objeto deste estudo e, portanto, maior atenção será dada no decorrer de toda esta exposição.

Nos apêndices deste trabalho poderão ser encontrados detalhes da formulação de alguns elementos que constam desta revisão, bem como de outros que não foram mencionados.

1.3 - Definição do problema

1.3.1 - Introdução

Os elementos finitos para problemas de flexão de placas são formulados basicamente dentro de dois grupos: os baseados na teoria de placa de Kirchhoff e os baseados na teoria de placa de Mindlin, dependendo, respectivamente, da ausência ou da presença do efeito das deformações cisalhantes transversais. Os elementos que usam a teoria de Kirchhoff, formulados do Princípio da Energia Potencial Mínima(modelo dos deslocamentos), devem satisfazer a continuidade C^1 no contorno entre elementos. Isto causa problemas de compatibilidade, que para serem solucionados, exigem polinomiais de ordem maior do que a desejada para as funções de interpolação. Conseqüentemente maior número de variáveis nodais ou maior número de nodos por elemento são exigidos, o que aumenta o número de equações algébricas a serem solucionadas e, em geral, o elemento torna-se mais rígido. Também pode ser afirmado que o aumento no número de graus de liberdade por nodo exige, normalmente, que se adote derivadas normais como graus de liberdade. E isto traz complicações para a especificação das condições de contorno.

BATOZ e outros[5 e 6], em recentes trabalhos, mostraram que este requerimento de continuidade C^1 pode ser relaxado, sem problemas de conformidade, ao usar uma formulação pela Teoria Discreta de Kirchhoff("Discrete Kirchhoff Theory"), porém, esta formulação despreza a energia de deformação cisalhante transversal e o elemento não funciona para placas espessas.

Outra maneira de relaxar este requisito de continuidade de C^1 é utilizar o modelo híbrido-tensões de PIAN[22] ou o híbrido-deslocamentos("hybrid-displacement") de TONG[23].

Por outro lado, os elementos baseados na teoria de Mindlin[8] requerem apenas continuidade C^0, mesmo para formulações a partir do Princípio da Energia Potencial Mínima. Entretanto têm um inconveniente, que é uma tendência ao fenômeno de travamento. É importante salientar que o travamento é provocado pela não adequação de funções de interpolação que não são capazes de representar, exatamente, a restrição de energia de cisalhamento transversal nula, quando a placa é tomada bastante fina.

PUGH, HINTON e ZIENKIEWICZ[3] solucionaram o problema do travamento, utilizando integração reduzida para a rigidez de flexão e cisalhamento em elementos isoparamétricos, baseados no modelo dos deslocamentos. A integração reduzida ou a reduzida/seletiva[2], onde só a rigidez de cisalhamento é sub-integrada, trazem conseqüências indesejáveis, tais como modos falsos de energia (Spurious Zero-Energy Mode). Dos elementos baseados no modelo dos deslocamentos, teoria de placa de Mindlin e utilizando integração reduzida ou integração reduzida/seletiva, somente o HETEROSIS de HUGHES e COHEN[18] e o CSR(Apêndice C), não apresentam modos falsos de energia.

Outras maneiras de eliminar o problema de travamento é utilizar o funcional para o Princípio Modificado de Hellinger-Reissner, dentro da formulação mista de LEE e WONG[16], ou o funcional híbrido, baseado no Princípio da Energia Complementar Modificada, utilizado por SPILKER e outros[11, 12, 13, 14 e 15]. Nestas formulações, o controle de travamento e dos modos falsos de energia é feito em função do campo de tensões ou deformações a se rem escolhidos.

1.3.2 - Conceitos

Comenta-se sobre alguns termos que têm sido aqui mencionados, por representarem uma parcela de fundamental importância para este trabalho.

a) Fenômeno de travamento("locking") - É uma excessiva rigidez na solução do problema quando a placa é tomada bastante fina, ou seja, quando a espessura da placa tende a zero. Seria interessante saber, sem a devida implementação computacional, se o elemento tem tendência a travamento. Desta forma, alguns autores definem um índice de restrição para medir a tendência maior ou menor ao fenômeno. HUGHES e MALKUS[24] definem o "Constraint Index" (CI) como sendo a habilidade do elemento acomodar a restrição de energia de cisalhamento transversal nula. O CI é calculado para uma malha NxN, com dois lados adjacentes idealmente engastados, e dado pela equação:

$$CI = \frac{n_d - n_b}{N^2} - n_c \tag{1.1}$$

onde n_d é o número total de graus de liberdade na malha NxN, n_b é o número de graus de liberdade sobre os dois lados engastados, n_c é o número de restrições impostas ao elemento quando a espessura tende a zero, e N é o número de elementos numa direção. Especificando melhor, para o caso de um elemento Mindlin-deslocamentos ("Mindlin-displacement"), ao se fazer uma integração reduzida da matriz de rigidez de cisalhamento, tem-se duas restrições(duas deformações cisalhantes) em cada ponto de integração, logo n_c é igual a duas vezes o número de pontos de integração utilizados.

Para a mesma situação em que foi definido o CI, SPILKER[11] definiu o RCI(Rotational Constraint Index) para ele mentos híbrido-tensões, com a diferença de só utilizar os graus de liberdade de rotação. Ou seja:

$$RCI = \frac{n_{\theta d} - n_{\theta b}}{N^2} - n_{\theta c} \tag{1.2}$$

onde $n_{\theta d}$ é o número total de graus de liberdade de rotação na malha NxN, $n_{\theta b}$ é o número de graus de liberdade de rotação sobre os dois lados engastados e $n_{\theta c}$ é o número de restrições de rotação para o elemento quando a espessura da placa tende a zero. Estas restrições são obtidas por exame das equações de EULER para o funcional no limite ($t \rightarrow 0$) e corresponde, para o caso de elementos híbrido-tensões, a:

$$\int_A \lfloor \delta\sigma_{xz} \;;\; \delta\sigma_{yz} \rfloor \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dA = 0 \tag{1.3}$$

onde σ e γ são, respectivamente, tensões e deformações, δ indica variação e A é a área do elemento.

Para os elementos citados nas respectivas referências, estes índices funcionam relativamente bem, porém, testados para outros elementos, não se encontra a coerência desejada, pois em geral são muito pessimistas (ver Apêndices C e E).

b) Modos falsos de energia (Spurious Zero-Energy Mode) - Corresponde ao número de auto-valores nulos, excedentes àqueles que representam os movimentos de corpo rígido, e estão associados a auto-vetores não nulos. Fisicamente, significa que o elemento pode se deformar de uma maneira diferente daquela que seria a esperada, assim como sua matriz de rigidez não apresenta posto ("rank") correto.

O problema do mau condicionamento da matriz de rigidez do elemento ([K]), surge normalmente em decorrência de integração numérica reduzida ou seletiva/reduzida.

ZIENKIEWICZ[9] afirma que com integração reduzida pode surgir singularidade em [K] e que não é difícil provar que em alguns casos tal singularidade não exista. Para uma malha de um elemento, [K] deve ser singular se o número de variáveis nodais desconhecidas excede o número de relações independentes, supridas em todos os pontos de integração. Com base nesta afirmação, define-se um indicador de singularidade,

$$S = N - nr \tag{1.4}$$

Para elementos baseados no modelo dos deslocamentos, N é o número de variáveis nodais desconhecidas, n é o número de pontos de integração para o elemento e r é o número de relações independentes por ponto de integração, ou seja, o número de deformações usadas na formação da matriz de rigidez a ser integrada. Ocorrerá singularidade se S é positivo. É importante observar que o cálculo de S pode ser generalizado para uma malha qualquer. PUGH e outros[3] usam também este índice como indicador de travamento, cujas aplicações são mostradas no Apêndice B.

ZIENKIEWICZ conclui que a integração reduzida pode dar origem a modos falsos de energia e a singularidade da matriz de rigidez global, para uma determinada malha. A singularidade normalmente desaparece com a reunião dos elementos, porém, os modos falsos de energia estão relacionados à compatibilidade de formas dos auto-vetores, associados a auto-valores nulos do elemento, e podem não desaparecer com a reunião dos elementos.

BICANIC e HINTON[33] fizeram uma pesquisa sobre modos falsos de energia em elementos isoparamétricos bidimensionais de quatro, oito e nove nodos, que são muito utilizados para flexão de placas. Transcreve-se, a seguir, alguns resultados desta pesquisa, para um maior esclarecimento sobre o assunto.

A integração reduzida ou reduzida/seletiva é utilizada normalmente para evitar o problema de travamento em elemento com efeito de cisalhamento incluso. Para este elemento, explicita-se sua energia de deformação em duas parcelas,

$$E_1 = \frac{1}{2}\{a\}^T \left[K_f\right]\{a\} \tag{1.5}$$

e

$$E_2 = \frac{1}{2}\{a\}^T \left[K_s\right]\{a\} \tag{1.6}$$

onde E_1 e E_2 são, respectivamente, a energia de deformação de flexão e de cisalhamento, $\left[K_f\right]$ e $\left[K_s\right]$ são, respectivamente, as matrizes de rigidez de flexão e de cisalhamento, e $\{a\}$ é o vetor das variáveis nodais. Definidos $\left[K_f\right]$ e $\left[K_s\right]$ e se n é o número de pontos para integrar completamente a rigidez em uma direção, são estabelecidos os seguintes tipos de integração:

1. Completa, se nxn pontos forem utilizados para integrar $\left[K_f\right]$ e $\left[K_s\right]$.
2. Reduzida/seletiva, se (n-1)x(n-1) pontos forem utilizados para integrar $\left[K_s\right]$ e nxn para $\left[K_f\right]$.
3. Reduzida, se (n-1)x(n-1) pontos forem utilizados para integrar $\left[K_f\right]$ e $\left[K_s\right]$.

A determinação dos modos falsos de energia vem da solução do problema de auto-valores,

$$([K] + \beta[I])\{y\} = (\lambda + \beta)\{y\} \tag{1.7}$$

ou

$$[K^*]\{y\} = \lambda^*\{y\} \tag{1.8}$$

onde $[K] = [K_f] + [K_s]$; β é adicionado para tornar $[K]$ positiva definida(caso exista singularidade) e os auto-valores reais são $\lambda_i = \lambda_i^* - \beta$.

No caso de um elemento de placa, deverão existir três auto-valores correspondentes a três possíveis movimentos de corpo rígido. Com integração completa e reduzida/seletiva não foram encontrados modos falsos de energia, mas para integração reduzida foram encontrados auto-valores nulos, associados a auto-vetores não nulos.

A Figura 1.1 mostra, para elementos isolados, sem restrições no contorno, a presença de modos falsos de energia, sendo dois modos para o elemento e quatro nodos, um para o elemento de oito nodos e três para o elemento de nove nodos.

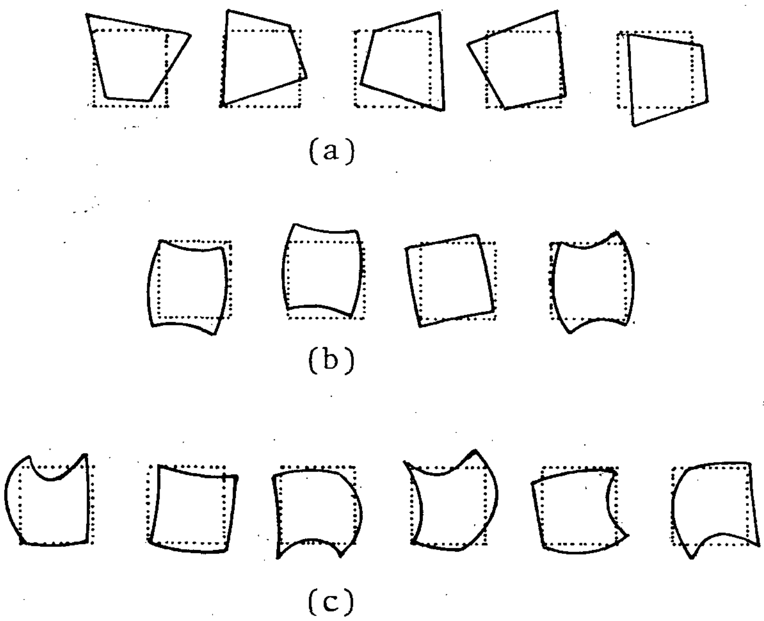


Figura 1.1 - Auto-valores nulos em elementos isolados com integração reduzida. a) Elemento de quatro nodos; b) Elemento de oito nodos; c) Elemento de nove nodos(tamanho do elemento 1,0x1,0; E=2,0; ν=0,0; G=1,0).

Os modos falsos "hourglassing" ou "keystoning" para o elemento de quatro nodos e o modo "Escher" para o elemento de nove nodos são mostrados na Figura 1.2. Foi utilizada uma malha 2x2 com um número de restrições, tal que somente os movimentos de corpo rígido sejam evitados.

O elemento serendipity(oito nodos) não apresenta modos falsos com a reunião dos elementos, mesmo se restrições não forem impostas, devido à incompatibilidade de formas associadas a autovalores nulos(Figura 1.1(b), tal como afirmou ZIENKIEWICZ.

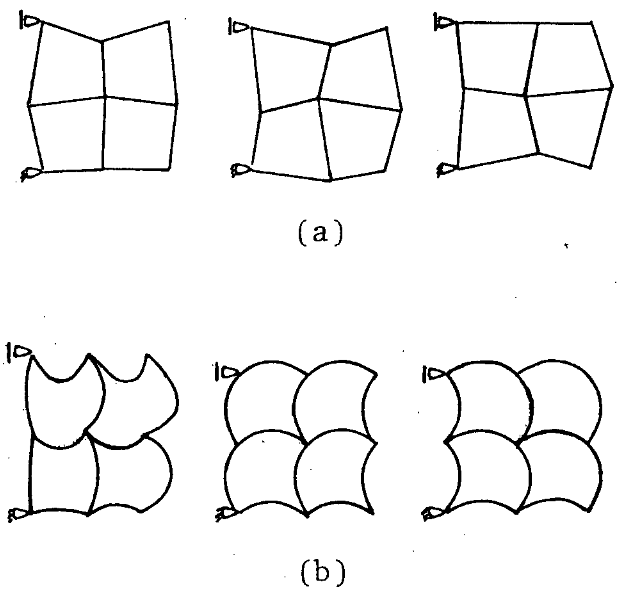


Figura 1.2 - Modos falsos de energia com integração reduzida. a)Hourglassing para elementos de quatro nodos; b) Escher para elementos de nove nodos(tamanho da malha 2,0x2,0; E=2,4; ν=0,2; G=1,0).

c) Invariância - O elemento é dito invariante quando sua matriz de rigidez puder ser obtida em sistemas locais de coordenadas, rodados ou transladados em relação ao sistema global, sem que a solução do problema sofra alterações. SPILKER[15] mostra que, no caso do modelo híbrido-tensões, utilizando formulação isoparamétrica, invariância é assegurada somente se polinomiais completas forem utilizadas para representar o campo de tensões. No modelo dos deslocamentos, BREBBIA[1] diz que o elemento pode se tornar não invariante se termos adicionais não simétricos forem introduzidos a polinomiais completas, que representam o campo de deslocamentos. COOK[25, 26 e 27] mostra como transformar um elemento híbrido-tensões, não isoparamétrico e não invariante, em um elemento invariante, através da formulação da matriz de rigidez do elemento, num sistema local de coordenadas, girando em seguida toda a rigidez para o sistema global. Segundo SPILKER[15], o que COOK fez não pode ser feito para elementos isoparamétricos, pois neste caso, a escolha de um sistema local não é única.

d) Compatível e completo(conforme)[19] - No caso do modelo dos deslocamentos, um elemento é dito conforme, se as funções de interpolação para os deslocamentos assegurarem completicidade e compatibilidade. A completicidade é assegurada se todos os movimentos de corpo rígido e todos os possíveis estados de deformação constante estiverem inclusos. A compatibilidade será assegurada se existir compatibilidade de deslocamentos e suas derivadas, de uma ordem menor que a máxima derivada existente nas relações deformação-deslocamentos. Ou seja, é necessário que os deslocamentos e suas derivadas, inclusive a derivada normal, sobre um lado ou face do elemento, sejam unicamente definidos em termos dos deslocamentos e suas derivadas nos pontos nodais localizados somente sobre aquele lado ou face. Como já foi dito, os elementos não compatíveis são menos rígidos, porém a convergência é não monotônica, e isto traz problemas de incerteza na solução do pro blema. É importante ressaltar que os elementos isoparamétricos têm compatibilidade garantida[9 e 19].

e) Modelo de elementos finitos - A base do método de elementos finitos consiste em dividir um sólido em elementos discretos, assumindo a seguir um campo de tensões e/ou deslocamentos dentro de cada elemento ou no contorno entre eles. A aplicação dos princípios variacionais resulta num sistema de equações algébricas, cujas incógnitas podem ser os deslocamentos nodais e/ou tensões nodais. Desta forma surgiram diversos modelos.

O modelo dos deslocamentos é deduzido do Princípio da Energia Potencial Mínima e é baseado na adoção de um campo de deslocamentos contínuo, em todo o sólido. O modelo de equilíbrio é deduzido do Princípio da Energia Complementar Mínima e é baseado em um campo de tensões em equilíbrio, que é assumido em todo o sólido. O modelo híbrido-tensões("hybrid-stress") usa o Princípio da Energia Complementar Modificada e assume um campo de tensões em equilíbrio dentro de cada elemento, e, em adição, deslocamentos compatíveis são admitidos sobre o contorno entre elementos. Um segundo modelo híbrido é o híbrido-deslocamentos ("hybrid-displacement"), que é baseado no Princípio da Energia Potencial Modificada e assume um equilíbrio de esforços ao longo do contorno entre elementos e é admitido um campo de deslocamentos contínuo em cada elemento. Partindo do Princípio Variacional de Reissner obtem-se o modelo misto, onde é assumido um campo de deslocamentos contínuo em todo o sólido e um campo de tensões para cada elemento. Recentemente, DAY e YANG[38] apresentaram um novo modelo misto, baseado no Princípio da Energia Potencial e no Princípio da Energia Complementar, onde são assumidos campos de tensões e deslocamentos no interior de cada elemento.

Na Tabela 1.1 estão resumidos os modelos de elementos finitos para aplicação em um sólido contínuo.

1.3.3 - Seleção dos elementos

Conhecidos os problemas e soluções, e pelo que foi exposto, pode-se concluir que os elementos que mais se aproximam do procurado elemento de aplicação geral são aqueles que têm incluso o efeito de cisalhamento transversal, portanto serão escolhidos para um estudo mais detalhado.

Todos os elementos que serão selecionados a seguir são isoparamétricos e baseados na teoria de placa de Mindlin.

No modelo dos deslocamentos são escolhidos o QLR[3], CLN[3], T1[37] e o HETEROSIS[18]. O QLR (Quadratic Lagrangian Reduced) e o CLR(Cubic Lagrangian Reduced) são os melhores representantes da família dos elementos com integração reduzida, apresentados na Referência [3]. Devido ao elevado número de modos falsos de energia que o QLR apresenta, pode-se fazer uma pequena modificação, ou seja, sub-integrar apenas a rigidez de cisalhamento. Com isto, o número de modos falsos é diminuído e mantida a ausência de travamento. O QLR passará a ser chamado de QLR/S(Quadratic Lagrangian Reduced/Selective). O CLR(Cubic Lagrangian Reduced) e CLN(Cubic Lagrangian Normal) apresentam resultados semelhantes, mas é preferido o CLN por não apresentar modos falsos, embora ele apresente uma leve tendência a travamento(Apêndice C). O HETEROSIS usa integração reduzida e seletiva, tal como o QLR/S, porém com a vantagem de não apresentar modos falsos. O T1 é um dos elementos de placa mais simples, não apresenta modos falsos e, mesmo usando integração completa, não apresenta travamento.

No modelo híbrido tensões as melhores formulações foram o QH1[11] e QH3[11]. A convergência do QH1 é bem superior à

TABELA 1.1 - SUMÁRIO BOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS[38]

MODELO	VARIÁVEIS	CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE		CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	
		INTERNA	EXTERNA	INTERNA	EXTERNA
DESLOCAMENTOS	Em V: u_i	EXATA	EXATA	APROXIMADA	APROXIMADA
HÍBRIDO-DESLOCAMENTOS	Em V: u_i Sobre S: T_i	EXATA	APROXIMADA	APROXIMADA	APROXIMADA
EQUILÍBRIO	Em V: σ_{ij}	APROXIMADA	APROXIMADA	EXATA	EXATA
HÍBRIDO-TENSÕES	Em V: σ_{ij} Sobre S: u_{ij}	APROXIMADA	APROXIMADA	EXATA	APROXIMADA
MISTO REISSNER	Em V: u_i Em V: σ_{ij}	APROXIMADA	APROXIMADA	APROXIMADA	APROXIMADA
MISTO DAY E YANG	Em V: u_i Em V: σ_{ij}	EXATA	APROXIMADA	EXATA	APROXIMADA

V → Volume; S → Contorno; u_i → Deslocamentos; T_i → Forças; σ_{ij} → Tensões do QH3, porém, como o QH1 não é invariante e o QH3 o é, recomenda-se o QH3.

E no modelo misto foram selecionados os elementos PLAT8(8α)[16] e PLAT8H(8α)[16]. O PLAT8H(8α) foi o preferido devido o PLAT8(8α) ser ligeiramente inferior quanto ao fenômeno de travamento. Para o PLAT8H(8α) foi selecionada a versão 8α, pois as versões 5α e 6α, embora apresentem um melhor comportamento para malha distorcida, apresentam modos falsos de energia.

Como um estudo comparativo entre estes elementos ainda não consta na literatura disponível, é objetivo do presente trabalho efetuá-lo. Suas formulações estão detalhadas no próximo capítulo e os resultados numéricos da implementação computacional estão mostrados, comparados e comentados em capítulos posteriores. Com isto tem-se condições de escolher o melhor elemento, dentre estes, considerados aqui como os mais promissores para uma aplicação geral.

1.4 - Implementação Computacional

A implementação foi realizada no computador IBM 4341 da Universidade Federal de Santa Catarina. A computação foi feita em precisão aritmética dupla e o sistema de alocação dinâmica da memória foi utilizado para armazenamento e manipulação dos dados. Os programas foram elaborados em linguagem FORTRAN IV e um fluxograma básico é apresentado no Apêndice J.

Principalmente na parte de sobreposição da matriz de rigidez, condições de contorno e solução do sistema de equações, foram utilizadas subrotinas do Programa para Análise de Meios Contínuos Lineares, SIMELF(Sistema Modular de Elementos Finitos), da Universidade Federal de Santa Catarina[32]. Para um maior esclare cimento, pode-se adiantar que a solução por banda do sistema de equações, realizada pela subrotina IMB, utiliza o Processo de Eliminação de Gauss. Quanto ao cálculo de auto-valores e auto-vetores, foi utilizado o método de Jacobi[28]. A subrotina para inversão de matrizes foi obtida por transformação da "function" SIMUL[29] que usa o método de pivotação total.

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO DOS ELEMENTOS SELECIONADOS

2.1 - Introdução

No desenvolvimento que se segue, as equações estão simplificadas para materiais isotrópicos e homogêneos. Também as forças de corpo, efeito de temperatura e forças de membrana não estão presentes.

A teoria de placa, base para formulação destes elementos, é a teoria de Mindlin, onde é assumido que:

a) As deflexões são pequenas;

b) Retas normais à superfície média da placa, antes da deformação, permanecem retas, mas não necessariamente normais a ela depois da deformação;

c) Tensões normais à superfície média são desprezadas.

As matrizes de propriedades elásticas serão citadas logo agora, pois são as mesmas para todos os elementos.

- Matriz de propriedades elásticas de flexão, rigidez:

$$\left[D_f\right] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

- Matriz de propriedades elásticas de cisalhamento, rigidez:

$$\left[D_s\right] = \frac{Gt}{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

- Matriz de propriedades elásticas de flexão e cisalhamento, flexibilidade:

$$[E] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \text{(SIMÉTRICA)} & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

onde,

E → módulo de elasticidade longitudinal

G → módulo de elasticidade transversal

ν → razão de Poisson

t → espessura da placa

α → fator de correção que considera a distribuição não uniforme de tensões cisalhantes transversais; é tomado na Referência [8] com o valor de 6/5.

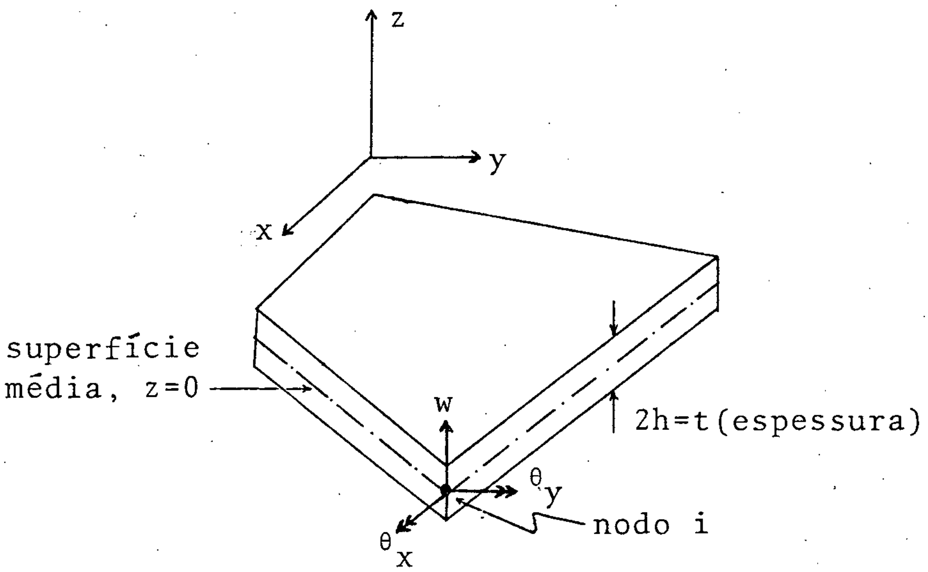


Figura 2.1 - Geometria do elemento e sentido das rotações e deflexões no nodo genérico i.

Os graus de liberdade w, θ_x e θ_y são considerados para todos os elementos e a Figura 2.1 mostra as orientações adotadas, onde w é o deslocamento transversal, θ_x é a rotação no plano y-z e θ_y é a rotação no plano x-z.

2.2 - Modelo dos deslocamentos

2.2.1 - Seleção dos elementos

Vários elementos são, a princípio, pré-selecionados para a implementação, por satisfazerem, com destaque, alguns dos requisitos de um elemento para flexão de placas. Estes elementos são: QUS4[31] (LR - Apêndice C), DKQ[5] (Apêndice A), DKT[6] (Apêndice B), A-9[30] (Apêndice D), QUAD4[5], T1[37], HETEROSIS[18], SRI[5] e uma família de elementos lagrangeanos e serendipity com integração reduzida[3] (Apêndice C).

O QUS4 é considerado por seus autores como um dos mais simples e eficientes elementos para flexão de placas. É um quadrilátero, isoparamétrico, linear, tem quatro nodos e doze graus de liberdade, inclui a energia de cisalhamento e usa integração numérica reduzida/seletiva. Em decorrência da integração reduzida, a matriz de rigidez do elemento não tem posto correto, e dois modos falsos de energia são exibidos, um modo "hourglassing" e um modo de torção no plano. HUGHES e THOMAS[31] apresentam uma maneira de eliminar o modo "hourglassing", que é mostrada a seguir.

Com base na Figura 2.1, a energia de deformação cisalhante da placa é expressa por:

$$\frac{Gt}{\alpha}\iint\left[\left(w,_x + \theta_y\right)^2 + \left(w,_y - \theta_x\right)^2\right]dxdy \qquad (2.4)$$

O modo "hourglassing" é eliminado se, ao invés de sub-integrar toda a expressão(2.4), como é a proposta inicial do elemento, seja feita uma integração completa para as parcelas $(w,_x)^2$ e $(w,_y)^2$, e uma sub-integração para o restante dos termos.

O segundo modo falso, porém, só será eliminado por restrição dos movimentos de corpo rígido, através de condições de contorno.

Sem a eliminação do modo "hourglassing", o elemento funciona bem para placas finas, mas não é bom para placas espessas. Eliminando o modo "hourglassing" ocorre o inverso, ou seja, um bom comportamento para placas espessas, mas não satisfaz para placas finas. Por outro lado, se for feita uma integração total da energia de cisalhamento, resultados inaceitáveis serão obtidos para placas finas, embora o comportamento para placas espessas seja bom. Por isto, conclui-se que o QUS4, a princípio, não deve ser indicado para uma aplicação geral, pois qualquer que seja a integração, apresentará problemas.

BELYTSCHKO e TSAY[40] resolveram o problema de modos falsos de energia no QUS4 através de ajuste de parâmetros, ou seja, introduzindo uma matriz de estabilização para a rigidez do elemento. Entretanto, devido à dependência de tais parâmetros, julga-se que o elemento não é ideal para uma aplicação geral. No mesmo caso está o elemento QUAD4, que também depende de ajuste de parâmetros.

PRATHAP e VISWANATH[39] também eliminaram os modos falsos de energia do QUS4, fazendo uma integração 1x2 do termo $(w,_x + \theta_y)$ e 2x1 do termo $(w,_y - \theta_x)$, correspondentes à energia de cisalhamento(2.4). Entretanto, tal procedimento torna não invariante a matriz de rigidez do elemento. Conseqüentemente, o sistema local de coordenadas do elemento deve ter a mesma orientação do sistema global. Portanto, para cada posicionamento da placa em re lação ao sistema global, é necessária uma renumeração dos nodos do elemento.

O A-9 parece ser um bom elemento, porém foram apresentados poucos resultados nos testes realizados na Referência [30], e, embora a energia de cisalhamento esteja inclusa, nada foi assegurado sobre a capacidade do elemento acomodar a restrição de energia de cisalhamento nula para placas finas(efeito de travamento). Os elementos da família lagrangeana[3], com integração reduzida, apresentam modos falsos de energia. O mesmo pode ser dito para o triângulo SRI(Selective Reduced Integration).

Já os elementos da família serendipity[3] não apresentam modos falsos de energia, mesmo com integração reduzida, mas divergem totalmente da solução do problema para placas muito finas, em decorrência do fenômeno de travamento.

Os elementos DKQ e DKT, como já foi comentado, têm muito boa convergência, são bons para tensões, são pouco sensíveis à distorção da malha, exigem apenas continuidade C^0 em função da teoria em que são baseados(Discrete Kirchhoff Theory), e não apresentam modos falsos de energia. Contudo, como também já foi comentado, a energia de deformação cisalhante é desprezada e, desta forma, o elemento não funciona para placas espessas, o que os elimina para uma aplicação geral.

Finalmente, são escolhidos para a implementação os elementos QLR/S e CLN da família lagrangeana, o HETEROSIS e o T1. O QLR/S, embora apresente modos falsos de energia, é escolhido por ser o melhor elemento da família lagrangeana com integração reduzida, e servirá para comparação com os demais elementos implementados. Já os elementos CLN, HETEROSIS e T1 apresentam algumas das características desejáveis para um elemento de aplicação geral, tais como: incluem o efeito de cisalhamento, não têm modos falsos de energia e não apresentam travamento.

2.2.2 - Formulação do elemento QLR/S

É um elemento isoparamétrico, quadrático, lagrangeano, tem nove nodos e três graus de liberdade por nodo(Figura 2.2).

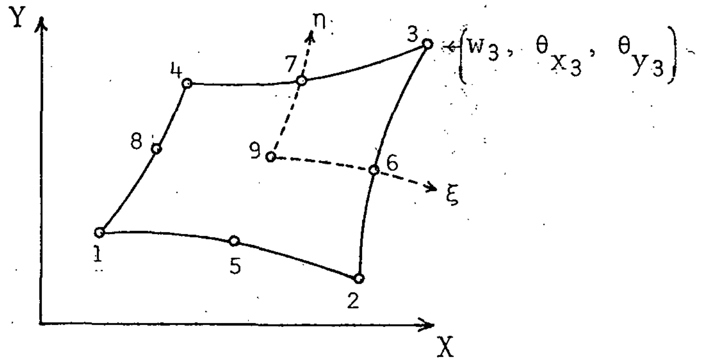


Figura 2.2 - Geometria do elemento QLR/S, numeração dos nodos e graus de liberdade no nodo 3.

a) Vetor deslocamentos generalizados$\{\delta\}$:

$$\{\delta\} = \lfloor w \; ; \; \theta_x \; ; \; \theta_y \rfloor^T \tag{2.5}$$

b) Componentes de deformação de flexão$\{\chi\}$:

$$\{\chi\} = \lfloor \theta_{y},_{x} \; ; \; -\theta_{x},_{y} \; ; \; \theta_{y},_{y} \; ; \; -\theta_{x},_{x} \rfloor^T \tag{2.6}$$

c) Componentes de deformação de cisalhamento$\{\phi\}$:

$$\{\phi\} = \lfloor w,_{x} + \theta_y \; ; \; w,_{y} - \theta_x \rfloor^T \tag{2.7}$$

d) Funcional da Energia Potencial, incluindo a parcela de energia cisalhante transversal.

Usando-se as equações (2.1), (2.2), (2.6) e (2.7) tem-se:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\int\{\chi\}^T \left[D_f\right]\{\chi\}dxdy + \frac{1}{2}\int\int\{\phi\}^T\left[D_s\right]\{\phi\}dxdy - \int\int qwdxdy \tag{2.8}$$

onde q é a carga distribuída transversal.

e) Funções de interpolação[N]

São as lagrangeanas de nove nodos. Ver Apêndice H.

f) Discretização e minimização de Π(2.8)

Usando-se as funções de interpolação, os deslocamentos são expressos por:

$$\left.\begin{aligned} w &= \sum_i N_i w_i \\ \theta_x &= \sum_i N_i \theta_{x_i} \\ \theta_y &= \sum_i N_i \theta_{y_i} \\ &(i = 1,2,\ldots,9) \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

logo, $\{\delta\}$(2.5) pode ser expresso como:

$$\{\delta\} = [N]\{a\} \quad (2.10)$$

onde $\{a\}$ é o vetor de todas as variáveis nodais. Para um elemento, $\{a\}$ é dado por:

$$\{a\} = \lfloor w_1 \;;\; \theta_{x_1} \;;\; \theta_{y_1} \;;\; w_2 \;;\; \theta_{x_2} \;;\; \theta_{y_2} \;;\ldots;\; w_9 \;;\; \theta_{x_9} \;;\; \theta_{y_9} \rfloor^T \quad (2.11)$$

Considerem-se as matrizes operadores diferenciais, $[L_1]$ e $[L_2]$:

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$[L_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Substituindo-se (2.10) e (2.12) em (2.6), e (2.10) e (2.13) em (2.7), obtem-se:

$$\{\chi\} = [B]\{a\} \qquad (2.14)$$

$$\{\phi\} = [C]\{a\} \qquad (2.15)$$

onde,

$$[B] = [L_1][N] \qquad (2.16)$$

$$[C] = [L_2][N] \qquad (2.17)$$

Considere-se o vetor $\{N_w\}$:

$$\{N_w\} = \lfloor N_1 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \ ; \ N_2 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \ ; \ldots ; \ N_9 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \rfloor \qquad (2.18)$$

Da primeira das equações (2.9) e de (2.11) e (2.18), o deslocamento transversal w, pode ser escrito como:

$$w = \{a\}^T \{N_w\}^T \qquad (2.19)$$

Substituindo-se (2.14), (2.15) e (2.19) na expressão do funcional Π(2.8), tem-se:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint \{a\}^T [B]^T [D_f] [B]\{a\}dxdy + \frac{1}{2}\iint \{a\}^T [C]^T [D_s] [C]\{a\}dxdy$$
$$- \iint \{a\}^T \{N_w\}^T q dxdy \qquad (2.20)$$

Com a minimização de (2.20) em relação a {a}, obtem-se a equação final de elementos finitos para um elemento, ou seja:

$$\left([K_f] + [K_s]\right)\{a\} = \{Q\} \qquad (2.21)$$

onde,

$$\left[K_f\right] = \iint [B]^T \left[D_f\right] [B] dxdy \tag{2.22}$$

é a matriz de rigidez de flexão do elemento,

$$\left[K_s\right] = \iint [C]^T \left[D_s\right] [C] dxdy \tag{2.23}$$

é a matriz de rigidez de cisalhamento do elemento, e

$$\{Q\} = \iint \left\{N_w\right\}^T q dxdy \tag{2.24}$$

é o vetor carga nodal.

g) Integração numérica

A integração numérica é feita pela Quadratura de Gauss. $\left[K_f\right]$ e $\{Q\}$ são integrados totalmente com nove pontos de integração e $\left[K_s\right]$ é sub-integrada com quatro pontos. Desta forma, as equações (2.22), (2.23) e (2.24) são reescritas como:

$$\left.\begin{aligned} \left[K_f\right] &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T \left[D_f\right] [B] \, |J| \, d\xi d\eta \\ \left[K_s\right] &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [C]^T \left[D_s\right] [C] \, |J| \, d\xi d\eta \\ \{Q\} &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{N_w\right\}^T q \, |J| \, d\xi d\eta \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz jacobiana,

$$[J] = \begin{bmatrix} x,_\xi & y,_\xi \\ x,_\eta & y,_\eta \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Os termos de $[J]$ são obtidos da seguinte maneira:

$$\left.\begin{aligned} x,_\xi &= \sum_i N_i,_\xi x_i \\ y,_\xi &= \sum_i N_i,_\xi y_i \\ (i &= 1,2,\ldots,9) \end{aligned}\right\} \tag{2.27a}$$

$$\left.\begin{aligned} x,_\eta &= \sum_i N_i,_\eta x_i \\ y,_\eta &= \sum_i N_i,_\eta y_i \\ (i &= 1,2,\ldots,9) \end{aligned}\right\} \quad (2.27b)$$

onde os x_i e y_i são as coordenadas dos nodos do elemento, medidas no sistema de referência global.

A localização dos pontos de integração, bem como os pesos, podem ser vistos no Apêndice I.

h) Determinação das matrizes [B] e [C]

Conhecida a equação:

$$\lfloor N_i,_\xi \; ; \; N_i,_\eta \rfloor^T = [J] \lfloor N_i,_x \; ; \; N_i,_y \rfloor^T \quad (2.28)$$

obtem-se:

$$\lfloor N_i,_x \; ; \; N_i,_y \rfloor^T = [J]^{-1} \lfloor N_i,_\xi \; ; \; N_i,_\eta \rfloor^T \quad (2.29)$$

e desta forma [B] e [C] ficam determinadas.

Desenvolvendo-se, portanto, as equações (2.16) e (2.17), tem-se:

$$[B] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & 0 & N_1,_x & \ldots & 0 & 0 & N_9,_x \\ 0 & -N_1,_y & 0 & \ldots & 0 & -N_9,_y & 0 \\ 0 & -N_1,_x & N_1,_y & \ldots & 0 & -N_9,_x & N_9,_y \end{array}\right] \quad (2.30)$$

$$[C] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1,_x & 0 & N_1 & \ldots & N_9,_x & 0 & N_9 \\ N_1,_y & -N_1 & 0 & \ldots & N_9,_y & -N_9 & 0 \end{array}\right] \quad (2.31)$$

i) Momentos{M} e cortantes{F}

Obtida a solução do problema {a}, calcula-se os momentos e forças cortantes pela equação:

$$\begin{Bmatrix} M \\ -- \\ F \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \left[D_f\right] [B] \\ \hline \left[D_s\right] [C] \end{array}\right] \{a\} \tag{2.32}$$

onde,

$$\{M\} = \lfloor M_x \; ; \; M_y \; ; \; M_{xy} \rfloor^T \tag{2.33}$$

e

$$\{F\} = \lfloor F_x \; ; \; F_y \rfloor^T \tag{2.34}$$

2.2.3 - Formulação do elemento CLN

É um elemento isoparamétrico, cúbico, lagrangeano, tem dezesseis nodos e três graus de liberdade por nodo(Figura 2.3).

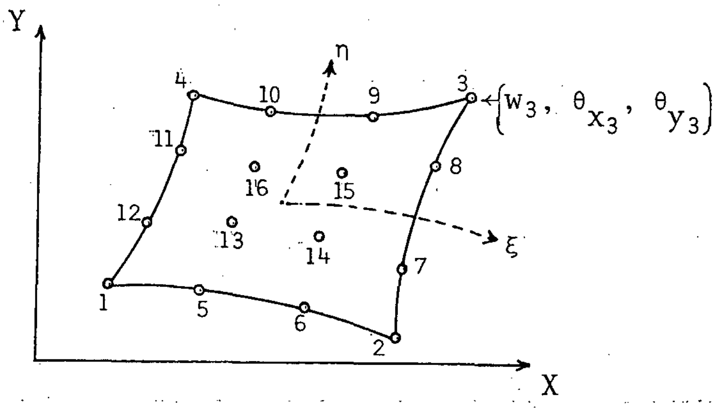


Figura 2.3 - Geometria do elemento CLN, numeração dos nodos e graus de liberdade no nodo 3.

A formulação deste elemento é a mesma do elemento QLR/S, pois usa o mesmo funcional e a mesma teoria de placa.

As diferenças são apenas quanto ao número de nodos e quanto à integração numérica. Conseqüentemente, as funções de interpolação são as lagrangeanas de dezesseis nodos. Ver Apêndice H. A integração numérica da rigidez de flexão e de cisalhamento é feita total, ou seja, dezesseis pontos. Os pesos e localizações destes pontos encontram-se no Apêndice I.

2.2.4 - Formulação do elemento HETEROSIS de HUGHES e COHEN

É um elemento isoparamétrico, quadrático, lagrangeano e serendipity, tem nove nodos, três graus de liberdade em cada nodo externo e dois graus de liberdade no nodo interno(Figura 2.4)

Eliminando o grau de liberdade de deslocamento, w, no centro do elemento, HUGHES e COHEN conseguiram um aperfeiçoamento do elemento QLR/S quanto à presença de modos falsos de energia.

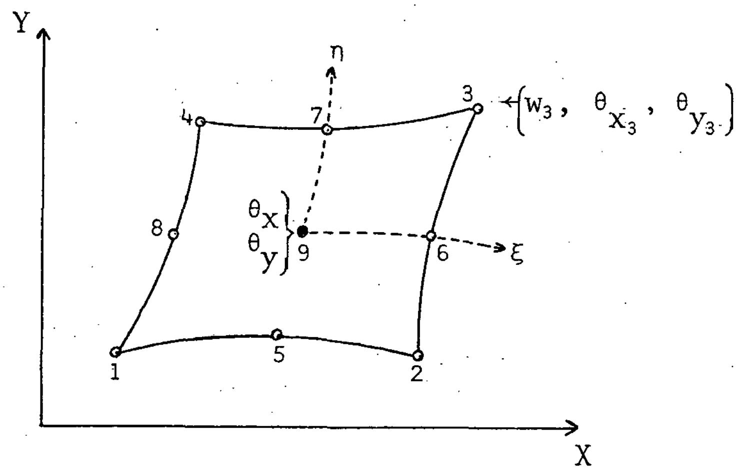


Figura 2.4 - Geometria do elemento HETEROSIS, numeração dos nodos e graus de liberdade nos nodos 3 e 9.

OBS: ∘ → Graus de liberdade w, θ_x e θ_y.

• → Graus de liberdade θ_x e θ_y.

O HETEROSIS usa o mesmo funcional do elemento QLR/S, e portanto tem formulação idêntica. Comenta-se a seguir, apenas as diferenças encontradas.

a) Funções de interpolação

Usa as funções lagrangeanas de nove nodos para as rota ções e as serendipity de oito nodos para os deslocamentos transversais. Ou seja:

$$\left.\begin{array}{ll} w = \sum_i S_j w_j & (i = 1,2,\ldots,8) \\ \theta_x = \sum_i N_i \theta_{x_i} & (i = 1,2,\ldots,9) \\ \theta_y = \sum_i N_i \theta_{y_i} & (i = 1,2,\ldots,9) \end{array}\right\} \quad (2.35)$$

onde,

S_j → são as funções de serendipity. Ver Apêndice H.

N_i → são as funções lagrangeanas. Ver Apêndice H.

b) Coordenadas do nodo 9

As coordenadas do nodo 9 são definidas pelas coordenadas dos demais nodos do elemento usando-se as funções de serendipity. É admitido que o nodo 9 localize-se na origem do sistema local ξ-η, ou seja, (0,0). Desta forma, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} x_9 = \sum_j S_j(0,0)x_j \\ y_9 = \sum_j S_j(0,0)y_j \end{array}\right\} \quad (2.36)$$

$$(j = 1,2,\ldots,8)$$

onde x_j e y_j são as coordenadas dos nodos do elemento, medidas no sistema de referência global.

c) Integração numérica

Como no QLR/S, $[K_f]$ e $\{Q\}$ são integrados totalmente com nove pontos de integração e $[K_s]$ é sub-integrada com quatro pontos. A única diferença está no cálculo da matriz jacobiana, on de se usa as funções de serendipity, ou seja:

$$\left.\begin{aligned} x,_{\xi} &= \sum_j S_j,_{\xi} x_j \\ y,_{\xi} &= \sum_j S_j,_{\xi} y_j \\ x,_{\eta} &= \sum_j S_j,_{\eta} x_j \\ y,_{\eta} &= \sum_j S_j,_{\eta} y_j \\ &(j = 1,2,\ldots,8) \end{aligned}\right\} \quad (2.37)$$

onde x_j e y_j são as coordenadas globais dos nodos.

d) Vetor solução para um elemento

O vetor solução tem um termo a menos, correspondente ao deslocamento, w, no nodo 9. Ou seja:

$$\{a\} = \lfloor w_1 \; ; \; \theta_{x_1} \; ; \; \theta_{y_1} \; ; \; w_2 \; ; \; \theta_{x_2} \; ; \; \theta_{y_2} \; ; \ldots ; \; \theta_{x_9} \; ; \; \theta_{y_9} \rfloor^T \quad (2.38)$$

e) Matrizes [B] e [C]

Em decorrência da retirada de w_9, e da utilização das funções de serendipity, as equações (2.30) e (2.31) são modificadas para:

$$[B] = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & 0 & N_1,_x & \cdots & 0 & N_9,_x \\ 0 & -N_1,_y & 0 & \cdots & -N_9,_y & 0 \\ 0 & -N_1,_x & N_1,_y & \cdots & -N_9,_x & N_9,_y \end{array}\right] \quad (2.39)$$

$$[C] = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} S_1,_x & 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_9 \\ S_1,_y & -N_1 & 0 & \cdots & -N_9 & 0 \end{array}\right] \quad (2.40)$$

f) Vetor carga nodal

Como as funções de serendipity são usadas para os deslocamentos transversais, conseqüentemente o vetor carga nodal, equação (2.24), será reescrito como:

$$\{Q\} = \iint \left\{S_w\right\}^T q\,dx\,dy \tag{2.41}$$

onde,

$$\left\{S_w\right\} = \lfloor S_1 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \ ; \ S_2 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \ ; \ldots ; \ S_8 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \rfloor \tag{2.42}$$

LEE e WONG[16] mostram que esta formulação pode ser feita de maneira diferente, ou seja, utilizando, desde o início, as funções de interpolação lagrangeanas de nove nodos para obter a matriz de rigidez do elemento e o vetor carga nodal. Em seguida, w_9 é eliminado pela restrição:

$$w_9 = \sum_j S_j(0,0)w_j \tag{2.43}$$

$$(j = 1,2,\ldots,8)$$

e θ_{x_9} e θ_{y_9} são eliminados por condensação estática. A vantagem é a diminuição do número de equações para a solução do sistema global.

2.2.5 - Formulação do elemento T1

É um elemento isoparamétrico, bilinear, tem quatro nodos e doze graus de liberdade.

Sua geometria e dados cinemáticos podem ser vistos na Figura 2.5.

Por ser um elemento Mindlin-deslocamentos, a formulação do T1 é idêntica à do QLR/S. As diferenças básicas entre o T1 e o QLR/S são: 1) O elemento T1 é bilinear, 2) O T1 não usa integração reduzida e 3) Para o T1, as deformações cisalhantes trans versais são definidas, de maneira especial, através de uma interpolação das variáveis nodais dos nodos dos vértices do elemento.

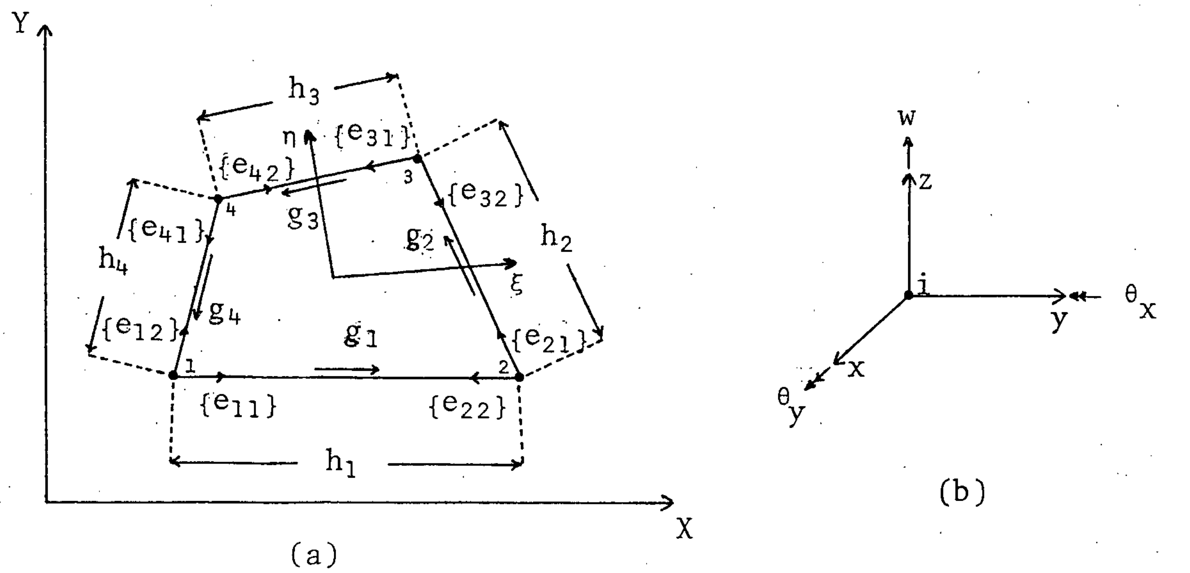


Figura 2.5 - a) Geometria e dados cinemáticos para o elemento T1; b) Variáveis nodais e orientações no nodo genérico i.

OBS: $\{e_{ij}\}$ é um vetor unitário.

a) Matriz de rigidez de flexão $[K_f]$

A matriz $[K_f]$ é obtida da mesma forma que a equação (2.22). Entretanto, [B](2.30) é modificada, pois o elemento é bilinear, e para uma maior simplicidade das equações, toma-se uma nova orientação para as rotações(Figura 2.5(b)), tal que $\theta_x = w,_x$ e $\theta_y = w,_y$ quando são assumidas as suposições de Kirchhoff. Desta forma, [B] é dada por:

$$[B] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & N_1,_x & 0 & \cdots & 0 & N_4,_x & 0 \\ 0 & 0 & N_1,_y & \cdots & 0 & 0 & N_4,_y \\ 0 & N_1,_y & N_1,_x & \cdots & 0 & N_4,_y & N_4,_x \end{array}\right] \qquad (2.44)$$

onde N_i (i = 1,2,3,4) são funções de interpolação lagrangeanas de quatro nodos.

b) Matriz de rigidez de cisalhamento $\left[K_s\right]$

Tal como no caso da matriz de rigidez de flexão, a equação da matriz de rigidez de cisalhamento é idêntica à equação (2.23), diferindo, entretanto, quanto à formação da matriz [C], pois as deformações cisalhantes transversais são definidas de uma maneira diferente, ou seja:

1) Para cada lado do elemento é definida uma componente de deformação cisalhante, g_a, localizada no meio do lado e em uma direção paralela a este (Figura 2.5), ou seja:

$$g_a = \frac{1}{h_a}\left(w_b - w_a\right) - \frac{1}{2}\left\{e_{a1}\right\}\cdot\left(\left\{\theta_b\right\} + \left\{\theta_a\right\}\right) \tag{2.45}$$

2) Para cada nodo é definido um vetor deformação cisalhante, $\left\{\gamma_b\right\}$, (Figura 2.6).

$$\left\{\gamma_b\right\} = \gamma_{b1}\left\{e_{b1}\right\} + \gamma_{b2}\left\{e_{b2}\right\} \tag{2.46}$$

onde,

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{b2} &= \left(1 - \alpha_b^2\right)^{-1}\left(g_{b2} - g_{b1}\alpha_b\right)\\
\gamma_{b1} &= \left(1 - \alpha_b^2\right)^{-1}\left(g_{b1} - g_{b2}\alpha_b\right)\\
\alpha_b &= \left\{e_{b1}\right\}\cdot\left\{e_{b2}\right\}\\
g_{b1} &= g_b\\
g_{b2} &= -g_a
\end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

3) O vetor deformações cisalhantes transversais é obtido com o uso das funções de interpolação, N_i, tal que:

$$\{\phi\} = \sum_a N_a\left\{\gamma_a\right\} \tag{2.48}$$

$$(a = 1,2,3,4)$$

OBS: - O subscrito "a" está relacionado ao subscrito "b" pelas seguintes relações:

$a = 1 \rightarrow b = 2$

$a = 2 \rightarrow b = 3$

$a = 3 \rightarrow b = 4$

$a = 4 \rightarrow b = 1$

- Os vetores $\{\theta_a\}$ e $\{\theta_b\}$ são:

$$\{\theta_a\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x_a} \\ \theta_{y_a} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\theta_b\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x_b} \\ \theta_{y_b} \end{Bmatrix}$$

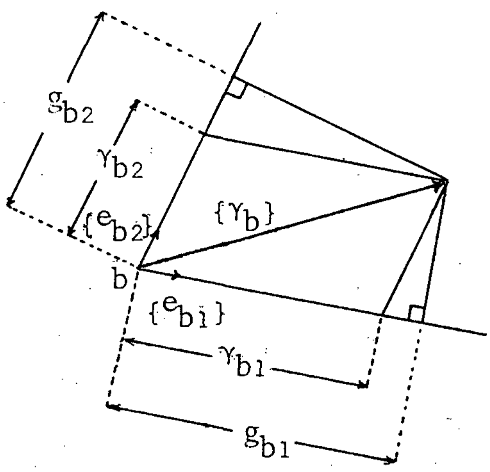


Figura 2.6 - Definição do vetor deformações cisalhantes transversais.

Usando-se as equações (2.45), (2.46) e (2.47), e desenvolvendo-se (2.48), obtem-se:

$$
\begin{aligned}
\{\phi\} = N_1\left(1 - \alpha_1^2\right)^{-1} \Bigg\{ \Bigg[& w_1\left(\frac{-1}{h_1} + \frac{\alpha_1}{h_4}\right) + \frac{w_2}{h_1} - \frac{w_4}{h_4}\,\alpha_1 - \frac{1}{2}\theta_{x_1}\left(e'_{11} + \alpha_1 e'_{41}\right) \\
& - \frac{1}{2}\theta_{y_1}\left(e''_{11} + \alpha_1 e''_{41}\right) - \frac{1}{2}\theta_{x_2} e'_{11} - \frac{1}{2}\theta_{y_2} e''_{11} - \frac{1}{2}\theta_{x_4}\alpha_1 e'_{41} \\
& - \frac{1}{2}\theta_{y_4}\alpha_1 e''_{41} \Bigg] \left\{e_{11}\right\} - \Bigg[w_1\left(\frac{-\alpha_1}{h_1} + \frac{1}{h_4}\right) + \frac{w_2}{h_1}\alpha_1 - \frac{w_4}{h_4} - \frac{1}{2}\theta_{x_1}\left(\alpha_1 e'_{11}\right. \\
& \left. + e'_{41}\right) - \frac{1}{2}\theta_{y_1}\left(\alpha_1 e''_{11} + e''_{41}\right) - \frac{1}{2}\theta_{x_2}\alpha_1 e'_{11} - \frac{1}{2}\theta_{y_2}\alpha_1 e''_{11} \\
& - \frac{1}{2}\theta_{x_4} e'_{41} - \frac{1}{2}\theta_{y_4} e''_{41} \Bigg] \left\{e_{12}\right\} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+N_2\left(1 - \alpha_2^2\right)^{-1} \Bigg\{ \Bigg[& w_2\left(\frac{\alpha_2}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \frac{w_3}{h_2} - \frac{w_1}{h_1}\,\alpha_2 - \frac{1}{2}\theta_{x_2}\left(\alpha_2 e'_{11} + e'_{21}\right) \\
& - \frac{1}{2}\theta_{y_2}\left(\alpha_2 e''_{11} + e''_{21}\right) - \frac{1}{2}\theta_{x_3} e'_{21} - \frac{1}{2}\theta_{y_3} e''_{21} - \frac{1}{2}\theta_{x_1}\alpha_2 e'_{11} \\
& - \frac{1}{2}\theta_{y_1}\alpha_2 e''_{11} \Bigg] \left\{e_{21}\right\} - \Bigg[w_2\left(\frac{-\alpha_2}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right) + \frac{w_3}{h_2}\alpha_2 - \frac{w_1}{h_1} - \frac{1}{2}\theta_{x_2}\left(\alpha_2 e'_{21}\right. \\
& \left. + e'_{11}\right) - \frac{1}{2}\theta_{y_2}\left(\alpha_2 e''_{21} + e''_{11}\right) - \frac{1}{2}\theta_{x_3}\alpha_2 e'_{21} - \frac{1}{2}\theta_{y_3}\alpha_2 e''_{21} \\
& - \frac{1}{2}\theta_{x_1} e'_{11} - \frac{1}{2}\theta_{y_1} e''_{11} \Bigg] \left\{e_{22}\right\} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$+N_3\left(1-\alpha_3^2\right)^{-1}\left\{\left[w_3\left(\frac{\alpha_3}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)+\frac{w_4}{h_3}-\frac{w_2}{h_2}\alpha_3-\frac{1}{2}\theta_{x_3}\left(\alpha_3 e'_{21}+e'_{31}\right)\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\theta_{y_3}\left(\alpha_3 e''_{21}+e''_{31}\right)-\frac{1}{2}\theta_{x_4}e'_{31}-\frac{1}{2}\theta_{y_4}e''_{31}-\frac{1}{2}\theta_{x_2}\alpha_3 e'_{21}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\theta_{y_2}\alpha_3 e''_{21}\right]\left\{e_{31}\right\}-\left[w_3\left(\frac{-\alpha_3}{h_3}+\frac{1}{h_2}\right)+\frac{w_4}{h_3}\alpha_3-\frac{w_2}{h_2}-\frac{1}{2}\theta_{x_3}\left(\alpha_3 e'_{31}\right.\right.$$

$$\left.+e'_{21}\right)-\frac{1}{2}\theta_{y_3}\left(\alpha_3 e''_{31}+e''_{21}\right)-\frac{1}{2}\theta_{x_4}\alpha_3 e'_{31}-\frac{1}{2}\theta_{y_4}\alpha_3 e''_{31}$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\theta_{x_2}e'_{21}-\frac{1}{2}\theta_{y_2}e''_{21}\right]\left\{e_{32}\right\}\right\}$$

$$+N_4\left(1-\alpha_4^2\right)^{-1}\left\{\left[w_4\left(\frac{\alpha_4}{h_3}-\frac{1}{h_4}\right)+\frac{w_1}{h_4}-\frac{w_3}{h_3}\alpha_4-\frac{1}{2}\theta_{x_4}\left(\alpha_4 e'_{31}+e'_{41}\right)\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\theta_{y_4}\left(\alpha_4 e''_{31}+e''_{41}\right)-\frac{1}{2}\theta_{x_1}e'_{41}-\frac{1}{2}\theta_{y_1}e''_{41}-\frac{1}{2}\theta_{x_3}\alpha_4 e'_{31}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\theta_{y_3}\alpha_4 e''_{31}\right]\left\{e_{41}\right\}-\left[w_4\left(\frac{-\alpha_4}{h_4}+\frac{1}{h_3}\right)+\frac{w_1}{h_4}\alpha_4-\frac{w_3}{h_3}-\frac{1}{2}\theta_{x_4}\left(\alpha_4 e'_{41}\right.\right.$$

$$\left.+e'_{31}\right)-\frac{1}{2}\theta_{y_4}\left(\alpha_4 e''_{41}+e''_{31}\right)-\frac{1}{2}\theta_{x_1}\alpha_4 e'_{41}-\frac{1}{2}\theta_{y_1}\alpha_4 e''_{41}$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\theta_{x_3}e'_{31}-\frac{1}{2}\theta_{y_3}e''_{31}\right]\left\{e_{42}\right\}\right\} \qquad (2.49)$$

Reagrupando-se os termos de (2.49), correspondentes a cada variável nodal, e definindo-se o vetor variáveis nodais, {a}, para cada elemento, como:

$$\{a\} = \left\lfloor w_1 \ ; \ \theta_{x_1} \ ; \ \theta_{y_1} \ ; \ldots ; \ w_4 \ ; \ \theta_{x_4} \ ; \ \theta_{y_4} \right\rfloor^T \qquad (2.50)$$

obtem-se a matriz [C], como se segue:

$$[C] = \left[\{C_{11}\}\{C_{12}\}\{C_{13}\}\{C_{21}\}\{C_{22}\}\{C_{23}\} \;\vdots \cdots \right.$$
$$\left. \vdots\; \{C_{41}\}\{C_{42}\}\{C_{43}\}\right] \tag{2.51}$$

onde,

$$\left.\begin{aligned} \{C_{b1}\} &= \frac{1}{h_a}\{G_a\} - \frac{1}{h_b}\{G_b\} \\ \{C_{b2}\} &= \frac{1}{2}\left(e'_{b2}\{G_a\} - e'_{b1}\{G_b\}\right) \\ \{C_{b3}\} &= \frac{1}{2}\left(e''_{b2}\{G_a\} - e''_{b1}\{G_b\}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

$$\{G_a\} = \left(1 - \alpha_a^2\right)^{-1} N_a\left(\{e_{a1}\} - \alpha_a\{e_{a2}\}\right)$$
$$- \left(1 - \alpha_b^2\right)^{-1} N_b\left(\{e_{b2}\} - \alpha_b\{e_{b1}\}\right) \tag{2.53}$$

$$\{e_{b1}\} = \begin{Bmatrix} e'_{b1} \\ e''_{b1} \end{Bmatrix}, \text{ etc.} \tag{2.54}$$

---

c) Momentos e cortantes

Em decorrência da mudança no sentido das rotações, a equação (2.32) será reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} M \\ -- \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[D_f]\,[B] \\ [D_s]\,[C] \end{bmatrix}\{a\} \tag{2.55}$$

2.3 - Modelo híbrido

2.3.1 - Seleção dos elementos

Cita-se os seguintes elementos híbridos: LORA[7] (Modelo de equilíbrio), H5[10], UH[34](Apêndice F), HCR[43], HT[43], HSM[6 e 42] e uma família de elementos híbrido-tensões (Referências 11 a 15 - Apêndice E).

Destes elementos, seleciona-se para implementação o elemento QH3, da família híbrido-tensões[11 a 15], pois apresenta boa convergência, é invariante, não apresenta travamento e não possui modos falsos de energia. Os demais elementos apresentam problemas, tais como: o H5 é não invariante e não foi testado quanto ao fenômeno de travamento; o UH foi pouco testado e apresentou alguns resultados não convincentes, como, por exemplo, para placa fina engastada com carga concentrada; o HSM não inclui a energia de cisalhamento; para o LORA, como já se comentou, ROBINSON e HAGGENMACHER[7] não apresentaram a formulação do elemento; o HCR e o HT somente foram testados para placas finas, e nada foi comentado quanto ao travamento, modos falsos de energia e invariância; e o QH1, da família híbrido-tensões[11 a 15], o qual apresenta convergência superior ao QH3, é um elemento não invariante (ver Apêndice E). O QH2(Apêndice E) também apresenta convergência superior ao QH3, entretanto o seu campo de tensões foi obtido forçando as condições de compatibilidade(Beltrami-Michell), desta forma o QH2 não deve ser aplicado em placas laminadas ortotrópicas.

2.3.2 - Formulação do elemento QH3

É um elemento isoparamétrico, quadrático, serendipity, tem oito nodos e três graus de liberdade por nodo(Figura 2.7).

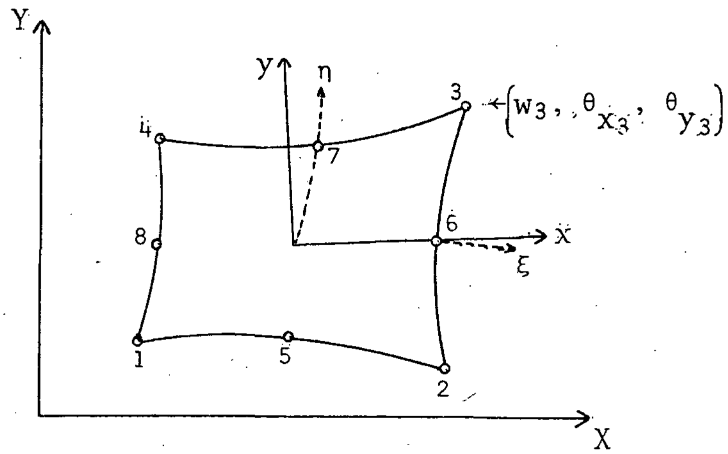


Figura 2.7 - Geometria do elemento QH3, numeração dos nodos, graus de liberdade no nodo 3 e sistemas locais (x,y) e (ξ,η).

a) Deslocamentos, deformações e tensões

Mindlin[18] admite para os deslocamentos as seguintes expressões:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned}\right\} \quad (2.56)$$

Pelas relações deformações-deslocamentos, obtem-se as deformações:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\theta_{y,x} = z\bar{\varepsilon}_x \\ \varepsilon_y &= -z\theta_{x,y} = z\bar{\varepsilon}_y \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= z\left(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}\right) = z\bar{\gamma}_{xy} \\ \gamma_{xz} &= w_{,x} + \theta_y = \bar{\gamma}_{xz} \\ \gamma_{yz} &= w_{,y} - \theta_x = \bar{\gamma}_{yz} \end{aligned}\right\} \quad (2.57)$$

Observe-se que, como θ_x, θ_y e w são calculados na superfície média da placa, e são funções somente de x e y, coloca-se uma barra sobre o símbolo das deformações, pois são também funções somente de x e y. O mesmo far-se-á para as tensões.

Em vista das deformações, as tensões no plano x-y devem ser linear em z e, desde que as tensões devam satisfazer as equações de equilíbrio, as tensões cisalhantes transversais devem ser proporcionais a z^2 e a tensão normal deve ser proporcional a z^3. Em adição, as tensões cisalhantes transversais devem ser nulas nas superfícies superior e inferior da placa e, para um carregamento transversal, a tensão normal deve ser nula na superfície descarregada da placa. Desta forma, pode-se expressar as tensões como:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x(x, y, z) &= z\bar{\sigma}_x(x, y) \\
\sigma_y(x, y, z) &= z\bar{\sigma}_y(x, y) \\
\sigma_z(x, y, z) &= \frac{1}{6}\left(z^3 - 3h^2z + 2h^3\right)\left(\bar{\sigma}_{xz},_x + \bar{\sigma}_{yz},_y\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(z^3 - 3h^2z + 2h^3\right)\bar{\sigma}_z(x, y) \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= z\bar{\sigma}_{xy}(x, y) \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= \frac{1}{2}\left(h^2 - z^2\right)\left(\bar{\sigma}_x,_x + \bar{\sigma}_{xy},_y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(h^2 - z^2\right)\bar{\sigma}_{xz}(x, y) \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= \frac{1}{2}\left(h^2 - z^2\right)\left(\bar{\sigma}_{xy},_x + \bar{\sigma}_y,_y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(h^2 - z^2\right)\bar{\sigma}_{yz}(x, y)
\end{aligned}\right\} \quad (2.58)$$

Define-se o vetor deformações $\{\bar{\varepsilon}\}$ e o vetor tensões $\{\bar{\sigma}\}$ como:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \lfloor \bar{\varepsilon}_x \;;\; \bar{\varepsilon}_y \;;\; \bar{\varepsilon}_z \;;\; \bar{\gamma}_{xy} \;;\; \bar{\gamma}_{xz} \;;\; \bar{\gamma}_{yz} \rfloor \quad (2.59)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = \lfloor \bar{\sigma}_x \ ; \ \bar{\sigma}_y \ ; \ \bar{\sigma}_z \ ; \ \bar{\sigma}_{xy} \ ; \ \bar{\sigma}_{xz} \ ; \ \bar{\sigma}_{yz} \rfloor \qquad (2.60)$$

b) Funcional híbrido-tensões para um elemento

Usando-se a matriz [E], equação (2.3), o funcional Π_{mc} [12 e 22] pode ser escrito como:

$$\Pi_{mc} = \frac{1}{2}\iiint\{\sigma\}^T[E]\{\sigma\}dxdydz - \iiint\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dxdydz + \iint qwdxdy \qquad (2.61)$$

Substituindo-se (2.57), (2.58), (2.59) e (2.60) em (2.61), e fazendo-se a integração em z, de -h a +h, obtem-se:

$$\Pi_{mc} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{1}{2}\iint\{\bar{\sigma}\}^T[\bar{E}]\{\bar{\sigma}\}dxdy - \iint\{\bar{\sigma}\}^T\{\bar{\varepsilon}\}dxdy\right] + \iint qwdxdy \qquad (2.62)$$

onde $[\bar{E}]$ é dada por:

$$[\bar{E}] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & \frac{\nu(2h^2)}{5} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu(2h^2)}{5} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{52h^4}{105} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & \text{(SIMÉTRICA)} & & & \frac{4h^2(1+\nu)}{5} & 0 \\ & & & & & \frac{4h^2(1+\nu)}{5} \end{bmatrix} \qquad (2.63)$$

c) Campo de tensões (Apêndice E)

Partindo-se de uma polinomial completa do terceiro grau, é assumido o seguinte campo de tensões para o QH3:

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y \\
&\quad + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 \\
\bar{\sigma}_y &= \beta_{11} + \beta_{12} x + \beta_{13} y + \beta_{14} x^2 + \beta_{15} xy + \beta_{16} y^2 + \beta_{17} x^3 \\
&\quad + \beta_{18} x^2 y + \beta_{19} xy^2 + \beta_{20} y^3 \\
\bar{\sigma}_z &= 2\left(\beta_4 + \beta_{16} + \beta_{25}\right) \\
\bar{\sigma}_{xy} &= \beta_{21} + \beta_{22} x + \beta_{23} y + \beta_{24} x^2 + \beta_{25} xy + \beta_{26} y^2 + \beta_{27} x^3 \\
&\quad - \frac{3}{2}\beta_7 x^2 y - \frac{1}{2}\beta_8 xy^2 + \beta_{28} y^3 \\
\bar{\sigma}_{xz} &= \left(\beta_2 + \beta_{23}\right) + \left(2\beta_4 + \beta_{25}\right)x + \left(\beta_5 + 2\beta_{26}\right)y \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(3\beta_7 - \beta_{19}\right)x^2 + \left(\beta_8 - 3\beta_{20}\right)xy + \left(\beta_9 + 3\beta_{28}\right)y^2 \\
\bar{\sigma}_{yz} &= \left(\beta_{13} + \beta_{22}\right) + \left(\beta_{15} + 2\beta_{24}\right)x + \left(2\beta_{16} + \beta_{25}\right)y \\
&\quad + \left(\beta_{18} + 3\beta_{27}\right)x^2 + \left(-3\beta_7 + \beta_{19}\right)xy + \frac{1}{2}\left(-\beta_8 + 3\beta_{20}\right)y^2
\end{aligned}
\right\} \quad (2.64)
$$

Então,

$$\{\sigma\} = [P]\{\beta\} \quad (2.65)$$

onde,

$$
[P] = \left[
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2y/2 & -xy^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2/2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3xy & -y^2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x
\end{array}
\right.
$$

$$
\left.
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -x^2y/2 & -3xy^2/2 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & y^3 \\
0 & 0 & 0 & -x^2/2 & -3xy & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 3y^2 \\
2y & 0 & x^2 & xy & 3y^2/2 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 0
\end{array}
\right] \quad (2.66)
$$

$$\{\beta\} = \lfloor \beta_1 \ ; \ \beta_2 \ ; \ \beta_3 \ ; \ldots ; \ \beta_{28} \rfloor^T \qquad (2.67)$$

Como será comentado posteriormente, x e y são coordenadas dos nodos do elemento, medidas num sistema local, (x,y).

d) Matriz operador diferencial[L]

Utilizando-se as funções de interpolação serendipity ([S] - Apêndice H), os deslocamentos são dados por:

$$\left.\begin{aligned} w &= \sum_j S_j w_j \\ \theta_x &= \sum_j S_j \theta_{x_j} \\ \theta_y &= \sum_j S_j \theta_{y_j} \end{aligned}\right\} \qquad (2.68)$$

$$(j = 1,2,\ldots,8)$$

e

$$\{\delta\} = \lfloor w \ ; \ \theta_x \ ; \ \theta_y \rfloor^T = [S]\{a\} \qquad (2.69)$$

é o vetor deslocamentos generalizados, onde {a} é o vetor das variáveis nodais. Para um elemento:

$$\{a\} = \lfloor w_1 \ ; \ \theta_{x_1} \ ; \ \theta_{y_1} \ ; \ w_2 \ ; \ \theta_{x_2} \ ; \ \theta_{y_2} \ ; \ldots ; \ w_8 \ ; \ \theta_{x_8} \ ; \ \theta_{y_8} \rfloor^T \qquad (2.70)$$

Da matriz de transformação jacobiana[J](2.26), pode-se escrever:

$$\lfloor w(x, y)_{,x} \ ; \ w(x, y)_{,y} \rfloor^T = [J]^{-1} \lfloor w(\xi, \eta)_{,\xi} \ ; \ w(\xi, \eta)_{,\eta} \rfloor^T \qquad (2.71)$$

onde,

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{y_{,\eta}}{|J|} & \dfrac{-y_{,\xi}}{|J|} \\ \dfrac{-x_{,\eta}}{|J|} & \dfrac{x_{,\xi}}{|J|} \end{bmatrix} \qquad (2.72)$$

e $|J|$ é o determinante da matriz jacobiana. Portanto,

$$\left.\begin{aligned} w(x,\ y)_{,x} &= \frac{1}{|J|}\left(y_{,\eta}w(\xi,\ \eta)_{,\xi} - y_{,\xi}w(\xi,\ \eta)_{,\eta}\right) \\ w(x,\ y)_{,y} &= \frac{1}{|J|}\left(-x_{,\eta}w(\xi,\ \eta)_{,\xi} + x_{,\xi}w(\xi,\ \eta)_{,\eta}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.73a)$$

Analogamente, pode-se escrever:

$$\left.\begin{aligned} \theta_x(x,\ y)_{,x} &= \frac{1}{|J|}\left(y_{,\eta}\theta_x(\xi,\ \eta)_{,\xi} - y_{,\xi}\theta_x(\xi,\ \eta)_{,\eta}\right) \\ \theta_x(x,\ y)_{,y} &= \frac{1}{|J|}\left(-x_{,\eta}\theta_x(\xi,\ \eta)_{,\xi} + x_{,\xi}\theta_x(\xi,\ \eta)_{,\eta}\right) \\ \theta_y(x,\ y)_{,x} &= \frac{1}{|J|}\left(y_{,\eta}\theta_y(\xi,\ \eta)_{,\xi} - y_{,\xi}\theta_y(\xi,\ \eta)_{,\eta}\right) \\ \theta_y(x,\ y)_{,y} &= \frac{1}{|J|}\left(-x_{,\eta}\theta_y(\xi,\ \eta)_{,\xi} + x_{,\xi}\theta_y(\xi,\ \eta)_{,\eta}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.73b)$$

Partindo-se das equações (2.56) e (2.57), as deformações, $\{\bar{\varepsilon}\}$(2.59), podem ser reescritas como:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x,\ y) \\ \theta_x(x,\ y) \\ \theta_y(x,\ y) \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Introduzindo-se as equações (2.69) e (2.73) em (2.74), obtem-se:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \frac{1}{|J|}[L]\{\delta\} = \frac{1}{|J|}[L][S]\{a\} = \frac{1}{|J|}[R]\{a\} \quad (2.75)$$

onde,

$$[R] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \left(y,_\eta S_1,_\xi - y,_\xi S_1,_\eta\right) & \cdots \\ 0 & -\left(x,_\xi S_1,_\eta - x,_\eta S_1,_\xi\right) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\left(y,_\eta S_1,_\xi - y,_\xi S_1,_\eta\right) & \left(x,_\xi S_1,_\eta - x,_\eta S_1,_\xi\right) & \cdots \\ \left(y,_\eta S_1,_\eta - y,_\xi S_1,_\eta\right) & 0 & S_1|J| & \cdots \\ \left(x,_\eta S_1,_\eta - x,_\eta S_1,_\xi\right) & -S_1|J| & 0 & \cdots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{|ccc} 0 & 0 & \left(y,_\eta S_8,_\xi - y,_\xi S_8,_\eta\right) \\ 0 & -\left(x,_\xi S_8,_\eta - x,_\eta S_8,_\xi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(y,_\eta S_8,_\xi - y,_\xi S_8,_\eta\right) & \left(x,_\xi S_8,_\eta - x,_\eta S_8,_\xi\right) \\ \left(y,_\eta S_8,_\eta - y,_\xi S_8,_\eta\right) & 0 & S_8|J| \\ \left(x,_\eta S_8,_\eta - x,_\eta S_8,_\xi\right) & -S_8|J| & 0 \end{array}\right] \quad (2.76)$$

e

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(y,_\eta(\frac{\partial}{\partial\xi}) - y,_\xi(\frac{\partial}{\partial\eta})\right) \\ 0 & -\left(x,_\xi(\frac{\partial}{\partial\eta}) - x,_\eta(\frac{\partial}{\partial\xi})\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(y,_\eta(\frac{\partial}{\partial\xi}) - y,_\xi(\frac{\partial}{\partial\eta})\right) & \left(x,_\xi(\frac{\partial}{\partial\eta}) - x,_\eta(\frac{\partial}{\partial\xi})\right) \\ \left(y,_\eta(\frac{\partial}{\partial\xi}) - y,_\xi(\frac{\partial}{\partial\eta})\right) & 0 & |J| \\ \left(x,_\xi(\frac{\partial}{\partial\eta}) - x,_\eta(\frac{\partial}{\partial\xi})\right) & -|J| & 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

e) Discretização e minimização de Π_{mc}

Substituindo-se as equações (2.65) e (2.75) em (2.62), obtem-se:

$$\Pi_{mc} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{1}{2}\iint\{\beta\}^T[P]^T[\bar{E}][P]\{\beta\}dxdy - \iint\frac{1}{|J|}\{\beta\}^T[P]^T[R]\{a\}dxdy\right] + \iint\{a\}^T\left\{S_w\right\}^T q\,dxdy \tag{2.78}$$

ou

$$\Pi_{mc} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{1}{2}\{\beta\}^T[H]\{\beta\} - \{\beta\}^T[G]\{a\}\right] + \{a\}^T\{Q\} \tag{2.79}$$

onde,

$$[H] = \iint[P]^T[\bar{E}][P]dxdy \tag{2.80}$$

$$[G] = \iint\frac{1}{|J|}[P]^T[R]dxdy \tag{2.81}$$

$$\{Q\} = \iint\left\{S_w\right\}^T q\,dxdy \tag{2.82}$$

$$\{a\}^T\left\{S_w\right\}^T = w \tag{2.83}$$

$\left\{S_w\right\} \rightarrow$ Equação (2.42)

A minimização de Π_{mc}(2.79) em relação a $\{\beta\}$, dá:

$$\left.\begin{aligned} &[H]\{\beta\} - [G]\{a\} = 0 \\ \text{ou} \quad &\{\beta\} = [H]^{-1}[G]\{a\} \end{aligned}\right\} \tag{2.84}$$

Com a substituição de (2.84) em (2.79) e a minimização em relação a $\{a\}$, obtem-se a equação final de elementos finitos:

$$[K]\{a\} = \{Q\}$$

onde,

$$[K] = \frac{2h^3}{3}\left([G]^T[H]^{-1}[G]\right) \tag{2.85}$$

é a expressão para a matriz de rigidez do elemento.

f) Integração numérica

SPILKER não especificou a ordem de integração para este elemento. Entretanto, ZIENKIEWICZ[9] dá a seguinte fórmula para determinação da ordem de integração pela Quadratura de Gauss:

$$n = 2(p - m) \tag{2.86}$$

onde,

n → Número de pontos de integração numa direção

p → Ordem da polinomial a ser integrada

m → Fator dependente da continuidade. Para C^0, m = 1

Logo, para o elemento QH3, pode ser visto que a ordem de integração deve ser 4x4(n = 4). A localização dos pontos de integração e pesos constam do Apêndice I.

Com a utilização da integração numérica, as equações (2.80), (2.81) e (2.82) são reescritas como:

$$[H] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[P]^T[\bar{E}][P]|J|d\xi d\eta \tag{2.87}$$

$$[G] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[P]^T[R]d\xi d\eta \tag{2.88}$$

$$\{Q\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{S_w\right\}q|J|d\xi d\eta \tag{2.89}$$

É importante também observar que as matrizes [H] e [G] podem ser obtidas analiticamente. Desta forma, obtem-se uma gran de redução no tempo de computação para formação da matriz de rigidez do elemento.

g) Momentos e cortantes

Da teoria de placas, sabe-se que:

$$\{M\} = \int_{-h}^{h} z\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}dz \tag{2.90}$$

$$\{F\} = \int_{-h}^{h}\begin{Bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix}dz \qquad (2.91)$$

Substituindo-se as expressões (2.58) em (2.90) e (2.91), e fazendo-se a integração, obtem-se:

$$\{M\} = \frac{2h^3}{3}\begin{Bmatrix}\bar{\sigma}_x\\ \bar{\sigma}_y\\ \bar{\sigma}_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (2.92a)$$

$$\{F\} = \frac{2h^3}{3}\begin{Bmatrix}\bar{\sigma}_{xz}\\ \bar{\sigma}_{yz}\end{Bmatrix} \qquad (2.92b)$$

ou

$$\begin{Bmatrix}M\\ --\\ F\end{Bmatrix} = \frac{2h^3}{3}\{\bar{\sigma}\} \qquad (2.92c)$$

Substituindo-se (2.65) e (2.84) em (2.92c), obtem-se:

$$\begin{Bmatrix}M\\ --\\ F\end{Bmatrix} = \frac{2h^3}{3}[P][H]^{-1}[G]\{a\} \qquad (2.93)$$

h) Inversa de [H]

Observa-se que:

1) A matriz [H] pode tornar-se muito mã condicionada, quando coordenadas globais são usadas na definição do campo de tensões. SPILKER[15] mostra que é possível usar coordenadas locais na definição do campo de tensões do elemento QH3, pois ele é invariante. Desta forma, [H] fica melhor condicionada. Este recurso é utilizado na implementação deste elemento.

2) ZIENKIEWICZ[20] afirma que a utilização de uma integração reduzida pode causar singularidades. Portanto, é aconselhá

vel não utilizar a sub-integração na formação de [H].

3) O método de inversão que dá melhores resultados para a inversa de [H] é o método de pivotação total.

2.4 - Modelo misto

2.4.1 - Seleção dos elementos

No modelo misto destacam-se os elementos(ver Apêndice G): PLAT8(5α, 6α, 8α)[16]; PLAT8H(5α, 6α, 8α)[16]; R24, MR24A, R18, MR18, MR18A, todos citados na Referência 17.

Escolhe-se para implementação computacional o elemento PLAT8H(8α), pois não apresenta modos falsos de energia, mesmo usando integração reduzida 2x2 para a rigidez de cisalhamento, e o fenômeno de travamento só acontece para relações t/L abaixo de 10^{-3}.

As versões 5α e 6α dos elementos PLAT8 e PLAT8H e o elemento MR24A apresentam modos falsos de energia. Desta forma, estes elementos não são escolhidos, embora apresentem melhor convergência que o PLAT8H(8α) e sejam menos sensíveis à distorção da malha. O PLAT8(8α), MR24 e R24 apresentam tendência a travamento. Os triângulos R18, MR18 e MR18A apresentam convergência inferior aos elementos citados acima, e quanto a travamento e modos falsos de energia, nada é comentado a respeito deste assunto na Referência 17.

2.4.2 - Formulação do elemento PLAT8H(8α)

É um elemento isoparamétrico, quadrático, serendipity e lagrangeano, tem nove nodos, três graus de liberdade em cada nodo externo e dois graus de liberdade no nodo interno.

Sua geometria é idêntica à geometria do elemento HETEROSIS(ver Figura 2.4).

Este elemento é equivalente ao HETEROSIS, e a diferença consiste fundamentalmente do funcional utilizado. LEE e WONG[18] afirmam esta equivalência, mostrando que o número de quatro parâmetros, para cada deformação cisalhante transversal no PLAT8H(8α), é igual ao número de pontos de integração usados para a matriz de rigidez de cisalhamento do elemento HETEROSIS.

a) Funcional modificado de Hellinger-Reissner[17]

Usando-se as equações (2.1), (2.2), (2.6) e (2.7), escreve-se o funcional Π_{mr} como:

$$\Pi_{mr} = \frac{1}{2}\iint\{\chi\}^T\left[D_f\right]\{\chi\}dxdy + \iint\left(\{\gamma\}^T\left[D_s\right]\{\phi\} - \frac{1}{2}\{\gamma\}^T\left[D_s\right]\{\gamma\}\right)dxdy$$
$$- \iint qwdxdy \qquad (2.94)$$

onde,

$$\{\gamma\} = \lfloor \gamma_{xz} \; ; \; \gamma_{yz} \rfloor^T \qquad (2.95)$$

Comparando-se o funcional Π_{mr}(2.94) com o funcional Π(2.8), conclui-se que a matriz de rigidez de flexão, $\left[K_f\right]$, e o vetor carga nodal, {Q}, são os mesmos do elemento HETEROSIS. A diferença está na formação da matriz de rigidez de cisalhamento, $\left[K_s\right]$. Em conseqüência desta semelhança, dar-se-á uma maior atenção à obtenção da matriz $\left[K_s\right]$.

b) Campo de deformações cisalhantes

É suposto para o campo de deformações, versão 8α, as seguintes expressões:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ \gamma_{yz} &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned}\right\} \qquad (2.96)$$

onde x e y são coordenadas dos nodos do elemento ou pontos de integração, medidas num sistema de referência local para o elemento.

Alternativamente, podem ser usadas as coordenadas do sistema isoparamétrico(ξ,η).

Substituindo-se as equações (2.96) em (2.95), obtem-se:

$$\{\gamma\} = [\bar{P}]\{\alpha\} \tag{2.97}$$

onde,

$$\{\alpha\} = \lfloor \alpha_1 \ ; \ \alpha_2 \ ; \ldots ; \ \alpha_8 \rfloor^T \tag{2.98}$$

e

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

c) Discretização e minimização de Π_{mr}(2.94)

Usando-se as equações (2.35) a (2.40), obtidas para o elemento HETEROSIS, tomando-se por base a formulação do QLR/S e substituindo-se a equação (2.97) na expressão de Π_{mr}(2.94), obtem-se:

$$\Pi_{mr} = \frac{1}{2}\iint\{a\}^T[B]^T\left[D_f\right][B]\{a\}dxdy + \iint\{\alpha\}^T[\bar{P}]^T\left[D_s\right][C]\{a\}dxdy$$
$$- \frac{1}{2}\iint\{\alpha\}^T[\bar{P}]^T\left[D_s\right][\bar{P}]\{\alpha\}dxdy - \iint\{a\}^T\left\{S_w\right\}^T q dxdy \tag{2.100}$$

A minimização de Π_{mr}(2.100) em relação a $\{\alpha\}$, dá:

$$\left.\begin{aligned} &[\bar{G}]\{a\} - [\bar{H}]\{\alpha\} = 0 \\ \text{ou} \qquad &\{\alpha\} = [\bar{H}]^{-1}[\bar{G}]\{a\} \end{aligned}\right\} \tag{2.101}$$

onde,

$$[\bar{H}] = \iint[\bar{P}]^T\left[D_s\right][\bar{P}]dxdy \tag{2.102}$$

$$[\bar{G}] = \iint[\bar{P}]^T\left[D_s\right][C]dxdy \tag{2.103}$$

Substituindo-se as equações (2.22), (2.41), (2.101), (2.102) e (2.103) em (2.100), obtem-se:

$$\Pi_{mr} = \frac{1}{2}\{a\}^T\left[K_f\right]\{a\} + \frac{1}{2}\{a\}^T[\bar{G}]^T[\bar{H}]^{-1}[\bar{G}]\{a\} - \{a\}^T\{Q\} \qquad (2.104)$$

Com a minimização de (2.104) em relação a {a}, obtem-se a equação final de elementos finitos. Para um elemento:

$$[K]\{a\} = \{Q\}$$

onde,

$$[K] = \left[K_f\right] + \left[\bar{K}_s\right] \qquad (2.105)$$

$$\left[K_f\right] \rightarrow \text{Equação (2.22)}$$

e

$$\left[\bar{K}_s\right] = [\bar{G}]^T[\bar{H}]^{-1}[\bar{G}] \qquad (2.106)$$

é a matriz de rigidez de cisalhamento.

d) Integração numérica

A integração é feita tal como nos elementos HETEROSIS e QLR/S, ou seja, reduzida/seletiva. $\left[K_f\right]$ e {Q} são integradas totalmente(3x3). $\left[\bar{K}_s\right]$ é sub-integrada(2x2). Entretanto, uma integração(3x3) para $\left[\bar{K}_s\right]$ pode ser usada sem maiores problemas, já que o controle do fenômeno de travamento nos elementos PLAT8 e PLAT8H é feito pelo número de parâmetros, α, adotados para o campo de deformações cisalhantes.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

3.1 - Introdução

Analisa-se placas quadradas, com material isotrópico e homogêneo, carregamento transversal, sem efeito de temperatura e forças de corpo. Desta forma, é possível comparar os resultados numéricos com soluções analíticas de TIMOSHENKO[21] e resultados de elementos finitos publicados por outros autores.

Obtem-se valores numéricos para momentos no centro e no meio do lado da placa, reação no canto e deflexões no centro em placas semi-espessas($t/L = 0{,}1$), finas($t/L = 0{,}01$) e muito finas($t/L = 0{,}001$); onde t e L são, respectivamente, a espessura e o comprimento do lado da placa. Os momentos no centro são obtidos no ponto de integração mais próximo ao nodo do centro da placa, e os demais valores são obtidos nos respectivos nodos dos elementos.

Devido à simetria do problema, apenas um quarto da placa é analisado.

Malhas normais e distorcidas são utilizadas para a discretização do problema contínuo(ver Figuras 3.2, 3.3 e 3.4).

Os resultados estão apresentados em forma de gráficos, para as malhas normais, e tabela, para as malhas distorcidas e para os modos falsos de energia. Para os gráficos, nas ordenadas estão plotados os erros(%) em relação à solução analítica e/ou valores analíticos; na abcissa está, em escala logarítmica, o número total de graus de liberdade analisados(G.D.L.) ou a relação t/L.

Na Figura 3.33 estão traçadas curvas para verificação da eficiência computacional dos elementos implementados, onde, nas ordenadas estão as malhas normais, e na abcissa o tempo de execução(CPU, segundos), em escala logarítmica.

Quanto às propriedades elásticas do material, são usados os valores de 210.000[MPa] para o módulo de elasticidade, E, 0,3 para a razão de Poisson, ν, e o módulo de elasticidade transversal, G, dado pela expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Define-se agora, no Quadro 3.1, os casos testados com condições de apoio e carregamento.

QUADRO 3.1 - CASOS TESTADOS

CASO	CONDIÇÕES DE CONTORNO	CARREGAMENTO
CASO 1	SIMPLESMENTE SUPORTADO - SS	DISTRIBUÍDO - CD (UNIFORME)
CASO 2	ENGASTADO - CL	DISTRIBUÍDO - CD (UNIFORME)
CASO 3	SIMPLESMENTE SUPORTADO - SS	CONCENTRADO NO CENTRO DA PLACA - CC
CASO 4	ENGASTADO - CL	CONCENTRADO NO CENTRO DA PLACA - CC

3.2 - Solução analítica

3.2.1 - Valores analíticos

A Tabela 3.1 mostra os valores analíticos, extraídos da Referência 21, para o cálculo das tensões e deflexões em placas finas e muito finas. Para placas semi-espessas(t/L = 0,1) usam-se os valores citados por PUGH e outros[3], ou seja:

$\alpha = 0,00427$, para o caso 1(Quadro 3.1)

$\alpha = 0,00150$, para o caso 2(Quadro 3.1)

TABELA 3.1 - VALORES ANALÍTICOS PARA OS FATORES α, β, γ e η EM PLACAS FINAS E MUITO FINAS

	DEFLEXÃO NO CENTRO w_c Ponto c - Fig. 3.1	MOMENTO FLETOR NO CENTRO M_{x_c} Ponto c - Fig. 3.1	MOMENTO FLETOR NO MEIO DO LADO M_{x_b} Ponto b - Fig. 3.1	REAÇÃO NO CANTO R_a Ponto a - Fig. 3.1
	$w_c = \alpha qL^4/D$ (CD) $w_c = \alpha PL^2/D$ (CC)	$M_{x_c} = \beta qL^2$ (CD)	$M_{x_b} = \gamma qL^2$ (CD) $M_{x_b} = \gamma P$ (CC)	$R_a = \eta qL^2$ (CD) $R_a = \eta P$ (CC)
CASO	α	β	γ	η
CASO 1	0,00406	0,0479	-	0,065
CASO 2	0,00126	0,0231	-0,0513	-
CASO 3	0,01160	-	-	0,1219
CASO 4	0,00560	-	-0,1257	-

onde,

$D = \dfrac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$ → É a rigidez de flexão da placa.

$R_a = 2\left|M_{xy_a}\right|$

$\left|M_{xy_a}\right|$ → É o valor absoluto do momento torsor, M_{xy}, atuando no canto da placa, ponto "a", Figura 3.1.

q → É a carga distribuída transversal.

P → É a carga concentrada transversal atuando no centro da placa.

3.2.2 - Condições de contorno

Com base nas Figuras 2.1 e 3.1, especifica-se as condições de contorno para um quarto de placa como:

a) Simplesmente suportado

$$w = 0 \text{ e } \theta_x = 0 \rightarrow \text{para } x = 0$$

$$w = 0 \text{ e } \theta_y = 0 \rightarrow \text{para } y = 0$$

$$\theta_x = 0 \rightarrow \text{para } y = L/2$$

$$\theta_y = 0 \rightarrow \text{para } x = L/2$$

b) Engastado

$$w = 0,\ \theta_x = 0 \text{ e } \theta_y = 0 \rightarrow \text{para } x = 0 \text{ ou } y = 0$$

$$\theta_x = 0 \rightarrow \text{para } y = L/2$$

$$\theta_y = 0 \rightarrow \text{para } x = L/2$$

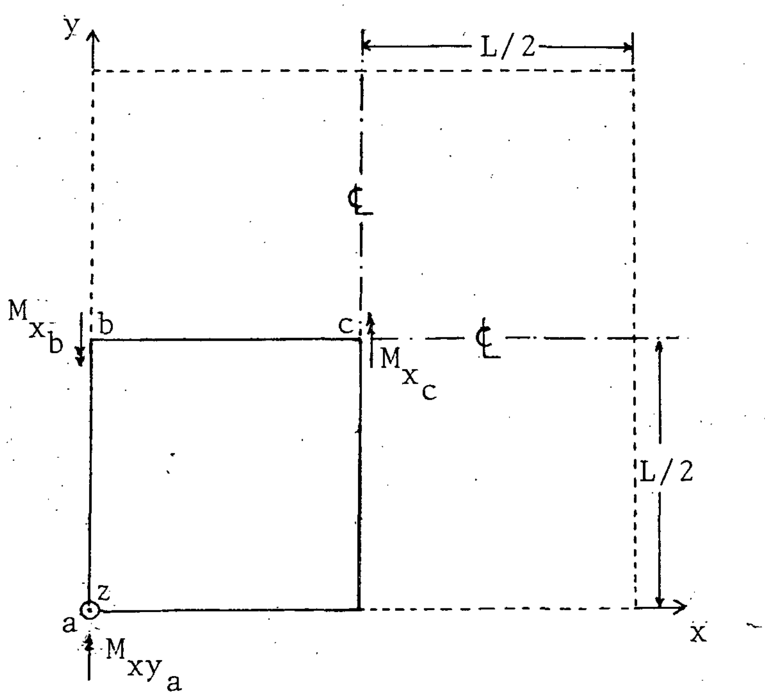
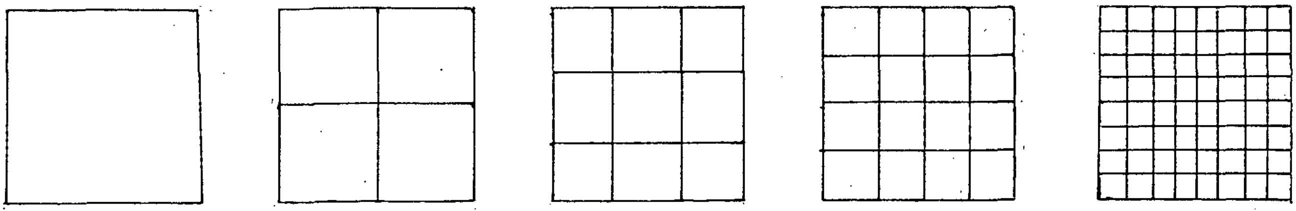


Figura 3.1 - Localização dos pontos para cálculo das tensões e deflexões, e sentido dos momentos.



2x2 4x4 6x6 8x8 16x16

Figura 3.2 - Malhas normais para um quarto de placa.

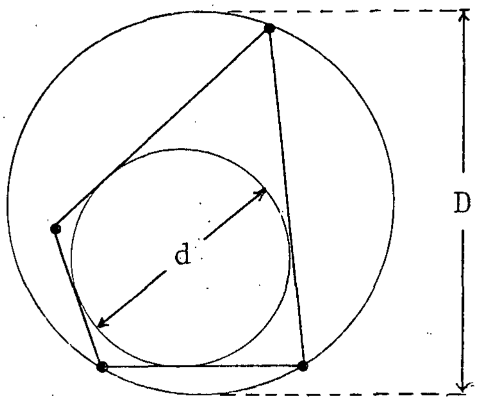


Figura 3.3 - Relação de distorção.

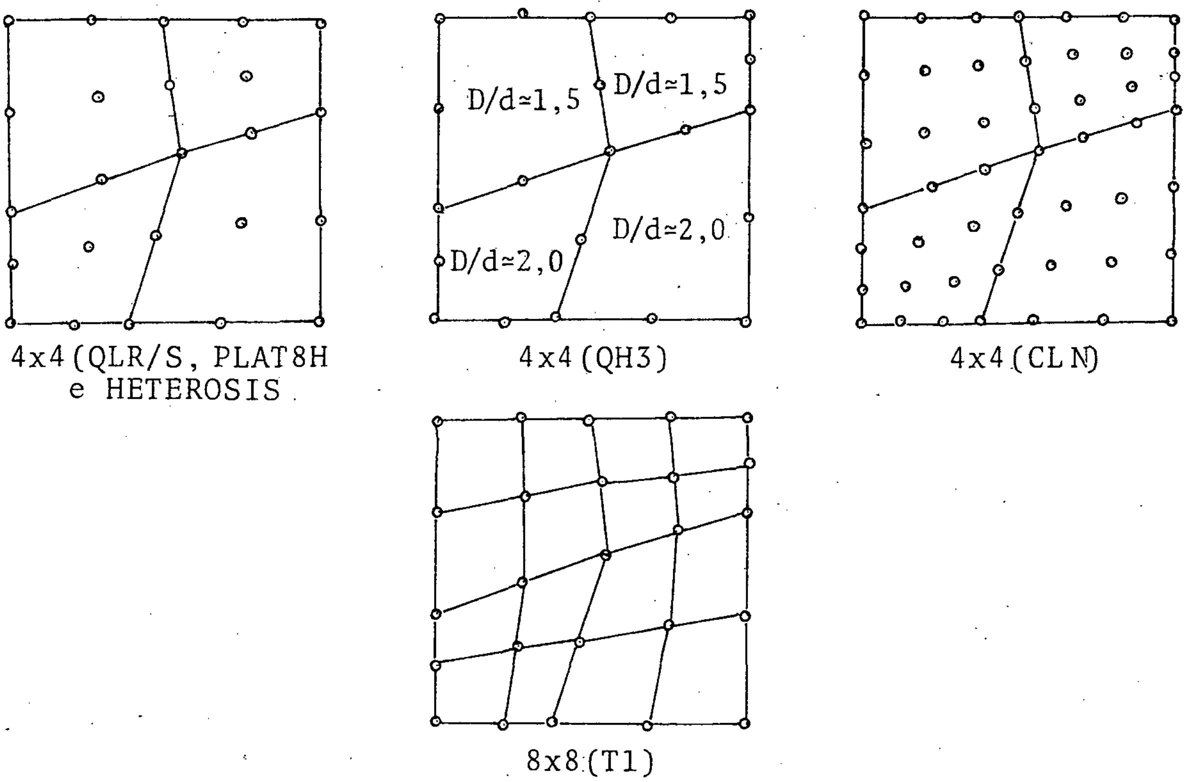


Figura 3.4 - Malhas distorcidas para um quarto de placa.

3.3 - Resultados

As Figuras 3.5 a 3.33 e as Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 mostram os resultados obtidos pela computação. Podem ser vistos também alguns resultados dos elementos DKT[6], DKQ[5], HSM[6] e M[20]. Os valores numéricos para estes elementos foram extraídos diretamente das referências citadas.

O Quadro 3.2 mostra a simbologia utilizada para as Figuras 3.5 a 3.33 e o número de graus de liberdade por malha.

Para uma melhor compreensão, observa-se que:

1) Os resultados dos elementos HSM e DKT dependem da orientação da malha. Foram extraídos os melhores valores em relação à solução analítica.

2) O elemento DKQ apresenta diferentes resultados em alguns casos, dependendo do vetor carga nodal ser completo ou não. Foram tomados os melhores valores em relação à solução analítica.

3) Nas Figuras 3.25 a 3.32, os resultados são para a malha normal 8x8 para todos os elementos; menos para o CLN, onde são usados os valores da malha 6x6, e para o T1, onde são usados os valores da malha 16x16. Isso é feito para que se tenha aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade.

QUADRO 3.2 - SIMBOLOGIA, MALHA E GRAUS DE LIBERDADE

ELEMENTO	SÍMBOLO	MALHA	GRAUS DE LIBERDADE(G.D.L.)
QH3	——□—— - - - -□- - - -	2x2 4x4 6x6 8x8 10x10	24 63 120 195 288
HETEROSIS e PLAT8H(8α)	——▽——	2x2 4x4 6x6 8x8	26 71 138 227
QLR/S	——◇—— - - - -◇- - - -	2x2 4x4 6x6 8x8	27 75 147 243
CLN	——○—— - - - -○- - - -	2x2 4x4 6x6 8x8	48 147 300 507
T1	——△——	4x4 8x8 12x12 16x16	27 75 147 243
M	- - - -▬- - - -	2x2 4x4 6x6 8x8	27 75 147 243
HSM	- - - -▲- - - -	2x2 4x4 8x8	27 75 243
DKQ	- - - -✚- - - -	2x2 3x3 4x4 6x6 8x8	27 48 75 147 243
DKT	- - - -●- - - -	2x2 4x4 8x8	27 75 243

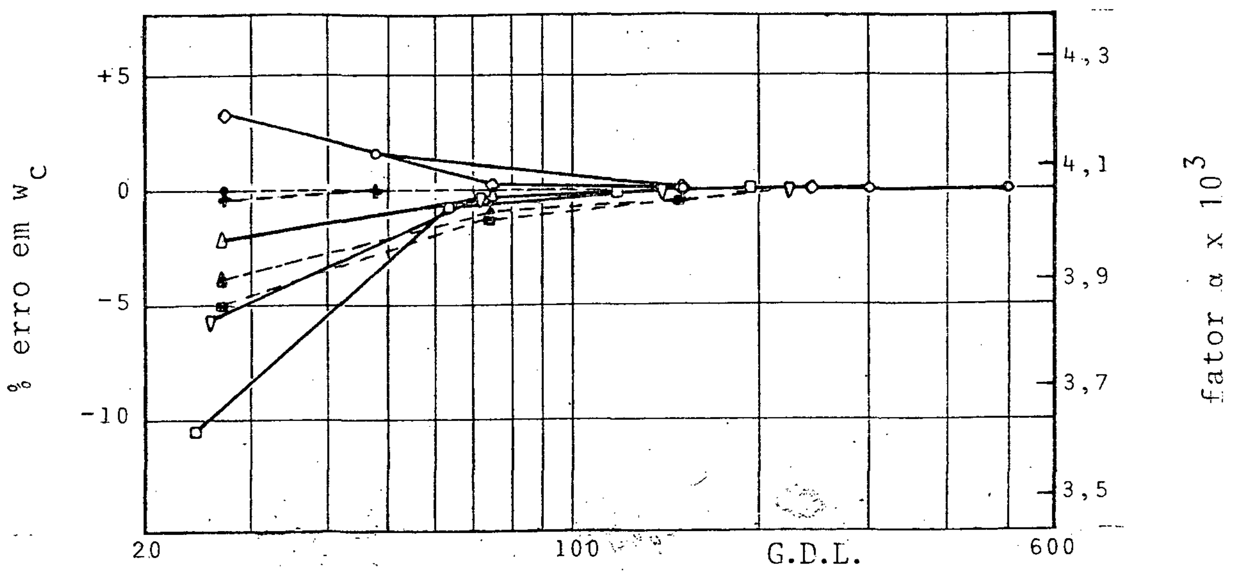


Figura 3.5 - Placa quadrada fina. Erro nas deflexões no centro e fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 1 (SS-CD-t/L=0,01).

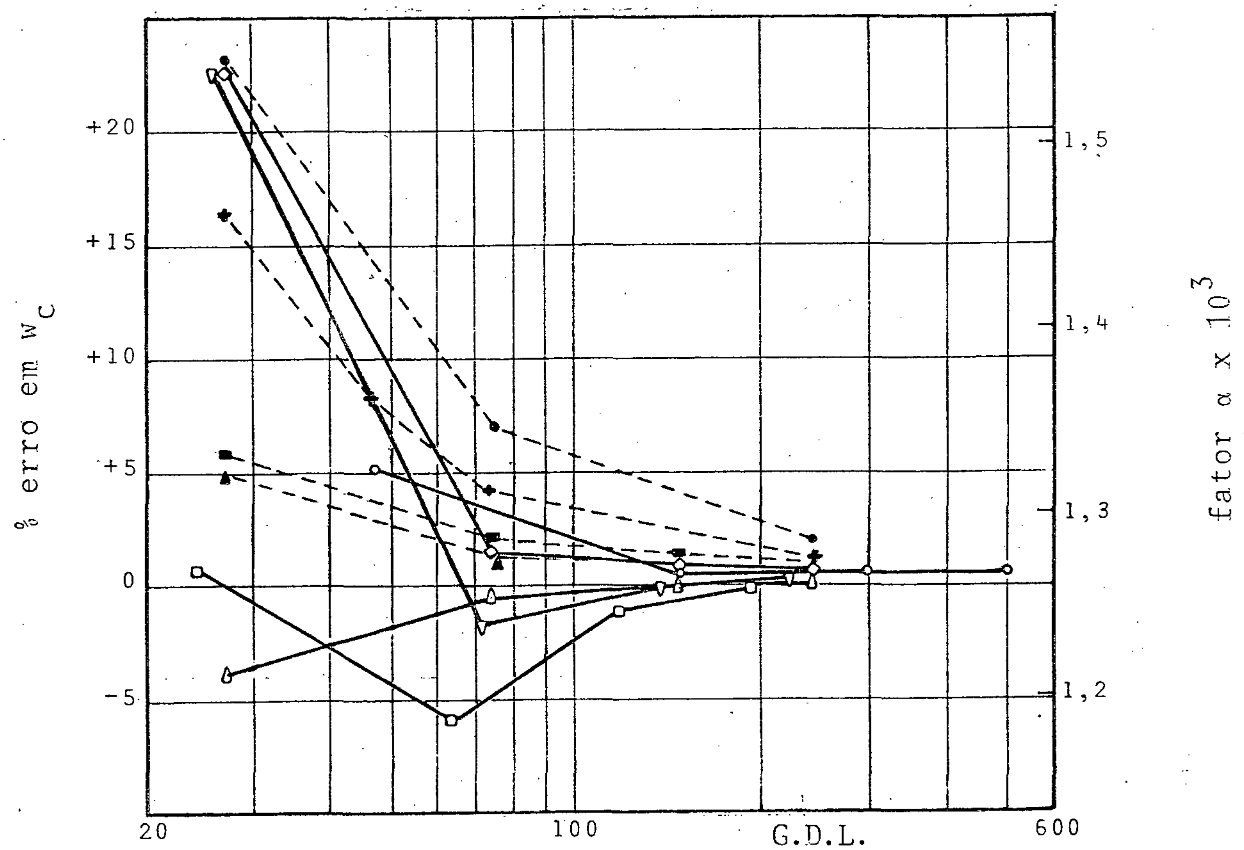


Figura 3.6 - Placa quadrada fina. Erro nas deflexões no centro e fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 2 (CL-CD-t/L=0,01).

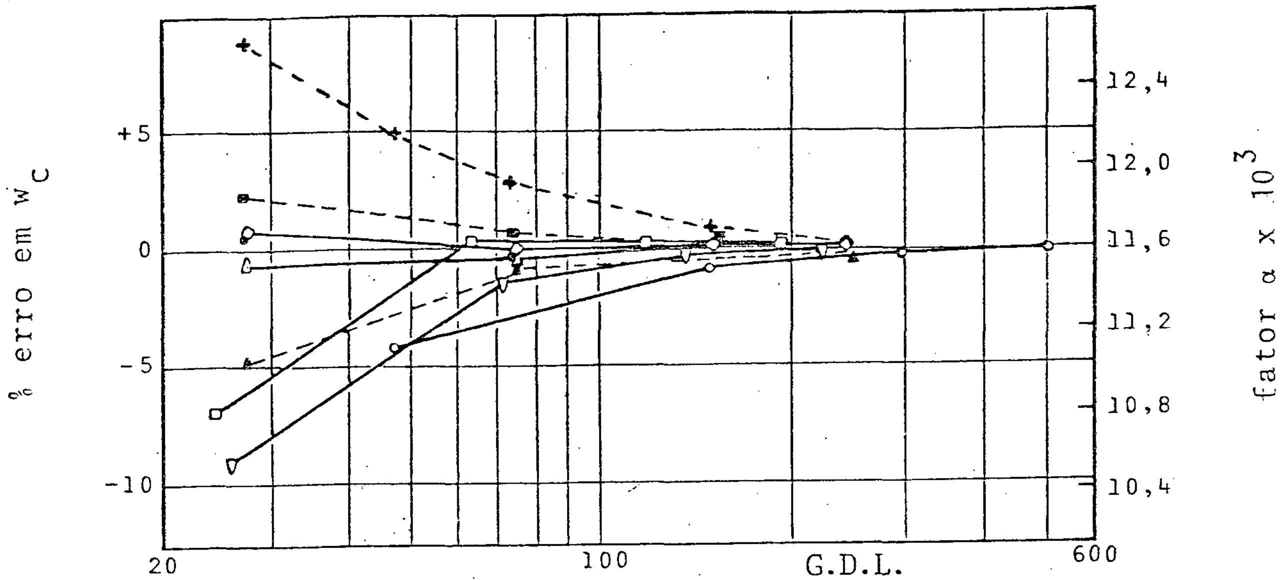


Figura 3.7 - Placa quadrada fina. Erro nas deflexões no centro e fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 3(SS-CC-t/L=0,01).

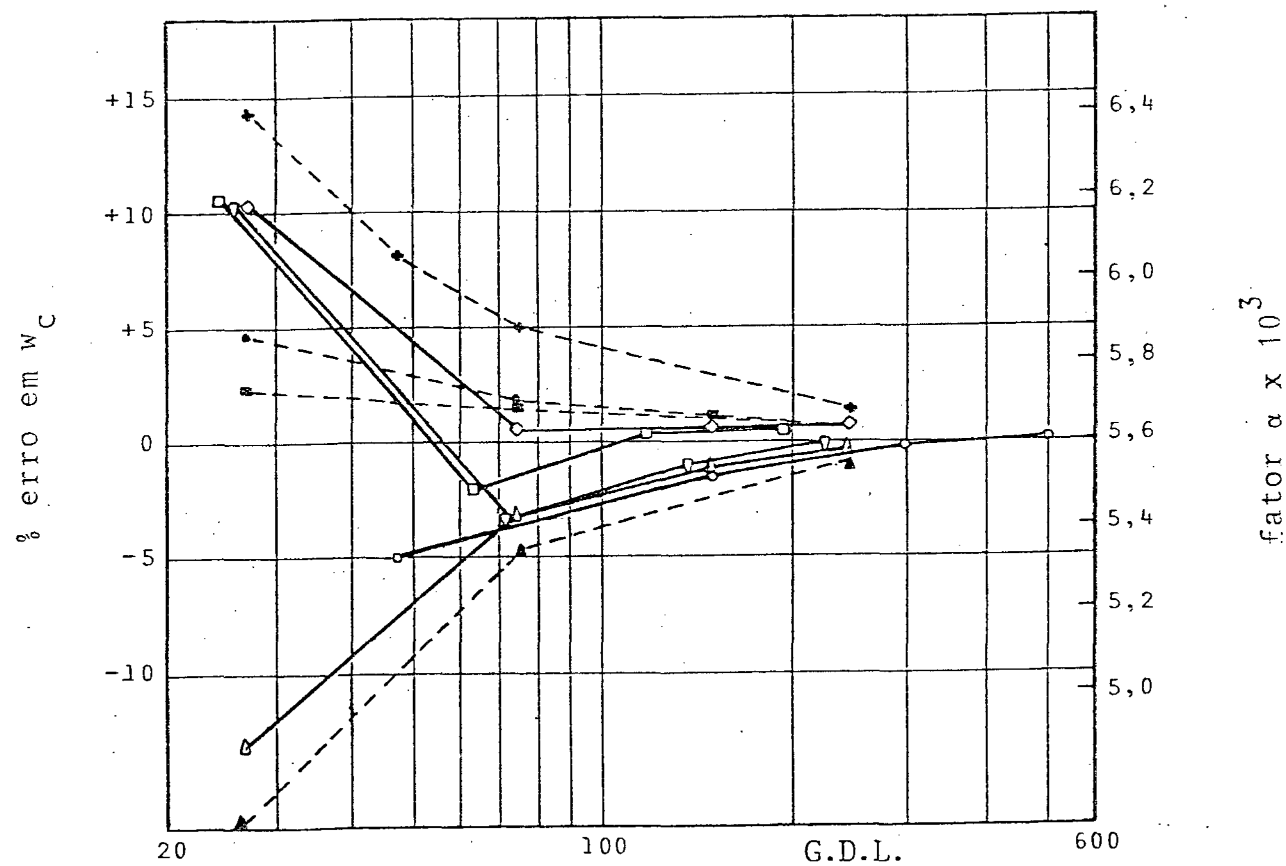


Figura 3.8 - Placa quadrada fina. Erro nas deflexões no centro e fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 4(CL-CC-t/L=0,01).

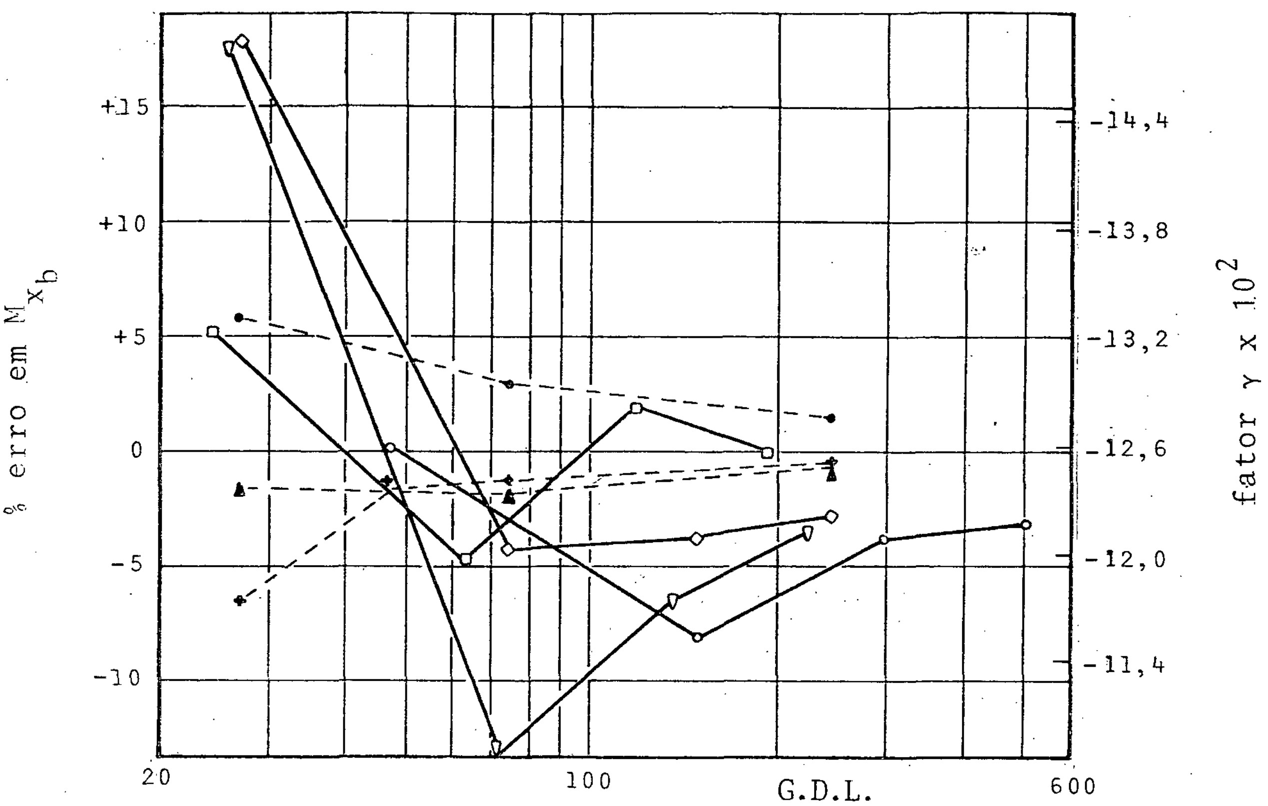


Figura 3.9 - Placa quadrada fina. Erro nos momentos no meio do lado e fator γ em função do número de graus de liberdade. Caso 4(CL-CC-t/L=0,01).(*)

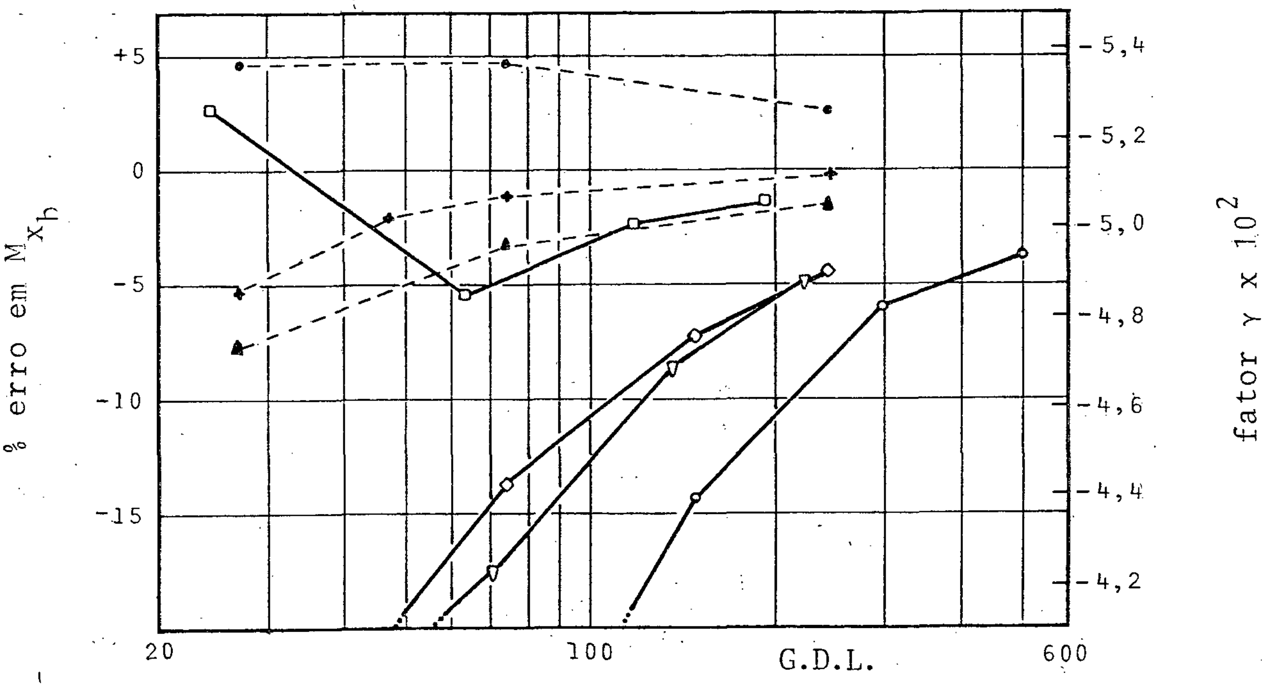


Figura 3.10 - Placa quadrada fina. Erros nos momentos no meio do lado e fator γ em função do número de graus de liberdade. Caso 3(CL-CD-t/L=0,01).(*)

(*) Os resultados para o elemento T1 estão fora desta escala.

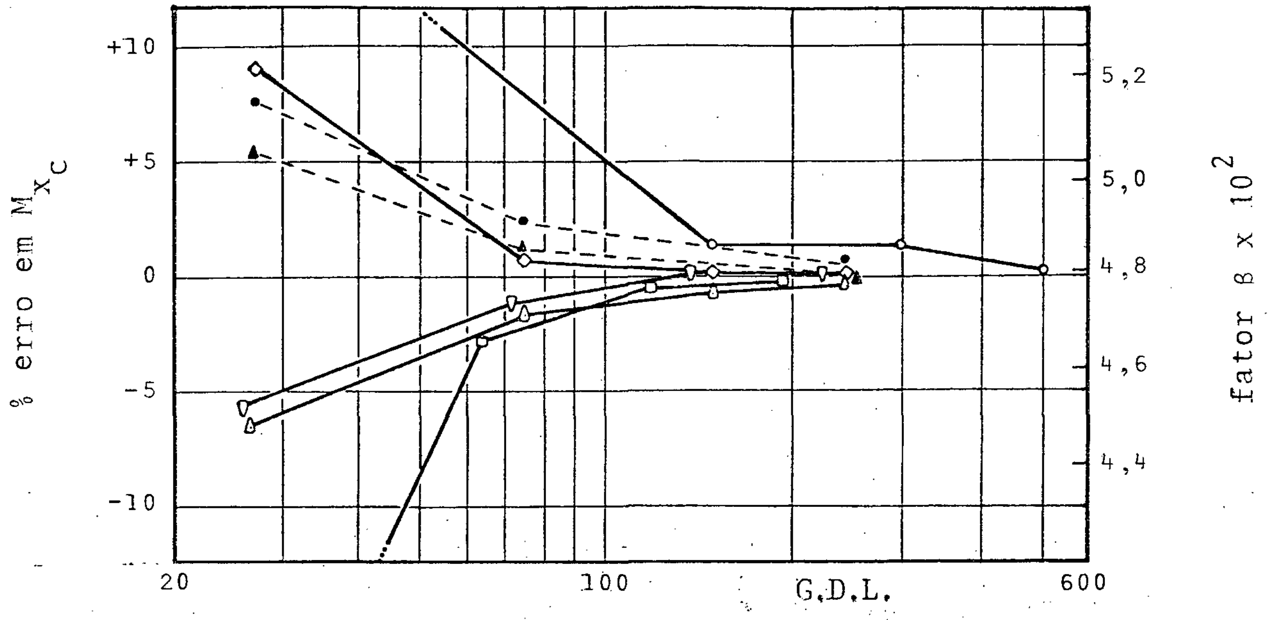


Figura 3.11 - Placa quadrada fina. Erro nos momentos no centro e fator β em função do número de graus de liberdade. Caso 1 (SS-CD-t/L=0,01).

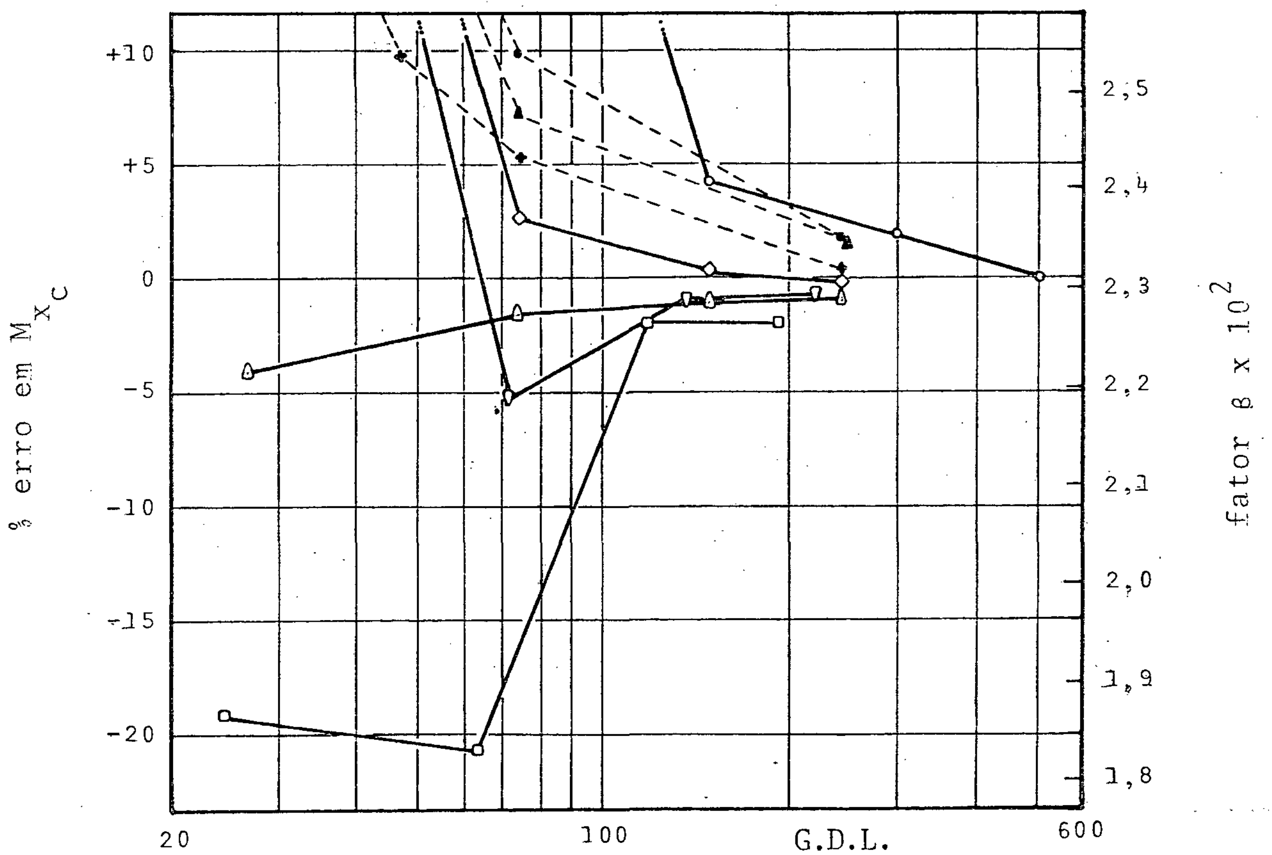


Figura 3.12 - Placa quadrada fina. Erro nos momentos no centro e fator β em função do número de graus de liberdade. Caso 2 (CL-CD-t/L=0,01).

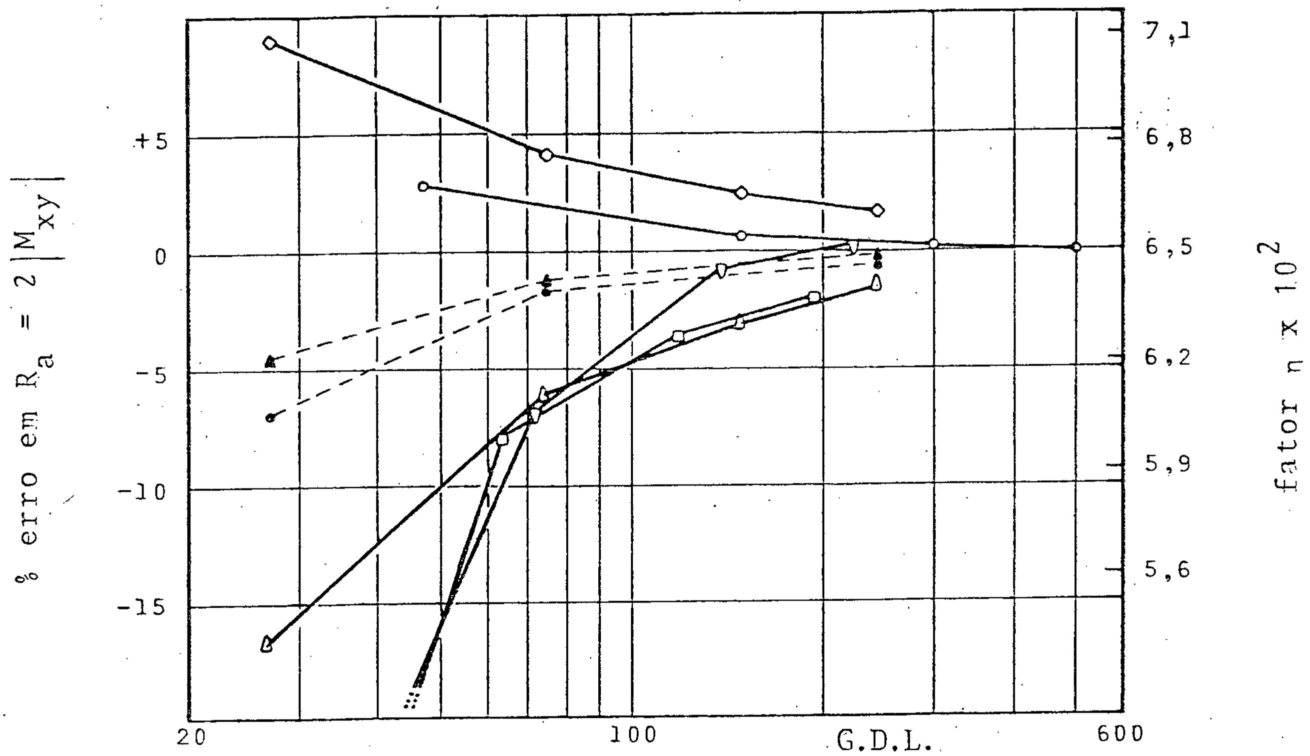


Figura 3.13 - Placa quadrada fina. Erro na reação no canto e fator η em função do número de graus de liberdade. Caso 1(SS-CD-t/L=0,01).

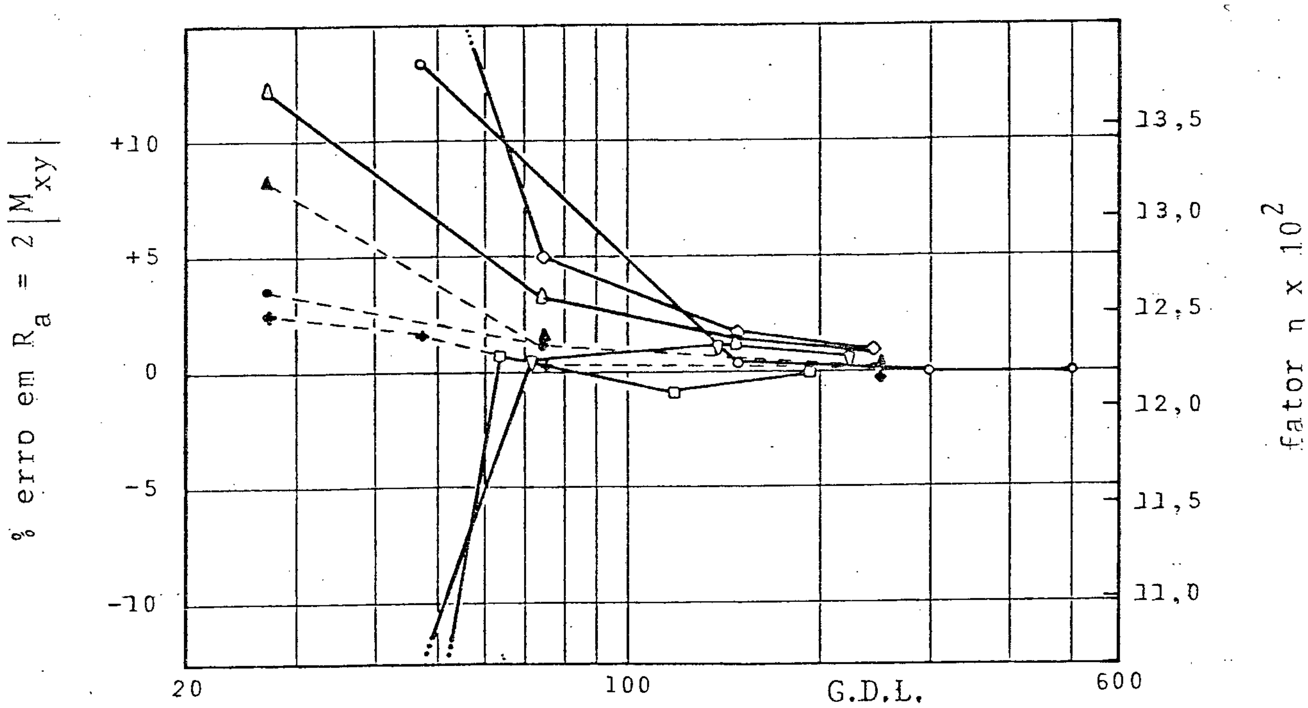


Figura 3.14 - Placa quadrada fina. Erro na reação no canto e fator η em função do número de graus de liberdade. Caso 3(SS-CC-t/L=0,01).

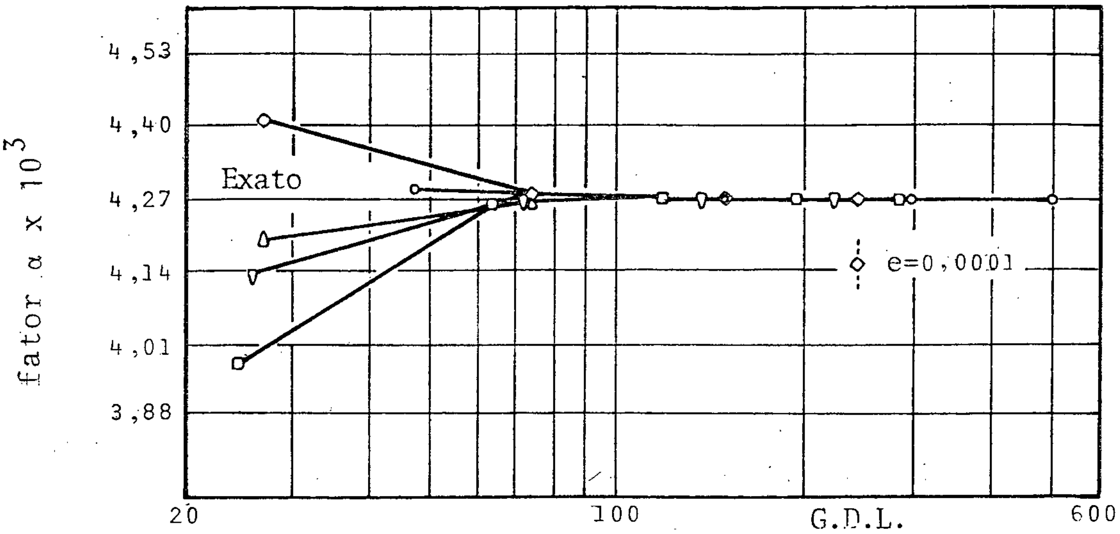


Figura 3.15 - Placa quadrada semi-espessa. Deflexões no centro. Fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 1(SS-CD-t/L=0,1).

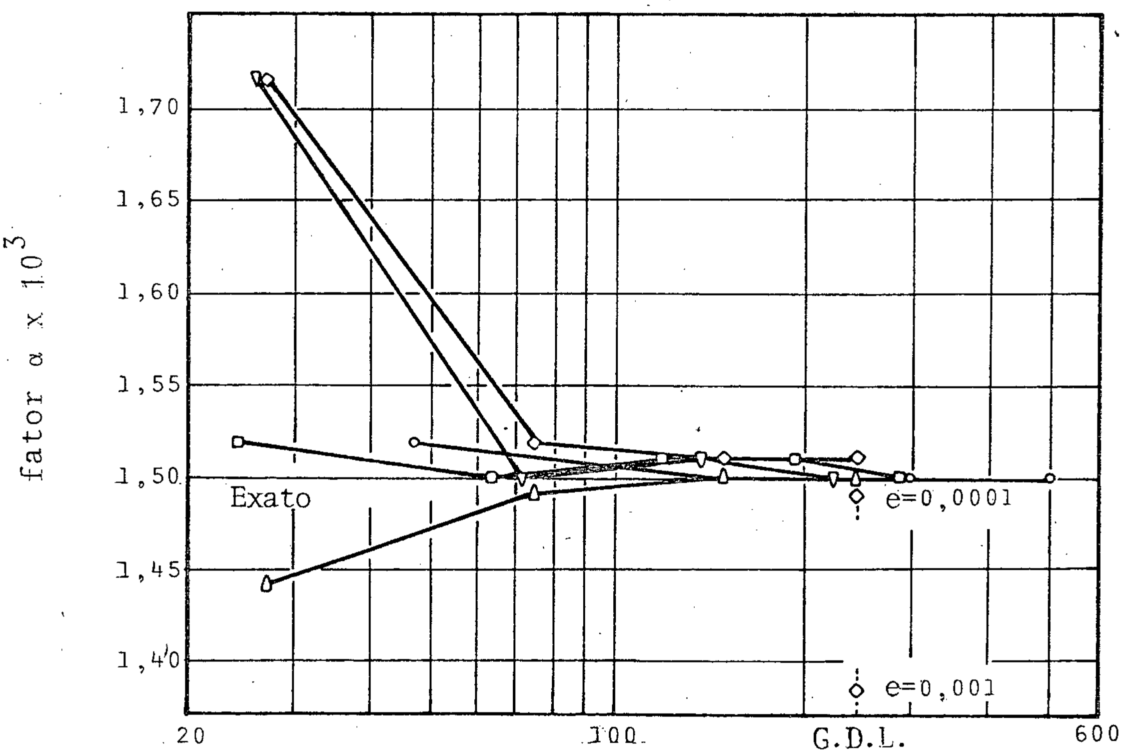


Figura 3.16 - Placa quadrada semi-espessa. Deflexões no centro. Fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 2(CL-CD-t/L=0,1).

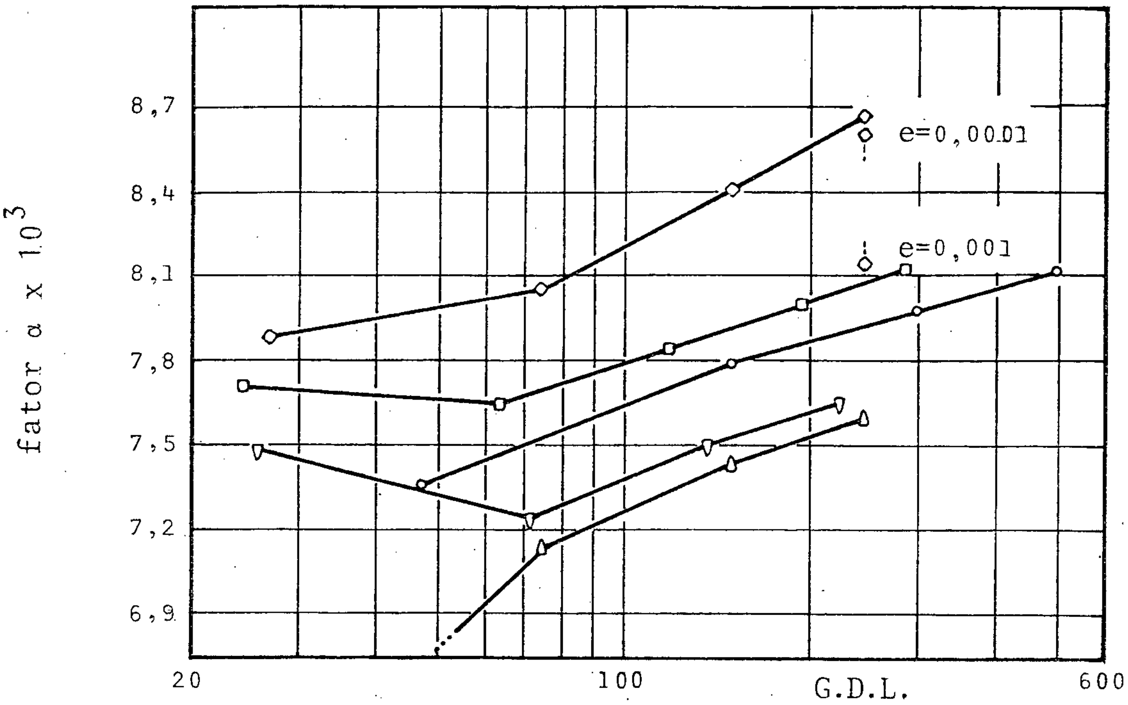


Figura 3.17 - Placa quadrada semi-espessa. Deflexões no centro. Fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 4(CL-CC-t/L=0,1).

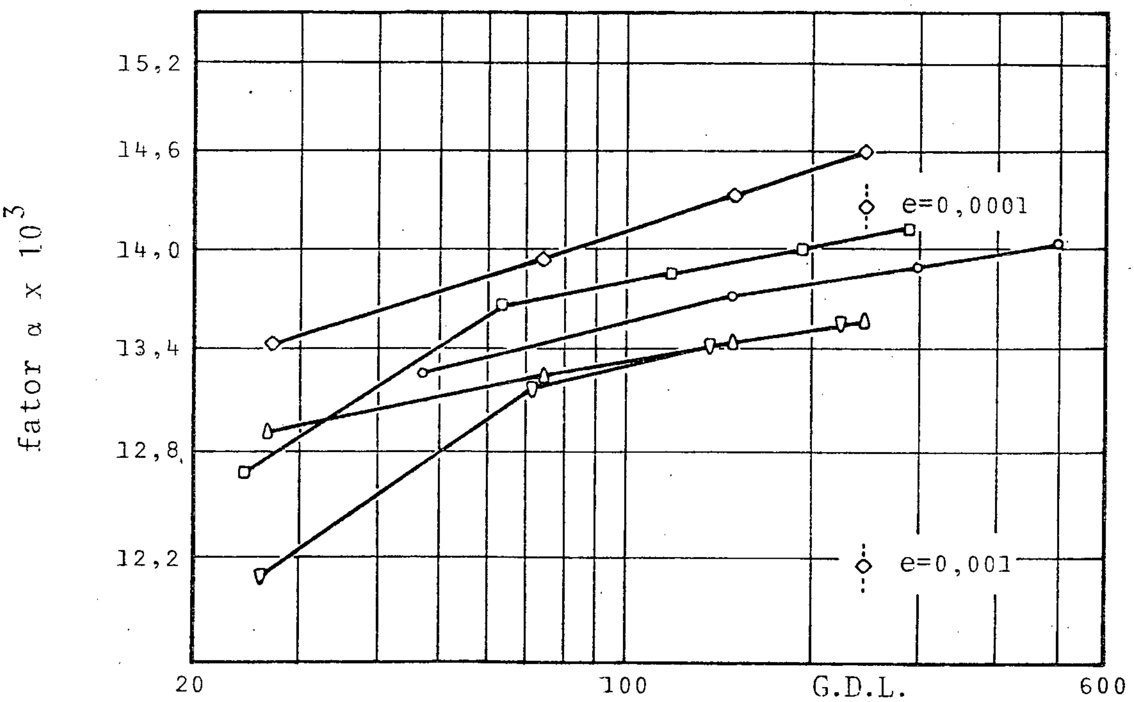


Figura 3.18 - Placa quadrada semi-espessa. Deflexões no centro. Fator α em função do número de graus de liberdade. Caso 3(SS-CC-t/L=0,1).

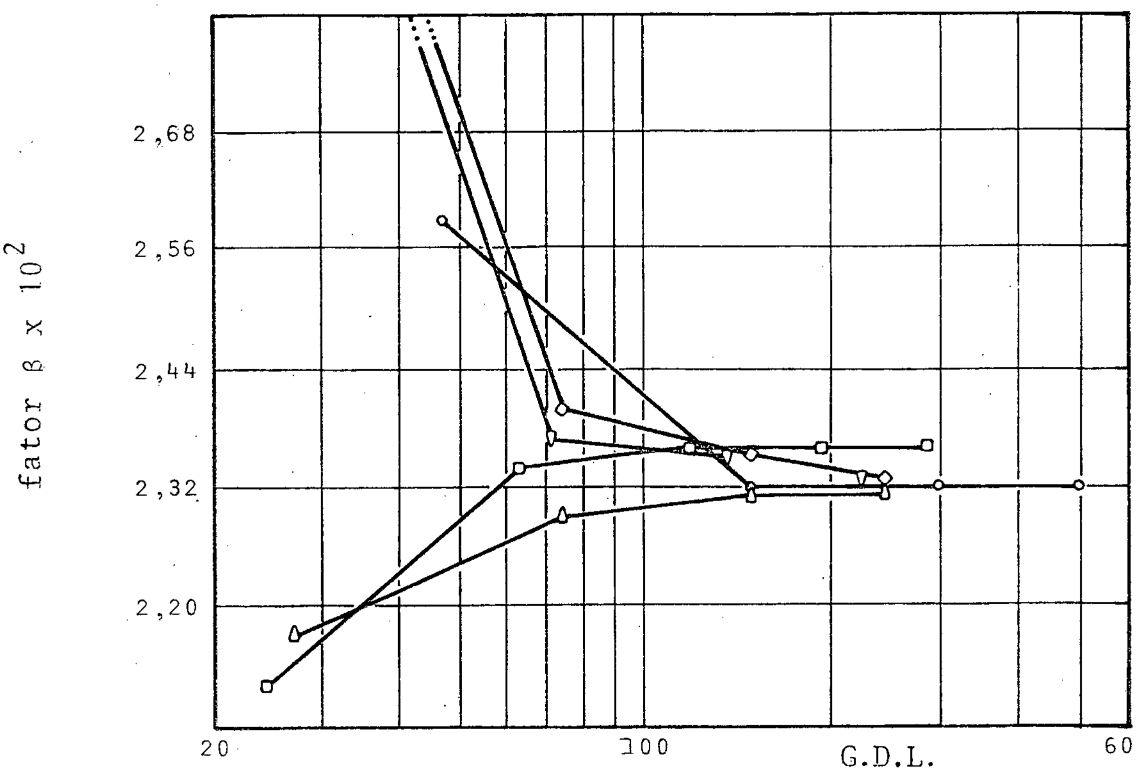


Figura 3.19 - Placa quadrada semi-espessa. Momentos no centro. Fator β em função do número de graus de liberdade. Caso 2(CL-CD-t/L=0,1).

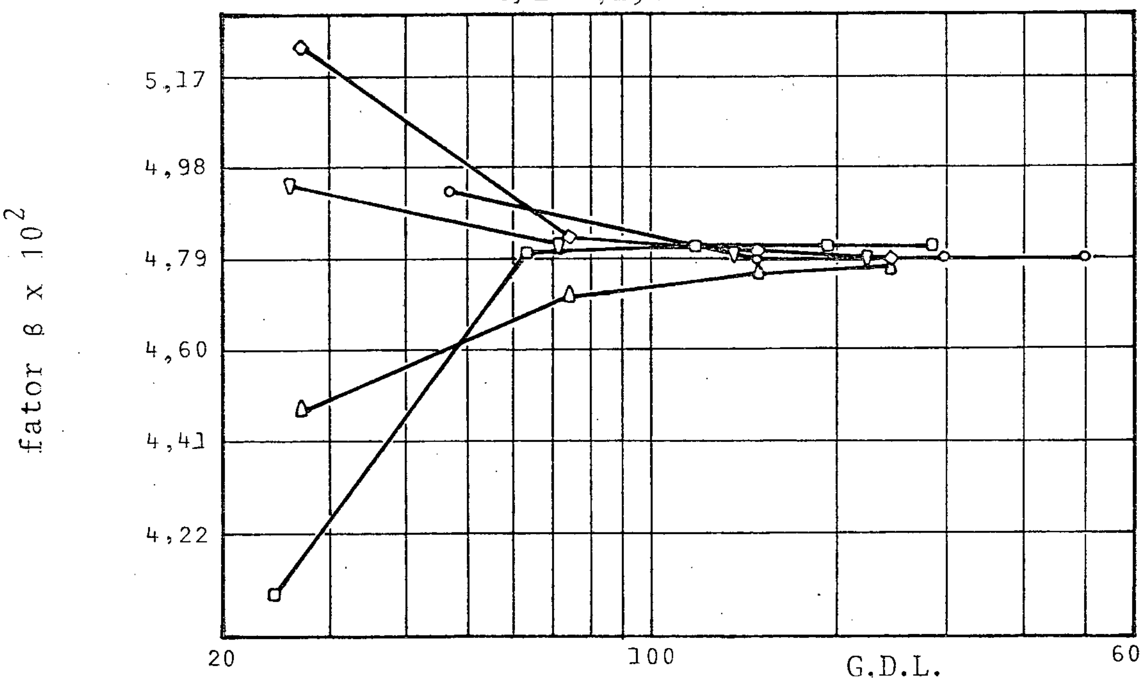


Figura 3.20 - Placa quadrada semi-espessa. Momentos no centro. Fator β em função do número de graus de liberdade. Caso 1(SS-CD-t/L=0,1).

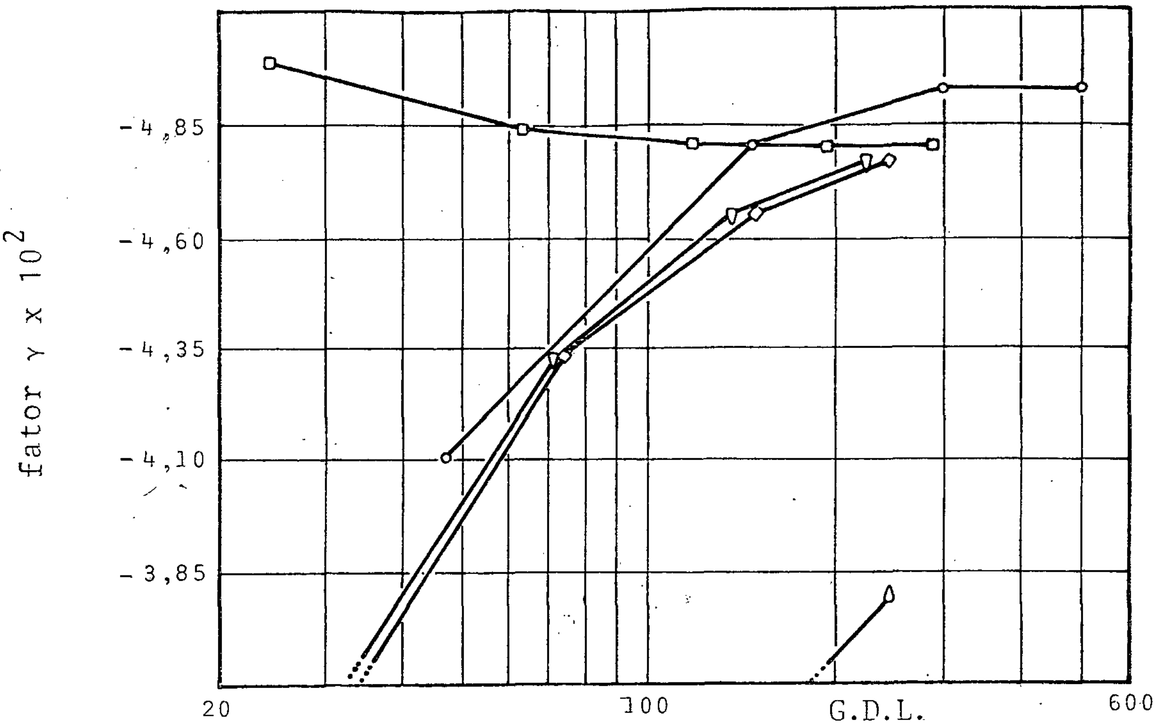


Figura 3.21 - Placa quadrada semi-espessa. Momentos no meio do lado. Fator γ em função do número de graus de liberdade. Caso 3 (CL-CD-t/L=0,1).

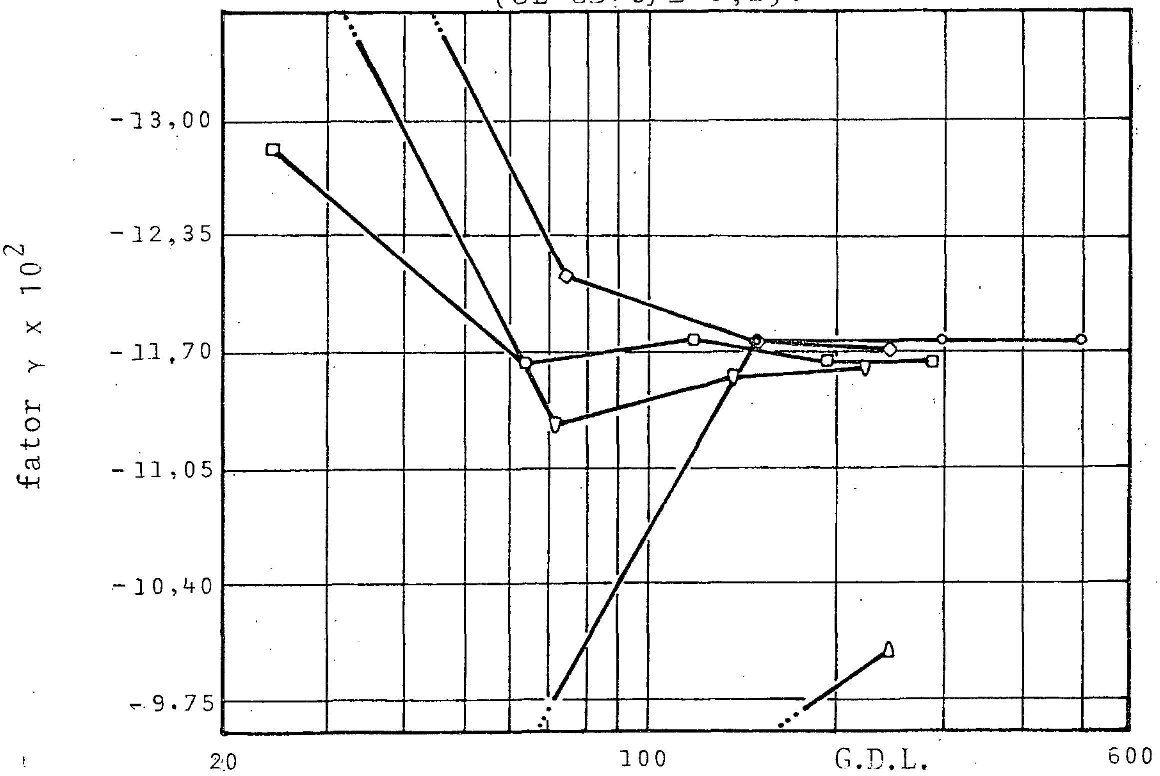


Figura 3.22 - Placa quadrada semi-espessa. Momentos no meio do lado. Fator γ em função do número de graus de liberdade. Caso 4 (CL-CC-t/L=0,1).

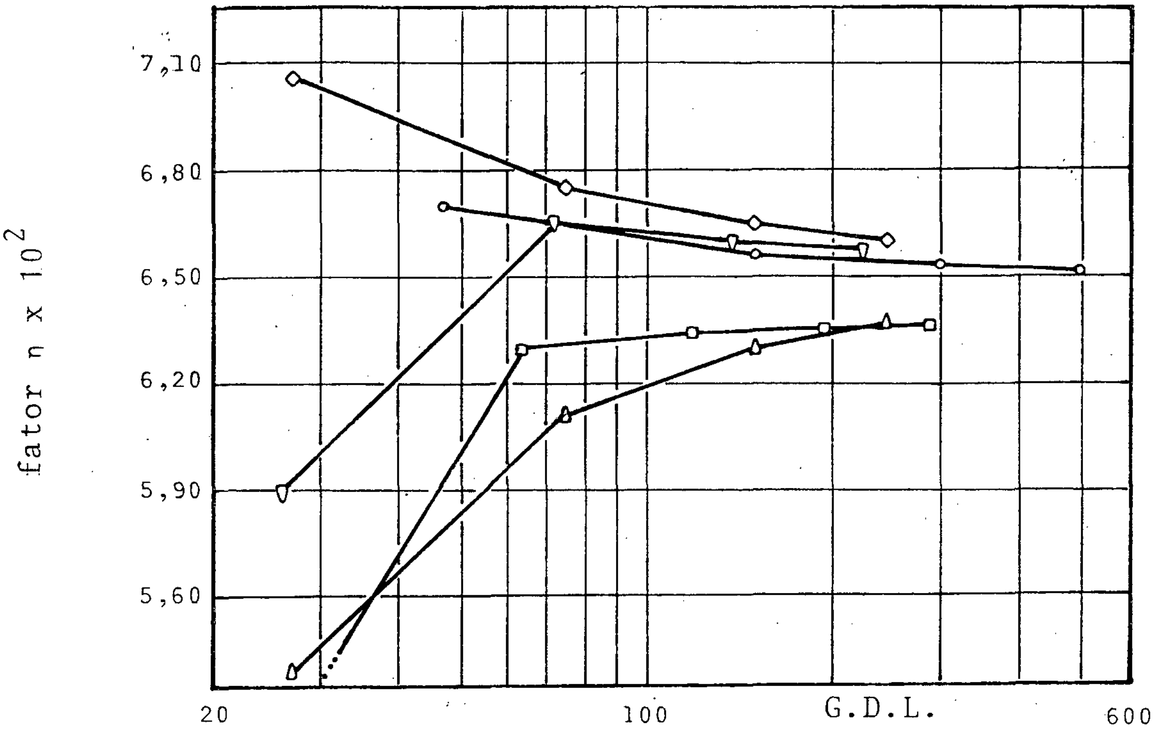


Figura 3.23 - Placa quadrada semi-espessa. Reação no canto. Fator η em função do número de graus de liberdade. Caso 1(SS-CD-t/L=0,1).

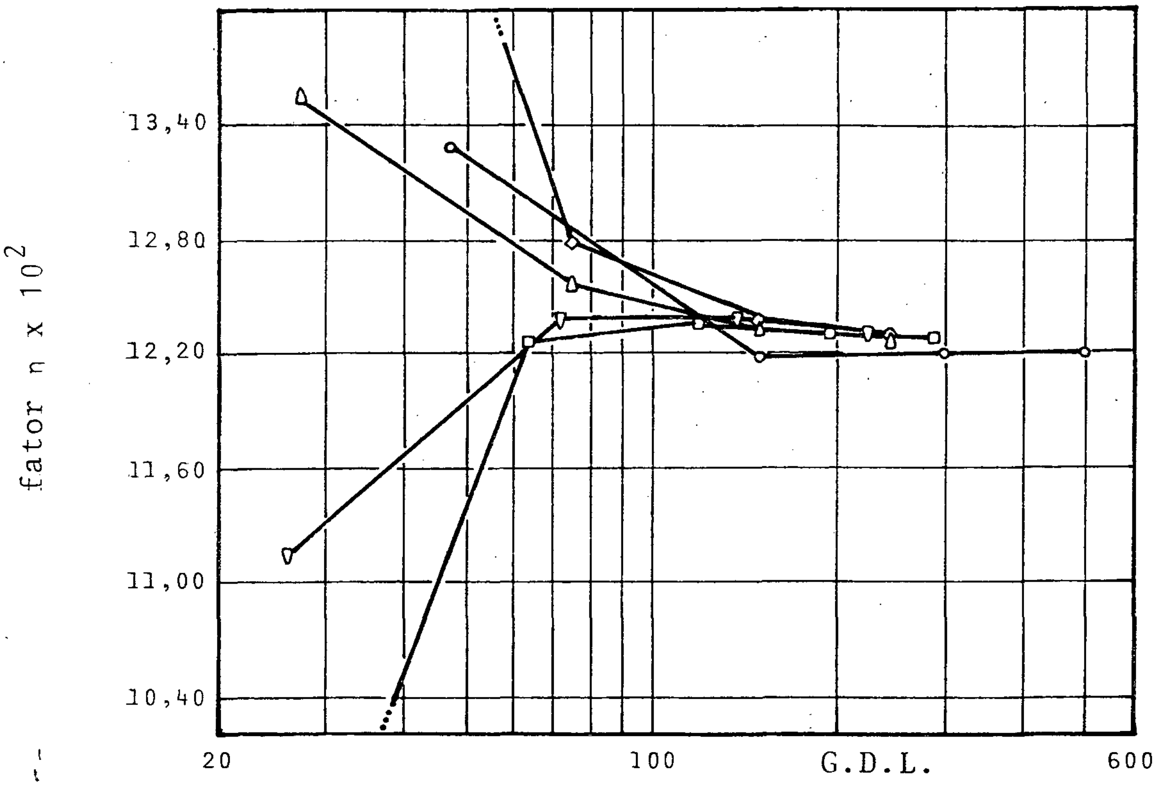


Figura 3.24 - Placa quadrada semi-espessa. Reação no canto. Fator η em função do número de graus de liberdade. Caso 3(SS-CC-t/L=0,1).

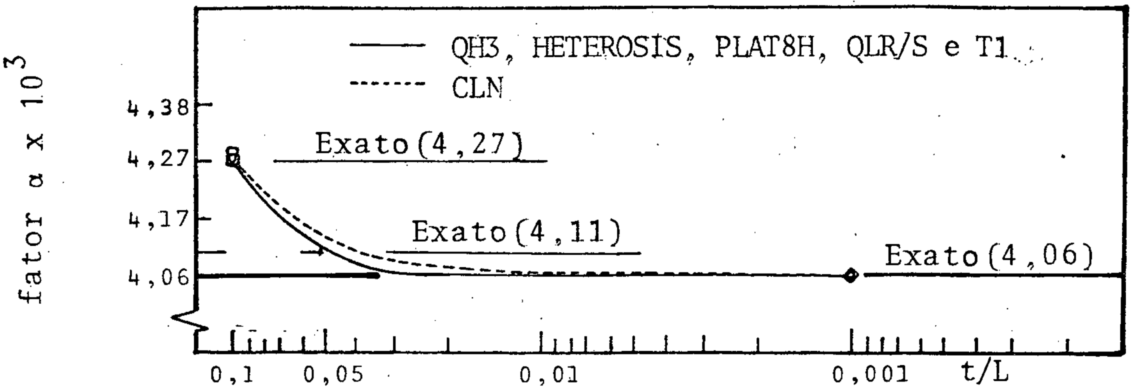


Figura 3.25 - Placa quadrada. Deflexões no centro. Fator α em função da relação t/L. Caso 1 (SS-CD).

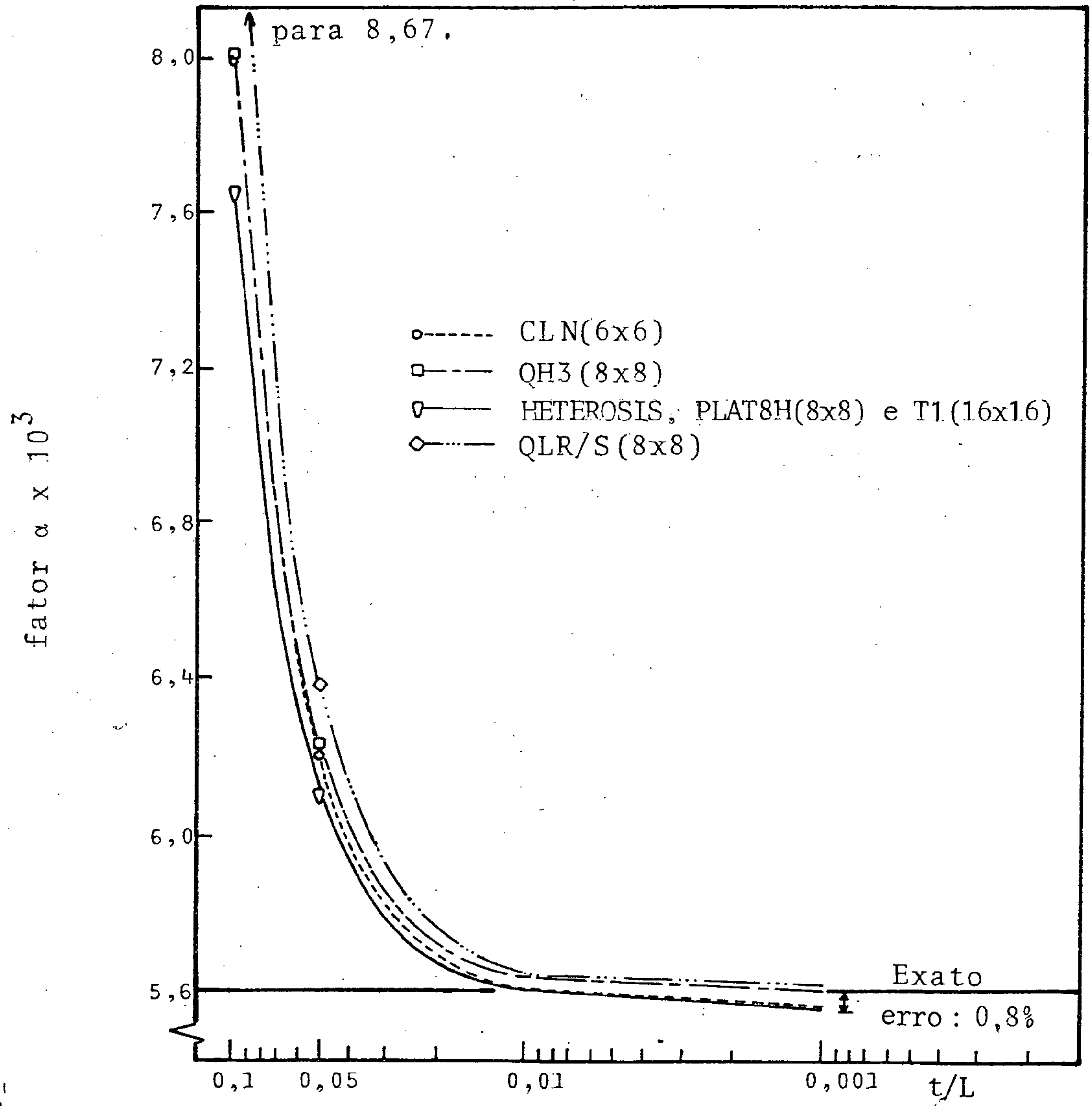


Figura 3.26 - Placa quadrada. Deflexões no centro. Fator α em função da relação t/L. Caso 4 (CL-CC).

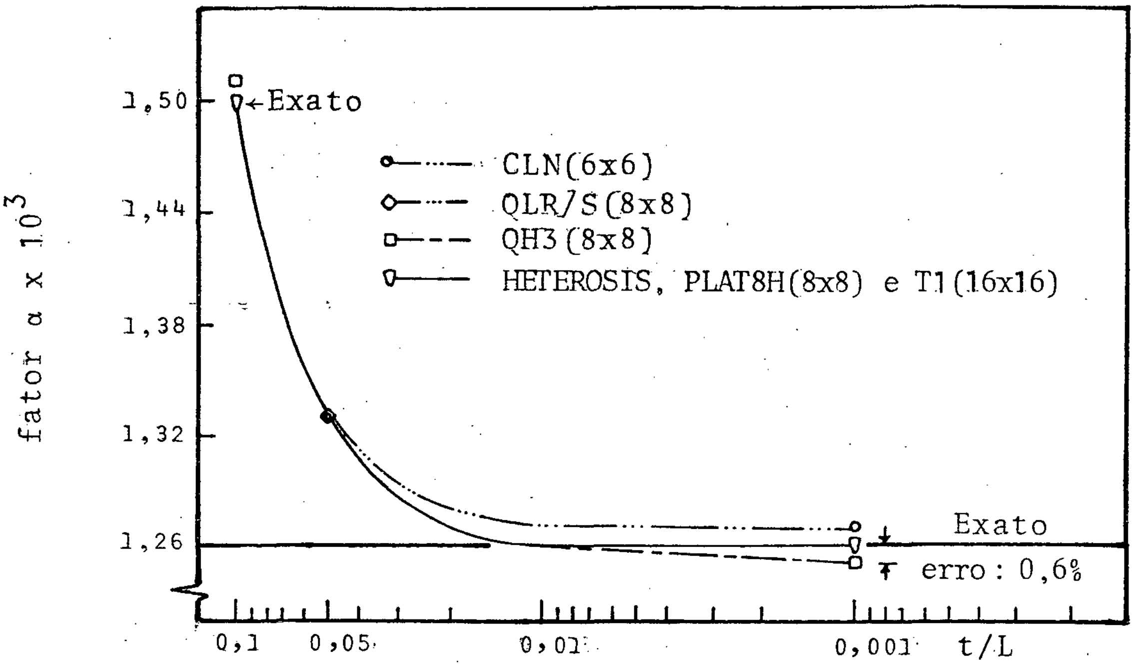


Figura 3.27 - Placa quadrada. Deflexões no centro. Fator α em função da relação t/L. Caso 2 (CL-CD).

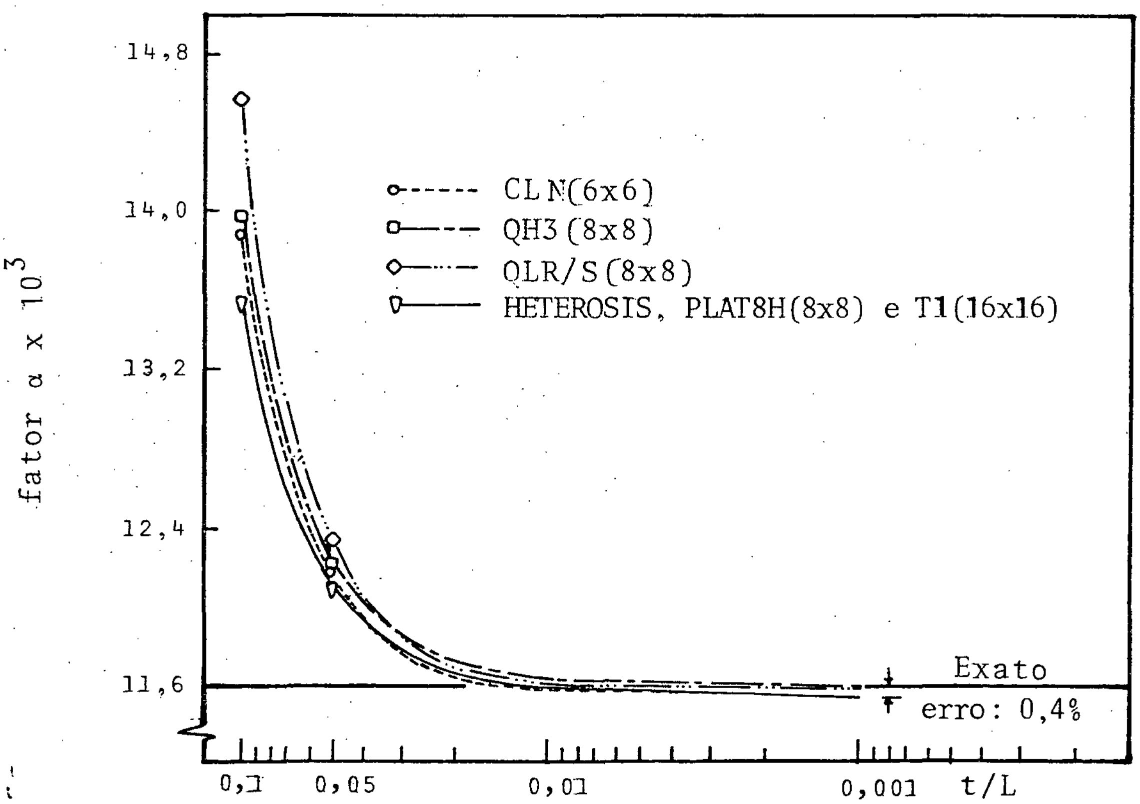


Figura 3.28 - Placa quadrada. Deflexões no centro. Fator α em função da relação t/L. Caso 3 (SS-CC).

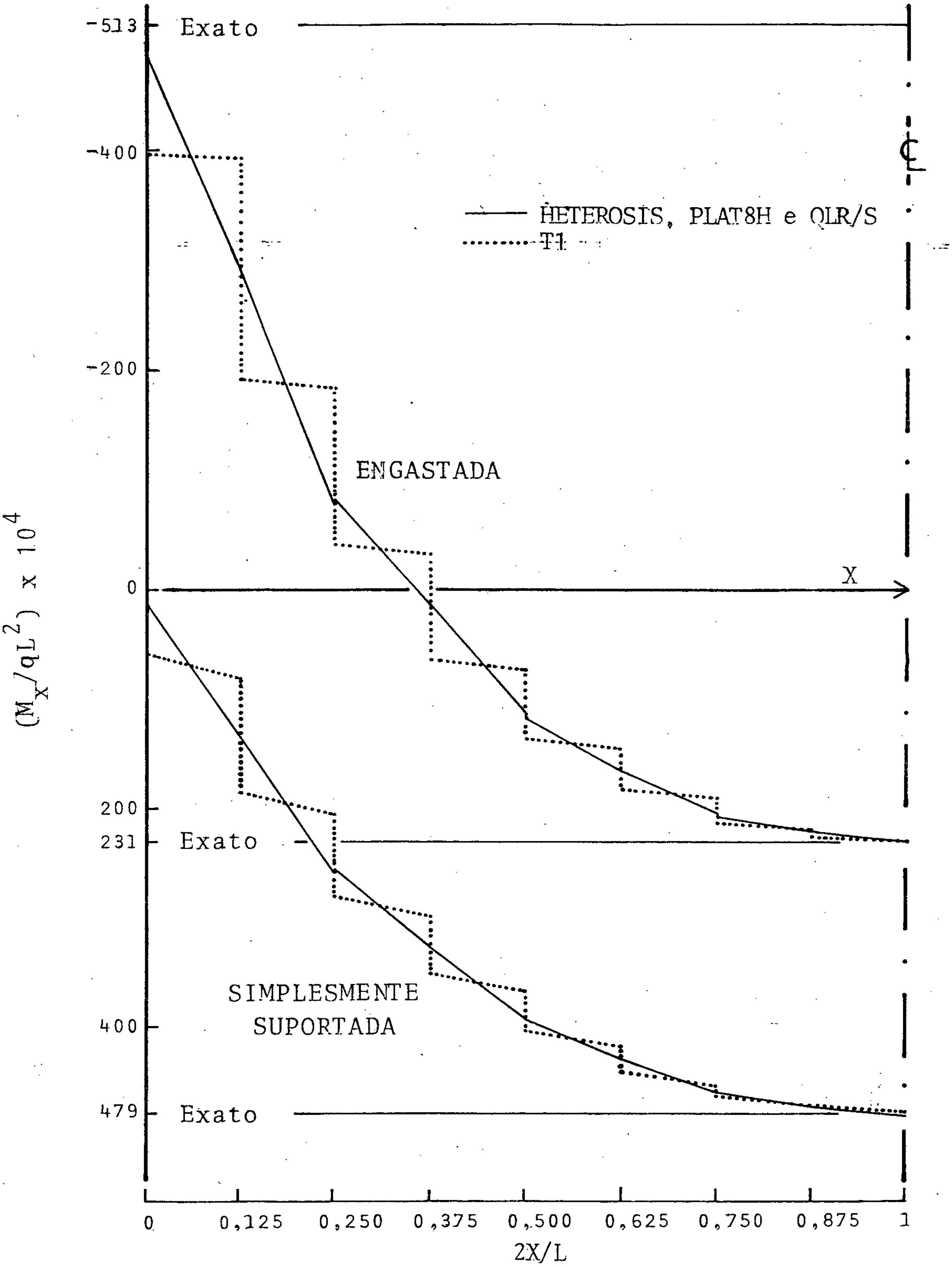


Figura 3.29 - Placa quadrada fina, com carga distribuída. Curva dos momentos para cada elemento, ao longo da linha de centro, usando valores nodais.

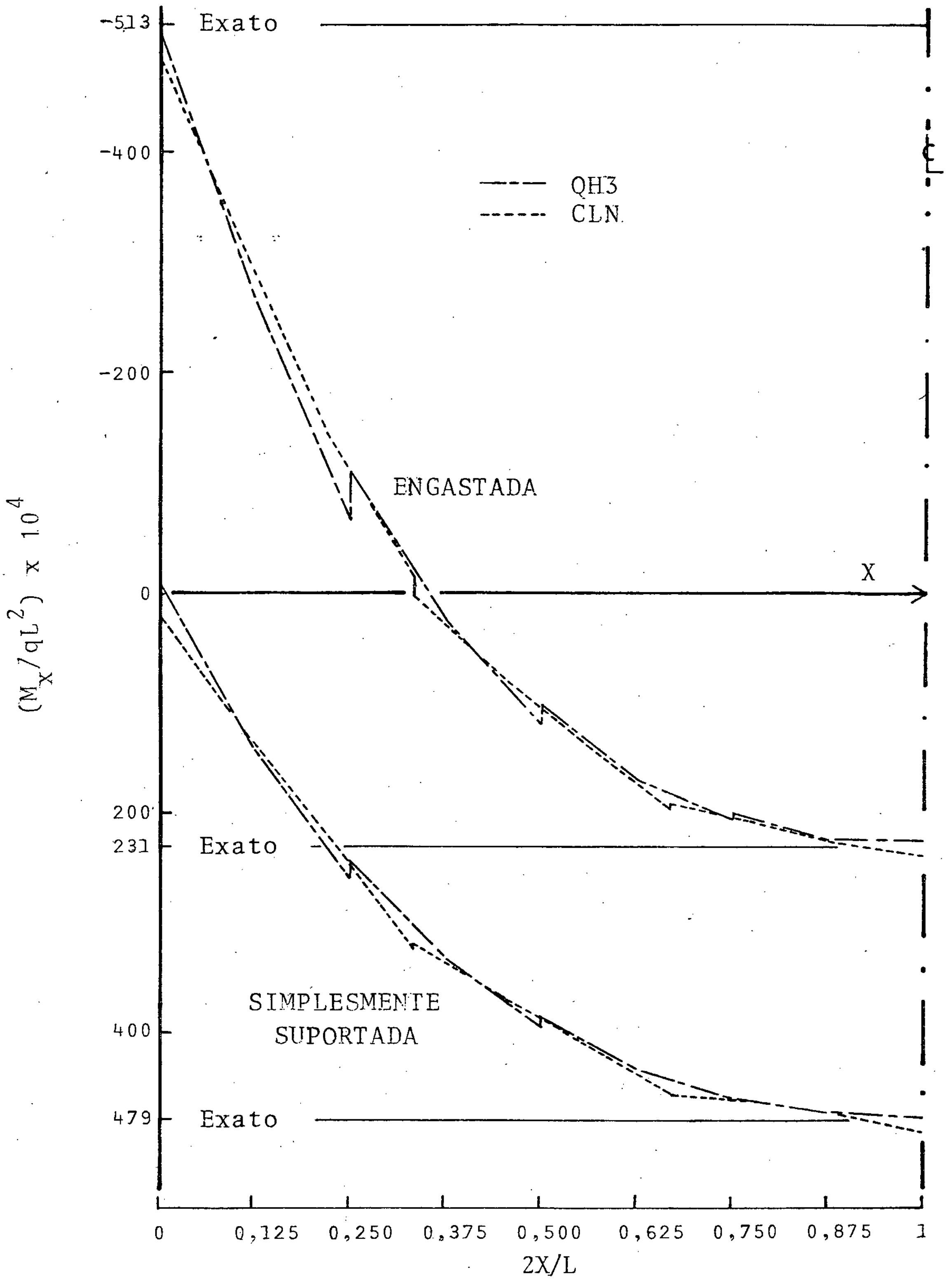


Figura 3.30 - Placa quadrada fina, com carga distribuída. Curva dos momentos para cada elemento, ao longo da linha de centro, usando valores nodais.

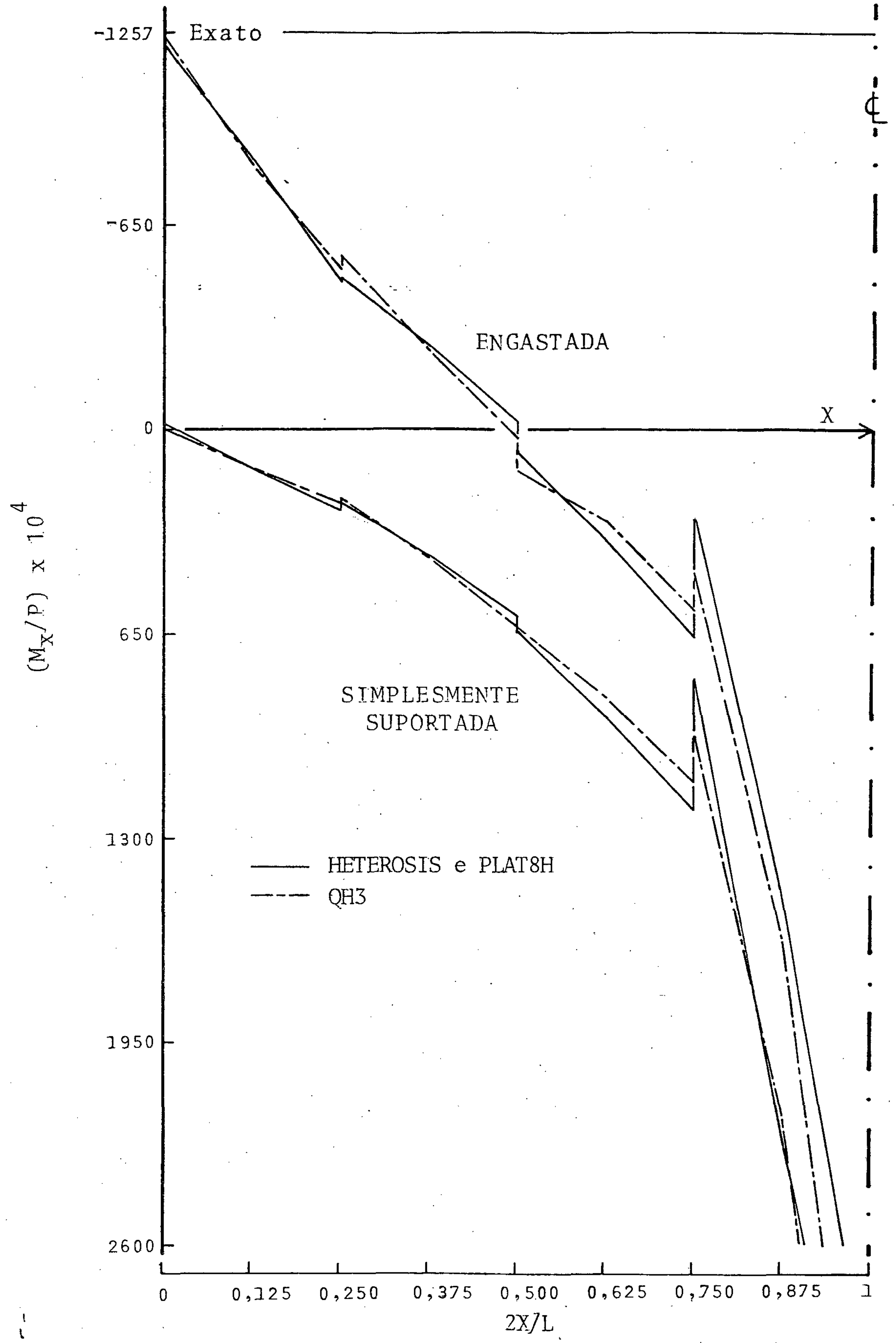


Figura 3.31 - Placa quadrada fina, com carga concentrada. Curva dos momentos para cada elemento, ao longo da linha de centro, usando valores nodais.

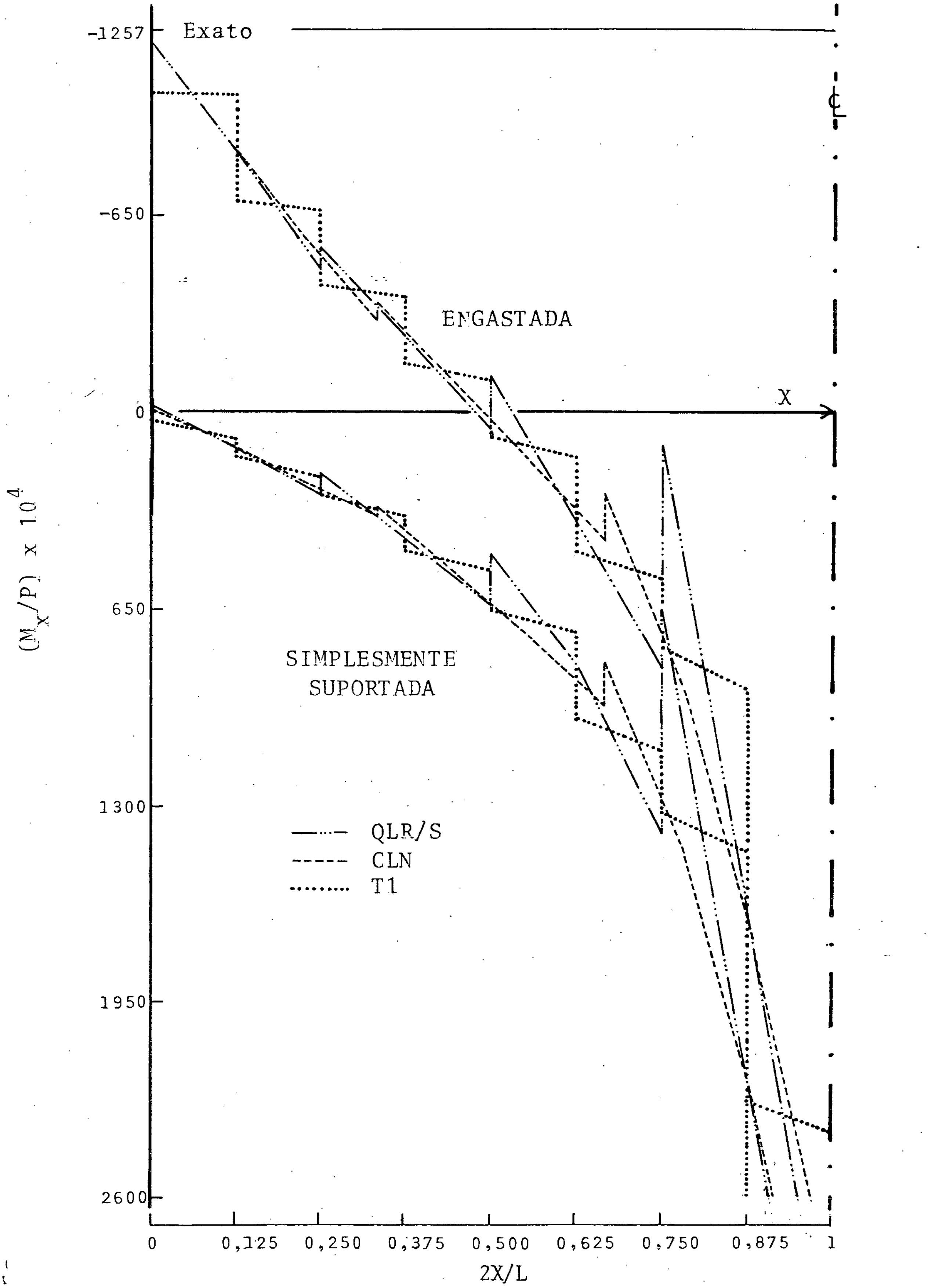


Figura 3.32 - Placa quadrada fina, com carga concentrada. Curva dos momentos para cada elemento, ao longo da linha do centro, usando valores nodais.

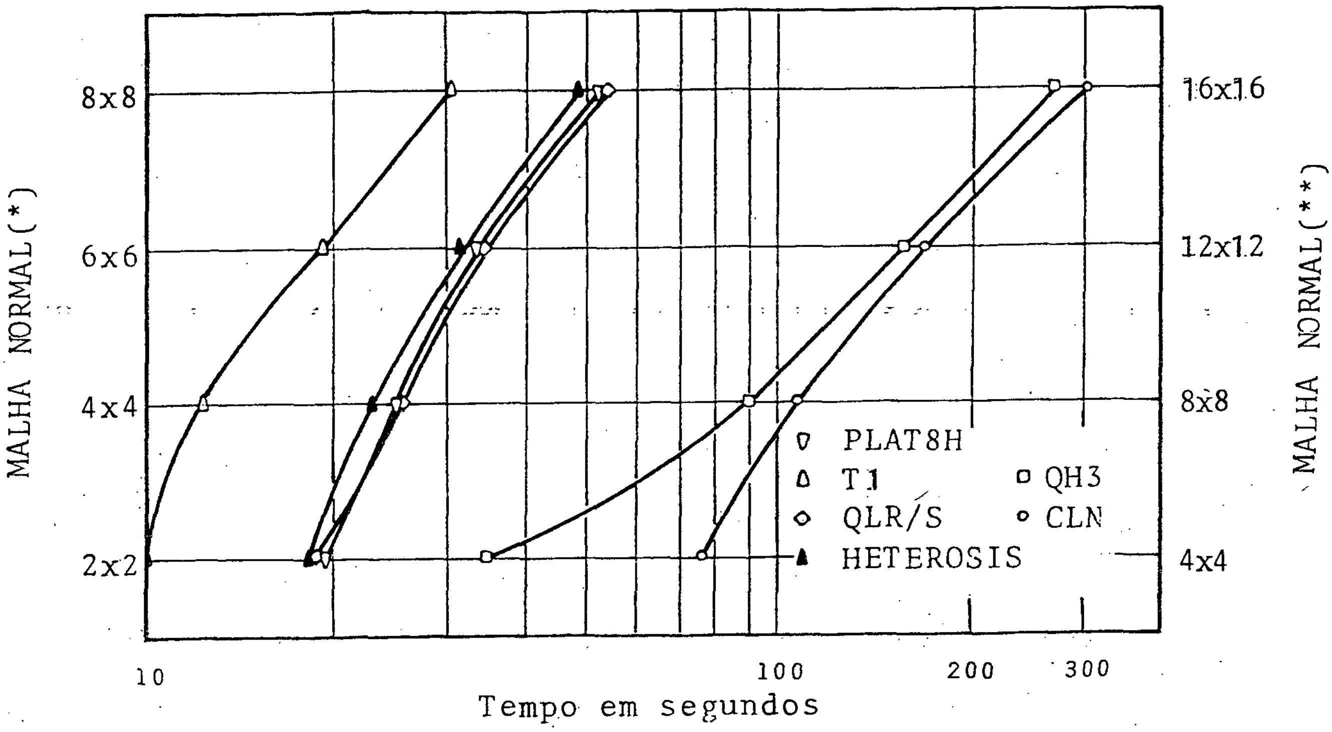


Figura 3.33 - Malha em função do tempo de execução.

(*) Elementos : QH3, HETEROSIS, PLAT8H, CLN e QLR/S.

(**)Elemento T1.

TABELA 3.2 - NÚMERO DE MODOS FALSOS DE ENERGIA

ELEMENTO	NÚMERO DE MODOS FALSOS DE ENERGIA
QH3	0
HETEROSIS	0
PLAT8H(8α)	0
QLR/S	1
QLR/S(+)	0
CLN	0
T1	0

(+) Usando método de controle de modos falsos de energia [44]

TABELA 3.3 - ERRO(%) DA MALHA DISTORCIDA(4x4) EM RELAÇÃO À MALHA NORMAL(4x4) EM PLACAS FINAS(t/L=0,01)

ELEMENTO	DEFLEXÕES NO CENTRO-w_c	MOMENTOS NO CENTRO-M_{x_c}	MOMENTOS NO MEIO DO LADO-M_{x_b}	REAÇÃO NO CANTO - R_a
CASO 1 - PLACA SS-CD, t/1=0,01				
QH3	-1,2	12,0	-	45,2
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	-2,5	4,9	-	25,9
QLR/S	-1,1	0,5	-	19,2
CLN	-2,6	-1,4	-	-4,2
T1(8x8/4x4)	1,0/3,9	3,2/15,4	-	0,3/4,6
CASO 2 - PLACA CL-CD, t/L=0,01				
QH3	-5,2	-11,0	0,6	-
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	-11,8	-20,2	-20,2	-
QLR/S	-11,0	-16,8	-2,1	-
CLN	-2,0	-4,8	-12,4	-
T1(8x8/4x4)	3,8/-58,9	6,4/-51,0	-10,7/-70,8	-
CASO 3 - PLACA SS-CC, t/L=0,01				
QH3	-1,1	-	-	20,9
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	-1,5	-	-	-9,8
QLR/S	-1,0	-	-	12,4
CLN	-1,8	-	-	-2,1
T1(8x8/4x4)	0,0/1,6	-	-	-0,9/2,7
CASO 4 - PLACA CL-CC, t/L=0,01				
QH3	-7,9	-	4,5	-
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	-16,9	-	-21,7	-
QLR/S	-10,2	-	6,9	-
CLN	-1,5	-	-8,0	-
T1(8x8/4x4)	0,2/-61,6	-	-5,8/-72,8	-

OBS: Para o T1, além da malha 4x4, foi usada também a malha 8x8.

TABELA 3.4 - ERRO(%) DA MALHA DISTORCIDA(4x4) EM RELAÇÃO À MALHA NORMAL(4x4) EM PLACAS SEMI-ESPESSAS(t/L=0,1)

ELEMENTO	DEFLEXÕES NO CENTRO-w_c	MOMENTOS NO CENTRO-M_{x_c}	MOMENTOS NO MEIO DO LADO-M_{x_b}	REAÇÃO NO CANTO - R_a
CASO 1 - PLACA SS-CD, t/L=0,1				
QH3	0,2	2,0	-	12,3
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	0,8	-2,3	-	16,9
QLR/S	1,0	-3,3	-	2,7
CLN	-0,1	0,0	-	-0,1
T1(8x8/4x4)	1,0/4,4	3,3/14,6	-	0,8/4,8
CASO 2 - PLACA CL-CD, t/L=0,1				
QH3	-0,1	-1,2	-4,5	-
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	2,0	-6,7	-4,5	-
QLR/S	1,4	-5,5	-3,8	-
CLN	-0,1	-0,2	-3,4	-
T1(8x8/4x4)	3,9/17,8	8,1/40,7	-11,3/-75,0	-
CASO 3 - PLACA SS-CC, t/L=0,1				
QH3	-0,4	-	-	8,3
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	0,7	-	-	8,8
QLR/S	0,8	-	-	-0,6
CLN	0,8	-	-	0,1
T1(8x8/4x4)	0,9/2,5	-	-	-0,5/2,7
CASO 4 - PLACA CL-CC, t/L=0,1				
QH3	-2,5	-	0,3	-
PLAT8H(8α) e HETEROSIS	-1,3	-	0,6	-
QLR/S	-0,2	-	-1,2	-
CLN	1,5	-	-3,6	-
T1(8x8/4x4)	2,1/9,2	-	-6,8/-76,3	-

OBS: Para o T1, além da malha 4x4, foi também usada a malha 8x8.

3.4 - Comentários

Todas as figuras, de 3.5 a 3.24, estão traçadas com a mesma escala de erro em relação aos valores de convergência. Pretende-se com isto, dar uma melhor visualização para o comportamento global dos elementos.

As Figuras 3.5 a 3.8 mostram resultados para deflexões no centro de placas finas. Pode ser visto que todos os elementos apresentam um bom comportamento para os casos 1 e 3(placa simplesmente suportada). Já para os casos 2 e 4(placa engastada) tem-se uma maior dispersão dos resultados. Para casos particulares, destaca-se o bom desempenho dos elementos DKT e DKQ(caso 1), T1(caso 2) e QLR/S, DKT e T1(caso 3).

As deflexões no centro de placas semi-espessas(Figuras 2.15 a 3.18) apresentaram-se de maneira diferente, ou seja, pode ser visto um bom comportamento global para os casos 1 e 2 (carga distribuída). Porém, para os casos 3 e 4 não houve sequer uma convergência bem definida por parte de qualquer dos elementos. Entretanto, pode-se destacar os elementos QH3 e CLN como sendo os melhores.

Nas Figuras 3.15 a 3.18 podem ser vistos também resultados para o QLR/S onde foi usado o método "e", proposto por COOK (Referência 44), para controle de modos falsos de energia. Este método é usado para elemento de nove nodos, e consiste em multiplicar os dois últimos valores da diagonal da matriz de rigidez do elemento(nodo do centro) por um fator(1+e), onde "e" é um número pequeno. Pelos resultados pode-se observar que seria necessário encontrar um fator "e" para cada caso, e além disto, foi verificado no cálculo dos auto-valores e auto-vetores que dois auto-valores nulos, associados a dois movimentos de corpo rígido, desa pareceram com o emprego deste método. Isto ocorre porque o elemento se torna muito rígido.

As Figuras 3.9 a 3.14 e as Figuras 3.19 a 3.24 apresentam os resultados para tensões em placas finas e semi-espessas, respectivamente. Os melhores resultados globais foram para momentos no centro - caso 1(placa simplesmente apoiada, carga distribuída). Isto já era esperado, pois foram usados valores obtidos nos pontos de integração. Observa-se também que a convergência em placas semi-espessas é bem superior à convergência obtida para placas finas. Os resultados mais desfavoráveis são para momentos no meio do lado - caso 3 e caso 4(placa fina). Isto também era esperado, pois foram usados valores obtidos nos nodos do elemento. Inclusive, o elemento T1 por ser linear, apresenta resultados bem dispersos para momentos no meio do lado, e isto pode ser verificado pela curva dos momentos em cada elemento, na linha de centro da placa(Figuras 3.29 a 3.32). O elemento CLN também não apresentou bom comportamento para tensões em placas finas, embora que para reação no canto(placa fina), e de um modo geral para tensões em placas semi-espessas, a convergência tenha sido boa. Individualmente e para casos particulares, pode-se destacar bons resultados para os elementos DKQ, QH3, HSM e QLR/S. Como se esperava, os elementos híbridos QH3 e HSM apresentaram resultados satisfatórios em todos os casos. É verdade, porém, que o elemento QH3 não apresenta excelentes resultados para momentos no centro (caso 2). SPILKER[15] mostra que os pontos ótimos para o cálculo das tensões seriam os correspondentes a uma integração numérica 3x3, ao contrário do que realmente se usa, ou seja, uma integração 4x4.

Deve-se ressaltar que para placa semi-espessa dispõe-se apenas de dois resultados analíticos, ou seja, deflexões para os casos 1 e 2. Para as demais situações, o que se pode observar é a convergência dos elementos para um determinado valor.

Para placas finas, estão traçadas as curvas dos momentos $\left(M_x\right)$ para cada elemento, ao longo da linha do centro da placa (Figuras 3.29 a 3.32). Observa-se um melhor comportamento dos elementos QH3, HETEROSIS e PLAT8H(8α), enquanto o T1 apresenta resultados mais dispersos por ser um elemento linear. Entretanto, pode ser verificado que a média nodal para o T1 corresponde aos valores apresentados pelos demais elementos. Estas curvas não estão mostradas para placas semi-espessas, pois neste caso o comportamento apresentado é bastante semelhante.

O fenômeno de travamento pode ser analisado pelas Figuras 3.26 a 3.28. O comportamento global é bom, com destaque para o caso 1, Figura 3.25. Entretanto pode ser visto uma ligeira tendência a travamento dos elementos CLN, HETEROSIS, PLAT8H(8α) e T1, todos para o caso 4; porém com erros abaixo de 0,8% em relação à solução analítica. O QH3 também apresenta um leve efeito de travamento para o caso 3. Escolhe-se o QLR/S como o melhor elemento quanto a travamento. Inclusive o CI("constraint index"), calculado para este elemento(Apêndice C), confirma os resultados obtidos. Observa-se também que, na maioria dos casos, o QLR/S apresenta uma flexibilidade excessiva, tanto para placas finas como semi-espessas.

Quanto a modos falsos de energia, vê-se pela Tabela 3.2 que somente um modo falso foi encontrado para o QLR/S. Os demais elementos e o QLR/S utilizando o método de controle "e", não apresentam modos falsos de energia.

As Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam os erros(%) da malha distorcida em relação à malha normal, em placas finas e semi-espessas, respectivamente. De um modo geral, os resultados são bem melhores para placas semi-espessas. Somente o elemento T1 tem um comportamento diferente, ou seja, é ligeiramente melhor para placas finas. Os elementos CLN(malha 4x4) e T1(malha 8x8) são os que apresentam melhores resultados. Entretanto, para a malha 4x4 do CLN o número de graus de liberdade envolvidos é bem superior ao dos demais elementos, e a malha 8x8 do elemento T1 tem uma relação de distorção bem menor. Para uma malha 4x4 o T1 apresenta resultados muito inferiores, e em alguns casos são decepcionantes, mas o número de graus de liberdade envolvidos é muito pequeno. Desprezando-se o número de graus de liberdade e analisando-se somente quanto à sensibilidade à distorção da malha(malha 4x4 para todos os elementos), classifica-se como melhor o elemento CLN. O QH3 apresenta comportamento satisfatório na maioria dos casos, embora que para reação no canto os resultados sejam muito ruins. O HETEROSIS e PLAT8H(8α) decepcionam para os casos 2 e 4 em placas finas, e o T1 é o mais sensível para a malha 4x4.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

4.1 - Introdução

Tal como se afirmou no início deste trabalho, o elemento ideal para flexão de placas parece não ter sido ainda formulado. É difícil, inclusive, selecionar o melhor entre os elementos testados, pois os requisitos para um elemento ideal são apenas parcialmente satisfeitos. Entretanto, conlui-se que os elementos que mais se aproximam do procurado elemento de aplicação geral são aqueles que têm inclusa a energia de deformação cisalhante transversal, ou seja, os elementos baseados na teoria de placa de Mindlin ou Reissner.

As conclusões e sugestões, aqui apresentadas, mostram que muito ainda deverá ser feito para que se formule um elemento que satisfaça a todos os requisitos desejáveis.

4.2 - Conclusões

Para os elementos analisados neste trabalho, e em face dos resultados apresentados, chega-se às conclusões que se seguem.

a) Quanto ao fenômeno de travamento

O problema do fenômeno de travamento, que surge em decorrência das funções de interpolação não serem capazes de representar, exatamente, a restrição de energia de cisalhamento transversal nula(placas muito finas) em elementos baseados na teoria de placa de Mindlin, é resolvido no modelo dos deslocamentos com a utilização de integração reduzida ou definindo-se as deformações cisalhantes transversais, de uma maneira especial, tal como foi feito para o elemento T1. Já nos modelos híbrido e misto, o problema de travamento é solucionado através da escolha da polinomial ideal para interpolar o campo de tensões ou deformações. Entretanto, a solução do problema travamento pode dar origem a invariância e modos falsos de energia. É importante salientar que os elementos serendipity, baseados no modelo dos deslocamentos, apresentam travamento, mesmo que seja usada uma integração reduzida para obtenção de sua matriz de rigidez.

b) Quanto à invariância

O problema da não invariância ocorre quando polinomiais incompletas e não simétricas são utilizadas para a definição do campo de tensões ou deslocamentos de um elemento. Para elementos não isoparamétricos, este problema é solucionado obtendo-se a matriz de rigidez do elemento em um sistema local de coordenadas, e girando-se, em seguida, toda a rigidez, para o sistema global. Para elementos isoparamétricos não existe opção para eliminar a não invariância de um elemento, a não ser que se altere a convergência do elemento, através do uso de polinomiais completas.

c) Quanto a modos falsos de energia

Os modos falsos de energia são eliminados no modelo dos deslocamentos com o uso de formulações específicas, tais como as formulações dos elementos HETEROSIS e T1. Nos modelos híbrido-tensões e misto, os modos falsos de energia são eliminados com a utilização de uma "polinomial ideal"(obtida através de testes do elemento) para interpolar o campo de tensões ou deformações. Os modos falsos de energia, entretanto, podem ser eliminados sem se alterar as polinomiais ou funções de interpolação. Isto é feito através de métodos de controle de modos falsos de energia, tais como os apresentados nas Referências 39, 40 e 44. Estes métodos nor malmente trazem inconvenientes como, por exemplo, poder tornar um elemento invariante em um elemento não invariante, ou como foi visto para o método "e" proposto por COOK[44], em que a solução do problema fica dependente do ajuste de um parâmetro para cada caso a ser analisado. O método "e" também traz o inconveniente que é tornar o elemento muito rígido e eliminar, inclusive, alguns movimentos de corpo rígido.

d) Quanto à convergência para deflexões

Pode-se concluir que, no caso de deflexões de placas finas, os elementos que melhor se apresentam são os de baixa ordem ou com integração reduzida; e, no caso de deflexões em placas semi-espessas, os melhores são os de maior ordem quanto ao campo de tensões ou deslocamentos no interior dos elementos. É evidente que para placas semi-espessas, a utilização de funções de interpolação de maior ordem possibilitam uma melhor representação das deformações da placa. Desta forma, explica-se o comportamento dos elementos para os casos 3 e 4(Figuras 3.17 e 3.18) em placas semi-espessas.

e) Quanto à convergência para tensões

Em placas finas, a convergência para tensões é bem inferior à convergência para deflexões. Este é um problema ligado à formulação do elemento, pois para placas semi-espessas verifica-se uma melhor convergência para tensões, em função da teoria de placa em que são baseados(teoria de Mindlin). De uma maneira geral, os elementos híbrido-tensões apresentam resultados bastante satisfatórios em todos os casos testados. Os resultados mais desfavoráveis são para momentos na borda da placa(placa fina) e principalmente para elementos lineares, como é o caso do T1.

f) Quanto à sensibilidade à distorção da malha

Este é um problema inerente a elementos finitos de um modo geral e somente elementos com nodos internos, o que significa elementos de alta ordem, são os que apresentam um bom comportamento. Entretanto, os resultados para um elemento de alta ordem correspondem aos resultados de um elemento de baixa ordem com malha mais refinada, e conseqüentemente menos distorcida.

g) Quanto à eficiência computacional

Quanto à eficiência computacional, pode-se generalizar que, em decorrência da ordem dos elementos e da integração numérica utilizada, a Figura 3.33 em conjunto com as Figuras 3.5 a 3.24 comprovam a maior eficiência computacional do elemento T1(linear) e dos elementos quadráticos com integração reduzida. Entretanto, como já foi comentado, o QH3 poderá ter a sua eficiência bastante melhorada se as matrizes [H](Equação 2.80) e [G](Equação 2.81) forem integradas analiticamente.

h) Quanto à seleção dos melhores elementos

Observa-se que os problemas ligados a elementos de flexão de placas ainda não foram totalmente solucionados, bem como problemas inerentes a elementos finitos de um modo geral, como é o caso da sensibilidade à distorção da malha e a convergência para tensões em placas finas. Isto levará à escolha de um elemento apenas razoável.

Para os elementos que foram testados, o elemento que se propõe em primeiro lugar para uma aplicação geral é o QH3. Este elemento é escolhido por ter apresentado uma maior constância em todos os casos testados, além de alguns bons resultados em muitas situações desfavoráveis; e, apesar de sua eficiência computacional ser bastante prejudicada pela ordem da integração numérica, é possível uma integração analítica. Entretanto, é importante observar que o elemento QH2 pode ser usado com vantagens em relação ao elemento QH3, desde que não seja aplicado a placas laminadas ortotrópicas.

Um segundo elemento capaz de satisfazer parcialmente os requisitos do elemento procurado seria o HETEROSIS, principalmente pela sua boa eficiência computacional. Porém, deve-se tomar precauções com a distorção dos elementos. Alternativamente pode-se escolher o elemento T1 por ser o melhor elemento em eficiência computacional, tendo maiores cuidados quanto à distorção dos elementos, principalmente em placas espessas, e quanto aos momentos, estes devem ser obtidos através da média nodal ou nos pontos de integração.

Conclui-se afirmando que todos os elementos que foram testados, com exceção do QLR/S, satisfazem quanto a travamento, modos falsos de energia e invariância. Os maiores problemas são:

1) Convergência para tensões em placas finas, em alguns casos(casos 3 e 4);
2) Sensibilidade à distorção da malha para elementos de baixa ordem;
3) Eficiência computacional para elementos de alta ordem.

Como observação final, pode-se afirmar que ficou constatada a equivalência total dos elementos HETEROSIS e PLAT8H(8α) em todos os casos testados. Uma pequena diferença é observada quanto à eficiência computacional, pois o PLAT8H(8α) exige a inversão de uma matriz.

4.3 - Sugestões

Para prosseguir na busca do elemento ideal, sugere-se os seguintes trabalhos:

1) Estudo do fenômeno de travamento e invariância para os elementos LORA, H5, A-9 e UH, assim como estudos de convergência em placas finas e espessas para estes mesmos elementos;
2) Pesquisa de uma maneira para tornar invariante o elemento QH1;
3) Pesquisa sobre métodos de controle de modos falsos de energia, em especial para o elemento QLR/S.
4) Desenvolvimento de um novo elemento de placa pela teoria de Mindlin e usando o novo funcional misto de DAY e YANG[38];
5) Pesquisa sobre novos funcionais para flexão de placas;
6) Desenvolvimento de um elemento triangular, tendo por base a formulação do elemento T1;
7) Estudo dos elementos que foram selecionados neste trabalho para outras configurações de placas que não as quadradas, e com a utilização de outros carregamentos e outras condições de contorno;
8) Desenvolvimento de um trabalho semelhante a este que foi realizado, mas dirigido para elementos de cascas.

APÊNDICES

APÊNDICE A

ELEMENTO DKQ[5]

A.1 - Resumo

O elemento DKQ é um quadrilátero baseado no modelo dos deslocamentos, usa a "Discrete Kirchhoff Theory", tem doze graus de liberdade, é compatível, não apresenta modos falsos de energia, é pouco sensível à distorção da malha e apresenta convergência não monotônica.

A.2 - Formulação

A.2.1 - Geometria do elemento (Figura A.1)

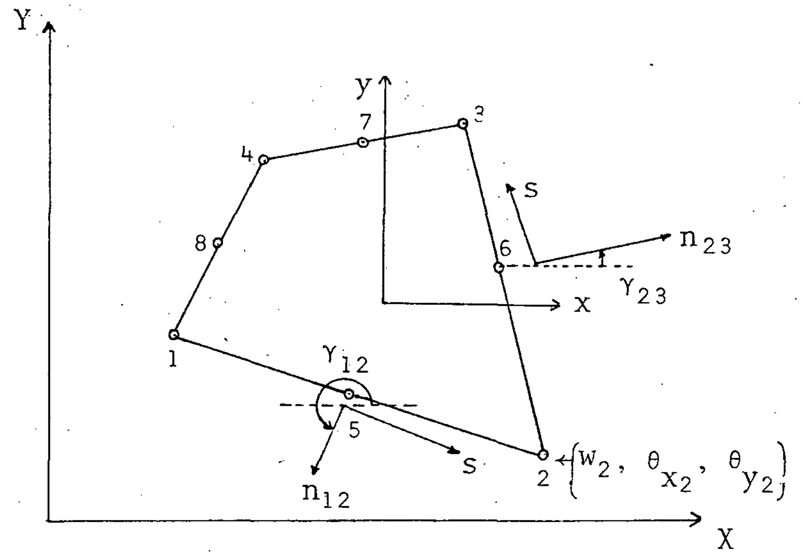


Figura A.1 - Geometria do elemento DKQ. Numeração dos nodos e variáveis nodais no nodo 2.

OBS: $s - n_{ij}$ → orientação no lado ij

γ_{ij} → ângulo entre o eixo x e a direção n_{ij}

ij = 12, 23, 34, 41

A.2.2 - Energia de deformação de flexão

$$U = \frac{1}{2}\iint \{\chi\}^T \left[D_f\right] \{\chi\} dxdy \qquad (A.1)$$

onde $\left[D_f\right]$ é a matriz de propriedades elásticas de flexão (equação 2.1 - Capítulo 2); $\{\chi\}$ é o vetor curvaturas dado por:

$$\{\chi\} = \left\lfloor \beta_{x,x} \; ; \; \beta_{y,y} \; ; \; \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \right\rfloor^T \qquad (A.2)$$

e β_x e β_y são as rotações da normal à superfície média indeformada no plano x-z e y-z, respectivamente(Figura A.2) e dadas por:

$$\beta_x = -w_{,x} \quad \text{e} \quad \beta_y = -w_{,y}$$

Pode-se observar que os graus de liberdade são w, θ_x e θ_y nos nodos dos vértices, e suas orientações podem ser vistas na Figura A.2(a).

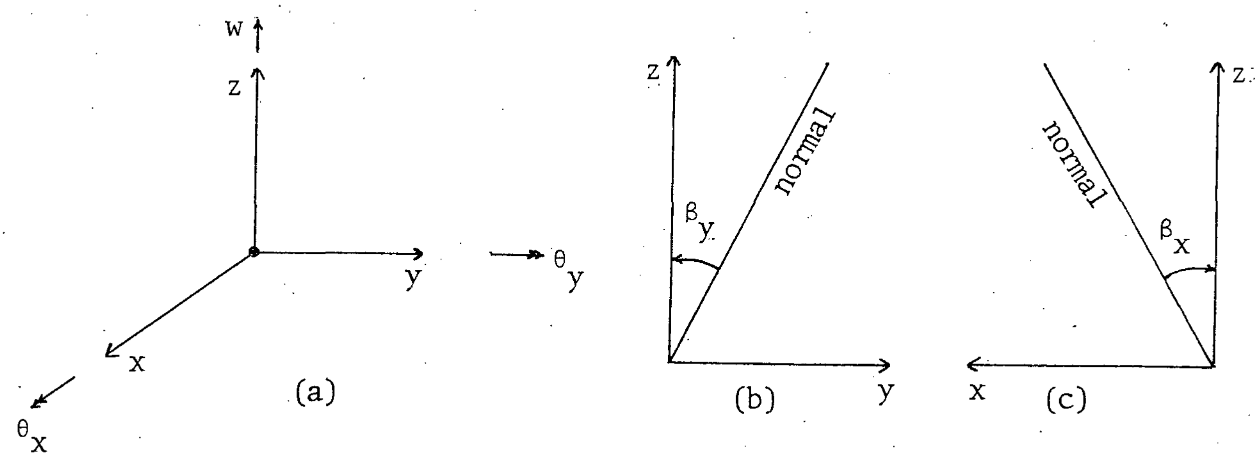


Figura A.2 - (a) Sentido positivo das deflexões e rotações no nodo genérico i; (b) Sentido positivo de β_y e (c) Sentido positivo de β_x.

A.2.3 - Variáveis nodais transitórias

β_x e β_y são aproximadas por:

$$\left.\begin{aligned} \beta_x &= \sum_i S_i \beta_{x_i} \\ \beta_y &= \sum_i S_i \beta_{y_i} \end{aligned}\right\} \qquad (A.3)$$

$$(i = 1,2,\ldots,8)$$

onde S_i são as funções de interpolação serendipity de oito nodos (Apêndice H).

Observa-se que β_{x_i} e β_{y_i} são tomadas como variáveis nodais transitórias. Na realidade usa-se como variáveis nodais as deflexões w e as rotações θ_x e θ_y (Figura A.1) nos nodos dos vértices do elemento.

A.2.4 - Suposições de Kirchhoff

Nos nodos dos vértices,

$$\left.\begin{aligned} \beta_{x_i} + w,_{x_i} &= 0 \\ \beta_{y_i} + w,_{y_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A.4a)$$

$$(i = 1,2,3,4)$$

Nos nodos do meio dos lados,

$$\beta_{s_k} + w,_{s_k} = 0 \qquad (A.4b)$$

$$(k = 5,6,7,8)$$

onde s é a coordenada ao longo do contorno do elemento.

A.2.5 - Deslocamentos transversais no contorno

Os deslocamentos w são definidos por uma expressão cú bica ao longo de cada lado do elemento. Desta forma,

$$w,_{s_k} = \frac{-3}{2l_{ij}}\left(w_i - w_j\right) - \frac{1}{4}\left(w,_{s_i} + w,_{s_j}\right) \tag{A.5}$$

onde l_{ij} é o comprimento do lado ij dado por:

$$l_{ij} = \left(x_{ij}^2 + y_{ij}^2\right)^{1/2} \tag{A.6}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad \text{e} \quad y_{ij} = y_i - y_j \tag{A.7}$$

e para:

$$k = 5 \rightarrow ij = 12$$

$$k = 6 \rightarrow ij = 23$$

$$k = 7 \rightarrow ij = 34$$

$$k = 8 \rightarrow ij = 41$$

A.2.6 - Rotações ao longo dos lados

As rotações têm variação linear ao longo dos lados e são assumidas como:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_{n_k} = \frac{1}{2}\left(\beta_{n_i} + \beta_{n_j}\right) \\ \text{ou} \\ \beta_{n_k} = -\frac{1}{2}\left(w,_{n_i} + w,_{n_j}\right) \end{array}\right\} \tag{A.8}$$

A.2.7 - Relações entre as variáveis nodais transitórias, β_x e β_y, e as variáveis nodais w, θ_x e θ_y

Considerem-se as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_k & -S_k \\ S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix}_k \tag{A.9}$$

$$\begin{Bmatrix} w,_s \\ w,_n \end{Bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} C_k & -S_k \\ S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w,_y \\ w,_x \end{Bmatrix}_{i,j} \tag{A.10}$$

onde $C_k = \cos\gamma_k$ e $S_k = \text{sen}\,\gamma_k$.

Definindo-se:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{-S_k}{l_{ij}} \\ b_k &= -\frac{3}{4}\, C_k S_k \\ c_k &= -\frac{1}{2}\, C_k^2 + \frac{1}{4}\, S_k^2 \\ d_k &= \frac{C_k}{l_{ij}} \\ e_k &= -\frac{1}{2}\, S_k^2 + \frac{1}{4}\, C_k^2 \end{aligned}\right\} \qquad (A.11)$$

e substituindo-se as equações (A.8), (A.9), (A.10) e (A.11) em (A.3) obtem-se:

$$\beta_x = \sum_i N_i \theta_{y_i} + \sum_k N_k \left(\frac{3}{2} a_k\right)\left(w_i - w_j\right) + \sum_k N_k \left(b_k \theta_{x_i} + b_k \theta_{x_j} - c_k \theta_{y_i} - c_k \theta_{y_j}\right)$$

$$(i = 1,2,3,4) \quad \text{e} \quad (k = 5,6,7,8)$$

ou

$$\beta_x = \left\{H^x\right\}^T \{a\} \qquad (A.12)$$

onde,

$$\left\{H^x\right\}^T = \left\lfloor H_1^x \;;\; H_2^x \;;\ldots;\; H_{12}^x \right\rfloor \qquad (A.13)$$

$$\{a\} = \left\lfloor w_1 \;;\; \theta_{x_1} \;;\; \theta_{y_1} \;;\ldots;\; w_4 \;;\; \theta_{x_4} \;;\; \theta_{y_4} \right\rfloor^T \qquad (A.14)$$

$$\theta_{x_i} = w_{,y_i} \qquad (A.15)$$

$$\theta_{y_i} = -w_{,x_i} \qquad (A.16)$$

Analogamente,

$$\beta_y = \left\{H^y\right\}^T \{a\} \qquad (A.17)$$

onde,

$$\left\{H^y\right\}^T = \left\lfloor H_1^y \; ; \; H_2^y \; ; \ldots ; \; H_{12}^y \right\rfloor \qquad (A.18)$$

A.2.8 - Matriz de rigidez do elemento

Substituindo-se as equações (A.12) e (A.17) em (A.2) obtem-se:

$$\{\chi\} = [B]\; a \qquad (A.19)$$

onde,

$$[B] = \begin{bmatrix} \left\{H^x\right\}^T_{,x} \\ \left\{H^y\right\}^T_{,y} \\ \left\{H^x\right\}^T_{,y} + \left\{H^y\right\}^T_{,x} \end{bmatrix} \qquad (A.20)$$

e $\left\{H^x\right\}^T_{,x}$; $\left\{H^x\right\}^T_{,y}$; $\left\{H^y\right\}^T_{,x}$; $\left\{H^y\right\}^T_{,y}$ estão relacionados com $\left\{H^x\right\}^T_{,\xi}$; $\left\{H^x\right\}^T_{,\eta}$; $\left\{H^y\right\}^T_{,\xi}$ e $\left\{H^y\right\}^T_{,\eta}$ pela matriz de transformação jacobiana.

Então, pelo modelo dos deslocamentos,

$$[K] = \iint [B]^T \left[D_f\right] [B] dxdy \qquad (A.21)$$

é a matriz de rigidez do elemento.

A.2.9 - Vetor carga nodal

Como não foram usadas funções de interpolação para os deslocamentos transversais internos na formação da matriz de rigidez, o vetor carga nodal é não consistente. Porém, como w é cúbico, pode-se considerar uma função de interpolação cúbica para defini-lo.

A.2.10 - Integração numérica pela Quadratura de Gauss

Teoricamente seria necessária uma integração 3x3, mas a 2x2 pode ser usada sem surgimento de modos falsos de energia.

A.2.11 - Momentos

$$\{M\} = \left[D_f\right][B]\{a\} \qquad (A.22)$$

APÊNDICE B

ELEMENTO DKT[6]

O elemento DKT tem características e formulação idênticas ao elemento DKQ(Apêndice A).

As diferenças básicas são:

a) O elemento é triangular(Figura B.1);

b) Tem nove graus de liberdade;

c) Usa coordenadas de área;

d) Os resultados são dependentes da orientação da malha(Figura B.2).

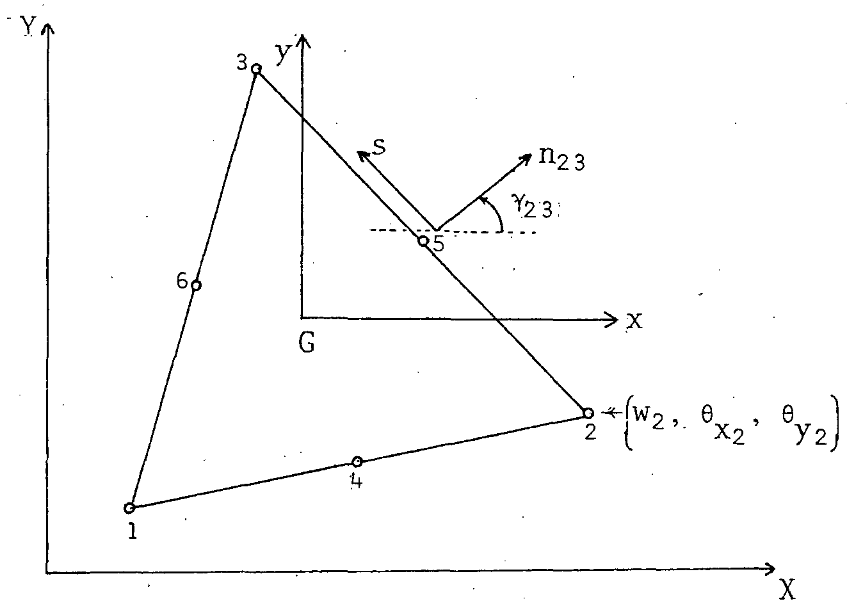


Figura B.1 - Geometria do elemento DKT. Numeração dos nodos e variáveis nodais no nodo 2.(Os símbolos são os mesmos usados na Figura A.1).

OBS: G → centro geométrico do elemento

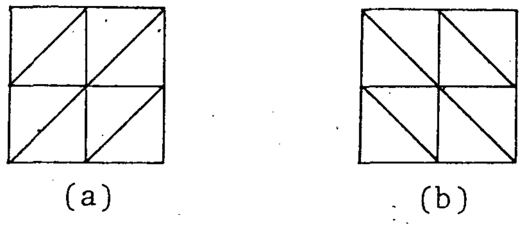


Figura B.2 - Exemplo de orientação de malha.

APÊNDICE C

FAMÍLIA DE QUADRILÁTEROS ISOPARAMÉTRICOS COM INCLUSÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO CISALHANTE[3]

C.1 - Resumo

São lagrangeanos ou serendipity, usam integração total ou reduzida, têm três graus de liberdade por nodo $\left(w,\ \theta_x \text{ e } \theta_y\right)$, apresentam convergência não monotônica em alguns casos, são formulados pelo modelo dos deslocamentos e usam a teoria de placa de Mindlin.

O Quadro C.1 mostra a geometria, ordem de integração e a simbologia dos elementos.

O número de modos falsos de energia para a matriz de rigidez do elemento é apresentado na Tabela C.1.

No Quadro C.2 comenta-se sobre o efeito de travamento para um carregamento distribuído e uniforme.

C.2 - Formulação

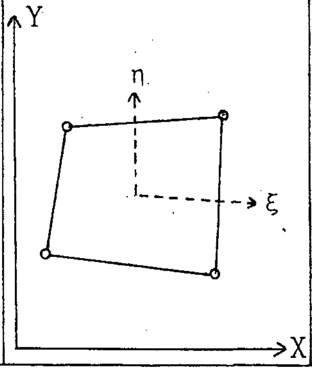
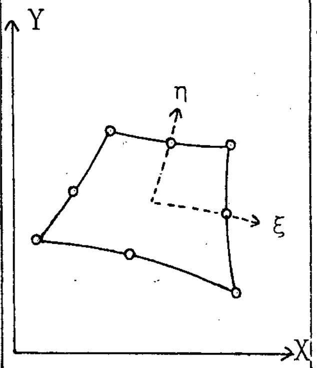
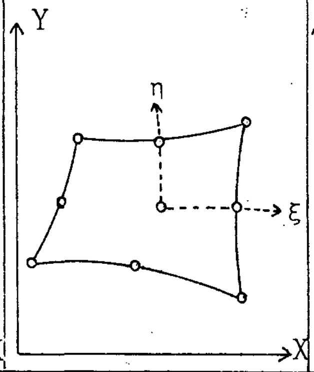
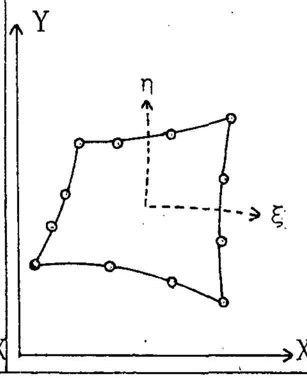
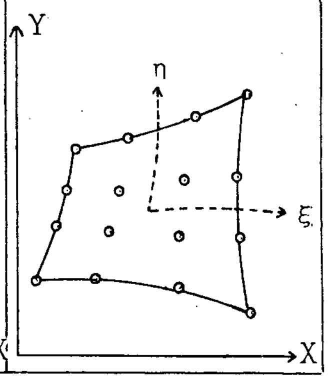
As formulações de todos esses elementos são idênticas à do elemento QLR/S(Capítulo 2).

TABELA C.1 - MODOS FALSOS DE ENERGIA

ELEMENTO	LN	LR	QSN	QSR	QLN	QLR	CSN	CSR	CLN	CLR
Nº DE MODOS FALSOS DE ENERGIA	0	2	0	1	0	4	0	0	0	4
SINAL DO INDICADOR DE SINGULARIDADE(S)		Pos		Pos		Pos		Neg		Pos

Pos → Positivo Neg → Negativo

QUADRO C.1 - RESUMO DOS ELEMENTOS

ELEMENTO		LN	QSN	QLN	CSN	CLN
INTEGRAÇÃO TOTAL	K_f	2x2	3x3	3x3	4x4	4x4
	K_s	2x2	3x3	3x3	4x4	4x4
ELEMENTO		LR	QSR	QLR	GSR	CLR
INTEGRAÇÃO REDUZIDA	K_f	2x2	2x2	2x2	3x3	3x3
	K_s	1x1	2x2	2x2	3x3	3x3
FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO		LAGRANGE OU SERENDIPITY (Linear)	SERENDIPITY (Quadrática)	LAGRANGE (Quadrática)	SERENDIPITY (Cúbica)	LAGRANGE (Cúbica)
GEOMETRIA DO ELEMENTO						

K_f → Matriz de rigidez de flexão

K_s → Matriz de rigidez de cisalhamento

QUADRO C.2 - EFEITO DE TRAVAMENTO PARA PLACAS FINAS(RELAÇÃO t/L = 0,001), QUADRADAS, MALHA DE 8 ELEMENTOS

ELEMENTO	CONDIÇÕES DE CONTORNO	EFEITO DE TRAVAMENTO	CI	S
LN	SS	SIM	-5	
LN	CL	SIM	-5	
LR	SS	NÃO	1	16
LR	CL	NÃO	1	8
QSN	SS	SIM	-9	
QSN	CL	SIM	-9	
QSR	SS	LEVE	1	16
QSR	CL	SIM	1	0
QLN	SS	*NÃO	-6	
QLN	CL	**NÃO	-6	
QLR	SS	NÃO	4	64
QLR	CL	NÃO	4	48
CSN	SS	SIM	-17	
CSN	CL	SIM	-17	
CSR	SS	SIM	-3	-48
CSR	CL	SIM	-3	-72
CLN	SS	NÃO	-5	
CLN	CL	NÃO	-5	
CLR	SS	NÃO	9	144
CLR	CL	NÃO	9	120

(*) → Um pouco rígido para placas finas
(**) → Muito rígido para placas finas
SS → Simplesmente suportada nas bordas
CL → Engastada nas bordas
CI → Constraint Index
S → Indicador de travamento e singularidade

APÊNDICE D

ELEMENTO A-9[30]

D.1 - Resumo

O A-9 é um elemento triangular, compatível, cúbico, su as funções de interpolação são independentes no contorno e no interior do elemento, é formulado pelo modelo dos deslocamentos, a energia de cisalhamento está inclusa, tem nove graus de liberdade, não apresenta modos falsos de energia, o vetor carga nodal é consistente, apresenta convergência monotônica[6] e é equivalente ao elemento HSM[6 e 30].

D.2 - Formulação

D.2.1 - Geometria do elemento (Figura D.1)

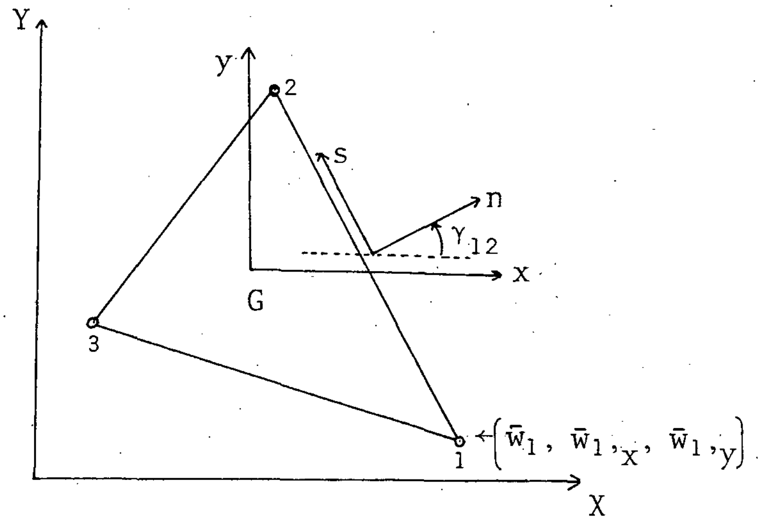


Figura D.1 - Geometria do elemento A-9. Numeração dos nodos, direções no elemento e graus de liberdade no nodo 1.

OBS: G → centro geométrico do elemento

γ_{ij} → ângulo entre as direções "x" e "n" para o lado ij

l_{ij} → comprimento do lado ij (ij = 12, 23, 31)

D.2.2 - Funcional da energia potencial modificada(Π)

Para m elementos, Π é dado por:

$$\Pi = \sum_m \left\{ \iint U_o dxdy + \sum_i R_i\left(\bar{w}_i - w_i\right) + \int_c V_n\left(\bar{w} - w\right)ds - \int_c M_n\left(\bar{w}_{,n} - w_{,n}\right)ds - \iint qwdxdy - \sum_i R_i^* \bar{w}_i - \int_c V_n^* \bar{w} ds + \int_c M_n^* \bar{w}_{,n} ds \right\} \tag{D.1}$$

$(i = 1,2,3)$

onde,

$$U_o = \frac{1}{2}D\left\{\left(\nabla^2 w\right)^2 - 2(1-\nu)\left[w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xy}^2\right]\right\} \tag{D.2}$$

é a densidade de energia de deformação do elemento,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

é um operador diferencial de Laplace, e

$$D = \frac{Et^3}{12\left(1 - \nu^2\right)}$$

é a rigidez de flexão da placa; t, E e ν são, respectivamente, a espessura da placa, o módulo de Young e a razão de Poisson. Os termos com um asterisco no funcional (D.1) são esforços prescritos e:

R_i → força concentrada no nodo i

V_n → força cisalhante(Kirchhoff) normal

M_n → momento fletor normal

c → contorno do elemento

q → carga distribuída

D.2.3 - Deslocamento transversal interno

Os deslocamentos no interior do elemento são aproximados pela polinomial cúbica,

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + \alpha_1x^2 + \alpha_2xy + \alpha_3y^2 + \alpha_4x^3 + \alpha_5x^2y + \alpha_6xy^2 + \alpha_7y^3 \qquad (D.3)$$

onde a_1, a_2 e a_3 representam os movimentos de corpo rígido para os deslocamentos no interior do elemento.

Usando-se (D.3) e aplicando-se o Teorema de Green, tem-se que:

$$\sum_i R_iw_i + \int_C V_n w ds - \int_C M_n w,_n ds = 2\iint U_0 dxdy \qquad (D.4)$$

$(i = 1,2,3)$

onde,

$$\left.\begin{aligned} M_n &= M_x\cos^2\gamma + M_y\text{sen}^2\gamma + M_{xy}\text{sen}2\gamma \\ V_n &= F_n + M_{ns},_s \\ R_i &= M_{ns}\Big|_{-s}^{+s} \end{aligned}\right\} \qquad (D.5)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(w,_{xx} + \nu w,_{yy}\right) \\ M_y &= -D\left(w,_{yy} + \nu w,_{xx}\right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)w,_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (D.6)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{ns} &= \frac{1}{2}\left(M_y - M_x\right)\text{sen}2\gamma + M_{xy}\cos 2\gamma \\ F_n &= M_n,_n + M_{ns},_s \end{aligned}\right\} \qquad (D.7)$$

e F_n são forças cortantes.

As derivadas direcionais em (D.5) e (D.7) são obtidas por:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= -\text{sen}\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial n} &= \cos\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \text{sen}\gamma\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D.8)}$$

Usando-se (D.4), Π(D.1) é reescrito como:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_m \Big\{ & \sum_i R_i\bar{w}_i + \int_c V_n\bar{w}ds - \int_c M_n\bar{w}_{,n}ds \\ & - \iint U_o dxdy - \sum_i R_i^*\bar{w}_i - \int_c V_n^*\bar{w}ds \\ & + \int_c M_n^*\bar{w}_{,n}ds - \iint qwdxdy \Big\} \end{aligned} \qquad \text{(D.9)}$$

$(i = 1,2,3)$

D.2.4 - Vetores forças e deslocamentos generalizados

Substituindo-se (D.3) em (D.2), obtem-se a energia de deformação de um elemento.

$$\iint U_o dxdy = \frac{1}{2}\{\alpha\}^T[H]\{\alpha\} \qquad \text{(D.10)}$$

onde,

$$\{\alpha\} = \lfloor \alpha_1 \; ; \; \alpha_2 \; ; \ldots ; \; \alpha_7 \rfloor^T \qquad \text{(D.11)}$$

e [H] é uma matriz positiva definida a ser obtida por integração analítica.

Sobre os lados do elemento, é admitido uma variação linear do momento fletor normal (M_n) e também é admitido que a força cisalhante (V_n) seja constante. Usando-se um parâmetro adimensional, $\xi = s/l_{ij}$, tem-se:

$$\left.\begin{aligned} M_n &= M_n^{ij}(1 - \xi) + M_n^{ji}\xi \\ V_n &= V_n^{ij} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(D.12)}$$

onde i e j são os nodos do lado ij(numerados no sentido de s - Figura D.1), s é medido com origem em j e M_n^{ij} é o valor de M_n no final do lado ij.

Usando-se (D.12) obtem-se o vetor forças generalizadas,

$$\{P\} = \lfloor R_1 \; ; \; R_2 \; ; \; R_3 \; ; \; V_n^{12} \; ; \ldots ; \; M_n^{12} \; ; \; M_n^{21} \; ; \ldots ; \; M_n^{13} \rfloor^T \qquad (D.13)$$

e com a utilização das equações (D.3), (D.5), (D.6) e (D.7), {P}(D.13) será reescrito como:

$$\{P\} = [B]^T\{\alpha\} \qquad (D.14)$$

onde [B] é uma matriz 7x12 e seus termos envolvem as propriedades elásticas do material, coordenadas dos nodos e os ângulos γ_{ij} [30].

Substituindo-se (D.12) em (D.9) e usando-se a relação $ds = l_{ij} d\xi$, encontra-se o vetor deslocamentos generalizados:

$$\{\delta\} = \lfloor \bar{w}_1 \; ; \; \bar{w}_2 \; ; \; \bar{w}_3 \; ; \; l_{12}\int_0^1 \bar{w} d\xi \; ; \ldots ; \; l_{31}\int_0^1 \bar{w},_n (1 - \xi) d\xi \; ;$$
$$l_{13}\int_0^1 \bar{w},_n \xi d\xi \rfloor^T \qquad (D.15)$$

Para os termos prescritos na equação (D.9), pode ser criado o vetor {P*}(ver (D.13)), desde que os esforços prescritos no contorno do elemento tenham distribuição linear.

Os deslocamentos ao longo dos lados são aproximados pela expressão cúbica(Polinomiais de Hermite):

$$\bar{w}(\xi) = \left(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\right)\bar{w}_i + \left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right)\bar{w}_{i},_{\xi}$$
$$+ \left(3\xi^2 - 2\xi^3\right)\bar{w}_j + \left(-\xi^2 + \xi^3\right)\bar{w}_{j},_{\xi} \qquad (D.16)$$

onde $\bar{w}_i,_{\xi}$ e $\bar{w}_j,_{\xi}$ são obtidas usando-se a primeira das equações (D.8).

A derivada normal de $\bar{w}$(lado ij) é tomada linear, ou seja:

$$\bar{w},_n(\xi) = (1 - \xi)\bar{w}_i,_n + \xi\bar{w}_j,_n \qquad (D.17)$$

onde $\bar{w}_i,_n$ e $\bar{w}_j,_n$ são obtidas usando-se a segunda das equações(D.8).

Substituindo-se (D.16) e (D.17) em (D.15) obtem-se:

$$\{\delta\} = [T]\{a\} \qquad (D.18)$$

onde,

$$\{a\} = \lfloor \bar{w}_1 \; ; \; \bar{w}_1,_x \; ; \; \bar{w}_1,_y \; ; \ldots ; \; \bar{w}_3 \; ; \; \bar{w}_3,_x \; ; \; \bar{w}_3,_y \rfloor^T \qquad (D.19)$$

é o vetor das variáveis nodais para um elemento e [T] é uma matriz de ordem 12x9.

Usando-se as equações (D.10), (D.14) e (D.18), o funcional Π(D.9) é reescrito como:

$$\Pi = \sum_m \left\{ \{\alpha\}^T[B][T]\{a\} - \frac{1}{2}\{\alpha\}^T[H]\{\alpha\} - \{P^*\}^T[T]\{a\} - \iint qwdxdy \right\} \qquad (D.20)$$

D.2.5 - Carga distribuída

Admitindo-se uma distribuição linear de carga sobre o elemento, q(x,y) pode ser expresso por:

$$q(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \qquad (D.21)$$

onde os β_i(i = 1,2,3) são expressos em termos dos q_i(i = 1,2,3) e q_i é o valor de q(x,y) no nodo i, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \qquad (D.22)$$

É conveniente expressar os movimentos de corpo rígido dos deslocamentos internos $\left[a_1,\ a_2 \text{ e } a_3 (D.3)\right]$ em função dos deslocamentos nodais, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix} - [G]\{\alpha\} \qquad (D.23)$$

onde [G] é a matriz cujos elementos são termos da polinomial (D.3) calculados nos nodos do elemento.

Substituindo-se as equações (D.21) e (D.3) na expressão da energia potencial do carregamento distribuído para um elemento, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint q w dx dy = \iint \left(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y\right) \Big[& a_1 + a_2 x + a_3 y \\ & + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^2 y \\ & + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 \Big] dx dy \end{aligned} \qquad (D.24)$$

Com o desenvolvimento e integração da equação acima, obtem-se:

$$\iint q w dx dy = \{q\}^T \left(\left[S_1\right]^T \{a\} + \left[S_2\right]^T \{\alpha\} \right) \qquad (D.25)$$

onde os termos a_i e β_i de (D.24) são eliminados com o uso das equações (D.22) e (D.23); $\left[S_1\right]$ e $\left[S_2\right]$ são matrizes cujos elementos são obtidos por integração analítica e $\{q\}$ é o vetor:

$$\{q\} = \lfloor q_1 \ : \ q_2 \ ; \ q_3 \rfloor^T \qquad (D.26)$$

D.2.6 - Matriz de rigidez e vetor carga nodal

Usando-se (D.26), o funcional (D.20) é reescrito como:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_m \Big\{ & \{\alpha\}^T [B][T]\{a\} - \frac{1}{2}\{\alpha\}^T [H]\{\alpha\} - [P^*][T]\{a\} \\ & - \{q\}^T \left(\left[S_1\right]^T \{a\} + \left[S_2\right]^T \{\alpha\} \right) \Big\} \end{aligned} \qquad (D.27)$$

A minimização de Π(D.27) em relação a $\{\alpha\}$, dá:

$$\{\alpha\} = [H]^{-1}\Big([B][T]\{a\} - \left[S_2\right]\{q\}\Big) \qquad (D.28)$$

Com a substituição de (D.28) em (D.27) e minimização em relação a $\{a\}$, chega-se à equação final de elementos finitos:

$$\sum_m \left[K_m\right]\{a\} = \sum_m \left\{Q_m\right\} \qquad (D.29)$$

onde,

$$\left[K_m\right] = \left([B][T]\right)^T [H]^{-1} \left([B][T]\right) \qquad (D.30)$$

é a matriz de rigidez do m-ésimo elemento, e

$$\left\{Q_m\right\} = [T]^T\{P^*\} + \left(\left[S_1\right] + \left([B][T]\right)^T [H]^{-1} \left[S_2\right]\right)\{q\} \qquad (D.31)$$

é o vetor carga nodal do m-ésimo elemento.

D.2.7 - Tensões

Para o cálculo das tensões, é usado um procedimento alternativo para a obtenção dos parâmetros α, ou seja, como a equação (D.3) satisfaz a equação diferencial $\left(\nabla^4 w = 0\right)$, a densidade de energia de deformação(D.2) é interpretada como uma densidade de energia complementar de deformação; desta forma, o princípio da energia complementar é estabelecido para um elemento como:

$$\iint \delta U_0 \, dxdy = \delta\{P\}^T\{\delta\} \qquad (D.32)$$

Usando-se (D.10) e substituindo-se (D.14) e (D.18) em (D.32), obtem-se:

$$\{\alpha\} = [H]^{-1}[B][T] \qquad (D.33)$$

Os momentos fletores e torsores são obtidos com o uso das equações (D.6) e (D.3) e são dados por:

$$\lfloor M_x \;;\; M_y \;;\; M_{xy} \rfloor^T = [M]\{\alpha\} \tag{D.34}$$

onde [M] é uma matriz das coordenadas x e y e das propriedades elásticas do material.

Os cortantes são dados por:

$$\lfloor F_x \;;\; F_y \rfloor^T = [F]\{\alpha\} \tag{D.35}$$

onde,

$$F_x = M_{x,x} + M_{xy,y}$$

$$F_y = M_{y,y} + M_{xy,x}$$

As forças cisalhantes resultantes(Kirchhoff) são:

$$\lfloor V_x \;;\; V_y \rfloor^T = [V]\{\alpha\} \tag{D.36}$$

onde,

$$V_x = F_x + M_{xy,y}$$

$$V_y = F_y + M_{xy,x}$$

As matrizes [F](D.35) e [V](D.36) são formadas por derivações dos elementos de [M](D.34).

APÊNDICE E

UMA FAMÍLIA DE ELEMENTOS HÍBRIDO-TENSÕES COM INTEGRAÇÃO NUMÉRICA [11, 12, 13, 14 e 15]

E.1 - Resumo

São quadriláteros serendipity, têm três graus de liberdade por nodo $(w,\ \theta_x \text{ e } \theta_y)$, e são baseados na teoria de placa de Mindlin.

O Quadro E.1 mostra a geometria, simbologia e número de parâmetros β para o campo de tensões.

O campo de tensões para os elementos lineares é definido a partir das equações:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x(x,y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_{10} xy + \tfrac{1}{2}\beta_{12} x^2 \\
\sigma_y(x,y) &= \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y + \beta_{11} xy - \tfrac{1}{2}\beta_{13} y^2 \\
\sigma_{xy}(x,y) &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{12} xy \\
\sigma_{xz}(x,y) &= (\beta_2 + \beta_9) + (\beta_{12} + \beta_{13})x + \beta_{10} y \\
\sigma_{yz}(x,y) &= (\beta_6 + \beta_8) + \beta_{11} x + (\beta_{12} - \beta_{13}) y \\
\sigma_z(x,y) &= 2\beta_{12}
\end{aligned}\right\} \qquad (E.1)$$

Desta forma os elementos lineares são obtidos por imposição das seguintes restrições às equações (E.1):

a) Elemento LH3

$$\beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = 0 \qquad (E.2)$$

b) Elemento LH4

$$\beta_{12} = \beta_{13} = 0 \qquad (E.3)$$

c) Elemento LH5

$$\beta_{13} = 0 \tag{E.4}$$

d) Elemento LH11

$$\beta_{12} = 0 \tag{E.5}$$

O campo de tensões para os elementos quadráticos é definido a partir das equações:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x(x,y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 \\
&\quad + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 \\
\sigma_y(x,y) &= \beta_{11} + \beta_{12} x + \beta_{13} y + \beta_{14} x^2 + \beta_{15} xy \\
&\quad + \beta_{16} y^2 + \beta_{17} x^3 + \beta_{18} x^2 y + \beta_{19} xy^2 + \beta_{20} y^3 \\
\sigma_{xy}(x,y) &= \beta_{21} + \beta_{22} x + \beta_{23} y + \beta_{24} x^2 + \beta_{25} xy + \beta_{26} y^2 \\
&\quad + \beta_{27} x^3 + \beta_{28} x^2 y + \beta_{29} xy^2 + \beta_{30} y^3 \\
\sigma_{xz}(x,y) &= \left(\beta_2 + \beta_{23}\right) + \left(2\beta_4 + 2\beta_{26}\right) y + \left(3\beta_7 + \beta_{28}\right) x^2 \\
&\quad + \left(2\beta_8 + 2\beta_{29}\right) xy + \left(\beta_9 + 3\beta_{30}\right) y^2 \\
\sigma_{yz}(x,y) &= \left(\beta_{13} + \beta_{22}\right) + \left(\beta_{15} + 2\beta_{24}\right) x + \left(2\beta_{16} + \beta_{25}\right) y \\
&\quad + \left(\beta_{18} + 3\beta_{27}\right) x^2 + \left(2\beta_{19} + 2\beta_{28}\right) xy \\
&\quad + \left(3\beta_{20} + \beta_{29}\right) y^2 \\
\sigma_z(x,y) &= 2\left(\beta_4 + \beta_{16} + \beta_{25}\right) + 2\left(3\beta_7 + \beta_{19} + 2\beta_{28}\right) x \\
&\quad + 2\left(\beta_8 + 3\beta_{20} + 2\beta_{29}\right) y
\end{aligned}\right\} \tag{E.6}$$

Os elementos quadráticos são obtidos por imposição das seguintes restrições às equações (E.6):

a) Elemento QH1

$$\beta_7 = \beta_{10} = \beta_{17} = \beta_{20} = \beta_{27} = \beta_{28} = \beta_{29} = \beta_{30} = 0 \tag{E.7}$$

b) Elemento QH2

$$\left.\begin{aligned} \beta_{28} &= -\frac{1}{2}\left(3\beta_7 + \beta_{19}\right) \\ \beta_{29} &= -\frac{1}{2}\left(\beta_8 + 3\beta_{20}\right) \\ 2\beta_4 + \beta_{26} + \beta_{14} + \beta_{16} + \beta_{25} &= 0 \\ 6\beta_7 + \beta_9 + 3\beta_{17} + 2\beta_{19} + \beta_{28} &= 0 \\ 2\beta_8 + 3\beta_{10} + \beta_{18} + 6\beta_{20} + 2\beta_{29} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (E.8)$$

OBS: Estas restrições são obtidas forçando a condição de compatibilidade de tensões(Beltrami-Michell) sobre as equações (E.6) e com o uso das restrições (E.9).

c) Elemento QH3

$$\left.\begin{aligned} \beta_{28} &= -\frac{1}{2}\left(3\beta_7 + \beta_{19}\right) \\ \beta_{29} &= -\frac{1}{2}\left(\beta_8 + 3\beta_{20}\right) \end{aligned}\right\} \quad (E.9)$$

d) Elemento QH4

Sem restrições às equações (E.6).

A Tabela E.1 esclarece quanto ao fenômeno de travamento, invariância e quanto à presença de modos falsos de energia.

E.2 - Formulação

A formulação de todos estes elementos é idêntica à do elemento QH3 e pode ser vista no Capítulo 2.

QUADRO E.1 - RESUMO DOS ELEMENTOS

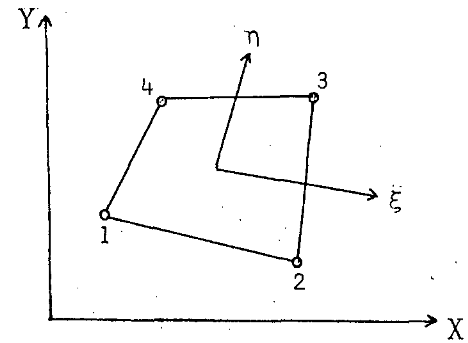
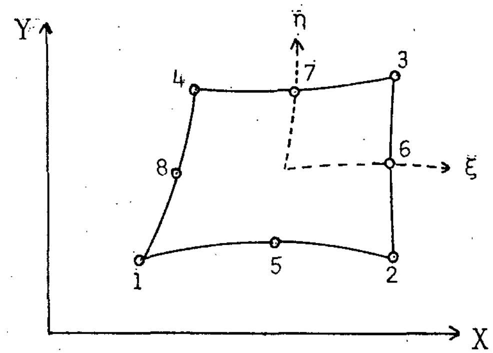
ELEMENTO	LH3	LH4	LH5	LH11	QH1	QH2	QH3	QH4
PARÂMETROS β	9β	11β	12β	12β	22β	25β	28β	30β
FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO	SERENDIPITY(Linear)				SERENDIPITY(Quadrática)			
GEOMETRIA DO ELEMENTO								

TABELA E.1 - EFEITO DE TRAVAMENTO, NÚMERO DE MODOS FALSOS DE ENERGIA E INVARIÂNCIA

ELEMENTO		LH3	LH4	LH5	LH11	QH1	QH2	QH3	QH4
TRAVAMENTO	COMENTÁRIOS	NÃO	NÃO	SIM	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
	RCI	3	1	0	0	3	3	3	1
	CI	-	-	-	-	-1	-1	-1	-3
MODOS FALSOS DE ENERGIA		2	0	0	0	0	0	0	0
INVARIÂNCIA		SIM	NÃO	SIM	SIM	NÃO	SIM	SIM	SIM

RCI → Rotational Constraint Index

CI → Constraint Index

APÊNDICE F

ELEMENTO UH[34]

F.1 - Resumo

É um elemento triangular, formulado pelo modelo híbrido-tensões usando o funcional misto de Reissner. Nele está inclusa a energia de cisalhamento, tem nove graus de liberdade, não apresenta travamento, e o efeito de cisalhamento para placas espessas é tratado usando o princípio do controle de energia, ou seja, controlando o fator de correção α[8], que considera a distribuição não uniforme de tensões cisalhantes transversais.

F.2 - Formulação

F.2.1 - Geometria do elemento (Figura F.1)

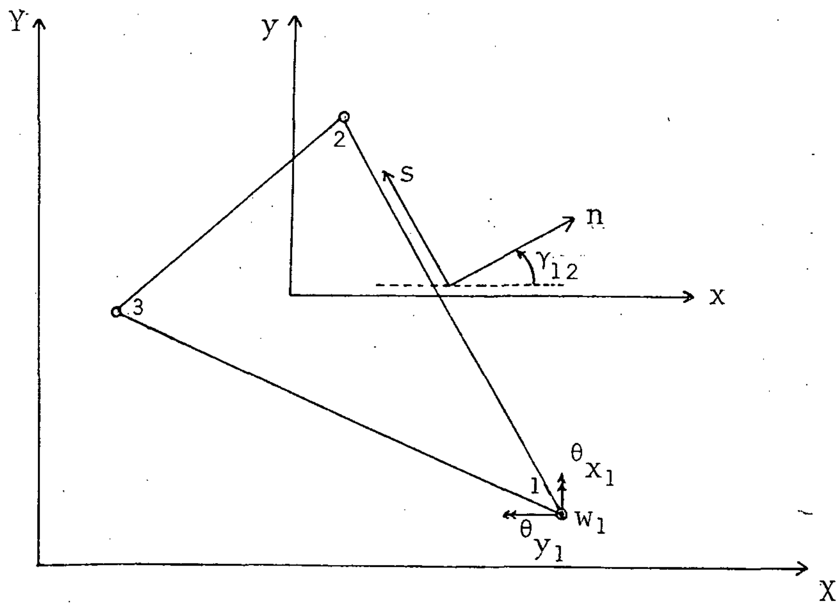


Figura F.1 - Geometria do elemento UH. Numeração dos nodos, direções no elemento e graus de liberdade no nodo 1.

F.2.2 - Funcional de Reissner, Π_R^e, para um elemento[22]

Usando-se notação indicial, Π_R^e pode ser escrito como:

$$\Pi_R^e = \iint_A \left\{ M_{ij}\theta_{j,i} + F_j\left(\theta_j + w_{,j}\right) - B_1\left(M_{ij}\right) - B_2\left(F_j\right) - qw \right\} dA$$
$$- \int_{S_\sigma} \left(\bar{F}_n w + \bar{M}_n\theta_n + \bar{M}_{ns}\theta_s\right) dS - \int_{S_u} \left\{ \left(w - \bar{w}\right) F_n \right.$$
$$\left. + \left(\theta_n - \bar{\theta}_n\right) M_n + \left(\theta_s - \bar{\theta}_s\right) M_{ns} \right\} dS \qquad \text{(F.1)}$$

onde M, F e θ são, respectivamente, momentos, forças cortantes e rotações. S_σ é a parte do contorno onde os esforços são prescritos e S_u é a parte do contorno onde os deslocamentos são prescritos(a barra sobre os símbolos indica prescrição). $B_1\left(M_{ij}\right)$ é a densidade de energia complementar de flexão e $B_2\left(F_j\right)$ é a densidade de energia complementar de cisalhamento.

Se as forças cisalhantes são eliminadas no funcional (F.1) pelo uso das equações de equilíbrio, $M_{ij,i} - F_j = 0$, e se as condições de contorno geométricas são satisfeitas, a integração por partes de (F.1) dá:

$$\Pi^e = \iint - \left\{ \left(M_{ij,ij} + q\right) w + B_1\left(M_{ij}\right) + B_2\left(M_{ij,i}\right) \right\} dA$$
$$+ \int_S \left(M_{ij,i}\eta_j\tilde{w} + M_n\theta_n + M_{ns}\theta_s\right) dS$$
$$- \int_{S_\sigma} \left(\bar{F}_n\tilde{w} + \bar{M}_n\theta_n + \bar{M}_{ns}\theta_s\right) dS \qquad \text{(F.2)}$$

onde $\tilde{w}$ são as deflexões no contorno, S é todo o contorno do elemento e η_j são cossenos diretores da normal "n" em relação ao sistema(x,y).

F.2.3 - Campo de momentos

O campo de momentos dentro do elemento é aproximado por:

$$\{M\} = \left\lfloor M_x \; ; \; M_y \; ; \; M_{xy} \right\rfloor^T = [P]\{\beta\} \qquad \text{(F.3)}$$

onde,

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

e

$$\{\beta\} = \lfloor \beta_1 \; ; \; \beta_2 \; ; \ldots ; \; \beta_9 \rfloor^T$$

Observa-se portanto que, como o campo de momentos é linear, os termos $M_{ij},_{ij}$ em (F.2) desaparecem.

F.2.4 - Deflexões no contorno

As deflexões no contorno são tomadas como cúbicas. Utilizando-se as funções de interpolação de Hermite $\left(H_{ij}, \ldots, \bar{H}_{ji}\right.$ - Apêndice H$\left.\right)$, obtem-se:

$$\tilde{w} = \lfloor \tilde{w}_{12} \; ; \; \tilde{w}_{23} \; ; \; \tilde{w}_{31} \rfloor^T = [\tilde{N}]\{a\} \tag{F.4}$$

onde $\tilde{w}_{ij}$ é a distribuição de $\tilde{w}$ ao longo do lado i-j e é dado por:

$$\tilde{w}_{ij} = H_{ij} w_i + H_{ji} w_j + \bar{H}_{ij}\,\theta_{s_i} + \bar{H}_{ji}\,\theta_{s_j} \tag{F.5}$$

e

$$\{a\} = \lfloor w_1 \; ; \; \theta_{x_1} \; ; \; \theta_{y_1} \; ; \; w_2 \; ; \; \theta_{x_2} \; ; \; \theta_{y_2} \; ; \; w_3 \; ; \; \theta_{x_3} \; ; \; \theta_{y_3} \rfloor^T$$

é o vetor das variáveis nodais para um elemento. Com base na Figura F.1, as rotações θ_{s_i} e θ_{s_j} são obtidas em função das variáveis nodais. Desta forma,

$$\left.\begin{aligned} \theta_{s_i} &= \theta_{y_i} \cos\gamma_{ij} - \theta_{x_i} \operatorname{sen}\gamma_{ij} \\ \theta_{s_j} &= \theta_{y_j} \cos\gamma_{ij} - \theta_{x_j} \operatorname{sen}\gamma_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{F.6}$$

e

$$[\bar{N}] = \left[\begin{array}{ccccc|cccc} H_{12} & -\bar{H}_{12}\mathrm{sen}\gamma_{12} & \bar{H}_{12}\cos\gamma_{12} & H_{21} & -\bar{H}_{21}\mathrm{sen}\gamma_{12} & \bar{H}_{21}\cos\gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{23} & -\bar{H}_{23}\mathrm{sen}\gamma_{23} & \bar{H}_{23}\cos\gamma_{23} & H_{32} & -\bar{H}_{32}\mathrm{sen}\gamma_{23} & \bar{H}_{32}\cos\gamma_{23} \\ H_{13} & -\bar{H}_{13}\mathrm{sen}\gamma_{31} & \bar{H}_{13}\cos\gamma_{31} & 0 & 0 & 0 & H_{31} & -\bar{H}_{31}\mathrm{sen}\gamma_{31} & \bar{H}_{31}\cos\gamma_{31} \end{array}\right]$$

F.2.5 - Rotações no contorno

As rotações são supostas lineares ao longo do contorno entre elementos, ou seja:

e

$$\left.\begin{aligned} \theta_{s_{ij}} &= N_i\theta_{s_i} + N_j\theta_{s_j} \\ \theta_{n_{ij}} &= N_i\theta_{n_i} + N_j\theta_{n_j} \end{aligned}\right\} \quad (F.7)$$

Logo,

e

$$\left.\begin{aligned} \{\theta_s\} &= \lfloor \theta_{s_{12}} \; ; \; \theta_{s_{23}} \; ; \; \theta_{s_{31}} \rfloor^T = [N_s]\{a\} \\ \{\theta_n\} &= \lfloor \theta_{n_{12}} \; ; \; \theta_{n_{23}} \; ; \; \theta_{n_{31}} \rfloor^T = [N_n]\{a\} \end{aligned}\right\} \quad (F.8)$$

Com as equações (F.6), (F.7), (F.8) e

$$\left.\begin{aligned} \theta_{n_i} &= \theta_{y_i}\mathrm{sen}\gamma_{ij} + \theta_{x_i}\cos\gamma_{ij} \\ \theta_{n_j} &= \theta_{y_j}\mathrm{sen}\gamma_{ij} + \theta_{x_j}\cos\gamma_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (F.9)$$

obtem-se a matriz

$$[N_s] = \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & -N_1\mathrm{sen}\gamma_{12} & N_1\cos\gamma_{12} & 0 & -N_2\mathrm{sen}\gamma_{12} & N_2\cos\gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_1\mathrm{sen}\gamma_{23} & N_1\cos\gamma_{23} & 0 & -N_2\mathrm{sen}\gamma_{23} & N_2\cos\gamma_{23} \\ 0 & -N_2\mathrm{sen}\gamma_{31} & N_2\cos\gamma_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_1\mathrm{sen}\gamma_{31} & N_1\cos\gamma_{31} \end{array}\right]$$

e similarmente pode-se definir $[N_n]$. As funções N_1 e N_2 em $[N_s]$ são:

$$N_1 = 1 - \xi$$

e

$$N_2 = \xi$$

onde $\xi = s/l_{ij}$ e l_{ij} é o comprimento do lado ij.

F.2.6 - Momentos e cortantes no contorno

De acordo com as orientações na Figura F.2, deduz-se que:

$$\left.\begin{aligned} M_{n_{ij}} &= M_x\cos^2\gamma_{ij} + M_y\mathrm{sen}^2\gamma_{ij} + M_{xy}\mathrm{sen}2\gamma_{ij} \\ M_{ns_{ij}} &= \frac{1}{2}\left(M_y - M_x\right)\mathrm{sen}2\gamma_{ij} + M_{xy}\cos2\gamma_{ij} \\ F_{n_{ij}} &= F_x\cos\gamma_{ij} + F_y\mathrm{sen}\gamma_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (F.10)$$

De (F.3) e (F.10) obtem-se:

$$\{M_n\} = \lfloor M_{n_{12}} \;;\; M_{n_{23}} \;;\; M_{n_{31}} \rfloor^T = [P_n]\{\beta\} \qquad (F.11)$$

$$\left\{M_{ns}\right\} = \left\lfloor M_{ns_{12}} \; ; \; M_{ns_{23}} \; ; \; M_{ns_{31}} \right\rfloor^T = \left[P_s\right]\{\beta\} \qquad \text{(F.12)}$$

$$\left\{F_n\right\} = \left\lfloor F_{n_{12}} \; ; \; F_{n_{23}} \; ; \; F_{n_{31}} \right\rfloor^T = [L][P']\{\beta\} \qquad \text{(F.13)}$$

onde,

$$\left[P_n\right] = \left[\begin{array}{ccccc|cccc} \cos^2\gamma_{12} & x\cos^2\gamma_{12} & y\cos^2\gamma_{12} & \mathrm{sen}^2\gamma_{12} & x\,\mathrm{sen}^2\gamma_{12} & y\cos^2\gamma_{12} & \mathrm{sen}2\gamma_{12} & x\,\mathrm{sen}\gamma_{12} & y\,\mathrm{sen}\gamma_{12} \\ \cos^2\gamma_{23} & x\cos^2\gamma_{23} & y\cos^2\gamma_{23} & \mathrm{sen}^2\gamma_{23} & x\,\mathrm{sen}^2\gamma_{23} & y\cos^2\gamma_{23} & \mathrm{sen}2\gamma_{23} & x\,\mathrm{sen}\gamma_{23} & y\,\mathrm{sen}\gamma_{23} \\ \cos^2\gamma_{31} & x\cos^2\gamma_{31} & y\cos^2\gamma_{31} & \mathrm{sen}^2\gamma_{31} & x\,\mathrm{sen}^2\gamma_{31} & y\cos^2\gamma_{31} & \mathrm{sen}2\gamma_{31} & x\,\mathrm{sen}\gamma_{31} & y\,\mathrm{sen}\gamma_{31} \end{array}\right]$$

Analogamente obtem-se $\left[P_s\right]$.

[L] e [P'] são:

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\gamma_{12} & \mathrm{sen}\gamma_{12} \\ \cos\gamma_{23} & \mathrm{sen}\gamma_{23} \\ \cos\gamma_{31} & \mathrm{sen}\gamma_{31} \end{bmatrix}$$

$$[P'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se também que:

$$\{F\} = \left\lfloor F_x \; ; \; F_y \right\rfloor^T = [P']\{\beta\} \qquad \text{(F.14)}$$

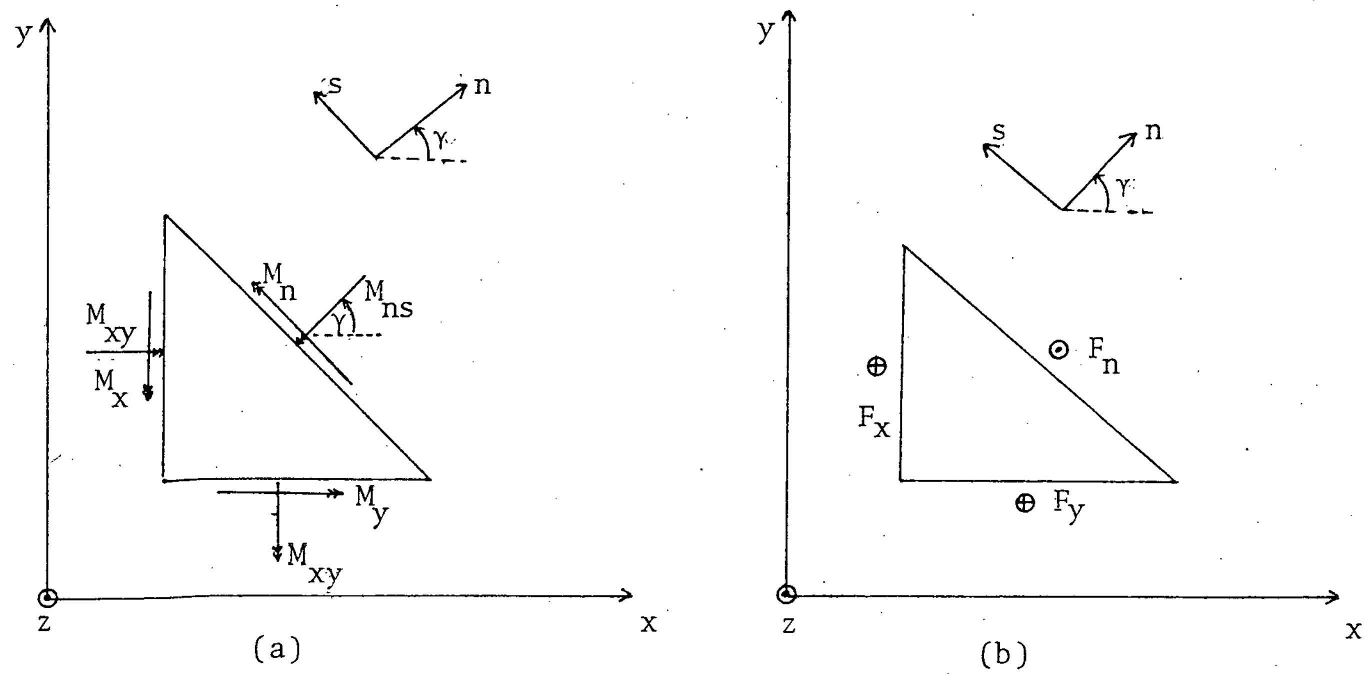


Figura F.2 - a) Notação para momentos e b) Notação para forças cisalhantes.

F.2.7 - Densidade de energia complementar

A densidade de energia complementar de flexão pode ser expressa com o uso de (F.3) por:

$$B_1\left(M_{ij}\right) = \frac{1}{2}\{M\}^T\left[C_f\right]\{M\} = \frac{1}{2}\{\beta\}^T[P]^T\left[C_f\right][P]\{\beta\} \tag{F.15}$$

E a densidade de energia complementar de cisalhamento pode ser expressa com o uso de (F.14) por:

$$B_2\left(M_{ij},_i\right) = B_2\left(F_j\right) = \frac{1}{2}\{F\}^T\left[C_s\right]\{F\} = \frac{1}{2}\{\beta\}^T[P']^T\left[C_s\right][P']\{\beta\} \tag{F.16}$$

onde,

$$\left[C_f\right] = \frac{12}{Et^3}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\left[C_s\right] = \frac{\alpha}{Gt}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

E, G, ν e t são, respectivamente, o módulo de Young, o módulo de elasticidade transversal, razão de Poisson e a espessura da placa.

O fator α em $\left[C_s\right]$ desempenha papel importante nesta formulação, pois ele é que regula a energia de deformação da placa. Testes realizados por CHANG-CHUN-WU[34] mostram que para uma placa quadrada, simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída e $\nu = 0{,}3$, um valor de $\alpha = 0{,}6$ leva a resultados semelhantes à teoria de placas de Reissner. O valor de $\alpha = 0{,}6$ é usado para todas as condições de contorno e carregamento, ao contrário de $\alpha = 1{,}2$, como citado na Referência 8. Observa-se que este controle foi necessário devido às restrições de Kirchhoff (discretas), $\theta_{x_i} = -w,_{x_i}$ e $\theta_{y_i} = -w,_{y_i}$ terem sido admitidas ao serem usadas as funções de interpolação de Hermite para a distribuição de $\tilde{w}$. Entretanto convém salientar que θ_s é diferente de $\tilde{w},_s$ ao longo de um lado do elemento. Desta forma, a deformação cisalhante transversal é mantida.

F.2.8 - Deflexões no interior do elemento

As deflexões no interior do elemento podem ser cúbicas, de maneira a concordar com $\tilde{w}$, ou lineares, de acordo com a continuidade requerida, C^0.

Admitindo-se uma variação linear para w, e se coordenadas de área forem utilizadas, obtem-se:

$$w = \{N\}^T\{a\} \tag{F.17}$$

onde $\{N\}^T = \lfloor N_1 \;;\; 0 \;;\; 0 \;;\; N_2 \;;\; 0 \;;\; 0 \;;\; N_3 \;;\; 0 \;;\; 0 \rfloor$ e N_i são coordenadas de área.

F.2.9 - Matriz de rigidez do elemento

Substituindo-se as equações de (F.3) a (F.17) em (F.2) obtem-se, em forma matricial, a expressão de Π^e, ou seja:

$$\Pi^e = -\frac{1}{2}\{\beta\}^T[H]\{\beta\} + \{\beta\}^T[G]\{a\} - \{a\}^T\{Q\} \qquad (F.18)$$

onde,

$$[H] = \iint_A \left\{ [P]^T \left[C_f\right][P] + [P']^T \left[C_s\right][P'] \right\} dA \qquad (F.19)$$

$$[G] = \oint_S \left\{ [P']^T[L]^T[\tilde{N}] + \left[P_n\right]^T\left[N_n\right] + \left[P_s\right]^T\left[N_s\right] \right\} dS \qquad (F.20)$$

$$\{Q\} = \iint_A \{N\}^T q\,dA + \int_{S_\sigma} \left\{ \left\{\bar{F}_n\right\}^T[\tilde{N}] + \left\{\bar{M}_n\right\}^T\left[N_n\right] + \left\{\bar{M}_{ns}\right\}^T\left[N_s\right] \right\} dS \qquad (F.21)$$

Fazendo-se a variação de Π^e(F.18) em relação a $\{\beta\}$ e $\{a\}$ tal que $\delta\Pi^e = 0$, obtem-se:

$$\{\beta\} = [H]^{-1}[G]\{a\} \qquad (F.22)$$

$$[K] = [G]^T[H]^{-1}[G] \qquad (F.23)$$

onde $[K]\{a\} = \{Q\}$; sendo $[K]$ a matriz de rigidez do elemento e $\{Q\}$ o vetor carga nodal equivalente.

APÊNDICE G

UMA FAMÍLIA DE ELEMENTOS MISTOS COM INCLUSÃO DA ENERGIA DE CISALHAMENTO[16 e 17]

G.1 - Resumo

São triângulos e quadriláteros isoparamétricos, têm três graus de liberdade por nodo e são formulados com o uso do funcional misto de Hellinger-Reissner.

G.2 - Formulação

A formulação é idêntica à dos elementos PLAT8H(8α) e QLR/S. O funcional de Hellinger-Reissner, Π_r, e o funcional modificado, Π_{mr}, são dados por:

$$\begin{aligned}\Pi_r &= \iint\left(\{\bar{\chi}\}^T\left[D_f\right]\{\chi\} - \frac{1}{2}\{\bar{\chi}\}^T\left[D_f\right]\{\bar{\chi}\}\right)dxdy \\ &+ \iint\left(\{\gamma\}^T\left[D_s\right]\{\phi\} - \frac{1}{2}\{\gamma\}^T\left[D_s\right]\{\gamma\}\right)dxdy \\ &- \iint q w\,dxdy \end{aligned} \qquad (G.1)$$

Π_{mr} → Equação (2.94)

onde $\{\bar{\chi}\}$ é o vetor curvaturas, e os demais símbolos são os mesmos usados para o elemento PLAT8H(8α) (Capítulo 2).

Para as curvaturas é suposto que:

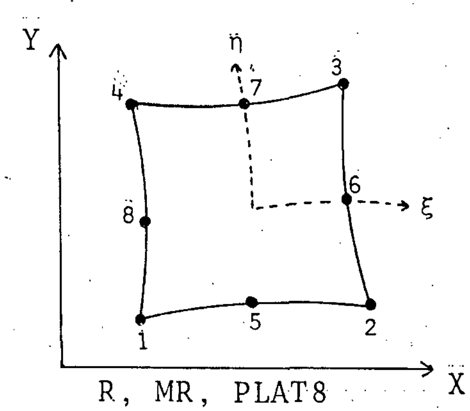
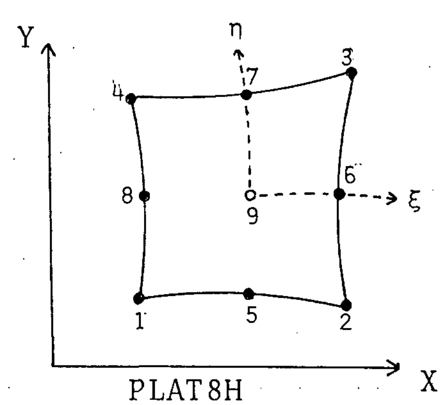
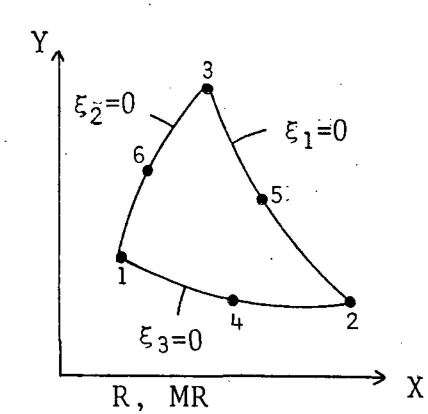
$$\{\bar{\chi}\} = \left[P_\beta\right]\{\beta\} \qquad (G.2)$$

E para as deformações cisalhantes transversais:

$$\{\gamma\} = \left[P_\alpha\right]\{\alpha\} \qquad (G.3)$$

O Quadro G.1 esclarece sobre o campo de deformações cisalhantes e/ou curvaturas usadas para os elementos.

QUADRO G.1 - RESUMO DOS ELEMENTOS

ELEMENTO	R24	MR24 PLAT8 (8α) PLAT8H (8α) (*)	MR24A PLAT8 (6α) PLAT8H (6α) (*)	PLAT8 (5α) PLAT8H (5α) (*)	R18	MR18	MR18A
FUNCIONAL	Π_r	Π_{mr}	Π_{mr}	Π_{mr}	Π_r	Π_{mr}	Π_{mr}
CAMPO PARA CURVATURAS	1, x, y, xy	-	-	-	1, x, y	-	-
CAMPO PARA DEF. CISALHANTES	1, x, y, xy	1, x, y, xy	1, x, y	1, x, y	1, x, y	1, x, y	1, x+y
NÚMERO DE PARÂMETROS α	8	8	6	5(**)	6	6	4
GEOMETRIA DO ELEMENTO							

(*) → No nodo 9 são considerados apenas os graus de liberdade de rotação.

(**) → $\gamma_{xz} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$

$\gamma_{yz} = \alpha_4 + \alpha_3 x + \alpha_5 y$

APÊNDICE H

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

H.1 - Polinomiais de Hermite

Dado um elemento(Figura H.1),

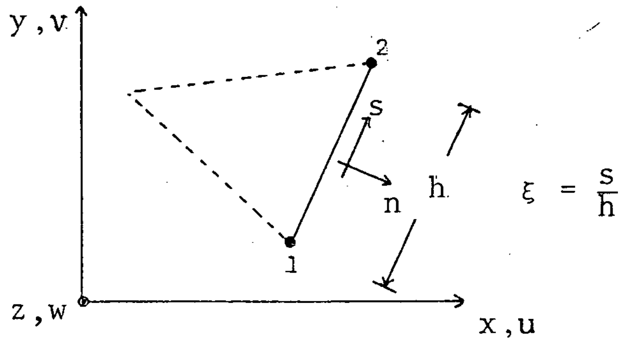


Figura H.1

uma polinomial cúbica de Hermite é dada por:

$$u(\xi) = \Phi_r Q_r \qquad (r = 1,2,3,4) \tag{H.1}$$

onde,

$$\left.\begin{array}{ll} \Phi_1 = H_{12} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & \Phi_2 = H_{21} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \Phi_3 = \bar{H}_{12} = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 & \Phi_4 = \bar{H}_{21} = \xi^3 - \xi^2 \end{array}\right\} \tag{H.2}$$

$$Q_1 = u_1 \qquad Q_2 = u_2 \qquad Q_3 = u,_\xi\big|_1 \qquad Q_4 = u,_\xi\big|_2 \tag{H.3}$$

H.2 - Funções de interpolação lagrangeanas

H.2.1 - Linear(Figura H.2)

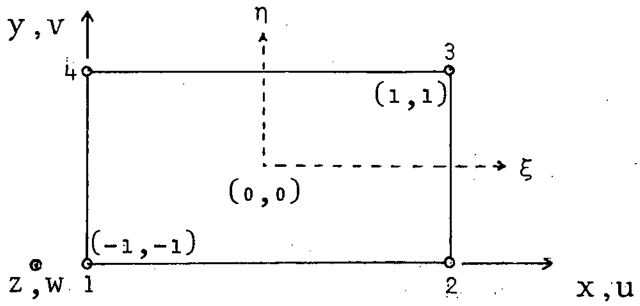


Figura H.2

$$u = \Phi_n u_n \tag{H.4}$$

$$(n = 1,2,3,4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \Phi_1 = N_1 = L_{1x}L_{1y} & \Phi_2 = N_2 = L_{2x}L_{1y} \\ \Phi_3 = N_3 = L_{2x}L_{2y} & \Phi_4 = N_4 = L_{1x}L_{2y} \end{array}\right\} \tag{H.5}$$

onde

$$L_{1x} = 1 - \xi \qquad L_{2x} = \xi \qquad L_{1y} = 1 - \eta \qquad L_{2y} = \eta \tag{H.6}$$

A matriz das funções de interpolação é dada por:

$$[N] = \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{array}\right] \tag{H.7}$$

se

$$\{u\} = \lfloor u \ ; \ v \ ; \ w \rfloor^T = [N]\{a\} \tag{H.8}$$

e

$$\{a\} = \lfloor u_1 \ ; \ v_1 \ ; \ w_1 \ ;\ldots;\ u_4 \ ; \ v_4 \ ; \ w_4 \rfloor^T$$

H.2.2 - Quadrática(Figura H.3)

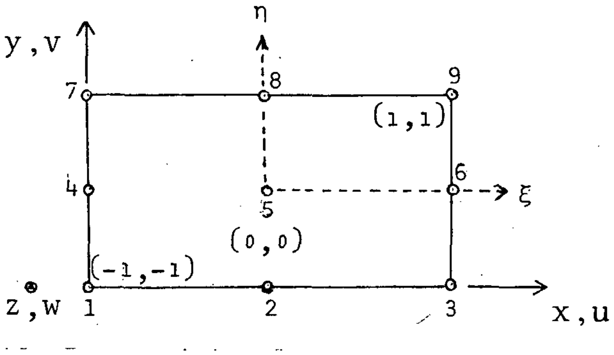


Figura H.3

$$u = \Phi_n u_n \tag{F.9}$$

$$(n = 1,2,\ldots,9)$$

$$\left.\begin{matrix} \Phi_1 = N_1 = L_{1x}L_{1y} & \Phi_2 = N_2 = L_{2x}L_{1y} \\ \Phi_3 = N_3 = L_{3x}L_{1y} \quad \cdots & \Phi_9 = N_9 = L_{3x}L_{3y} \end{matrix}\right\} \tag{H.10}$$

onde

$$\left.\begin{matrix} L_{1x} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) & L_{2x} = 1 - \xi^2 & L_{3x} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \\ L_{1y} = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1) & L_{2y} = 1 - \eta^2 & L_{3y} = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1) \end{matrix}\right\} \tag{H.11}$$

A matriz [N] das funções de interpolação é definida a nalogamente à equação (H.7).

Identicamente pode ser construída uma polinomial cúbica para um elemento de dezesseis nodos.

H.3 - Funções de interpolação serendipity

H.3.1 - Linear

São idênticas às lagrangeanas lineares.

H.3.2 - Quadrática (Figura H.4)

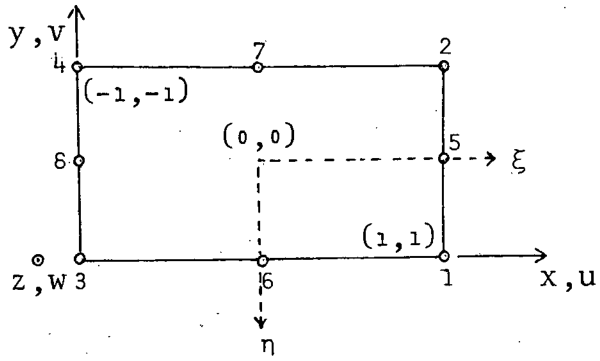


Figura H.4

$$u = \Phi_i u_i \tag{H.12}$$

$$(i = 1,2,\ldots,8)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi_i = S_i = \frac{1}{4}\left(1 + \xi\xi_i\right)\left(1 + \eta\eta_i\right)\left(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1\right) \\
(i = 1,2,3,4) \\
\Phi_i = S_i = \frac{1}{2}\left(1 + \xi\xi_i\right)\left(1 - \eta^2\right) \\
(i = 5 \text{ e } 8) \\
\Phi_i = S_i = \frac{1}{2}\left(1 + \eta\eta_i\right)\left(1 - \xi^2\right) \\
(i = 6 \text{ e } 7)
\end{array}\right\} \tag{H.13}$$

A matriz das funções de interpolação é dada por:

$$[S] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
S_1 & 0 & 0 & \ldots & S_8 & 0 & 0 \\
0 & S_1 & 0 & \ldots & 0 & S_8 & 0 \\
0 & 0 & S_1 & \ldots & 0 & 0 & S_8
\end{array}\right] \tag{H.14}$$

se

$$\{u\} = \lfloor u \; ; \; v \; ; \; w \rfloor^T = [S]\{a\} \tag{H.15}$$

e

$$\{a\} = \lfloor u_1 \; ; \; v_1 \; ; \; w_1 \; ; \ldots ; \; u_8 \; ; \; v_8 \; ; \; w_8 \rfloor^T$$

APÊNDICE I

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELA QUADRATURA DE GAUSS

Para elementos retangulares bidimensionais é tido que:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{j}\sum_{i} w_i w_j f\left(\xi_i,\eta_j\right) \qquad (I.1)$$

$$(i = 1,2,\ldots,n) \text{ e } (j = 1,2,\ldots,n)$$

onde

w_i → pesos

ξ_i, η_j → coordenadas dos pontos de integração

n → total de pontos de integração numa direção

A Figura I.1 esclarece sobre as coordenadas.

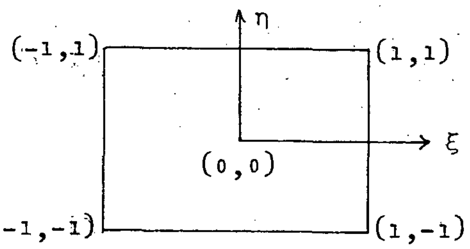


Figura I.1

A Tabela I.1 dá as coordenadas dos pontos de integração e pesos para cada ordem de integração.

TABELA I.1 - COORDENADAS E PESOS DOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO

n	i	ξ_i	w_i
1	1	0	2
2	1	$1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	1
3	1	0	8/9
	2	$\sqrt{15}/5$	5/9
	3	$-\sqrt{15}/5$	5/9
4	1	0,861 136 31	0,347 854 85
	2	-0,861 136 31	0,347 854 85
	3	0,339 981 04	0,652 145 15
	4	-0,339 981 04	0,652 145 15

APÊNDICE J

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DE GERENCIAMENTO

J.1 - Variáveis utilizadas no fluxograma

NULE → número do elemento

NELEM → número total de elementos

NP → número do ponto de integração

NPINTB → número de pontos de integração para a matriz de rigidez de flexão

NPINTC → número de pontos de integração para a matriz de rigidez de cisalhamento

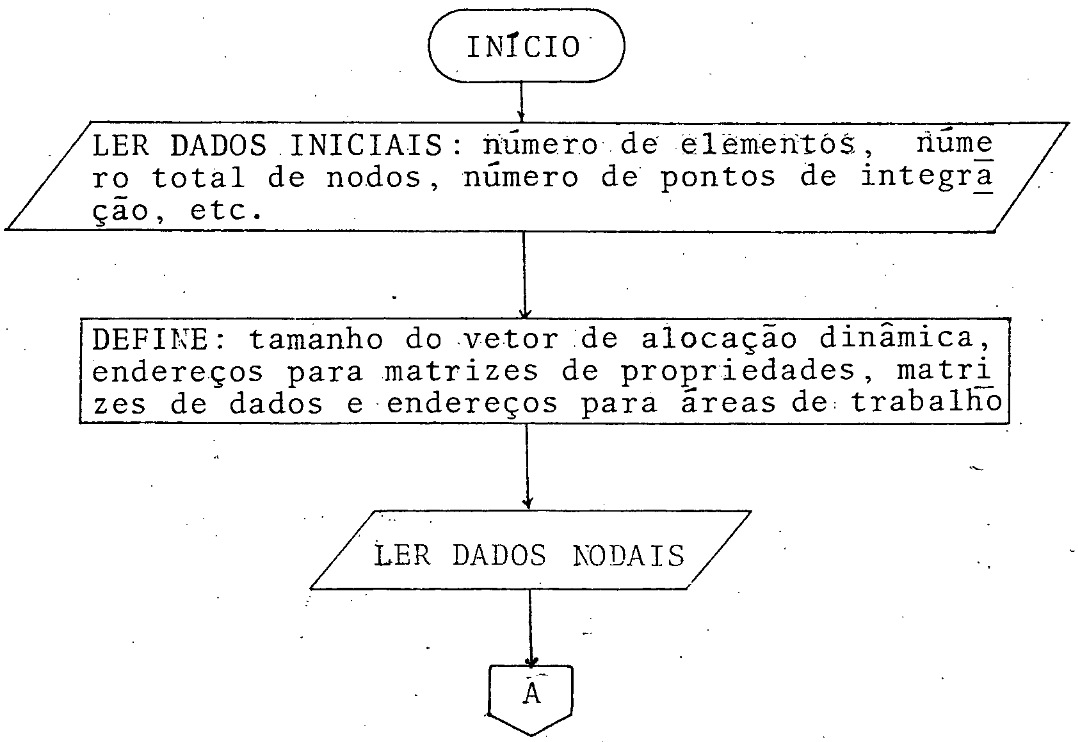
NNO → número do nodo

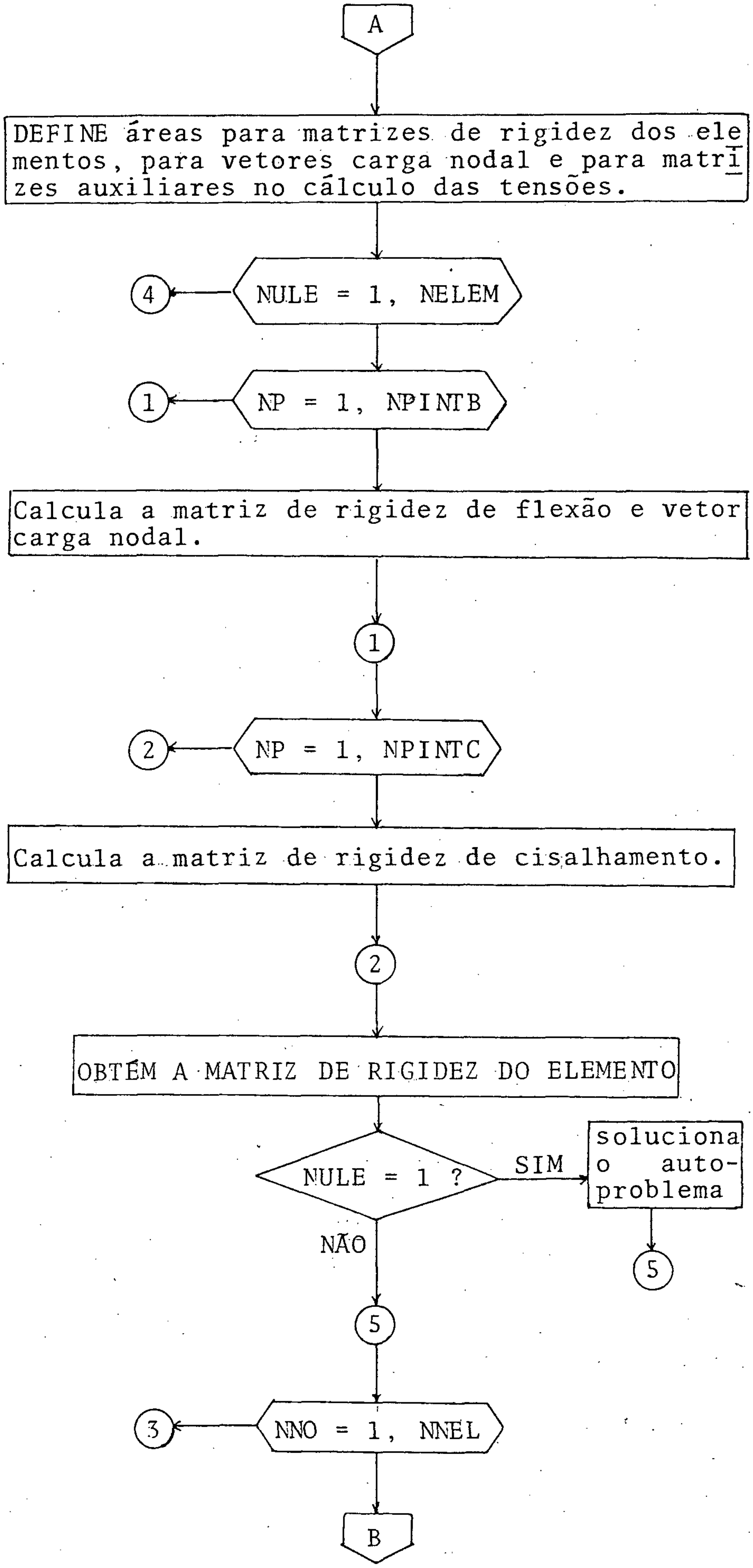
NNEL → número de nodos do elemento

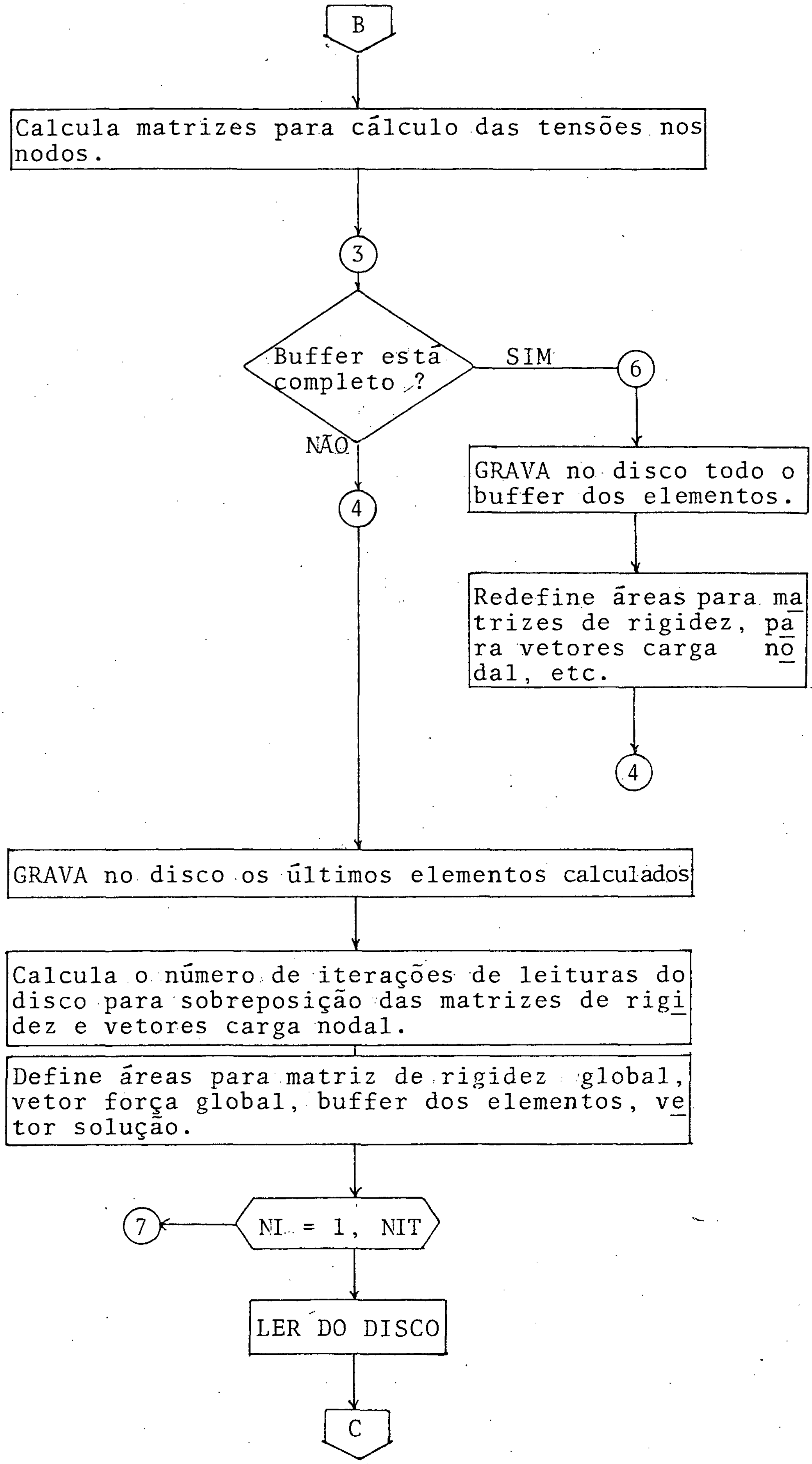
NI → número da iteração de leitura do disco

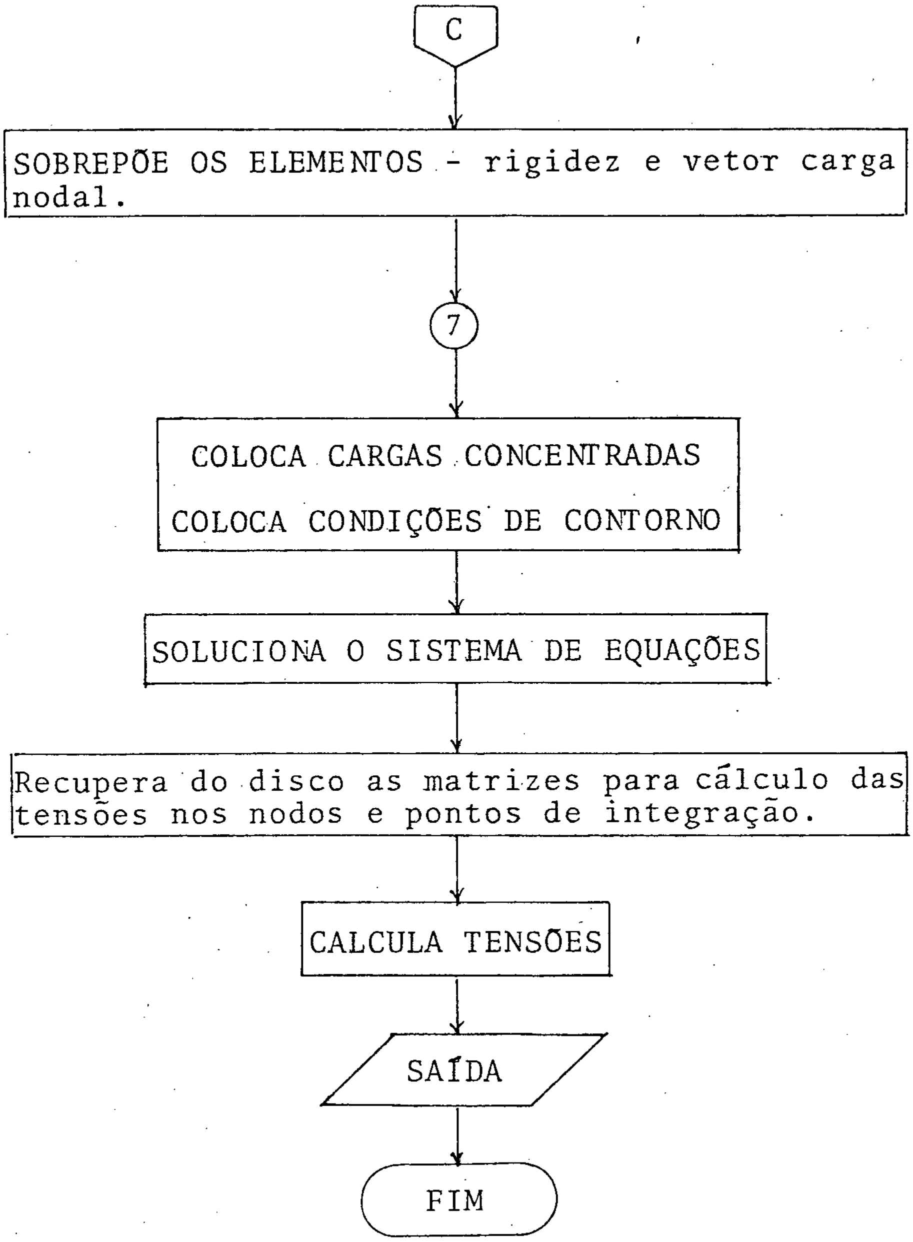
NIT → número total de iterações de leitura do disco

J.2 - Fluxograma




A
DEFINE áreas para matrizes de rigidez dos elementos, para vetores carga nodal e para matrizes auxiliares no cálculo das tensões.
4
NULE = 1, NELEM
1
NP = 1, NPINTB
Calcula a matriz de rigidez de flexão e vetor carga nodal.
1
2
NP = 1, NPINTC
Calcula a matriz de rigidez de cisalhamento.
2
OBTÉM A MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
NULE = 1 ?
SIM
soluciona o auto-problema
5
NÃO
5
3
NNO = 1, NNEL
B


B
Calcula matrizes para cálculo das tensões nos nodos.
3
Buffer está completo ?
SIM
6
GRAVA no disco todo o buffer dos elementos.
Redefine áreas para matrizes de rigidez, para vetores carga nodal, etc.
4
NÃO
4
GRAVA no disco os últimos elementos calculados
Calcula o número de iterações de leituras do disco para sobreposição das matrizes de rigidez e vetores carga nodal.
Define áreas para matriz de rigidez global, vetor força global, buffer dos elementos, vetor solução.
7
NI = 1, NIT
LER DO DISCO
C


C
SOBREPÕE OS ELEMENTOS - rigidez e vetor carga nodal.
7
COLOCA CARGAS CONCENTRADAS
COLOCA CONDIÇÕES DE CONTORNO
SOLUCIONA O SISTEMA DE EQUAÇÕES
Recupera do disco as matrizes para cálculo das tensões nos nodos e pontos de integração.
CALCULA TENSÕES
SAÍDA
FIM

BIBLIOGRAFIA

[1] BREBBIA, C. A. e CONNOR, J. J.; "Fundamentals of finite element techniques - for structural engineers", London/ Butterworths, 1975.

[2] MALKUS, David S. e HUGHES, Thomas J. R.; 'Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", Computer Meth. Applied Mech. Engng., 15, 63-81, 1978.

[3] PUGH, E. D. L., HINTON, E. e ZIENKIEWICZ, O. C.; "A study of quadrilateral plate bending elements with "reduced" integration", Int. J. Num. Meth. Engng., 12, 1059-1079, 1978.

[4] ABEL, John F., ASCE, A. M. e DESAI, Chandrakant S.; "Comparison of finite elements for plate benging", Journal of the Structural Division", Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, Nº ST9, 2143-2147, September, 1972.

[5] BATOZ, Jean-Louis e TAHAR, Mabrouk Ben; "Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element", Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1655-1677, 1982.

[6] BATOZ, Jean-Louis, BATHE, Klaus-Jürgen e HO, Lee-Wing; "A study of three-node triangular plate benging elements", Int. J. Num. Meth. Engng., 15, 1771-1812, 1980.

[7] ROBINSON, John e HAGGENMACHER, Gernot W.; "Lora - an accurate four node stress plate bending element", Int. J. Num. Meth. Engng., 14(2), 296-306, 1979.

[8] MINDLIN, R. D.; "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", Journal of Applied Mechanics, 18, 31-38, 1951.

[9] ZIENKIEWICZ, O. C.; "The finite element method", Third Edition, McGraw-Hill Book Company Limited, 1977.

[10] COOK, Robert D.; 'Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates", Int. J. Num. Meth. Engng., 5, 277-288, 1972.

[11] SPILKER, Robert L.; "Invariant eight-node hybrid-stress elements for thin and moderately thick plates" Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1153-1178, 1982.

[12] SPILKER, Robert L. e MUNIR, Nasir I.; "The hybrid-stress model for thin plates", Int. J. Num. Meth. Engng., 15, 1239-1260, 1980.

[13] SPILKER, Robert L. e MUNIR, Nasir I.; "A hybrid-stress quadratic serendipity displacement Mindlin plate bending element", Computers & Structures, Pergamon Press Limited, 12, 11-21, 1980.

[14] SPILKER, Robert L. e MUNIR, Nasir I.; "A serendipity cubic-displacement hybrid-stress element for thin and moderately thick plates", Int. J. Num. Meth. Engng., 15, 1261-1278, 1980.

[15] SPILKER, Robert L., MASKERI, S. M. e KANIA, E.; "Plane isoparametric hybrid-stress elements: invariance and optimal sampling", Int. J. Num. Meth. Engng., 17, 1469-1496, 1981.

[16] LEE, S. W. e WONG, S. C.; 'Mixed formulation finite elements for Mindlin theory plate bending", Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1297-1311, 1982.

[17] LEE, S. W. e PIAN, T. H. H.; "Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations", AIAA Journal, Vol. 16, Nº 1, 29-34, January, 1978.

[18] HUGHES, Thomas J. R. e COHEN, Martin; "The 'heterosis" finite element for plate bending", Computers & Structures, Pergamon Press Limited, 9, 445-450, 1978.

[19] BREBBIA, C. A. e FERRANTE, A. J.; "The finite element technique", Porto Alegre, Editora da URGS, 1975.

[20] CLOUGH, Ray W. e TOCHER, James L.; "Finite elements stiffness matrices for analysis of plate benging"; Proceedings of the First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR, 66-80, Air Force Flight Dynamic Lab. Wright - Patterson Air Force Base, OHIO, 515-545, 1965.

[21] TIMOSHENKO, Stephen P. e KRIEGER, S. Woinowsky-; "Theory of plates and shells", Second Edition, McGraw-Hill Book Company, 1959.

[22] PIAN, Theodore H. H. e TONG, Pin; "Basis of finite element methods for solid continua", Int. J. Num. Meth. Engng., 1, 3-28, 1969.

[23] TONG, Pin; "New displacement hybrid finite element models for solid continua", Int. J. Num. Meth. Engng., 2, 73-83, 1970.

[24] HUGHES, Thomas J. R. e MALKUS, David S.; "On the equivalence of mixed finite element methods with reduced/selective integration displacement methods", Proc. Symp. Applic. Comput. Meth. Engng., University of Southern California, Los Angeles, Vol. I, 23-32, 1977.

[25] COOK, Robert D.; "Further Improvement of an effective plate bending element", Computers & Structures, Pergamon Press Limited, 6, 93-97, 1976.

[26] COOK, Robert D.; "Avoidance of parasitic shear in plane element", Journal of the Structural Division", Nº ST6, 1239-1253, 1975.

[27] COOK, Robert D.; "Improved two-dimensional finite element", Journal of the Structural Division", Nº ST9, 1851-1863, 1974.

[28] BATHE, Klaus-Jügen e WILSON, Edward L.; "Numerical methods in finite element analysis", Prentice-Hall, Inc., 1976.

[29] CARNAHAN, Brice, LUTHER, H. A. e WILKES, James O.; "Applied numerical methods", John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[30] ALLMAN, D. J.; "A simple cubic displacement element for plate bending", Int. J. Num. Meth. Engng., 10, 263-281, 1976.

[31] HUGHES, Thomas J. R., TAYLOR, Robert L. e KANOKNUKULCHAI, Worsak; 'A simple and efficient finite element for plate bending", Int. J. Num. Meth. Engng., 11, 1529-1543, 1977.

[32] BARCELLOS, Clóvis Sperb de e ROSA, Edison de; "Sistema modular de elementos finitos", Versão/79, CNEN/UFSC, 14/79.

[33] BICANIC, N. e HINTON, E.; "Spurious modes in two-dimensional isoparametric elements", Int. J. Num. Meth. Engng., 14, 1545-1557, 1979.

[34] WU, Chang-Chun; "Some problems of a plate bending hybrid model with shear effect", Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 755-764, 1982.

[35] COOK, Robert D.; "Concepts and applications of finite element analysis", John Wiley & Sons, Inc., 1974.

[36] BRON, Jean e DHATT, Gurbachan; "Mixed quadrilateral elements for bending", AIAA Journal, Vol. 10, Nº 10, 1359-1361, 1972.

[37] HUGHES, Thomas J. R. e TEZDUYAR, T. E.; 'Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element", Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, 587-596, 1981.

[38] DAY, Michael L. e YANG, T. Y.; "A mixed variational principle for finite element analysis", Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1213-1230, 1982.

[39] PRATHAP, G. e VISWANATH, S.; "An omptimally integrated four-node quadrilateral plate bending element", Int. J. Num. Meth. Engng., 19, 831-840, 1983.

[40] BELYTSCHKO, Ted e TSAY, Chen-Shyh; "A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature", Int. J. Num. Meth. Engng., 19, 405-419, 1983.

[41] HERRMANN, L. R.; "A bending analysis for plates", Proceedings of the First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR, 66-80, Air Force Flight Dynamic Lab. Wright - Patterson Air Force Base, OHIO, 577-604, 1965.

[42] TONG, Pin; "A family of hybrid plate elements", Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1455-1468, 1982.

[43] NEALE, B. K., HENSHELL, R. D. e EDWARDS, G.; 'Hybrid plate bending elements", Journal of sound and vibration, 23(1), 101-112, 1972.

[44] COOK, Robert D. e ZHAO-HUA, Feng; "Control of spurious modes in the nine-node quadrilateral element", Int. J. Num. Meth. Engng., 18, 1576-1580, 1982.