

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICO-QUÍMICA

MODELO DE ISING NUM CAMPO ALEATÓRIO NA APROXIMAÇÃO DO GRUPO  
DE RENORMALIZAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CA  
TARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS

ALBERTO SEBASTIÃO DE ARRUDA

FEVEREIRO - 1988

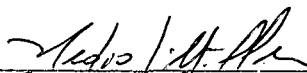
MODELO DE ISING NUM CAMPO ALEATÓRIO NA APROXIMAÇÃO DO GRUPO DE RE  
NORMALIZAÇÃO DE CAMPO MÉDIO.

ALBERTO SEBASTIÃO DE ARRUDA

ESTA TESE FOI JULGADA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO ORIENTA  
DOR E MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA.




PROF. Dr. WAGNER FIGUEIREDO  
ORIENTADOR

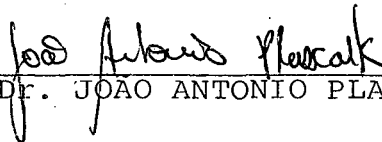


PROF. Dr. HÉDIO JOSÉ MÜLLER  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:



PROF. Dr. WAGNER FIGUEIREDO



PROF. Dr. JOAO ANTONIO PLASCAK



PROF. Dr. VITOR HUGO FERREIRA DOS SANTOS



PROF. Dr. SUBRAMANIA JAYARAMAN

Aos meus, Alberto, Lenita, Virte, Mariete, Maria, João, Adelson, Eloisa, Eva, Jorge, Pedro, Ada e Paulo, com amor e carinho.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Wagner Figueiredo, pela valiosa e dedicada orientação e pela confiança em mim depositada.

Ao Prof. Dr. V. K. Saxena pela sugestão do trabalho.

Ao Prof. Dr. João Antônio Plascak pelas valiosas sugestões e discussões.

A CAPES pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal do Mato Grosso.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

A Virte e Neusa pelo auxílio na elaboração gráfica deste trabalho.

Aos colegas da Pós-Graduação e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

**RESUMO**

O modelo de Ising num Campo Aleatório, com uma distribuição trimodal (soma de três funções delta) de campos, é estudado dentro da aproximação do Grupo de Renormalização de Campo Médio. Consideramos blocos de um, dois e quatro spins e as relações de recorrência para a determinação dos pontos fixos são analisadas numericamente. Desta forma construímos o diagrama de fases no espaço acoplamento crítico ( $K$ ), campo ( $h$ ) e probabilidade de campo nulo ( $p$ ). Mostramos que a linha de pontos tricríticos termina para valores de  $p$  próximos a  $p = 2/3$ , um resultado muito diferente daquele obtido na aproximação usual de campo médio. Esse resultado do Grupo de Renormalização de Campo Médio ( $p = 2/3$ ) é consistente com a equivalência das distribuições trimodal e gaussiana (ausência de pontos tricríticos) até momentos de quarta ordem se  $p = 2/3$ .

**ABSTRACT**

The random - field Ising model with a trimodal distribution (sum of three delta functions), is studied within Mean Field Renormalization Group. We have considered clusters of one, two and four spins and the recursion relations for the determination of the fixed points are numerically analysed. In this way, we constructed the phase diagram in the space of the critical coupling ( $K$ ), field ( $h$ ) and zero field probability ( $p$ ). We have shown that the line of tricritical points ends for values of  $p$  near  $2/3$ , very different from that obtained in the usual mean field approximation. Mean Field Renormalization Group ( $p \approx 2/3$ ) is consistent with the equivalence of the trimodal and gaussian (absence of tricritical points) distributions until fourth order moments if  $p = 2/3$ .

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	01
CAPÍTULO 1 - GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE CAMPO MÉDIO.....	05
CAPÍTULO 2 - MODELO DE ISING NUM CAMPO ALEATÓRIO.....	15
CAPÍTULO 3 - MODELO DE ISING NUM CAMPO ALEATÓRIO NA APROXIMAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE CAMPO MÉ- DIO.....	28
CAPÍTULO 4 - DIAGRAMA DE FASES.....	44
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES.....	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	59

## INTRODUÇÃO

O grupo de renormalização fenomenológico<sup>1,2</sup> baseia-se na comparação de sistemas finitos de diferentes tamanhos. Indekeu e colaboradores<sup>3</sup> apresentaram um novo método de renormalização que consiste na comparação das magnetizações de dois sistemas finitos. Eles consideraram dois blocos com  $N$  e  $N'$  spins de Ising e fixaram as magnetizações dos spins das respectivas fronteiras. Calculando-se as magnetizações por spin  $M_N$  e  $M_{N'}$ , para ambos os blocos, e impondo-se uma relação de escala entre as magnetizações aproximadas, o que corresponde a duas diferentes escalas de comprimento, obtém-se uma relação de recorrência para a constante de acoplamento, a partir da qual os pontos fixos são determinados. Indekeu e colaboradores<sup>3</sup> denominaram o método de Grupo de Renormalização de Campo Médio (GRCM). O método já foi aplicado para sistemas de spins clássicos e quânticos<sup>3</sup>, para sistemas aleatórios clássicos<sup>4</sup> e para modelos de Heisenberg anisotrópicos<sup>5</sup>.

No capítulo 1 apresentamos o Grupo de Renormalização de Campo Médio, bem como, através de um exemplo, mostraremos a sua eficiência e simplicidade. Calcularemos as constantes críticas para o modelo de Ising e os resultados serão comparados com aqueles obtidos em Campo Médio, com resultados exatos em duas dimensões<sup>6</sup>, e expansões em série de altas temperaturas<sup>7</sup> no caso tridimensional.



Neste trabalho investigaremos algumas propriedades críticas do Modelo de Ising num Campo Magnético Aleatório. Atualmente este modelo, o qual chamaremos de MICA, tem sido muito estudado, bem como utilizado para analisar vários sistemas em física do estado sólido<sup>8</sup>. Este modelo é caracterizado por um hamiltoniano, que exhibe a competição entre o estado ordenado, devido ao acoplamento de intercâmbio  $J$  entre os spins e o desordenado, devido ao campo aleatório  $H_i$  em cada ponto da rede. Se  $(\langle H_i^2 \rangle)^{1/2}$  é claramente maior do que  $J$ , o sistema estará desordenado em baixas temperaturas; mas ao contrário se  $H \ll J$  o sistema estará ordenado ferromagneticamente, desde que a dimensão espacial seja maior que uma dimensão crítica mínima. O fato de existir uma dimensão crítica mínima por si só é um problema interessante para o MICA. Há vários estudos abordando esse problema, mas o trabalho pioneiro é devido a Imry e Ma<sup>9</sup> que apresentaram o argumento básico de que a dimensão crítica mínima vale 2. Esse resultado foi confirmado recentemente por Imbrie<sup>10</sup>. Outro aspecto interessante refere-se ao fato do MICA ser equivalente ao modelo de um antiferromagneto diluído num campo magnético externo uniforme, como foi mostrado por Fishman e Aharony<sup>11</sup>.

Em nosso trabalho, o objetivo maior é o de investigar a existência de pontos tricríticos no MICA. Aharony<sup>12</sup> mostrou que as distribuições bimodal e gaussiana levam a diferentes diagramas de fase e apenas a distribuição bimodal apresenta ponto tricrítico, isto dentro da aproximação

mação de campo médio. A dimensionalidade e a forma da distribuição dos campos aleatórios são importantes para se determinar a ordem da transição de fase no MICA, pois a distribuição gaussiana pode levar a uma transição de fase de primeira ordem conforme os estudos de Houghton, Khurana e Seco<sup>13</sup>. Mattis<sup>14</sup> considerou uma nova distribuição mais semelhante à distribuição gaussiana, a qual chamaremos de trimodal. Ela é semelhante à bimodal, apenas apresenta um delta a mais com peso  $p$  se o campo é nulo. Na aproximação de campo médio ele determinou uma linha de pontos tricríticos que termina em  $p=0.25$ . Segundo Mattis<sup>14</sup>, a distribuição trimodal imita de certa forma a distribuição gaussiana, pois uma fração significativa dos spins estão em campos externos fracos. Assumindo que é este aspecto da distribuição gaussiana que leva a um comportamento diferente da distribuição bimodal, espera-se que a distribuição trimodal também perca o ponto tricrítico para valores de  $p$  maiores que algum valor  $p_c$  a ser determinado. Mattis<sup>14</sup> encontrou o valor  $p_c = 0.25$ , que é próximo a  $p = 1/3$ , segundo ele o valor de  $p$  no qual a distribuição trimodal é uma boa aproximação à gaussiana. Portanto se  $p > 0.25$ , a transição de fase no MICA é sempre de segunda ordem e para valores muito grandes do campo a temperatura crítica se anula.

Sebastianes e Saxena<sup>15</sup>, Kaufman, Klunzinger e Khurana<sup>16</sup> usando a mesma distribuição trimodal e a aproximação de campo médio, via expansão de Landau, obtiveram praticamente os mesmos resultados de Mattis<sup>14</sup>, porém a tem

peratura crítica não vai a zero para valores grandes do campo, o que mostra que em  $p = 1/3$  as distribuições trimodal e gaussiana não são equivalentes. Nestes trabalhos é também determinado o diagrama de fases completo no espaço temperatura, campo e parametro  $p$ .

No capítulo 2 deste trabalho apresentamos um estudo acerca do modelo de Ising num campo aleatório e mostramos, ao contrário de Mattis<sup>14</sup>, que as aproximações trimodal e gaussiana se equivalem quando  $p = 2/3$ .

No capítulo 3 estudamos o Modelo de Ising num Campo Aleatório na aproximação do grupo de renormalização de campo médio com uma distribuição trimodal. Obtemos resultados muito diferentes daqueles de campo médio com relação à localização da linha de pontos tricríticos. No caso particular em que  $p = 0$  (distribuição bimodal) e para blocos menores, reproduzimos os resultados anteriores obtido por Droz e colaboradores<sup>4</sup>.

No capítulo 4 mostramos os diagramas de fase obtidos do MICA usando a aproximação do GRCM. Valendo-se de critérios semelhantes aos utilizados por Alcantara Bonfin<sup>17</sup> e Figueiredo e Plascak<sup>18</sup> determinamos os pontos tricríticos como sendo os pontos extremos das linhas de segunda ordem.

No capítulo 5 apresentamos as principais conclusões de nosso trabalho.

## CAPÍTULO 1

## GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

Neste capítulo apresentaremos o grupo de renormalização de campo médio (GRCM). Mostraremos através de um exemplo, a simplicidade, a eficiência e a operacionalidade do método. Vamos tomar como exemplo o modelo de Ising ferromagnético em uma rede hipercúbica de dimensão  $d$  e hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H}(s) = H(s) = K \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + h \sum_{(i)} S_i, \quad (1.1)$$

onde  $S_i = \pm 1$ ,  $\beta = (K_B T)^{-1}$ ,  $K = J/K_B T$  é a constante de acoplamento entre os primeiros vizinhos e  $h = H/K_B T$  é o campo magnético externo.

O GRCM está dentro do espírito do chamado grupo de renormalização fenomenológico<sup>1,2</sup>, baseado na comparação de sistemas finitos de diferentes tamanhos. Consideramos dois sistemas finitos com  $N$  e  $N'$  spins. Para ambos os blocos, nós calculamos a magnetização por spin na presença de condições de contorno que quebram a simetria, que em última análise simulam os efeitos dos spins da vizinhança do sistema infinito. Para o modelo de Ising que estamos considerando, fixamos os spins das fronteiras com os valores  $b$  e  $b'$  para os blocos com  $N$  e  $N'$  spins respectiva-

mente. Calculamos as magnetizações por spin  $M_N$  e  $M_{N'}$ , para ambos os blocos, e impomos uma relação de escala entre as magnetizações aproximadas, o que corresponde a duas diferentes escalas de comprimento, ou seja,

$$M_{N'}(K', b') = \xi M_N(K, b) \quad , \quad (1.2)$$

onde  $K$  e  $K'$  são constantes de acoplamento para os dois sistemas considerados. Assumindo uma relação semelhante para as magnetizações da fronteira,

$$b' = \xi b \quad , \quad (1.3)$$

podemos linearizar a equação (1.2), e obtemos a seguinte equação que é independente do fator da escala  $\xi$ :

$$\frac{\partial M_{N'}}{\partial b'}(K', 0) = \frac{\partial M_N}{\partial b}(K, 0) \quad . \quad (1.4)$$

Essa última equação pode ser interpretada como a relação de recorrência para a constante  $K$ , a partir da qual os pontos fixos críticos ( $K = K' = K_c$ ) são determinados.

O expoente crítico do comprimento de correlação  $y_t$  pode ser determinado a partir da relação

$$\left. \frac{dK'}{dK} \right|_{K=K_c} = l^{y_t} \quad , \quad (1.5)$$

onde  $L = \left( \frac{N}{N'} \right)^{1/d}$  é o fator de escala e  $d$  é a dimensionalidade do sistema.

O GRCM foi proposto por Indekeu e colaboradores<sup>3</sup> que o aplicaram para sistemas de spins quânticos e clássicos. O método também foi aplicado para sistemas aleatórios clássicos<sup>4</sup> e para modelos de Heisenberg anisotrópicos<sup>5</sup>. Na maioria dos casos estudados, resultados bastante bons são obtidos escolhendo-se os blocos mais simples possíveis, ou seja, blocos com um e dois spins.

Vamos considerar então uma aplicação para o modelo de Ising, levando-se em conta blocos com um, dois e quatro spins. Consideremos inicialmente os seguintes blocos em uma rede cúbica contendo um e dois spins:

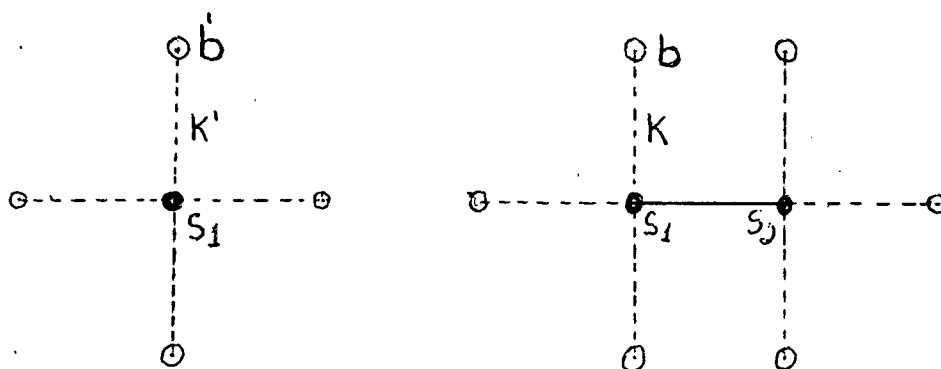


Figura 1 - Blocos usados no presente cálculo. Os spins estão representados pelos círculos,  $K$  e  $K'$  são as constantes de acoplamento;  $b$  e  $b'$  são as magnetizações dos spins das fronteiras (círculos abertos).

Os hamiltonianos são dados respectivamente

por

$$\mathcal{H}_1 = K' z b' S_1 \quad (1.6)$$

$$\mathcal{H}_2 = K S_1 S_2 + (z-1) K b (S_1 + S_2) \quad (1.7)$$

onde  $z$  é o número de coordenação da rede. Para o bloco com um único spin a magnetização média é dada por

$$\langle M_1 \rangle = \frac{\text{Tr} S_1 e^{\mathcal{H}_1}}{\text{Tr} e^{\mathcal{H}_1}} \quad (1.8)$$

ou seja,

$$\langle M_1 \rangle = \text{tgh}(K' b' z) \quad (1.9)$$

Expandindo-se para  $b'$  muito pequeno, tem-se:

$$\langle M_1 \rangle = K' b' z \quad (1.10)$$

Na aproximação usual de campo médio fazendo  $\langle M_1 \rangle = b'$ , a constante crítica terá o seguinte valor:

$$K_c' = \frac{1}{z} \quad (1.11)$$

que para  $Z = 4$  nos fornece  $K'_c = 0.250$  e para  $Z = 6$ ,  $K'_c = 0.1666$ .

Tomando-se agora o bloco com dois spins e calculando-se a magnetização por spin através da equação

$$\langle M_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(S_1 + S_2) e^{H_2}}{\text{Tr} e^{H_2}}, \quad (1.12)$$

obtemos o seguinte resultado no limite em que  $b$  é muito pequeno:

$$\langle M_2 \rangle = \frac{2 e^{Kb} K (Z-1)}{e^K + e^{-K}}. \quad (1.13)$$

O resultado de campo médio para esse bloco é obtido fazendo-se  $\langle M_2 \rangle = b$ , ou seja,

$$1 = \frac{2 e^{Kb} K (Z-1)}{e^K + e^{-K}}. \quad (1.14)$$

Para  $Z = 4$  obtemos  $K_c = 0.265$  e para  $Z = 6$ ,  $K_c = 0.171$ .



A aplicação do GRCM para os blocos com um e dois spins, via equação (1.4), nos fornece a seguinte equação:

$$z K' = \frac{2l^K K(z-1)}{l^K + \bar{l}^K} . \quad (1.15)$$

Em uma dimensão obtemos somente os pontos fixos triviais  $K = K' = K^* = 0$  e  $\infty$ , como já era de se esperar. Entretanto, para  $d = 2$ , obtemos o ponto fixo não trivial  $K_c = 0.346$  e para  $d = 3$ ,  $K_c = 0.202$ .

É fácil verificar que o GRCM melhora sensivelmente os resultados de campo médio para os blocos de um e dois spins, que em duas dimensões são respectivamente,  $K_c = 0.250$  e  $K_c = 0.265$ . O resultado do GRCM nos fornece o valor  $K_c = 0.346$ , que está muito mais próximo do valor exato<sup>6</sup>  $K_c = 0.441$ . Analogamente, para  $d = 3$ , os resultados de campo médio para os blocos de um e dois spins são respectivamente,  $K_c = 0.166$  e  $K_c = 0.171$ . O GRCM nos fornece  $K_c = 0.202$ , bem próximo do valor obtido pelas expansões em séries de altas temperaturas<sup>7</sup>,  $K_c = 0.214$ .

Podemos melhorar os resultados para a constante crítica tomando-se blocos com um número maior de spins. Por exemplo, vamos considerar um bloco que contém quatro spins:

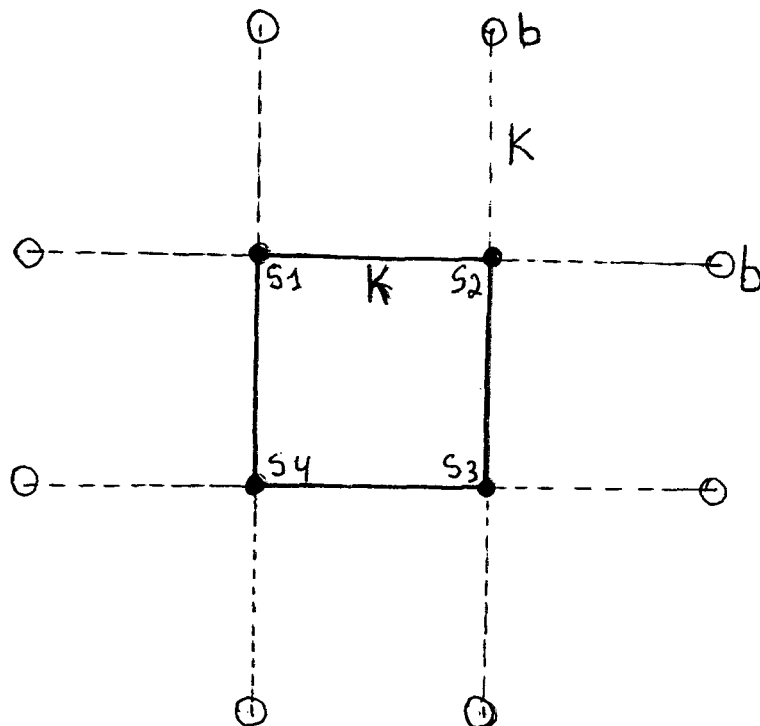


Figura 2 - Bloco com quatro spins. Os circulos abertos representam os spins da fronteira e  $K$  é a constante de acoplamento.

O hamiltoniano para esse bloco é dado por

$$\mathcal{H}_4 = K(S_1 S_2 + S_1 S_4 + S_2 S_3 + S_3 S_4) + (z-2)Kb(S_1 + S_2 + S_3 + S_4). \quad (1.16)$$

A magnetização média por spin para esse bloco é calculada pela seguinte expressão:

$$\langle M_4 \rangle = \frac{1}{4} \frac{\text{Tr} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) e^{\mathcal{H}_4}}{\text{Tr} e^{\mathcal{H}_4}}, \quad (1.17)$$

que para pequenos valores de  $b$  nos fornece

$$\langle M_4 \rangle = \frac{2b(z-2)K(e^{4K} + 1)}{\cosh(4K) + 3} . \quad (1.18)$$

Na aproximação de campo médio, fazemos  $\langle M_4 \rangle = b$  e obtemos a seguinte relação:

$$1 = \frac{2(z-2)K(e^{4K} + 1)}{\cosh(4K) + 3} , \quad (1.19)$$

cujos resultados para  $d = 2$  e  $d = 3$  são respectivamente,  $K_c = 0.286$  e  $K_c = 0.176$ .

Aplicando-se o GRM para os blocos de um e quatro spins obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$z K' = \frac{2(z-2)K(e^{4K} + 1)}{\cosh(4K) + 3} . \quad (1.20)$$

As soluções encontradas para os pontos fixos ( $K = K' = K_c$ ) são as seguintes:

Se  $d = 2$ ,  $K_c = 0.361$  e se  $d = 3$ ,  $K_c = 0.204$ .

Finalmente, aplicamos o GRM para os blocos com dois e quatro spins. Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$\frac{2z^{K'}(z-1)}{z^{K'} + z^{-K'}} = \frac{2(z-2)K(z^{4K} + 1)}{\cosh(4K) + 3}. \quad (1.21)$$

Nos pontos fixos ( $K = K' = K_c$ ), os resultados obtidos são os seguintes: Se  $d = 2$ ,  $K_c = 0.369$  e se  $d = 3$ ,  $K_c = 0.205$ .

A seguir, apresentamos duas tabelas que resumizam os resultados obtidos anteriormente:

	$d$	1 spin	2 spins	4 spins
CAMPO MÉDIO	2	0.250	0.265	0.286
CAMPO MÉDIO	3	0.166	0.171	0.176

Tabela 1 - Resultados de campo médio para o acoplamento crítico no modelo de Ising em duas e três dimensões.

	$d$	$1 \leftrightarrow 2$	$1 \leftrightarrow 4$	$2 \leftrightarrow 4$
GRCM	2	0.346	0.361	0.369
GRCM	3	0.202	0.204	0.205

Tabela 2 - Resultados do GRCM para o modelo de Ising em duas e três dimensões. Para  $d = 2$  o valor exato é  $K_c = 0.441$  e para  $d = 3$ , o resultado de séries é  $K_c = 0.214$ .

Os resultados nessas tabelas indicam que tanto para a aproximação de campo médio quanto para o GRCM, os

resultados obtidos para a temperatura crítica serão cada vez melhores sempre que tomarmos blocos com um número crescente de spins. Além disso, quanto maior for a dimensionalidade do sistema considerado mais nos aproximamos dos resultados exatos. Entretanto, é bom lembrar que mesmo para os menores blocos considerados, de um e dois spins, os resultados obtidos para a temperatura crítica na aproximação do GRCM, melhoram sensivelmente os resultados usuais obtidos dentro da aproximação de campo médio. Embora neste trabalho não calculamos o expoente térmico do comprimento de correlação, o aumento no tamanho dos blocos também leva a melhores resultados. No capítulo 3 deste trabalho aplicaremos o GRCM no estudo das transições de fase de segunda ordem para um modelo de Ising num campo magnético aleatório.

## CAPÍTULO 2

### MODELO DE ISING NUM CAMPO ALEATÓRIO

Nos últimos anos o Modelo de Ising num Campo Aleatório (MICA) tem sido objeto de muitas discussões teóricas e experimentais. Esse modelo tem sido empregado na análise de diferentes sistemas em física do estado sólido<sup>8</sup>: Fases comensuráveis como na deposição de monocamadas de Xe sobre cobre; sistemas ferroelétricos e sistemas magnéticos. Seja o seguinte modelo de Ising com interações de intercâmbio entre primeiros vizinhos numa rede cúbica de dimensão  $d$ :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j - \sum_{(i)} H_i S_i \quad , \quad (2.1)$$

onde  $J > 0$  (ferromagneto) e  $H_i$  é um campo magnético aleatório em cada ponto da rede. O MICA é dominado pela competição existente entre os dois termos da equação (2.1) acima. Enquanto o primeiro termo favorece o ferromagnetismo em baixas temperaturas, o segundo termo favorece a desordem. Quando  $H = (\langle H_i^2 \rangle)^{1/2}$  é suficientemente maior que  $J$ , esperamos que o sistema esteja desordenado em baixas temperaturas. Por outro lado, se  $H \ll J$ , devemos esperar que o

sistema se ordene ferromagneticamente na região de baixas temperaturas, desde que a dimensão espacial  $d$  seja maior que uma dimensão crítica mínima  $d_c$ . O argumento básico para se determinar a dimensionalidade crítica mínima é aquele de Imry e Ma<sup>9</sup>. Ele é baseado na estabilidade do estado ferromagnético com relação à formação de domínios mal orientados. Se nós invertemos os spins dentro de um domínio de tamanho  $R$ , a energia gasta para isso é proporcional à área do domínio, ou seja,

$$E_{int} = J R^{d-1} . \quad (2.2)$$

Para  $d > 1$ , a probabilidade de formação de um grande domínio, proporcional a  $\text{EXP}(-\beta E_{int})$ , é desprezível em baixas temperaturas. Entretanto, para  $d < 1$ , domínios de tamanhos muito grandes são possíveis e o ferromagneto é instável para  $T \neq 0$ . Então, se  $H = 0$ , a dimensão crítica é  $d_c = 1$ . Se, por outro lado, campos aleatórios são introduzidos, eles favorecem a formação de domínios. De fato, se consideramos o estado ferromagnético, onde todos os spins  $S_i$  dentro do volume  $R^d$  tenham valor  $(+1)$ , a energia média devido aos campos aleatórios dentro do volume considerado é  $H R^{d/2}$ . Essa energia pode ser positiva ou negativa, com igual probabilidade  $1/2$ , mas é sempre possível encontrar uma região em volta de um ponto arbitrário  $i$ , de tal forma que ela seja favorável a se inverter os spins dentro dela. Portanto, a energia associada à inversão

de spins dentro de um domínio de tamanho linear  $R$  é da ordem de

$$W(R) = JR^{d-1} - HR^{d/2}. \quad (2.3)$$

Para  $H \ll J$ , esta energia é positiva para  $d > 2$ , mas negativa para  $d < 2$  se  $R$  é bastante grande. Portanto, a dimensionalidade crítica mínima do MICA é  $d_c = 2$ . Este resultado foi confirmado mais recentemente por Imbrie<sup>10</sup> através de um cálculo exato à  $T = 0$ .

Outro problema interessante associado ao MICA, e com relevante interesse experimental, é o do antiferromagneto uniaxial com duas subredes, diluído, e num campo magnético externo uniforme. Na realidade, conforme Fishman e Aharony<sup>11</sup> mostraram, o MICA é equivalente ao modelo de um antiferromagneto diluído num campo magnético externo uniforme.

Neste trabalho estamos interessados em um outro aspecto importante relativo ao MICA, ou seja, a existência do ponto tricrítico para diferentes distribuições de campos aleatórios. Aharony<sup>12</sup> mostrou que, mesmo na aproximação de campo médio, a distribuição bimodal

$$P(H_i) = \frac{1}{2} [\delta(H_i - H) + \delta(H_i + H)], \quad (2.4)$$

e a distribuição gaussiana

$$P(H_i) = \left(2\sigma^2\right)^{-1/2} \text{EXP}(-H_i^2/\sigma^2). \quad (2.5)$$



levam a diferentes diagramas de fases para o MICA. Para uma distribuição bimodal um ponto tricrítico foi determinado para os seguintes valores da temperatura e do campo:

$K_B T_t = 0.67$  e  $H_t = 0.44$ . Portanto, em baixas temperaturas, a transição de fase é de primeira ordem e para altas temperaturas a transição entre a fase ordenada (ferromagnética) e a desordenada é de segunda ordem. Entretanto, a distribuição gaussiana leva apenas a transições de segunda ordem, mesmo para  $T = 0$ .

Recentemente tem-se discutido na literatura o critério para a determinação da ordem da transição de fase em baixas temperaturas. Houghton, Khurana e Seco<sup>13</sup> enfatizaram a importância da dimensionalidade e da forma da distribuição dos campos aleatórios na determinação da natureza da transição de fase no MICA. Seus estudos numéricos detalhados foram baseados na análise de séries de altas temperaturas para a suscetibilidade estática do MICA. Eles mostraram que a distribuição gaussiana poderia levar a transições de fases de primeira ordem em baixas temperaturas para o MICA, em dimensões inferiores a quatro.

Para tentar compreender a natureza das transições de fases no MICA, Mattis<sup>14</sup> considerou uma distribuição trimodal. Cada spin está em um campo  $H_i = 0, \pm H$ . A probabilidade de estar em  $H_i = 0$  é  $p$  e se assumimos que os valores  $\pm H$  são igualmente prováveis, então a probabilidade de cada um é  $(1-p)/2$ . Esta distribuição permite uma interpretação física como sendo uma distribuição bimodal

diluída, na qual uma fração  $p$  dos spins não está exposta ao campo aleatório externo. A distribuição trimodal pode ser representada pela seguinte equação:

$$P(H_i) = p \delta(H_i) + \frac{1}{2}(1-p) [\delta(H_i - H) + \delta(H_i + H)], \quad (2.6)$$

A distribuição gaussiana exibe como característica principal o fato de uma fração considerável de spins estar localizada em um campo fraco. Se for este o aspecto que leva a distribuição gaussiana a ter um comportamento diferente da distribuição bimodal, esperamos que a distribuição trimodal perca o seu ponto tricrítico para valores de  $p$  maiores que um determinado valor crítico  $p_c$ .

Usando a distribuição trimodal na aproximação de campo médio, Mattis<sup>14</sup> obteve o mesmo ponto tricrítico determinado anteriormente por Aharony<sup>12</sup> quando  $p = 0$  (distribuição bimodal) e, para  $p \neq 0$ , obteve uma linha de pontos tricríticos ( $0 \leq p \leq 0.25$ ) que termina para  $p = 0.25$ , e neste caso temos  $K_B T_c = 0.44$  e  $H_c = 0.57$ . Para  $p > 0.25$  a transição de fase torna-se apenas de segunda ordem e a temperatura crítica decresce rapidamente em função de  $H$ , anulando-se quando  $H$  exceder um valor crítico dependente de  $p$ .

Segundo Mattis<sup>14</sup>, uma boa aproximação para a distribuição gaussiana seria  $p = 1/3$ , e como para este valor de  $p$  não temos mais ponto tricrítico, sua análise fornece uma confirmação independente sobre a ausência de pontos tricríticos para o modelo de Ising num campo aleato

rio com uma distribuição gaussiana dentro da aproximação de campo médio.

Acreditamos que a afirmação de que  $p = 1/3$  é uma boa aproximação para a distribuição gaussiana deve ser vista com certo cuidado. Para este valor de  $p$ , o campo sobre um determinado sítio pode tomar os valores 0 e  $\pm H$  com igual probabilidade. Vamos tentar analisar a equivalência entre as distribuições trimodal e gaussiana, estudando-se os momentos de até quarta ordem. Para a distribuição trimodal, dada pela equação (2.6), ou seja,

$$P(H_i) = p \delta(H_i) + \frac{1}{2} (1-p) [\delta(H_i - H) + \delta(H_i + H)],$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(H_i) dH_i = 1 \quad , \quad \text{teremos:}$$

$$\langle H_i^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_i^2 P(H_i) dH_i = (1-p) H^2 \quad (2.7)$$

e

$$\langle H_i^4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_i^4 P(H_i) dH_i = (1-p) H^4 \quad (2.8)$$

Consideremos agora a seguinte distribuição gaussiana normalizada:

$$P(H_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-H_i^2/2\sigma^2}, \quad (2.9)$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(H_i) dH_i = 1.$$

Neste caso, temos

$$\langle H_i^2 \rangle = \sigma^2 \quad \text{e} \quad \langle H_i^4 \rangle = 3\sigma^4. \quad (2.10)$$

Para que as distribuições trimodal e gaussiana sejam equivalentes até momentos de quarta ordem, de vemos ter:

$$\sigma^2 = (1-p)H^2 \quad \text{e} \quad 3\sigma^4 = (1-p)H^4, \quad (2.11)$$

o que é possível apenas se  $p = 2/3$ .

Portanto, esperamos que para valores de  $p$  maiores que  $2/3$ , a distribuição trimodal deixe de fornecer pontos tricríticos, ao contrário do valor  $1/3$  sugerido por Mattis<sup>14</sup>. Veremos adiante, no capítulo 4 deste trabalho, que os resultados obtidos com o grupo de renormalização de campo médio para o MICA são mais consistentes com o valor

$p = 2/3$  obtido anteriormente.

Para completar a análise do MICA na aproximação usual de campo médio, vamos discutir aqui os resultados recentes obtidos por Sebastianes e Saxena<sup>15</sup> e por Kaufman, Klunzinger e Khurana<sup>16</sup> acerca do diagrama de fases no espaço T-H-p para o MICA. Consideramos o seguinte hamiltoniano para o MICA:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J S_i S_j - \sum_{(i)} H_i S_i, \quad (2.12)$$

onde  $S_i = \pm 1$ , J representa a interação de intercâmbio entre primeiros vizinhos e o campo local  $H_i$  é dado pela distribuição de probabilidades mostrada na equação (2.6). Escrevendo-se que

$$S_i = M + \tau_i, \quad (2.13)$$

onde  $M = \langle S_i \rangle$ , a equação (2.12) torna-se:

$$H = - \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J (M + \tau_i)(M + \tau_j) - \sum_{(i)} H_i S_i. \quad (2.14)$$

Desprezando-se as correlações entre as flutuações obtemos:

$$H = \frac{1}{2} J z N M^2 - J z M \sum_{i=1}^N S_i - \sum_{i=1}^N H_i S_i. \quad (2.15)$$

Dentro da aproximação de campo médio que estamos considerando, a energia livre, levando-se em conta a distribuição trimodal, dada pela equação (2.6) será:

$$f = \frac{F}{NzJ} = \frac{M^2}{2} - T \left\{ p \ln \left[ 2 \cosh \frac{M}{T} \right] + \frac{1}{2} (1-p) \left[ \ln \left( 2 \cosh \frac{M+h}{T} \right) + \ln \left( 2 \cosh \frac{M-h}{T} \right) \right] \right\}. \quad (2.16)$$

onde usamos parametros adimensionais  $T$  ( $\equiv K_B T / Jz$ ,  $z$  sendo o número de primeiros vizinhos) e  $h$  ( $\equiv H / Jz$ ).  $M$  é a magnetização por spin, obtida pela minimização da energia livre. Obtemos então a seguinte expressão para a magnetização por spin:

$$M = p \operatorname{tgh} \frac{M}{T} + \frac{1}{2} (1-p) \left[ \operatorname{tgh} \frac{M+h}{T} + \operatorname{tgh} \frac{M-h}{T} \right]. \quad (2.17)$$

O diagrama de fases completo, pode ser obtido analisando-se o par de equações (2.16) e (2.17). Vamos considerar inicialmente a situação em que  $T = 0$ . Neste caso, as equações (2.16) e (2.17) podem ser escritas na forma:

$$f = \frac{M^2}{2} - \left\{ pM + \frac{1}{2} (1-p) \left[ (M+h) + |M-h| \right] \right\}. \quad (2.18)$$

e

$$M = p + \frac{1}{2}(1-p) \left[ 1 + \frac{(M-h)}{|M+h|} \right]. \quad (2.19)$$

É fácil verificar que para  $0 \leq p \leq 1$ ,  $M = 1$  é uma solução estável (menor energia livre) se  $h < (1+p)/2$ , enquanto que para  $h \geq (1+p)/2$ , a solução estável é  $M = p$ . Portanto no plano  $(T = 0, p - h)$  a magnetização sofre uma descontinuidade ao cruzar a linha  $h = (1+p)/2$ .

Linearizando-se o lado direito da equação (2.17) obtemos as linhas para as transições de fases de segunda ordem, ou seja,

$$T = p + (1-p) \operatorname{sech}^2(h/T). \quad (2.20)$$

Se  $p = 1$ ,  $T = 1$  ( $K_B T_C = Z J$ ) e obtemos o resultado conhecido para a transição de fase de segunda ordem a campo nulo. Expandindo-se a energia livre dada pela equação (2.16) em potências de  $M$ , podemos estudar o comportamento dessas linhas críticas através da teoria de Landau das transições de fases contínuas. Se igualarmos o coeficiente do termo  $M^2$  a zero, obtemos a equação (2.20) acima. Por outro lado, igualando a zero também o coeficiente de  $M^4$ , obtemos a seguinte equação que localiza os pontos tricríticos:

$$p + (1-p) \left[ 1 - \operatorname{tgh}^2(h/T) \right] \left[ 1 - 3 \operatorname{tgh}^2(h/T) \right] = 0. \quad (2.21)$$

Para cada valor de  $p$ , as equações (2.20) e (2.21) localizam as coordenadas do ponto tricrítico no plano  $T - h$ . O ponto tricrítico é o ponto extremo da linha de pontos críticos correspondente. Se  $p = 0$  (distribuição bimodal) obtem-se os resultados anteriores de Aharony<sup>12</sup>. Portanto, obtemos uma linha de pontos tricríticos quando consideramos o plano  $p$ - $T$ - $h$ . Entretanto, de acordo com a teoria de Landau das transições de fases contínuas, o ponto tricrítico é estável apenas se o coeficiente do termo  $M^6$  da expansão da energia livre é positivo. Para o MICA que estamos considerando, é fácil mostrar que a linha de pontos tricríticos é estável apenas para os valores de  $p$  no intervalo desde zero até 0.25. Portanto, a linha de pontos tricríticos termina para  $P_c = 0.25$ , e as coordenadas desse ponto extremo são as seguintes:  $T_c = 0.5$  e  $h_c = 0.57$ . Desta forma, o diagrama de fases exhibe uma linha de pontos tricríticos no intervalo  $0 \leq p \leq 0.25$ . Se  $p > 0.25$ , apenas são obtidas transições de fases contínuas nesta aproximação de campo médio para o MICA. Na figura 3, exibimos o diagrama de fases no plano  $p$ - $T$ - $h$ , obtido por Sebastianes e Saxena<sup>15</sup>. As linhas tracejadas representam as transições de fases de primeira ordem que foram obtidas numericamente resolvendo-se simultaneamente as equações (2.16) e (2.17). Uma análise deste diagrama de fases nos revela os seguintes aspectos:

Se  $0.25 < p \leq 1$ , a transição da fase ordenada para a fase desordenada é sempre de segunda ordem. As curvas contí-



nuas na figura 3 representam essas transições de segunda ordem. Ao contrário dos resultados de Mattis<sup>14</sup>, quando  $h \rightarrow \infty$ , a temperatura crítica nunca vai a zero e atinge o valor  $T_c(h \rightarrow \infty) = p$ .

Para o intervalo de valores  $0 \leq p < 0.25$ , o sistema exibe transições de fases de primeira ordem. Para exemplificar os resultados obtidos nessa região de valores do parametro  $p$ , consideremos o caso  $p = 0.2$ , mostrado na figura 3, onde observamos os seguintes aspectos:

Se  $h < h_A$ , onde A é o ponto extremo da linha de transições de fases contínuas para  $p = 0.2$ , a transição é de segunda ordem. Portanto A é o ponto tricrítico para  $p = 0.2$ . Entre os pontos A e B, a linha tracejada exibe a coexistência entre as fases ordenada ( $M \neq 0$ ) e a desordenada ( $M = 0$ ). Portanto entre os pontos A e B, temos uma linha de transições de fases de primeira ordem. Entretanto, entre os pontos B e D da figura 3, temos uma linha de transições de fases de primeira ordem entre duas fases ordenadas, ou seja, ambas apresentam  $M \neq 0$  ao longo da linha de coexistência. Ao longo da curva B-C, o sistema exibe transições de fases de segunda ordem entre as fases ordenadas ( $M \neq 0$ ) e desordenada ( $M = 0$ ). Também neste caso, no limite em que  $h \rightarrow \infty$ , a temperatura crítica tende a  $p$ , ou seja;  $T_c(h \rightarrow \infty) = p$ .

Os resultados obtidos para o ponto tricrítico são essencialmente aqueles previstos por Mattis<sup>14</sup>, exceto a localização deste ponto no plano  $T - h$ . A pequena diferença existente é devido ao fato de Mattis<sup>14</sup> ter loca

lizado o ponto tricrítico através da equação (2.20) e da condição  $dh/dT = \infty$ . Essa mesma condição que foi também utilizada por Houghton, Khurana e Seco<sup>13</sup>, não é uma condição necessária para o ponto tricrítico ocorrer. Ela fornece apenas um limite inferior para a temperatura tricrítica correta prevista pela aproximação de campo médio. A localização correta do ponto tricrítico é aquela baseada na teoria de Landau das transições de fases contínuas, conforme descrevemos anteriormente.

Nos próximos capítulos vamos estudar o MICA através do GRCM e verificaremos que a nossa previsão para o ponto tricrítico é sensivelmente diferente daquelas baseadas na aproximação usual de campo médio.

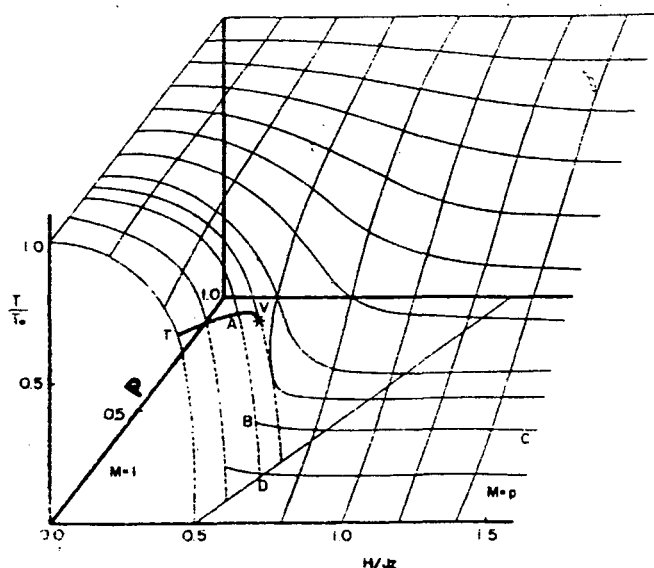


Figura 3 - Diagrama de fase do MICA, com uma distribuição trimodal, no espaço  $p - H/JZ - T/T_0$ ,  $T_0$  sendo a temperatura do modelo de Ising puro.  $V$  é o ponto final da linha de pontos tricríticos (Sebastianes e Saxena<sup>15</sup>).

## CAPÍTULO 3

**MODELO DE ISING NUM CAMPO ALEATÓRIO NA APROXIMAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO DE CAMPO MÉDIO:**

O modelo de Ising num campo magnético aleatório, com uma distribuição trimodal para o campo será estudado dentro da aproximação do GRCM. Consideremos blocos com um, dois e quatro spins para os quais aplicaremos o formalismo do GRCM. Vamos considerar o modelo de Ising num campo aleatório, dado pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J S_i S_j - \sum_i H_i S_i, \quad (3.1)$$

Onde  $S_i$  ( $\pm 1$ ) são os spins de Ising e  $J$  é a interação de intercâmbio entre pares de primeiros vizinhos.  $H_i$  é o campo magnético local, com uma distribuição de probabilidade dada por:

$$P(H_i) = p \delta(H_i) + \frac{1}{2}(1-p) [\delta(H_i - H) + \delta(H_i + H)]. \quad (3.2)$$

Levando-se em consideração os argumentos do chamado grupo de renormalização fenomenológico<sup>1,2</sup> (comparação de sistemas finitos de diferentes tamanhos) dentro do qual está imbutido o GRCM, vamos tomar blocos com um, dois e quatro spins.

Consideramos inicialmente os mesmos blocos de um e dois spins como na figura 1 do capítulo 1.

Os hamiltonianos são dados respectivamente, por

$$\beta \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1 = zK'bS_1 + h_1 S_1, \quad (3.3)$$

para o bloco contendo um único spin, e por

$$\beta \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2 = K S_1 S_2 + bK(z-1)(S_1 + S_2) + h_1 S_1 + h_2 S_2, \quad (3.4)$$

para o bloco de dois spins independentes. Temos os seguintes parâmetros reduzidos:

$$h = \frac{H}{K_B T}, \quad K = \frac{J}{K_B T}, \quad \beta = \frac{1}{K_B T},$$

onde  $K_B$  é a constante de Boltzmann.

Para o bloco contendo um único spin a magnetização média é dada por

$$\langle M_1 \rangle = \frac{\text{Tr} S_1 e^{\mathcal{H}_1}}{\text{Tr} e^{\mathcal{H}_1}}, \quad (3.5)$$

ou seja,

$$\langle M_1 \rangle = \tanh [zK'b + h_1]. \quad (3.6)$$

Usando a distribuição de probabilidade dada pela equação (3.2), obtemos a média do parâmetro de ordem sobre o campo aleatório:

$$\langle \overline{M_1} \rangle = p \operatorname{tgh}(zK'b) + \frac{1-p}{2} [\operatorname{tgh}(zK'b+h) + \operatorname{tgh}(zK'b-h)]. \quad (3.7)$$

Como nosso interesse é obter as linhas de transições de fases de segunda ordem, vamos considerar  $b'$  muito pequeno, e expandir a equação (3.7) em série de Taylor no parâmetro  $b'$ . Em primeira ordem temos:

$$\langle \overline{M_1} \rangle = K'b'z \left[ p + \frac{1-p}{\operatorname{cosh}^2(h)} \right]. \quad (3.8)$$

Os resultados da aproximação de campo médio podem ser imediatamente obtidos fazendo-se,  $b' = \langle \overline{M_1} \rangle$ , ou seja,

$$1 = K'z \left[ p + \frac{1-p}{\operatorname{cosh}^2(h)} \right]. \quad (3.9)$$

No limite  $h \rightarrow 0$ , temos

$$K'_c = \frac{1 + h^2}{z + pzh^2}. \quad (3.10)$$

Como era de se esperar, a equação (3.10) mostra que para  $h = 0$ ,  $K_c$  depende apenas da dimensão do sistema. Fazendo-se  $p = 0$ , obtemos os resultados de Droz e colaboradores<sup>4</sup>. Agora no limite  $h \rightarrow \infty$ , obtemos

$$K_c' = \frac{(1/4z) \exp(2h)}{(p/4) \exp(2h) + (1-p)}, \quad (3.11)$$

Esta equação confirma os resultados de Sebastianes e Saxena<sup>15</sup>, que mostraram que no limite  $h \rightarrow \infty$ , a temperatura de transição é dada por  $T_c(\infty) = p$ . Portanto, ao contrário de Mattis<sup>14</sup>, a temperatura crítica se anula apenas se a distribuição trimodal torna-se bimodal, ou seja, para  $p = 0$ .

Tomando-se agora o bloco com dois spins e calculando-se a magnetização por spin através da seguinte equação:

$$\langle M_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(S_1 + S_2) e^{H_2}}{\text{Tr} e^{H_2}}, \quad (3.12)$$

ou seja,

$$\langle M_2 \rangle = \frac{\text{Senh}[2bK(z-1) + h_1 + h_2]}{\text{Cosh}[2bK(z-1) + h_1 + h_2] + \bar{e}^{2K} \text{Cosh}(h_1 - h_2)},$$

(3.13)

e, efetuando-se a média sobre a distribuição dos campos aleatórios teremos:

$$\langle \overline{M_a} \rangle = \sum_{i=1}^6 X_i, \quad (3.14)$$

onde

$$X_1 = \frac{(1-p)^2 \operatorname{Senh}[2bK(z-1)]}{2 \operatorname{Cosh}[2bK(z-1)] + 2 \bar{e}^{2K} \operatorname{Cosh}(2h)}$$

$$X_2 = \frac{p^2 \operatorname{Senh}[2bK(z-1)]}{\operatorname{Cosh}[2bK(z-1)] + \bar{e}^{2K}}$$

$$X_3 = \frac{(p-p^2) \operatorname{Senh}[2bK(z-1)+h]}{\operatorname{Cosh}[2bK(z-1)+h] + \bar{e}^{2K} \operatorname{Cosh}(h)}$$

$$X_4 = \frac{(p-p^2) \operatorname{Senh}[2bK(z-1)-h]}{\operatorname{Cosh}[2bK(z-1)-h] + \bar{e}^{2K} \operatorname{Cosh}(h)}$$

$$X_5 = \frac{((1-p)/2)^2 \operatorname{Senh}[2bK(z-1)+2h]}{\operatorname{Cosh}[2bK(z-1)+2h] + \bar{e}^{2K}}$$

$$X_6 = \frac{((1-p)/2)^2 \operatorname{Senh}[2bK(z-1)-2h]}{\operatorname{Cosh}[2bK(z-1)-2h] + \bar{e}^{2K}}$$

Para obtermos as linhas das transições de segunda ordem é necessário tomar  $b$  muito pequeno. Temos portanto que:

$$\begin{aligned} \langle \overline{M}_2 \rangle = & \frac{bK(z-1)(1+\text{th}K)}{\cosh^2(h)} \left\{ (1+\text{th}K)(p^2-p) + \right. \\ & + \cosh^2(h) \left[ (2p-p^2) - (1+\text{th}K)(p-p^2) \right] + \\ & \left. + \frac{(1+\text{th}^2K\text{th}^4h)(1-p)^2}{(1+\text{th}K\text{th}^2h)^2(1-\text{th}h\text{th}K)} \right\}. \end{aligned}$$

(3.15)

No limite  $h \rightarrow 0$ , tem-se a seguinte expressão para o acoplamento crítico na aproximação de campo médio:

$$\begin{aligned} K_c = K_0 \left\{ \frac{1}{1 + 2(1 + \text{th}K_c)(p^2 - p)} + \right. \\ \left. + \frac{K_0 h^2 (1 + \text{th}K_c)^2 (1 + 2p^2 - 3p)(z-1)}{[1 + 2(1 + \text{th}K_c)(p^2 - p)]^2} \right\}. \end{aligned}$$

(3.16)



onde  $K_0 = [(Z-1)(\operatorname{tgh} K_c + 1)]^{-1}$ . Quando  $h = 0$ , vê-se que a temperatura crítica é uma constante que depende da dimensão do sistema. No limite  $h \rightarrow \infty$  nossos cálculos mostram que a temperatura crítica é reduzida em relação aos valores obtidos anteriormente, ou seja,

$$K_c = \frac{1}{(Z-1)p} \cdot \frac{1}{1 + p \operatorname{th} K_c - (1-p) \operatorname{th}^2 K_c} \quad (3.17)$$

Aplicando-se o GRCM para os blocos contendo um e dois spins obtemos a seguinte relação que determina o ponto fixo:

$$\left\{ \frac{p(2-p)}{1 + \bar{e}^{2K}} - \frac{2p(1-p) \operatorname{th}^2(h)}{(1 + \bar{e}^{2K})^2} + \frac{1}{2} (1-p)^2 \left[ \frac{1}{1 + \bar{e}^{2K} \cosh(2h)} - \frac{\operatorname{senh}^2(2h)}{[\cosh(2h) + \bar{e}^{2K}]^2} + \frac{\cosh(2h)}{[\cosh(2h) + \bar{e}^{2K}]} \right] \right\} = \frac{Z}{2(Z-1)} \left[ p + \frac{1-p}{\cosh^2(h)} \right] \quad (3.18)$$

Antes de discutirmos o diagrama de fases relativo à equação acima, vamos analisar algumas situações limite de interesse. Se  $h = 0$  a temperatura crítica é independente de  $p$  e obtemos o resultado esperado para o modelo de Ising puro, determinado anteriormente por Indekeu e colaboradores<sup>3</sup>:

$$K_c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z}{z-2}\right). \quad (3.19)$$

Agora, no limite  $h \rightarrow 0$ , temos

$$K = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z}{z-2}\right) + \frac{2(z-1)^2}{z(z-2)} dh^2. \quad (3.20)$$

onde

$$\alpha = \frac{p^2 - 4p + 3 + (1-p)e^{2-2K(p)}}{(1 + e^{-2K(p)})^2} = \frac{(1-p)^2}{1 + e^{-2K(p)}} = \frac{z(1-p)}{2(z-1)}. \quad (3.21)$$

é uma constante positiva. Já no limite  $h \rightarrow \infty$ , expandindo-se até termos da ordem de  $e^{-2h}$  temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{p(2-p)}{1 + e^{-2K}} - \frac{2p(1-p)}{(1 + e^{-2K})^2} = \frac{pz}{2(z-1)} - \\
& - \frac{(1-p)^2}{e^{-2K}} + (1-p) \left\{ \frac{2z}{z-1} - \right. \\
& \left. - \frac{4p}{(1 + e^{-2K})^2} - (1-p)e^{-2K} \right\} e^{-2h}.
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Se  $p = 0$ , a equação (3.22) reduz-se a  $K_c = \text{arctg h} [(2z - 1)^{-1/2} + 0 (e^{-2h})]$ . No caso de  $p = 0$ , as equações (3.20) e (3.22) são idênticas às obtidas por Droz e colaboradores<sup>4</sup>. A equação (3.22) indica que para valores grandes de  $h$ , a temperatura tende a um valor constante dependente de  $p$ . A solução completa da equação (3.18) só pode ser realizada numericamente. No capítulo seguinte exibimos o diagrama de fases obtido para qualquer valor de  $p$ .

A fim de melhorar os resultados, também consideramos um bloco com quatro spins independentes, como o exibido na figura 2 do capítulo 1.

O hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned}
-B\mathcal{H} = \mathcal{H}_4 = & K[S_1S_2 + S_1S_4 + S_2S_3 + \\
& + S_3S_4] + bK(z-2)[S_1 + S_2 + S_3 + S_4] + \\
& + S_1h_1 + S_2h_2 + S_3h_3 + S_4h_4.
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

onde  $h_i = \frac{H_i}{k_B T}$  ,  $K = \frac{J}{k_B T}$  e  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  .

A magnetização média por spin é dado por:

$$\langle M_y \rangle = \frac{1}{4} \frac{\text{Tr} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) e^{\mathcal{H}_y}}{\text{Tr} e^{\mathcal{H}_y}} , \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\langle M_y \rangle = \frac{A}{B} , \quad (3.25)$$

onde

$$A = \left\{ 2 e^{4K} \text{Senh}(4\lambda + h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + \text{Senh}(2\lambda + h_1 + h_2 + h_3 - h_4) + \right. \\ \left. + \text{Senh}(2\lambda - h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + \text{Senh}(2\lambda + h_1 - h_2 + h_3 + h_4) + \right. \\ \left. + \text{Senh}(2\lambda + h_1 + h_2 - h_3 + h_4) \right\} ,$$

$$B = \left\{ 2 e^{4K} \text{Cosh}(4\lambda + h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + 2 \text{Cosh}(2\lambda + h_1 + h_2 + h_3 - h_4) + \right. \\ \left. + 2 \text{Cosh}(2\lambda - h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + 2 \text{Cosh}(2\lambda + h_1 - h_2 + h_3 + h_4) + \right. \\ \left. + 2 \text{Cosh}(2\lambda + h_1 + h_2 - h_3 + h_4) + 2 \text{Cosh}(h_1 + h_2 - h_3 - h_4) + \right. \\ \left. + 2 \text{Cosh}(h_1 - h_2 - h_3 + h_4) + 2 e^{-4K} \text{Cosh}(h_1 - h_2 + h_3 - h_4) \right\} .$$

sendo que

$$\lambda = bK(z-2).$$

A média sobre os campos é obtida com a ajuda da distribuição de probabilidade, equação (3.2). Na aproximação linear para  $b$  teremos:

$$\langle \overline{M_4} \rangle = \left[ \sum_{i=1}^{12} A_i \right] b, \quad (3.26)$$

onde

$$A_1 = 2\lambda' \rho^4 \left( \frac{1 + e^{4K}}{\cosh(4K) + 3} \right).$$

$$A_2 = \frac{4\lambda'(\rho^3 - \rho^4)(e^{4K} + 1)}{\cosh(h)[\cosh(4K) + 3]} \left[ 2\cosh(h) - \frac{\sinh^2(h)[e^{4K} + 1]}{\cosh(h)[\cosh(4K) + 3]} \right].$$

$$A_3 = 4\lambda' p^2 (1-p)^2 \left[ \frac{\cosh(2h)[2e^{4K} + 1] + 1}{\cosh(2h)[e^{4K} + 3] + [e^{-4K} + 3]} \right] -$$

$$- \frac{2\sinh^2(2h)[e^{4K} + 1]^2}{[\cosh(2h)(e^{4K} + 3) + (e^{-4K} + 3)]^2} \cdot$$

$$A_4 = 4\lambda' p^2 (1-p)^2 \left[ \frac{\cosh(2h)(2e^{4K} + 1) + 1}{4\cosh(2h)(\cosh(4K) + 1) + 8} \right] -$$

$$- \frac{\sinh^2(2h)(e^{4K} + 1)^2}{4[\cosh(2h)(\cosh(4K) + 1) + 2]^2} \cdot$$

$$A_5 = 4\lambda' p^2 (1-p)^2 \left[ \frac{2e^{4K} + \cosh(2h) + 1}{\cosh(2h)(e^{-4K} + 3) + (e^{4K} + 3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2e^{4K} + \cosh(2h) + 1}{4\cosh(4K) + 8\cosh(2h) + 4} \right] \cdot$$

$$A_6 = 8\lambda^1 p \left(\frac{1-p}{2}\right)^3 \left[ \frac{2 \cosh(3h)(4e^{4K} + 1) + 6 \cosh(h)}{2 \cosh(3h)(e^{4K} + 1) + 2 \cosh(h)(e^{-4K} + 5)} - \frac{4 [\sinh(3h)(2e^{4K} + 1) + 3 \sinh(h)]^2}{[2 \cosh(3h)(e^{4K} + 1) + 2 \cosh(h)(e^{-4K} + 5)]^2} \right]$$

$$A_7 = 16\lambda^1 p \left(\frac{1-p}{2}\right)^3 \left[ \frac{\cosh(h)(4e^{4K} + 3) + \cosh(3h)}{2 \cosh(h)(\cosh(4K) + 2) + 2 \cosh(3h)} - \frac{4 [\sinh(h)(2e^{4K} - 1) + \sinh(3h)]^2}{[4 \cosh(h)(\cosh(4K) + 2) + 4 \cosh(3h)]^2} \right]$$

$$A_8 = 8\lambda^1 p \left(\frac{1-p}{2}\right)^3 \left[ \frac{2 \cosh(h)(4e^{4K} + 3) + 2 \cosh(3h)}{2 \cosh(h)(e^{4K} + 5) + 2 \cosh(3h)(e^{-4K} + 1)} - \frac{4 [\sinh(h)(2e^{4K} - 1) + \sinh(3h)]^2}{[2 \cosh(h)(e^{4K} + 5) + 2 \cosh(3h)(e^{-4K} + 1)]^2} \right]$$

$$A_9 = 2\lambda' \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 \left[ \frac{4 e^{4K} \cosh(4h) + 4 \cosh(2h)}{e^{4K} \cosh(4h) + 4 \cosh(2h) + e^{-4K} + 2} - \frac{4 [e^{4K} \sinh(4h) + 2 \sinh(2h)]^2}{[e^{4K} \cosh(4h) + 4 \cosh(2h) + e^{-4K} + 2]^2} \right]$$

$$A_{10} = 8\lambda' \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 \left[ \frac{4 e^{4K} \cosh(2h) + \cosh(4h) + 3}{2 \cosh(2h) (\cosh(4K) + 1) + \cosh(4h) + 3} - \frac{4 [2 e^{4K} \sinh(2h) + \sinh(4h)]^2}{[4 \cosh(2h) (\cosh(4K) + 1) + 2 \cosh(4h) + 6]^2} \right]$$

$$A_{11} = 4\lambda' \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 \left[ \frac{4 [e^{4K} + \cosh(2h)]}{2 \cosh(4K) + 4 \cosh(2h) + \cosh(4h) + 1} \right]$$

$$A_{12} = 2\lambda' \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 \left[ \frac{4 [e^{4K} + \cosh(2h)]}{e^{4K} + 4 \cosh(2h) + e^{-4K} \cosh(4h) + 2} \right]$$



onde

$$\lambda' = K(z-2).$$

A relação de recorrência do GRCM, aplicada aos blocos com 1 e 4 spins nos fornece a seguinte equação:

$$\frac{z}{2} \left[ p + \frac{1-p}{\cosh^2(h)} \right] = \sum_{i=1}^{12} A_i, \quad (3.28)$$

onde os  $A_i$ ,  $i = 1$  a  $12$ , foram definidos anteriormente.

Analogamente, obtemos a seguinte relação de recorrência para os blocos de dois e quatro spins:

$$(z-1) \sum_{i=1}^5 B_i = \sum_{i=1}^{12} A_i, \quad (3.29)$$

onde

$$B_1 = \frac{p(2-p)}{1 + e^{-2K}},$$

$$B_2 = - \frac{2p(1-p) \operatorname{th}^2(h)}{(1 + e^{-2K})^2},$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \frac{(1-p)^2}{1 + \bar{e}^{2K} \cosh(2h)},$$

$$B_4 = -\frac{1}{2} \frac{(1-p)^2 \operatorname{Senh}^2(2h)}{[\cosh(2h) + \bar{e}^{2K}]^2},$$

$$B_5 = \frac{1}{2} \frac{(1-p)^2 \cosh(2h)}{[\cosh(2h) + \bar{e}^{2K}]^2}.$$

No capítulo seguinte vamos construir o diagrama de fase para diversos valores de  $p$ , através da análise numérica das equações (3.28) e (3.29). Em particular, vamos discutir a existência ou não de pontos tricríticos para uma distribuição trimodal dos campos.

## CAPÍTULO 4

## DIAGRAMA DE FASES

Neste capítulo, discutiremos os resultados obtidos no capítulo anterior, bem como, compararemos nossos resultados com os existentes na literatura. Vamos começar analisando a equação (3.18). Ela representa a relação de recorrência para as constantes de acoplamento dos blocos com um e dois spins. Se  $p=0$ , o diagrama de fases obtido é exatamente o encontrado anteriormente por Droz e colaboradores<sup>4</sup>:

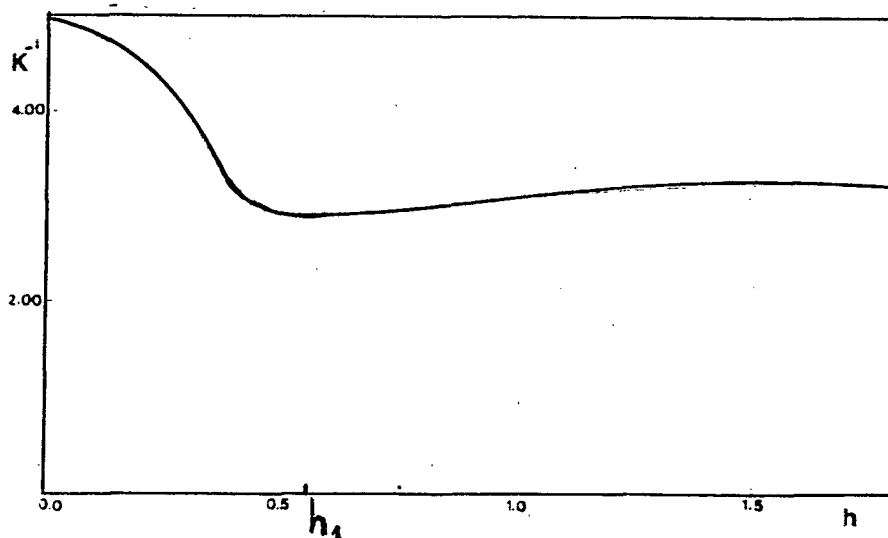


Figura 4 - Diagrama de fase do MICA através do GCM de um e dois spins. Comportamento para  $p = 0$ .

A forma do diagrama é a mesma tanto para  $d=2$  quanto para  $d=3$ . O mínimo encontrado é fisicamente inaceitável. Os cálculos de campo médio, indicam que, se  $p=0$ , a temperatura crítica tende a zero para valores suficientemente grandes do campo. Embora a presença desse mínimo não tenha sido justificada por Droz e colaboradores<sup>4</sup>, acreditamos que para valores de  $h$  maiores que  $h_1$ , a transição, de fato, deve ser de primeira ordem. Portanto a solução do GRMC para  $h>h_1$  deve ser espúria. Adiante tentaremos justificar a afirmação acima. Nas figuras que se seguem apresentamos os resultados obtidos para alguns valores típicos de  $p$  utilizando-se as equações (3.18), (3.28) e (3.29) do GRMC. Na figura 5 mostramos para  $p=0.8$ , as diferentes aproximações do GRMC para o MICA. Como era de se esperar, a temperatura crítica diminui à medida que aumentamos os blocos de spins. Para valores muito grandes de  $h$  a temperatura crítica tende a um valor constante. Esse resultado também é verificado na aproximação de campo médio. Para  $d=3$ , o comportamento exibido na figura 5, ou seja, transição de fase de segunda ordem para qualquer valor de  $h$ , ocorre para todos os valores de  $p$  maiores que 0.68. Portanto, a transição de fase é exclusivamente de segunda ordem apenas se  $p>0.68$ . Esse resultado é bastante diferente do obtido em campo médio, onde a transição é exclusivamente de segunda ordem para qualquer valor de  $p$  maior que 0.25. Na figura 6, mostraremos os resultados obtidos para  $d=2$ . O comportamento observado é semelhante ao caso  $d=3$ . Entretanto, para  $d=2$ , a transição de fase é

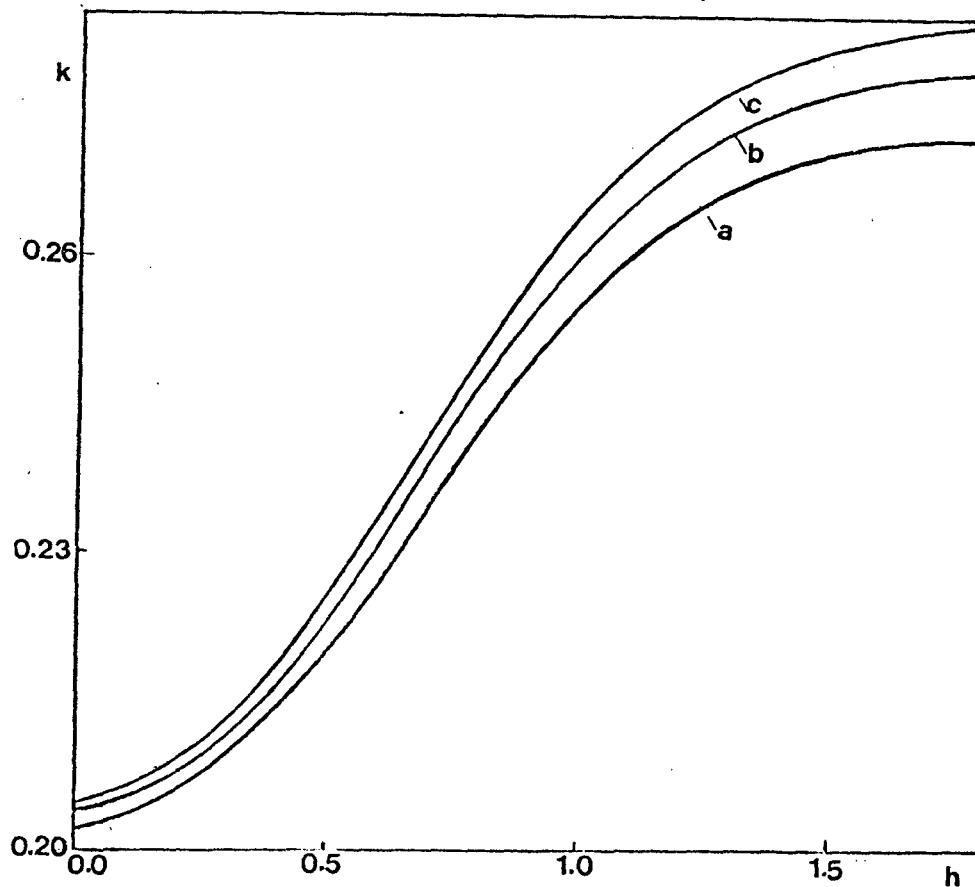


Figura 5 - Diagrama de fase do MICA através do GRCM. Curva a, blocos de 1 e 2 spins; Curva b, blocos de 1 e 4 spins; Curva c, blocos de 2 e 4 spins. Temos  $d = 3$  e  $p = 0.8$ .

sempre de segunda ordem apenas se  $p > 0.827$ .

Para  $d=3$ , lembramos que o valor  $p=0.68$  foi obtido considerando-se blocos de dois e quatro spins. Notamos que para os blocos menores os resultados são ligeiramente diferentes. Por exemplo, tomando-se blocos de um e dois spins temos  $p=0.58$  e para blocos de um e quatro spins temos  $p=0.61$ .

Na figura 7, exibimos o diagrama de fases para  $d=3$  e para valores de  $p$  menores que 0.68. As soluções obtidas para as equações do GRCM, equações ( 3.18 ), ( 3.28 ) e ( 3.29 ), apresentam um aspecto interessante. A partir de determinado valor do campo, essas equações não apresentam mais soluções. Portanto, para esses valores críticos do campo, o MICA não apresenta mais transições de fases de segunda ordem. Os pontos A, B e C na figura 7 representam pontos extremos da linha de segunda ordem para as três diferentes aproximações do GRCM. Somos tentados a afirmar que esses pontos são pontos tricríticos. Embora o método por nós utilizado não permita estudar transições de fases de primeira ordem, existem na literatura trabalhos acerca de GRCM que identificam o fim da linha de segunda ordem como sendo um ponto tricrítico. Veja, por exemplo, os trabalhos de Alcantara Bonfim<sup>17</sup> sobre o modelo de Blume-Capel e o de Figueiredo e Plascak<sup>18</sup> sobre o modelo de Ising compressível. Outra indicação sobre a tricriticalidade desses pontos é relativa à inclinação da curva  $K$  versus  $h$ . Por exemplo, a análise das linhas de segunda ordem mostra que

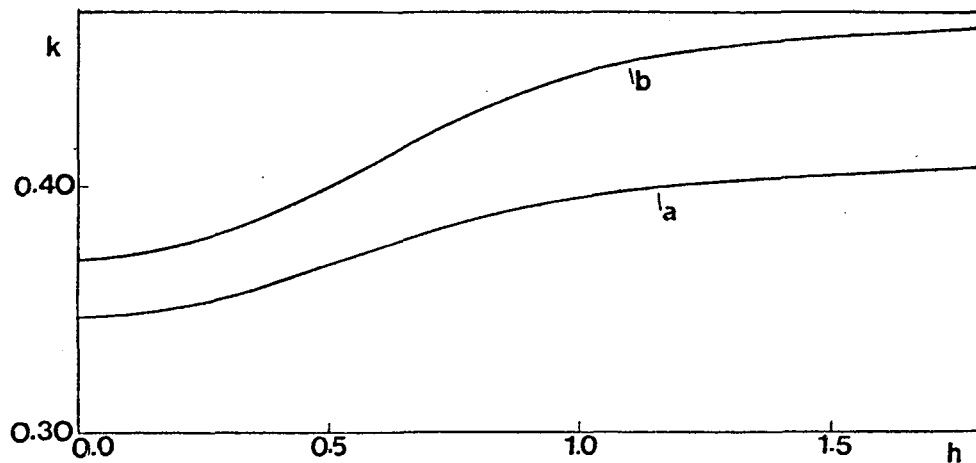


Figura 6 - Diagrama de fase do MICA através do GRCM. Curva a, blocos de 1 e 2 spins; Curva b, blocos de 2 e 4 spins. Temos  $\bar{d} = 2$  e  $p = 0.9$ .

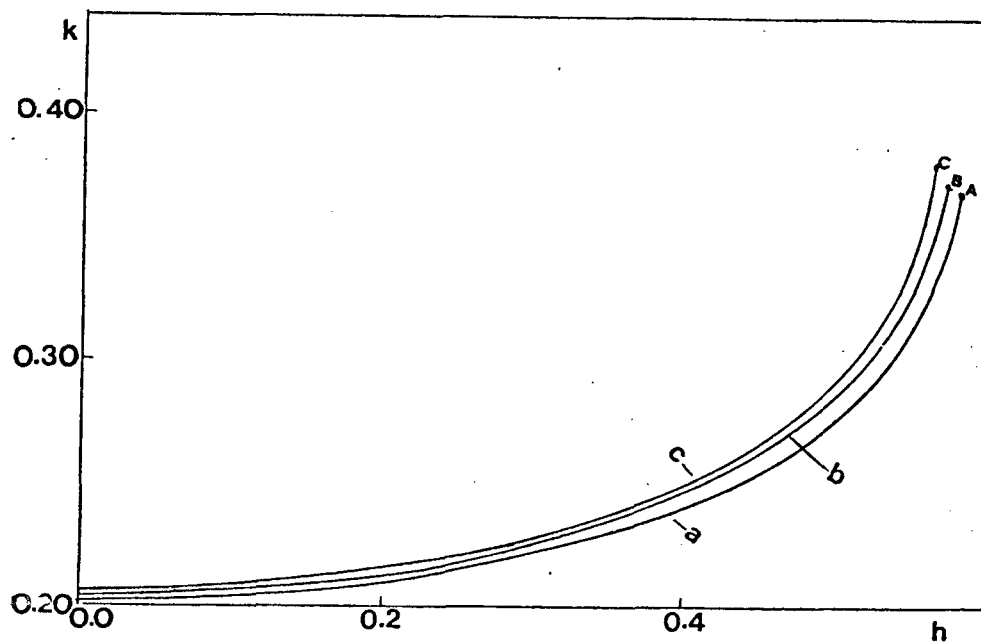


Figura 7 - Diagrama de fase do MICA através do GRCM. Curva a, blocos de 1 e 2 spins; Curva b, blocos de 1 e 4 spins; Curva c, blocos de 2 e 4 spins. A, B e C são pontos extremos das linhas de segunda ordem. Temos  $\bar{d} = 3$  e  $p = 0.3$ .

$dK/dh$  tende ao infinito à medida que nos aproximamos do final da linha, ou seja, a derivada aumenta drasticamente. Devemos lembrar que esse foi o método utilizado por Mattis<sup>14</sup> para calcular o ponto tricrítico do MICA na aproximação de campo médio. Vamos, portanto, assumir que os pontos extremos das linhas de segunda ordem sejam pontos tricríticos. Nas tabelas 3 apresentamos as coordenadas  $h$  e  $K$  dos pontos tricríticos para alguns valores de  $p$ . Mostramos os valores encontrados nas três aproximações utilizadas para o GRCM. O último ponto de cada tabela representa o ponto extremo da linha de pontos tricríticos. Para os valores de  $p$  maiores que o último ponto de cada tabela, a transição é sempre de segunda ordem. Por exemplo, na tabela correspondente aos blocos de dois e quatro spins, se  $p \geq 0.68$  a transição é de segunda ordem. Note que os valores obtidos para a linha de pontos tricríticos são bastante diferentes daqueles obtidos na aproximação usual de campo médio. Por exemplo, em campo médio, o ponto tricrítico extremo é 0.25, enquanto que em nosso trabalho ele vale 0.68.

Para  $d=2$ , os resultados são qualitativamente semelhantes aos obtidos para  $d = 3$ . Nas tabelas 4, mostramos para  $d=2$ , as coordenadas dos pontos tricríticos, para diferentes valores de  $p$  e diferentes aproximações do GRCM.

Na figura 8, mostramos para  $d=3$ , o comportamento das diferentes aproximações do GRCM quando nos aproximamos do ponto tricrítico extremo. Enquanto que para os blocos menores ( um e dois spins ) a transição é de se-



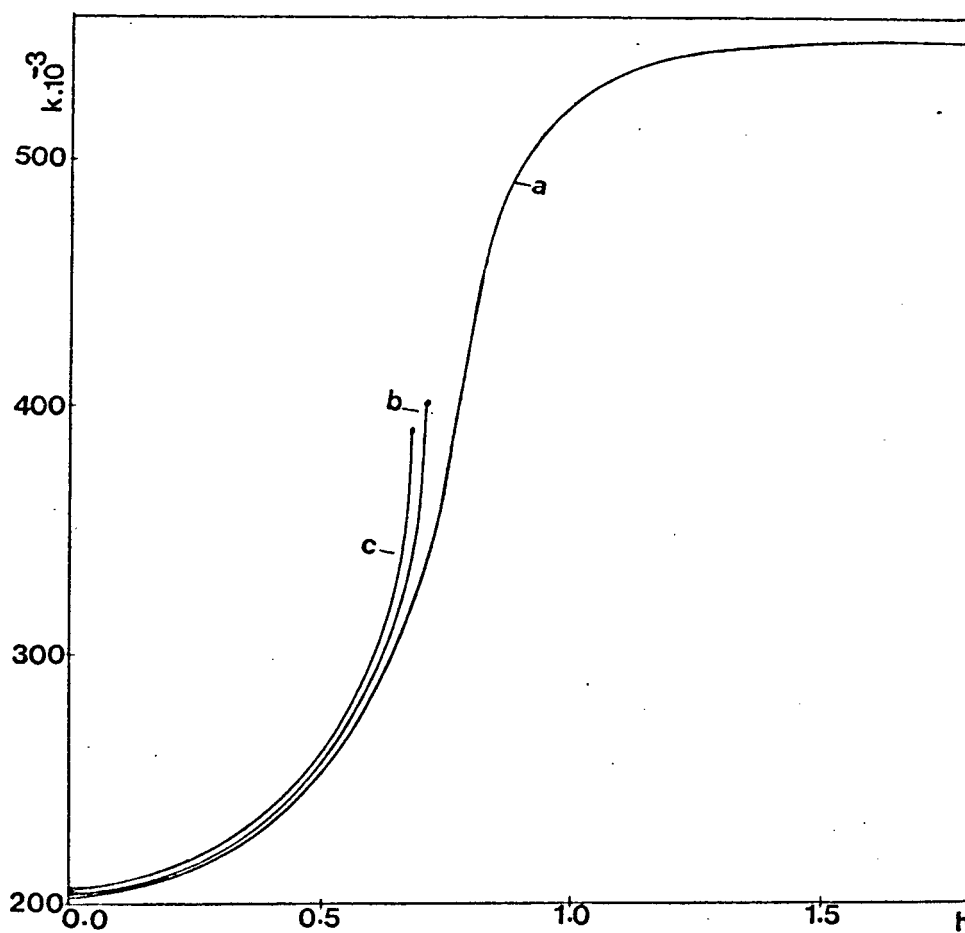


Figura 8 - Diagrama de fase do MICA através do GRCM. Curva a, blocos de 1 e 2 spins; Curva b, blocos de 1 e 4 spins e Curva c, blocos de 2 e 4 spins. Temos  $d = 3$  e  $p = 0.6$ .

gunda ordem, verifica-se que para os outros blocos ( um e quatro spins, dois e quatro spins ) ainda há o aparecimento de pontos tricríticos. Por isso, é fundamental escolhermos blocos os maiores possíveis para determinarmos o ponto tricrítico.

Voltamos a discutir agora a situação na qual  $p = 0$ , distribuição bimodal, estudada anteriormente por Droz e colaboradores<sup>4</sup>, cujo diagrama mostramos na figura 4. O comportamento verificado, por exemplo, na figura 7, curva A, se mantém até o valor de  $p = 0,02$ . À medida que tomamos valores de  $p$  menores que 0.02, as curvas obtidas começam a apresentar um máximo que se estende até  $p = 0$ . Claramente para  $p = 0.02$  temos a indicação de um ponto tricrítico bem definido. Acreditamos que quando  $p \rightarrow 0$ , o ponto tricrítico exista, pois temos uma indicação de sua existência através dos cálculos de campo médio. Como temos uma mudança na forma da distribuição dos campos de três deltas ( $p \neq 0$ ) para duas deltas ( $p = 0$ ), isso de alguma forma afeta as equações do GRCM. Notamos também que para  $p = 0$ , os blocos de um e quatro spins e dois e quatro spins, não modificam a forma do diagrama de fases, ou seja, o máximo continua a existir. Mostramos que mesmo para  $d > 3$ , o máximo continua a existir, contrariamente às afirmações de Droz e colaboradores<sup>4</sup>.

Notamos que para  $p = 0.02$ , o ponto final da linha de segunda ordem praticamente coincide com o ponto no qual a curva apresenta um máximo em  $p = 0$ , como na figura 9. Como para  $p \geq 0.02$ , os resultados são fisicamen-

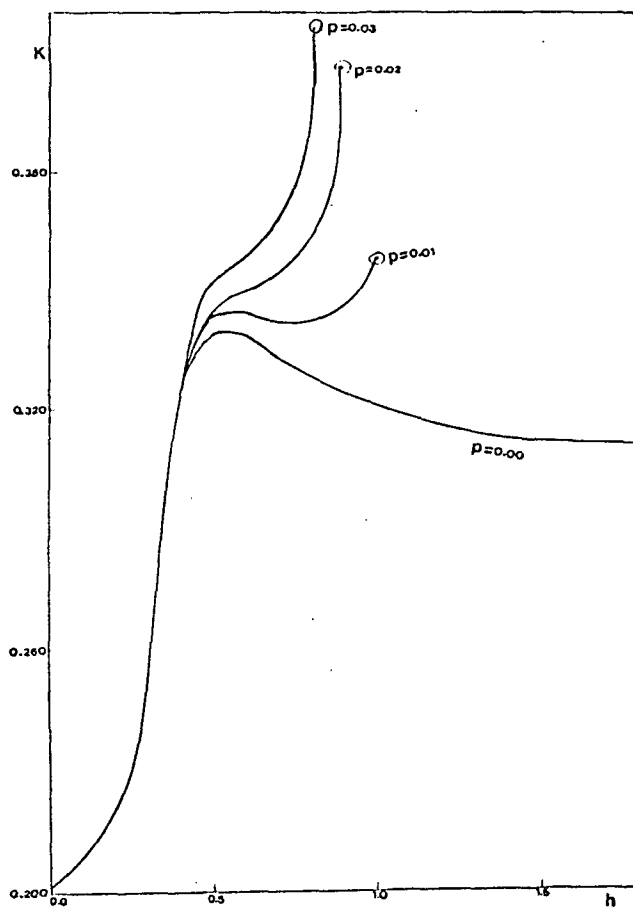


Figura 9 - Diagrama de fase do MICA através do GRCM, com blocos de um e dois spins. Comportamento para  $p \rightarrow 0$ .

## BLOCOS DE 1 E 2 SPINS

P	h	K
0.1	0.579	0.461
0.2	0.491	0.443
0.3	0.486	0.405
0.4	0.518	0.384
0.5	0.587	0.390
0.57	0.793	0.451

## BLOCOS DE 2 E 4 SPINS

P	h	K
0.1	0.667	0.666
0.2	0.546	0.659
0.3	0.499	0.487
0.4	0.516	0.418
0.5	0.568	0.391
0.6	0.679	0.395
2/3	0.938	0.467
0.67	0.986	0.480

## BLOCOS DE 1 E 4 SPINS

P	h	K
0.1	0.595	0.526
0.2	0.501	0.505
0.3	0.489	0.439
0.4	0.516	0.400
0.5	0.577	0.391
0.6	0.713	0.426

TABELA 3 - Coordenadas dos pontos tricríticos obtidos nas diferentes aproximações do GRCM. Resultados para  $d = 3$ .

## BLOCOS DE 1 e 2 SPINS

P	h	K
0.1	0.641	0.668
0.2	0.486	0.748
0.3	0.426	0.715
0.4	0.423	0.655
0.5	0.455	0.627
0.6	0.527	0.637

## BLOCOS DE 2 E 4 SPINS

P	h	K
0.1	1.500	1.512
0.2	0.719	1.350
0.3	0.610	1.525
0.4	0.538	1.965
0.5	0.391	0.734
0.6	0.420	0.639
0.7	0.489	0.608
0.8	0.704	0.647
0.82	0.890	0.690
0.825	1.080	0.760
0.826	1.190	0.774

TABELA 4 - Coordenadas dos pontos tricríticos obtidos nas diferentes aproximações do GRCM. Resultados para  $d = 2$ .

te aceitáveis, acreditamos que o comportamento observado para  $h > h_1$  e para  $p < 0.03$  deve ser entendido como sendo não físico, pois nessa região a transição deve ser de primeira ordem e as equações do GRCM não podem prever uma transição deste tipo. Portanto, o mínimo encontrado por Droz e colaboradores<sup>4</sup> deve ser o indício de que a transição está passando de segunda para primeira ordem, ou seja, apresenta um comportamento tricrítico.

Mostramos no capítulo 2 que as distribuições gaussianas e trimodais eram equivalentes até momentos de quarta ordem se  $p = 2/3$ . O resultado que obtivemos através do GRCM para os blocos de dois e quatro spins, equação (3.29), revelou que se  $p > 0.68$  a transição torna-se exclusivamente de segunda ordem, que é o comportamento exibido pela distribuição gaussiana. É interessante observar que esse valor de  $p$  é praticamente o mesmo que define a mudança da distribuição bimodal (comportamento tricrítico) para a distribuição gaussiana (ausência de comportamento tricrítico). O resultado de campo médio<sup>14,15,16</sup>,  $p = 0.25$ , é de certa forma não realístico, pois, para esse valor de  $p$  a distribuição trimodal está ainda distante de se aproximar de uma gaussiana.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES

O nosso trabalho apresenta alguns resultados bem diferentes daqueles obtidos na aproximação de Campo Médio. O método por nós utilizado, Grupo de Renormalização de Campo Médio (GRCM) não permite o estudo das transições de fases de primeira ordem, por isso nos detivemos no estudo das transições de fases contínuas.

O Modelo de Ising num Campo Aleatório (MICA) foi estudado na aproximação do GRCM e para uma distribuição trimodal para os campos. Levando-se em conta que a probabilidade do campo ser nulo é  $p$ , obtivemos os resultados: Se  $p = 0$  (distribuição bimodal) reproduzimos essencialmente os resultados de Droz e colaboradores<sup>4</sup>, no caso de blocos com um e dois spins. Levando-se em conta cálculos com blocos maiores (quatro spins) e a extrapolação para valores de  $p$  tendendo a zero, acreditamos que o mínimo não físico encontrado por Droz e colaboradores<sup>4</sup> para a temperatura crítica em função do campo seja de fato o início das transições de fases de primeira ordem. Ao contrário de Droz e colaboradores<sup>4</sup> esse comportamento para  $p = 0$  é verificado mesmo para  $d > 3$ . Para  $d = 3$ , obtivemos uma linha de pontos tricríticos que termina em  $p = 0.68$ . A partir de  $p = 0.68$  as transições de fases são exclusivamente

de segunda ordem na aproximação de blocos de dois e quatro spins. Mostramos que as distribuições gaussianas e trimodais são equivalentes até momentos de quarta ordem se  $p = 2/3$ , o que de certa forma dá um suporte para o valor  $p = 0.68$  encontrado na aproximação do GRCM para o fim da linha de pontos tricríticos. Nossos resultados são bastante diferentes dos obtidos na aproximação de campo médio, onde o fim da linha de pontos tricríticos ocorre para  $p = 0.25$ .

Em nosso estudo notamos que o tamanho dos blocos utilizados na aproximação do GRCM são importantes. Por exemplo, além de blocos maiores levarem a resultados melhores para o acoplamento crítico, notamos que, enquanto blocos de um e dois spins fornecem exclusivamente transições de segunda ordem para determinados valores de  $p$ , a relação de recorrência entre os blocos de dois e quatro spins ainda prevê comportamento tricrítico. Nossos resultados são qualitativamente idênticos independentemente da dimensão espacial.

Vimos neste trabalho que o GRCM é um instrumento eficiente para o estudo das transições de fases contínuas, visto que os cálculos são particularmente simples e os resultados são bem melhores do que aqueles obtidos na aproximação de campo médio.

Seria interessante que outros métodos fossem considerados para se determinar a existência ou não de pontos tricríticos no MICA. Por exemplo, análises do Grupo de Renormalização no espaço recíproco poderiam fornecer



subsídios para a elucidação deste fato.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 01 - M. P. NIGHTINGALE, PHYSICA 83 A, 561 (1976).
- 02 - M. P. NIGHTINGALE, PHYS. LETT. 59 A, 486 (1977).
- 03 - J. O. INDEKEU, A. MARITAN AND A. L. STELLA, J. PHYS. A 15, L 291 (1982).
- 04 - M. DROZ, A. MARITAN, AND A. L. STELLA, PHYS. LETT. A. 92, 287 (1982).
- 05 - J. A. PLASCAK, J. PHYS. C 17, L279 (1984).
- 06 - B. M. Mc COY E T. T. Wu "THE TWO - DIMENSIONAL ISING MODEL" CAMBRIDGE: HARVARD U. P. (1973).
- 07 - C. DOMB "PHASE TRANSITIONS AND CRITICAL PHENOMENA" VOL. 3 ed. C. DOMB AND M. S. GREEN, ACADEMIC, LONDON (1974).
- 08 - J. VILLAIN, SCALING PHENOMENA IN DISORDERED SYSTEMS - NATO ADVANCED STUDY INSTITUTE, 1985.
- 09 - Y. IMRY AND S. K. Ma, PHYS. REV. LETT. 35 A, 1399 (1975).
- 10 - J. Z. IMBRIE, PHYS. REV. LETT. 53, 1747 (1984).
- 11 - S. FISHMAM AND A. AHARONY, J. PHYS C 12, L729 (1979).
- 12 - A. AHARONY, PHYS. REV. B 18, 3318 (1978).

- 13 - A. HOUGHTON, A. KHURANA AND F. J. SECO, PHYS. REV. LETT. 55, 856 (1985).
- 14 - D. C. MATTIS, PHYS. REV. LETT. 55, 3009 (1985).
- 15 - R. M. SEBASTIANES AND V. K. SAXENA, PHYS. REV. B. 35, 2058 (1987).
- 16 - M. KAUFMAN, P. E. KLUNZINGER AND A. KHURANA, PHYS. REV. B 34, 4766 (1986).
- 17 - O. F. DE ALCANTARA BONFIM, PHYSICA A 130, 367 (1985).
- 18 - J. A. PLASCAK AND W. FIGUEIREDO, PHYS. LETT. A 123, 135 (1987).