INTEGRAIS DE MOVIMENTO RACIONAIS PARA SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-AUTÔNOMOS

GIANE DE CAMPOS GRIGOLETTI

DISSERTAÇÃO
Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Físico-Química
da Universidade Federal de Santa Catarina
para obtenção de grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

UFSC
Florianópolis, setembro de 1989

INTEGRAIS DE MOVIMENTO RACIONAIS PARA SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-AUTÔNOMOS

Giane de Campos Grigoletti

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do grau de
MESTRE EM CIÊNCIAS
Especialização Físico-Química e aprovada em sua forma final pelo
Curso de Pós-Graduação em Físico-Química da UFSC

Prof. Dr. Jason A.C. Gallas
Orientador

Prof. Dr. Ademir Neves
Coordenador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Cabral, UFSC

Prof. Dr. Carlos Alberto Kuhnen, UFSC

Prof. Dr. Jason A.C. Gallas, UFSC.

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar a existência de invariantes racionais para sistemas Hamiltonianos unidimensionais não-autônomos, isto é, com potenciais dependentes do tempo. Discutimos resultados recentemente publicados por Lewis, Leach e Goedert [10,36,37], onde estes autores consideram uma forma racional para o invariante, baseada em denominadores em ressonância. Apesar de proporem um método para o cálculo de invariantes racionais, tais autores não conseguiram obter nenhum invariante genuinamente racional. Através do *ansatz* por nós desenvolvido, que considera o invariante como sendo uma razão de dois polinômios em p de grau três, obtemos os resultados apresentados por Goedert e Lewis e um invariante mais geral que contém estes dois resultados como casos particulares. Nosso método, comparado ao método desenvolvido por Goedert e Lewis, é bem mais simples, tanto na teoria quanto principalmente na aplicação. A obtenção de invariantes verdadeiramente racionais permanece um problema em aberto.

Abstract

The purpose of this work is to investigate the existence of rational invariants in one-dimensional autonomous Hamiltonian systems, that is one-dimensional Hamiltonians not depending explicitly on time. We discuss results recently published by Lewis, Leach and Goedert [10,36,37], where these authors consider a rational form based on resonant denominators for the invariant. Although they propose a method to calculate rational invariants, the mentioned authors were unable to obtain a genuine rational invariant. By introducing a proper Ansatz which considers the invariant as a ratio of two polynomials of degree three in the momentum p, we obtain a more general invariant which contains those of Goedert and Lewis as particular cases. When compared wiht the method of Goedert and Lewis, our approach is more simple to apply. The determination of a truly rational invariant remains an open problem.

Índice

I. Introdução

I.1 Motivação:

O propósito principal na busca por invariantes para sistemas Hamiltonianos é simplificar a solução do problema matemático associado à dinâmica do sistema. Em outras palavras, simplificar a obtenção de soluções das equações de movimento. O conhecimento de quantidades que se conservam durante a evolução temporal do sistema permite-nosfazer algumas afirmações e suposições a respeito do sistema em estudo antes mesmo de resolver as equações de movimento para o problema. Estas quantidades que se conservam são, em geral, funções das variáveis dependentes do sistema e têm recebido na literatura diversos nomes, entre eles, "constantes de movimento","integral do movimento", "segundo invariante" ou simplesmente "invariante".

Quando se estuda um problema físico específico, em geral, representamos o modelo por equações diferenciais nem sempre possíveis de serem resolvidas analiticamente. Nestes casos é importante se ter conhecimento se um sistema é integrável ou não e, se ele o for, conhecer-se tantos invariantes quantos forem possíveis, pois, como mencionamos, isto é de grande ajuda na solução do problema.

O estudo de invariantes para sistemas dinâmicos tem despertado atualmente bastante interesse. Tal interesse pode ser avaliado citando-se alguns trabalhos recentes publicados na área:[1-11]. Um dos principais motivos deste interesse é a possibilidade de aplicar esses conhecimentos em outras áreas da física, tal como física de plasma, física quântica e astronomia [12,13,14].

A procura por invariantes tem uma longa história. Esta história está intimamente relacionada ao próprio desenvolvimento da física clássica. Por exemplo, o problema de três corpos, de fundamental importância no estudo do movimento de corpos celestes, foi assunto de livros já no século XIX [12,15,16]. Este problema pode ser resumido da seguinte forma: Três partículas se atraem mutuamente, sendo que entre cada par delas existe uma força atrativa proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Elas são livres para mover-se no espaço e possuem um movimento inicial qualquer. A questão que se deseja responder é, uma vez conhecido seu movimento inicial, qual será seu movimento subseqüente?

A equação diferencial associada ao problema de três corpos não pode ser resolvida de forma exata através de qualquer método analítico conhecido. Em 1887, Bruns mostrou que as dez integrais clássicas conhecidas para o problema * são os únicos invariantes independentes que são funções algébricas das coordenadas, momenta e tempo, que existem para o problema [17].

Através destes invariantes se pode reduzir a ordem do sistema de equações original do problema, 18, para um sistema de ordem 8, lembrando que a ordem de um sistema de equações diferenciais é a soma das ordens de cada equação que forma o sistema.

Outro caso bastante conhecido, é o problema "restrito" de três corpos, isto é, dois corpos giram em torno do seu centro de gravidade, em órbitas circulares, sofrendo interações mútuas. Um terceiro corpo que não influencia o movimento dos dois primeiros, mas sofre influência destes, move-se no mesmo plano que os outros dois. Qual será o movimento deste terceiro corpo?

Em 1889, Poincaré mostrou existir um invariante para este problema, conhecido como "energia Jacobiana", com a característica de ser o único invariante explicitamente independente do tempo periódico nas coordenadas [17].

Nos nossos dias, uma importante aplicação de invariantes explicitamente dependentes do tempo para potenciais que também dependem do tempo é a teoria do plasma sem colisão [13]. Quando há uma única dimensão espacial, as equações de Vlasov-Poisson, que governam o movimento, descrevem um contínuo de partículas que movem-se no campo elétrico gerado pelas próprias partículas. A função dis-

---

* Estas integrais clássicas são os seis invariantes associados ao movimento do centro de gravidade (que move-se em uma linha reta com velocidade constante), os três invariantes associados ao momentum angular dos três corpos (o momentum angular em relação aos eixos coordenados permanece constante durante o movimento) e a energia (constante para o problema)

tribuição do espaço-fase para as partículas, que é uma solução da equação de Vlasov, é uma função de invariantes do movimento de uma única partícula no campo elétrico. Neste caso, um invariante exato ou aproximado é útil, juntamente com as equações de Vlasov-Poisson, para a solução de tais equações.

Um outro exemplo da aplicabilidade da teoria de invariantes é a solução da equação do oscilador harmônico com freqüência dependente do tempo:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \tag{I.1.1}$$

A obtenção de soluções para este oscilador harmônico bem como eventuais constantes de movimento tem sido estudado por muitos autores, tanto na área da mecânica clássica [18-21] quanto na área da mecânica quântica [22-27].

Um invariante para este sistema físico foi obtido, já em 1880, por Ermakov [28]. Posteriormente, em 1968, Lewis [14-19] obteve uma derivação mais geral envolvendo este resultado, que ficou conhecido na literatura como invariante de Ermakov-Lewis. Lewis mostrou que um invariante para o oscilador harmônico com freqüência dependente do tempo é dado por:

$$I = \frac{1}{2}[(\frac{x}{\rho})^2 + (x\dot{\rho} - \dot{x}\rho)^2], \tag{I.1.2}$$

desde que $x(t)$ satisfaça a equação (I.1.1) e $\rho(t)$ seja uma solução da equação auxiliar:

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3}. \tag{I.1.3}$$

Têm sido feito muitos esforços para encontrar modelos Hamiltonianos integráveis, onde o oscilador harmônico dependente do tempo é apenas um exemplo, dada a grande importância que adquiriram atualmente. Para encontrar tais modelos é preciso resolver a equação diferencial parcial resultante da condição que a derivada total do invariante com respeito ao tempo deve anular-se. Contudo não há um método geral para resolver a equação diferencial parcial que resulta desta condição. Então se deve fazer uma suposição mais provável para a forma do invariante, introduzi-la nesta equação diferencial e obter certas condições sobre os parâmetros arbitrários do modelo de invariante escolhido. Este é o "método direto" de busca de invariantes, ou seja, o uso direto da conhecida condição:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} = 0, \qquad (I.1.4)$$

onde $\{I, H\}$ é o colchete de Poisson entre o Hamiltoniano e o invariante, definido por:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial x_i}$$

Existem outros métodos de procura de invariantes, entre eles podemos citar o método das transformações canônicas, que consiste em uma maneira de simplificar as equações de movimento através de uma transformação das coordenadas e momenta para outro conjunto de variáveis, sendo que nestas novas variáveis as equações de movimento ainda estão na forma canônica. Outro método bastante utilizado é o Teorema de Noether [20,30,31]. Segundo este teorema se o funcional:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt,$$

onde L é o Lagrangeano, permanece invariante sob uma transformação infinitesimal gerada por:

$$X = \xi(q,t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(q,t)\frac{\partial}{\partial q},$$

então existe um invariante para este sistema Lagrangeano do tipo:

$$I(q, \dot{q}, t) = (\xi\dot{q} - \eta)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \xi L + f(q,t).$$

As funções ξ, η e f são soluções da equação diferencial parcial:

$$\xi\frac{\partial L}{\partial t} + \eta\frac{\partial L}{\partial q} + (\bar{\eta} - \bar{\xi}\dot{q})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \bar{\xi}L = \bar{f}.$$

Nesta equação, o símbolo $-$ sobre uma letra representa o operador $\dot{q}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}$.

Qualquer destes métodos têm como objetivo encontrar uma forma explícita para os invariantes de um determinado sistema dinâmico ou dar a base para algum procedimento computacional ou ambos. Dependendo do Hamiltoniano considerado e do modelo escolhido para o invariante, um ou outro método é mais eficiente, ou seja, poderá levar a um resultado mais ou menos geral. A escolha é baseada então na experiência do pesquisador.

Veremos, a seguir, alguns trabalhos que usam o método direto para a busca de invariantes, dando um rápido apanhado do que se tem feito na área.

O caso de sistemas Hamiltanianos bi-dimensionais foi tratado de maneira detalhada por Hietarinta [32]. O Hamiltoniano por ele considerado é bi-dimensional e independente do tempo, sendo que a discussão pode ser extendida a sistemas de dimensão mais alta. Embora não seja objetivo do nosso trabalho tratar de sistemas bi-dimensionais, a discussão sobre integrabilidade e invariantes feita no *review* de Hietarinta é bastante interessante. Neste *review*, Hietarinta aborda o problema através da solução direta das equações diferenciais obtidas do colchete de Poisson. Seu propósito é listar uma coleção de sistemas Hamiltonianos integráveis e apresentar vários métodos de busca por invariantes para sistemas integráveis. Seu estudo está restrito a sistemas Hamiltonianos bi-dimensionais e independentes do tempo, onde a abordagem é feita pelo tipo de invariante: seja ele polinomial, racional ou transcendental.

Invariantes que podem ser expressos através de um polinômio, para sistemas Hamiltonianos unidimensionais com potenciais dependentes do tempo, foram estudados, por exemplo, por Leach et al. [33], Lewis and Leach [34] e Feix et al. [35]. O método utilizado nestes trabalhos é o método direto mencionado anteriormente, com exceção de [33], onde foi empregado o método das transformações canônicas. Todos os potenciais que admitem um invariante linear ou quadrático em p com seus respectivos invariantes foram encontrados por Lewis e Leach em [34]. Porém invariantes que são polinômios de grau superior a dois não puderam ser calculados explicitamente.

Em [10], Lewis e Leach apresentam um *ansatz* interessante onde a dependência do invariante no momentum é representada por denominadores com termos em "ressonância"* . Deste modo eles conseguem unificar a derivação de alguns resultados obtidos por outros métodos. Em [36-37], uma estrutura é apresentada por Goedert e Lewis complementando a formulação envolvendo ressonâncias. No capítulo II, apresentamos e discutimos a teoria desenvolvida nestes dois artigos, onde o problema é tratado de maneira análoga a nossa.

Em nosso trabalho, estamos interessados em encontrar invariantes para o movimento de uma partícula em um potencial unidimensional dependente do tempo ou não. Isto é, estamos interessados em invariantes para Hamiltonianos unidimensionais do tipo:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q,t). \qquad (I.1.5)$$

Nesta expressão, o potencial $V(q,t)$ pode ou não depender explicitamente da coordenada q e do tempo t. Hamiltonianos deste tipo têm bastante importância teórica e prática e têm sido assunto de muitos trabalhos. Como exemplo, citamos algumas referências:[30,33-35,38-43].

Uma característica interessante do Hamiltoniano (I.1.5) é sua depêndencia em p, que aparece apenas na primeira parcela, ou seja, o potencial $V(q,t)$ não depende da velocidade. Segundo Lewis e Leach [10] "em casos onde um invariante é conhecido analiticamente para um Hamiltoniano desta forma, o invariante pode ser expresso em termos de uma função cuja dependência no momentum é simples e explícita". Então podemos apresentar uma forma para o invariante que envolva funções em q e t acompanhando potências distintas de p.

A forma que escolhemos para o invariante é uma razão de polinômios com potências no momentum de ordem três, ou seja, um invariante racional. O método utilizado é o "método direto", citado anteriormente.

Numa primeira reflexão, a existência de invariantes racionais pode parecer um

---

* Veja na secção II.1, página 11, o que significa "ressonância".

tanto quanto artificial. Entretanto é fácil convencer-se que tal forma é de se esperar já para sistemas físicos simples. Para tanto desejamos agora, seguindo Lewis e Leach [7], considerar o cálculo de invariantes para um oscilador harmônico simples, com freqüência igual a unidade, definido pelo Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \tag{I.1.6}$$

As equações de movimento são dadas por:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \text{e} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Destas duas expressões obtemos:

$$\frac{dq}{dt} = p, \tag{I.1.7.a}$$

$$\frac{dp}{dt} = -q. \tag{I.1.7.b}$$

Eliminando p nas equações (I.1.7.a) e (I.1.7.b) obtemos a equação diferencial:

$$\ddot{q} + q = 0.$$

A solução desta equação em termos dos valores iniciais da coordenada e do momentum, q_0 e p_0, é bem conhecida:

$$q = p_0 sen(t) + q_0 cos(t), \tag{I.1.8.a}$$

$$p = p_0 cos(t) - q_0 sen(t), \tag{I.1.8.b}$$

Estas equações podem ser facilmente invertidas para dar os "invariantes" q_0 e p_0 em função de (q, p, t):

$$q_0 = -p sen(t) + q cos(t), \tag{I.1.9.a}$$

$$p_0 = p cos(t) + q sen(t). \tag{I.1.9.b}$$

Embora o Hamiltoniano H bem como q_0 e p_0 sejam invariantes que não se encontram na forma racional, seus recíprocos podem ser facilmente colocados nesta forma:

$$\frac{1}{H} = \frac{-i/q}{p - iq} + \frac{i/q}{p + iq}, \tag{I.1.10.a}$$

$$\frac{1}{q_0} = -\frac{1/sen(t)}{(p - qcos(t)/sen(t))}, \tag{I.1.10.b}$$

$$\frac{1}{p_0} = \frac{\frac{1}{cos(t)}}{(p + q\frac{sen(t)}{cos(t)})}. \tag{I.1.10.c}$$

Uma outra forma para a solução das equações de movimento é:

$$q = Asen(t - \varphi), \tag{I.1.11.a}$$

$$p = Acos(t - \varphi). \tag{I.1.11.b}$$

Neste caso podemos isolar as constantes ("invariantes") A e φ e obter seus valores em função de q, p e t:

$$A^2 = q^2 + p^2 = 2H, \tag{I.1.12.a}$$

$$\varphi = t - arcsen\frac{q}{(q^2 + p^2)^{1/2}}. \tag{I.1.12.b}$$

O invariante φ não está na forma racional , mas $tan\varphi$ pode ser obviamente posta na forma de denominadores em ressonância:

$$tan\varphi = -\frac{q_0}{p_0} = \frac{sen(t)}{cos(t)} - \frac{q/cos^2(t)}{p + qsen(t)/cos(t)} \tag{I.1.13}$$

Em resumo, temos um exemplo de um sistema físico importante, o oscilador harmônico simples, cujos invariantes podem ser representados por funções dependentes do tempo na forma de razões com denominadores em forma de ressonância.

A discussão deste capítulo serviu de motivação para o nosso trabalho. A seguir, definiremos aspectos importantes a respeito de invariantes.

I.2 Definição de Invariante:

A determinação do movimento de um sistema dinâmico com um número finito de graus de liberdade, n, depende da solução de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem *, conhecidas como "equações Hamiltonianas" ou "canônicas" do movimento. Para achá-las em termos das coordenadas e dos momenta introduzimos o Hamiltoniano do sistema que fisicamente representa a energia total. Uma vez determinado o Hamiltoniano, a evolução temporal das coordenadas é dada em função das equações hamiltonianas:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad (I.2.1.a)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad (I.2.1.b)$$

com $k = 1, 2, \ldots, n$, onde n é o número de graus de liberdade do sistema. O Hamiltoniano H é uma função das coordenadas q_k e dos momenta p_k, podendo ou não depender explicitamente do tempo t. A solução do conjunto de equações diferenciais (I.2.1) levará a um número de constantes arbitrárias de integração. Temos um conjunto de $2n$ equações de primeira ordem, a solução de cada uma destas equações levará a uma constante de integração, logo o número total de constantes arbitrárias para o sistema será $2n$. Como já havíamos falado na secção precedente, podemos fazer algumas afirmações a respeito do sistema dinâmico em estudo usando estas constantes.

Daremos agora uma definição formal do que se entende por invariante.

Uma determinada função $I(q,p,t)$ será um *invariante* para um Hamiltoniano H(q,p,t) se satisfizer a condição:

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} = 0. \qquad (I.2.1)$$

Por exemplo, $I(q,p,t)$ poderá ser o valor inicial de $q = q(0)$ ou $p = p(0)$ expresso em termos de $q(t), p(t)$ e t. Para um Hamiltoniano independente do tempo, um invariante é obviamente o próprio Hamiltoniano.

---

* A ordem da equação é igual ao grau da maior derivada que aparece na equação.

O conceito de invariante é útil porque nos permite usar $I(q,p,t)$ para diminuir a ordem do sistema de equações diferenciais do problema, onde a ordem de um sistema de equações diferenciais é a soma das ordens de cada equação que formam o sistema. Num sistema arbitrário de equações diferenciais um invariante diminui a ordem do sistema em uma unidade. Em sistemas Hamiltonianos a ordem pode ser reduzida até duas unidades através de um único invariante. Quando existirem exatamente n invariantes para um sistema com n graus de liberdade, dizemos que o sistema é "integrável", desde que estes n invariantes satisfaçam a condição:

$$\{I_i, I_j\} = 0, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{I.2.2}$$

ou seja, estejam em "involução". Em princípio, de acordo com Hietarinta [32], podem haver mais que n invariantes funcionalmente independentes, mas eles não estarão todos em involução. O número máximo de constantes de movimento é $2n$. Um sistema com N graus de liberdade é chamado de superintegrável se se conhecer para ele mais que N constantes de movimento. Cabe aqui fazer uma observação, tirada de Hietarinta, Phys. Rep. (1987) 89, sobre uma relação existente entre sistemas autônomos e não-autônomos. Um sistema D-dimensional não-autônomo é equivalente a um sistema D+1-dimensional autônomo, onde t e p são as variáveis canônicas adicionais e:

$$H_{novo} = H_{velho} + p_t.$$

No capítulo II nós, como já dissemos, apresentamos e discutimos a teoria desenvolvida por Goedert e Lewis em [10,36,37]. O método por nós desenvolvido é formalizado nos capítulos III e IV. Também no capítulo IV, através do *Ansatz* por nós desenvolvido, obtemos os resultados de Goedert e Lewis estudados no capítulo II e um invariante mais geral que contém estes dois resultados como casos particulares.

II. O Método de Goedert e Lewis.

II.1 O Método de Goedert e Lewis:

O método de Goedert e Lewis foi desenvolvido a partir de um trabalho anterior, publicado por Lewis e Leach [8], cuja teoria pode ser entendida com base numa série de três artigos:[10,36,37].

Nestes artigos os autores investigam a possibilidade de existirem sistemas dinâmicos que possuam invariantes "racionais" dependentes do tempo, isto é, envolvendo a razão de dois polinômios, como mencionamos no capítulo anterior. A motivação que levou os autores a procurarem tais invariantes é que um grande número deles pode ser representado como funções racionais. Além disso, como uma função de um invariante é também um invariante, segundo eles, a forma escolhida é suficiente para considerar uma boa quantidade de invariantes.

No primeiro artigo [10], Lewis e Leach propõe invariantes através de um *Ansatz* que possui uma dependência no momentum p em forma de denominadores com ressonância do tipo *:

$$I(q,p,t) = c(q,t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)}, \qquad (II.1.1)$$

onde os v_n e u_n são funções da coordenada q e tempo t, para um sistema Hamiltoniano unidimensional dependente do tempo:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q,t). \qquad (II.1.2)$$

Para que a expressão em forma de ressonância (II.1.1) seja um invariante é necessário que a sua derivada total com respeito ao tempo seja nula, ou seja, que:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I,H\} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \qquad (II.1.3)$$

---

* Note-se que, em [10], Lewis e Leach usaram $n = 0$ nas suas equações (1.8), (2.1) e (2.3) e não definiram os limites do somatório em (2.4), (2.7), (2.10), (2.32) e (2.48), o que torna difícil o entendimento destas expressões. Outro aspecto que deve ser salientado é que para obter a expressão (3.1) é óbvio que, em (2.49), eles precisam tomar a soma de $n = 1$ até N, o que não está explícito em seu trabalho.

onde H refere-se ao Hamiltoniano dado pela expressão (II.1.2) e $\{I, H\}$ é o colchete de Poisson entre o invariante e o Hamiltoniano. Este requisito gera um sistema de equações que impõe condições sobre as funções da posição e tempo, $c(q,t), v_n(q,t)$ e $u_n(q,t)$, que aparecem na expressão (II.1.1). Substituindo (II.1.1) e (II.1.2) em (II.1.3), obtemos um polinômio em p. Para que este polinômio se anule para qualquer valor de p, como é requerido pela expressão (II.1.3), é necessário que os coeficientes que acompanham cada potência de p se anulem. Isto gera o seguinte conjunto de equacões diferenciais parciais que envolve o potencial:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = 0, \tag{II.1.4.a}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial v_n}{\partial q} = 0, \tag{II.1.4.b}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_n v_n)}{\partial q} = 0, \tag{II.1.4.c}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}. \tag{II.1.4.d}$$

A seguir mostraremos como se obtém este sistema de equações. Levando-se em conta a expressão (II.1.2), a condição (II.1.3) dada anteriormente pode ser escrita como:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + p\frac{\partial I}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial p} = 0. \tag{II.1.5}$$

Substituindo I por sua forma (II.1.1) e definindo $X \equiv p - u_n$, teremos após rearranjo de alguns termos:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + p\frac{\partial c}{\partial q} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{X}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + p\frac{\partial v_n}{\partial q}\right)$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{X^2}\left(v_n \frac{\partial u_n}{\partial t} + p v_n \frac{\partial u_n}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} v_n\right) = 0. \tag{II.1.6}$$

A primeira soma de dois termos entre parênteses em (II.1.6) pode ser substituída por outra de três termos:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + p\frac{\partial v_n}{\partial q} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + (p - u_n)\frac{\partial v_n}{\partial q} + u_n\frac{\partial v_n}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial v_n}{\partial t} + X\frac{\partial v_n}{\partial q} + u_n\frac{\partial v_n}{\partial q}, \qquad (II.1.7)$$

e, no segundo parênteses, somando e subtraindo a quantia $u_n v_n \frac{\partial u_n}{\partial q}$, teremos:

$$v_n\frac{\partial u_n}{\partial t} + pv_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q}v_n =$$

$$v_n\frac{\partial u_n}{\partial t} + (p - u_n)v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + u_n v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q}v_n =$$

$$v_n\frac{\partial u_n}{\partial t} + Xv_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + u_n v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q}v_n. \qquad (II.1.8)$$

Com isto podemos reescrever a equação (II.1.6) como:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + p\frac{\partial c}{\partial q} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{X}(X\frac{\partial v_n}{\partial q} + u_n\frac{\partial v_n}{\partial q} + \frac{\partial v_n}{\partial t})$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{X^2}(Xv_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + v_n\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + v_n\frac{\partial V}{\partial q})$$

$$= \frac{\partial c}{\partial t} + p\frac{\partial c}{\partial q} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial v_n}{\partial q} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{X}(u_n\frac{\partial v_n}{\partial q} + v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + \frac{\partial v_n}{\partial t})$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{X^2}(u_n v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + v_n\frac{\partial V}{\partial q} + v_n\frac{\partial u_n}{\partial t}). \qquad (II.1.9)$$

Observando-se que:

$$u_n\frac{\partial v_n}{\partial q} + v_n\frac{\partial u_n}{\partial q} = \frac{\partial u_n v_n}{\partial q}, \qquad (II.1.10)$$

a expressão (II.1.9) pode ser reescrita como:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + p\frac{\partial c}{\partial q} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial v_n}{\partial q} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{X}(\frac{\partial v_n u_n}{\partial q} + \frac{\partial v_n}{\partial t})$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{X^2}(v_n u_n\frac{\partial u_n}{\partial q} + v_n\frac{\partial V}{\partial q} + v_n\frac{\partial u_n}{\partial t}) = 0.$$

Para que esta igualdade seja identicamente nula para variações arbitrárias de p, todos os coeficientes de p^{-2}, p^{-1}, p^0 e p devem ser nulos. Deste modo obtemos o sistema formado pelas quatro equações diferenciais definidas anteriormente pelas equações (II.1.4.a-d).

Obtivemos assim quatro equações diferenciais parciais que implicam numa condição necessária e suficiente cujas funções c, v_n, u_n e V devem satisfazer para que a expressão racional dada pela equação (II.1.1) seja um invariante. Para um dado potencial V, será possível encontrar invariantes na forma (II.1.1) se o sistema (II.1.4) for solúvel para um dado N.

No segundo artigo [36], Goedert e Lewis apresentam uma formulação que emprega um conjunto de "momentos discretos" que, segundo eles, é bastante útil no cálculo dos invariantes. Em vez de determinar os v_n e os u_n diretamente, eles introduzem novas incógnitas g_k, funções dos v_n e u_n de modo a obter um sistema de equações algébricas lineares, mais conveniente de se trabalhar do que o sistema de equações (II.1.4), além de uma única condição necessária e suficiente sobre o potencial para este admitir um invariante do tipo (II.1.1).

A definição dos N momentos discretos g_k introduzidos por eles é:

$$g_k(q,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n^k v_n, \qquad (II.1.11)$$

Segundo os autores, se, para fixos q e t, considerarmos as quantidades $v_n(q,t)$ sendo os valores de uma função $v(q,p,t)$ que é definida em um conjunto de valores discretos de p, dados por $p = u_n(q,t)$ para $1 \leq n \leq N$, então $g_k(q,t)$ é o ***k*-ésimo momento** de $v(q,p,t)$ naquele espaço discreto de valores de p.

Através de manipulação do sistema de equações (II.1.4) é possível encontrar-se duas relações de recorrência para os g_k. Uma delas permite calcular os momentos discretos g_k a partir do potencial $V(q,t)$, sem resolver (II.1.4c-d). A outra é uma relação de recorrência adicional algébrica, complementando a relação de recorrência diferencial anterior, que relaciona os g_k aos coeficientes a_n de um polinômio em p cujas raízes são os u_n.

Para encontrarmos tais relações de recorrência, consideraremos as equações (II.1.4.c) e (II.1.4.d). Multiplicando a primeira por u_n^{k-1}, a segunda por $(k-1)u_n^{k-2}$

vamos ter:

$$u_n^{k-1}\frac{\partial v_n}{\partial t}+u_n^{k-1}\frac{\partial u_n v_n}{\partial q}=u_n^{k-1}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}+v_n\frac{\partial u_n}{\partial q}+u_n\frac{\partial v_n}{\partial q}\right)=0, \qquad (II.1.12.a)$$

$$(k-1)u_n^{k-2}\frac{\partial u_n}{\partial t}+(k-1)u_n^{k-2}u_n\frac{\partial u_n}{\partial q}=-(k-1)u_n^{k-2}\frac{\partial V}{\partial q}. \qquad (II.1.12.b)$$

Agora, se adicionarmos as duas expressões acima e tomarmos o somatório em n de 1 até N, temos:

$$\sum_{n=1}^{N}u_n^{k-1}\frac{\partial v_n}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}u_n^{k-1}v_n\frac{\partial u_n}{\partial q}+\sum_{n=1}^{N}u_n^{k}\frac{\partial v_n}{\partial q}$$
$$+\sum_{n=1}^{N}(k-1)u_n^{k-2}\frac{\partial u_n}{\partial t}v_n+\sum_{n=1}^{N}(k-1)u_n^{k-1}v_n\frac{\partial u_n}{\partial q}$$
$$=-(k-1)\sum_{n=1}^{N}u_n^{k-2}v_n\frac{\partial V}{\partial q}. \qquad (II.1.13)$$

que, rearranjando os termos, torna-se:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(u_n^{k-1}\frac{\partial v_n}{\partial t}+(k-1)u_n^{k-2}v_n\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\left(u_n^{k-1}v_n\frac{\partial u_n}{\partial q}+u_n^{k}\frac{\partial v_n}{\partial q}+(k-1)u_n^{k-1}v_n\frac{\partial u_n}{\partial q}\right)$$
$$=-(k-1)\sum_{n=1}^{N}u_n^{k-2}v_n\frac{\partial V}{\partial q}. \qquad (II.1.14)$$

Como $g_k=\sum_{n=1}^{N}u_n^k v_n$ (expressão (II.1.11)), os momentos discretos g_{k-2} e g_{k-1} serão:

$$g_{k-2}=\sum_{n=1}^{N}u_n^{k-2}v_n, \qquad (II.1.15.a)$$

$$g_{k-1}=\sum_{n=1}^{N}u_n^{k-1}v_n, \qquad (II.1.15.b)$$

e a derivada parcial em relação ao tempo de g_{k-1} (II.1.15.b) será:

$$\frac{\partial g_{k-1}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} [u_n^{k-1}\frac{\partial v_n}{\partial t} + (k-1)v_n u_n^{k-2}\frac{\partial u_n}{\partial t}].$$

Logo a equação (II.1.14) vai ficar, se substituirmos os valores g_{k-2} e $\frac{\partial g_{k-1}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial g_{k-1}}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N}(u_n^k\frac{\partial v_n}{\partial q} + k u_n^{k-1} v_n \frac{\partial u_n}{\partial q}) - \sum_{n=1}^{N} u_n^{k-1} v_n \frac{\partial u_n}{\partial q} =$$

$$-(k-1)g_{k-2}\frac{\partial V}{\partial q} - \sum_{n=1}^{N} u_n^{k-1} v_n \frac{\partial u_n}{\partial q}. \qquad (II.1.16)$$

Se derivarmos a expressão para g_k (II.1.11) com respeito a q, vamos ter:

$$\frac{\partial g_k}{\partial q} = \sum_{n=1}^{N}(u_n^k\frac{\partial v_n}{\partial q} + k v_n u_n^{k-1}\frac{\partial u_n}{\partial q}), \qquad (II.1.17)$$

que é igual ao primeiro somatório em (II.1.16). Considerando isto, a expressão (II.1.16) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial g_k}{\partial q} = -\frac{\partial g_{k-1}}{\partial t} - (k-1)g_{k-2}\frac{\partial V}{\partial q}, \qquad k \geq 1 \qquad (II.1.18)$$

Para $k = 0$ devemos considerar as expressões (II.1.4.b) e (II.1.11):

$$g_0 = \sum_{n=1}^{N} v_n, \qquad (II.1.19.a)$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial q} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial v_n}{\partial q}. \qquad (II.1.19.b)$$

Se substituirmos (II.1.19) em (II.1.4.b):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial g_0}{\partial q} = 0, \qquad (II.1.20)$$

integrando ambos os termos da equação acima em relação a q:

$$g_0 = -\frac{\partial c}{\partial t}q + \alpha_0(t), \qquad (II.1.21)$$

onde $\alpha_0(t)$ representa uma função em t arbitrária. Como $c(q,t)$ é apenas função de t, por (II.1.20), podemos escrever esta expressão como:

$$g_0 = -\frac{dc}{dt}q + \alpha_0(t). \qquad (II.1.22)$$

As expressões (II.1.18) e (II.1.22) formam a primeira relação de recorrência para os g_k definidos na equação (II.1.11). Com esta relação de recorrência diferencial obtemos os momentos discretos g_k em função do potencial $V(q,t)$ e dos próprios momentos discretos g_k.

Uma segunda relação de recorrência algébrica fornece os coeficientes a_n a partir dos momentos discretos g_k. Para se chegar a esta segunda relação de recorrência lembremos que as quantidades a_n são coeficientes de um polinômio em p cujas raízes são as funções u_k:

$$D(p) \equiv \prod_{k=1}^{N}(p - u_k). \qquad (II.1.23)$$

Efetuando este produto temos:

$$D(p) = p^N + \sum_{k=1}^{N} a_k p^{N-k}. \qquad (II.1.24)$$

Uma vez que os u_n são raízes de $D(p)$,então $D(u_n) = 0$:

$$u_n^N + \sum_{k=1}^{N} a_k u_n^{N-k} = 0 \qquad \text{onde} \qquad 1 \leq n \leq N. \qquad (II.1.25)$$

Usando a definição (II.1.11) dos momentos discretos g_k, podemos escrever:

$$g_l = \sum_{k=1}^{N} u_k^N u_k^{l-N} v_k$$

$$= -\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} a_n u_k^{N-n} u_k^{l-N} v_k$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=1}^{N} u_k^{l-n} v_k, \qquad (II.1.26)$$

desde que $l \geq N$, para evitar potências negativas para os u_k ou índices negativos para os momentos discretos.

Então, os momentos g_l podem ser escritos como:

$$g_l = -\sum_{n=1}^{N} a_n g_{l-n} \qquad \text{com} \qquad l \geq N, \qquad (II.1.27)$$

Esta é a segunda relação de recorrência, a qual, juntamente com (II.1.18), fornece os valores para as funções g_k e os coeficientes a_n. Os momentos discretos g_k podem ser calculados a partir do potencial através de (II.1.18). Os resultados são usados em n das equações de recorrência dadas pela expressão (II.1.27) para obter um sistema de equações algébricas lineares que determinam os coeficients a_n.

Até aqui o que fizemos foi mudar as funções desconhecidas da forma inicial do invariante, os v_n e u_n, para os g_k e a_n. Agora temos que reescrever a equação para o invariante racional (II.1.1) em termos destas novas variáveis. Para tanto, primeiro mostraremos que o polinômio $D(p)$ pode ser escrito como:

$$D(p) = (p - u_n)\sum_{k=1}^{N} p^{N-k} \sum_{s=1}^{k} a_{k-s} u_n^{s-1}, \qquad 1 \leq n \leq N. \qquad (II.1.28)$$

Efetuando o produto do primeiro fator em (II.1.28) temos:

$$D(p) = \sum_{k=1}^{N} p^{N-k+1} \sum_{s=1}^{k} a_{k-s} u_n^{s-1}$$

$$- \sum_{k=1}^{N} p^{N-k} \sum_{s=1}^{k} a_{k-s} u_n^{s}. \qquad (II.1.29)$$

Agora fazemos a mudança de índices para $\kappa = k - 1$ e $\sigma = s - 1$ e reescrevemos (II.1.29) como:

$$D(p) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} p^{N-\kappa} \sum_{\sigma=0}^{\kappa} a_{\kappa-\sigma} u_n^{\sigma}$$

$$- \sum_{k=1}^{N} p^{N-k} \sum_{s=1}^{k} a_{k-s} u_n^{s}.$$

Através de manipulação direta é fácil mostrar que esta igualdade pode ser escrita como:

$$D(p) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} p^{N-\kappa} a_{\kappa} - \sum_{s=1}^{N} a_{N-s} u_n^{s}. \qquad (II.1.30)$$

Se somarmos e subtrairmos nesta expressão a quantidade $p^0 a_N u_n^0$, podemos escrever:

$$D(p) = \sum_{k=0}^{N} p^{N-k} a_k - \sum_{s=0}^{N} a_N - s u_n^{s}. \qquad (II.1.31)$$

Esta expressão pode ser escrita como:

$$D(p) = \sum_{k=0}^{N} p^{N-k} a_k - \sum_{s=0}^{N} a_s u_n^{N-s}. \qquad (II.1.32)$$

O segundo somatório identifica-se como $D(u_n)$ que é igual a zero, logo:

$$D(p) = \sum_{k=0}^{N} p^{N-k} a_k. \qquad (II.1.33)$$

Esta definição é a expressão (II.1.24) do polinômio $D(p)$, portanto (II.1.28) está provado.

Podemos reescrever a forma racional para o invariante (II.1.1) multiplicando e dividindo esta expressão por $D(p)$:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{1}{D(p)} \sum_{n=1}^{N} \frac{D(p) v_n}{p - u_n}. \qquad (II.1.34)$$

Substituindo $D(p)$ pela sua expressão equivalente (II.1.28),temos:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{1}{D(p)} \sum_{n=1}^{N} v_n \sum_{k=1}^{N} p^{N-k} \sum_{s=1}^{k} a_{k-s} u_n^{s-1}. \qquad (II.1.35)$$

Lembrando que a definição de g_k é dada pela expressão (II.1.11) e a definição de $D(p)$ é (II.1.33), teremos:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{\sum_{n=1}^{N} p^{N-n} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} g_{n-k}}{p^N + \sum_{n=1}^{N} a_n p^{N-n}}, \qquad (II.1.36)$$

lembrando que $a_0 \equiv 1$.

Para o caso $N = 1$ temos o invariante (II.1.36) como:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{g_0}{p + a_1}, \qquad (II.1.37)$$

sendo que as relações de recorrência (II.1.18), (II.1.22) e (II.1.27) fornecem as seguintes equações:

$$g_0 = -\frac{dc}{dt} q + \alpha_0(t),$$

$$g_1 = -\frac{\partial g_0}{\partial t}, \quad g_1 = -a_1 g_0,$$

$$g_2 = -\frac{\partial g_1}{\partial t} - g_0 \frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_2 = -a_1 g_1.$$

Quando $N = 2$ o invariante será:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{g_0 p + g_1 + a_1 g_0}{p^2 + a_1 p + a_2}, \qquad (II.1.38)$$

e as relações de recorrência levam a:

$$g_0 = -\frac{dc}{dt} q + \alpha_0(t), \quad g_1 = -\frac{\partial g_0}{\partial t},$$

$$g_2 = -\frac{\partial g_1}{\partial t} - g_0 \frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_2 = -(a_1 g_1 + a_2 g_0),$$

$$g_3 = -\frac{\partial g_2}{\partial t} - 2g_1\frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_3 = -(a_1g_2 + a_2g_1),$$

$$g_4 = -\frac{\partial g_3}{\partial t} - 3g_2\frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_4 = -(a_1g_3 + a_2g_2),$$

E finalmente, se $N = 3$, teremos:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{p^2g_0 + p(g_1 + a_1g_0) + g_2 + a_1g_1 + a_2g_0}{p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3}, \qquad (II.1.39)$$

e o seguinte sistema de equações para os g_k e a_n:

$$g_0 = -\frac{dc}{dt}q + \alpha_0(t), \quad g_1 = -\frac{\partial g_0}{\partial t}, \quad g_2 = -\frac{\partial g_1}{\partial t} - g_0\frac{\partial V}{\partial q},$$

$$g_3 = -\frac{\partial g_2}{\partial t} - 2g_1\frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_3 = -(a_1g_2 + a_2g_1 + a_3g_0),$$

$$g_4 = -\frac{\partial g_3}{\partial t} - 3g_2\frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_4 = -(a_1g_3 + a_2g_2 + a_3g_1),$$

$$g_5 = -\frac{\partial g_4}{\partial t} - 4g_3\frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_5 = -(a_1g_4 + a_2g_3 + a_3g_2),$$

$$g_6 = -\frac{\partial g_5}{\partial t} - 5g_4\frac{\partial V}{\partial q}, \quad g_6 = -(a_1g_5 + a_2g_4 + a_3g_3),$$

A igualdade (II.1.36), acima, nos fornece o valor do invariante em função dos momentos discretos g_k e dos coeficientes a_n. Para encontrarmos o invariante usamos as duas relações de recorrência (II.1.18) e (II.1.27). A primeira fornece os g_k em função do potencial $V(q,t)$ e a segunda os valores dos a_n a partir dos g_k. Se $V(q,t)$ admitir um invariante com N ressonâncias, então este invariante pode ser escrito na forma (II.1.36) em termos dos momentos g_k e dos coeficientes a_n. Os g_k podem ser calculados de (II.1.18) em função do potencial e $2N+2$ funções desconhecidas de t ("constantes de integração "). Os a_n são as soluções do sistema de N equações algébricas lineares (II.1.27).

Goedert e Lewis complementam a teoria por eles desenvolvida apresentando um teorema por eles chamado de Teorema da Linearização, isto é, derivam uma condição necessária e suficiente para um invariante com N ressonâncias existir.

Definem matrizes quadradas Λ_k por:

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_k \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_k & g_{k+1} & \cdots & g_{2k} \end{pmatrix}, \qquad (II.1.40)$$

e matrizes colunas, X_k e Y_k, por:

$$X_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \qquad (II.1.41)$$

$$Y_k = \begin{pmatrix} g_k \\ g_{k+1} \\ \vdots \\ g_{2k-1} \end{pmatrix} \qquad (II.1.42)$$

As primeiras N das equações de recorrência (II.1.27) podem ser escritas a partir destas matrizes, através da equação :

$$\Lambda_{N-1} X_N = -Y_N. \qquad (II.1.43)$$

Para o caso $N = 3$ teríamos:

$$\Lambda_2 X_3 = -Y_3.$$

A condição necessária e suficiente para (II.1.43) acima admitir solução é que $det\Lambda_{N-1} \neq 0$.

Um potencial $V(q,t)$ admitirá um invariante se as condições impostas pelo seguinte teorema forem satisfeitas:

Teorema: Um invariante com N ressonâncias existirá para o Hamiltoniano (II.1.2) com potencial $V(q,t)$ $(\partial V/\partial q \neq 0)$ se e somente se existirem momentos $g_k(q,t)$, $1 \leq k \leq 2N$, tal que:

$$det\Lambda_N = 0, \qquad (II.1.44)$$

onde Λ_N é a matriz definida por (II.1.40). Então:

$$\frac{dI}{dt} = 0 \longleftrightarrow det\Lambda_N = 0. \qquad (II.1.45)$$

Para provar (II.1.45) fazemos uma expansão nos índices de g_k e a_k definindo:

$$g_{-k} = a_{-k} = a_{N+k} = 0, \qquad \text{com} \qquad k > 0. \qquad (II.1.46)$$

Definimos também um conjunto de funções auxiliares:

$$A_s = \sum_{n=0}^{s} a_{n-1} g_{s-n}. \qquad (II.1.47)$$

Com estas definições poderemos rearranjar os somatórios que aparecem na expressão do invariante (II.1.36) e usar a condição (II.1.3) para provar (II.1.45). Isto será o que faremos a seguir.

Observa-se que (II.1.44) e (II.1.47) implicam:

$$A_0 = A_{-k} = 0, \qquad \text{para} \qquad k > 0,$$

enquanto que (II.1.46) e (II.1.27) implicam:

$$A_{N+k} = 0, \qquad \text{para} \qquad 1 \leq k \leq N.$$

Considerando (II.1.46) e (II.1.47), A_{2N+1} pode ser escrito como:

$$A_{2N+1} = g_{2N} + \sum_{k=1}^{N} a_k g_{2N-k}.$$

Esta equação juntamente com as N equações dadas por (II.1.43) formam um sistema de N+1 equações tendo como incógnitas A_{2N+1} e as N quantidades a_n:

$$\delta_{N,k} A_{2N+1} - \sum_{n=1}^{N} a_n g_{N+k-n} = g_{N+k}, \qquad \text{com} \qquad 0 \leq k \leq N.$$

onde $\delta_{N,k}$ é o delta de Kronecker.

A solução para A_{2N+1} é, de acordo com a *regra de Cramer* para a solução de um sistema de equações lineares:

$$A_{2N+1} = \frac{det\Lambda_N}{det\Lambda_{N-1}}. \qquad (II.1.48)$$

Em termos de a_k e A_k o invariante (II.1.36) é:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{1}{D(p)} \sum_{k=0}^{N} p^{N-k} A_k. \qquad (II.1.49)$$

onde $D(p)$ está definido em (II.1.33).

A condição necessária e suficiente para I ser invariante pode ser expressa a partir de (II.1.5), multiplicando-a por $D^2(p)$:

$$D^2 \frac{\partial I}{\partial t} + D^2 p \frac{\partial I}{\partial q} - D^2 \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial p} = 0. \qquad (II.1.50)$$

Para satisfazer a condição (II.1.50), que é uma equação polinomial, é preciso que o coeficiente de cada potência distinta de p anule-se. Calculando-se as derivadas parciais presentes em (II.1.50) a partir de (II.1.49) chega-se a:

$$\sum_{s=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} p^2 N - s - k[a_s \dot{A}_k + a_{s+1} A'_k - A_k \dot{a}_s - g'_0 a_s a_k$$

$$+(k - s + 1) a_{s-1} A_k \frac{\partial V}{\partial q}]$$

$$+ \sum_{k=0}^{N} p^{N-k} (k - N - 1) a_N A_{k-1} \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$+ \sum_{k=0}^{N} p^{2N-k} A'_{k+1} = 0. \qquad (II.1.51)$$

onde foi definido $\hat{f}_s \equiv f'_{s+1} + \dot{f}_s$ para qualquer função f_k que depende de q e t, a linha representa a derivada espacial e o o ponto, a derivada temporal.

A equação (II.1.51) pode ser organizada em potências crescentes de p usando a identidade :

$$\sum_{s=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} Q_{s,k} = \sum_{s=0}^{N}\sum_{k=s}^{N} Q_{N+s-k,k} + \sum_{s=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{s} Q_{s-k,k}, \qquad (II.1.52)$$

onde $Q = Q_{s,k}$ é uma matriz quadrada arbitrária.

Então a equação (II.1.51) fica:

$$\sum_{s=0}^{N} p^{N-s} \sum_{k=s-1}^{N} [a_{N+s-k}\hat{A}_k - A_k \hat{a}_{N+s-k}$$

$$+(2k-s-N+1)a_{N+s-k-1}A_k \frac{\partial V}{\partial q} - g'_0 a_k a_{N+s-k}]$$

$$+\sum_{s=0}^{N-1} p^{2N-s} \sum_{k=0}^{s} [a_{s-k}\hat{A}_k - A_k \hat{a}_{s-k}$$

$$(2k-s+1)a_{s-k-1}A_k \frac{\partial V}{\partial q} - g'_0 a_k a_{s-k}] = 0.$$

Pode-se iniciar a primeira soma em k em zero até N e o mesmo para a segunda soma sobre k, uma vez que estas mudanças só adicionarão zeros aos somatórios . Para a primeira soma sobre s pode-se mudar o índice para $\sigma = s + N$, com isto obtemos o somatório :

$$\sum_{\sigma=0}^{2N} p^{2N-\sigma} \sum_{k=0}^{N} [a_{\sigma-k}\hat{A}_k - A_k \hat{a}_{\sigma-k}$$

$$+(2k-\sigma+1)a_{\sigma-k-1}A_k \frac{\partial V}{\partial q} - g'_0 a_k a_{\sigma-k}].$$

Fazendo uma nova mudnça no índice $k, \kappa = \sigma - k$, vamos ter:

$$\sum_{\sigma=0}^{2N} p^{2N-\sigma} \sum_{k=\sigma-N}^{\sigma} [a_k \hat{A}_{\sigma-k} - A_{\sigma-k}\hat{a}_k - g'_0 a_k a_{\sigma-k}$$

$$+(\sigma - 2k + 1)a_{k-1}A_{\sigma-k}\frac{\partial V}{\partial q}] =$$

$$\sum_{\sigma=0}^{2N} p^{2N-\sigma}\Gamma_\sigma = 0, \qquad (II.1.53)$$

válida para $0 \leq \sigma \leq 2N$.

Notamos que o limite mais baixo da segunda soma em (II.1.53) pode ser definido zero sempre que $\sigma \neq 0$. Isto é verdadeiro porque ou $\sigma \leq 0$, fazendo com que todos os $\hat{a}_k, a_k$ e a_{k-1} sejam nulos, ou $\sigma > N$, onde todos os $\hat{A}_{\sigma-k}, A_{\sigma-k}$ e $a_{\sigma-k}$ são nulos. Quando $\sigma = 2N$, haverá um termo não nulo que deve ser eliminado da soma. Então escreve-se Γ_σ como:

$$\Gamma_\sigma = \sum_{k=0}^{\sigma}[a_k\hat{A}_{\sigma-k} - A_{\sigma-k}\hat{a}_k - g_0' a_k a_{\sigma-k}$$

$$+(\sigma - 2k + 1)a_{k-1}A_{\sigma-k}\frac{\partial V}{\partial q}] - A_{2N+1}'\delta_{2N,\sigma}. \qquad (II.1.54)$$

A soma que envolve $\hat{A}_{\sigma-k}$ pode ser escrita como:

$$\sum_{k=0}^{\sigma} a_k\hat{A}_{\sigma-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\sigma} a_k[\sum_{s=0}^{\sigma-k}(g_{\sigma-k-s}\hat{a}_{s-1} + a_{s-1}\hat{g}_{\sigma-k-s}) + a_{\sigma-k}g_0']. \qquad (II.1.55)$$

A primeira relação de recorrência ,equação (II.1.18), é usada para transformar o termo com $\hat{g}_{\sigma-k-s}$ em um termo proporcional a $g_{\sigma-k-s-1}$. Transformamos então o primeiro termo em (II.1.55) usando a relação algébrica:

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{m-k} B_{s,k} = \sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-s} B_{s,k}$$

$$= \sum_{s=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-s} B_{k,s}, \qquad m \geq 0. \qquad (II.1.56)$$

Usando (II.1.56) e (II.1.46), transformamos (II.1.55) em:

$$\sum_{k=0}^{\sigma}(a_k\hat{A}_{\sigma-k} - a_{\sigma-k}a_k g_0') =$$

$$\sum_{s=0}^{\sigma}\sum_{k=0}^{\sigma-s}[a_{k-1}g_{\sigma-k-s}\hat{a}_s - a_k a_{s-1}g_{\sigma-k-s-1}(\sigma-k-s)\frac{\partial V}{\partial q}]. \qquad (II.1.57)$$

Notando que o primeiro termo no lado direito de (II.1.57) contém $A_{\sigma-k}$, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\sigma}(a_k\hat{A}_{\sigma-k} - a_{\sigma-k}a_k g_0') =$$

$$\sum_{k=0}^{\sigma}[A_{\sigma-k}\hat{a}_k - \sum_{s=0}^{\sigma-k}[a_k a_{s-1}g_{\sigma-k-s-1}(\sigma-k-s)\frac{\partial V}{\partial q}]. \qquad (II.1.58)$$

Substituindo (II.1.58) em (II.1.54), obtemos a seguinte igualdade:

$$\Gamma_\sigma + \delta_{2N,\sigma}A'_{2N+1} = \sum_{k=0}^{\sigma}\sum_{s=0}^{\sigma-k} a_{s-1}[(\sigma-2k+1)a_{k-1}g_{\sigma-k-s} - (\sigma-k-s)a_k g_{\sigma-k-s-1}]\frac{\partial V}{\partial q}. \qquad (II.1.59)$$

Fazemos uma mudança de índice k para $k+1$ no segundo somatório do lado direito de (II.1.59). Com o uso de (II.1.46) podemos reajustar os limites da soma para obter:

$$\Gamma_\sigma + \delta_{2N,\sigma}A'_{2N+1} = \sum_{k=0}^{\sigma}\sum_{s=0}^{\sigma-k} a_{s-1}a_{k-1}(s-k)g_{\sigma-k-s}\frac{\partial V}{\partial q}. \qquad (II.1.60)$$

onde foi usada a relação (II.1.56).

Como já foi dito, Γ_σ é nulo exceto para $\sigma = 2N$. As equações (II.1.56) e (II.1.48) implicam:

$$D^2\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q}\{\frac{det\Lambda_N}{det\Lambda_{N-1}}\}.$$

Como $detA_{N-1} \neq 0$, sempre teremos $dI/dt = 0$ quando $detA_N = 0$. Por outro lado, se $dI/dt = 0$ então $\{\frac{detA_N}{detA_{N-1}}\}' = 0$, isto implica $detA_N = \Psi(t) detA_{N-1}$, onde $\Psi(t)$ é uma função arbitrária do tempo. Expandindo-se o determinante de A_N em suas matrizes menores, ao longo da última linha ou coluna, observa-se que o termo acompanhando g_{2N} é exatamente $detA_{N-1}$. Uma vez que g_{2N} já contém uma função aditiva arbitrária do tempo, $\Psi(t)$ pode ser escolhida zero sem perda de generalidade. Isto é, $dI/dt = 0$ implica que podemos escolher g_{2N} tal que $detA_N = 0$. Como a escolha de g_{2N} determina a escolha dos outros g_k, essa possibilidade de escolha, tal que $detA_N = 0$ é uma condição necessária e suficiente para que $dI/dt = 0$. Assim está completa a prova do **Teorema da Linearização**, dado em (II.1.45).

Esta é a teoria desenvolvida nos quatro artigos citados no início desta secção. A seguir rediscutimos em detalhe dois exemplos de invariantes para potenciais obtidos por Goedert e Lewis através desta teoria.

II.2 Exemplos do método de Goedert e Lewis:

Goedert e Lewis apresentam dois exemplos de invariantes com três ressonâncias e os respectivos potenciais, a saber:

1) O potencial $V(q,t) = Atq^{1/2}$ possui o invariante:

$$I(q,p,t) = \frac{1}{p^3 + 3Aptq^{1/2} - 2Aq^{3/2} + 1/2A^2t^3 - 3B} \qquad (II.2.1.a)$$

2) O potencial $V(q,t) = -A/2 \pm (A^2 + 4C + 4Bq)^{1/2}$ possui o invariante:

$$I(q,p,t) = \frac{1}{p^3 \pm 3p(A^2 + 4C + 4Bq)^{1/2} + 6Bt} \qquad (II.2.1.b)$$

Para encontrar tais resultados eles partem da seguinte particularização: Consideram $N = 3$ e valores específicos para alguns momentos discretos g_k: $g_0 = g_1 = g_3 = 0$ e $g_2 = 1$. Estes valores para os momentos discretos estão de acordo com a primeira relação de recorrência dada por (II.1.18). Todos os demais g_k, ou seja, g_4, g_5 e g_6, podem ser calculados a partir da relação:

$$\frac{\partial g_k}{\partial q} = -\frac{\partial g_{k-1}}{\partial t} - (k-1) g_{k-2} \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad k \geq 1.$$

Então vamos ter para g_4:

$$\frac{\partial g_4}{\partial q} = -\frac{\partial g_3}{\partial t} - 3g_2\frac{\partial V}{\partial q},$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial q} = -3\frac{\partial V}{\partial q},$$

Após integrar esta expressão segundo a variável q, temos para g_4 o seguinte valor:

$$g_4 = -3V(q,t) - \frac{3}{2}V_1(t), \qquad (II.2.2)$$

onde $-3/2V_1(t)$ é constante de integração.

Analogamente obteremos os seguintes valores para g_5 e g_6:

$$g_5 = 3\frac{\partial}{\partial t}\int^q V(x,t)dx + \frac{3}{2}\frac{dV_1}{dt}q + V_2(t), \qquad (II.2.3)$$

$$g_6 = -3\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int^q dx\int^x V(y,t)dy - \frac{3}{4}\frac{d^2V_1}{dt^2}q^2 - \frac{dV_2}{dt}q$$
$$-V_3(t) + \frac{15}{2}V_1(t)V(q,t) + \frac{15}{2}V^2(q,t). \qquad (II.2.4)$$

onde $V_2(t)$ e $V_3(t)$ são funções desconhecidas do tempo *.

A condição (II.1.44), ou seja, o determinante da matriz A_N reduz-se a :

$$A_3 = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g_4 \\ 1 & 0 & g_4 & g_5 \\ 0 & g_4 & g_5 & g_6 \end{pmatrix}$$

Considerando-se os valores dos momentos discretos que foram definidos, obtém-se a seguinte equação:

$$g_6 - g_4^2 = 0,$$

* Observamos aqui que, no artigo [37], há um erro: a fórmula acima para g_6 ao invés de conter $-3/4$ no segundo termo depois do sinal de igual, contém -3.

que, ao se substituir os valores de g_4 e g_6 dados nas expressões (II.2.2) e (II.2.4) , fornece a seguinte **equação integrodiferencial** para o potencial :

$$V^2(q,t) + V_1(t)V(q,t) + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int^q\int^y V(x,t)dxdy = -\Phi(q,t), \qquad (II.2.5)$$

onde:

$$\Phi(q,t) = \frac{1}{2}\frac{d^2V_1}{dt^2}q^2 + \frac{3}{2}\frac{dV_2}{dt}q + \frac{2}{3}V_3 + \frac{3}{2}V_1^2. \qquad (II.2.6)$$

A procura por soluções para a equação integrodiferencial (II.2.5) é simplificada considerando a seguinte equação:

$$2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V^2}{\partial q^2} + V_1\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = -\frac{d^2V_1}{dt^2}, \qquad (II.2.7)$$

obtida tomando-se a segunda derivada parcial espacial da expressão (II.2.5).

Qualquer solução de (II.2.7) é também solução de (II.2.5), sendo que (II.2.7) é mais simples de resolver.

É fácil checar que duas soluções para (II.2.5) e (II.2.7) são:

$$V(q,t) = Atq^{1/2}, \qquad V_1 = 0, \qquad V_2 = \frac{1}{2}A^2t^3 + B \qquad \text{e} \qquad V_3 = 0, \qquad (II.2.8)$$

$$V(q,t) = -A/2 \pm (A^2 + 4C + 4Bq)^{1/2},$$

$$V_1 = A, \qquad V_2 = -6Bt + D \qquad \text{e} \qquad V_3 = 27/8A^2 - 6C. \qquad (II.2.9)$$

Usando estas soluções em (II.2.2),(II.2.3) e (II.2.4) podemos obter g_4, g_5 e g_6 e calcular os coeficientes a_n através da expressão:

$$g_l = -\sum_{n=1}^{N} a_n g_{l-n}, \qquad l \geq N. \qquad (II.2.10)$$

Uma vez conhecidos todos os g_k e a_n podemos construir os invariantes correspondentes aos potenciais (II.2.8) e (II.2.9) usando (II.1.39).

Para o potencial explicitamente dependente do tempo $V(q,t) = At\sqrt{q}$ encontramos deste modo o invariante:

$$I(q,p,t) = \frac{1}{p^3 + 3Apt\sqrt{q} - 2Aq\sqrt{q} + 1/2A^2t^3 - B}, \qquad (II.2.11)$$

e para $V(q,t) = -A/2 \pm (A^2 + 4C + 4Bq)^{1/2}$, potencial que é explicitamente independente do tempo, temos:

$$I(q,p,t) = \frac{1}{p^3 \pm (A^2 + 4C + 4Bq)^{1/2} + 6Bt}. \qquad (II.2.12)$$

Estes dois invariantes são explicitamente dependentes do tempo, sendo que o primeiro potencial está relacionado a um sistema não-autônomo e o segundo a um sistema autônomo. É importante observar que ambos os invariantes não são estritamente racionais como seria de se esperar, já que o método foi proposto com o objetivo de determinar invariantes racionais, e sim, são apenas o recíproco de invariantes polinomiais.

II.3 Generalização dos resultados de Goedert e Lewis:

O objetivo desta secção é mostrar que as duas soluções encontradas por Goedert e Lewis, apresentadas na secção anterior são, na realidade, casos particulares de uma solução, mais geral, por nós obtida, que contém as duas anteriores. Não nos preocuparemos aqui em obter tal invariante, apenas o apresentaremos. No capítulo seguinte discutiremos os cálculos que levam a tal invariante.

A solução mais geral é encontrada para um potencial :

$$V(q,t) = v_1\sqrt{q}t + v_2\sqrt{q}, \qquad (II.3.1)$$

onde v_1 e v_2 são constantes. O invariante mais geral associado a este potencial é:

$$I(q,p,t) = \frac{d_0}{p^3 + Ap + B}, \qquad (II.3.2)$$

onde os valores dos coeficientes $A = A(q,t)$ e $B = B(q,t)$, são:

$$A = 3v_1\sqrt{q}t + 3v_2\sqrt{q} \qquad e$$

$$B = -2v_1 q\sqrt{q} + 1/2v_1^2t^3 + 3/2v_1v_2t^2 + 3/2v_2^2t + h_0,$$

onde d_0 e h_0 são constantes.

Se considerarmos $v_2 \equiv 0$ em (II.3.2), teremos o invariante encontrado na secção anterior (II.2.11), com seu potencial correspondente. Analogamente quando $v_1 \equiv 0$ obtemos o segundo resultado apresentado por Goedert e Lewis, com a restrição que $A = C \equiv 0$ em (II.2.12).

É importante observar que , através do método desenvolvido na secção anterior, o potencial (II.3.1) não é uma solução fácil de ser encontrada para a equação integrodiferencial (II.2.5). Ainda se pode notar que tanto os invariantes (II.2.11) e (II.2.12), calculados por Goedert e Lewis, como o invariante apresentado aqui **não são racionais**, mas apenas funções de **invariantes polinomiais**, o que está de acordo com o fato de uma função de um invariante ser também um invariante.

O assunto do próximo capítulo será um método extremamente simples e direto para o cálculo do invariante (II.3.2) apresentado aqui através do método direto, já apresentado na introdução deste trabalho.

III. O Método Direto.

III.1 Desenvolvimento:

Neste capítulo utilizaremos um método mais simples e direto, ou seja, a condição $dI/dt = 0$, para a procura de invariantes racionais com potenciais associados a sistemas Hamiltonianos unidimensionais dependentes do tempo:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q,t). \qquad (III.1.1)$$

Este método consiste em assumir uma forma funcional para o invariante I, dependente de funções $A,B,C...H$, a serem determinadas, e usar a condição:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I,H\} = 0, \qquad (III.1.2)$$

para obter um sistema de equações diferenciais parciais acopladas relacionando as funções $A,B,C...H$, com o potencial $V(q,t)$ (veja as equações (III.1.5.a-h) abaixo).* Quando for possível resolver o sistema de equações (III.1.5) teremos encontrado um potencial $V(q,t)$ que admite, por construção, o invariante $I(q,p,t)$.

A forma que escolhemos para o invariante racional é uma razão entre dois polinômios de grau três:

$$I(x,\dot{x},t) = \frac{A\dot{x}^3 + B\dot{x}^2 + C\dot{x} + D}{E\dot{x}^3 + F\dot{x}^2 + G\dot{x} + H}. \qquad (III.1.3)$$

Nesta expressão, $A,B,C...H$ são funções da coordenada x e do tempo t que desejamos determinar. Representamos o momentum como $\dot{x}$, a derivada temporal da coordenada. As funções A,B,C...H não dependem do momentum $\dot{x}$, pois isto implicaria simplesmente em redefinir os coeficientes das potências dos momenta.

* Usamos, neste trabalho, a letra H para identificar o Hamiltoniano e também para o termo independente de $\dot{x}$ na expressão (III.1.3). Como o Hamiltoniano não é muito citado aqui, acreditamos que as duas definições não causarão confusão. Entretanto, sempre que quisermos nos referir a H como Hamiltoniano, deixaremos claro esta intenção. Nas outras vezes H deverá ser tratado como a função de x e t que aparece em (III.1.3).

Nossa escolha particular de $I(x,\dot{x},t)$, dada pela equação (III.1.3), é motivada pelo desejo de obter invariantes realmente racionais, conforme discutimos no final do capítulo anterior. Relembramos ao leitor que o método proposto por Goedert e Lewis resultou numa formulação integrodiferencial-parcial, equação (II.2.5), mas não produziu nenhum invariante verdadeiramente racional, apenas recíprocos de invariantes polinomiais.

No seu caso mais geral, o invariante na equação (III.1.3), acima, pode conter até três ressonâncias, permitindo estudar, inclusive, ressonâncias múltiplas.

A condição necessária e suficiente para que $I(x,\dot{x},t)$ seja um invariante, como já foi apresentado nos capítulos precedentes, é dada por, conforme equação (II.1.3):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial I}{\partial \dot{x}} = 0, \qquad (III.1.4)$$

onde $V(x,t)$ é o potencial correspondente a este invariante.

Para simplificar a notação, a partir daqui denotaremos as derivadas parciais em relação a x e a t de uma função através de um sub-índice na letra que representa a função e a derivada total em relação ao tempo com um ponto. Ou seja: $E_t \equiv \frac{\partial E}{\partial t}; E_x \equiv \frac{\partial E}{\partial x}; \dot{E} \equiv \frac{dE}{dt}$; etc.

Introduzindo (III.1.3) em (III.1.4), obtemos uma equação nas variáveis $x, \dot{x}, \ddot{x}$ e t. Substituindo-se nesta equação $\ddot{x}$ por $-\frac{\partial V}{\partial x}$, Lei de Newton, e fatorando todas as potências do momentum, obtemos uma equação polinomial no momentum de grau 7. Para que esta equação se anule para valores arbitrários de x é necessário que cada um dos coeficientes que acompanha cada grau desta variável também se anule. Desta forma obtemos oito equações que devem ser satisfeitas pelas funções $A, B, C ... H$ e $V(x,t)$ para que o potencial admita um invariante na forma (III.1.3). Estas equações são:

$$AE_x - EA_x = 0, \qquad (III.1.5.a)$$

$$A(E_t + F_x) + BE_x - E(A_t + B_x) - FA_x = 0, \qquad (III.1.5.b)$$

$$A(F_t + G_x) + B(E_t + F_x) + CE_x - E(B_t + C_x) - F(A_t + B_x) - GA_x = 0, \qquad (III.1.5.c)$$

$$A(-2FV_x+G_t+H_x)+B(-3EV_x+F_t+G_x)+C(E_t$$
$$+F_x)+DE_x-E(-2BV_x+C_t+D_x)-F(-3AV_x+B_t$$
$$+C_x)-G(A_t+B_x-HA_x)=0, \qquad (III.1.5.d)$$

$$A(-GV_x+H_t)+B(G_t+H_x)+C(-3EV_x+F_t+G_x)$$
$$+D(E_t+F_x)-E(-CV_x+D_t)-F(C_t+D_x)$$
$$-G(-3AV_x+B_t+C_x)-H(A_t+B_x)=0, \qquad (III.1.5.e)$$

$$B(-GV_x+H_t)+C(-2FV_x+G_t+H_x)+D(-3EV_x$$
$$+F_t+G_x)-F(-CV_x+D_t)-G(-2BV_x+C_t+D_x)$$
$$-H(-3AV_x+B_t+C_x)=0, \qquad (III.1.5.f)$$

$$CH_t+D(-2FV_x+G_t+H_x)-GD_t-H(-2BV_x+C_t+D_x)=0, \qquad (III.1.5.g)$$

$$D(-GV_x+H_t)-H(-CV_x+D_t)=0. \qquad (III.1.5.h)$$

Note que este sistema contém equações que não envolvem o potencial (equações (III.1.5.a-c)) e outras que o envolvem (equações (III.1.5.d-h)).

Agora a procura por um invariante correspondendo a um potencial $V(x,t)$ resume-se simplesmente em procurar valores para as funções $A,B,C...H$ que satisfaçam o sistema de equações (III.1.5). Ou seja, assumimos uma dependência analítica em x e t para algumas destas funções e tentamos resolver o sistema de equações que resulta da substituição destas funções em (III.1.5). Em geral, se a escolha inicial para as funções $A,B,C...H$ for simples, teremos um sistema a ser resolvido também simples, onde podemos "manipular" a forma das funções até obter um resultado ou descartarmos a possibilidade de obtê-lo. Começa-se com as equações não envolvendo $V(x,t)$, obtendo-se então o máximo de informações a respeito de A,B,C,etc, independente do valor do potencial. Entra-se com estes valores nas equações restantes, resolvendo o sistema daí resultante.

Na próxima secção consideramos alguns exemplos, que nos darão uma visão de como é o processo da procura de invariantes através deste método.

III.2 Alguns casos estudados:

Faremos aqui algumas aplicações do método descrito na secção anterior. Encontraremos alguns casos já discutidos na literatura e obteremos para os dois potenciais de Goedert e Lewis, estudados na secção (II.2) do capítulo anterior, os respectivos invariantes, sendo que um deles corresponde ao invariante por eles encontrado e o outro é verdadeiramente racional. Encontraremos também o invariante geral (II.4.2) envolvendo (II.2.1.a) e (II.2.1.b), invariantes calculados no capítulo anterior.

Primeiro vamos supor um invariante geral da forma:

$$I(x,\dot{x},t) = \frac{A\dot{x}^3 + B\dot{x}^2 + C\dot{x} + D}{\dot{x}^p}, \qquad (III.2.1)$$

onde p é uma potência arbitrária. Introduzimos este invariante na expressão (III.1.4), condição necessária e suficiente para que $I(x,\dot{x},t)$ seja invariante. Obtemos assim uma equação polinomial em $\dot{x}$, sendo que cada potência de $\dot{x}$ é acompanhada de uma função de x e t. Cada coeficiente de $\dot{x}$ deverá se anular, para que a equação seja nula. Com isso obtemos o seguinte sistema de equações:

$$A_x = 0, \qquad (III.2.2.a)$$

$$A_t + B_x = 0, \qquad (III.2.2.b)$$

$$B_t + C_x + (p-3)AV_x = 0, \qquad (III.2.2.c)$$

$$C_t + D_x + (p-2)BV_x = 0, \qquad (III.2.2.d)$$

$$D_t + (p-1)CV_x = 0, \qquad (III.2.2.e)$$

$$pDV_x = 0. \qquad (III.2.2.f)$$

Agora supomos valores para p e vemos se é possível encontrar-se soluções. Primeiro supomos $p \geq 4$, para que as igualdades em (III.2.2) sejam satisfeitas devemos ter $A = B = C = D \equiv 0$, uma vez que não desejamos ter $V_x \equiv 0$. Então concluímos que não existe invariante do tipo (III.2.1) com $p \geq 4$, para um potencial $V(x,t)$ qualquer.

O invariante

$$I = \frac{A\dot{x}^3 + B\dot{x}^2 + C\dot{x} + D}{\dot{x}^3} \qquad (III.2.3)$$

é obtido tomando-se $p = 3$, na expressão do invariante geral (III.2.1).

Neste caso o sistema de equações diferenciais (III.2.2) se reduz a seis equações que devem ser satisfeitas pelas funções cujos valores permanecem ainda arbitrários:

$$A_x = 0, \qquad (III.2.4.a)$$

$$A_t + B_x = 0, \qquad (III.2.4.b)$$

$$B_t + C_x = 0, \qquad (III.2.4.c)$$

$$BV_x + C_t + D_x = 0, \qquad (III.2.4.d)$$

$$2CV_x + D_t = 0, \qquad (III.2.4.e)$$

$$3DV_x = 0. \qquad (III.2.4.f)$$

Analisando estas equações vemos que, como o caso trivial $V_x \equiv 0$ não é interessante, a equação (III.2.4.f) implica termos necessariamente $D \equiv 0$. Se $D \equiv 0$, pela equação (III.2.4.e) vamos ter $C \equiv 0$. Pelo mesmo motivo, na equação (III.2.4.d) somos obrigados a escolher $B \equiv 0$. Finalmente em (III.2.4.b),$A \equiv 0$. Neste caso o invariante (III.2.3) é identicamente nulo. Conclui-se então que não existe invariante na forma (III.2.3), qualquer que seja o potencial considerado, para $p = 3$.

Considerando agora:

$$I = \frac{A\dot{x}^3 + B\dot{x}^2 + C\dot{x} + D}{\dot{x}^2}, \qquad (III.2.5)$$

onde definimos $p = 2$ em (III.2.1).

O sistema de equações (III.2.2) assume a forma:

$$A_x = 0, \qquad (III.2.6.a)$$

$$A_t + B_x = 0, \qquad (III.2.6.b)$$

$$AV_x - B_t - C_x = 0, \qquad (III.2.6.c)$$

$$C_t + D_x = 0, \qquad (III.2.6.d)$$

$$CV_x + D_t = 0, \qquad (III.2.6.e)$$

$$2DV_x = 0. \qquad (III.2.6.f)$$

Pelo mesmo raciocínio que tivemos no caso anterior, vemos que se $V_x \neq 0$, temos que ter necessariamente $D \equiv 0$ na equação (III.2.6.f). O que leva, em (III.2.6.c), definirmos $C \equiv 0$. Desta maneira o invariante (III.2.5) se reduz a:

$$I = \frac{V\dot{x}^3 + B\dot{x}^2}{\dot{x}^2} = A\dot{x} + B. \qquad (III.2.7)$$

e temos o sistema de equações diferenciais:

$$A_x = 0, \qquad (III.2.8.a)$$

$$A_t + B_x = 0, \qquad (III.2.8.b)$$

$$AV_x - B_t = 0. \qquad (III.2.8.c)$$

Este invariante polinomial linear foi discutido em detalhe em [8] e [39]. Concluímos então que não existem invariantes racionais na forma (III.2.5). Como o objetivo deste trabalho é tratar invariantes racionais abstemo-nos de discutir (III.2.7) aqui.

Um outro invariante que podemos considerar e tentar encontrar o potencial correspondente é:

$$I = \frac{A\dot{x}^3 + B\dot{x}^2 + C\dot{x} + D}{\dot{x}}, \qquad (III.2.9)$$

Para obter este invariante de (III.2.1) fazemos $p = 1$.

O sistema de equações diferenciais (III.2.2) para este caso torna-se:

$$A_x = 0, \qquad (III.2.10.a)$$

$$A_t + B_x = 0, \qquad (III.2.10.b)$$

$$2AV_x - B_t - C_x = 0, \qquad (III.2.10.c)$$

$$BV_x - C_t - D_x = 0, \qquad (III.2.10.d)$$

$$D_t = 0, \qquad (III.2.10.e)$$

$$DV_x = 0. \qquad (III.2.10.f)$$

Novamente aqni temos $D \equiv 0$, já que, caso contrário $V_x \equiv 0$, o que não é interessante. Este requisito leva a uma nova forma para o invariante (III.2.9):

$$I = \frac{A\dot{x}^3 + B\dot{x}^2 + C\dot{x}}{\dot{x}} = A\dot{x}^2 + B\dot{x} + C. \qquad (III.2.11)$$

Este é um invariante polinomial de grau 2, que também já foi discutido em [39]. Concluimos que não existe invariante racional na forma (III.2.7). Com isto fica demonstrado a inexistência de invariantes racionais da forma geral (III.2.1), qualquer que seja o valor de p. O sistema de equações (III.2.10) se reduz a:

$$A_x = 0, \qquad (III.2.12.a)$$

$$A_t + B_x = 0, \qquad (III.2.12.b)$$

$$2AV_x - B_t - C_x = 0, \qquad (III.2.12.c)$$

$$BV_x - C_t = 0. \qquad (III.2.12.d)$$

Este sistema foi resolvido em [8], onde foi encontrado o potencial correspondente.

Na próxima secção vamos ver dois casos de invariantes que a primeira vista parecem ser racionais, mas que na realidade não o são .

III.3 Invariantes Pseudo-racionais:

Vamos considerar aqui uma outra forma para o invariante, ou seja, permitiremos para o numerador uma dependência no momentum $\dot{x}$ e consideraremos uma forma específica para o potencial. Isto é, para um potencial determinado veremos se pode existir um invariante de forma definida, mantendo a flexibilidade das funções que acompanham os momenta.

Consideremos o invariante do tipo:

$$I = \frac{B\dot{x}^2 + D}{\dot{x}^3 + F\dot{x}^2 + G\dot{x} + H}, \qquad (III.3.1)$$

e o potencial:

$$V(x,t) = vx^{1/2}. \qquad (III.3.2)$$

Na forma (III.1.3), temos $A \equiv C \equiv 0$ e $E \equiv 1$, então as equações (III.1.5) reduzem-se à:

$$B_x = 0, \qquad (III.3.3.a)$$

$$BF_x - B_t = 0, \qquad (III.3.3.b)$$

$$-BV_x + BF_t + BG_x - D_x - FB_t = 0, \qquad (III.3.3.c)$$

$$BG_t + BH_x + DF_x - D_t - FD_x - GB_t = 0, \qquad (III.3.3.d)$$

$$V_x(BG - 3D) + BH_t + DF_t + DG_x - FD_t - GD_x - HB_t = 0 \qquad (III.3.3.e)$$

$$2V_x(BH - DF) + DG_t + DH_x - GD_t - HD_x = 0, \qquad (III.3.3.f)$$

$$DGV_x - DH_t - HD_t = 0. \qquad (III.3.3.g)$$

De acordo com a equação (III.3.3.a) devemos ter:

$$B(x,t) = b(t), \qquad (III.3.4)$$

ou seja, a função $B(x,t)$ é apenas função de t. Consideraremos somente o caso mais simples dado por $b(t) \equiv b_0$, onde b_0 é uma constante. Conforme a equação (III.3.3.b), $F(x,t)$ é apenas função de t se $b(t) = b_0$:

$$F(x,t) = f(t). \qquad (III.3.5)$$

Escolhemos a forma para $G(x,t)$:

$$G(x,t) = 3V(x,t). \qquad (III.3.6)$$

Esta escolha é feita com base na forma de $G(x,t)$ encontrada para os invariantes na secção anterior e nos exemplos de Goedert e Lewis.

A equação (III.3.3.c) dá a forma para a função $D(x,t)$:

$$D_x = -BV_x + BF_t + BG_x - FB_t.$$

Considerando as funções V, B, F e G nesta equação e integrando em relação à variável x, obtemos a seguinte expressão para $D(x,t)$:

$$D(x,t) = 2b_0 v x^{1/2} + b_0 \dot{f}(t) x + d(t), \qquad (III.3.7)$$

A equação (III.3.3.d), fornece $H(x,t)$:

$$BH_x = -BG_t - DF_x + D_t + FD_x + GB_t,$$

$$H_x = -G_t - \frac{D}{B}F_x + \frac{D_t}{B} + \frac{F}{B}D_x + \frac{B_t}{B}G.$$

Substituindo nesta equação as funções B, D, G e F e integrando a respeito da variável x ambos os lados, teremos:

$$H(x,t) = \frac{1}{2}\bar{f}(t)x^2 + \frac{\dot{d}(t)}{b_0}x + 2f(t)vx^{1/2}$$

$$+ f(t)\dot{f}(t)x + h(t). \qquad (III.3.8)$$

As equações que restaram em (III.3.3), são agora usadas para determinar as funções que ainda não foram definidas nas formas de $D(x,t)$ e $H(x,t)$.

Através da equação (III.3.3.e), obtemos:

$$\frac{1}{2}vx^{-1/2}|3b_0vx^{1/2} - 3(2b_0vx^{1/2} + b_0\dot{f}(t)x + d(t))|$$

$$b_0(\frac{1}{2}\frac{d^3}{dt^3}f(t)x^2 + \frac{\ddot{d}(t)}{b_0}x + 2\dot{f}(t)vx^{1/2} + \dot{f}(t)^2x + f(t)\ddot{f}(t)x + \dot{h}(t))$$

$$+\dot{f}(t)(2b_0vx^{1/2}+b_0\dot{f}(t)x+d(t))$$
$$+\frac{3}{2}vx^{-1/2}(2b_0vx^{1/2}+b_0\dot{f}(t)x+d(t))$$
$$-f(t)(b_0\ddot{f}(t)x+\dot{d}(t))$$
$$-3vx^{1/2}(b_0vx^{-1/2}+b_0\dot{f}(t))=0. \qquad (III.3.9)$$

Efetuando alguns cálculos nesta expressão teremos:

$$\frac{-3}{2}b_0v_2+\frac{1}{2}b_0\frac{d^3}{dt^3}f(t)x^2+(\ddot{d}(t)++2b_0\dot{f}(t)^2)x+b_0\dot{f}(t)vx^{1/2}$$
$$+b_0\dot{f}(t)vx^{1/2}+b_0\dot{h}(t)+\dot{f}(t)d(t)-f(t)\dot{d}(t)=0. \qquad (III.3.10)$$

Cada coeficiente de x e t deve separadamente se anular, logo teremos:

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t)=0, \qquad (III.3.11.a)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}d(t)=0, \qquad (III.3.11.b)$$
$$\frac{d}{dt}f(t)=0. \qquad (III.3.11.c)$$

Logo daí vemos que:

$$f(t)=f_0, \qquad (III.3.12.a)$$
$$d(t)=d_1t+d_0, \qquad (III.3.12.b)$$

com a equação restante:

$$-\frac{3}{2}b_0v^2+b_0\dot{h}(t)-f(t)\dot{d}(t)=0, \qquad (III.3.13)$$

Consideremos agora a equação (III.3.3.f):

$$2V_x(BH-DF)+DG_t+DH_x-GD_t-HD_x=0$$

Esta equação fica, ao se substituir as funções de V,B,D,F,G e H:

$$vx^{-1/2}(\dot{d}(t)x+2b_0f_0vx^{1/2}+b_0h(t)-2b_0f_0vx^{1/2}-f_0d(t))$$
$$+(2b_0vx^{1/2}+d(t)(\frac{\dot{d}(t)}{b_0}+vf_0x^{-1/2})-3vx^{1/2}\dot{d}(t)$$
$$-(\frac{\dot{d}(t)}{b_0}x+2f_0vx^{1/2}+h(t))(b_0vx^{-1/2})=0, \qquad (III.3.14)$$

que, efetuando alguns cálculos, torna-se:

$$2vd_1x^{1/2} + \frac{d(t)d_1}{b_0} - 3d_1vx^{1/2} = 0. \qquad (III.3.15)$$

Desta equação vemos que $d_1 = 0$, logo:

$$d(t) = d_0, \qquad (III.3.16)$$

com d_0 uma constante.

Voltando à equação (III.3.13), vamos ter:

$$-\frac{3}{2}b_0v^2 + b_0\dot{h}(t) = 0.$$

Portanto podemos ver que:

$$h(t) = \frac{3}{2}v^2t + h_0. \qquad (III.3.17)$$

A equação (III.3.3.g) é anulada com as condições já impostas pelas equações anteriores para os coeficientes:

$$B(x,t) = b_0, \qquad (III.3.18.a)$$

$$D(x,t) = 2b_0vx^{1/2} + d_0, \qquad (III.3.18.b)$$

$$F(x,t) = f_0, \qquad (III.3.18.c)$$

$$G(x,t) = 3vx^{1/2}, \qquad (III.3.18.d)$$

$$H(x,t) = 2f_0vx^{1/2} + \frac{3}{2}v^2t + h_0. \qquad (III.3.18.e)$$

A forma do invariante (III.3.1) se reduz a:

$$I = \frac{b_0\dot{x}^2 + 2b_0vx^{1/2} + d_0}{\dot{x}^3 + f_0\dot{x}^2 + 3vx^{1/2}\dot{x} + 2f_0vx^{1/2} + \frac{3}{2}v^2t + h_0}, \qquad (III.3.19)$$

para o potencial $V(x,t) = vx^{1/2}$.

Poder-se-ia pensar que o invariante (III.3.19) fosse um invariante verdadeiramente racional. No entanto, a expressão no numerador de (III.3.19) é apenas a energia do sistema $1/2\dot{x}^2 + vx^{1/2}$ multiplicada pela constante $2b_0$. No denominador também temos um termo associado a energia, ou seja, o termo $f_0\dot{x}^2 + 2f_0vx^{1/2}$.

portanto o invariante para o potencial $V(x,t) = vx^{1/2}$ é dado pela forma:

$$I = \frac{d_0}{\dot{x}^3 + 3vx^{1/2}\dot{x} + \frac{3}{2}v^2t + h_0}, \qquad (III.3.20)$$

já discutido por Goedert e Lewis no capítulo II e que não é racional.

Procuramos, agora, um invariante racional com uma ressonância, ou seja, o invariante de forma:

$$I = \frac{C\dot{x} + D}{\dot{x} + H}. \qquad (III.3.21)$$

Este invariante é obtido da forma (III.1.3) definindo-se as funções A, B, E e F como iguais a zero e G igual a unidade. Levando-se em conta estes valores, o sistema (III.1.5) se reduz à:

$$C_x = 0, \qquad (III.3.22.a)$$

$$CH_x - C_t - D_x = 0, \qquad (III.3.22.b)$$

$$CH_t + DH_x - D_t - HD_x - HC_t = 0, \qquad (III.3.22.c)$$

$$DV_x - DH_t - HCV_x + HD_t = 0. \qquad (III.3.22.d)$$

Observamos que apenas a equação (III.3.22.d) possui uma dependência no potencial dada por V_x. As três primeiras equações formam um sistema que nos permite encontrar a forma das funções desconhecidas C, D e H, independentemente do potencial. Uma vez encontrada a forma das funções C, D e H, podemos usar (III.3.22.d) para obtermos o potencial que corresponde ao invariante (III.3.21).

Começamos analisando a primeira equação em (III.3.22). De acordo com esta, C deve ser função apenas de t. Vamos representar esta dependência como uma série de potências:

$$C(x,t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3. \qquad (III.3.23)$$

Da mesma maneira escolhemos para D e H, agora funções de x e t, uma forma em série de potências nestas duas variáveis:

$$D = d_{03}t^3 + d_{02}t^2 + d_{01}t + d_{00} + d_{10}x$$
$$d_{20}x^2 + d_{30}x^3 + d_{11}xt + d_{21}x^2t + d_{12}xt^2, \qquad (III.3.24.a)$$

$$H = h_{03}t^3 + h_{02}t^2 + h_{01}t + h_{00} + h_{10}x$$
$$h_{20}x^2 + h_{30}x^3 + h_{11}xt + h_{21}x^2t + h_{12}xt^2, \qquad (III.3.24.b)$$

Estas formas são sugeridas porque, em princípio, qualquer função pode ser representada como uma série de potências. A seguir, entramos com estas formas de C,D e H nas três primeiras equações (III.3.22). Com isto obtemos três equações polinomiais em x e t. Como cada uma destas equações deve ser igual a zero, cada coeficiente de cada potência de x e t (ou seja, funções que irão envolver as constantes $c_1, c_2, \ldots, d_{03}, d_{02}, \ldots, h_{03}, h_{02}, \ldots$) deverá se anular. Para efetuar estes cálculos usamos um programa *Reduce* (ver apêndice). Este programa:

a) considera C, D e H como uma série de potências em x e t,

b) fatora x e t, indicando o coeficiente correspondente a cada grau destas variáveis.

O sistema de equações formado pela condição de que os coeficientes de cada potência de x e t devem ser nulos determina os valores das constantes presentes nas funções C, D e H. Ou seja, as funções:

$$C = c_1t + c_0, \qquad (III.3.25.a)$$

$$D = \frac{2}{3}h_{02}c_1t^3 + (h_{02}c_0 + \frac{1}{2}h_{01}c_1)t^2 + h_{01}c_0t + d_{00} - c_1x, \qquad (III.3.25.b)$$

$$H = h_{02}t^2 + h_{01}t + h_{00}. \qquad (III.3.25.c)$$

satisfazem as equações (III.3.22.a-c). Para encontrar o potencial correspondente a este invariante, devemos considerar a equação diferencial (III.3.22.d), esta equação fornece para $V(x,t)$ o valor:

$$V_x = \frac{DH_t - HD_t}{D - HC},$$

cuja solução é, a menos de uma função em t, constante de integração, arbitrariamente tomada como sendo nula:

$$V(x,t) = (h_{02}t + h_{01})x. \qquad (III.3.26)$$

Então temos o potencial e seu respectivo invariante.

Pode-se notar que o potencial (III.3.26) é dependente do tempo, portanto correspondente a um sistema não-autônomo.

O invariante $(C\dot{x} + D)/(\dot{x} + H)$, com os valores das funções C, D e H dados pelas equações (III.3.25), é uma razão de dois outros invariantes para o mesmo potencial (III.3.26). Isto é:

$$\begin{aligned} I_1 =& C\dot{x} + D \\ =&(c_1t + c_0)\dot{x} + \frac{2}{3}h_{02}c_1t^3 + (h_{02}c_0 + \frac{1}{2}h_{01}c_1)t^2 \\ &+ h_{01}c_0t + d_{00} - c_1x, \qquad (III.3.27.a) \\ I_2 =& \dot{x} + H = \dot{x} + h_{02}t^2 + h_{01}t + h_{00}, \qquad (III.3.27.b) \end{aligned}$$

são também invariantes para o potencial (III.3.26).

O invariante $\dot{x} + H$ é trivial e dá a equação de movimento para x. Ou seja, podemos escrever:

$$\dot{x} = I - H = I - h_{02}t^2 - h_{01}t - h_{00}.$$

Integrando esta expressão nós temos a evolução temporal da coordenada x, ou $x = x(t)$.

O invariante $C\dot{x}+D$ é um invariante polinomial de grau 1 em $\dot{x}$ e já foi discutido na literatura [34].

Em resumo, até aqui, obtivemos dois invariantes que, a primeira vista, pareciam ser racionais, mas não eram. Num caso o invariante continha apenas um termo relacionado com a energia e, no outro caso, era apenas a razão entre um invariante trivial por um outro não trivial já estudado na literatura.

III.4 Obtenção de Invariantes Usando Computador:

Nesta secção mostramos como se pode obter o sistema de equações (III.1.5) através de um programa de computador usando a linguagem *REDUCE*. Este programa permite gerar analiticamente as equações (III.1.5) para o invariante (III.1.3) e também qualquer outro sistema de equações para formas de invariantes que tenham sido originadas de (III.1.3).

Este programa além de fornecer o sistema de equações desejado, partindo da forma do invariante previamente considerado, é de grande ajuda na análise das equações resultantes, uma vez escolhidas as formas para as funções $A, B, C...H$.

Embora todos os cálculos deste capítulo tenham sido feitos sem ajuda de computador, isto só possível porque o sistema de equações não foram complicados, cálculos que exijam um desenvolvimento matemático mais sofisticado podem ser efetuados através de programas em *REDUCE.*

O programa por nós usado é dado a seguir.

PROGRAMA:

```
OFF NAT$
LINELENGHT 70$

COMMENT - PROGRAMA PARA GERAR EQUACOES - (TEMPO=A) $

OPERATOR INV,AS,B,C,D,ES,F,G,H;

DEPEND AS,X,A;     DEPEND B,X,A;
DEPEND C,X,A;      DEPEND D,X,A;
DEPEND ES,X,A;     DEPEND F,X,A;
DEPEND G,X,A;      DEPEND H,X,A;
```

```
    COMMENT - FORMA PARA O INVARIANTE INV$
    INV:=(AS*P**3+B*P**2+C*P+D)/(ES*P**3+F*P**2+G*P+H)$

COMMENT - DERIVADAS PARCIAIS DO INVARIANTE A RESPEITO DE X,T,P $
INA;INP;INX;
INA:=DF(INV,A);
INP:=DF(INV,P);
INX:=DF(INV,X);

COMMENT - DEFINICOES$
AT:=DF(AS,A)$     ET:=DF(ES,A)$
AX:=DF(AS,X)$     EX:=DF(ES,X)$
BT:=DF(B,A)$      FT:=DF(F,A)$
BX:=DF(B,X)$      FX:=DF(F,X)$
CT:=DF(C,A)$      GT:=DF(G,A)$
CX:=DF(C,X)$      GX:=DF(G,X)$
DT:=DF(D,A)$      HT:=DF(H,A)$
DX:=DF(D,X)$      HX:=DF(H,X)$

COMMENT - DERIVADA TOTAL COM RESPEITO AO TEMPO$
FACTOR P;
DINT:=INA+P*INX-VX*INP;
END$
```

Este é o programa que gera o sistema de equações (III.1.5).

No próximo capítulo obtemos através de nosso método um caso curioso de invariante racional.

IV. O Caso Geral.

IV.1 O Invariante:

Neste capítulo encontraremos os resultados obtidos por Goedert e Lewis no capítulo II, secção (II.2) e o caso geral contendo estes resultados, apresentado na secção (II.3).

Para tanto, consideramos um invariante do tipo:

$$I = \frac{D}{\dot{x}^3 + F\dot{x}^2 + G\dot{x} + H}, \qquad (IV.1.1)$$

para uma forma de potencial dada por:

$$V(x,t) = v_1 x^m t^q + v_2 x^n t^p. \qquad (IV.1.2)$$

Nesta equação v_1 e v_2 são constantes. Esta forma geral de $V(x,t)$ contém, como caso particular, os dois exemplos discutidos por Goedert e Lewis no início da secção (II.2) do capítulo anterior. O potencial (II.2.1.a) é obtido de (IV.1.2) fazendo $A \equiv v_1 + v_2$, $m = n = 1/2$ e $q = p = 1$, enquanto que (II.2.1.b) é obtido tomando-se $A = C \equiv 0$, $v_1 + v_2 = 2B^{1/2}$, $m = n = 1/2$ e $q = p = 0$.

Para o invariante (IV.1.1), o sistema de equações diferenciais (III.1.5) se reduz à:

$$D_x = 0, \qquad (IV.1.3.a)$$

$$DF_x - D_t - FD_x = 0, \qquad (IV.1.3.b)$$

$$3DV_x - DF_t - DG_x + FD_t = 0, \qquad (IV.1.3.c)$$

$$2DFV_x - DG_t - DH_x + GD_t = 0, \qquad (IV.1.3.d)$$

$$GDV_x - DH_t + HD_t = 0. \qquad (IV.1.3.e)$$

De acordo com (IV.1.3.a), $D(x,t)$ é apenas função de t. Começamos escolhendo $D(x,t) = d_0$, onde d_0 é uma constante. Com isto, a equação (IV.1.3.b) se reduz à $F_x = 0$, o que implica $F(x,t) = f(t)$.

A equação (IV.1.3.c), torna-se: $3V_x - F_t - G_x = 0$. Temos, então, para $G(x,t)$ a seguinte função:

$$G(x,t) = 3V(x,t) - \dot{f}(t)x + g(t). \qquad (IV.1.4)$$

A equação (IV.1.3.d) conduz a seguinte forma para $H(x,t)$:

$$H(x,t) = 2f(t)(v_1 x^m t^q + v_2 x^n t^p) - 3\Big(\frac{q}{m+1} v_1 x^{m+1} t^{q-1} + \frac{p}{n+1} v_2 x^{n+1} t^{p-1}\Big) + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2} - \dot{g}(t)x + h(t). \qquad (IV.1.5)$$

Por outro lado, a equação (IV.1.3.e) dá o seguinte $H(x,t)$:

$$H(x,t) = 3\frac{m}{2q+1} v_1^2 x^{2m-1} t^{2q+1} + 3\frac{m+n}{q+p+1} v_1 v_2 x^{m+n-1} t^{q+p+1} + 3\frac{n}{2p+1} v_2^2 x^{2n-1} t^{2p+1} - m v_1 x^m \int^t \dot{f}(y) y^q dy - n v_2 x^n \int^t \dot{f}(y) y^p dy + m v_1 x^{m-1} \int^t g(y) y^q dy + n v_2 x^{n-1} \int^t g(y) y^p dy + \tilde{h}(x). \qquad (IV.1.6)$$

Obviamente estas duas formas de $H(x,t)$ devem ser equivalentes.

Vamos, agora, especificar explicitamente alguns valores para m, n, p e q. Desta forma definimos o potencial (III.2.15) e simplificamos as equações (IV.1.4), (IV.1.5) e (IV.1.6), encontrando o invariante correspondente.

A) Para $m = n = 1/2$ e $q = p = 1$ temos o potencial:

$$V(x,t) = v x^{1/2} t, \qquad (IV.1.7)$$

onde denotamos $v \equiv v_1 + v_2$.

Neste caso, a forma (IV.1.4) torna-se:

$$G(x,t) = 3vx^{1/2} - \dot{f}(t)x + g(t). \qquad (IV.1.8)$$

As duas formas que tínhamos para a função $H(x,t)$ são:

$$H(x,t) = 2f(t)vx^{1/2}t - 2vx^{3/2} + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2} - \dot{g}(t)x + h(t), \qquad (IV.1.9.a)$$

$$H(x,t) = \frac{1}{2}v^2t^3 - \frac{1}{2}vx^{1/2}\int^t \dot{f}(y)y\,dy$$
$$+ \frac{1}{2}vx^{-1/2}\int^t g(y)y\,dy + \tilde{h}(x), \qquad (IV.1.9.b)$$

as quais devem ser iguais. Igualando estas duas equações teremos uma expressão em x e t, sendo que os coeficientes de cada potência de x e t devem anular-se para que a igualdade seja verdadeira:

$$2f(t)vx^{1/2}t - 2vx^{3/2} + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2} - \dot{g}(t)x + h(t) - \frac{1}{2}v^2t^3 +$$
$$\frac{1}{2}vx^{1/2}\int^t \dot{f}(y)y\,dy - \frac{1}{2}vx^{-1/2}\int^t g(y)y\,dy - \tilde{h}(x) = 0. \qquad (IV.1.10)$$

Então devemos ter:

$$g(t) \equiv 0, \qquad (IV.1.11.a)$$
$$f(t) \equiv 0, \qquad (IV.1.11.b)$$
$$\tilde{h}(x) \equiv -2vx^{3/2} + h_0, \qquad (IV.1.11.c)$$
$$h(t) \equiv \frac{1}{2}v^2t^3 + h_0. \qquad (IV.1.11.d)$$

Com estes valores para as funções arbitrárias:

$$D(x,t) \equiv d_0, \qquad (IV.1.12.a)$$
$$F(x,t) = f(t), \qquad (IV.1.12.b)$$
$$G(x,t) = 3vx^{1/2}t, \qquad (IV.1.12.c)$$
$$H(x,t) = -2vx^{3/2} + \frac{1}{2}v^2t^3 + h_0. \qquad (IV.1.12.d)$$

o invariante (IV.1.1) assumirá a forma:

$$I = \frac{1}{\dot{x}^3 + 3vx^{1/2}t\dot{x} - 2vx^{3/2} + \frac{1}{2}v^2t^3 + h_0}. \qquad (IV.1.13)$$

Este invariante corresponde exatamente àquele discutido no capítulo anterior, na secção (II.2),caso (II.2.1.a).

B)Para $m = n = 1/2$ e $q = p = 0$, temos para o potencial o seguinte valor:

$$V(x,t) = vx^{1/2}, \qquad (IV.1.14)$$

onde definimos $v \equiv v_1 + v_2$.

Neste caso, o potencial correspondente da secção (II.2) é o caso (II.2.1.b), $V(q,t) = -\frac{A}{2} \pm (A^2 + 4C + 4Bq)^{1/2}$, desde que tenhamos $A \equiv 0, C \equiv 0$ e $4B \equiv v$. Este potencial está associado a um sistema autônomo.

Para as funções em (IV.1.1), temos:

$$D(x,t) = d_0, \qquad (IV.1.15.a)$$

$$F(x,t) = f(t), \qquad (IV.1.15.b)$$

$$G(x,t) = 3vx^{1/2} - \dot{f}(t)x + g(t), \qquad (IV.1.15.c)$$

e duas formas para $H(x,t)$:

$$H(x,t) = 2vx^{1/2}f(t) + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2} - \dot{g}(t)x + h(t), \qquad (IV.1.16.a)$$

$$H(x,t) = \frac{3}{2}v^2t - \frac{1}{2}vx^{1/2}f(t) + \frac{1}{2}vx^{-1/2}\int^t g(y)dy + \tilde{h}(x). \qquad (IV.1.16.b)$$

Estas expressões , quando igualadas, fornecem:

$$2vx^{1/2}f(t) + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2} - \dot{g}(t)x + h(t) - \frac{3}{2}v^2t +$$
$$\frac{1}{2}vx^{1/2}f(t) - \frac{1}{2}vx^{-1/2}\int^t g(y)dy - \tilde{h}(x) = 0. \qquad (IV.1.17)$$

Cada coeficiente correspondendo as diferentes potências de x e t terá que anular-se para que a expressão acima seja igual a zero. Isto nos levará aos seguintes valores para as variáveis arbitrárias:

$$g(t) \equiv 0, \qquad (IV.1.18.a)$$

$$f(t) = f_0, \qquad (IV.1.18.b)$$

$$\tilde{h}(x) = \frac{5}{2}vx^{1/2}f_0 + h_0, \qquad (IV.1.18.c)$$

$$h(t) = \frac{3}{2}v^2t + h_0. \qquad (IV.1.18.d)$$

O invariante que corresponde a estes valores, derivado da expressão (IV.1.1), com os valores para as funções:

$$D(x,t) = d_0, \tag{IV.1.19.a}$$

$$F(x,t) = f_0, \tag{IV.1.19.b}$$

$$G(x,t) = 3vx^{1/2}, \tag{IV.1.19.c}$$

$$H(x,t) = 2f_0vx^{1/2} + \frac{3}{2}v^2t + h_0, \tag{IV.1.19.d}$$

terá a forma:

$$I = \frac{d_0}{\dot{x}^3 + f_0\dot{x}^2 + 3vx^{1/2}\dot{x} + 2f_0vx^{1/2} + \frac{3}{2}v^2t + h_0}. \tag{IV.1.20}$$

Este invariante difere daquele apresentado na secção (II.2) por apresentar uma potência quadrada no momentum e o termo $2f_0vx^{1/2}$, que o invariante do caso (II.2.1.b) em (II.3) não contém. Contudo, estes dois termos adicionais estão associados à energia do sistema, ou seja:

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + vx^{1/2},$$

logo não representa um resultado novo.

C) Vamos supor agora os seguintes valores: $m = n = \frac{1}{2}, q = 1$ e $p = 0$. Isto leva a um potencial da forma:

$$V(x,t) = v_1x^{1/2}t + v_2x^{1/2}. \tag{IV.1.21}$$

que é o potencial apresentado na secção (II.3) do capítulo anterior, relacionado com o invariante geral (II.3.2), o qual contém as duas formas invariantes apresentadas em (II.2). Veremos aqui que não é possível encontrar um invariante mais geral que contenha as formas (IV.1.13) e (IV.1.20).

Com os valores acima definidos de m, n, q e p, temos:

$$G(x,t) = 3v_1x^{1/2}t + 3v_2x^{1/2} - \dot{f}(t)x + g(t), \tag{IV.1.22}$$

e duas formas para a função $H(x,t)$:

$$H(x,t) = 2f(t)(v_1 x^{1/2} t + v_2 x^{1/2}) - 2v_1 x^{3/2} + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2}$$
$$- \dot{g}(t)x + h(t), \qquad (IV.1.23.a)$$

$$H(x,t) = \frac{1}{2}v_1^2 t^3 + \frac{3}{2}v_1 v_2 t^2 + \frac{3}{2}v_2^2 t - \frac{1}{2}v_1 x^{1/2}\int^t \dot{f}(y) y\, dy - \frac{1}{2}v_2 x^{1/2}\int^t \dot{f}(y) dy$$
$$+ \frac{1}{2}v_1 x^{-1/2}\int^t g(y) y\, dy + \frac{1}{2}v_2 x^{-1/2}\int^t g(y) dy + \tilde{h}(x). \qquad (IV.1.23.b)$$

Como estas duas formas devem ser iguais, teremos a equação:

$$2f(t)(v_1 x^{1/2} t + v_2 x^{1/2}) - 2v_1 x^{3/2} + \ddot{f}(t)\frac{x^2}{2} - \dot{g}(t)x + h(t)$$
$$-\frac{1}{2}v_1^2 t^3 - \frac{3}{2}v_1 v_2 t^2 - \frac{3}{2}v_2^2 t + \frac{1}{2}v_1 x^{1/2}\int^t \dot{f}(y) y\, dy + \frac{1}{2}v_2 x^{1/2}\int^t \dot{f}(y) dy$$
$$-\frac{1}{2}v_1 x^{-1/2}\int^t g(y) y\, dy - \frac{1}{2}v_2 x^{-1/2}\int^t g(y) dy - \tilde{h}(x) = 0. (IV.1.24)$$

Novamente aqui temos que cada coeficiente em x e t deve ser identicamente nulo . Para tanto as funções $f(t)$,$\tilde{h}(x)$,$h(t)$ e $g(t)$ devem assumir os seguintes valores:

$$g(t) = 0, \qquad (IV.1.25.a)$$

$$f(t) = 0, \qquad (IV.1.25.b)$$

$$\tilde{h}(x) = -2v_1 x^{3/2} + h_0, \qquad (IV.1.25.c)$$

$$h(t) = \frac{1}{2}v_1^2 t^3 + \frac{3}{2}v_1 v_2 t^2. \qquad (IV.1.25.d)$$

O invariante (IV.1.1) assumirá a forma correspondente aos valores das funções:

$$D(x,t) = d_0, \qquad (IV.1.26.a)$$

$$F(x,t) = 0, \qquad (IV.1.26.b)$$

$$G(x,t) = 3v_1 x^{1/2} t + 3v_2 x^{1/2}, \qquad (IV.1.26.c)$$

$$H(x,t) = -2v_1 x^{3/2} + \frac{1}{2}v_1^2 t^3 + \frac{3}{2}v_1 v_2 t^2 + \frac{3}{2}v_2^2 t + h_0. \qquad (IV.1.26.d)$$

Então o invariante será:

$$I = \frac{d_0}{\dot{x}^3 + (3v_1 x^{1/2} t + 3v_2 x^{1/2})\dot{x} - 2v_1 x^{3/2} + \frac{1}{2}v_1^2 t^3 + \frac{3}{2}v_1 v_2 t^2 + \frac{3}{2}v_2^2 t + h_0}. \tag{IV.1.27}$$

Em resumo, para o potencial $V(x,t) = v_1 x^{1/2} t + v_2 x^{1/2}$, soma dos dois potenciais $V_1 = v_1 x^{1/2} t$ e $V_2 = v_2 x^{1/2}$, para os quais já conhecíamos os invariantes, encontramos um invariante mais geral (IV.1.27). Este invariante mais geral contém os dois exemplos de Goedert e Lewis, como discutido na secção (II.3).

Podemos notar também que nenhum dos três invariantes apresentados agora, nem os dois exemplos de Goedert e Lewis na secção (II.2), são verdadeiramente racionais . Eles são apenas os recíprocos de invariantes polinomiais.

A forma de $D(x,t)$, que deve ser apenas função de t, foi modificada para uma função de até potência dois em t, porém, em todos os casos, $D(x,t)$ sempre se reduziu ao seu caso mais simples, ou seja, igual a uma constante. Isto nos leva a pensar que não existe uma forma para $D(x,t)$ dependente de t nesta escolha de invariante (IV.1.1).

Conclusões

O objetivo deste trabalho foi investigar a existência de invariantes racionais para sistemas Hamiltonianos unidimensionais dependentes ou não do tempo, isto é, Hamiltonianos da forma $H(p,q,t) = \frac{1}{2}p^2 + V(q,t)$.

Para iniciar este trabalho começamos discutindo uma série de três artigos publicados por Lewis, Leach e Goedert [10,36,37]. Em seu trabalho, os três autores citados acima se propuseram a encontrar invariantes racionais partindo de uma forma para o invariante que é uma razão de dois polinômios. Após desenvolverem uma teoria bastante elaborada, eles chegam a uma série de equações integrodiferenciais, (II.2.5-6), que precisam ser resolvidas para se obter o invariante para um determinado potencial (veja, por exemplo, o sistema de equações gerado para os invariantes do tipo (II.1.37-39)). Estes sistemas de equações não são triviais de serem resolvidos. Isto pode ser observado de um exemplo apresentado pelos autores e que foi discutido na secção (II.2) do capítulo II deste trabalho. Os autores tentam chegar a um invariante racional com potências em p de ordem três, para dois potenciais, um dependente do tempo e o outro não, não obtendo ao final nenhum invariante verdadeiramente racional, mas apenas recíprocos de invariantes polinomiais.

No capítulo III discutimos a aplicação do método direto, apresentamos um invariante que é razão de um polinômio de grau 3 por um outro de grau p, neste caso chegamos a conclusão que não existem invariantes do tipo (III.2.1) para $p \geq 4$. Ainda neste capítulo, calculamos e discutimos dois invariantes que a primeira vista parecem ser racionais, mas que na realidade não são.

No capítulo IV, através do método direto, obtemos os resultados apresentados no capítulo II e uma forma mais geral de invariante contendo estes resultados, que, a princípio, não é uma solução trivial.

O sistema de equações gerado a partir de nossa forma de invariante é bastante simples se comparado com o sistema de equações que precisa ser resolvido dado no capítulo II. A teoria desenvolvida no capítulo III é bastante direta e não envolve cálculos matemáticos elaborados. No capítulo IV encontramos um invariante mais geral, que contém como casos particulares os resultados (II.2.1.a-b) dados na literatura. Este invariante foi obtido para um potencial que é uma soma dos potenciais correspondendo aos invariantes (II.2.1.a-b).

Como contribuição, este trabalho trouxe um novo resultado de invariante para um sistema Hamiltoniano unidimensional definido na equação (IV.1.27). A obtenção de invariantes verdadeiramente racionais permanece um problema aberto.

Apêndice

Neste apêndice apresentamos o programa que foi utilizado para chegarmos aos coeficientes de x e t das equações (IV.1.2), eles foram gerados em um computador IBM 4341 usando a linguagem de manipulação algébrica REDUCE 3.2 . O programa é dado a seguir:

Programa:

```
OFF NAT$ LINELENGTH 70$

COMMENT     PROGRAMA $
COMMENT     ESTUDO DE INVARIANTES RACIONAIS - TEMPO=A$

ARRAY COFX(10),COFA(10)$
PROCEDURE EQUACOES(INVAR)$ BEGIN SCALAR KONT$
NXMAX:=COEFF(INVAR(X(COFX)$
FOR JJ := 0:NXMAX DO
BEGIN
NYMAX := COEFF( COFX(JJ),A,COFA)$
   FOR LL := 0:NYMAX DO
      IFCOFA(LL) NEQ 0 THEN
        BEGIN   KONT := KONT + 1$
        CFT(KONT) := COFA(LL)$
        END$
   END$
FOR III := 10KONT do WRITE CFT(   ,III,   )=   ,CFT(III)$
RETURN KONT   $
END$

OPERATOR CC,DD,HH,EQN,CFT$
GMAX := 3$                    C:=D:=H:=0$
FOR J := 0:GMAX DO C:= C+CC(J)*A**J$
  FOR I := 0:GMAX DO
```

```
  FOR J:= 0:GMAX DO IF I+J LEQ GMAX THEN
 BEGIN
  D := D+DD(I,J)*X**I*A**J$
  H := H+HH(I,J)*X**I*A**J$
END$
C;D;H;
HX := DF(H,X)$
HT := DF(H,T)$
DX := DF(D,X)$
DT := DF(D,T)$
CX := DF(C,X)$
CT := DF(C,T)$

FACTOR X,A$
EQN(1) := CX;
EQN(2) := C*HX-CT-DX;
EQUACOES(  EQN(2)  );
EQN(3) := C*HT+D*HX-DT-H*DX-H*CT;
EQUACOES(  EQN(3)  );

COMMENT - VALOR DO POTENCIAL$
VX := (H*DT-D*HT)/(H*C-D)$
V := INT(VX,X);
END$
```

Bibliografia

1. W. Sarlet, L. Y. Bahar, Inter. J. Non-Linear Mech. 15 (1980) 133.
2. J. Hietarinta, Phys. Rev. Lett., 52 (1984) 1057.
3. J. R. Ray, J. Math. Phys. A13 (1980) 1969.
4. J. S. Hall, Physica 8D (1983) 90.
5. W. Sarlet, Phys. Lett. A82 (1981) 161.
6. C. R. Holt, J. Math. Phys. 23 (1982) 1037.
7. M. R. Feix, H. R. Lewis, J. Math. Phys. 26 (1985) 68.
8. H. R. Lewis, P. G. Leach, J. Math. Phys. 23 (1982) 2371.
9. P. G. Leach, H. R. Lewis, W. Sarlet, J. Math. Phys. 25 (1984) 486.
10. H. R. Lewis, P. G. Leach, Annals of Phys. 164 (1985) 47.
11. M. R. Feix, S. Bouquet, H. R. Lewis, Physica, 28D (1987) 80.
12. A. Gautier, *Essai historique sur le problème des trois Corps* (Paris, 1817).
13. G. Schmidt, *Physics of high temperature plasmas*, 2^{nd} ed. (New York, Academic Press, 1979).
14. H. R. Lewis Jr., J. Math. Phys. 9 (1968) 1976.
15. R. Grant, *History of physical astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century* (London, 1852).
16. E. T. Whittaker, *Report on the Progress of the evolution of the Problem of Three Bodies* (London, Brit. Ass. Rep. 1899).
17. E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4*th* ed. (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1937).
18. M. Kruskal, J. Math. Phys. 3 (1962) 806.
19. P. G. L. Leach, J. Math. Phys. 18 (1977) 1608.
20. M. Lutzky, J. Phys. A 12 (1979) 973.
21. N. J. Günther, P. G. L. Leach, J. Phys. 18 (1977) 572.
22. N. J. Günther, P. G. L. Leach, J. Math. Phys. 18 (1977) 572.

23. J. R. Ray, J. L. Reid, Phys. Lett. 74A (1979) 23.

24. A. B. Nassar Phys. Rev. A 32 (1985) 1862.

25. R. S. Kauchal, H. J. Korsch, J. Math. Phys. 22(9) (1981) 1904.

26. H. R. Lewis Jr., W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. 10 (1969) 1458.

27. D. C. Khandekar, S.V. Lawande, J. Math. Phys. 20 (1979) 1870.

28. V. P. Ermakov, Univ. Izv. Kiev 20 No. 9 (1880) 1.

29. H. R. Lewis Jr., Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 510.

30. M. Lutzky, J. Phys. A11 (1978) 249.

31. M. Lutzky, Phys. Lett. A68 (1978) 3.

32. J. Hietarinta, Phys. Rep. (1987) 89.

33. P. L. Leach, H. R. Lewis, W. Sarlet, J. Math. Phys. 25 (1984) 486. = 7.

34. H. R. Lewis, P. G. Leach, J. Math. Phys. 23 (1982) 2371. = 8

35. M. R. Feix, S. Bouquet, H. R. Lewis, Physica 28D (1987) 80. 11

36. J. Goedert, H. R. Lewis, J. Math. Phys. 28 (1987) 728.

37. J. Goedert, H. R. Lewis, J. Math. Phys. 28 (1987) 736.

38. W. Sarlet, Phys. Lett. A82 (1981) 161.

39. W. Sarlet, L. Y. Bahar, Int. Non-Linear Mech. 16 (1981) 271.

40. J. R. Ray, Phys. Lett. A 78 (1980) 4.

41. G. E. Prince, C. J. Eliezer, J. Phys. A 13 (1980) 815.

42. H. R. Lewis, Phys. Rev. 172 (1968) 1313.

43. P. G. L. Leach, J. Math. Phys. 22 (1981) 465.

44. I. C. Moreira, Hadronic Journal 7 1984) 475.