UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

UM ALGORITMO PARA MINIMIZAR ERROS EM MODELOS LINEARES INSTÁVEIS

CLEIDE REGINA LENTZ PALADINI

NOVEMBRO - 1985

UM ALGORITMO PARA MINIMIZAR ERROS EM MODELOS
LINEARES INSTÁVEIS

POR

CLEIDE REGINA LENTZ PALADINI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

ESPECIALIDADE EM MATEMÁTICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA.

Prof. William Glenn Whitley, Ph.D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Plínio Stange, Dr.

Prof. Gur Dial, Ph.D.

Prof. Adalberto Luiz Verani Depizzolatti, Dr.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Plinio Stange, por sua competente e objetiva orientação;

Ao Professor Milton Luiz Valente, por sua presença sempre constante e positiva;

Ao Professor Nilo Kuelkamp, pela orientação acadêmica;

Ao Edson, pela paciência e compreensão que sempre me dedicou ao longo do desenvolvimento deste trabalho, pelo apoio e incentivo constantes;

À Emanuele Regina que, em muitos momentos, devido ao empenho que este trabalho exigia, não teve a atenção que merecia.

Ao Edson

RESUMO

Este trabalho apresenta um algorítmo alternativo para resolver modelos básicos de programação linear, que apresentam instabilidade numérica quando são efetuadas operações com as matrizes que os compõem, objetivando minimizar os erros gerados por tais operações.

Para tanto, utiliza-se a decomposição de matrizes em valores singulares e sua aplicação no cálculo da inversa de uma matriz.

Mostram-se resultados de várias aplicações, onde podem ser vistas as vantagens do algorítmo quando comparado com o simplex usual.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1.1 - ESTABILIDADE EM ANÁLISE NUMÉRICA

Considerem-se problemas do tipo:

(1) $F(x,y)=0$

onde x é uma variável desconhecida e y é uma variável dada da qual x depende.

Diz-se que o problema (1) é estável se a solução x depende de modo contínuo da variável y; isto é, se $\{y_n\}$ é uma sequência de valores tendendo para y os valores associados da solução $\{x_n\}$ tendem para x. Ou, equivalentemente; pequenas distâncias* a y implicam em pequenas distâncias a x. Problemas estáveis são também chamados problemas bem-condicionados e usam-se os dois termos indistintamente. Se o problema não é estável, é chamado instável ou mal-condicionado.

1.2 - EXEMPLOS

1. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1{,}01x_2 = 2{,}01 \end{cases}$$

Aqui $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}01 \end{bmatrix}$ e o sistema

possui a solução exata $x_1 = x_2 = 1$

Por outro lado, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 1{,}001x_1 + x_2 = 2{,}01 \end{cases}$$

possui a solução $x_1 = 10$ e $x_2 = -8$.

Portanto, a valores próximos de y estão associados va-

---

* *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d: M \times M \to R$, que associa a cada par ordenado de elementos $x,y \in M$ um número real $d(x,y)$, chamado a distância de x a y.*

lores distantes da solução x. Logo a solução x não depende continuamente de y; conclui-se que este problema é instável ou mal-condicionado.

Existem muitos problemas que são estáveis no sentido dado anteriormente, mas cuja resolução é muito trabalhosa, exigindo que se apliquem cálculos numéricos, os quais comprometem sua estabilidade, como se vê no exemplo abaixo. Ver ref [11].

2. Considere a matriz não-singular

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n+1 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n+1 & 1/n+2 & 1/n+3 & \cdots & 1/2n+1 \end{bmatrix}$$

chamada matriz de Hilbert. O problema de encontrar a inversa de Y é um problema estável. A matriz inversa Y^{-1} pode ser obtida por um número finito de passos usando apenas operações aritméticas simples; mas, à medida que n cresce, o problema se torna muito trabalhoso, exigindo assim o auxílio de um computador; é aí que o problema se torna mal-condicionado. Ao dar-se entrada da matriz Y em um computador o mesmo arredondará os elementos de Y transformando-a na matriz $\hat{Y}$, a qual apresentará erros relativos em torno de 10^{-6} em cada um de seus elementos (supondo-se que se use um computador IBM 360 que armazene a matriz de entrada usando um Format ponto flutuante de precisão simples).

Usando maiores precisões numéricas, pode-se calcular um valor mais exato de $\hat{Y}^{-1}$. A inversa Y^{-1} é conhecida analiticamente, e pode-se compará-la com $\hat{Y}^{-1}$. Por exemplo, para n=6 alguns dos elementos de $\hat{Y}^{-1}$ já no primeiro dígito não nulo diferem do seu correspondente de Y^{-1}. Os elementos na linha 6, coluna 2, são:

$$(y^{-1})_{6,2} = 83\ 160{,}00 \quad \text{e} \quad (\hat{y}^{-1})_{6,2} = 73866{,}34$$

Isto torna o cálculo de Y^{-1} um problema mal condicionado, sendo que esse mal-condicionamento aumenta à medida que n cresce.

O presente trabalho visa estudar problemas mal-condicionados do tipo do exemplo 2, mais especificamente em problemas de programação linear.

CAPÍTULO II - DECOMPOSIÇÃO DE UMA MATRIZ EM VALORES SINGULARES

2.1 - INTRODUÇÃO

Listam-se abaixo, alguns conceitos e resultados de álgebra linear que são utilizados neste trabalho. Nenhum esforço é feito para apresentar uma sequência lógica destes dados, pois a intenção é introduzir brevemente alguns conceitos e resultados que estão diretamente relacionados com o trabalho. Para um estudo mais detalhado ver referências [2] ,[3] e [7]

2.1.1 - Sistema de equações e determinantes de uma matriz A de ordem n:

det $A=\Delta \neq 0$	det $A=0$
Existe uma única matriz inversa A^{-1} tal que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.	Não existe uma matriz inversa A^{-1}.
Toda equação $Ax = b,\ b \neq 0$ tem uma solução.	Qualquer equação $Ax=b,\ b \neq 0$ não tem solução.
A única solução de $Ax = 0$ é $x = 0$.	Existem soluções de $Ax=0$, com $x \neq 0$.
A solução para toda equação $Ax=b$ é única.	A solução de $Ax=b$ nunca é única. Se existir qualquer solução x, existirá outra solução $x_1 \neq x$.
Posto $A=n$.	Posto $A<n$.

2.1.2 - Autovalores e Autovetores

Definição: Se A é uma matriz quadrada de ordem n, definem-se como autovalor de A os números λ para os quais a equação característica $Ax=\lambda x$ tem uma solução $x \neq 0$, o vetor x é chamado autovetor associado ao autovalor λ.

Teorema 2.1.1: O número λ é um autovalor de uma matriz quadrada A se e somente se $\det(A-\lambda I)=0$.

Teorema 2.1.2: Seja A uma matriz de ordem n com n autovalores distintos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Então A tem correspondentemente n autovetores $x_1,\ldots,x_n$ linearmente independentes. Além disso, o autovetor x_j associado ao autovalor λ_j é único ou apenas um múltiplo escalar deste.

Definição: Duas matrizes A e B de ordem n são chamadas equivalentes se existe uma matriz T com $\det T \neq 0$ tal que:

$$T^{-1}AT=B$$

Teorema 2.1.3: Matrizes equivalentes têm os mesmos autovalores com a mesma multiplicidade.

Teorema 2.1.4: Uma matriz A de ordem n é equivalente a uma matriz diagonal se e somente se A tem n autovetores linearmente independentes. Isto é, A é equivalente a uma matriz diagonal se A tem n autovalores distintos.

Definição: Dada uma matriz A qualquer a adjunta de A é definida como sendo $A^*=\bar{A}^t$ (é a matriz transposta da conjugada de A).

Definição: A matriz A de ordem n é dita ortogonal se $A^tA=AA^t=I_n$ (matriz identidade de ordem n).

Definição: Uma matriz de ordem n é dita simétrica se $a_{ij}=a_{ji}$ para todo i e j.

Definição: Uma matriz A de ordem n é dita hermitiana se $A = A^*$.

Teorema 2.1.5: Os autovalores de uma matriz hermitiana são reais, e os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Este teorema mostra que, se $A = A^*$ tem autovalores distintos, então A pode ser diagonalizada pela matriz ortogonal U de seus autovetores, associados aos n autovalores distintos, i.é

$$U^{-1}AU = U^*AU = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Teorema 2.1.6: Seja A uma matriz hermitiana de ordem n, com autovalores $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$.

Então A tem n autovetores unitários mutuamente ortogonais $u_1, \ldots, u_n$, com

$$Au_j = \lambda_j u_j \quad (j = 1, \ldots, n) \quad \text{e } U^*AU = \Lambda,$$

onde U é a matriz ortogonal com colunas $u_1, \ldots, u_n$ e $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Um estudo da demonstração deste teorema, mostra que, se A é real, nunca aparecerão números complexos, uma vez que os autovalores são reais. A matriz U ,que diagonaliza A, terá todas as componentes reais. Assim, temos:

Teorema 2.1.7: Se A é uma matriz simétrica real, existe uma matriz ortogonal U , para a qual U^tAU é a matriz diagonal Λ formada pelos autovalores de A.

Definição: Define-se a norma de uma matriz A como sendo:

$$||A|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(norma da máxima}$$

soma por linha).

Definição: Seja A uma matriz não-singular. Define-se o número de condição de A, anotado cond(A), como sendo o número dado por $||A|| \cdot ||A^{-1}||$. Para a norma euclidiana observa-se que: $||A|| = \mu_1$ e $||A^{-1}|| = \mu_n^{-1}$ onde μ_1 é o maior valor singular de A e μ_n é o menor. Desta forma:

$$\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \mu_1/\mu_n \geqslant 1$$

Definição: Uma matriz A quadrada é dita não-singular se $\Delta \neq 0$ (determinante de A for não-nulo).

Definição: Uma matriz simétrica real A é dita definida positiva se sua forma quadrática associada

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

for positiva definida.

Definição: Uma forma quadrática é dita não negativa definida se tomar somente valores não negativos quando se atribuem valores reais arbitrários a $x_1, x_2, \ldots x_n$. Uma forma quadrática definida não negativa que toma o valor zero somente quando $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ é chamada definida positiva.

2.2 - DECOMPOSIÇÃO DE UMA MATRIZ EM VALORES SINGULARES

Teorema 2.2.1: Seja A uma matriz não-singular de ordem n. Então existem duas matrizes ortogonais U e V de ordem n e uma matriz diagonal S de ordem n, tais que:

(1) $S = U^t AV$ ou $A = USV^t$ e os elementos da diagonal

estão em sucessão não crescente, i.é

$$s_{i,i} \geq s_{i+1,\, i+1} \quad (\text{ou } s_i \geq s_{i+1})$$

Demonstração: A matriz simétrica definida positiva A^tA tem a seguinte decomposição autovalor autovetor

(2) $A^tA = V\,DV^t$,

onde V é uma matriz ortogonal (matriz dos autovetores de A^tA) e D é uma matriz diagonal (matriz dos autovalores de A^tA) cujos elementos da diagonal são positivos não crescentes.

Seja S uma matriz diagonal de ordem n cujos elementos da diagonal são as raízes quadradas dos elementos respectivos de D.

Assim:

(3) $D = S^tS = S^2$

e

(4) $S^{-1}\,DS^{-1} = I_n$

Seja uma matriz U de ordem n dada por:

(5) $U = AVS^{-1}$

De (2), (4) e (5) e do fato que V é ortogonal,

(6) $U^tU = S^{-1}V^tA^tAVS^{-1} = S^{-1}DS^{-1} = I_n$

Portanto U é ortogonal

De (5) e do fato que V é ortogonal

(7) $USV^t = AVS^{-1}SV^t = AVV^t = A$,

como queríamos.

Embora não sendo um resultado a ser utilizado no presen te trabalho, observe-se que o teorema (2.2.1) apresenta uma generalização cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 2.2.2: Seja A uma matriz de ordem m x n e posto k. Então existem duas matrizes ortogonais U de ordem m e V de ordem n e uma matriz diagonal S de ordem m x n, tal que:

(8) $U^tAV = S$ ou $A = USV^t$,

onde os elementos da diagonal de S podem ser arranjados em ordem não crescente e exatamente k deles são estritamente positivos.

Demonstração: (ver ref. [8] , pág.20)

Sabe-se, através da álgebra linear, que uma dada matriz A de ordem m x n é equivalente a uma matriz B do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1_{kxk} & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{bmatrix}_{m\ x\ n}$$

, onde k= posto A,

Se existirem matrizes não-singulares P de ordem m e Q de ordem n tais que

$$B = PAQ$$

Comparando-se este resultado com o que estabelece o teorema (2.2.1), nota-se que no teorema P e Q foram substituídas pelas matrizes ortogonais U e V^t e B foi substituída pela matriz diagonal S. Para fins computacionais, a decomposição em valores singulares é bem mais útil, pois a multiplicação de um vetor por matrizes ortogonais preserva comprimentos ($||Ux||= ||x||$, onde U é uma matriz ortogonal),ao passo que a multiplicação de um vetor por matrizes não-singulares gerais pode alterá-los bastante.

Seja A de ordem n, a representação matricial de uma transformação linear T de um espaço n-dimensional X sobre um segundo espaço semelhante Y, isto é, y= Ax está em Y para todo x em X.

Observe-se que, na representação matricial da transformação linear T, pela matriz A, supõe-se que ambos os espaços X e Y sejam dados em coordenadas ortogonais. Faz-se então uma troca de coordenadas ortogonais em X, onde o vetor x obtém a nova representação x', tal que x= Vx' e uma troca de coordenadas ortogonais em Y obtendo-se y' como a nova representação de y tal que y= Uy' (aqui U e V são as matrizes do teorema 2.2.2).

Resulta desta troca de bases em X e Y uma nova representação matricial para T, dada por:

$$y' = U^t y = U^t Ax = U^t A(Vx') = (U^t AV)x' = Dx',$$

ou seja: $y' = Dx'$

Em termos de componentes, esta nova representação é:

$$\begin{aligned} y_1' &= \mu_1 x_1' \\ y_2' &= \mu_2 x_2' \\ &\vdots \\ y_k' &= \mu_k x_k' \\ y_{k+1}' &= 0 \\ &\vdots \\ y_n' &= 0 \end{aligned}$$

Desta forma, a transformação T apenas relaciona o primeiro eixo coordenado de X com o primeiro eixo coordenado de Y por meio de um fator de significância $\mu_1 > 0$. Acontece o mesmo com o 2º, 3º, ...,k-ésimo eixos coordenados com os respectivos fatores de significância μ_2 ,..., μ_k . Os (k + 1), ..., n-ésimos eixos coordenados de X estão relacionados com o vetor zero de Y.

Vê-se, então, que a decomposição de uma matriz A em valor singular é simples e eficiente para fins computacionais. Esta afirmação é comprovada no cálculo de inversão de matrizes e, conseqüentemente, na busca da solução de um PPL, ainda neste trabalho.

Sendo A^t a transposta de A, tem-se:

$$D^tD = (U^tAV)^t\ (U^tAV) = V^tA^tUU^tAV = V^tA^tAV$$

Assim $V^t(A^tA)V = D^tD$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_k^2$, $0, \ldots, 0$; como V é ortogonal, $V^t = V^{-1}$ e então a transformação $V^t(A^tA)V$ preserva os autovalores de A^tA, os quais são μ_1^2, $\mu_2^2, \ldots, \mu_k^2, 0, \ldots, 0$. Conclui-se então que os valores singulares de uma matriz A são as raízes quadradas dos autovalores de A^tA.

Ainda tem-se que:

Se $A = USV^t$ é a decomposição em valores singulares da matriz A, onde $UU^t = U^tU = I_n$, $VV^t = V^tV = I_n$ e $S^tS = D$ então

$$AA^t = (USV^t)(VS^tU^t) = USS^tU^t = UDU^t.$$

Logo U é a matriz dos auto vetores de AA^t.

Portanto, se $A = USV^t$ é a decomposição em valores singulares da matriz A, então U é uma matriz ortogonal formada pelos autovetores de AA^t, V é uma matriz ortogonal formada pelos autovetores de A^tA e S é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são as raízes quadradas dos autovalores de A^tA.

Observe-se que sendo A uma matriz não-singular também S o será.

2.3 - EXEMPLOS

Para ilustrar os resultados do teorema (2.2.1), apresentam-se três exemplos no anexo 1.

CAPÍTULO III - INVERSÃO DE MATRIZES

Definição: Uma matriz A de ordem n é dita uma matriz inversível se existe uma matriz A^{-1} de ordem n tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

onde I é a matriz identidade de ordem n.

3.1 - DETERMINAÇÃO DA INVERSA DE UMA MATRIZ USANDO A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES. (Método DVS)

Teorema 3.1 - Se A é uma matriz inversível de ordem n e $A = USV^t$ é a decomposição em valores singulares de A (conforme teorema 2.2.1), então a inversa de A é a matriz

$$A^{-1} = VS^{-1}U^t$$

onde, $S^{-1} = \text{diag}(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1})$.

Demonstração:

De fato:

$$A^{-1}A = (VS^{-1}U^t)(USV^t) = VS^{-1}(U^tU)SV^t =$$
$$= V(S^{-1}S)V^t = VV^t = I,$$
$$AA^{-1} = (USV^t)(VS^{-1}U^t) = US(V^tV)S^{-1}U^t =$$
$$= U(SS^{-1})U^t = UU^t = I.$$

Portanto: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Mostram-se alguns exemplos no anexo 2:

3.2 - MÉTODO DA ELIMINAÇÃO

Teorema 3.2: Se A é uma matriz de ordem n inversível e se uma sequência de operações elementares sobre linhas reduz A à matriz identidade I, então aquela mesma sequência de operações elementares sobre linhas quando aplicadas a I produz A^{-1}.

Demonstração: Ver ref [4] e [7]

O método da elminação proposto no teorema 3.2, pode ser esquematizado como segue:

a) Parte-se da matriz aumentada, que tem a forma $[A,I]$ onde, se A tem ordem n, I será a matriz identidade de ordem n.

b) Inicialmente, normaliza-se a primeira coluna da matriz aumentada, dividindo-se seus elementos por a_{11} (pivô). Assim, tem-se para $j= 1,2,\dots,2n$

$$a^1_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

Aqui, o índice superior 1 indica a nova linha.

Observe-se que $a^1_{11} = 1$ é o primeiro elemento da matriz identidade.

c) A seguir, reduzem-se os demais elementos da coluna 1 a zero por meio de uma sequência de operações representadas por

$$a^1_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\, a^1_{1j}, \qquad \begin{array}{l} i= 2,3,\dots,n \\ j= 1,2,\dots,2n \end{array}$$

Ao final desta etapa ter-se-á:

$$\begin{bmatrix} 1 & a^1_{12} \cdots\cdots & a^1_{1n} & 1/a_{11} & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & a^1_{22} \cdots\cdots & a^1_{2n} & -a_{21}/a_{11} & 1 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & a^1_{nn} & -a_{n1}/a_{11} & 0 \cdots\cdots 1 \end{bmatrix}$$

d) Passa-se à normalização da 2ª coluna, como segue:

$$a^2_{2j} = \frac{a^1_{2j}}{a^1_{22}} \qquad , \; j= 2,3,\ldots,2n$$

$$a^2_{ij} = a^1_{ij} - a^1_{i2}\, a^2_{2j} \quad , \quad \begin{array}{l} i= 1,3,4,\ldots,n (i \neq 2) \\ j= 2,3,\ldots,2n \end{array}$$

Agora as duas primeiras colunas da matriz $[A,I]$ assumem a forma das primeiras colunas da identidade.

e) Passando-se às demais linhas, chega-se ao final de n etapas a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & a^n_{11} & a^n_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots a^n_{1n} \\ 0 & 1 \ldots\ldots\ldots 0 & a^n_{21} & a^n_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a^n_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1 & a^n_{n1} & a^n_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots a^n_{nn} \end{bmatrix}$$

Neste último quadro:

1. As n primeiras linhas e colunas contêm a identidade;
2. A partir da coluna (n + 1) (metade direita da matriz) tem-se a matriz inversa, ou seja,

$$A^{-1} = \left[a^n_{ij}\right] \quad , \quad \begin{array}{l} i= 1,2,\ldots,n \\ j= n+1,\ n+2,\ldots 2n \end{array}$$

Desta forma, utilizam-se, ao longo de n etapas, os seguintes cálculos:

para $k = 1,2,\ldots n$,

calcula-se:

$$a^k_{kj} = a^{k-1}_{kj} \Big/ a^{k-1}_{kk} \qquad j= k,k + 1,\ldots,2n$$

$$a^k_{ij} = a^{k-1}_{ij} - a^{k-1}_{ik} \quad a^k_{kj} \qquad i= 1,\ldots,n \ (i \neq k)$$

3.2.1 - Exemplo

Considere-se o exemplo:

Determinar a inversa de

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/45 & -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 & 1/6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & -9 & 60 & -60 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

3.3 - ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS DE INVERSÃO DVS E ELIMINAÇÃO

Com a finalidade de proceder à análise do processo de inversão de matrizes utilizando-se a decomposição em valores singulares, procedeu-se a um estudo comparativo deste método com o da eliminação, anteriormente exposto.

Para tanto, foi utilizado o algoritmo DVS para a inversão de matrizes, cujo esquema geral é o seguinte:

1. Leia a matriz A;
2. Decomponha A em valores singulares, encontrando-se U, S e V^t;
3. Determine S^{-1} tal que

$$s_{ij}^{-1} = s_{ij} \quad \text{se } i \neq j$$

$$s_{ij}^{-1} = 1/s_{ij} \quad \text{se } i = j;$$

4. Determine U^t e V
5. Faça o produto $V.S^{-1}.\ U^t = A_1^{-1}$
6. Calcule $A_1^{-1} A$ e $A\ A_1^{-1}$

Da mesma forma, utilizando-se um algoritmo que aplica o método da eliminação em A, encontra-se A_2^{-1} e calcula-se $A_2^{-1} A$ e AA_2^{-1} .

Sendo I a matriz de mesma ordem dos produtos, proceder-se-á como segue:

1. Para cada algoritmo, calcule $I_e = A^{-1}A$ (identidade à

esquerda) e $I_d = AA^{-1}$ (identidade à direita);

2. Para cada algoritmo calcule $(DIF)_{ij}$, matriz diferença:

$$(DIF)_{ij} = \left[(I_e)_{ij} - (I_d)_{ij}\right] ;$$

3. Aplique a norma da máxima soma de linhas sobre $(DIF)_{ij}$. Compare com zero;

4. Determine, para cada algoritmo, $(DIF)_e$ e $(DIF)_d$ tal que

$$(DIF_e)_{ij} = \left[(I_e)_{ij} - (I)_{ij}\right] \text{(diferença à esquerda)}$$

$$(DIF_d)_{ij} = \left[(I_d)_{ij} - (I)_{ij}\right] \text{(diferença à direita)}$$

5. Aplique a norma da máxima soma de linhas sobre $(DIF_e)_{ij}$ e $(DIF_d)_{ij}$. Compare com zero.

Considera-se o seguinte:

O melhor algoritmo será o que apresentar menores valores das quatro normas citadas.

Na prática, verifica-se que $I_e = I_d$.

Daí, utilizar-se-ão como padrão de comparação as normas aplicadas às matrizes (DIF_d) calculadas em cada algorítmo.

Apresenta-se, a seguir, um exemplo preliminar.

Seja a seguinte matriz

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 7 & 3 & 1 \\ 50 & 45 & 40 & 22 & 145 \\ 123 & 33 & 35 & 54 & 40 \\ -60 & -53 & 76 & 20 & 30 \\ 46 & 56 & 20 & 45 & 11 \end{bmatrix}$$

Ao aplicar-se o método da eliminação para determinar M^{-1}, observa-se, na listagem, que no passo 2 do algoritmo foram gerados números muito grandes em módulo. Para se ter idéia destes valores, eles são apresentados de forma especial na própria listagem que encontra-se no anexo 3.

Tais números geram forte instabilidade no algoritmo de eliminação de forma a afetar significativamente o resultado final, gerando uma inversa que produz, quando multiplicada pela matriz original, uma matriz muito diferente da identidade, fato atestado pelo cálculo da norma da máxima soma da matriz diferença, cujo valor foi de 11,692.

Isto mostra que este algoritmo é ineficiente para determinar a inversa desta matriz M que parece ser bastante simples.

Já utilizando-se o método DVS tal problema não acontece. Como a matriz é simples, as matrizes U, S e V são de fácil cálculo, reproduzindo com exatidão a matriz dada quando se efetua o produto $U.S.V^t$. Assim a inversa obtida reproduz, quando multiplicada pela matriz original, a identidade exata, como se pode ver pela norma resultante, cujo valor é zero.

Este exemplo mostrou a eficiência do método DVS para o cálculo de inversa de matrizes.

Tal eficiência foi testada em muitos outros exemplos. A tabela a seguir resume 59 casos dentre os estudados. Aqui, nota-se que o método DVS é melhor em 54 deles; em 4 o método da elimin ação é melhor (porém, é muito pouco melhor, pois a norma DVS também é pequena) e há 1 empate.

Nesta amostra, o método DVS foi melhor - para fins de inversão de matrizes - em 91,5% dos casos. No anexo 5 deste trabalho, encontra-se a listagem dos exemplos 2, 3, 19, 23, 24, 36, 43, 51, 55 e 56, nesta ordem.

Exemplo	Ordem da matriz	Número de condição da matriz A	Determinante de A	$\|\|AA^{-1} - In\|\|$ - método DVS -	$\|\|AA^{-1} - In\|\|$ -Método Eliminação-	Melhor método
33	3	1,126428	$0,879711400951318939 \times 10^{12}$	0,00	0,0000001788	DVS
13	3	1,705885389164517	$-0,543939192122442381 \times 10^{27}$	0,00	0,0000001387	DVS
6	3	3,051143692789270	$-0,142553634043342023 \times 10^{15}$	0,00	0,0000012168	DVS
31	2	3,955371326569143	8,85	0,00	0,0000013881	DVS
15	2	5,429556792382154	$0,380663255895319786 \times 10^{11}$	0,00	0,0000105526	DVS
9	3	6,924931257855226	0,344529175996628023	0,0000003256	0,0000064161	DVS
21	3	8,695965	$-0,121831904056618150 \times 10^{6}$	0,00	0,0000005855	DVS
29	3	9,464585	$0,378669840572344585 \times 10^{22}$	0,00	0,0000004789	DVS
51	6	32,761879145862842	$-0,227152598288294980 \times 10^{28}$	0,00	0,0000348181	DVS
12	4	44,071190469558655	$0,227198250699097102 \times 10^{2}$	0,00	0,0000062962	DVS
17	3	52,209349546795927	$0,3893837357327743 \times 10^{17}$	0,0000005767	0,0000003576	Eliminação
32	3	55,707978	-0,101838857147793838	0,00	0,0000021761	DVS
49	5	77,3301910293839100	$0,307886995981789705 \times 10^{22}$	0,0000001947	0,0024279437	DVS
26	10	96,158534	$0,425334619709617532 \times 10^{38}$	0,0000000209	0,0046485290	DVS
20	3	113,049081694270765	$0,3930954446006254 \times 10^{12}$	0,0000002489	0,0000032009	DVS
36	8	113,495245	1,	0,00	0,00	Empate
50	5	165,980421207081129	$0,840729639542840310 \times 10^{3}$	0,0000002775	0,0000217807	DVS
53	10	201,115917203218533	$-0,281809396072500825 \times 10^{47}$	0,0000053959	0,0000267885	DVS
38	2	402,007512	0,01	0,00	0,0000115335	DVS
5	3	410,227350880596191	$-0,870450025093316197 \times 10^{9}$	0,00	0,0000013209	DVS
16	4	591,007918035504645	$-0,23251511438307754 \times 10^{20}$	0,0000000013	0,0000463700	DVS
37	30	690,200409	1,4995377787	0,0007168353	0,0004190807	Eliminação
30	3	1006,523405	$0,396747156959188616 \times 10^{24}$	0,00	0,0000633931	DVS
4	4	1212,71716501605584	$0,260261121564254089 \times 10^{12}$	0,0000000002	0,0000064849	DVS
59	3	1441,00400011351684	0,999999805	0,0000000001	0,0001411041	DVS
27	15	2737,398185	$0,559225908317744870 \times 10^{53}$	0,0000001844	0,0009364660	DVS
54	6	3696,17461501957928	$-0,750987009294543840 \times 10^{17}$	0,00	0,0000215180	DVS
40	4	15513,742099	0,000000165	0,0000007379	0,0003631152	DVS
7	3	18850,5575133784569	$0,120767675757611671 \times 10^{23}$	0,00	0,0016494982	DVS
19	5	21021,0104285168127	$0,400076761291244970 \times 10^{17}$	0,0000291857	0,0000099955	Eliminação
8	9	31017,9448117941974	$-0,723700557733226211 \times 10^{76}$	0,0009258263	0,0547977351	DVS
22	3	35901,204421	$0,317012754007214544 \times 10^{18}$	0,0000000004	0,0075875632	DVS
3	5	36239,9934161113461	$0,152396888558090313 \times 10^{42}$	0,0011144249	0,5284839869	DVS

Exemplo	Ordem da matriz	Número de condição da matriz A	Determinante de A	$\|\|AA^{-1} - In\|\|$ - Método DVS -	$\|\|AA^{-1} - In\|\|$ -Método Eliminação-	Melhor Método
57	2	39205,9999744713286	$-0,1 \times 10^{3}$	0,00	0,0019307649	DVS
58	2	39205,9999744839060	-1,00	0,00	0,C041090250	DVS
2	5	48951,6672528392419	$0,836497165216727683 \times 10^{41}$	0,0007992149	0,4185907841	DVS
34	3	62394,378310	$0,19738195198616143 \times 10^{8}$	0,0000000002	0,1892843843	DVS
10	4	65321,0806137035424	$-0,174917222110818828 \times 10^{28}$	0,00	0,0000026991	DVS
11	5	73718,7045236941485	$-0,109412966944513329 \times 10^{42}$	0,00	1,5753049850	DVS
55	5	208746,674647094886	$0,70091668383747521 \times 10^{42}$	0,0009745393	1,8362207413	DVS
25	3	234475,726712	$-0,150197290138283744 \times 10^{-6}$	0,0000000004	0,0669403076	DVS
28	20	322952,669992	$-0,810345915766905138 \times 10^{71}$	0,0001055901	0,1227858663	DVS
1	7	644424,248487123361	$-0,610016418387507146 \times 10^{57}$	0,0000000002	0,4454264641	DVS
56	16	799966,754033299178	$0,723700557733226211 \times 10^{76}$	0,4890277899	7,1349916458	DVS
52	5	885653,603844380254	$-0,194966512479097336 \times 10^{27}$	0,0000143783	0,0511486866	DVS
18	3	8334595,546141C2375	$0,936494734099031659 \times 10^{6}$	0,0000000008	0,2558410764	DVS
41	6	14871175,6044684164	$0,535182573334966795 \times 10^{-17}$	2,5382112914	0,1544241905	Eliminação
14	3	54685735,1515776962	$0,2532852420050936224 \times 10^{18}$	2,0000000054	7,7685728073	DVS
35	2	721711100,000909	-0,0275	0,0000000001	0,0000970782	DVS
39	8	873966529,745452	$-0,876493589573780487 \times 10^{-32}$	2,0689482950	542,2050781250	DVS
47	18	1824153719,15167016	mto pequeno	4,1970645695	188,6175689697	DVS
43	10	1977386173,18338565	$-0,678443019712279793 \times 10^{-47}$	0,3038273719	47,5924835205	DVS
44	12	2093943694,43926460	$0,615937250612720388 \times 10^{-58}$	1,5549194340	101,2951965332	DVS
46	16	2308510408,57023674	mto pequeno	1,2324091489	138,0901336670	DVS
48	20	2599153092,93643349	mto pequeno	3,2798687222	147,2049560547	DVS
42	8	3317873387,79995435	$0,122668436209438024 \times 10^{-31}$	0,2431635531	50,1140594482	DVS
45	14	5624461697,82274151	mto pequeno	2,0778489853	113,6940612793	DVS
23	3	228907124029808,289	-0,018622365	0,0046808680	$10268441,575424 \times 10^{6}$	DVS
24	3	273376942464985,961	4,333400968	2,1514371109	$46223,81056 \times 10^{5}$	DVS

CAPÍTULO IV - O MÉTODO SIMPLEX REVISADO

4.1 - INTRODUÇÃO

O método simplex revisado é um aperfeiçoamento do método do Simplex (convencional) do ponto de vista computacional, já que trabalha com os valores intermediários de forma mais compacta, reduzindo as necessidades de memória do computador para o armazenamento desses valores.

O simplex revisado apresenta duas características básicas:

1. Utiliza uma abordagem matricial ao problema de programação linear;

2. Calcula e armazena apenas as informações necessárias a cada iteração.

A notação matricial pode ser esquematizada como segue:

$$\text{Max } z = cx$$

$$\text{Sujeito a: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

onde $c(1 \times n)$, $x(n \times 1)$, $A(m \times n)$, $b(m \times 1)$, $0(n \times 1)$

Na forma padrão, tal notação se transforma em:

$$\text{Max } z = cx$$

s.a

$$[A, I]\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = [b] \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \geq 0$$

onde I é a identidade real de ordem m e x_s são as m variáveis de folga.

Assim: $[A,I]_{m \times (n+m)}$

$$\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}_{(n+m)x1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{(n+m)x1}$$

Observe-se ainda que, a cada iteração,as únicas informações relevantes são:

a) Coeficientes das variáveis não básicas que vão entrar na base;

b) Coeficientes das variáveis não básicas na equação (0) (função objetivo);

c) As constantes da coluna b.

4.2 - NOÇÃO GERAL DO MÉTODO

Considere-se a matriz $\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}$; observe-se que existem n variáveis não básicas cujo valor inicial é zero.

Eliminando-se estas n variáveis não básicas, ter-se-á como solução básica inicial:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

Constrói-se, a seguir, a matriz base B, de ordem m, formada pelas colunas correspondentes às variáveis básicas da matriz $[A,I]$ que é a matriz original do problema.

Logo: $B \cdot x_B = b \quad \rightarrow \quad x_B = B^{-1} \cdot b$

Considere-se a matriz $[c, 0]$. Eliminando-se os coeficientes das variáveis não-básicas encontrar-se-á a matriz de ordem (1xm). Assim, para a solução básica encontrada, o valor de Z será:

$$Z = c_B . x_B \quad \text{ou} \quad Z = c_B . B^{-1} . b$$

Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & \bar{0} \\ \bar{0} & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

onde $\bar{0}$ representa a matriz nula.

como $x_B = B^{-1} . b$ e $Z = c_B . B^{-1} . b$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} Z \\ x_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & c_B B^{-1} \\ \bar{0} & \vdots & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Esta matriz, de ordem ((m+1)x1) é o lado direito atualizado do problema.

como

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B . B^{-1} \\ \bar{0} & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c & \bar{0} \\ \bar{0} & A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} A - c & c_B B^{-1} \\ \bar{0} & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix}$$

O conjunto de equações, após qualquer iteração será:

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} A - c & c_B B^{-1} \\ \bar{0} & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B . B^{-1} . b \\ B^{-1} . b \end{bmatrix}$$

Em resumo, portanto, o simplex revisado tem os mesmos critérios de inicialização, de entrada e saída de variáveis da base bem como de parada do algoritmo simplex. Mudará, apenas, o cálculo de B^{-1} e de $x_B = B^{-1} b$. Além disso, o simplex revisado, para efeito de simplificações, apresenta um modo de se determinar a matriz B^{-1} da iteração i a partir da matriz B^{-1} da iteração (i-1).

Esquema de Algorītmo

Dado o problema: max $z = cx$

s.a: $Ax \leq b$

$x \geq 0$

O simplex revisado segue os seguintes passos:

1. Forneça A $(m \times n)$, $b(m \times 1)$, $c(1 \times m)$, $x(n \times 1)$.
2. Determine a matriz bāsica inicial B. (evidentemente, como $Ax \leq b$, então $B=I$)
3. Calcule B^{-1}. (no inīcio $B^{-1}=B$)
4. Entrada na base:

   4.1 - Calcule $P' = C_B \cdot B^{-1}$, $P'(1 \times m)$

   4.2 - Seja $A_j(m \times 1)$ o vetor coluna que representa os coeficientes das variāveis não bāsicas x_j no problema original.

   4.3 - Calcule os valores $z_j - c_j = P'A_j - c_j$

   4.4 - Se para todas as variāveis não bāsicas, $z_j - c_j \geq 0$, pare. Atingiu-se a solução ōtima.

   4.5 - Se existe $z_j - c_j < 0$, entra na base a variā-vel que tiver o valor mais negativo (īndice k).

5 - Seja x_k a variāvel que entra na base; calcule $y_k = B^{-1} . A_k$

6 - Saīda da base:

Considere os valores do vetor coluna y_k $(m \times 1)$ para cada $y_{ki} > 0$ $(i=1,2,...,m)$ e faça

$$\frac{b'_i}{y_{ki}} \quad , \quad i=1,2,...,m$$

onde b'_i são os valores atuais das constantes do lado direito das restrições.

Sairā da base a variāvel da equação r onde o valor

$\frac{b_i'}{y_{ki}}$, $y_{ki} > 0$ seja o menor.

7. Cálculo da nova inversa:

 7.1 - Calcule $\mu = \left\{ \frac{-y_1}{y_r}, \frac{-y_2}{y_r}, \ldots, \frac{1}{y_r}, \ldots, \frac{-y_m}{y_r} \right\}$

 7.2 - Determine a matriz E como sendo a identidade exceto a coluna r substituída por μ .

 7.3 - Calcule: $B^{-1}_{nova} = E \cdot B^{-1}_{anterior}$

8. Atualização do lado direito

$$b' = B^{-1}_{nova} \cdot b$$

9. Atualizar c_B , B^{-1} e b.

Retorne para 4.

4.3 - EXEMPLO

Considere o problema:

$$\text{Max} \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ 2x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ x_3 + x_4 \leqslant 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 10 \\ x_i \geqslant 0 \qquad (i = 1,2,3,4) \end{cases}$$

Então: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \; b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Inicialmente, colocado o problema na forma padrão, ter-se-á:

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = c_B \, . \, B^{-1} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$

$z_j - c_j = P'A_j - c_j$. Daí: $z_1 - c_1 = -1$
$z_2 - c_2 = -1$
$z_3 - c_3 = -1$
$z_4 - c_4 = -1$

Entra na base, por exemplo, x_1 pois houve empate.
Então $k=1$ e

$$A_k = A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad \text{Logo } y_k = y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e como $\frac{4}{1} < \frac{10}{1}$ sairá x_5.

Daí $r = 1$, $\mu = |1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1|$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A nova inversa será $E \, . \, B^{-1}$, ou seja,

$$B^{-1}_{nova} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

atualizando o lado direito:

$$b' = B^{-1} . b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Daí: $\quad P' = c_B \,.\, B^{-1} = [1\ 0\ 0\ 0]$

assim:

$$z_5 - c_5 = 1$$
$$z_2 - c_2 = 1$$
$$z_3 - c_3 = -1$$
$$z_4 - c_4 = -1$$

x_3 entra na base,

$k=3$, e $y_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. calculando os valores

$\dfrac{b_i'}{y_{ki}}$, tem-se 5, 8, 6 de onde sai x_6 que é a variável

da linha 2 (r = 2).

Aqui, $\mu = [0,\ 1,\ -1,\ -1]$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A nova inversa será:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Atualizando o lado direito tem-se:

$$b' = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P' = [1\ 1\ 0\ 0]$$

De onde: $z_5 - c_5 = 3$

$z_6 - c_6 = -1$

$z_2 - c_2 = 1$

$z_4 - c_4 = 1$

Entrará x_4 , k= 4 e

$$y_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

. Calculando os valores

$\frac{b_i'}{y_{ki}}$ tem-se $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{1}$ saindo x_8 que é a variável da linha 4 (r = 4)

Aqui, $\mu = [\ 0\ 0\ -1\ 1\ ]$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e } P' = [0\ 0\ -1\ 1]$$

de onde: $z_2 - c_2 = z_5 - c_5 = z_6 - c_6 = 0$ e $z_8 - c_8 = 1$

como para todas as variáveis não básicas $z_j - c_j \geqslant 0$, a solução ótima foi alcançada e é:

$x_1 = 4$

$x_2 = 0$

$x_3 = 5$

$x_4 = 1$ com Z= 10

CAPÍTULO V - ALGORITMO DVS-PLEX

5.1 - INTRODUÇÃO

Ainda que o simplex revisado tenha, em termos computacionais, consideráveis vantagens sobre o simplex usual, permanecem em aberto problemas devidos às instabilidades numéricas que ocorrem durante a resolução dos modelos lineares.

Tais problemas existem, muitas vezes, devido a arredondamentos, operações com números grandes e pequenos (principalmente multiplicações e divisões) além de condições especiais relativas às restrições, como situações de quase paralelismo.

Neste último caso, o simplex revisado que trabalha com a matriz B dos coeficientes das variáveis básicas na forma exata em que ela foi estruturada a cada iteração, nada pode fazer para contornar o problema. Da mesma forma, o método simplex revisado não evita a geração de erros de arredondamento durante as operações nem consegue impedir sua propagação, sobretudo considerando-se que a matriz B^{-1} gerada em uma dada iteração é determinada pela matriz B^{-1} da iteração anterior e que esta matriz determina o valor b', que reúne os valores atuais do lado direito, valores estes que determinam o resultado final do problema.

Desta forma, embora seja inegável a eficiência observada neste método, o simplex revisado apresenta a desvantagem de não evitar instabilidade numérica durante o seu desenvolvimento.

5.2 - IDÉIA GERAL DO ALGORITMO DVS-PLEX

A proposta básica do algorítmo DVS-PLEX, que é o tema principal deste trabalho, é a de promover um eficiente controle de erros durante a resolução de problemas de programação linear.

Para tanto: 1) O algoritmo estrutura o modelo da mesma forma que o simplex revisado,

2) aproveita suas vantagens,

3) permite que, a cada iteração, se desenvolva um controle de erros,

4) reduz o aparecimento de erros,

5) impede a propagação de erros,

ou seja, minimiza as desvantagens do simplex revisado.

O algoritmo DVS-PLEX utiliza a notação matricial do modelo e sua estrutura básica é dividida em áreas interdependentes, como mostra-se a seguir:

1. Área de definição: Dado o modelo, são identificadas as matrizes A, b , c e o número de restrições e de variáveis, bem como a natureza das restrições.

2. Área de formação da base: Identificam-se aqui as variáveis básicas e não-básicas. No início, as variáveis básicas são as de folga. Depois, esta área transforma-se no local de atualização da base, substituindo-se a variável que sai pela que entra, ou seja, a variável da linha r pela variável de índice k.

Definida a base, montam-se as matrizes MB e cB formadas, respectivamente, pelos coeficientes das variáveis básicas nas matrizes iniciais A e c.

No início, MB=I e cB=0. Depois, de acordo com a variável que sai e a que entra, atualizam-se MB e cB.

3. Área de operação da base:

Aqui utilizam-se dois sub-programas, alternando-se sua utilização, com a área de operação das variáveis não-básicas.

Inicialmente, utiliza-se o subprograma 1 que tem como entrada as matrizes MB e b.

Subprograma 1:

a) Decompõe a matriz MB em valores singulares, encontrando as matrizes U, S e V;

b) Determina, usando U, S, e V a inversa de MB que é a matriz MBI;

c) Determina MBI, usando o método da eliminação;

d) Promove o controle de erros gerados nesta etapa, minimizando-os (ver área 6);

e) Atualiza o lado direito do problema, calculando a matriz BD dada pelo produto MBI.b.

As saídas do subprograma são as matrizes MBI e BD.

A seguir, aciona-se a área 4 que, após ser executada, promove o retorno a esta área, para fins de execução, do subprograma 3.

O subprograma 3 tem como entradas as matrizes MBI e o índice k definido na área 4.

Subprograma 3:

a) Localiza na matriz A, a coluna k;

b) Calcula a matriz BA, dada por:

$$BA = (MBI) \cdot A_k$$

c) Calcula os valores F_i, dados por:

$$F_i = \frac{BD_i}{BA_i} \quad , \quad BA_i > 0$$

, onde BA_i é o elemento da i-ésima linha da matriz BA.

As saídas deste subprograma são os valores F_i.

A seguir, fixa-se r como sendo o índice da variável que saiu da base, determinado pelo índice i do menor F_i.

O controle do programa retorna, neste ponto à área de formação da base (área 2).

4. Área de operação das variáveis não básicas:

Aqui utiliza-se o subprograma 2, que tem como entradas as matrizes cB, c, MBI e os valores de j (índices das va riáveis não básicas).

Subprograma 2:

a) Calcula o produto cB. MBI = PB1;

b) Para cada valor de j, determina-se PB2= PB1. A_j e T_j= PB2 - c_j

As saídas do subprograma 2 são os valores T_j.

Caso todos os valores de T_j sejam não negativos, passa-se para área 5 (cálculos finais).

Se houver algum valor de T_j negativo, fixa-se k como sendo o valor de j para o qual se tem Tj mais negativo. A seguir, retorna-se à área de operação de base.

5. Área de cálculos finais

Aqui calculam-se os valores finais das variáveis, utilizando-se a base atual e o vetor atual b'. Calcula-se o valor de Z, utilizando-se a função objetivo.

6. Área de controle de erros

Esta área é usada no cálculo da inversa da matriz básica B. Dois métodos são utilizados para calcular B^{-1} - o método da decomposição em valores singulares e o método da eliminação.

Uma vez determinada a inversa de B em cada um dos métodos, calcula-se o produto desta inversa por B, comparando-se este produto com a identidade, escolhendo-se, então, aquela que gerar menor erro.

Tal comparação será processada pela escolha da menor norma de máxima soma por linhas, aplicada sobre as matrizes diferenças:

$D = |B^{-1} B - I|$. (conforme capítulo 3, deste trabalho). Idealmente, a norma deve ser zero.

5.3 - ROTEIRO COMPUTACIONAL

Considere o seguinte problema:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(P)}$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \text{para } i=1,2,3,\ldots,m$$

$$x_j \geqslant 0 \quad \text{para } j=1,2,\ldots,n$$

O algoritmo DVS-PLEX para resolver este problema utiliza o seguinte roteiro computacional.

1) Coloque o problema na notação matricial:

a) variáveis: x $(n \times 1)$

b) coeficientes da função objetivo: c $(1 \times n)$

c) constantes do lado direito: b $(m \times 1)$

d) coeficientes das restrições: A $(m \times n)$ de modo que o problema (P) assumirá a forma $\max\ z = cx$

$$\text{s.a}: Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$

2) Complete o quadro inicial:

a) adicionando variáveis de folga: x_s $(m \times 1)$ $\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ x_s \end{bmatrix}$

b) adicionando os respectivos coeficientes: I $(m \times m)$ tal que: $\max\ z = cx$

$$\text{s.a } [A,\ I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \geqslant 0$$

3) Determine:

a) cB inicial $(1 \times m)$ (vetor c)

b) MB inicial $(m \times m)$ (matriz B)

c) MBI inicial $(m \times m)$ (matriz B^{-1})

d) BD inicial $(m \times 1)$ (vetor BD)

4) Calcule PB1 (1 x m) como sendo: PB1 = (cB) . (MBI)

5) Defina as variáveis não básicas $j \varepsilon \{1,2,\ldots, n + m\}$

6) Calcular T_j (1 x 1) como sendo:

$$T_j = [(PB1 \cdot A_j) - C_j] , \forall j \ \varepsilon \{1,2,\ldots,m + n\}$$

7) Se $T_j \geq 0$, vá para (31), caso contrário vá para (8).

8) Seja k = j tal que T_j é o mais negativo $k \varepsilon \{1,2,\ldots,m + n\}$

9) Calcule BA(m x 1)
tal que: BA = (MBI) . (A_k)

10) $\forall$ i, i= 1,2,...,m e todo $(BA)_i > 0$,
Calcule $F_i = \dfrac{BD_i}{BA_i}$, $i \ \varepsilon \ \{1,2,\ldots,m\}$

11) Seja r o índice do menor valor do conjunto de F_i ,
$r \ \varepsilon \ \{1,2,\ldots m\}$

12) Componha a nova base, substituindo a variável básica da equação r por x_k.

13) Defina a nova matriz MB(m x m) como sendo a matriz MB atual na qual substitui-se sua coluna i pela coluna da variável x_i que se encontra na matriz A.

14) Determine B1, B2, B3 tais que:
MB= (B1) (B2) (B3) onde as matrizes são de ordem m x m.

15) Determine B1T (m x m) tal que:

$$(B1T)_{ij} = \begin{cases} (B1)_{ij} & \text{se } i = j \\ (B1)_{ji} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

16) Determine B3T (m x m) tal que:

$$(B3T)_{ij} = \begin{cases} (B3)_{ij} & \text{se } i = j \\ (B3)_{ji} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

17) Determine B2I (m x m) tal que:

$$(B2I)_{ij} = \begin{cases} (B2)_{ij} & \text{se } i \neq j \\ 1/(B2)_{ij} & \text{se } i = j \end{cases}$$

18) Determine PP1 (m x m) como sendo

PP1= (B3T) . (B2I)

19) Determine PP2 (m x m) como sendo

PP2= (PP1) . (B1T)

20) Faça MBIS = PP2

21) Gere I (m x m) tal que

$$(I)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

22) Determine SI = (MB) . (MBIS)

23) Calcule DIF = (I - SI) e aplique a norma da máxima soma sobre DIF. Seja SN tal norma.

24) Calcule a inversa da matriz B, usando agora o método da eliminação. Seja MBIG esta inversa.

25) Determine GI = (MB) . (MBIG)

26) Calcule DIF = (I - GI) e aplique a norma da máxima soma sobre DIF. Seja GN esta norma.

27) Se $GN > SN$, faça MBI = MBIS
Se $GN \leqslant SN$, faça MBI = MBIG

28) Calcule BD (m x 1) tal que BD = (MBI) . b

29) Defina os novos valores para cB a partir das novas variáveis básicas.

30) Retorne para (4).

31) Determine a solução do problema, definindo XB (1 x m), tal que:

$$XB = BD$$

e calculando

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} (CT)_i \cdot (BD)_i$$

$$\text{onde } (CT)_i = \begin{cases} c\ (1 \times n) & \text{se } i \leqslant n \\ 0 & \text{se } n < i \leqslant m + n \end{cases}$$

5.4 - EXEMPLO

Desenvolve-se, a seguir, um exemplo preliminar.

Considere o problema:

$$\begin{array}{llllll} \max: & \dot{z} = 1818001x_1 + & 93601{,}0625x_2 + & 13822401x_3 & & \\ \text{s.a:} & 4545x_1 + & 234x_2 + & 3456x_3 & \leqslant & 8235 \\ & 676x_1 + & 87987x_2 + & 0{,}384475x_3 & \leqslant & 88663{,}375 \\ & 0{,}87234x_1 + & 5{,}93746x_2 + & 984x_3 & \leqslant & 990809326 \\ & & & x_i & \geqslant & 0 \text{ para } i=1,2,3 \end{array}$$

conforme listagem apresentada no anexo 4, foram obtidos os resultados:

1º) pelo método simplex:

solução ótima: $x_1 = 1$
$x_2 = 0{,}999999464$
$x_3 = 0{,}999999702$

com $Z = 3294003$

2º) pelo DVS-PLEX

solução ótima: $x_1 = 1{,}760736068$
$x_2 = 0{,}994146142$

$x_3 = 0.0$

com $Z = 3294073{,}06804963$

Observa-se que o algorítmo DVS-plex nesse exemplo - que apresenta apenas 3 variáveis e 3 restrições sendo, portanto, um modelo de pequeno porte - melhora o valor de Z em 70,068 aproximadamente.

Essa melhora deve-se ao fato de que, no desenvolvimento do método simplex usual ocorrem alguns erros de arredondamentos e/ou truncamento dos números do modelo, causando perdas nos valores que levam ao resultado final. Tais perdas são bem menores no DVS-plex.

O efeito mais significativo dessas perdas, e o erro por elas gerado, está no fato de que, no segundo pivoteamento, a solução ótima não foi alcançada já que o coeficiente da x_3 na função objetivo é negativo (-1,006). Isso faz com que x_3 entre na base dando uma solução final um pouco melhor que a solução que havia ali, solução essa que também é bem pouco melhor que aquela do primeiro pivoteamento. Esses resultados são inferiores aos obtidos pelo DVS-plex, que coloca na base - tal como no simplex usual - inicialmente x_1 depois x_2; porém, pára nesse ponto pois os coeficientes da função objetivo, neste momento, são todos positivos.

Observa-se, portanto, que os métodos geraram bases diferentes; isso é perfeitamente normal na resolução de problemas lineares. Nesse caso, entretanto, a base encontrada pelo DVS-plex, em cujo desenvolvimento ocorreram menores erros de operações efetivadas com os números, mostrou um resultado final melhor.

Nesse modelo observou-se ainda, que o DVS-plex encontrou a solução em apenas duas iterações, enquanto que o simplex encontrou em três iterações. Nesse caso específico foram executadas, em ambos os casos, o número mínimo de iterações necessárias para atingir o resultado final. Entretanto, como se verá, isso não ocorre no geral.

O algoritmo DVS-plex foi aplicado em vários testes.Os resultados de alguns exemplos desses testes encontram-se na tabela a seguir. No anexo 2 deste trabalho, encontram-se listados os exemplos 2, 7, 13, 20, 22, 25, 27, 30, 33 e 34, nesta ordem.

Exemplos	Ordem matriz variáveis x restrições	Número de iterações	Algoritmo DVS-plex: Variáveis do problema inicial que estão na base final.	Mét. de inversão escolh.: Nº DVS	Nº Elim.	Valor de Z: $Z_{DVS\text{-}plex}$	Número de iterações	Algoritmo simplex: Variáveis do problema inicial que estão na base final.	Valor de Z : $Z_{simplex}$	$Z_{DVS\text{-}plex}-Z_{simplex}$
1	3x3	4	x_1,x_2,x_3	2	2	5777203,062	2	x_1,x_2	5777202,0	1,062
2	3x3	3	x_1,x_3	1	2	44669523312,0	2	x_2,x_3	1153325570,0	43516197742,0
3	3x3	4	x_1,x_2,x_3	2	2	28000990699,160	2	x_1,x_3	28000038900,0	951799,16
4	30x30	3	$x_{20}\ x_{21}$	3		16197840,090	151	x_{20},x_{21}	16197137,0	703,09
5	3x3	3	$x_1\ ,x_2$	3		70128802,092	3	x_1,x_3	70128784,0	18,92
6	20x20	9	$x_2,x_5\ x_9,x_{12},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17}$	9		513443,203	45	$x_2,x_5,x_9,x_{12},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17}$	513415,125	28,078
7	19x19	18	x_{15},x_{18},x_{19}	18		7486605598943,470	1520		não encontrado	-
8	5x5	7	$x_2,\ x_3,x_4$	5	2	153111970,323	5	x_2,x_4	153112048,0	-77,677
9	5x5	5	$x_1,\ x_2,x_3$	5		702,305	4	x_2,x_3,x_4	702,305	0,0
10	6x6	5		5		solução ilimitada	4		solução ilimitada	-
11	5x5	5	$x_1,\ x_3,x_4$	3	2	32888631,268	4	x_1,x_3,x_4	32888608,0	23,268
12	3x3	2	x_1	1	1	105684,962	1	x_1	105684,875	0,087
13	3x3	3	x_1,x_3	2	1	1189330792,125	3	x_1,x_3	816392704,0	372938088,125
14	30x30	3	x_{20},x_{21}	3		296313,751	151	x_{20},x_{21}	296293,625	20,126
15	20x20	9	$x_2,x_5,x_9,x_{14},x_{15},x_{16},\ x_{17}$	9		9392,153	45	$x_2,x_5,x_9,x_{14},x_{15},x_{16},x_{17}$	9392,066	0,087
16	19x19	15	x_{15},x_{18},x_{19}	15		136955778824,024	35	x_{15},x_{18},x_{19}	136954839000,0	839824,024
17	5x5	7	$x_1,x_2,x_3,\ x_4,\ x_5$	6	1	10543412606,902	4	x_2,x_3,x_4,x_5	10543390700,0	21906,902
18	5x5	6	x_2,x_4	6		2800942,016	2	x_1,x_4	2800941,0	1,016
19	5x5	5	x_2,x_3	5		403885,427	7	x_2,x_3,x_4,x_5	403885,187	0,24
20	6x6	6	$x_2,x_4,\ x_5\ x_6$	6		961941,923	5		solução ilimitada	-
21	29x29	3	x_1,x_{29}	3		1625,641	112	x_1,x_2,x_{29}	1620,353	5,288
22	32x25	6	x_{27},x_{29},x_{31}	6		3015998106,821	139	x_{27},x_{29},x_{31}	3071422210,0	-55424103,179
23	28x25	3	$x_1\ ,x_{28}$	3		1611,153	106	x_1,x_{28}	1613,182	-2,029
24	25x20	19	$x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_9,x_{10},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{20},x_{21},x_{23},x_{24},x_{25}$	19		1554,618	64	$x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_9,x_{10},x_{13},x_{14},x_{16},x_{17},x_{20},x_{21},x_{23},x_{24},x_{25}$	1554,611	0,007
25	5x2	2		1	1	solução ilimitada	1		não encontrou (divisão por zero)	-
26	5x7	4	x_1,x_4,x_5	4		10012331003,186	480		não encontrado	-
27	3x4	5	x_2,x_5	4	1	0,120	2	x_1,x_2,x_5	0,12	0,0
28	5x7	5	x_1,x_2,x_3,x_5	4	1	74707,346	4	x_1,x_2,x_3,x_5	74700,500	6,846
29	4x6	3	x_1,x_2	2	1	32888630,983	3	x_1,x_2,x_4	32888624,0	6,983
30	16x25	7	$x_4\ ,x_8\ ,x_{10},x_{12},x_{15}$	7		10155796804,544	26	$x_4,x_9,x_{10},x_{12},x_{15}$	10155724800,0	72004,544
31	4x3	3	x_2,x_4	1	2	1036376223,809	5	x_2,x_4	1036374530,0	1693,809
32	8x4	2	x_2	1	1	129884113116945,2	2		solução ilimitada	-
33	18x12	3	x_{13},x_{17}	3		760243285,167	20	x_{13},x_{17}	760240128,0	3157,167
34	4x6	4	x_3,x_4	1	3	6764313212129,409	400		não encontrado	-
35	3x2	2	x_3	2		2230969,153	4	x_3	2230966,0	3,153
36	3x2	2	x_3	2		2222002,158	4	x_3	2222000,0	2,158
37	3x3	3	$x_1\ ,x_3$	2	1	934033684,188	2	$x_2\ ,x_3$	21013456,0	913020228,188
38	3x3	3	$x_1\ ,x_2$	3		3280833,111	3	$x_1\ ,x_2\ ,x_3$	3280762,0	71,110
39	3x3	4	$x_1\ ,x_2\ ,x_3$	4		242983,725	2	$x_1\ ,x_3$	242973,375	10,400

Para proceder a análise dos modelos resolvidos pelos dois métodos DVS-plex e simplex, considerou-se o seguinte critério fundamental: como se tratam de problemas de maximização é evidente que o melhor resultado é aquele que, apresentando valores viáveis, fornece um maior valor para Z.

Além disso, observou-se:

1º) número de iterações de cada método

2º) base ótima

3º) porte do modelo

4º) no caso do algoritmo DVS-plex observou-se a utilização do método DVS ou eliminação para a inversão da matriz básica formada a cada iteração.

Cabe ressaltar ainda que o método simplex usual foi inconclusivo em alguns exemplos, não identificando a solução final nem determinando a natureza da solução. Como se vê, isso não ocorreu com o DVS-plex.

Utilizando exclusivamente o critério fundamental (maior valor de Z) dos 39 exemplos listados observou-se:

1º) O DVS-plex melhorou a função objetivo em 27 exemplos, isto é, 69,2 %.

2º) O simplex usual é melhor em 3 exemplos, isto é, 7,7 %.

3º) O DVS-plex encontra solução em 4 exemplos nos quais o simplex é inconclusivo (10,3 %).

4º) Ambos os métodos apresentam o mesmo resultado em 3 exemplos (7,7 %).

5º) O DVS-plex encontra solução finita, enquanto o simplex encontra solução ilimitada em 2 exemplos, isto é, 5,1 %.

CAPÍTULO VI - CONCLUSÃO

6.1 - ESBOÇO DO TRABALHO (AVALIAÇÃO DE OBJETIVOS)

O presente trabalho procurou apresentar um método alternativo para resolução de problemas genéricos de programação linear. Sua utilização foi feita em diversos exemplos, comparando-se os resultados obtidos de sua aplicação com o método simplex clássico.

Cabe observar, inicialmente, que o método simplex é um algoritmo de extraordinária eficiência. Sua utilização tem sido estudada e aperfeiçoada ao longo dos anos e, até esta data, não se conhece algoritmo mais eficiente que o simplex para resultados não-ótimos, devido, sobretudo, ao mal-condicionamento das matrizes de coeficientes dos modelos. O presente trabalho, portanto, não pretende apresentar um algoritmo que substitua o simplex mas sim deseja corrigir falhas que aparecem na sua aplicação. Para tanto utilizou-se o método da decomposição em valores singulares de matrizes, que, como foi demonstrado no capítulo III, é um método adequado para inversão de matrizes mal-condicionadas.

Neste sentido, o objetivo do presente trabalho pode ser avaliado pelos resultados observados nos exemplos estudados - alguns dos quais foram aqui apresentados.

Cabe observar que o DVS-plex destina-se, essencialmente, a modelos mal-condicionados. Em modelos lineares pequenos e simples sua utilização não determina resultados piores que os dados pelo método simplex - ainda que de pequena monta, observam-se nestes casos melhoras no resultado final. Parece evidente que, para estes modelos, o simplex é o método mais indicado devido à complexidade do DVS-plex.

6.2 - CONCLUSÕES GERAIS

Os resultados aqui apresentados mostram que o método da decomposição em valores singulares é extremamente eficiente para inversão de matrizes - mesmo aquelas simples e de ordem pequena, como a mostrada no item 3.3. É bastante visível sua adequação a matrizes mal-condicionadas e as vantagens que apresenta sobre o método clássico de eliminação.

Outro fato importante é que o método DVS permite rígido controle de erros no seu desenvolvimento. Quer na geração das matrizes U e V, quer na geração da própria inversa, cada passo do algoritmo permite verificar se algum erro foi gerado , podendo-se identificá-lo para uma possível correção. Já nos processos normais de inversão, uma vez gerado o erro, este se propaga rapidamente, sem que haja meios de evitar tal situação.

A obtenção das matrizes U, S e V e a inversa a partir delas torna este método mais complexo do que os convencionais de inversão. A programação computacional aqui é de grande valia e pode-se observar que obter U, S e V através de um algorítmo programável é assunto já desenvolvido na literatura técnica especializada (ver, por exemplo, ref.: [8]). Parece óbvio que a aplicação do DVS a modelos mal-condicionados traz resultados que compensam largamente sua complexidade.

A partir dos bons resultados obtidos na inversão de matrizes pode ser desenvolvido o algorítmo DVS-plex. Sua aplicação prática permite concluir que o algorítmo melhora os resultados obtidos pelo simplex usual na grande maioria dos casos. Além disso, o DVS-plex encontra a solução do modelo em casos onde o simplex usual é inconclusivo. Este último fato, por si mesmo, já bastaria para atestar a eficiência do DVS-plex e sua grande utilidade.

Outra observação importante sobre o DVS-plex é que este método tende a encontrar a solução ótima em um número de iterações muito menor que o simplex usual. Isto se deve ao fato que, quando uma variável entra na base, pelo DVS-plex, ela tende a ficar aí até ser alcançada a solução ótima. No simplex usual, existe um grande número de entradas e saídas da base de uma mesma variável.

6.3 - SUGESTÕES DE ESTUDOS

O presente trabalho, ainda que tenha levado a conclusões efetivas sobre a utilização do método DVS-plex, mostrando suas vantagens sobre o simplex usual, não esgotou - e nem o pretendia - o assunto.

Desta forma, para futuras pesquisas, ficam em aberto as seguintes questões:

a) Estudo da influência do número de condição sobre o processo de inversão de matrizes.

A utilização do número de condição aqui proposto ou a determinação de um outro poderá permitir a classificação prévia das matrizes para fins de determinação de sua inversa.

O presente trabalho não chegou a determinar de maneira clara como esta influência se processa.

b) Os exemplos aqui considerados não utilizaram variáveis artificiais nem minimização de Z.

Sugere-se a generalização do algoritmo para estes casos.

c) Desenvolver a análise de modelos de grande porte - a tendência do DVS-plex é ser bem melhor que o simplex à medida que o porte do modelo aumenta. Entretanto, os programas computacionais utilizados nestes casos, utilizam muita memória e tempo excessivo de computação. Desta forma, poder-se-iam desenvolver programas mais eficientes para o estudo de tais casos. Isto não foi feito aqui por não ser a otimização do método computacional objetivo do presente trabalho.

d) Estudar, com mais rigor, os casos em que o DVS-plex teve desempenho inferior ao simplex.

ANEXO 1 - EXEMPLOS DE DECOMPOSIÇÃO DE UMA MATRIZ EM VALORES SINGULAR

```
-------------------------------------------

  PROBLEMA N.          1
 -----------
  ORDEM DA MATRIZ       2   POR    2
  DADOS DE ENTRADA
  MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1, 1)=             5.00      A( 1, 2)=               10.00
A( 2, 1)=             3.00      A( 2, 2)=                1.00

  VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S
  S(  1)=                      11.410507463
  S(  2)=                       2.190963026

  MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA
  U**T(  1,  1)=                         0.979048021
  U**T(  1,  2)=                         0.203629497
  U**T(  2,  1)=                        -0.203629497
  U**T(  2,  2)=                         0.979048021

  MATRIZ V- POR LINHA
  V(  1,  1)=                      0.482548967
  V(  1,  2)=                      0.875868994
  V(  2,  1)=                      0.875868994
  V(  2,  2)=                     -0.482548967

MATRIZ V TRANSPOSTA


  MATRIZ  U  - POR LINHA
  U(  1,  1)=                      0.979048021
  U(  1,  2)=                     -0.203629497
  U(  2,  1)=                      0.203629497
  U(  2,  2)=                      0.979048021


COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBTIDA POR U*S*VT
VALOR DA NORMA DA MAXIMA SOMA POR LINHA DE     (A - U*S*V**T)          0.000000000000


  NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                              5.207987240796892

-------------------------------------------

  PROBLEMA N.          2
 -----------
  ORDEM DA MATRIZ       3   POR    3
  DADOS DE ENTRADA
  MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1, 1)=             1.00      A( 1, 2)=               2.00      A( 1, 3)=             3.00
A( 2, 1)=             4.00      A( 2, 2)=               5.00      A( 2, 3)=             6.00
A( 3, 1)=             7.00      A( 3, 2)=               8.00      A( 3, 3)=             9.00

  VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S
```

```
 S(   1)=                  16.843103352
 S(   2)=                   1.063369510
 S(   3)=                   0.000000000

 MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA
 U**T(  1,  1)=                      -0.214837238
 U**T(  1,  2)=                      -0.520587389
 U**T(  1,  3)=                      -0.826337541
 U**T(  2,  1)=                      -0.887230688
 U**T(  2,  2)=                      -0.249643953
 U**T(  2,  3)=                       0.387942782
 U**T(  3,  1)=                       0.408248290
 U**T(  3,  2)=                      -0.816496581
 U**T(  3,  3)=                       0.408248290

 MATRIZ V- POR LINHA
 V(  1.  1)=                   -0.479671178
 V(  1.  2)=                    0.776690990
 V(  1.  3)=                   -0.408248290
 V(  2.  1)=                   -0.572367794
 V(  2.  2)=                    0.075636470
 V(  2.  3)=                    0.816496581
 V(  3.  1)=                   -0.665064410
 V(  3.  2)=                   -0.625318050
 V(  3.  3)=                   -0.408248290

MATRIZ V TRANSPOSTA


 MATRIZ  U  - POR LINHA
 U(  1.  1)=                   -0.214837238
 U(  1.  2)=                   -0.887230688
 U(  1.  3)=                    0.408248290
 U(  2.  1)=                   -0.520587389
 U(  2.  2)=                   -0.249643953
 U(  2.  3)=                   -0.816496581
 U(  3.  1)=                   -0.826337541
 U(  3.  2)=                    0.387942782
 U(  3.  3)=                    0.408248290


COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBTIDA POR U*S*VT
VALOR DA NORMA DA MAXIMA SOMA POR LINHA DE    (A - U*S*V**T)          0.000000000000


 NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =         110366708335011504.

-------------------------------------------------------------

 PROBLEMA N.        3
 ----------
 ORDEM DA MATRIZ      4  POR   4
 DADOS DE ENTRADA
 MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1. 1)=        70.00    A( 1. 2)=       50.00    A( 1. 3)=        20.00    A( 1. 4)=        10.00
```

```
A( 2, 1)=          -4.00    A( 2, 2)=          -2.00    A( 2, 3)=          99.00    A( 2, 4)=          88.00
A( 3, 1)=          18.00    A( 3, 2)=          35.00    A( 3, 3)=          43.00    A( 3, 4)=         -26.00
A( 4, 1)=          77.00    A( 4, 2)=          66.00    A( 4, 3)=          53.00    A( 4, 4)=          44.00

  VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S
  S(  1)=              171.211346696
  S(  2)=              108.765420056
  S(  3)=               44.576851515
  S(  4)=                5.643807534

  MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA
  U**T(  1,  1)=                  -0.400547051
  U**T(  1,  2)=                  -0.576150189
  U**T(  1,  3)=                  -0.234280904
  U**T(  1,  4)=                  -0.672848778
  U**T(  2,  1)=                   0.493740122
  U**T(  2,  2)=                  -0.739458933
  U**T(  2,  3)=                   0.168414324
  U**T(  2,  4)=                   0.323437508
  U**T(  3,  1)=                  -0.188250145
  U**T(  3,  2)=                  -0.003074078
  U**T(  3,  3)=                   0.957460307
  U**T(  3,  4)=                  -0.218062061
  U**T(  4,  1)=                  -0.748561711
  U**T(  4,  2)=                  -0.211650713
  U**T(  4,  3)=                  -0.004335793
  U**T(  4,  4)=                   0.628363356

  MATRIZ V- POR LINHA
  V(  1,  1)=                -0.462625645
  V(  1,  2)=                 0.559000556
  V(  1,  3)=                -0.347776445
  V(  1,  4)=                -0.553378163
  V(  2,  1)=                -0.407951015
  V(  2,  2)=                 0.491951400
  V(  2,  3)=                 0.215036902
  V(  2,  4)=                 0.736440547
  V(  3,  1)=                -0.642647496
  V(  3,  2)=                -0.394554857
  V(  3,  3)=                 0.600060230
  V(  3,  4)=                -0.266942597
  V(  4,  1)=                -0.454459239
  V(  4,  2)=                -0.493465853
  V(  4,  3)=                -0.657559740
  V(  4,  4)=                 0.277584540

MATRIZ V TRANSPOSTA

  MATRIZ  U  - POR LINHA
  U(  1,  1)=                -0.400547051
  U(  1,  2)=                 0.493740122
  U(  1,  3)=                -0.188250145
  U(  1,  4)=                -0.746501711
  U(  2,  1)=                -0.576150189
```

FILE [illegible] [illegible] [illegible]

```
U(  2,  2)=          -0.789456983
U(  2,  3)=          -0.000074070
U(  2,  4)=          -0.211[illegible]071[illegible]
U(  3,  1)=          -0.[illegible]
U(  3,  2)=           0.100414024
U(  3,  3)=           0.587480307
U(  3,  4)=          -0.004[illegible]9753
U(  4,  1)=          -0.672848776
U(  4,  2)=           0.323437808
U(  4,  3)=          -0.213682881
U(  4,  4)=           0.626363[illegible]

COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT
VALOR DA NORMA DA MAXIMA SOMA POR LINHA DE     (A - U*S*V**T)          0.000000000000

  NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                          29.5823515315593E
```

ANEXO 2: CÁLCULO DA INVERSA DE UMA MATRIZ USANDO O MÉTODO DVS.

PROBLEMA N. 1

ORDEM DA MATRIZ 3 POR 3

DADOS DE ENTRADA

MATRIZ - A - (DADA)

```
A(  1,  1)=      60.000000000
A(  1,  2)=     -10.000000000
A(  1,  3)=      23.000000000
A(  2,  1)=      40.000000000
A(  2,  2)=      22.000000000
A(  2,  3)=      -6.000000000
A(  3,  1)=      56.000000000
A(  3,  2)=     -30.000000000
A(  3,  3)=       4.000000000
```

VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S

```
S(  1)=          94.120558890
S(  2)=          35.430139092
S(  3)=          16.941831014
```

MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA

```
U**T(  1,  1)=     -0.678116358
U**T(  1,  2)=     -0.354186105
U**T(  1,  3)=     -0.643980130
U**T(  2,  1)=     -0.019537796
U**T(  2,  2)=      0.884595361
U**T(  2,  3)=     -0.465949914
U**T(  3,  1)=      0.734694820
U**T(  3,  2)=     -0.303386306
U**T(  3,  3)=     -0.606778600
```

MATRIZ V- POR LINHA

```
V(  1,  1)=     -0.965966565
V(  1,  2)=      0.229136877
V(  1,  3)=     -0.120020359
V(  2,  1)=      0.194521509
V(  2,  2)=      0.949332240
V(  2,  3)=      0.246839380
V(  3,  1)=     -0.170499201
V(  3,  2)=     -0.215092047
V(  3,  3)=      0.961595255
```

MATRIZ V TRANSPOSTA

```
V**T(  1,  1)=     -0.965966565
V**T(  1,  2)=      0.194521509
V**T(  1,  3)=     -0.170499201
V**T(  2,  1)=      0.229136877
V**T(  2,  2)=      0.949332240
V**T(  2,  3)=     -0.215092047
V**T(  3,  1)=     -0.120020359
V**T(  3,  2)=      0.246839380
```

```
V**T(  3,  3)=                    0.961595255

MATRIZ  U  - POR LINHA
U(  1,  1)=                    -0.678116358
U(  1,  2)=                    -0.019537796
U(  1,  3)=                     0.734694820
U(  2,  1)=                    -0.354186105
U(  2,  2)=                     0.684595361
U(  2,  3)=                    -0.303386306
U(  3,  1)=                    -0.643980120
U(  3,  2)=                    -0.465949914
U(  3,  3)=                    -0.606778600

MATRIZ A OBTIDA PELO PRODUTO  U*S*VT

A(  1,  1)=                    60.000000000
A(  1,  2)=                   -10.000000000
A(  1,  3)=                    23.000000000
A(  2,  1)=                    40.000000000
A(  2,  2)=                    22.000000000
A(  2,  3)=                    -8.000000000
A(  3,  1)=                    56.000000000
A(  3,  2)=                   -30.000000000
A(  3,  3)=                     4.000000000

COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

TESTE DOS DESVIOS
      0.000000000


COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

TESTE DOS DESVIOS
      0.000000000


INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
(A-1)(  1,  1)=                 0.001628434
(A-1)(  1,  2)=                 0.011505239
(A-1)(  1,  3)=                 0.007894364
(A-1)(  2,  1)=                 0.008779383
(A-1)(  2,  2)=                 0.018549986
(A-1)(  2,  3)=                -0.022656471
(A-1)(  3,  1)=                 0.043047295
(A-1)(  3,  2)=                -0.021948457
(A-1)(  3,  3)=                -0.030444633
```

```
NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)          0.0000000000
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A          0.0000000000

 NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                               5.555512790395786

------------------------------------------

 PROBLEMA N.        2
------------
 ORDEM DA MATRIZ       4   POR    4
 DADOS DE ENTRADA
 MATRIZ  - A -   (DADA)
A(   1,   1)=          59.000000000
A(   1,   2)=           4.000000000
A(   1,   3)=          23.000000000
A(   1,   4)=         -20.000000000
A(   2,   1)=           4.000000000
A(   2,   2)=           5.000000000
A(   2,   3)=           1.000000000
A(   2,   4)=          -3.000000000
A(   3,   1)=          43.000000000
A(   3,   2)=          12.000000000
A(   3,   3)=           0.0
A(   3,   4)=          -2.000000000
A(   4,   1)=          -1.000000000
A(   4,   2)=           0.0
A(   4,   3)=          45.000000000
A(   4,   4)=           4.000000000

 VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S
 S(   1)=                 112.329828387
 S(   2)=                  45.392161823
 S(   3)=                  11.753005506
 S(   4)=                   4.407738779

 MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA
 U**T(   1,   1)=                          -0.921962999
 U**T(   1,   2)=                          -0.043931910
 U**T(   1,   3)=                          -0.377805266
 U**T(   1,   4)=                          -0.072920479
 U**T(   2,   1)=                          -0.006883385
 U**T(   2,   2)=                           0.008455663
 U**T(   2,   3)=                           0.209407999
 U**T(   2,   4)=                          -0.977751179
 U**T(   3,   1)=                          -0.383236337
 U**T(   3,   2)=                           0.244728571
 U**T(   3,   3)=                           0.869724599
 U**T(   3,   4)=                           0.191877456
 U**T(   4,   1)=                          -0.055052660
 U**T(   4,   2)=                          -0.968558675
 U**T(   4,   3)=                           0.233727026
 U**T(   4,   4)=                           0.043223566
```

```
FILEO DVS-03   SAIDA    C1   VM/SP RELEASE 3.1 SLC306


 MATRIZ V- POR LINHA
 V(   1,   1)=                 -0.958096100
 V(   1,   2)=                  0.201285473
 V(   1,   3)=                  0.020828476
 V(   1,   4)=                  0.202736765
 V(   2,   1)=                 -0.075146333
 V(   2,   2)=                  0.055511584
 V(   2,   3)=                  0.861685353
 V(   2,   4)=                 -0.498768329
 V(   3,   1)=                 -0.218379239
 V(   3,   2)=                 -0.973618208
 V(   3,   3)=                  0.005511641
 V(   3,   4)=                 -0.065937204
 V(   4,   1)=                  0.169456186
 V(   4,   2)=                 -0.092033731
 V(   4,   3)=                  0.506985354
 V(   4,   4)=                  0.840107281

MATRIZ V TRANSPOSTA

 V**T(  1,   1)=                 -0.958096100
 V**T(  1,   2)=                 -0.075146333
 V**T(  1,   3)=                 -0.218379239
 V**T(  1,   4)=                  0.169456186
 V**T(  2,   1)=                  0.201285473
 V**T(  2,   2)=                  0.055511584
 V**T(  2,   3)=                 -0.973618208
 V**T(  2,   4)=                 -0.092033731
 V**T(  3,   1)=                  0.020828476
 V**T(  3,   2)=                  0.861685353
 V**T(  3,   3)=                  0.005511641
 V**T(  3,   4)=                  0.506985354
 V**T(  4,   1)=                  0.202736765
 V**T(  4,   2)=                 -0.498768329
 V**T(  4,   3)=                 -0.065937204
 V**T(  4,   4)=                  0.840107281

 MATRIZ  U  - POR LINHA
 U(   1,   1)=                 -0.921962999
 U(   1,   2)=                 -0.008883385
 U(   1,   3)=                 -0.383236337
 U(   1,   4)=                 -0.055092860
 U(   2,   1)=                 -0.043931910
 U(   2,   2)=                  0.008485668
 U(   2,   3)=                  0.244728571
 U(   2,   4)=                 -0.968558675
 U(   3,   1)=                 -0.377805266
 U(   3,   2)=                  0.209407999
 U(   3,   3)=                  0.869724599
 U(   3,   4)=                  0.238727026
 U(   4,   1)=                 -0.072920479
 U(   4,   2)=                 -0.977751179
 U(   4,   3)=                  0.191877456
 U(   4,   4)=                  0.043223566
```

```
FILEO SVS-03   SAIDA     C1   VM/SP RELEASE 3.1 SLU306


  MATRIZ A OBTIDA PELO PRODUTO  U*S*VT

  A(  1,  1)=                    59.000000000
  A(  1,  2)=                     4.000000000
  A(  1,  3)=                    23.000000000
  A(  1,  4)=                   -20.000000000
  A(  2,  1)=                     4.000000000
  A(  2,  2)=                     5.000000000
  A(  2,  3)=                     1.000000000
  A(  2,  4)=                    -3.000000000
  A(  3,  1)=                    43.000000000
  A(  3,  2)=                    12.000000000
  A(  3,  3)=                     0.000000000
  A(  3,  4)=                    -2.000000000
  A(  4,  1)=                    -1.000000000
  A(  4,  2)=                     0.000000000
  A(  4,  3)=                    45.000000000
  A(  4,  4)=                     4.000000000

  COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

TESTE DOS DESVIOS
        0.0000000000


  COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

TESTE DOS DESVIOS
        0.0000000000


  INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
  (A-1)(  1,  1)=                   0.004611121
  (A-1)(  1,  2)=                  -0.043703434
  (A-1)(  1,  3)=                   0.016672724
  (A-1)(  1,  4)=                  -0.001385608
  (A-1)(  2,  1)=                  -0.021257344
  (A-1)(  2,  2)=                   0.127581925
  (A-1)(  2,  3)=                   0.037259979
  (A-1)(  2,  4)=                   0.008029711
  (A-1)(  3,  1)=                   0.002627355
  (A-1)(  3,  2)=                   0.014507238
  (A-1)(  3,  3)=                  -0.006920468
  (A-1)(  3,  4)=                   0.020556969
  (A-1)(  4,  1)=                  -0.028404961
  (A-1)(  4,  2)=                  -0.174132291
  (A-1)(  4,  3)=                   0.082023442
  (A-1)(  4,  4)=                   0.018387698
```

```
DEO DVS-03    SAIDA     CI   VM/SP RELEASE 3.1 SLU306

---------------

RMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)           0.0000000000
ENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A           0.0000000000

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                              25.4840836486761287

----------------------------------------

PROBLEMA N.          2
----------
ORDEM DA MATRIZ        3  POR   3
DADOS DE ENTRADA
MATRIZ  - A -  (DADA)
   1,   1)=          35.50000000
   1,   2)=           1.00000000
   1,   3)=           0.70000000
   2,   1)=          -4.50000000
   2,   2)=           0.95000000
   2,   3)=          -1.20000000
   3,   1)=          55.40000000
   3,   2)=          30.40000000
   3,   3)=         -30.30000000

VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S
S(   1)=                       133.827427584
S(   2)=                        71.679955331
S(   3)=                         5.24156101

MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA
U**T(   1,   1)=                       -0.403491571
U**T(   1,   2)=                        0.017788373
U**T(   1,   3)=                       -0.883283907
U**T(   2,   1)=                        0.881580177
U**T(   2,   2)=                       -0.059188575
U**T(   2,   3)=                       -0.468674106
U**T(   3,   1)=                       -0.000613975
U**T(   3,   2)=                       -0.998088529
U**T(   3,   3)=                        0.012081279

MATRIZ V- POR LINHA
V(   1,   1)=                  -0.719316912
V(   1,   2)=                   0.692847303
V(   1,   3)=                   0.050455873
V(   2,   1)=                  -0.364290790
V(   2,   2)=                  -0.314869192
V(   2,   3)=                  -0.870620916
V(   3,   1)=                   0.591502064
V(   3,   2)=                   0.648948862
V(   3,   3)=                  -0.478528968

TRIZ V TRANSPOSTA
```

```
V*T(  1,  1)=          -0.719316912
V*T(  1,  2)=          -0.364290790
V*T(  1,  3)=           0.591502664
V*T(  2,  1)=           0.692847503
V*T(  2,  2)=          -0.314569192
V*T(  2,  3)=           0.648948662
V*T(  3,  1)=           0.050455879
V*T(  3,  2)=          -0.876020916
V*T(  3,  3)=          -0.478528968

MATRIZ  U  - POR LINHA
U(  1,  1)=            -0.468491571
U(  1,  2)=             0.881366177
U(  1,  3)=            -0.000613975
U(  2,  1)=             0.017786373
U(  2,  2)=            -0.059185575
U(  2,  3)=            -0.996088529
U(  3,  1)=            -0.883288907
U(  3,  2)=            -0.466674166
U(  3,  3)=             0.012051279

MATRIZ A OBTIDA PELO PRODUTO  U*S*VT

A(  1,  1)=            88.500000000
A(  1,  2)=             1.300000000
A(  1,  3)=             0.700000000
A(  2,  1)=            -4.550000000
A(  2,  2)=             0.590000000
A(  2,  3)=            -1.200000000
A(  3,  1)=            55.400000000
A(  3,  2)=            56.400000000
A(  3,  3)=           -66.500000000

COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

[illegible] DOS DESVIOS
        0.000000000


COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

[illegible] DOS DESVIOS
        0.000000000


INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
(A-1)(  1,  1)=           0.005406496
(A-1)(  1,  2)=          -0.096745223
(A-1)(  1,  3)=           0.001760899
(A-1)(  2,  1)=           0.095876376
(A-1)(  2,  2)=           1.509325248
```

LEO DVS-03 SAIDA C1 VM/SP RELEASE 3.1 SLU306

```
(A-1)(  2,  3)=                    -0.015499432
(A-1)(  3,  1)=                     0.061075029
(A-1)(  3,  2)=                     0.910685631
(A-1)(  3,  3)=                    -0.019463816
```

```
EMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)          0.0000000000
ENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A          0.0000000000

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                          236.223444623275405
```

ANEXO 3 - LISTAGEM DO EXEMPLO DO CAPÍTULO III

```
---------------------------------------------------

 PROBLEMA N.            1
-----------
 ORDEM DA MATRIZ        5   POR    5
 DADOS DE ENTRADA
 MATRIZ  - A -  (DADA)
A(  1,   1)=          10.00000000
A(  1,   2)=           9.00000000
A(  1,   3)=           7.00000000
A(  1,   4)=           3.00000000
A(  1,   5)=           1.00000000
A(  2,   1)=          50.00000000
A(  2,   2)=          45.00000000
A(  2,   3)=          40.00000000
A(  2,   4)=          22.00000000
A(  2,   5)=         145.00000000
A(  3,   1)=         123.00000000
A(  3,   2)=          33.00000000
A(  3,   3)=          35.00000000
A(  3,   4)=          54.00000000
A(  3,   5)=          40.00000000
A(  4,   1)=         -60.00000000
A(  4,   2)=         -53.00000000
A(  4,   3)=          76.00000000
A(  4,   4)=          20.00000000
A(  4,   5)=          30.00000000
A(  5,   1)=          46.00000000
A(  5,   2)=          56.00000000
A(  5,   3)=          20.00000000
A(  5,   4)=          45.00000000
A(  5,   5)=          11.00000000

 VALORES SINGULARES- DIAGONAL DA MATRIZ S
 S(   1)=                     214.702879318
 S(   2)=                     131.383936726
 S(   3)=                      77.559126827
 S(   4)=                      41.341130226
 S(   5)=                       5.694521949

 MATRIZ U TRANSPOSTA- POR LINHA
 U**T(   1,    1)=                         -0.058070475
 U**T(   1,    2)=                         -0.693705063
 U**T(   1,    3)=                         -0.630668129
 U**T(   1,    4)=                          0.060639334
 U**T(   1,    5)=                         -0.337611741
 U**T(   2,    1)=                          0.035421598
 U**T(   2,    2)=                         -0.455328633
 U**T(   2,    3)=                          0.302955264
 U**T(   2,    4)=                         -0.807389465
 U**T(   2,    5)=                          0.218544058
 U**T(   3,    1)=                         -0.055245576
 U**T(   3,    2)=                          0.557765668
 U**T(   3,    3)=                         -0.521104109
```

```
U**T(   3,   4)=                    -0.585110875
U**T(   3,   5)=                    -0.268218483
U**T(   4,   1)=                    -0.065342685
U**T(   4,   2)=                    -0.017386628
U**T(   4,   3)=                     0.487578407
U**T(   4,   4)=                    -0.045532553
U**T(   4,   5)=                    -0.867470549
U**T(   5,   1)=                    -0.992447503
U**T(   5,   2)=                    -0.005162320
U**T(   5,   3)=                     0.034548847
U**T(   5,   4)=                     0.004144351
U**T(   5,   5)=                     0.117518067

MATRIZ V- POR LINHA
V(   1,   1)=                 -0.614834036
V(   1,   2)=                  0.558269741
V(   1,   3)=                 -0.180396252
V(   1,   4)=                  0.509122281
V(   1,   5)=                 -0.136256006
V(   2,   1)=                 -0.347790178
V(   2,   2)=                  0.341416460
V(   2,   3)=                  0.301659537
V(   2,   4)=                 -0.765642428
V(   2,   5)=                 -0.292010257
V(   3,   1)=                 -0.243926518
V(   3,   2)=                 -0.489804764
V(   3,   3)=                 -0.594998090
V(   3,   4)=                 -0.122420566
V(   3,   5)=                 -0.575831246
V(   4,   1)=                 -0.295625022
V(   4,   2)=                  0.001029901
V(   4,   3)=                 -0.513241510
V(   4,   4)=                 -0.345143585
V(   4,   5)=                  0.728054836
V(   5,   1)=                 -0.595085540
V(   5,   2)=                 -0.576072851
V(   5,   3)=                  0.508939231
V(   5,   4)=                  0.143091885
V(   5,   5)=                  0.185792472

MATRIZ V TRANSPOSTA

V**T(   1,   1)=                    -0.614834036
V**T(   1,   2)=                    -0.347790178
V**T(   1,   3)=                    -0.243926518
V**T(   1,   4)=                    -0.295625022
V**T(   1,   5)=                    -0.595085540
V**T(   2,   1)=                     0.558269741
V**T(   2,   2)=                     0.341416460
V**T(   2,   3)=                    -0.489804764
V**T(   2,   4)=                     0.001029901
V**T(   2,   5)=                    -0.576072851
V**T(   3,   1)=                    -0.180396252
V**T(   3,   2)=                     0.301659537
V**T(   3,   3)=                    -0.594998090
```

V**T(3, 4)= -0.513241510
V**T(3, 5)= 0.508939231
V**T(4, 1)= 0.509122281
V**T(4, 2)= -0.765642428
V**T(4, 3)= -0.122420566
V**T(4, 4)= -0.345143585
V**T(4, 5)= 0.143091885
V**T(5, 1)= -0.136256006
V**T(5, 2)= -0.292010257
V**T(5, 3)= -0.575831246
V**T(5, 4)= 0.728054836
V**T(5, 5)= 0.185792472

MATRIZ U - POR LINHA
U(1, 1)= -0.058070475
U(1, 2)= 0.035421598
U(1, 3)= -0.055245576
U(1, 4)= -0.085842885
U(1, 5)= -0.992447508
U(2, 1)= -0.693705063
U(2, 2)= -0.455328633
U(2, 3)= 0.557765668
U(2, 4)= -0.017886628
U(2, 5)= -0.005162320
U(3, 1)= -0.630668129
U(3, 2)= 0.302955264
U(3, 3)= -0.521104109
U(3, 4)= 0.487578407
U(3, 5)= 0.034548847
U(4, 1)= 0.060639334
U(4, 2)= -0.807389465
U(4, 3)= -0.585110875
U(4, 4)= -0.045532533
U(4, 5)= 0.004144351
U(5, 1)= -0.337611741
U(5, 2)= 0.218544058
U(5, 3)= -0.268218488
U(5, 4)= -0.867470549
U(5, 5)= 0.117518067

MATRIZ A OBTIDA PELO PRODUTO U*S*VT

A(1, 1)= 10.000000000
A(1, 2)= 9.000000000
A(1, 3)= 7.000000000
A(1, 4)= 3.000000000
A(1, 5)= 1.000000000
A(2, 1)= 50.000000000
A(2, 2)= 45.000000000
A(2, 3)= 40.000000000
A(2, 4)= 22.000000000
A(2, 5)= 145.000000000
A(3, 1)= 123.000000000
A(3, 2)= 33.000000000
A(3, 3)= 35.000000000

```
A(  3,  4)=                    54.000000000
A(  3,  5)=                    40.000000000
A(  4,  1)=                   -60.000000000
A(  4,  2)=                   -53.000000000
A(  4,  3)=                    76.000000000
A(  4,  4)=                    20.000000000
A(  4,  5)=                    30.000000000
A(  5,  1)=                    46.000000000
A(  5,  2)=                    56.000000000
A(  5,  3)=                    20.000000000
A(  5,  4)=                    45.000000000
A(  5,  5)=                    11.000000000


 COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

TESTE DOS DESVIOS
       0.0000000000


 COMPARACAO ENTRE A MATRIZ ORIGINAL (A) E A MATRIZ OBIDA POR U*S*VT

TESTE DOS DESVIOS
       0.0000000000


 INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
 (A-1)(  1,  1)=                 0.023134979
 (A-1)(  1,  2)=                -0.001342302
 (A-1)(  1,  3)=                 0.009483293
 (A-1)(  1,  4)=                -0.002503351
 (A-1)(  1,  5)=                -0.010975569
 (A-1)(  2,  1)=                 0.052452927
 (A-1)(  2,  2)=                 0.002705849
 (A-1)(  2,  3)=                -0.011019569
 (A-1)(  2,  4)=                -0.003841313
 (A-1)(  2,  5)=                 0.010111012
 (A-1)(  3,  1)=                 0.100568439
 (A-1)(  3,  2)=                -0.001218331
 (A-1)(  3,  3)=                -0.001352666
 (A-1)(  3,  4)=                 0.007145546
 (A-1)(  3,  5)=                -0.007688199
 (A-1)(  4,  1)=                -0.125723700
 (A-1)(  4,  2)=                -0.003250058
 (A-1)(  4,  3)=                 0.004665609
 (A-1)(  4,  4)=                 0.004692101
 (A-1)(  4,  5)=                 0.024508610
 (A-1)(  5,  1)=                -0.033034116
 (A-1)(  5,  2)=                 0.007348872
 (A-1)(  5,  3)=                -0.000184971
 (A-1)(  5,  4)=                -0.000489803
 (A-1)(  5,  5)=                -0.000950852
```

?MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1) 0.0000000000
ENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A 0.0000000000

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A = 37.7034071055540?

1

PROBLEMA N. 1

ORDEM DA MATRIZ 5 POR 5

10.000	9.000	7.000	3.000	1.000	1.000	0.0	0.0	0.0	0.0
50.000	45.000	40.000	22.000	145.000	0.0	1.000	0.0	0.0	0.0
123.000	33.000	35.000	54.000	40.000	0.0	0.0	1.000	0.0	0.0
-60.000	-83.000	76.000	20.000	30.000	0.0	0.0	0.0	1.000	0.0
46.000	56.000	20.000	45.000	11.000	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000

PASSO N. 1

1.000	0.900	0.700	0.300	0.100	0.100	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.000	5.000	7.000	140.000	-5.000	1.000	0.0	0.0	0.0
0.0	-77.700	-51.100	17.100	27.700	-12.300	0.0	1.000	0.0	0.0
0.0	1.000	118.000	36.000	36.000	6.000	0.0	0.0	1.000	0.0
0.0	14.000	-12.200	31.200	6.400	-4.600	0.0	0.0	0.0	1.000

PASSO N. 2

```
A(  1.  1)=                 1.000000
A(  1.  2)=                 0.0
A(  1.  3)=   -126663739519 7952.12
A(  1.  4)=   -1773292353277132.62
A(  1.  5)=  -3546584706554265 4.0
A(  1.  6)=    1266637395197951.94
A(  1.  7)=   -2533274790395 50.398
A(  1.  8)=                 0.0
A(  1.  9)=                 0.0
A(  1. 10)=                 0.0
A(  2.  1)=                 0.0
A(  2.  2)=                 1.000000
A(  2.  3)=    1407374883553281.00
A(  2.  4)=    1970324836974592.19
A(  2.  5)=   39406496739491840.0
A(  2.  6)=   -1407374883553279.37
A(  2.  7)=    2814749767106560.000
A(  2.  8)=                 0.0
A(  2.  9)=                 0.0
A(  2. 10)=                 0.0
A(  3.  1)=                 0.0
A(  3.  2)=                 0.0
```

```
A(  3,  3)=        10955302845069885.
A(  3,  4)=        13205420582272584.
A(  3,  5)=       306185479680015710.
A(  3,  6)=      -109553028452069846.
A(  3,  7)=         21570605690417971.0
A(  3,  8)=                         1.000000
A(  3,  9)=                         0.0
A(  3, 10)=                         0.0
A(  4,  1)=                         0.0
A(  4,  2)=                         0.0
A(  4,  3)=        -1407374883553157.94
A(  4,  4)=        -1970324836974547.12
A(  4,  5)=       -3940649673949184.0
A(  4,  6)=         1407374883553280.81
A(  4,  7)=        -281474976710655.000
A(  4,  8)=                         0.0
A(  4,  9)=                         1.000000
A(  4, 10)=                         0.0
A(  5,  1)=                         0.0
A(  5,  2)=                         0.0
A(  5,  3)=       -20547673299877916.0
A(  5,  4)=       -287667426199829016.0
A(  5,  5)=      -575334852396580896.
A(  5,  6)=        20547673299877883.0
A(  5,  7)=        -4109534659975578.00
A(  5,  8)=                         0.0
A(  5,  9)=                         0.0
A(  5, 10)=                         1.000000
```

PASSC N. 3

1.000	0.0	0.0	0.500	0.0	0.063	0.020	0.012	0.0	0.0
0.0	1.000	0.0	-1.375	-22.000	0.675	-0.188	-0.013	0.0	0.0
0.0	0.0	1.000	1.400	28.000	-1.000	0.200	0.000	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	-125.875	-3247.000	123.125	-23.418	0.013	1.000	0.0
0.0	0.0	0.0	69.000	672.000	-29.000	5.125	0.188	0.0	1.000

PASSC N. 4

1.000	0.0	0.0	0.0	-12.898	0.552	-0.073	0.012	0.004	0.0
0.0	1.000	0.0	0.0	13.469	-0.470	0.068	-0.013	-0.011	0.0
0.0	0.0	1.000	0.0	-8.114	0.369	-0.060	0.000	0.011	0.0
0.0	0.0	0.0	1.000	25.795	-0.978	0.156	-0.000	-0.008	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	-1107.888	38.493	-7.712	0.155	0.548	1.000

PASSC N. 5

1.000	0.0	0.0	0.0	0.000	0.103	0.016	0.009	-0.002	-0.012
0.0	1.000	0.0	0.0	-0.000	-0.002	-0.025	-0.011	-0.004	0.012

0.0	0.0	1.000	0.0	0.000	0.008	-0.00[illegible]	-0.001	0.007	-0.007
0.0	0.0	0.0	1.000	-0.000	-0.08[illegible]	0.000	0.004	0.003	0.023
0.0	0.0	0.0	0.0	1.000	-0.035	0.007	-0.000	-0.000	-0.001

DETERMINANTE
541782674.599999940

DETERMINANTE
0.541782674599999940 D+09

MATRIZ FINAL
A INVERSA APARECE NAS ULTIMAS 5 LINHAS E 5 COLUNAS

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA

IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1) 11.6915651031
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A 11.6915651031

ANEXO 4 - LISTAGEM DO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO ALGORITMO DVS-PLEX.

PROBLEMA N. 1
NUMERO DE RESTRICOES 2
NUMERO DE VARIAVEIS 3

MATRIZ A

A(1, 1)=	4545.00	A(1, 2)=	234.00	A(1, 3)=	3456.00
A(2, 1)=	676.00	A(2, 2)=	87987.00	A(2, 3)=	0.38
A(3, 1)=	0.87	A(3, 2)=	5.94	A(3, 3)=	984.00

MATRIZ B

B(1)=	8235.00	B(2)=	88663.37	B(3)=	990.81

MATRIZ C

C(1)=	1818001.00	C(2)=	93601.06	C(3)=	1382401.00

METODO DVS-PLEX

ITERACAO 1 -METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
ITERACAO 2 -METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL

X 1	1.760738068
X 2	0.994146142
X 6	983.270615572
VALOR DE Z	3294073.068049630

NUMERO DE ITERACOES 2

METODO SIMPLEX (USUAL)

X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X
4545.000	234.000	3456.000	1.000	0.0	0.0	8235.000
676.000	87987.000	0.385	0.0	1.000	0.0	88663.375
0.872	5.937	984.000	0.0	0.0	1.000	990.809
-1818001.00	-93601.062	-1382401.00	0.0	0.0	0.0	0.0

PIVOTEAMENTO N- 1

X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X
1.000	0.051	0.760	0.000	0.0	0.0	1.812
0.0	87951.187	-513.643	-0.149	1.000	0.0	87438.500
0.0	5.893	983.337	-0.000	0.0	1.000	989.229

0.0	-1.000	-1.000	400.000	0.0	0.0	3294001.00

PIVOTEAMENTO N- 2

X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X
1.000	0.0	0.761	0.000	-0.000	0.0	1.761
0.0	1.000	-0.006	-0.000	0.000	0.0	0.994
0.0	0.0	983.371	-0.000	-0.000	1.000	983.371
0.0	0.0	-1.000	400.000	0.000	0.0	3294002.00

PIVOTEAMENTO N- 3

X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X
1.000	0.0	0.0	0.000	-0.000	-0.001	1.000
0.0	1.000	0.0	-0.000	0.000	0.000	1.000
0.0	0.0	1.000	-0.000	-0.000	0.001	1.000
0.0	0.0	0.0	400.000	0.000	0.001	3294003.00

SOLUCAO FINAL

X 1	1.00000000
X 2	0.99999464
X 3	0.99999702
VALOR DE Z	3294003.00

ANEXO 5 - LISTAGEM DOS EXEMPLOS DE INVERSÃO DE MATRIZES

```
PROBLEMA N.        1
ORDEM DA MATRIZ      5  POR  5

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1, 1)=      [illegible]   A( 1, 2)=            4.40   A( 1, 3)=        61427.25   A( 1, 4)=  1440827554.60
A( 1, 5)=        40167.02
A( 2, 1)=      [illegible]   A( 2, 2)=        10318.21   A( 2, 3)=    242023842.92   A( 2, 4)=      -30326.30
A( 2, 5)=      [illegible]
A( 3, 1)=      [illegible]   A( 3, 2)=     10770541.19   A( 3, 3)=        19590.62   A( 3, 4)=   459517495.55
A( 3, 5)=      [illegible]
A( 4, 1)=      [illegible]   A( 4, 2)=       -34705.84   A( 4, 3)=   -814154073.80   A( 4, 4)=       -8056.33
A( 4, 5)=      [illegible]
A( 5, 1)=      [illegible]   A( 5, 2)=   -827012543.05   A( 5, 3)=        23410.16   A( 5, 4)=   549108695.42
A( 5, 5)=      [illegible]

INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
R( 1, 1)=        -0.00000420   R( 1, 2)=         0.00000001   R( 1, 3)=        -0.00001747
R( 1, 4)=        -0.00000000   R( 1, 5)=         0.14582307
R( 2, 1)=         0.00000000   R( 2, 2)=         0.00002255   R( 2, 3)=         0.00000000
R( 2, 4)=         0.00000006   R( 2, 5)=         0.00000016
R( 3, 1)=        -0.00000416   R( 3, 2)=        -0.00000000   R( 3, 3)=         0.00003397
R( 3, 4)=         0.00000012   R( 3, 5)=         0.00462349
R( 4, 1)=         0.00000000   R( 4, 2)=        -0.00000332   R( 4, 3)=        -0.00000000
R( 4, 4)=         0.60119092   R( 4, 5)=         0.00000013
R( 5, 1)=        -0.00000697   R( 5, 2)=        -0.00000000   R( 5, 3)=        -0.00000007
R( 5, 4)=         0.00000019   R( 5, 5)=         0.00000019

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)       0.0007992149
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A       0.0007992149

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                46951.6672528352415

PROBLEMA N.        2
ORDEM DA MATRIZ      5  POR  5

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1, 1)=      [illegible]   A( 1, 2)=         3333.00   A( 1, 3)=        63276.89   A( 1, 4)=  1484222633.67
A( 1, 5)=      [illegible]
```

A(2, 1)=	[illegible]	A(2, 2)=	-38443.32	A(2, 3)=	-901728591.67	A(2, 4)=	43510.99
A(2, 5)=	[illegible]						
A(3, 1)=	55757.22	A(3, 2)=	1307351527.55	A(3, 3)=	37065.11	A(3, 4)=	869868304.30
A(3, 5)=	46208.53						
A(4, 1)=	1033687287.23	A(4, 2)=	-9620.85	A(4, 3)=	-225666873.05	A(4, 4)=	1868.10
A(4, 5)=	45316097.30						
A(5, 1)=	-24566.95	A(5, 2)=	-976242431.30	A(5, 3)=	-64927.10	A(5, 4)=	44.00
A(5, 5)=	-40545.63						

INVERSA DE A OBTIDA PELA DECCMP. EM VALOR SINGULAR

R(1, 1)=	0.00000055	R(1, 2)=	0.00000001	R(1, 3)=	-0.00001747
R(1, 4)=	-0.00000000	R(1, 5)=	0.14562307		
R(2, 1)=	-0.00000000	R(2, 2)=	0.00002255	R(2, 3)=	0.00000000
R(2, 4)=	0.00000006	R(2, 5)=	0.00000016		
R(3, 1)=	0.00000320	R(3, 2)=	-0.00000000	R(3, 3)=	0.00003357
R(3, 4)=	0.00000012	R(3, 5)=	0.00462349		
R(4, 1)=	0.00000000	R(4, 2)=	-0.00000332	R(4, 3)=	-0.00000000
R(4, 4)=	0.00119392	R(4, 5)=	0.00000013		
R(5, 1)=	0.00000284	R(5, 2)=	-0.00000000	R(5, 3)=	-0.00000007
R(5, 4)=	0.00000019	R(5, 5)=	0.00000019		

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)   0.0011144245
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A   0.0011144245

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =   36239.9534161113461

PROBLEMA N.   3

ORDEM DA MATRIZ   5 POR 5

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ - A - (DADA)

A(1, 1)=	287436.00	A(1, 2)=	87436.00	A(1, 3)=	7436.00	A(1, 4)=	436.00
A(1, 5)=	36.00						
A(2, 1)=	-283746.00	A(2, 2)=	-3746.00	A(2, 3)=	-46.00	A(2, 4)=	-6.00
A(2, 5)=	-0.21						
A(3, 1)=	7.33	A(3, 2)=	5.33	A(3, 3)=	5.33	A(3, 4)=	4.33
A(3, 5)=	37.00						
A(4, 1)=	44.00	A(4, 2)=	33.00	A(4, 3)=	755.00	A(4, 4)=	77.00
A(4, 5)=	3.33						
A(5, 1)=	56.00	A(5, 2)=	46.00	A(5, 3)=	66.00	A(5, 4)=	76.00
A(5, 5)=	86.00						

INVERSA DE A OBTIDA PELA DECCMP. EM VALOR SINGULAR

```
R( 1, 1)=        -0.00000010   R( 1, 2)=        0.00000001   R( 1, 3)=        -0.00001747
R( 1, 4)=        -0.00000000   R( 1, 5)=        0.14562307
R( 2, 1)=         0.00031150   R( 2, 2)=        0.00002255   R( 2, 3)=         0.00000000
R( 2, 4)=         0.00000006   R( 2, 5)=        0.00000016
R( 3, 1)=         0.00000011   R( 3, 2)=       -0.00000000   R( 3, 3)=         0.00003357
R( 3, 4)=         0.00000012   R( 3, 5)=        0.03462349
R( 4, 1)=        -0.00000610   R( 4, 2)=       -0.00000332   R( 4, 3)=        -0.00000000
R( 4, 4)=         0.00119092   R( 4, 5)=        0.00000013
R( 5, 1)=        -0.00000100   R( 5, 2)=       -0.00000000   R( 5, 3)=        -0.00000007
R( 5, 4)=         0.00000019   R( 5, 5)=        0.00000019

-----------------


NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)        0.0000291857
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A        0.0000291857

 NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                   21021.0104265168127

------------------------------------------

 PROBLEMA N.         4
----------
 ORDEM DA MATRIZ      3   POR   3

 DADOS DE ENTRADA
 MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1, 1)=         -0.00     A( 1, 2)=        -1.00    A( 1, 3)=        -4.00
A( 2, 1)=      868770.00    A( 2, 2)=    135650.00    A( 2, 3)=    923870.00
A( 3, 1)=          0.00     A( 3, 2)=         0.00    A( 3, 3)=         0.00

 INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
R( 1, 1)=         0.24805574   R( 1, 2)=       -0.00000510   R( 1, 3)=         0.00002255
R( 2, 1)=        -0.10991120   R( 2, 2)=       -0.00000100   R( 2, 3)=        -0.00000000
R( 3, 1)=        -0.22252194   R( 3, 2)=        0.00000001   R( 3, 3)=        -0.00000332

-----------------


NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)        0.0046808660
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A        0.0046808660

 NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =              22890712402980S.289

------------------------------------------
```

PROBLEMA N. 5

ORDEM DA MATRIZ 3 POR 3

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ - A - (DADA)

A(1, 1)=	-0.01	A(1, 2)=	-0.51	A(1, 3)=	-9.01
A(2, 1)=	9898989.99	A(2, 2)=	9854766.55	A(2, 3)=	9854787.80
A(3, 1)=	0.00	A(3, 2)=	0.00	A(3, 3)=	0.00

INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR

R(1, 1)=	0.17214040	R(1, 2)=	-0.00000510	R(1, 3)=	0.00002265
R(2, 1)=	-0.06866925	R(2, 2)=	-0.00000100	R(2, 3)=	-0.00000000
R(3, 1)=	-0.10424341	R(3, 2)=	0.00000001	R(3, 3)=	-0.00000332

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1) 2.1514371109
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A 2.1514371109

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A = 273376942464985.961/

PROBLEMA N. 6

ORDEM DA MATRIZ 8 POR 8

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ - A - (DADA)

A(1, 1)=	1.00	A(1, 2)=	-1.00	A(1, 3)=	0.0	A(1, 4)=	0.0
A(1, 5)=	0.0	A(1, 6)=	0.0	A(1, 7)=	0.0	A(1, 8)=	0.0
A(2, 1)=	-1.00	A(2, 2)=	2.00	A(2, 3)=	-1.00	A(2, 4)=	0.0
A(2, 5)=	0.0	A(2, 6)=	0.0	A(2, 7)=	0.0	A(2, 8)=	0.0
A(3, 1)=	0.0	A(3, 2)=	-1.00	A(3, 3)=	2.00	A(3, 4)=	-1.00
A(3, 5)=	0.0	A(3, 6)=	0.0	A(3, 7)=	0.0	A(3, 8)=	0.0
A(4, 1)=	0.0	A(4, 2)=	0.0	A(4, 3)=	-1.00	A(4, 4)=	2.00
A(4, 5)=	-1.00	A(4, 6)=	0.0	A(4, 7)=	0.0	A(4, 8)=	0.0
A(5, 1)=	0.0	A(5, 2)=	0.0	A(5, 3)=	0.0	A(5, 4)=	-1.00
A(5, 5)=	2.00	A(5, 6)=	-1.00	A(5, 7)=	0.0	A(5, 8)=	0.0
A(6, 1)=	0.0	A(6, 2)=	0.0	A(6, 3)=	0.0	A(6, 4)=	0.0
A(6, 5)=	-1.00	A(6, 6)=	2.00	A(6, 7)=	-1.00	A(6, 8)=	0.0
A(7, 1)=	0.0	A(7, 2)=	0.0	A(7, 3)=	0.0	A(7, 4)=	0.0
A(7, 5)=	0.0	A(7, 6)=	-1.00	A(7, 7)=	2.00	A(7, 8)=	-1.00
A(8, 1)=	0.0	A(8, 2)=	0.0	A(8, 3)=	0.0	A(8, 4)=	0.0
A(8, 5)=	0.0	A(8, 6)=	0.0	A(8, 7)=	-1.00	A(8, 8)=	2.00

INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR

R(1, 1)=	[illegible]	R(1, 2)=	-0.00000032	R(1, 3)=	0.00000000
R(1, 4)=	0.00000019	R(1, 5)=	8.00000000	R(1, 6)=	-0.00001145
R(1, 7)=	0.0	R(1, 8)=	0.0		
R(2, 1)=	7.00000000	R(2, 2)=	-0.00000000	R(2, 3)=	0.00000012
R(2, 4)=	3.00000001	R(2, 5)=	5.00000000	R(2, 6)=	0.00000000
R(2, 7)=	0.0	R(2, 8)=	0.0		
R(3, 1)=	0.00000000	R(3, 2)=	-0.00001747	R(3, 3)=	0.80419092
R(3, 4)=	0.00000016	R(3, 5)=	4.00000000	R(3, 6)=	0.00000395
R(3, 7)=	0.0	R(3, 8)=	0.00000738		
R(4, 1)=	5.00000000	R(4, 2)=	0.00000000	R(4, 3)=	0.00000019
R(4, 4)=	0.00000009	R(4, 5)=	3.00000000	R(4, 6)=	-0.00000000
R(4, 7)=	0.0	R(4, 8)=	-0.00000000		
R(5, 1)=	4.00000000	R(5, 2)=	0.00003397	R(5, 3)=	0.14962307
R(5, 4)=	0.00000003	R(5, 5)=	2.00000000	R(5, 6)=	-0.00000004
R(5, 7)=	0.0	R(5, 8)=	6.00000000		
R(6, 1)=	3.00000000	R(6, 2)=	-0.00000000	R(6, 3)=	0.00000010
R(6, 4)=	0.00000021	R(6, 5)=	1.00000000	R(6, 6)=	-0.00000000
R(6, 7)=	0.0	R(6, 8)=	6.00000000		
R(7, 1)=	2.00000000	R(7, 2)=	-0.00000007	R(7, 3)=	0.00402049
R(7, 4)=	7.00000000	R(7, 5)=	-0.00000314	R(7, 6)=	0.0
R(7, 7)=	0.0	R(7, 8)=	6.00000000		
R(8, 1)=	1.00000000	R(8, 2)=	-0.00000000	R(8, 3)=	0.00000013
R(8, 4)=	7.00000000	R(8, 5)=	-0.00000000	R(8, 6)=	0.0
R(8, 7)=	0.0	R(8, 8)=	5.00000000		

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)   0.0000000000
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A   0.0000000000

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =   113.455245378115840

PROBLEMA N.   7

ORDEM DA MATRIZ   10 POR 10

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ - A - (DADA)

A(1, 1)=	1.00	A(1, 2)=	0.50	A(1, 3)=	0.33	A(1, 4)=	0.25
A(1, 5)=	0.20	A(1, 6)=	0.17	A(1, 7)=	0.14	A(1, 8)=	0.13
A(1, 9)=	0.11	A(1,10)=	0.10				
A(2, 1)=	0.50	A(2, 2)=	0.33	A(2, 3)=	0.25	A(2, 4)=	0.20
A(2, 5)=	0.17	A(2, 6)=	0.14	A(2, 7)=	0.13	A(2, 8)=	0.11
A(2, 9)=	0.10	A(2,10)=	0.09				
A(3, 1)=	0.33	A(3, 2)=	0.25	A(3, 3)=	0.20	A(3, 4)=	0.17
A(3, 5)=	0.14	A(3, 6)=	0.13	A(3, 7)=	0.11	A(3, 8)=	0.10
A(3, 9)=	0.09	A(3,10)=	0.08				
A(4, 1)=	0.25	A(4, 2)=	0.20	A(4, 3)=	0.17	A(4, 4)=	0.14

```
A( 4, 5)=      [illegible]   A( 4, 6)=      C.11   A( 4, 7)=      0.10   A( 4, 8)=      0.07
A( 4, 9)=      [illegible]   A( 4,10)=      C.05
A( 5, 1)=      0.20   A( 5, 2)=      C.17   A( 5, 3)=      0.14   A( 5, 4)=      0.13
A( 5, 5)=      0.11   A( 5, 6)=      C.10   A( 5, 7)=      0.09   A( 5, 8)=      0.05
A( 5, 9)=      [illegible]   A( 5,10)=      C.07
A( 6, 1)=      0.17   A( 6, 2)=      C.14   A( 6, 3)=      0.10   A( 6, 4)=      0.11
A( 6, 5)=      0.10   A( 6, 6)=      C.09   A( 6, 7)=      0.06   A( 6, 8)=      0.08
A( 6, 9)=      0.07   A( 6,10)=      C.07
A( 7, 1)=      0.14   A( 7, 2)=      C.13   A( 7, 3)=      0.11   A( 7, 4)=      0.10
A( 7, 5)=      0.09   A( 7, 6)=      C.08   A( 7, 7)=      0.06   A( 7, 8)=      0.07
A( 7, 9)=      0.07   A( 7,10)=      C.06
A( 8, 1)=      0.13   A( 8, 2)=      C.11   A( 8, 3)=      0.10   A( 8, 4)=      0.09
A( 8, 5)=      0.08   A( 8, 6)=      C.08   A( 8, 7)=      0.07   A( 8, 8)=      0.07
A( 8, 9)=      0.06   A( 8,10)=      C.06
A( 9, 1)=      0.11   A( 9, 2)=      C.10   A( 9, 3)=      0.09   A( 9, 4)=      0.08
A( 9, 5)=      0.08   A( 9, 6)=      C.07   A( 9, 7)=      0.07   A( 9, 8)=      0.06
A( 9, 9)=      0.06   A( 9,10)=      C.06
A(10, 1)=      0.10   A(10, 2)=      C.09   A(10, 3)=      0.06   A(10, 4)=      0.08
A(10, 5)=      0.07   A(10, 6)=      C.07   A(10, 7)=      0.06   A(10, 8)=      0.06
A(10, 9)=      0.06   A(10,10)=      0.05

  INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
R( 1, 1)=          52.65900506   R( 1, 2)=    -0.00001747   R( 1, 3)=    0.14982307
R( 1, 4)=       -1374.58547565   R( 1, 5)=    -0.00001145   R( 1, 6)=    0.0
R( 1, 7)=       10555.60956876   R( 1, 8)=    -0.00001490   R( 1, 9)=    0.00000001
R( 1,10)=      -30721.05613370
R( 2, 1)=       -1366.16006592   R( 2, 2)=     0.00000000   R( 2, 3)=    0.00000016
R( 2, 4)=       47856.28150811   R( 2, 5)=     0.00000000   R( 2, 6)=    0.0
R( 2, 7)=     -430945.36356456   R( 2, 8)=     0.00000000   R( 2, 9)=    0.00000000
R( 2,10)=     1529903.71132473
R( 3, 1)=       10658.94010146   R( 3, 2)=     0.00003357   R( 3, 3)=    0.00462349
R( 3, 4)=     -428450.99515437   R( 3, 5)=     0.00000395   R( 3, 6)=    0.0
R( 3, 7)=     4058050.03292911   R( 3, 8)=     0.00002369   R( 3, 9)=    0.0
R( 3,10)=   -14556925.22847551
R( 4, 1)=      -36033.88258838   R( 4, 2)=    -0.00000000   R( 4, 3)=    0.00000013
R( 4, 4)=     1512075.36192749   R( 4, 5)=    -0.00000000   R( 4, 6)=    0.0
R( 4, 7)=   -14858279.61610511   R( 4, 8)=    -0.00000000   R( 4, 9)=    0.0
R( 4,10)=    54633735.24117371
R( 5, 1)=       48450.72121652   R( 5, 2)=    -0.00000007   R( 5, 3)=    0.00000019
R( 5, 4)=    -2065019.60101145   R( 5, 5)=    -0.00000004   R( 5, 6)=    0.0
R( 5, 7)=    20591061.81067621   R( 5, 8)=    -0.00000006   R( 5, 9)=    0.0
R( 5,10)=   -71549266.90793971
R( 6, 1)=       -3807.16628793   R( 6, 2)=    -0.00000000   R( 6, 3)=    0.00000001
R( 6, 4)=      129623.40600823   R( 6, 5)=    -0.00000000   R( 6, 6)=    0.0
R( 6, 7)=      -2452.44222422    R( 6, 8)=     0.00000000   R( 6, 9)=    0.0
R( 6,10)=   -11259753.15590593
R( 7, 1)=      -39257.70434001   R( 7, 2)=     0.00000006   R( 7, 3)=    0.00000018
R( 7, 4)=     1754464.72214523   R( 7, 5)=     0.0          R( 7, 6)=    0.0
R( 7, 7)=   -17965139.47759468   R( 7, 8)=     0.00000000   R( 7, 9)=    0.0
R( 7,10)=    64695556.72508802
R( 8, 1)=        -631.98321432   R( 8, 2)=     0.00000012   R( 8, 3)=    0.00300009
R( 8, 4)=      226735.40117219   R( 8, 5)=     0.0          R( 8, 6)=    0.0
R( 8, 7)=    -6546817.42402565   R( 8, 8)=     0.00000001   R( 8, 9)=    0.0
R( 8,10)=     6141617.66577675
```

R(9, 1)=	[illegible]	R(9, 2)=	0.00115094	R(9, 3)=	[illegible]
R(9, 4)=	[illegible]	R(9, 5)=	0.0	R(9, 6)=	0.00000780
R(9, 7)=	2605474.4017121	R(9, 8)=	0.00000001	R(9, 9)=	-0.00031012
R(9,10)=	-1457505?8.01466705				
R(10, 1)=	-21467.37773283	R(10, 2)=	0.00000019	R(10, 3)=	0.00000021
R(10, 4)=	1005300.575[illegible]	R(10, 5)=	0.0	R(10, 6)=	-0.00000000
R(10, 7)=	[illegible]	R(10, 8)=	0.00000000	R(10, 9)=	0.00000003
R(10,10)=	22410720.61785604				

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)   0.3038273719
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A   0.3038273719

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =   1977386173.18338585

PROBLEMA N.   6

ORDEM DA MATRIZ   6 POR 6

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ - A - (DADA)

A(1, 1)=	-20773.44	A(1, 2)=	-30773.44	A(1, 3)=	-8289.98	A(1, 4)=	-4289.93
A(1, 5)=	30026.18	A(1, 6)=	68628.18				
A(2, 1)=	993.11	A(2, 2)=	593.11	A(2, 3)=	377.76	A(2, 4)=	77.70
A(2, 5)=	7.39	A(2, 6)=	-42857.29				
A(3, 1)=	1.35	A(3, 2)=	7541.35	A(3, 3)=	9.07	A(3, 4)=	-36279.07
A(3, 5)=	23040.36	A(3, 6)=	40.36				
A(4, 1)=	3201.24	A(4, 2)=	1.24	A(4, 3)=	-64910.60	A(4, 4)=	0.0
A(4, 5)=	3.00	A(4, 6)=	-25807.07				
A(5, 1)=	5.00	A(5, 2)=	-110.19	A(5, 3)=	7.00	A(5, 4)=	32017.48
A(5, 5)=	8.00	A(5, 6)=	-52997.90				
A(6, 1)=	89.00	A(6, 2)=	-64922.25	A(6, 3)=	5.00	A(6, 4)=	61163.70
A(6, 5)=	6.00	A(6, 6)=	7.82				

INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR

R(1, 1)=	-0.00005601	R(1, 2)=	-39257.70454001	R(1, 3)=	0.00003397
R(1, 4)=	0.00119092	R(1, 5)=	0.00000019	R(1, 6)=	-0.00016895
R(2, 1)=	-0.00000223	R(2, 2)=	-631.98321432	R(2, 3)=	-0.00000000
R(2, 4)=	0.00000019	R(2, 5)=	0.00000001	R(2, 6)=	-0.00004503
R(3, 1)=	-0.00000229	R(3, 2)=	43198.74875815	R(3, 3)=	-0.00000007
R(3, 4)=	0.14982307	R(3, 5)=	0.00000018	R(3, 6)=	0.00000191
R(4, 1)=	-0.00000227	R(4, 2)=	-21467.37773283	R(4, 3)=	-0.00000000
R(4, 4)=	0.00000016	R(4, 5)=	0.00000009	R(4, 6)=	-0.00004787
R(5, 1)=	-0.00000284	R(5, 2)=	-0.00001747	R(5, 3)=	0.00000000
R(5, 4)=	0.00482349	R(5, 5)=	0.00000008	R(5, 6)=	-0.00000037
R(6, 1)=	-0.00000137	R(6, 2)=	0.00000000	R(6, 3)=	0.00000012

```
[illegible]

-------------------

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)        0.0000000000
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A        0.0000000000

  NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =                    22.761875145862842

------------------------------------------------

  PROBLEMA N.         5
  -----------
  ORDEM DA MATRIZ      5  POR   5

  DADOS DE ENTRADA
  MATRIZ  - A -  (DADA)
A( 1, 1)=        2075.48     A( 1, 2)=   55813065.24     A( 1, 3)=      41935.96     A( 1, 4)=  963649606.13
A( 1, 5)=      -49934.35
A( 2, 1)=           4.00     A( 2, 2)=     -24883.72     A( 2, 3)= -583672507.00     A( 2, 4)=      43526.48
A( 2, 5)=  1026957054.25
A( 3, 1)=      -31417.76     A( 3, 2)=          5.00     A( 3, 3)=     -31576.18     A( 3, 4)= -740650870.75
A( 3, 5)=       30459.92
A( 4, 1)=  1325262075.88     A( 4, 2)=     -64054.23     A( 4, 3)=          5.00     A( 4, 4)=     -42395.30
A( 4, 5)=  -994424175.12
A( 5, 1)=       25735.83     A( 5, 2)=  657502506.50     A( 5, 3)=      -6035.66     A( 5, 4)= -141572536.25
A( 5, 5)=      -31947.65

  INVERSA DE A OBTIDA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR
R( 1, 1)=            -0.00002397     R( 1, 2)=          -0.00000137     R( 1, 3)=          -0.00001747
R( 1, 4)=            -0.00000000     R( 1, 5)=           0.14582307
R( 2, 1)=            -0.00000000     R( 2, 2)=      -39257.70454001     R( 2, 3)=           0.00000000
R( 2, 4)=             0.00000006     R( 2, 5)=           0.00000016
R( 3, 1)=            -0.00008537     R( 3, 2)=        -631.98321432     R( 3, 3)=           0.00000397
R( 3, 4)=             0.00000012     R( 3, 5)=           0.00462349
R( 4, 1)=             0.00000000     R( 4, 2)=       43198.74875815     R( 4, 3)=          -0.00000000
R( 4, 4)=             0.00115092     R( 4, 5)=           0.00000013
R( 5, 1)=            -0.00003194     R( 5, 2)=      -21487.37773283     R( 5, 3)=          -0.00000007
R( 5, 4)=             0.00000019     R( 5, 5)=           0.00000019

-------------------

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)        0.0009745393
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A        0.0009745393
```

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =   206746.87464764366

PROBLEMA N.   10

ORDEM DA MATRIZ   16   POR   16

DADOS DE ENTRADA
MATRIZ - A - (DADA)

A(1, 1)=	29959.15	A(1, 2)=	702732152.25	A(1, 3)=	62714.67	A(1, 4)=	1471035251.88
A(1, 5)=	17010.20	A(1, 6)=	417737865.38	A(1, 7)=	20172.72	A(1, 8)=	473171352.63
A(1, 9)=	40795.92	A(1,10)=	1097645724.88	A(1,11)=	-3832.55	A(1,12)=	-1366068219.50
A(1,13)=	-421.43	A(1,14)=	-9636154.25	A(1,15)=	14320.50	A(1,16)=	335901556.38
A(2, 1)=	26003.54	A(2, 2)=	672610438.00	A(2, 3)=	-35105.75	A(2, 4)=	-823440472.00
A(2, 5)=	29243.63	A(2, 6)=	685939750.75	A(2, 7)=	-56201.31	A(2, 8)=	5.00
A(2, 9)=	-30721.09	A(2,10)=	5.00	A(2,11)=	-60645.59	A(2,12)=	7.00
A(2,13)=	9.00	A(2,14)=	162571476.13	A(2,15)=	-50796.50	A(2,16)=	9.00
A(3, 1)=	-21301.11	A(3, 2)=	9.00	A(3, 3)=	21938.52	A(3, 4)=	514585332.85
A(3, 5)=	61157.32	A(3, 6)=	1434495783.13	A(3, 7)=	55350.52	A(3, 8)=	1392125786.13
A(3, 9)=	[illegible]	A(3,10)=	192162837.75	A(3,11)=	25553.33	A(3,12)=	599376956.13
A(3,13)=	34102.12	A(3,14)=	861072606.75	A(3,15)=	30974.89	A(3,16)=	726540942.88
A(4, 1)=	88319.23	A(4, 2)=	1307936236.38	A(4, 3)=	-1391.26	A(4, 4)=	-32633417.70
A(4, 5)=	60015.76	A(4, 6)=	1407729615.25	A(4, 7)=	-49139.43	A(4, 8)=	6.00
A(4, 9)=	-5757.21	A(4,10)=	-87669302.81	A(4,11)=	47867.40	A(4,12)=	1122777789.35
A(4,13)=	59871.83	A(4,14)=	935233692.13	A(4,15)=	61032.55	A(4,16)=	1431579419.50
A(5, 1)=	-22078.53	A(5, 2)=	66.00	A(5, 3)=	50329.21	A(5, 4)=	1180532206.35
A(5, 5)=	24748.77	A(5, 6)=	580307138.13	A(5, 7)=	-33772.57	A(5, 8)=	-792169560.85
A(5, 9)=	40078.43	A(5,10)=	1127728837.83	A(5,11)=	-32517.36	A(5,12)=	-762727548.00
A(5,13)=	-3172.16	A(5,14)=	-74404665.38	A(5,15)=	31957.93	A(5,16)=	749665107.13
A(6, 1)=	24040.60	A(6, 2)=	573610148.38	A(6, 3)=	40692.61	A(6, 4)=	954485755.05
A(6, 5)=	12452.62	A(6, 6)=	292093444.83	A(6, 7)=	53630.48	A(6, 8)=	1257956641.50
A(6, 9)=	-22105.04	A(6,10)=	-519521775.88	A(6,11)=	7963.31	A(6,12)=	186759094.38
A(6,13)=	-45714.23	A(6,14)=	4.00	A(6,15)=	2768.66	A(6,16)=	66402772.09
A(7, 1)=	-15754.53	A(7, 2)=	-463363018.00	A(7, 3)=	-64098.12	A(7, 4)=	4.00
A(7, 5)=	49225.71	A(7, 6)=	1154708643.75	A(7, 7)=	-47067.13	A(7, 8)=	6.00
A(7, 9)=	24952.07	A(7,10)=	567449109.63	A(7,11)=	-5943.50	A(7,12)=	-233234644.38
A(7,13)=	-20042.50	A(7,14)=	-610852788.38	A(7,15)=	50397.63	A(7,16)=	1182126783.03
A(8, 1)=	-44522.90	A(8, 2)=	6.00	A(8, 3)=	-55509.61	A(8, 4)=	6.00
A(8, 5)=	36004.45	A(8, 6)=	863519720.88	A(8, 7)=	65045.75	A(8, 8)=	1525713112.00
A(8, 9)=	18240.02	A(8,10)=	380939516.75	A(8,11)=	50884.86	A(8,12)=	1193555169.68
A(8,13)=	-30.79	A(8,14)=	-722253.75	A(8,15)=	-27680.36	A(8,16)=	-649282787.25
A(9, 1)=	19823.95	A(9, 2)=	453262644.50	A(9, 3)=	-60863.74	A(9, 4)=	7.00
A(9, 5)=	-37610.90	A(9, 6)=	9.00	A(9, 7)=	60615.12	A(9, 8)=	1421788260.35
A(9, 9)=	-34015.63	A(9,10)=	-811930173.00	A(9,11)=	-53906.54	A(9,12)=	10.00
A(9,13)=	32140.03	A(9,14)=	847701306.00	A(9,15)=	-16925.16	A(9,16)=	-396596465.00
A(10, 1)=	-10900.39	A(10, 2)=	-255750022.13	A(10, 3)=	28545.79	A(10, 4)=	669569536.03
A(10, 5)=	-28229.20	A(10, 6)=	-662145471.25	A(10, 7)=	50030.36	A(10, 8)=	1187726335.06
A(10, 9)=	36713.10	A(10,10)=	908103254.75	A(10,11)=	-61265.68	A(10,12)=	4.00
A(10,13)=	-25934.22	A(10,14)=	-608313035.00	A(10,15)=	16659.79	A(10,16)=	390772012.25
A(11, 1)=	34467.14	A(11, 2)=	803930278.88	A(11, 3)=	-61069.35	A(11, 4)=	6.00
A(11, 5)=	19495.34	A(11, 6)=	457282595.75	A(11, 7)=	-37671.77	A(11, 8)=	-883320226.13
A(11, 9)=	33335.09	A(11,10)=	774870975.75	A(11,11)=	-55708.16	A(11,12)=	5.00
A(11,13)=	-10006.03	A(11,14)=	-248781482.75	A(11,15)=	33472.75	A(11,16)=	768130915.05

A(12, 1)=	[illegible]	A(12, 2)=	5.00	A(12, 3)=	-[illegible]	A(12, 4)=	[illegible]
A(12, 5)=	[illegible]	A(12, 6)=	[illegible]	A(12, 7)=	-28610.89	A(12, 8)=	[illegible]
A(12, 9)=	[illegible]	A(12,10)=	-713615279.50	A(12,11)=	27996.02	A(12,12)=	[illegible]
A(12,13)=	[illegible]	A(12,14)=	[illegible]	A(12,15)=	-52204.00	A(12,16)=	9.00
A(13, 1)=	[illegible]	A(13, 2)=	[illegible]	A(13, 3)=	30984.98	A(13, 4)=	[illegible]
A(13, 5)=	[illegible]	A(13, 6)=	7.00	A(13, 7)=	[illegible]	A(13, 8)=	[illegible]
A(13, 9)=	[illegible]	A(13,10)=	[illegible]	A(13,11)=	-43523.23	A(13,12)=	9.00
A(13,13)=	[illegible]	A(13,14)=	1509053922.50	A(13,15)=	33003.25	A(13,16)=	774124140.38
A(14, 1)=	[illegible]	A(14, 2)=	1056604191.88	A(14, 3)=	-45755.42	A(14, 4)=	9.00
A(14, 5)=	[illegible]	A(14, 6)=	556750974.65	A(14, 7)=	-26745.54	A(14, 8)=	-627343304.25
A(14, 9)=	[illegible]	A(14,10)=	10.00	A(14,11)=	-32084.68	A(14,12)=	-752578248.75
A(14,13)=	-7411.82	A(14,14)=	-173351555.63	A(14,15)=	21649.96	A(14,16)=	-4626.14
A(15, 1)=	5575.00	A(15, 2)=	45375.00	A(15, 3)=	65375.00	A(15, 4)=	25375.00
A(15, 5)=	65375.00	A(15, 6)=	77775.00	A(15, 7)=	8685.00	A(15, 8)=	9995.00
A(15, 9)=	6665.00	A(15,10)=	375.00	A(15,11)=	75.00	A(15,12)=	9375.00
A(15,13)=	45375.00	A(15,14)=	885375.00	A(15,15)=	5375.00	A(15,16)=	-5375.00
A(16, 1)=	-5575.00	A(16, 2)=	-5375.00	A(16, 3)=	-375.00	A(16, 4)=	375.00
A(16, 5)=	-75.00	A(16, 6)=	375.00	A(16, 7)=	75.00	A(16, 8)=	9995.00
A(16, 9)=	65575.00	A(16,10)=	85375.00	A(16,11)=	5375.00	A(16,12)=	-5375.00
A(16,13)=	-5575.00	A(16,14)=	-5.00	A(16,15)=	-9975375.00	A(16,16)=	-5375.00

INVERSA DE A JOTICA PELA DECOMP. EM VALOR SINGULAR

R(1, 1)=	0.00002019	R(1, 2)=	0.00000006	R(1, 3)=	0.00001263
R(1, 4)=	0.0	R(1, 5)=	-0.00005635	R(1, 6)=	0.00000001
R(1, 7)=	-0.00001550	R(1, 8)=	0.0	R(1, 9)=	0.00001137
R(1,10)=	0.0	R(1,11)=	0.00000391	R(1,12)=	0.0
R(1,13)=	-0.00000073	R(1,14)=	-0.00000941	R(1,15)=	0.00000003
R(1,16)=	-0.00000483				
R(2, 1)=	-0.00000000	R(2, 2)=	0.00000012	R(2, 3)=	-0.00000000
R(2, 4)=	0.0	R(2, 5)=	0.00000000	R(2, 6)=	0.00000006
R(2, 7)=	0.00000000	R(2, 8)=	0.0	R(2, 9)=	0.00000000
R(2,10)=	0.0	R(2,11)=	-0.00000000	R(2,12)=	0.0
R(2,13)=	0.00000000	R(2,14)=	0.00000000	R(2,15)=	-0.00000000
R(2,16)=	0.00000000				
R(3, 1)=	0.00003356	R(3, 2)=	0.00119052	R(3, 3)=	-0.00001530
R(3, 4)=	0.0	R(3, 5)=	0.00003654	R(3, 6)=	0.0
R(3, 7)=	0.00000350	R(3, 8)=	0.0	R(3, 9)=	0.00001212
R(3,10)=	0.0	R(3,11)=	-0.00002639	R(3,12)=	0.00000503
R(3,13)=	0.00000000	R(3,14)=	-0.00000941	R(3,15)=	0.0
R(3,16)=	0.00000327				
R(4, 1)=	-0.00000000	R(4, 2)=	0.00000019	R(4, 3)=	0.00000000
R(4, 4)=	0.0	R(4, 5)=	-0.00000000	R(4, 6)=	0.0
R(4, 7)=	0.00000000	R(4, 8)=	0.0	R(4, 9)=	-0.00000000
R(4,10)=	0.0	R(4,11)=	0.00000000	R(4,12)=	-0.00000000
R(4,13)=	0.00000000	R(4,14)=	0.00000000	R(4,15)=	0.0
R(4,16)=	-0.00000000				
R(5, 1)=	-0.00006068	R(5, 2)=	0.14582307	R(5, 3)=	0.00000065
R(5, 4)=	0.0	R(5, 5)=	-0.00000413	R(5, 6)=	0.0
R(5, 7)=	0.00001156	R(5, 8)=	0.0	R(5, 9)=	-0.00002065
R(5,10)=	-0.00000136	R(5,11)=	0.00000004	R(5,12)=	0.00000503
R(5,13)=	0.0	R(5,14)=	-0.00003368	R(5,15)=	0.0
R(5,16)=	-0.00001084				
R(6, 1)=	0.00000001	R(6, 2)=	0.00000016	R(6, 3)=	-0.00000000
R(6, 4)=	0.0	R(6, 5)=	-0.00000000	R(6, 6)=	0.0

R(6, 7)=	-0.00000000	R(6, 8)=	0.0	R(6, 9)=	0.00000000
R(6,10)=	[illegible]	R(6,11)=	0.00000000	R(6,12)=	-0.00000000
R(6,13)=	0.0	R(6,14)=	0.00000000	R(6,15)=	0.0
R(6,16)=	0.00000000				
R(7, 1)=	0.00000255	R(7, 2)=	0.00482349	R(7, 3)=	-0.0000003[illegible]
R(7, 4)=	0.0	R(7, 5)=	-0.00001490	R(7, 6)=	0.0
R(7, 7)=	-0.00000010	R(7, 8)=	-0.00002167	R(7, 9)=	0.00000013
R(7,10)=	-0.00000138	R(7,11)=	0.0	R(7,12)=	-0.00000042
R(7,13)=	0.0	R(7,14)=	0.00005550	R(7,15)=	0.0
R(7,16)=	-0.00000031				
R(8, 1)=	-0.00000000	R(8, 2)=	0.00000013	R(8, 3)=	-0.00000000
R(8, 4)=	0.0	R(8, 5)=	0.00000000	R(8, 6)=	0.0
R(8, 7)=	0.00000000	R(8, 8)=	0.00000000	R(8, 9)=	0.00000000
R(8,10)=	-0.00000000	R(8,11)=	0.0	R(8,12)=	0.00000000
R(8,13)=	0.0	R(8,14)=	-0.00000000	R(8,15)=	0.0
R(8,16)=	0.00000000				
R(9, 1)=	-0.00000332	R(9, 2)=	0.00000019	R(9, 3)=	-0.00001145
R(9, 4)=	0.0	R(9, 5)=	0.00002369	R(9, 6)=	-0.00001012
R(9, 7)=	0.00000004	R(9, 8)=	-0.00002167	R(9, 9)=	0.0
R(9,10)=	-0.00001716	R(9,11)=	0.0	R(9,12)=	0.00000987
R(9,13)=	0.0	R(9,14)=	-0.00002489	R(9,15)=	0.0
R(9,16)=	0.00001232				
R(10, 1)=	-0.00000000	R(10, 2)=	0.00000001	R(10, 3)=	0.00000000
R(10, 4)=	0.0	R(10, 5)=	-0.00000000	R(10, 6)=	0.00000000
R(10, 7)=	0.00000000	R(10, 8)=	0.00000000	R(10, 9)=	0.0
R(10,10)=	0.00000000	R(10,11)=	0.0	R(10,12)=	-0.00000000
R(10,13)=	0.0	R(10,14)=	0.00000000	R(10,15)=	0.0
R(10,16)=	-0.00000000				
R(11, 1)=	-0.00001747	R(11, 2)=	0.00000018	R(11, 3)=	0.00000595
R(11, 4)=	0.00000738	R(11, 5)=	-0.00000006	R(11, 6)=	-0.00001012
R(11, 7)=	0.0	R(11, 8)=	-0.00002044	R(11, 9)=	0.0
R(11,10)=	0.00003664	R(11,11)=	0.0	R(11,12)=	-0.00000041
R(11,13)=	0.0	R(11,14)=	0.00000059	R(11,15)=	0.0
R(11,16)=	-0.00000328				
R(12, 1)=	0.00000000	R(12, 2)=	0.00000009	R(12, 3)=	-0.00000000
R(12, 4)=	-0.00000000	R(12, 5)=	0.00000000	R(12, 6)=	0.00000000
R(12, 7)=	0.0	R(12, 8)=	0.00000000	R(12, 9)=	0.0
R(12,10)=	-0.00000000	R(12,11)=	0.0	R(12,12)=	0.00000000
R(12,13)=	0.0	R(12,14)=	0.00000000	R(12,15)=	0.0
R(12,16)=	-0.00000000				
R(13, 1)=	0.00003397	R(13, 2)=	0.00000008	R(13, 3)=	-0.00000004
R(13, 4)=	0.00000738	R(13, 5)=	0.00000000	R(13, 6)=	-0.00001015
R(13, 7)=	0.0	R(13, 8)=	0.00003853	R(13, 9)=	0.0
R(13,10)=	-0.00001209	R(13,11)=	0.0	R(13,12)=	0.00000046
R(13,13)=	0.0	R(13,14)=	0.00001582	R(13,15)=	0.0
R(13,16)=	0.00001052				
R(14, 1)=	-0.00000000	R(14, 2)=	0.00000021	R(14, 3)=	-0.00000000
R(14, 4)=	-0.00000000	R(14, 5)=	0.00000001	R(14, 6)=	0.00000000
R(14, 7)=	0.0	R(14, 8)=	-0.00000000	R(14, 9)=	0.0
R(14,10)=	0.00000000	R(14,11)=	0.0	R(14,12)=	-0.00000000
R(14,13)=	0.0	R(14,14)=	-0.00000000	R(14,15)=	0.0
R(14,16)=	-0.00000000				
R(15, 1)=	-0.00000007	R(15, 2)=	0.00000408	R(15, 3)=	0.0
R(15, 4)=	0.00003472	R(15, 5)=	0.00000001	R(15, 6)=	0.00001618
R(15, 7)=	0.0	R(15, 8)=	-0.00002629	R(15, 9)=	0.0

R(15,10)=	0.000000[illegible]7	R(15,11)=	0.0	R(15,12)=	[illegible]
R(15,13)=	0.0	R(15,14)=	-0.00000000	R(15,15)=	-0.000000[illegible]
R(15,16)=	0.0000001[illegible]				
R(16, 1)=	-0.00000000	R(16, 2)=	-0.00000000	R(16, 3)=	0.0
R(16, 4)=	-0.00000000	R(16, 5)=	0.00000000	R(16, 6)=	-0.00000000
R(16, 7)=	0.0	R(16, 8)=	0.00000000	R(16, 9)=	0.0
R(16,10)=	0.00000000	R(16,11)=	0.0	R(16,12)=	-0.00000000
R(16,13)=	0.0	R(16,14)=	0.00000000	R(16,15)=	0.00000000
R(16,16)=	-0.00000000				

NORMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
IDENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)   0.4690277899
IDENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A   0.4690277859

NUMERO DE CONDICAO DA MATRIZ A =   779966.754033299178

```
------------------------------------------


OBLEMA N.        1

ORDEM DA MATRIZ       5   POR     5

TERMINANTE    ******************************
TERMINANTE                          0.3364971652167276833                 D+41

RMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)                                0.4185907841
ENTIDADE OBTIDA POR (A-I)*A                                0.4185907841

------------------------------------------


OBLEMA N.        2

ORDEM DA MATRIZ       5   POR     5

TERMINANTE    ******************************
TERMINANTE                          0.1523968885580903 13                 D+42

RMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)                                0.5284839869
ENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A                                0.5284839869

------------------------------------------


OBLEMA N.        3

ORDEM DA MATRIZ       5   POR     5

TERMINANTE          40007676129124497.0
TERMINANTE                          0.40007676129124497O                  D+17

RMA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)                                0.0000099955
ENTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A                                0.0000099955

------------------------------------------


OBLEMA N.        4
```

```
RDEM DA MATRIZ       3   POR     3

ERMINANTE                              -0.018622365
ERMINANTE                              -0.186223647301477830                    D-01

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
NTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)                        10268441575424.0000
NTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A                        10268441575424.0000

-----------------------------------------


BLEMA N.          5

RDEM DA MATRIZ       3   POR     3

ERMINANTE                              4.333400968
ERMINANTE                              0.433340096762632809                     D+01

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
NTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)                             4622381056.00000000
NTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A                             4622381056.00000000

-----------------------------------------


BLEMA N.          6

RDEM DA MATRIZ       8   POR     8

ERMINANTE                              1.000000000
ERMINANTE                              0.100000000000000000                     D+01

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
NTIDADE OBTIDA POR A*(A-1)                                    0.0
NTIDADE OBTIDA POR (A-1)*A                                    0.0

-----------------------------------------


BLEMA N.          7

RDEM DA MATRIZ      10   POR    10

TERMINANTE                             -0.000000000
TERMINANTE                             -0.678443019712279793                    D-47

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
```

NTICADE OBTIDA POR A*(A-1) 47.5924835205
NTICADE OBTIDA POR (A-1)*A 47.5924835205

BLEMA N. 8

RDEM DA MATRIZ 6 POR 6

ERMINANTE ******************************
ERMINANTE -0.22715259828829498O D+28

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
NTICADE OBTIDA POR A*(A-1) 0.0000348181
NTICADE OBTIDA POR (A-1)*A 0.0000348181

BLEMA N. 9

RDEM DA MATRIZ 5 POR 5

ERMINANTE ******************************
ERMINANTE 0.70091668383747520O D+42

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTICADE OBTIDA POR A*(A-1) 1.8362207413
ENTICADE OBTIDA POR (A-1)*A 1.8362207413

BLEMA N. 10

RDEM DA MATRIZ 16 POR 16

TERMINANTE ******************************
TERMINANTE 0.7237005577332262l1 D+76

MA DA MAXIMA SOMA DE LINHA DAS MATRIZES-DIFERENCA
ENTICADE OBTIDA POR A*(A-1) 7.1349916458
ENTICADE OBTIDA POR (A-1)*A 7.1349916458

ANEXO 6 - LISTAGEM DOS EXEMPLOS DO ALGOR TMO DVS-PLEX

```
--------------------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO  N.    1
  NUMERO DE VARIAVEIS     2
  NUMERO DE RESTRICOES    3



DADOS DO MODELO

A( 1, 1)=   -12345679.00      A( 1, 2)=            0.00      A( 1, 3)=      9462364.00
A( 2, 1)=            0.99     A( 2, 2)=     45654768.00      A( 2, 3)=            1.40
A( 3, 1)=     -8765476.00     A( 3, 2)=            4.77      A( 3, 3)=            9.10


B( 1)=      2383315.00     B( 2)=     45654763.00     B( 3)=      8765461.00


C( 1)= -4938266670.00     C( 2)=           1.12     C( 3)=  3784945410.00

METODO SIMPLEX

SOLUCAO FINAL  -  METODO SIMPLEX
   X 3                     0.304713964
   X 2                     1.00000000
   X 6                8765453.00
  VALOR DE Z       1153325570.
TOTAL DE ITERACOES EFETIVACAS-        2


METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X 3                21158525.4027840719
   X 1                16224647.4917316847
   X 6         1+221657425 9387.8400000
  VALOR DE Z       44069523312.0000000
TOTAL DE ITERACOES EFETIVACAS-        3


--------------------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO  N.    2
  NUMERO DE VARIAVEIS    19
  NUMERO DE RESTRICOES   19
```

A(1, 1)=	11408.73	A(1, 2)=	4702.90	A(1, 3)=	0.0	A(1, 4)=	2851.45
A(1, 5)=	0.0	A(1, 6)=	1900.97	A(1, 7)=	0.0	A(1, 8)=	1425.72
A(1, 9)=	0.0	A(1,10)=	1140.58	A(1,11)=	0.0	A(1,12)=	950.48
A(1,13)=	[illegible]	A(1,14)=	814.70	A(1,15)=	0.0	A(1,16)=	712.86
A(1,17)=	670.93	A(1,18)=	0.0	A(1,19)=	600.30		
A(2, 1)=	0.0	A(2, 2)=	3801.93	A(2, 3)=	2851.45	A(2, 4)=	2281.16
A(2, 5)=	0.0	A(2, 6)=	1629.40	A(2, 7)=	0.0	A(2, 8)=	0.0
A(2, 9)=	1140.58	A(2,10)=	1036.89	A(2,11)=	950.48	A(2,12)=	0.0
A(2,13)=	814.70	A(2,14)=	760.39	A(2,15)=	0.0	A(2,16)=	670.93
A(2,17)=	633.66	A(2,18)=	600.30	A(2,19)=	0.0		
A(3, 1)=	3801.93	A(3, 2)=	2851.45	A(3, 3)=	2281.16	A(3, 4)=	1900.97
A(3, 5)=	1629.40	A(3, 6)=	0.0	A(3, 7)=	1267.31	A(3, 8)=	0.0
A(3, 9)=	1036.89	A(3,10)=	0.0	A(3,11)=	877.37	A(3,12)=	0.0
A(3,13)=	760.39	A(3,14)=	0.0	A(3,15)=	670.93	A(3,16)=	633.66
A(3,17)=	600.30	A(3,18)=	0.0	A(3,19)=	0.0		
A(4, 1)=	2851.45	A(4, 2)=	0.0	A(4, 3)=	1900.97	A(4, 4)=	1629.40
A(4, 5)=	1425.72	A(4, 6)=	0.0	A(4, 7)=	1140.58	A(4, 8)=	1036.89
A(4, 9)=	0.0	A(4,10)=	877.37	A(4,11)=	814.70	A(4,12)=	760.39
A(4,13)=	712.86	A(4,14)=	670.93	A(4,15)=	0.0	A(4,16)=	600.30
A(4,17)=	0.0	A(4,18)=	0.0	A(4,19)=	0.0		
A(5, 1)=	2281.16	A(5, 2)=	1900.97	A(5, 3)=	1629.40	A(5, 4)=	0.0
A(5, 5)=	1267.31	A(5, 6)=	1140.58	A(5, 7)=	1036.89	A(5, 8)=	950.48
A(5, 9)=	877.37	A(5,10)=	814.70	A(5,11)=	760.39	A(5,12)=	712.86
A(5,13)=	670.93	A(5,14)=	633.66	A(5,15)=	600.30	A(5,16)=	0.0
A(5,17)=	0.0	A(5,18)=	0.0	A(5,19)=	0.0		
A(6, 1)=	1900.97	A(6, 2)=	1629.40	A(6, 3)=	1425.72	A(6, 4)=	1267.31
A(6, 5)=	1140.58	A(6, 6)=	1036.89	A(6, 7)=	950.48	A(6, 8)=	877.37
A(6, 9)=	814.70	A(6,10)=	760.39	A(6,11)=	712.86	A(6,12)=	670.93
A(6,13)=	633.66	A(6,14)=	600.30	A(6,15)=	0.0	A(6,16)=	0.0
A(6,17)=	0.0	A(6,18)=	0.0	A(6,19)=	0.0		
A(7, 1)=	1629.40	A(7, 2)=	1425.72	A(7, 3)=	1267.31	A(7, 4)=	1140.58
A(7, 5)=	1036.89	A(7, 6)=	950.48	A(7, 7)=	877.37	A(7, 8)=	814.70
A(7, 9)=	760.39	A(7,10)=	712.86	A(7,11)=	670.93	A(7,12)=	633.66
A(7,13)=	600.30	A(7,14)=	0.0	A(7,15)=	0.0	A(7,16)=	0.0
A(7,17)=	0.0	A(7,18)=	0.0	A(7,19)=	0.0		
A(8, 1)=	1425.72	A(8, 2)=	1267.31	A(8, 3)=	1140.58	A(8, 4)=	1036.89
A(8, 5)=	950.48	A(8, 6)=	877.37	A(8, 7)=	814.70	A(8, 8)=	760.39
A(8, 9)=	712.86	A(8,10)=	670.93	A(8,11)=	633.66	A(8,12)=	600.30
A(8,13)=	0.0	A(8,14)=	0.0	A(8,15)=	0.0	A(8,16)=	0.0
A(8,17)=	0.0	A(8,18)=	0.0	A(8,19)=	0.0		
A(9, 1)=	1267.31	A(9, 2)=	1140.58	A(9, 3)=	1036.89	A(9, 4)=	950.48
A(9, 5)=	877.37	A(9, 6)=	814.70	A(9, 7)=	760.39	A(9, 8)=	712.86
A(9, 9)=	670.93	A(9,10)=	633.66	A(9,11)=	600.30	A(9,12)=	0.0
A(9,13)=	0.0	A(9,14)=	0.0	A(9,15)=	0.0	A(9,16)=	0.0
A(9,17)=	0.0	A(9,18)=	0.0	A(9,19)=	0.0		
A(10, 1)=	1140.58	A(10, 2)=	1036.89	A(10, 3)=	950.48	A(10, 4)=	877.37
A(10, 5)=	814.70	A(10, 6)=	760.39	A(10, 7)=	712.86	A(10, 8)=	670.93
A(10, 9)=	633.66	A(10,10)=	600.30	A(10,11)=	0.0	A(10,12)=	0.0
A(10,13)=	0.0	A(10,14)=	0.0	A(10,15)=	0.0	A(10,16)=	0.0
A(10,17)=	0.0	A(10,18)=	0.0	A(10,19)=	0.0		
A(11, 1)=	1036.89	A(11, 2)=	950.48	A(11, 3)=	877.37	A(11, 4)=	814.70
A(11, 5)=	760.39	A(11, 6)=	712.86	A(11, 7)=	670.93	A(11, 8)=	633.66
A(11, 9)=	600.30	A(11,10)=	0.0	A(11,11)=	0.0	A(11,12)=	0.0

A(11,17)=	0.0	A(11,18)=	0.0	A(11,19)=	0.0		
A(12, 1)=	[illegible]	A(12, 2)=	677.37	A(12, 3)=	614.70	A(12, 4)=	760.39
A(12, 5)=	712.86	A(12, 6)=	670.93	A(12, 7)=	633.66	A(12, 8)=	600.30
A(12, 9)=	0.0	A(12,10)=	0.0	A(12,11)=	0.0	A(12,12)=	0.0
A(12,13)=	0.0	A(12,14)=	0.0	A(12,15)=	0.0	A(12,16)=	0.0
A(12,17)=	0.0	A(12,18)=	0.0	A(12,19)=	0.0		
A(13, 1)=	677.37	A(13, 2)=	614.70	A(13, 3)=	760.39	A(13, 4)=	712.86
A(13, 5)=	670.93	A(13, 6)=	633.66	A(13, 7)=	600.30	A(13, 8)=	0.0
A(13, 9)=	0.0	A(13,10)=	0.0	A(13,11)=	0.0	A(13,12)=	0.0
A(13,13)=	0.0	A(13,14)=	0.0	A(13,15)=	0.0	A(13,16)=	0.0
A(13,17)=	0.0	A(13,18)=	0.0	A(13,19)=	0.0		
A(14, 1)=	614.70	A(14, 2)=	760.39	A(14, 3)=	712.86	A(14, 4)=	670.93
A(14, 5)=	633.66	A(14, 6)=	600.30	A(14, 7)=	0.0	A(14, 8)=	0.0
A(14, 9)=	0.0	A(14,10)=	0.0	A(14,11)=	0.0	A(14,12)=	0.0
A(14,13)=	0.0	A(14,14)=	0.0	A(14,15)=	0.0	A(14,16)=	0.0
A(14,17)=	0.0	A(14,18)=	0.0	A(14,19)=	0.0		
A(15, 1)=	760.39	A(15, 2)=	712.86	A(15, 3)=	670.93	A(15, 4)=	633.66
A(15, 5)=	600.30	A(15, 6)=	0.0	A(15, 7)=	0.0	A(15, 8)=	0.0
A(15, 9)=	0.0	A(15,10)=	0.0	A(15,11)=	0.0	A(15,12)=	0.0
A(15,13)=	0.0	A(15,14)=	0.0	A(15,15)=	0.0	A(15,16)=	0.0
A(15,17)=	0.0	A(15,18)=	0.0	A(15,19)=	0.0		
A(16, 1)=	712.86	A(16, 2)=	670.93	A(16, 3)=	633.66	A(16, 4)=	600.30
A(16, 5)=	0.0	A(16, 6)=	0.0	A(16, 7)=	0.0	A(16, 8)=	0.0
A(16, 9)=	0.0	A(16,10)=	0.0	A(16,11)=	0.0	A(16,12)=	0.0
A(16,13)=	0.0	A(16,14)=	0.0	A(16,15)=	0.0	A(16,16)=	0.0
A(16,17)=	0.0	A(16,18)=	0.0	A(16,19)=	0.0		
A(17, 1)=	670.93	A(17, 2)=	633.66	A(17, 3)=	600.30	A(17, 4)=	0.0
A(17, 5)=	0.0	A(17, 6)=	0.0	A(17, 7)=	0.0	A(17, 8)=	0.0
A(17, 9)=	0.0	A(17,10)=	0.0	A(17,11)=	0.0	A(17,12)=	0.0
A(17,13)=	0.0	A(17,14)=	0.0	A(17,15)=	0.0	A(17,16)=	0.0
A(17,17)=	0.0	A(17,18)=	0.0	A(17,19)=	0.0		
A(18, 1)=	633.66	A(18, 2)=	600.30	A(18, 3)=	0.0	A(18, 4)=	0.0
A(18, 5)=	0.0	A(18, 6)=	0.0	A(18, 7)=	0.0	A(18, 8)=	0.0
A(18, 9)=	0.0	A(18,10)=	0.0	A(18,11)=	0.0	A(18,12)=	0.0
A(18,13)=	0.0	A(18,14)=	0.0	A(18,15)=	0.0	A(18,16)=	0.0
A(18,17)=	0.0	A(18,18)=	0.0	A(18,19)=	0.0		
A(19, 1)=	600.30	A(19, 2)=	0.0	A(19, 3)=	0.0	A(19, 4)=	0.0
A(19, 5)=	0.0	A(19, 6)=	0.0	A(19, 7)=	0.0	A(19, 8)=	0.0
A(19, 9)=	0.0	A(19,10)=	0.0	A(19,11)=	0.0	A(19,12)=	0.0
A(19,13)=	0.0	A(19,14)=	0.0	A(19,15)=	0.0	A(19,16)=	0.0
A(19,17)=	0.0	A(19,18)=	0.0	A(19,19)=	0.0		

B(1)=	437590272.00	B(2)=	447958720.00	B(3)=	418407168.00	B(4)=	408815616.00
B(5)=	399224320.00	B(6)=	389632512.00	B(7)=	380040960.00	B(8)=	370449408.00
B(9)=	360837858.00	B(10)=	351266304.00	B(11)=	341674752.00	B(12)=	332083200.00
B(13)=	322491648.00	B(14)=	312900096.00	B(15)=	303308544.00	B(16)=	293716992.00
B(17)=	284125696.00	B(18)=	274533888.00	B(19)=	264942576.00		

C(1)=	5723593.14	C(2)=	5592539.70	C(3)=	5461486.26	C(4)=	5330432.82
C(5)=	5199379.33	C(6)=	5068325.94	C(7)=	4937272.50	C(8)=	4806219.06
C(9)=	4575165.62	C(10)=	4544112.18	C(11)=	4413058.74	C(12)=	4282005.30
C(13)=	4150951.86	C(14)=	4019903.42	C(15)=	3888854.98	C(16)=	3757791.54

```
METODO SIMPLEX

PROCESSO ENCERRADO. O VALOR OTIMO NAO FOI ALCANCADO   EM    1530  ITERACOES


METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X19              728946.839303861736
   X15              623623.733644681721
   X18              746285.445203355208
   X24            24860011.7944871187
   X23           408815615.599599881
   X25           389602512.000000000
   X26           380040960.000000000
   X27           370449408.000000000
   X28           360857856.000000000
   X29           351266304.000000000
   X30           341674752.000000000
   X31           332083200.000000000
   X32           322491648.000000000
   X33           312900096.000000000
   X34           303308544.000000000
   X35           293716992.000000000
   X36           284125696.000000000
   X37           274533888.000000000
   X38           264942576.000000000
  VALOR DE Z   7460600598943.46997
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-      13
```

```
--------------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO N.  3
  NUMERO DE VARIAVEIS    3
  NUMERO DE RESTRICOES   3


DADOS DO MODELO

A( 1, 1)=     -24405.92    A( 1, 2)=         0.00    A( 1, 3)=     18705.95
A( 2, 1)=          0.00    A( 2, 2)=     90253.94    A( 2, 3)=         0.00
A( 3, 1)=     -17028.29    A( 3, 2)=         0.01    A( 3, 3)=         0.02


B( 1)=       5820.82    B( 2)=      92167.56    B( 3)=      17695.66


C( 1)=  -88402240.00    C( 2)=          0.02    C( 3)=   67802048.00

METODO SIMPLEX

SOLUCAO FINAL  -  METODO SIMPLEX
   X 3             21617323.0
   X 1             16668639.0
   X 6         287105745000.
  VALOR DE Z       816392704.
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-        3

METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X 3             21617346.3007989439
   X 1             16668641.7412514160
   X 6         287109842955.978882
  VALOR DE Z     1169330792.12500000
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-        3

--------------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO N.  4
  NUMERO DE VARIAVEIS    6
  NUMERO DE RESTRICOES   6


DADOS DO MODELO
```

```
A( 1, 1)=      -41.07     A( 1, 2)=      -60.[illegible]   A( 1, 3)=     -10.39    A( 1, 4)=      -6.45
A( 1, 5)=      110.9[illegible]    A( 1, 6)=      135.67
A( 2, 1)=        1.[illegible]   A( 2, 2)=        1.[illegible]    A( 2, 3)=       0.75    A( 2, 4)=       0.15
A( 2, 5)=  [illegible]       A( 2, 6)=      -64.7[illegible]
A( 3, 1)=        0.03     A( 3, 2)=       14.91     A( 3, 3)=       0.02    A( 3, 4)=     -71.72
A( 3, 5)=       45.[illegible]     A( 3, 6)=        0.03
A( 4, 1)=        6.49     A( 4, 2)=        0.00     A( 4, 3)=    -128.32    A( 4, 4)=       0.0
A( 4, 5)=        0.01     A( 4, 6)=      -51.02
A( 5, 1)=        0.01     A( 5, 2)=       -0.22     A( 5, 3)=       0.01    A( 5, 4)=      63.29
A( 5, 5)=        0.02     A( 5, 6)=     -104.77
A( 6, 1)=        0.15     A( 6, 2)=     -127.55     A( 6, 3)=       0.01    A( 6, 4)=     120.91
A( 6, 5)=        0.01     A( 6, 6)=        0.02


B( 1)=      127.45     B( 2)=        81.38     B( 3)=        11.40     B( 4)=       176.51
B( 5)=       42.84     B( 6)=         6.56


C( 1)=   -148358.67    C( 2)=   -220505.37     C( 3)=    -59401.39    C( 4)=    -30739.60
C( 5)=    420098.94    C( 6)=    491751.37


METODO SIMPLEX


   SOLUCAO ILIMITADA
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-       5


METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X 6                    0.145801247892117
   X 8                   92.163648120363541
   X 5                    1.424723719003463
   X10                  183.935539875201979
   X 2                    0.816875081527234
   X 4                    0.915546789740297
  VALOR DE Z         481941.922529696309
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-       6


------------------------------------------------------------------------

  EXEMPLO  N.   5
```

NUMERO DE VARIAVEIS 32
NUMERO DE RESTRICOES 25

DADOS DO MODELO .

A(1, 1)=	0.34	A(1, 2)=	0.82	A(1, 3)=	0.37	A(1, 4)=	0.51
A(1, 5)=	0.04	A(1, 6)=	0.98	A(1, 7)=	0.33	A(1, 8)=	0.80
A(1, 9)=	0.39	A(1,10)=	0.08	A(1,11)=	0.55	A(1,12)=	0.92
A(1,13)=	0.20	A(1,14)=	0.76	A(1,15)=	0.74	A(1,16)=	0.11
A(1,17)=	0.53	A(1,18)=	0.83	A(1,19)=	0.54	A(1,20)=	0.07
A(1,21)=	0.07	A(1,22)=	0.32	A(1,23)=	0.79	A(1,24)=	0.40
A(1,25)=	0.75	A(1,26)=	0.45	A(1,27)=	0.39	A(1,28)=	0.74
A(1,29)=	0.47	A(1,30)=	0.66	A(1,31)=	0.19	A(1,32)=	0.72
A(2, 1)=	0.09	A(2, 2)=	0.56	A(2, 3)=	0.08	A(2, 4)=	0.95
A(2, 5)=	0.47	A(2, 6)=	0.78	A(2, 7)=	0.93	A(2, 8)=	0.07
A(2, 9)=	0.81	A(2,10)=	0.95	A(2,11)=	0.62	A(2,12)=	0.69
A(2,13)=	0.07	A(2,14)=	0.68	A(2,15)=	0.02	A(2,16)=	0.45
A(2,17)=	0.02	A(2,18)=	0.62	A(2,19)=	0.00	A(2,20)=	0.96
A(2,21)=	0.25	A(2,22)=	0.37	A(2,23)=	0.45	A(2,24)=	0.85
A(2,25)=	0.63	A(2,26)=	0.57	A(2,27)=	0.23	A(2,28)=	0.76
A(2,29)=	0.05	A(2,30)=	0.83	A(2,31)=	0.22	A(2,32)=	0.30
A(3, 1)=	0.32	A(3, 2)=	0.80	A(3, 3)=	0.30	A(3, 4)=	0.10
A(3, 5)=	0.41	A(3, 6)=	0.08	A(3, 7)=	0.33	A(3, 8)=	0.77
A(3, 9)=	0.13	A(3,10)=	0.31	A(3,11)=	0.21	A(3,12)=	0.96
A(3,13)=	0.37	A(3,14)=	0.11	A(3,15)=	0.79	A(3,16)=	0.28
A(3,17)=	0.02	A(3,18)=	0.10	A(3,19)=	0.97	A(3,20)=	0.35
A(3,21)=	0.94	A(3,22)=	0.92	A(3,23)=	0.60	A(3,24)=	0.61
A(3,25)=	0.00	A(3,26)=	0.16	A(3,27)=	0.57	A(3,28)=	0.28
A(3,29)=	0.09	A(3,30)=	0.51	A(3,31)=	0.75	A(3,32)=	0.35
A(4, 1)=	0.08	A(4, 2)=	0.54	A(4, 3)=	0.01	A(4, 4)=	0.74
A(4, 5)=	0.84	A(4, 6)=	0.88	A(4, 7)=	0.24	A(4, 8)=	0.93
A(4, 9)=	0.25	A(4,10)=	0.17	A(4,11)=	0.30	A(4,12)=	0.75
A(4,13)=	0.15	A(4,14)=	0.04	A(4,15)=	0.07	A(4,16)=	0.61
A(4,17)=	0.51	A(4,18)=	0.09	A(4,19)=	0.43	A(4,20)=	0.25
A(4,21)=	0.12	A(4,22)=	0.97	A(4,23)=	0.25	A(4,24)=	0.27
A(4,25)=	0.67	A(4,26)=	0.29	A(4,27)=	0.41	A(4,28)=	0.30
A(4,29)=	0.65	A(4,30)=	0.69	A(4,31)=	0.77	A(4,32)=	0.96
A(5, 1)=	0.32	A(5, 2)=	0.77	A(5, 3)=	0.23	A(5, 4)=	0.88
A(5, 5)=	0.77	A(5, 6)=	0.18	A(5, 7)=	0.64	A(5, 8)=	0.69
A(5, 9)=	0.87	A(5,10)=	0.54	A(5,11)=	0.89	A(5,12)=	1.00
A(5,13)=	0.49	A(5,14)=	0.46	A(5,15)=	0.65	A(5,16)=	0.44
A(5,17)=	0.51	A(5,18)=	0.53	A(5,19)=	0.40	A(5,20)=	0.64
A(5,21)=	0.80	A(5,22)=	0.52	A(5,23)=	0.40	A(5,24)=	0.23
A(5,25)=	0.24	A(5,26)=	0.91	A(5,27)=	0.75	A(5,28)=	0.82
A(5,29)=	0.71	A(5,30)=	0.36	A(5,31)=	0.30	A(5,32)=	0.05
A(6, 1)=	0.07	A(6, 2)=	0.51	A(6, 3)=	0.94	A(6, 4)=	0.55
A(6, 5)=	0.21	A(6, 6)=	0.98	A(6, 7)=	0.54	A(6, 8)=	0.69
A(6, 9)=	0.59	A(6,10)=	0.40	A(6,11)=	0.98	A(6,12)=	0.77
A(6,13)=	0.30	A(6,14)=	0.29	A(6,15)=	0.13	A(6,16)=	0.77
A(6,17)=	0.01	A(6,18)=	0.57	A(6,19)=	0.86	A(6,20)=	0.54
A(6,21)=	0.99	A(6,22)=	0.57	A(6,23)=	0.06	A(6,24)=	0.69
A(6,25)=	0.11	A(6,26)=	0.02	A(6,27)=	0.59	A(6,28)=	0.64

A(7, 1)=	[illegible]	A(7, 2)=	[illegible]	A(7, 3)=	0.16	A(7, 4)=	0.67
A(7, 5)=	0.14	A(7, 6)=	0.28	A(7, 7)=	0.94	A(7, 8)=	0.60
A(7, 9)=	0.61	A(7,10)=	[illegible]	A(7,11)=	0.57	A(7,12)=	0.04
A(7,13)=	0.61	A(7,14)=	0.61	A(7,15)=	0.70	A(7,16)=	0.61
A(7,17)=	0.60	A(7,18)=	0.36	A(7,19)=	0.81	A(7,20)=	0.93
A(7,21)=	0.67	A(7,22)=	0.12	A(7,23)=	0.21	A(7,24)=	0.64
A(7,25)=	0.49	A(7,26)=	0.65	A(7,27)=	0.93	A(7,28)=	0.30
A(7,29)=	0.33	A(7,30)=	0.21	A(7,31)=	0.86	A(7,32)=	0.71
A(8, 1)=	0.65	A(8, 2)=	0.49	A(8, 3)=	0.67	A(8, 4)=	0.32
A(8, 5)=	0.57	A(8, 6)=	0.09	A(8, 7)=	0.35	A(8, 8)=	0.81
A(8, 9)=	0.73	A(8,10)=	0.63	A(8,11)=	0.66	A(8,12)=	0.01
A(8,13)=	0.42	A(8,14)=	0.74	A(8,15)=	0.18	A(8,16)=	0.94
A(8,17)=	0.30	A(8,18)=	0.05	A(8,19)=	0.29	A(8,20)=	0.63
A(8,21)=	0.85	A(8,22)=	0.17	A(8,23)=	0.86	A(8,24)=	0.10
A(8,25)=	0.30	A(8,26)=	0.75	A(8,27)=	0.77	A(8,28)=	0.38
A(8,29)=	0.83	A(8,30)=	0.39	A(8,31)=	0.28	A(8,32)=	0.29
A(9, 1)=	0.31	A(9, 2)=	0.73	A(9, 3)=	0.09	A(9, 4)=	0.40
A(9, 5)=	0.51	A(9, 6)=	0.39	A(9, 7)=	0.25	A(9, 8)=	0.52
A(9, 9)=	0.35	A(9,10)=	0.99	A(9,11)=	0.25	A(9,12)=	0.03
A(9,13)=	0.73	A(9,14)=	0.16	A(9,15)=	0.96	A(9,16)=	0.77
A(9,17)=	0.49	A(9,18)=	0.53	A(9,19)=	0.25	A(9,20)=	0.22
A(9,21)=	0.54	A(9,22)=	0.72	A(9,23)=	0.01	A(9,24)=	0.06
A(9,25)=	0.73	A(9,26)=	0.36	A(9,27)=	0.11	A(9,28)=	0.90
A(9,29)=	0.54	A(9,30)=	0.06	A(9,31)=	0.41	A(9,32)=	0.37
A(10, 1)=	0.06	A(10, 2)=	0.47	A(10, 3)=	0.30	A(10, 4)=	0.11
A(10, 5)=	0.54	A(10, 6)=	0.19	A(10, 7)=	0.15	A(10, 8)=	0.72
A(10, 9)=	0.48	A(10,10)=	0.85	A(10,11)=	0.34	A(10,12)=	0.65
A(10,13)=	0.53	A(10,14)=	0.09	A(10,15)=	0.24	A(10,16)=	0.10
A(10,17)=	0.55	A(10,18)=	0.52	A(10,19)=	0.72	A(10,20)=	0.12
A(10,21)=	0.74	A(10,22)=	0.77	A(10,23)=	0.66	A(10,24)=	0.51
A(10,25)=	0.60	A(10,26)=	0.47	A(10,27)=	0.95	A(10,28)=	0.92
A(10,29)=	0.50	A(10,30)=	0.24	A(10,31)=	0.44	A(10,32)=	0.96
A(11, 1)=	0.30	A(11, 2)=	0.70	A(11, 3)=	0.01	A(11, 4)=	0.25
A(11, 5)=	0.27	A(11, 6)=	0.49	A(11, 7)=	0.35	A(11, 8)=	0.43
A(11, 9)=	0.10	A(11,10)=	0.22	A(11,11)=	0.93	A(11,12)=	0.12
A(11,13)=	0.84	A(11,14)=	0.52	A(11,15)=	0.01	A(11,16)=	0.93
A(11,17)=	0.59	A(11,18)=	0.01	A(11,19)=	0.68	A(11,20)=	0.51
A(11,21)=	0.40	A(11,22)=	0.33	A(11,23)=	0.82	A(11,24)=	0.47
A(11,25)=	0.57	A(11,26)=	0.09	A(11,27)=	0.29	A(11,28)=	0.44
A(11,29)=	0.56	A(11,30)=	0.92	A(11,31)=	0.96	A(11,32)=	0.04
A(12, 1)=	0.05	A(12, 2)=	0.44	A(12, 3)=	0.73	A(12, 4)=	0.90
A(12, 5)=	0.31	A(12, 6)=	0.29	A(12, 7)=	0.46	A(12, 8)=	0.64
A(12, 9)=	0.22	A(12,10)=	0.08	A(12,11)=	0.02	A(12,12)=	0.39
A(12,13)=	0.65	A(12,14)=	0.44	A(12,15)=	0.29	A(12,16)=	0.27
A(12,17)=	0.43	A(12,18)=	1.00	A(12,19)=	0.15	A(12,20)=	0.41
A(12,21)=	0.59	A(12,22)=	0.33	A(12,23)=	0.47	A(12,24)=	0.53
A(12,25)=	0.84	A(12,26)=	0.20	A(12,27)=	0.13	A(12,28)=	0.46
A(12,29)=	0.12	A(12,30)=	0.69	A(12,31)=	0.99	A(12,32)=	0.62
A(13, 1)=	0.29	A(13, 2)=	0.68	A(13, 3)=	0.94	A(13, 4)=	0.04
A(13, 5)=	0.24	A(13, 6)=	0.59	A(13, 7)=	0.86	A(13, 8)=	0.34
A(13, 9)=	0.64	A(13,10)=	0.44	A(13,11)=	0.61	A(13,12)=	0.15
A(13,13)=	0.96	A(13,14)=	0.87	A(13,15)=	0.07	A(13,16)=	0.10
A(13,17)=	0.43	A(13,18)=	0.49	A(13,19)=	0.11	A(13,20)=	0.60
A(13,21)=	[illegible]	A(13,22)=	0.93	A(13,23)=	0.62	A(13,24)=	0.68

A(13,25)=	0.21	A(13,26)=	0.81	A(13,27)=	0.46	A(13,28)=	0.93
A(13,29)=	0.12	A(13,30)=	0.77	A(13,31)=	0.52	A(13,32)=	0.70
A(14, 1)=	0.04	A(14, 2)=	0.42	A(14, 3)=	0.66	A(14, 4)=	0.68
A(14, 5)=	0.05	A(14, 6)=	0.39	A(14, 7)=	0.70	A(14, 8)=	0.55
A(14, 9)=	0.96	A(14,10)=	0.31	A(14,11)=	0.70	A(14,12)=	0.92
A(14,13)=	0.77	A(14,14)=	0.79	A(14,15)=	0.35	A(14,16)=	0.43
A(14,17)=	0.97	A(14,18)=	0.48	A(14,19)=	0.58	A(14,20)=	0.69
A(14,21)=	0.45	A(14,22)=	0.58	A(14,23)=	0.27	A(14,24)=	0.34
A(14,25)=	0.05	A(14,26)=	0.93	A(14,27)=	0.30	A(14,28)=	1.00
A(14,29)=	0.74	A(14,30)=	0.94	A(14,31)=	0.55	A(14,32)=	0.28
A(15, 1)=	0.29	A(15, 2)=	0.66	A(15, 3)=	0.87	A(15, 4)=	0.83
A(15, 5)=	0.61	A(15, 6)=	0.69	A(15, 7)=	0.16	A(15, 8)=	0.26
A(15, 9)=	0.53	A(15,10)=	0.67	A(15,11)=	0.29	A(15,12)=	0.19
A(15,13)=	0.03	A(15,14)=	0.22	A(15,15)=	0.12	A(15,16)=	0.26
A(15,17)=	0.97	A(15,18)=	0.96	A(15,19)=	0.54	A(15,20)=	0.09
A(15,21)=	0.14	A(15,22)=	0.53	A(15,23)=	0.43	A(15,24)=	0.30
A(15,25)=	0.45	A(15,26)=	0.54	A(15,27)=	0.64	A(15,28)=	0.52
A(15,29)=	0.79	A(15,30)=	0.62	A(15,31)=	0.07	A(15,32)=	0.37
A(16, 1)=	0.03	A(16, 2)=	0.40	A(16, 3)=	0.59	A(16, 4)=	0.47
A(16, 5)=	0.04	A(16, 6)=	0.49	A(16, 7)=	0.07	A(16, 8)=	0.46
A(16, 9)=	0.70	A(16,10)=	0.53	A(16,11)=	0.38	A(16,12)=	0.96
A(16,13)=	0.89	A(16,14)=	0.15	A(16,15)=	0.40	A(16,16)=	0.59
A(16,17)=	0.47	A(16,18)=	0.95	A(16,19)=	0.01	A(16,20)=	0.96
A(16,21)=	0.32	A(16,22)=	0.58	A(16,23)=	0.08	A(16,24)=	0.76
A(16,25)=	0.33	A(16,26)=	0.65	A(16,27)=	0.48	A(16,28)=	0.54
A(16,29)=	0.25	A(16,30)=	0.80	A(16,31)=	0.10	A(16,32)=	0.95
A(17, 1)=	0.28	A(17, 2)=	0.63	A(17, 3)=	0.80	A(17, 4)=	0.62
A(17, 5)=	0.92	A(17, 6)=	0.79	A(17, 7)=	0.47	A(17, 8)=	0.17
A(17, 9)=	0.32	A(17,10)=	0.90	A(17,11)=	0.97	A(17,12)=	0.23
A(17,13)=	0.19	A(17,14)=	0.57	A(17,15)=	0.18	A(17,16)=	0.43
A(17,17)=	0.46	A(17,18)=	0.44	A(17,19)=	0.97	A(17,20)=	0.38
A(17,21)=	0.01	A(17,22)=	0.13	A(17,23)=	0.23	A(17,24)=	0.71
A(17,25)=	0.70	A(17,26)=	0.27	A(17,27)=	0.82	A(17,28)=	0.05
A(17,29)=	0.41	A(17,30)=	0.47	A(17,31)=	0.63	A(17,32)=	0.03
A(18, 1)=	0.02	A(18, 2)=	0.37	A(18, 3)=	0.52	A(18, 4)=	0.26
A(18, 5)=	0.41	A(18, 6)=	0.59	A(18, 7)=	0.37	A(18, 8)=	0.36
A(18, 9)=	0.44	A(18,10)=	0.76	A(18,11)=	0.06	A(18,12)=	0.00
A(18,13)=	0.00	A(18,14)=	0.50	A(18,15)=	0.45	A(18,16)=	0.76
A(18,17)=	0.96	A(18,18)=	0.43	A(18,19)=	0.44	A(18,20)=	0.27
A(18,21)=	0.19	A(18,22)=	0.18	A(18,23)=	0.88	A(18,24)=	0.17
A(18,25)=	0.57	A(18,26)=	0.36	A(18,27)=	0.66	A(18,28)=	0.07
A(18,29)=	0.97	A(18,30)=	0.65	A(18,31)=	0.66	A(18,32)=	0.61
A(19, 1)=	0.27	A(19, 2)=	0.61	A(19, 3)=	0.75	A(19, 4)=	0.41
A(19, 5)=	0.34	A(19, 6)=	0.89	A(19, 7)=	0.77	A(19, 8)=	0.09
A(19, 9)=	0.07	A(19,10)=	0.12	A(19,11)=	0.65	A(19,12)=	0.27
A(19,13)=	0.31	A(19,14)=	0.92	A(19,15)=	0.23	A(19,16)=	0.59
A(19,17)=	0.96	A(19,18)=	0.92	A(19,19)=	0.40	A(19,20)=	0.67
A(19,21)=	0.87	A(19,22)=	0.73	A(19,23)=	0.04	A(19,24)=	0.13
A(19,25)=	0.94	A(19,26)=	0.59	A(19,27)=	0.00	A(19,28)=	0.59
A(19,29)=	0.03	A(19,30)=	0.32	A(19,31)=	0.18	A(19,32)=	0.69
A(20, 1)=	0.02	A(20, 2)=	0.35	A(20, 3)=	0.45	A(20, 4)=	0.05
A(20, 5)=	0.78	A(20, 6)=	0.89	A(20, 7)=	0.57	A(20, 8)=	0.29
A(20, 9)=	0.19	A(20,10)=	0.99	A(20,11)=	0.74	A(20,12)=	0.04
A(20,13)=	0.12	A(20,14)=	0.85	A(20,15)=	0.51	A(20,16)=	0.92
A(20,17)=	0.45	A(20,18)=	0.91	A(20,19)=	0.87	A(20,20)=	0.56

A(20,21)=	0.65	A(20,22)=	0.78	A(20,23)=	0.69	A(20,24)=	0.55
A(20,25)=	0.01	A(20,26)=	0.11	A(20,27)=	0.54	A(20,28)=	0.01
A(20,29)=	0.27	A(20,30)=	0.50	A(20,31)=	0.21	A(20,32)=	0.23
A(21, 1)=	0.25	A(21, 2)=	0.59	A(21, 3)=	0.00	A(21, 4)=	0.20
A(21, 5)=	0.71	A(21, 6)=	1.00	A(21, 7)=	0.08	A(21, 8)=	1.00
A(21, 9)=	0.61	A(21,10)=	0.55	A(21,11)=	0.55	A(21,12)=	0.51
A(21,13)=	0.45	A(21,14)=	0.27	A(21,15)=	0.29	A(21,16)=	0.75
A(21,17)=	0.45	A(21,18)=	0.39	A(21,19)=	0.83	A(21,20)=	0.90
A(21,21)=	0.74	A(21,22)=	0.35	A(21,23)=	0.54	A(21,24)=	0.54
A(21,25)=	0.13	A(21,26)=	0.72	A(21,27)=	0.18	A(21,28)=	0.15
A(21,29)=	0.85	A(21,30)=	0.17	A(21,31)=	0.74	A(21,32)=	0.50
A(22, 1)=	0.01	A(22, 2)=	0.33	A(22, 3)=	0.58	A(22, 4)=	0.84
A(22, 5)=	0.14	A(22, 6)=	0.80	A(22, 7)=	0.98	A(22, 8)=	0.21
A(22, 9)=	0.55	A(22,10)=	0.21	A(22,11)=	0.42	A(22,12)=	0.05
A(22,13)=	0.24	A(22,14)=	0.20	A(22,15)=	0.56	A(22,16)=	0.09
A(22,17)=	0.94	A(22,18)=	0.38	A(22,19)=	0.30	A(22,20)=	0.85
A(22,21)=	0.92	A(22,22)=	0.38	A(22,23)=	0.49	A(22,24)=	1.00
A(22,25)=	0.65	A(22,26)=	0.83	A(22,27)=	0.02	A(22,28)=	0.15
A(22,29)=	0.23	A(22,30)=	0.35	A(22,31)=	0.77	A(22,32)=	0.94
A(23, 1)=	0.23	A(23, 2)=	0.56	A(23, 3)=	0.59	A(23, 4)=	0.99
A(23, 5)=	0.68	A(23, 6)=	0.10	A(23, 7)=	0.38	A(23, 8)=	0.91
A(23, 9)=	0.53	A(23,10)=	0.58	A(23,11)=	0.01	A(23,12)=	0.35
A(23,13)=	0.55	A(23,14)=	0.63	A(23,15)=	0.34	A(23,16)=	0.92
A(23,17)=	0.94	A(23,18)=	0.87	A(23,19)=	0.26	A(23,20)=	0.23
A(23,21)=	0.61	A(23,22)=	0.94	A(23,23)=	0.65	A(23,24)=	0.95
A(23,25)=	0.42	A(23,26)=	0.45	A(23,27)=	0.36	A(23,28)=	0.67
A(23,29)=	0.26	A(23,30)=	0.03	A(23,31)=	0.29	A(23,32)=	0.02
A(24, 1)=	0.03	A(24, 2)=	0.30	A(24, 3)=	0.31	A(24, 4)=	0.63
A(24, 5)=	0.51	A(24, 6)=	0.90	A(24, 7)=	0.28	A(24, 8)=	0.12
A(24, 9)=	0.67	A(24,10)=	0.44	A(24,11)=	0.10	A(24,12)=	0.12
A(24,13)=	0.35	A(24,14)=	0.55	A(24,15)=	0.62	A(24,16)=	0.25
A(24,17)=	0.44	A(24,18)=	0.65	A(24,19)=	0.73	A(24,20)=	0.14
A(24,21)=	0.79	A(24,22)=	0.99	A(24,23)=	0.30	A(24,24)=	0.41
A(24,25)=	0.29	A(24,26)=	0.86	A(24,27)=	0.20	A(24,28)=	0.69
A(24,29)=	0.62	A(24,30)=	0.20	A(24,31)=	0.32	A(24,32)=	0.60
A(25, 1)=	0.25	A(25, 2)=	0.54	A(25, 3)=	0.52	A(25, 4)=	0.77
A(25, 5)=	0.45	A(25, 6)=	0.20	A(25, 7)=	0.69	A(25, 8)=	0.83
A(25, 9)=	0.29	A(25,10)=	0.80	A(25,11)=	0.69	A(25,12)=	0.39
A(25,13)=	0.68	A(25,14)=	0.98	A(25,15)=	0.40	A(25,16)=	0.08
A(25,17)=	0.43	A(25,18)=	0.35	A(25,19)=	0.69	A(25,20)=	0.53
A(25,21)=	0.47	A(25,22)=	0.54	A(25,23)=	0.45	A(25,24)=	0.57
A(25,25)=	0.67	A(25,26)=	0.17	A(25,27)=	0.54	A(25,28)=	0.21
A(25,29)=	0.85	A(25,30)=	0.88	A(25,31)=	0.85	A(25,32)=	0.69

B(1)=	15.25	B(2)=	15.00	B(3)=	13.75	B(4)=	14.50
B(5)=	18.25	B(6)=	17.00	B(7)=	16.75	B(8)=	17.50
B(9)=	14.25	B(10)=	17.00	B(11)=	15.75	B(12)=	14.50
B(13)=	17.25	B(14)=	19.00	B(15)=	14.75	B(16)=	15.50
B(17)=	15.25	B(18)=	14.00	B(19)=	15.75	B(20)=	16.50
B(21)=	16.25	B(22)=	15.00	B(23)=	15.75	B(24)=	14.50
B(25)=	17.25						

C(1)=	140.31	C(2)=	352.45	C(3)=	157.51	C(4)=	131.34

C(5)=	17.0[illegible]	C(6)=	4[illegible].51	C(7)=	13.17	C(8)=	368.66
C(9)=	1[illegible]5.57	C(10)=	[illegible]6.10	C(11)=	227.44	C(12)=	394.83
C(13)=	11[illegible].[illegible]4	C(14)=	3[illegible]5.38	C(15)=	317.71	C(16)=	48.56
C(17)=	[illegible]	C(18)=	2[illegible]9.43	C(19)=	230.34	C(20)=	29.21
C(21)=	29.[illegible]	C(22)=	136.[illegible]	C(23)=	540.72	C(24)=	171.[illegible]6
C(25)=	[illegible]	C(26)=	1[illegible]4.41	C(27)=	147849872.00	C(28)=	318.[illegible]2
C(29)=	147[illegible]04.00	C(30)=	282.50	C(31)=	148190288.00	C(32)=	307.84

METODO SIMPLEX

```
SOLUCAO FINAL  - METODO SIMPLEX
   X37                7.39148655
   X34               11.8433491
   X48               10.0127644
   X35                1.06904779
   X52                6.73025703
   X54                6.94427572
   X27                7.86643982
   X56                8.01195908
   X31               10.6280460
   X29                2.58705654
   X38                8.80994035
   X53                6.00212574
   X41                6.93701839
   X46                9.07477474
   X57                2.11265945
   X44                3.22075844
   X47                7.99150658
   X43                2.03927994
   X51               14.5560568
   X36                2.11016369
   X45                7.76794147
   X49                2.30065994
   X55                9.57461548
   X33                9.87968159
   X42                4.03524017
  VALOR DE Z      3071422210.
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-      139
```

METODO DVS-PLEX

```
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL  - METODO DVS-PLEX
   X33                9.9045682575466629
   X34               10.8639685015270061
   X35                0.6348046404108939
   X36                0.6559985340460284
```

```
 [illegible]
 X38                    9.[illegible]
 X43                    0.[illegible]742723
 X40                    0.[illegible]
 X41                    0.3104[illegible]
 X42                    5.5941[illegible]
 X29                    1.3902216950458O5
 X31                   13.80245792206107 1
 X45                    7.57387442677945 5
 X46                    8.[illegible]
 X47                    9.2087[illegible]265553
 X48                   11.16795730014091 3
 X49                    1.92892224540763 6
 X27                    4.67545075543070 5
 X51                   13.14772231427001 8
 X52                    8.53303683828353 1
 X53                    3.97962168289135 9
 X54                    3.93897010707974 4
 X55                    9.51281268269956 3
 X56                    7.57377642073032 2
 X57                    1.34473635017393 6
 VALOR DE Z      3015998106.82072736
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-       6
     1
--------------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO N.   6
  NUMERO DE VARIAVEIS     5
  NUMERO DE RESTRICOES    2


DADOS DO MODELO

A( 1, 1)=  2354561511.87     A( 1, 2)= -2653518556.67     A( 1, 3)=            0.0     A( 1, 4)=      6211633.23
A( 1, 5)=            0.00
A( 2, 1)=  -250761708.70     A( 2, 2)=          -1.59     A( 2, 3)=           0.00     A( 2, 4)=    571087420.16
A( 2, 5)=   192798016.00


B( 1)=   234404456.00     B( 2)=    547394815.00


C( 1)=3811960315067.01     C( 2)=-3357457291611.36     C( 3)=            9.98     C( 4)=       453455.00
C( 5)=        76547.00


METODO SIMPLEX


ACUSADA DIVISAO POR ZERO. BUSCA DE SOLUCAO INVIAVEL
METODO INTERROMPIDO
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-       1
```

```
METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO
SOLUCAO ILIMITADA
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-        2

-----------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO  N.    7
  NUMERO DE VARIAVEIS      3
  NUMERO DE RESTRICOES     4


DADOS DO MODELO

A( 1, 1)=      87543.00    A( 1, 2)=       7776.00    A( 1, 3)=      80000.00
A( 2, 1)=         -0.99    A( 2, 2)=          6.00    A( 2, 3)=   56756776.00
A( 3, 1)=     676767.00    A( 3, 2)=        787.00    A( 3, 3)=         -0.99
A( 4, 1)=         -0.99    A( 4, 2)=          1.00    A( 4, 3)=          2.00

B( 1)=          3.00    B( 2)=     175322.00    B( 3)=          2.97    B( 4)=        230.00

C( 1)=       3501.04    C( 2)=        311.04    C( 3)=       3200.00

METODO SIMPLEX

SOLUCAO FINAL  -  METODO SIMPLEX
   X 2                  0.000340894330
   X 5             175322.000
   X 1                  0.00000393380911
   X 7                229.999649
  VALOR DE Z            0.119999386
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-        2

METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X 2                  0.000385802469138
   X 5             175321.997685185182
   X 6                  2.664153456814607
   X 7                229.999814197530526
```

VALOR DE Z [illegible]
TOTAL DE [illegible] EFETIVADAS- 5

EXEMPLO N. 5
NUMERO DE VARIAVEIS 16
NUMERO DE RESTRICOES 28

DADOS DO MODELO

A(1, 1)=	2.43	A(1, 2)=	1.21	A(1, 3)=	0.81	A(1, 4)=	0.61
A(1, 5)=	0.49	A(1, 6)=	0.40	A(1, 7)=	0.35	A(1, 8)=	0.30
A(1, 9)=	0.27	A(1,10)=	0.24	A(1,11)=	0.22	A(1,12)=	0.20
A(1,13)=	0.19	A(1,14)=	0.17	A(1,15)=	0.16	A(1,16)=	0.15
A(2, 1)=	0.14	A(2, 2)=	0.13	A(2, 3)=	0.13	A(2, 4)=	0.0
A(2, 5)=	1.21	A(2, 6)=	0.81	A(2, 7)=	0.61	A(2, 8)=	0.49
A(2, 9)=	0.40	A(2,10)=	0.35	A(2,11)=	0.30	A(2,12)=	0.27
A(2,13)=	0.24	A(2,14)=	0.22	A(2,15)=	0.20	A(2,16)=	0.19
A(3, 1)=	0.17	A(3, 2)=	0.16	A(3, 3)=	0.15	A(3, 4)=	0.14
A(3, 5)=	0.13	A(3, 6)=	0.13	A(3, 7)=	0.0	A(3, 8)=	0.0
A(3, 9)=	0.81	A(3,10)=	0.61	A(3,11)=	0.49	A(3,12)=	0.40
A(3,13)=	0.35	A(3,14)=	0.30	A(3,15)=	0.27	A(3,16)=	0.24
A(4, 1)=	0.22	A(4, 2)=	0.20	A(4, 3)=	0.19	A(4, 4)=	0.17
A(4, 5)=	0.16	A(4, 6)=	0.15	A(4, 7)=	0.14	A(4, 8)=	0.13
A(4, 9)=	0.13	A(4,10)=	0.0	A(4,11)=	0.0	A(4,12)=	0.0
A(4,13)=	0.61	A(4,14)=	0.49	A(4,15)=	0.40	A(4,16)=	0.35
A(5, 1)=	0.30	A(5, 2)=	0.27	A(5, 3)=	0.24	A(5, 4)=	0.22
A(5, 5)=	0.20	A(5, 6)=	0.19	A(5, 7)=	0.17	A(5, 8)=	0.16
A(5, 9)=	0.15	A(5,10)=	0.14	A(5,11)=	0.13	A(5,12)=	0.13
A(5,13)=	0.0	A(5,14)=	0.0	A(5,15)=	0.0	A(5,16)=	0.0
A(6, 1)=	0.49	A(6, 2)=	0.40	A(6, 3)=	0.35	A(6, 4)=	0.30
A(6, 5)=	0.27	A(6, 6)=	0.24	A(6, 7)=	0.22	A(6, 8)=	0.20
A(6, 9)=	0.19	A(6,10)=	0.17	A(6,11)=	0.16	A(6,12)=	0.15
A(6,13)=	0.14	A(6,14)=	0.13	A(6,15)=	0.13	A(6,16)=	0.0
A(7, 1)=	0.0	A(7, 2)=	0.0	A(7, 3)=	0.0	A(7, 4)=	0.0
A(7, 5)=	0.40	A(7, 6)=	0.35	A(7, 7)=	0.30	A(7, 8)=	0.27
A(7, 9)=	0.24	A(7,10)=	0.22	A(7,11)=	0.20	A(7,12)=	0.19
A(7,13)=	0.17	A(7,14)=	0.16	A(7,15)=	0.15	A(7,16)=	0.14
A(8, 1)=	0.13	A(8, 2)=	0.13	A(8, 3)=	0.0	A(8, 4)=	0.0
A(8, 5)=	0.0	A(8, 6)=	0.0	A(8, 7)=	0.0	A(8, 8)=	0.0
A(8, 9)=	0.35	A(8,10)=	0.30	A(8,11)=	0.27	A(8,12)=	0.24
A(8,13)=	0.22	A(8,14)=	0.20	A(8,15)=	0.19	A(8,16)=	0.17
A(9, 1)=	0.16	A(9, 2)=	0.15	A(9, 3)=	0.14	A(9, 4)=	0.13
A(9, 5)=	0.13	A(9, 6)=	0.0	A(9, 7)=	0.0	A(9, 8)=	0.0
A(9, 9)=	0.0	A(9,10)=	0.0	A(9,11)=	0.0	A(9,12)=	0.0
A(9,13)=	0.30	A(9,14)=	0.27	A(9,15)=	0.24	A(9,16)=	0.22
A(10, 1)=	0.20	A(10, 2)=	0.19	A(10, 3)=	0.17	A(10, 4)=	0.16
A(10, 5)=	0.15	A(10, 6)=	0.14	A(10, 7)=	0.13	A(10, 8)=	0.13
A(10, 9)=	0.0	A(10,10)=	0.0	A(10,11)=	0.0	A(10,12)=	0.0
A(10,13)=	0.0	A(10,14)=	0.0	A(10,15)=	0.0	A(10,16)=	0.0
A(11, 1)=	0.27	A(11, 2)=	0.24	A(11, 3)=	0.22	A(11, 4)=	0.20

A(11, 5)=	0.19	A(11, 6)=	0.17	A(11, 7)=	0.16	A(11, 8)=	0.15
A(11, 9)=	0.14	A(11,10)=	0.13	A(11,11)=	0.13	A(11,12)=	0.0
A(11,13)=	0.0	A(11,14)=	0.0	A(11,15)=	0.0	A(11,16)=	0.0
A(12, 1)=	0.0	A(12, 2)=	0.0	A(12, 3)=	0.0	A(12, 4)=	0.0
A(12, 5)=	[illegible]	A(12, 6)=	0.22	A(12, 7)=	0.20	A(12, 8)=	0.19
A(12, 9)=	0.17	A(12,10)=	0.16	A(12,11)=	0.15	A(12,12)=	0.14
A(12,13)=	0.13	A(12,14)=	0.13	A(12,15)=	0.0	A(12,16)=	0.0
A(13, 1)=	0.0	A(13, 2)=	0.0	A(13, 3)=	0.0	A(13, 4)=	0.0
A(13, 5)=	0.0	A(13, 6)=	0.0	A(13, 7)=	0.0	A(13, 8)=	0.0
A(13, 9)=	0.22	A(13,10)=	0.20	A(13,11)=	0.19	A(13,12)=	0.17
A(13,13)=	0.16	A(13,14)=	0.15	A(13,15)=	0.14	A(13,16)=	0.13
A(14, 1)=	0.13	A(14, 2)=	0.0	A(14, 3)=	0.0	A(14, 4)=	0.0
A(14, 5)=	0.0	A(14, 6)=	0.0	A(14, 7)=	0.0	A(14, 8)=	0.0
A(14, 9)=	0.0	A(14,10)=	0.0	A(14,11)=	0.0	A(14,12)=	0.0
A(14,13)=	0.20	A(14,14)=	0.19	A(14,15)=	0.17	A(14,16)=	0.16
A(15, 1)=	0.15	A(15, 2)=	0.14	A(15, 3)=	0.13	A(15, 4)=	0.13
A(15, 5)=	0.0	A(15, 6)=	0.0	A(15, 7)=	0.0	A(15, 8)=	0.0
A(15, 9)=	0.0	A(15,10)=	0.0	A(15,11)=	0.0	A(15,12)=	0.0
A(15,13)=	0.0	A(15,14)=	0.0	A(15,15)=	0.0	A(15,16)=	0.0
A(16, 1)=	0.19	A(16, 2)=	0.17	A(16, 3)=	0.16	A(16, 4)=	0.15
A(16, 5)=	0.14	A(16, 6)=	0.13	A(16, 7)=	0.13	A(16, 8)=	0.0
A(16, 9)=	0.0	A(16,10)=	0.0	A(16,11)=	0.0	A(16,12)=	0.0
A(16,13)=	0.0	A(16,14)=	0.0	A(16,15)=	0.0	A(16,16)=	0.0
A(17, 1)=	0.0	A(17, 2)=	0.0	A(17, 3)=	0.0	A(17, 4)=	0.0
A(17, 5)=	0.17	A(17, 6)=	0.16	A(17, 7)=	0.15	A(17, 8)=	0.14
A(17, 9)=	0.13	A(17,10)=	0.13	A(17,11)=	0.0	A(17,12)=	0.0
A(17,13)=	0.0	A(17,14)=	0.0	A(17,15)=	0.0	A(17,16)=	0.0
A(18, 1)=	0.0	A(18, 2)=	0.0	A(18, 3)=	0.0	A(18, 4)=	0.0
A(18, 5)=	0.0	A(18, 6)=	0.0	A(18, 7)=	0.0	A(18, 8)=	0.0
A(18, 9)=	0.16	A(18,10)=	0.15	A(18,11)=	0.14	A(18,12)=	0.13
A(18,13)=	0.13	A(18,14)=	0.0	A(18,15)=	0.0	A(18,16)=	0.0
A(19, 1)=	0.0	A(19, 2)=	0.0	A(19, 3)=	0.0	A(19, 4)=	0.0
A(19, 5)=	0.0	A(19, 6)=	0.0	A(19, 7)=	0.0	A(19, 8)=	0.0
A(19, 9)=	0.0	A(19,10)=	0.0	A(19,11)=	0.0	A(19,12)=	0.0
A(19,13)=	0.15	A(19,14)=	0.14	A(19,15)=	0.13	A(19,16)=	0.13
A(20, 1)=	0.0	A(20, 2)=	0.0	A(20, 3)=	0.0	A(20, 4)=	0.0
A(20, 5)=	0.0	A(20, 6)=	0.0	A(20, 7)=	0.0	A(20, 8)=	0.0
A(20, 9)=	0.0	A(20,10)=	0.0	A(20,11)=	0.0	A(20,12)=	0.0
A(20,13)=	0.0	A(20,14)=	0.0	A(20,15)=	0.0	A(20,16)=	0.0
A(21, 1)=	0.14	A(21, 2)=	0.13	A(21, 3)=	0.13	A(21, 4)=	0.0
A(21, 5)=	0.0	A(21, 6)=	0.0	A(21, 7)=	0.0	A(21, 8)=	0.0
A(21, 9)=	0.0	A(21,10)=	0.0	A(21,11)=	0.0	A(21,12)=	0.0
A(21,13)=	0.0	A(21,14)=	0.0	A(21,15)=	0.0	A(21,16)=	0.0
A(22, 1)=	0.0	A(22, 2)=	0.0	A(22, 3)=	0.0	A(22, 4)=	0.0
A(22, 5)=	0.13	A(22, 6)=	0.13	A(22, 7)=	0.0	A(22, 8)=	0.0
A(22, 9)=	0.0	A(22,10)=	0.0	A(22,11)=	0.0	A(22,12)=	0.0
A(22,13)=	0.0	A(22,14)=	0.0	A(22,15)=	0.0	A(22,16)=	0.0
A(23, 1)=	0.0	A(23, 2)=	0.0	A(23, 3)=	0.0	A(23, 4)=	0.0
A(23, 5)=	0.0	A(23, 6)=	0.0	A(23, 7)=	0.0	A(23, 8)=	0.0
A(23, 9)=	0.13	A(23,10)=	0.0	A(23,11)=	0.0	A(23,12)=	0.0
A(23,13)=	0.0	A(23,14)=	0.0	A(23,15)=	0.0	A(23,16)=	0.0
A(24, 1)=	0.0	A(24, 2)=	0.0	A(24, 3)=	0.0	A(24, 4)=	0.0
A(24, 5)=	0.0	A(24, 6)=	0.0	A(24, 7)=	0.0	A(24, 8)=	0.0
A(24, 9)=	0.0	A(24,10)=	0.0	A(24,11)=	0.0	A(24,12)=	0.0
A(24,13)=	0.0	A(24,14)=	0.0	A(24,15)=	0.0	A(24,16)=	0.0

A(25, 1)=	0.0	A(25, 2)=	0.0	A(25, 3)=	0.0	A(25, 4)=	0.0
A(25, 5)=	0.0	A(25, 6)=	0.0	A(25, 7)=	0.0	A(25, 8)=	0.0
A(25, 9)=	0.0	A(25,10)=	0.0	A(25,11)=	0.0	A(25,12)=	0.0
A(25,13)=	0.0	A(25,14)=	0.0	A(25,15)=	0.0	A(25,16)=	0.0

B(1)=	8.21	B(2)=	5.70	B(3)=	4.35	B(4)=	3.35
B(5)=	2.52	B(6)=	3.56	B(7)=	2.81	B(8)=	2.21
B(9)=	1.76	B(10)=	1.23	B(11)=	2.02	B(12)=	1.75
B(13)=	1.37	B(14)=	0.35	B(15)=	0.50	B(16)=	1.08
B(17)=	0.89	B(18)=	0.72	B(19)=	0.56	B(20)=	0.0
B(21)=	0.41	B(22)=	0.26	B(23)=	0.13	B(24)=	0.0
B(25)=	0.0						

C(1)=	103.56	C(2)=	51.17	C(3)=	23453.81	C(4)=	745234525.13
C(5)=	19.93	C(6)=	16.48	C(7)=	13.95	C(8)=	734234523.10
C(9)=	10.16	C(10)=	645345342.50	C(11)=	8.56	C(12)=	34557.75
C(13)=	234545.66	C(14)=	6.52	C(15)=	566453456.03	C(16)=	5.60

METODO SIMPLEX

SOLUCAO FINAL - METODO SIMPLEX

X22	0.113065660
X18	1.35212608
X19	0.531361699
X20	0.210718954
X21	0.0607024468
X37	0.405652149
X23	0.114411175
X24	0.299518406
X25	0.164675474
X 8	4.56579643
X27	0.186056972
X28	0.266833464
X30	0.135726883
X15	4.13119316
X 4	4.36068439
X32	0.417630076
X10	1.94260268
X34	0.119877875
X12	2.25041676
X36	0.0
X17	2.55709454
X38	0.262711465
X39	0.127605869
X40	0.0
X41	0.0

VALOR DE Z 10155724800.

TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS- 26

METODO DVS-PLEX

```
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X17                 2.5971151987755?2
   X18                 1.3921363970812?8
   X19                 0.5315063240500?2
   X20                 0.3107248615?6815
   X21                 0.0037036518253?7
   X22                 0.1110607016893?6
   X23                 0.11441325711?067
   X24                 0.2995262123?1800
   X25                 0.1646794495541?6
   X`8                 4.5058200349?6484
   X27                 0.1800582637?7234
   X28                 0.2668330092776?2
   X12                 2.2504269163?4528
   X30                 0.1357376591?0871
   X 4                 4.3607029550?7217
   X32                 0.4176325043761?2
   X10                 1.5485940623078?5
   X34                 0.1197700944?058
   X15                 4.1311918166285?6
   X36                 0.0
   X37                 0.4055540560000?0
   X38                 0.262712121000000
   X39                 0.127305889000000
   X40                 0.0
   X41                 0.0
  VALOR DE Z       1015576804.5443592
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-       7

--------------------------------------------------------------------------------
  EXEMPLO N.    9
  NUMERO DF VARIAVEIS    18
  NUMERO DE RESTRICOES   12


DADOS DO MODELO

A( 1, 1)=      5520.40    A( 1, 2)=      197.72    A( 1, 3)=      197.00    A( 1, 4)=      213.42
A( 1, 5)=        67.10    A( 1, 6)=       70.66    A( 1, 7)=       63.52    A( 1, 8)=     5163.51
A( 1, 9)=      6565.56    A( 1,10)=      630.98    A( 1,11)=     5912.98    A( 1,12)=       45.60
A( 1,13)=       552.47    A( 1,14)=     5548.95    A( 1,15)=     1065.97    A( 1,16)=      150.61
A( 1,17)=        79.23    A( 1,18)=       95.65
A( 2, 1)=         9.59    A( 2, 2)=        7.14    A( 2, 3)=        7.85    A( 2, 4)=        9.99
A( 2, 5)=       795.01    A( 2, 6)=       95.65    A( 2, 7)=        7.85    A( 2, 8)=      524.06
```

A(2,13)=	24.27	A(2,14)=	4449.73	A(2,15)=	452.54	A(2,16)=	188.44
A(2,17)=	109.27	A(2,18)=	473.55				
A(3, 1)=	109.15	A(3, 2)=	452.97	A(3, 3)=	129.37	A(3, 4)=	4885.99
A(3, 5)=	4552.27	A(3, 6)=	4755.55	A(3, 7)=	31.41	A(3, 8)=	32.12
A(3, 9)=	42.65	A(3,10)=	481.09	A(3,11)=	538.19	A(3,12)=	4021.45
A(3,13)=	5402.25	A(3,14)=	4109.25	A(3,15)=	2483.41	A(3,16)=	488.55
A(3,17)=	2.88	A(3,18)=	38.54				
A(4, 1)=	2.86	A(4, 2)=	460.39	A(4, 3)=	320.49	A(4, 4)=	2.00
A(4, 5)=	5243.45	A(4, 6)=	3.57	A(4, 7)=	24.96	A(4, 8)=	3965.07
A(4, 9)=	4.28	A(4,10)=	3.57	A(4,11)=	54.96	A(4,12)=	5.00
A(4,13)=	6.42	A(4,14)=	39.26	A(4,15)=	4.28	A(4,16)=	0.71
A(4,17)=	15.70	A(4,18)=	2.14				
A(5, 1)=	31.41	A(5, 2)=	39.97	A(5, 3)=	2.86	A(5, 4)=	5.00
A(5, 5)=	6.42	A(5, 6)=	70.66	A(5, 7)=	39.26	A(5, 8)=	45.66
A(5, 9)=	167.03	A(5,10)=	89.22	A(5,11)=	3950.79	A(5,12)=	39.26
A(5,13)=	239.12	A(5,14)=	17.84	A(5,15)=	15.70	A(5,16)=	31.41
A(5,17)=	39.26	A(5,18)=	79.54				
A(6, 1)=	240.26	A(6, 2)=	474.67	A(6, 3)=	633.64	A(6, 4)=	403.29
A(6, 5)=	662.41	A(6, 6)=	8.57	A(6, 7)=	39.26	A(6, 8)=	4.26
A(6, 9)=	560.32	A(6,10)=	642.41	A(6,11)=	174.88	A(6,12)=	64.24
A(6,13)=	167.74	A(6,14)=	333.34	A(6,15)=	465.96	A(6,16)=	62.81
A(6,17)=	24.98	A(6,18)=	646.69				
A(7, 1)=	646.83	A(7, 2)=	434.69	A(7, 3)=	488.94	A(7, 4)=	-67.61
A(7, 5)=	-8.57	A(7, 6)=	6505.85	A(7, 7)=	1753.05	A(7, 8)=	52.11
A(7, 9)=	-467.53	A(7,10)=	-189.15	A(7,11)=	-539.62	A(7,12)=	-532.48
A(7,13)=	-548.04	A(7,14)=	-6514.42	A(7,15)=	6.42	A(7,16)=	39.97
A(7,17)=	2467.55	A(7,18)=	233.34				
A(8, 1)=	2517.45	A(8, 2)=	404.72	A(8, 3)=	5000.05	A(8, 4)=	63.53
A(8, 5)=	333.24	A(8, 6)=	253.39	A(8, 7)=	4902.26	A(8, 8)=	3200.56
A(8, 9)=	38.54	A(8,10)=	580.74	A(8,11)=	4885.15	A(8,12)=	-24.27
A(8,13)=	-167.03	A(8,14)=	-881.52	A(8,15)=	4092.33	A(8,16)=	6196.50
A(8,17)=	56.39	A(8,18)=	4606.76				
A(9, 1)=	452.54	A(9, 2)=	489.65	A(9, 3)=	2.86	A(9, 4)=	489.66
A(9, 5)=	24.27	A(9, 6)=	880.81	A(9, 7)=	-24.27	A(9, 8)=	1687.39
A(9, 9)=	5043.57	A(9,10)=	1808.73	A(9,11)=	24.27	A(9,12)=	167.03
A(9,13)=	2.86	A(9,14)=	0.0	A(9,15)=	880.81	A(9,16)=	880.81
A(9,17)=	880.81	A(9,18)=	880.81				
A(10, 1)=	880.81	A(10, 2)=	880.81	A(10, 3)=	880.81	A(10, 4)=	880.81
A(10, 5)=	880.81	A(10, 6)=	880.81	A(10, 7)=	880.81	A(10, 8)=	880.81
A(10, 9)=	880.81	A(10,10)=	880.81	A(10,11)=	880.81	A(10,12)=	880.81
A(10,13)=	880.81	A(10,14)=	880.81	A(10,15)=	880.81	A(10,16)=	880.81
A(10,17)=	880.81	A(10,18)=	-466.81				
A(11, 1)=	-2.86	A(11, 2)=	1758.76	A(11, 3)=	1628.71	A(11, 4)=	1737.35
A(11, 5)=	5377.64	A(11, 6)=	3314.81	A(11, 7)=	24.98	A(11, 8)=	1.43
A(11, 9)=	4449.73	A(11,10)=	1687.39	A(11,11)=	1674.54	A(11,12)=	167.74
A(11,13)=	4758.66	A(11,14)=	1594.59	A(11,15)=	-167.63	A(11,16)=	-452.54
A(11,17)=	-549.33	A(11,18)=	0.0				
A(12, 1)=	3367.67	A(12, 2)=	4592.43	A(12, 3)=	6412.63	A(12, 4)=	-630.98
A(12, 5)=	-2.86	A(12, 6)=	1673.11	A(12, 7)=	-24.27	A(12, 8)=	174.16
A(12, 9)=	-167.74	A(12,10)=	1658.12	A(12,11)=	1980.04	A(12,12)=	5561.09
A(12,13)=	0.0	A(12,14)=	0.0	A(12,15)=	2451.13	A(12,16)=	-188.44
A(12,17)=	-652.47	A(12,18)=	-238.40				

B(1)=	[illegible]	B(2)=	[illegible].37	B(3)=	68565.25	B(4)=	17125.03
B(5)=	10500.00	B(6)=	11729.81	B(7)=	8111.57	B(8)=	76855.56
B(9)=	25500.00	B(10)=	30440.52	B(11)=	57105.13	B(12)=	54557.50

C(1)=	20456.00	C(2)=	7409.27	C(3)=	7518.43	C(4)=	6109.01
C(5)=	1804.00	C(6)=	2609.12	C(7)=	2722.29	C(8)=	195290.06
C(9)=	233298.75	C(10)=	20381.32	C(11)=	223335.62	C(12)=	-928.56
C(13)=	60339030.00	C(14)=	6168196.00	C(15)=	-14627098.00	C(16)=	-44262992.00
C(17)=	2617.54	C(18)=	3172.38				

METODO SIMPLEX

SOLUCAO FINAL - METODO SIMPLEX

X19	60871.6205
X20	31340.3203
X30	57189.8047
X22	16970.4687
X23	7119.32812
X24	9506.08594
X25	3203.13428
X26	78666.6250
X27	22154.8945
X28	15193.6602
X17	4.76392174
X13	12.5473065

VALOR DE Z 760240128.
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS- 20

METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS

SOLUCAO FINAL - METODO DVS-PLEX

X19	60871.6048905002909
X20	31345.3415312891630
X17	4.7640181681002010
X22	16970.4166454015726
X23	7119.3528365163l274
X24	9506.1200010957l311
X25	3207.9012663624437б
X26	78685.6446357018115
X27	22154.8456393661027
X28	15193.6511256679560
X13	12.5473132037575Z1
X30	57189.8712585727699

VALOR DE Z 760243285.167457759
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS- 3

```
EXEMPLO N. 10
NUMERO DE VARIAVEIS     4
NUMERO DE RESTRICOES    6


DADOS DO MODELO

A( 1, 1)=        2579.04    A( 1, 2)=      43166.02    A( 1, 3)=  105413780.00    A( 1, 4)=        -759.02
A( 2, 1)=   -17633504.00    A( 2, 2)=     -27440.22    A( 2, 3)= -643687243.00    A( 2, 4)=       31057.44
A( 3, 1)=   723463972.00    A( 3, 2)=      39784.61    A( 3, 3)=  933187323.00    A( 3, 4)=       26470.75
A( 4, 1)=   823597330.00    A( 4, 2)=      32982.50    A( 4, 3)=  773646592.00    A( 4, 4)=       -6867.20
A( 5, 1)=  -101077200.00    A( 5, 2)=       1333.42    A( 5, 3)=   31276624.00    A( 5, 4)=      -17535.49
A( 6, 1)=  -411312125.00    A( 6, 2)=     -46343.91    A( 6, 3)=         31.41    A( 6, 4)=      -29012.68

B( 1)=  2223557630.00     B( 2)=  1333200190.00     B( 3)=  3487593220.00     B( 4)=  2926873660.00
B( 5)=   272434650.00     B( 6)=   363404544.00

C( 1)=     16732734.00    C( 2)=     -769395.19     C( 3)= 40749584400.00     C( 4)=    37107296.00

METODO SIMPLEX


PROCESSO ENCERRADO. O VALOR OTIMO NAO FOI ALCANCADO   EM   400  ITERACOES


METODO DVS-PLEX

METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - DVS
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO
METODO DE INVERSAO ESCOLHIDO - ELIMINACAO

SOLUCAO FINAL  -  METODO DVS-PLEX
   X 3                 1.355175140347616
   X 5         634373222.131754518
   X 4             76527.4306424482120
   X 6        2251554204.42833495
   X 9        1572774387.87785679
   X10        3055291024.49184549
  VALOR DE Z  6764312212129.40918
TOTAL DE ITERACOES EFETIVADAS-        4

------------------------------------------------------------------------
```

BIBLIOGRAFIA

[1]- Conte, S.D. Elementos de Análise Numérica. Porto Alegre, Editora Globo, 1975.

[2]- Franklin, Joel N. Matrix Theory. New Jersey, Prentice-Hall - Inc. Englewood Cliffs, 1968.

[3]- Gantmacher, F.R. Matrix Theory. New York, Chelsea Publishing Company, 1959. vol.1

[4] Golub, G. H. and Reinsch, C. Singular Value Decomposition and Least Square Solutions. Numer. Math. 14, 403-420, 1970.

[5] Golub, G. and Kahan W. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. SIAM J. Numer Anal. 2, 205-223, 1965.

[6] Hillier, Frederich S. Introduction to operations research. São Francisco, Holden-Day-Inc., 1967.

[7] Hoffman, Kenneth e Kunze, Ray. Álgebra Linear. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1979.

[8] Lawson, Charles L. e Hanson, Richard. Solving Least Squares Problems. New Jersey, Prentice Hall-Inc., Englewood Cliffs, 1974.

[9] Rice, John R. Matrix computations and mathematical software. Tokyo, Mc Graw Hil, 1983.

[10] Stange, Plinio. A decomposição em valores singulares para a inversão de transformada de Laplace e deconvoluções. Dissertação de mestrado. UFRJ/COPPE, 1975.

[11] Varah, J.M. On the Numerical Solutions of ill- conditional Linear Systems with applications to ill-posed problems. STAM J. Numer. Anal. 10, nº2, 1973.