

**ESTUDO DE INVARIANTES EM SISTEMAS DINÂMICOS
CONTÍNUOS E NÃO-LINEARES**

MÁRCIA TIBÚRCIO FONTENELLE

DISSERTAÇÃO

**Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Físico-Química
da Universidade Federal de Santa Catarina
para obtenção de grau de**

MESTRE EM CIÊNCIAS

UFSC

Florianópolis, março de 1989

**ESTUDO DE INVARIANTES EM SISTEMAS DINÂMICOS
CONTÍNUOS E NÃO-LINEARES**

Márcia Tibúrcio Fontenelle

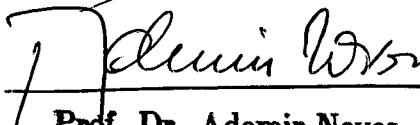
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

Especialização Físico-Química e aprovada em sua forma final pelo

Curso de Pós-Graduação em Físico-Química da UFSC

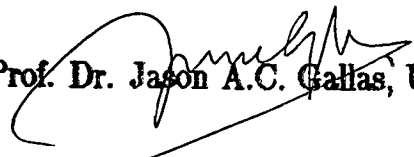

Prof. Dr. Jason A.C. Gallas
Orientador


Prof. Dr. Ademir Neves
Coordenador

Banca examinadora:


Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, USP.


Prof. Dr. Fernando Cabral, UFSC.


Prof. Dr. Jason A.C. Gallas, UFSC.

Resumo

No presente trabalho investigamos vários aspectos relacionados com a existência de invariantes em sistemas dinâmicos contínuos e não-lineares. Apresentamos relações de recorrência para gerar os termos presentes nas densidades e fluxos da equação de Korteweg-de Vries e nas densidades da equação modificada de Korteweg-de Vries. Nossas relações são baseadas na observação empírica de que, para um dado rank r , o conjunto $\{P_{2r}\}$ de todas as partições do inteiro $2r$ contém todos os monômios de $\{X_{r-1}\}$ e $\{T_r\}$. As relações são facilmente implementáveis em máquinas capazes de efetuar manipulações algébricas. Obtivemos, através de nossas relações de recorrência, quatro novos invariantes para a equação de Korteweg-de Vries e três para a equação modificada de Korteweg-de Vries. Testamos a validade de conjecturas estabelecidas recentemente por Torriani [1986] usando análise combinatorial.

Além disso, analisamos três métodos encontrados na literatura recente para a obtenção de constantes de movimento de equações de evolução não-lineares. São eles: uma relação entre constantes de movimento e equações variacionais [Case, 1985]; um procedimento para obtenção de constantes de movimento associadas a cada simetria de Lie da equação diferencial que descreve o sistema [Prince & Eliezer, 1981]; e a obtenção de novas constantes a partir de constantes conhecidas usando os operadores das transformações infinitesimais que deixam a equação de evolução invariante [Moreira, 1986 e Moreira, Ritter & Santos, 1985]. São feitas aplicações destes métodos a equações conhecidas com ênfase em física atômica e óptica quântica.

Abstract

In this work we investigate several aspects related to the existence of invariants in nonlinear and continuous dynamical systems. We present recurrence relations that generate all terms in the densities and fluxes of KdV and mKdV equations. Our relations are based on the empirical observation that for a given rank r the set $\{P_{2r}\}$ of all partitions of the integer $2r$ contains all monomials in $\{X_{r-1}\}$ and $\{T_r\}$. The recurrence relations can be easily implemented in computers able to perform algebraic calculations. Using these recurrence relations we obtained four new invariants for the KdV equation and three for the mKdV equation. We also tested the validity of the conjectures recently reported by Torriani [1986] using combinatorial analysis.

In addition to this, we studied three recently published methods to generate constants of motion for nonlinear evolution equations. They are: a relationship between constants of motion and variational equations [Case, 1985]; a procedure to obtain constants of motion associated with each Lie symmetry of partial differential equation describing the system [Prince & Eliezer, 1981]; the obtention of new constant from known ones, using operators that represent infinitesimal transformations that leave the evolution equation invariant [Moreira, 1986 and Moreira, Ritter & Santos, 1985]. We apply all these methods to known equations, with particular emphasis on atomic and quantum optics.

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. O papel dos invariantes em dinâmica não linear | 1 |
| 2. Invariantes para sistemas contínuos (KdV & mKdV) | 7 |
| 2.1 Leis de conservação | 8 |
| 2.2 Método combinatorial | 11 |
| 2.3 Relações de recorrência | 14 |
| 2.4 Novos invariantes | 17 |
| 3. A teoria de Lie | 20 |
| 3.1 Teoria | 21 |
| A. Caso especial de 1 variável dependente e 2 independentes | 21 |
| B. Invariância em geral | 23 |
| 3.2 Exemplos simples | 25 |
| A. Exemplo 1: equação do calor | 25 |
| B. Exemplo 2: equação de KdV | 28 |
| 3.3 Grupos de simetrias de algumas equações conhecidas | 31 |
| A. Equação de Schrödinger não-linear | 31 |
| B. Equações de Maxwell-Bloch reduzidas | 32 |
| C. Equação de KdV generalizada | 34 |
| D. Efeito Zeeman quadrático | 34 |
| E. Equações do tipo $u_t - u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ | 36 |
| 4. Outros resultados | 38 |
| 4.1 Constantes de movimento e as equações variacionais | 38 |
| 4.2 Simetrias e leis de conservação | 41 |
| Conclusões | 48 |
| Apêndices | 51 |
| A. Invariantes para a KdV | 51 |
| B. Invariantes para a mKdV | 78 |
| C. Derivada funcional | 81 |
| D. Programas REDUCE | 84 |
| Referências | 92 |

Capítulo 1

O papel dos invariantes em dinâmica não-linear

Apesar de a maioria dos fenômenos físicos não serem lineares, i.e. os efeitos não serem diretamente proporcionais às causas, a dinâmica não-linear só passou a ser estudada com mais profundidade mais recentemente. Até então o que se fazia era aproximar as equações dinâmicas para casos onde os termos não-lineares pudessem ser desprezados. Podemos citar, como ilustração, o problema do pêndulo simples como é tratado nos livros de Mecânica Clássica [p. ex. Symon, 1960], onde é usual substituir-se o termo não-linear $\sin \theta$ pelo linear θ .

O problema de lidar com sistemas dinâmicos não-lineares é que, neste caso, a soma de quaisquer duas soluções em geral não é uma nova solução do sistema, ou seja, o princípio da superposição não é mais válido. Desta forma, não há métodos analíticos gerais para resolver equações não-lineares. E isto não é surpreendente já que o princípio da superposição é o responsável pelos métodos sistemáticos como, por exemplo, análise de Fourier, usados para resolver essencialmente qualquer problema linear. Portanto, para investigar sistemas dinâmicos não-lineares torna-se útil o conhecimento de algumas propriedades suas, tais como quantidades cujo valor é conservado durante a evolução temporal do sistema. Ou seja, a integrabilidade do sistema dinâmico.

Antes de prosseguir, é bom relembrar alguns conceitos básicos sobre integrais de movimento e integrabilidade em sistemas hamiltonianos [†]. Seja $H = H(p, q)$ um sistema hamiltoniano com N graus de liberdade. Dizemos que uma função arbitrária $F(p, q)$ é uma *integral de movimento* (também chamada de *primeira integral*) se e somente se ela estiver em “involução” com o hamiltoniano, ou seja, se e somente se

$$[H, F] = 0,$$

onde os colchetes $[,]$ representam os *colchetes de Poisson*. O conceito de integral de movimento é útil porque nos permite usar $F(p, q)$ para diminuir a ordem do sistema

[†] Maiores detalhes sobre integrais de movimento e integrabilidade de sistemas hamiltonianos podem ser obtidos no livro de V.I. Arnold [1978], capítulo 10.

2 Capítulo 1: O papel dos invariantes em dinâmica não-linear

de equações diferenciais que descrevem o movimento. Num sistema arbitrário de equações diferenciais uma integral diminui a ordem do sistema em uma unidade. Em sistemas hamiltonianos uma integral pode reduzir a ordem do sistema em duas unidades. É por isto que torna-se possível integrar sistemas hamiltonianos por quadraturas quando existirem exatamente N integrais de movimento F_1, F_2, \dots, F_N em involução:

$$[F_i, F_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Um sistema hamiltoniano com N graus de liberdade é portanto dito *integrável* quando for possível encontrar N funções F_1, F_2, \dots, F_N em involução entre si e com o hamiltoniano. Deste fato vemos que a questão da redução de um problema em Mecânica Analítica a quadraturas pode ser reduzido à procura de um número suficiente de integrais de movimento. Na literatura é usual referir-se a integrais de movimento através de vários nomes: constantes de movimento, invariantes, integrais primeiras, etc. No presente trabalho usaremos indistintamente todas as designações acima, sempre com o entendimento de que são sinônimos.

Sistemas dinâmicos não-lineares com N graus de liberdade, contudo, geralmente não são completamente integráveis e aqueles que o são formam um conjunto muito restrito mas extremamente importante. Ainda mais complicados, no mínimo *a priori*, são os sistemas dinâmicos não-lineares contínuos, como os fluidos. Neste caso é necessário definir-se as variáveis dinâmicas—tal como a densidade $\rho(x, t)$ —em todo ponto do espaço. Assim, o número de graus de liberdade torna-se infinito e as equações de movimento passam a ser equações diferenciais parciais não-lineares. Note que estes sistemas dinâmicos contínuos podem ser encarados como limites de sistemas discretos grandes e suas equações diferenciais parciais como limites de muitas equações diferenciais ordinárias acopladas. Isto pode ser facilmente visto considerando-se, por exemplo, o sistema dinâmico não-linear contínuo representado pela equação conhecida como *sine-Gordon*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \text{sen } \theta = 0, \quad (1.1)$$

onde a variável dependente $\theta = \theta(x, t)$ é uma medida da resposta do sistema na posição x e tempo t . A equação *sine-Gordon* tem muitas aplicações físicas, incluindo

descrições de cadeias de compostos magnéticos e linhas de transmissão formadas de junções Josephson de supercondutores. Na prática, o modo de lidar-se com sistemas deste tipo é introduzindo-se uma grade espacial discreta com espaçamento Δx , tal que a posição no n -ésimo ponto da grade é dada por $x_n = n\Delta x$, e definir $\theta_n(t) = \theta(x_n, t)$ para $n = 1, 2, \dots, N$. Através desta discretização do espaço é fácil chegar-se a um sistema de N equações diferenciais ordinárias acopladas

$$\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (\theta_{n+1}(t) - 2\theta_n(t) + \theta_{n-1}(t)) + \text{sen } \theta_n(t) \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2)$$

Estas equações representam um sistema dinâmico com um número *finito*, N , de graus de liberdade. Naturalmente, a equação *sine-Gordon* contínua é obtida no limite $N \rightarrow \infty$ e $\Delta x \rightarrow 0$. Um sistema dinâmico deste tipo, para ser completamente integrável, deve portanto ter infinitas constantes de movimento. O sistema descrito pela equação *sine-Gordon* contínua é completamente integrável [Kruskal, 1975].

Também é completamente integrável o sistema descrito pela equação diferencial parcial não-linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1.3)$$

conhecida como equação de Korteweg-deVries (KdV). Esta equação foi introduzida por Korteweg e deVries [1895] para descrever aproximadamente ondas de água se movendo num canal raso e estreito.

Como uma consequência de possuírem infinitas constantes de movimento, estas duas equações apresentam como possível solução estruturas localizadas chamadas *solitons*[†], ondas solitárias que não decaem com a evolução do tempo e, mesmo quando interagem com outras, preservam seu tamanho e forma. Sabe-se hoje que muitas outras equações não-lineares podem ter solitons como solução [Kruskal, 1975], mas foi na equação de Korteweg-deVries que os solitons foram observados pela primeira vez [Zabusky & Kruskal, 1965]. Além disso, dentro das equações diferenciais parciais não-lineares a equação de KdV é a mais simples matematicamente. Isto tem feito com que ela seja uma das equações não-lineares mais estudadas.

[†] Supõe-se que estas duas propriedades sejam complementares, no sentido de que uma implica na outra, contudo isto ainda não foi formulado rigorosamente muito menos provado [Kruskal, 1975 e Olver, 1979].

4 Capítulo 1: O papel dos invariantes em dinâmica não-linear

Em 1971 Gardner mostrou que a equação de KdV pode ser escrita tanto numa forma Hamiltoniana quanto Poissoniana. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [u, H] = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (1.4)$$

com

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x^2}{2} - \frac{u^3}{6} \right) dx \quad (1.5)$$

e o colchete de Poisson definido por

$$[F, G] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u} dx. \quad (1.6)$$

(índices denotam derivadas parciais e $\delta F/\delta u$ é a derivada funcional de F em relação a u [Apêndice C]).

Tasso [1979] observou que o formalismo proposto por Gardner podia ser generalizado através da substituição de $\frac{\partial}{\partial x}$ por um operador anti-simétrico* A do seguinte modo:

$$[F, G] = \int_L dx \frac{\delta F}{\delta u} A \frac{\delta G}{\delta u}, \quad (1.7)$$

relacionado às equações de evolução da forma, mais geral que a KdV,

$$u_t = A \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (1.8)$$

onde o hamiltoniano H é uma função de u e L é o intervalo unidimensional de integração (na maioria dos casos, $[-\infty, \infty]$). Este formalismo de Poisson estendido, equação (1.7), foi aplicado por Caldas & Tasso [1979] a uma classe mais particular de equações que (1.8), mas mais geral que a KdV:

$$B u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (1.9)$$

onde B é um operador simétrico, com um inverso e satisfaz a relação de comutação

$$B \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} B,$$

* B é operador simétrico (ou hermitiano) se: $fBg = (Bf)g$. A é anti-simétrico (ou anti-hermitiano) quando $fAg = -(Af)g$.

neste caso $A = B^{-1} \frac{\partial}{\partial x}$. Comparando (1.9) e (1.4) percebe-se que, quando $B = 1$ e H é da forma (1.5), a equação (1.9) reduz-se à KdV.

Para equações do tipo (1.9) Caldas & Tasso mostram a existência de três invariantes

$$F_1 = \int_L dx Bu, \quad (1.10)$$

$$F_2 = \int_L dx uBu, \quad (1.11)$$

$$F_3 \equiv H. \quad (1.12)$$

Para sistemas dados pela equação (1.9), eles mostraram ser ainda possível encontrar-se um quarto invariante, dado por

$$G = \int_L dx (xBu + tuBu), \quad (1.13a)$$

desde que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\int_L dx \frac{\delta H}{\delta u} = \int_L dx uBu. \quad (1.13b)$$

Além da KdV, outro caso de equação do tipo (1.9) é a equação de onda longa regularizada ou BBM,

$$u_t - u_{xxt} = uu_x. \quad (1.14)$$

A equação de BBM é obtida a partir de (1.9) tomando-se $B = 1 - \partial_x^2$ e

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{u^3}{6}.$$

Proposta por Benjamin, Bona & Mahony [1972] a partir das mesmas aproximações e suposições feitas para a KdV, a equação de BBM pode ser igualmente justificada como um modelo para os mesmos fenômenos, com vantagens técnicas do ponto de vista de teoremas de existência, unicidade e estabilidade. Por isso a validade da equação de KdV tem sido questionada por Benjamin e os outros em favor de sua equação. Porém muitas das propriedades matemáticas da KdV não são conhecidas

6 Capítulo 1: O papel dos invariantes em dinâmica não-linear

para a BBM, como é o caso das soluções solitônicas [Kruskal, 1975 e Olver, 1979]. Ao contrário da KdV, são conhecidos apenas 3 invariantes para a BBM, justamente F_1 , F_2 e F_3 dados pelas eqs (1.10–12) [Olver, 1979].

É importante salientar que a equação de BBM é mais complicada matematicamente que a KdV já que contém um termo com as derivadas cruzadas (u_{xxt}). Este fato dificulta a obtenção de invariantes, pois os métodos utilizados para a KdV não são eficientes, sendo necessários, neste caso, novos métodos. Um problema interessante é determinar para que classe de equações do tipo (1.9) [principalmente aquelas contendo derivadas cruzadas] existem constantes de movimento além de F_1 , F_2 e F_3 , equações (1.10–12). Note que a constante G , equação (1.13a) só existe para casos muito especiais onde a condição (1.13b) é satisfeita. *Nosso trabalho é um passo inicial para a solução deste problema.* Começamos estudando os invariantes de equações diferenciais parciais conhecidas e os diversos métodos de obtê-los.

Esta dissertação foi organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 é feito um estudo dos invariantes para sistemas contínuos, mais especialmente aqueles descritos pelas equações de KdV e KdV modificada (mKdV). Discutimos um método combinatorial para geração destes invariantes, proposto na literatura recente, e apresentamos relações de recorrência capazes de gerar automaticamente (com o uso de computadores) os invariantes da KdV e mKdV. O Capítulo 3 foi escrito para introduzir a teoria de Lie de grupos contínuos de transformações. A intenção é criar uma base para a discussão, no Capítulo 4, de três trabalhos da literatura onde são obtidas constantes de movimento para sistemas dinâmicos. Os Apêndices A e B contêm todos os invariantes para as equações de KdV e mKdV por nós obtidos através das relações de recorrência do Capítulo 2. O Apêndice C é uma breve revisão do conceito e propriedades de derivada funcional. Os programas escritos em REDUCE para gerar os invariantes para a KdV e mKdV são listados e comentados no Apêndice D.

Capítulo 2

Invariantes para sistemas contínuos (KdV & mKdV)

Sistemas contínuos com uma variável dependente do tempo— $u(x, t)$ —definida em cada ponto do espaço unidimensional, podem ser descritos genericamente através de uma equação diferencial do tipo

$$u_t = F[u] = \tilde{F}(u, u_x, u_{xx}, \dots). \quad (2.1)$$

Para tais equações podemos escrever leis de conservação de uma forma similar à equação de continuidade, onde a taxa de variação temporal da densidade mais a divergência do fluxo é igual a zero,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

implicando na conservação da massa,

$$M = \int \rho dV = \text{constante}.$$

(A demonstração deste fato é simples porém um pouco extensa. Sugerimos ao leitor interessado consultar Symon 1960, cap. 8, seção 8.8). Analogamente, leis de conservação para equações do tipo (2.1) levam a invariantes temporais. A seguir mostraremos com um pouco mais de detalhe como isto acontece.

2.1 Leis de conservação.

As leis de conservação mais estudadas para sistemas dinâmicos descritos pela equação (2.1) são da forma

$$T_t + X_x = 0, \quad (2.2)$$

onde T e $-X$ são chamados de *densidade* e *fluxo*, respectivamente. T e X são funções de x , t , u e das derivadas de u . Na maior parte do capítulo trataremos apenas o caso em que X e T são polinômios em u e suas derivadas. Esta situação cobre a quase totalidade dos resultados conhecidos [Miura, Gardner & Kruskal, 1968].

É bom salientar a existência de leis de conservação triviais: quando T é uma derivada em relação a x de alguma função G ($T = G_x$) tem-se uma lei de conservação *trivial* já que, neste caso X pode ser facilmente obtido: $X = -G_t$, implicando obviamente em

$$(G_x)_t + (-G_t)_x = 0.$$

Cada lei de conservação produz um invariante temporal

$$I \equiv \int_L T dx, \quad (2.3)$$

onde L é o intervalo em x onde estão definidas as soluções u da equação (2.1). É fácil ver que I acima é invariante integrando-se a equação (2.2) em x :

$$\int_L \frac{\partial T}{\partial t} dx + X|_L = 0.$$

O segundo termo do lado esquerdo desta equação é zero para soluções periódicas em x ou que se anulem rapidamente nos extremos do intervalo L como geralmente ocorre em aplicações físicas, resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_L T dx = 0.$$

A própria equação de KdV, $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, pode ser escrita como uma lei de conservação,

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right)_x = 0. \quad (2.4)$$

Neste caso $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = 0$ corresponde à conservação da massa. Também a equação modificada de KdV pode ser escrita desta forma:

$$\begin{aligned} v_t + v^2 v_x + v_{xxx} &= \\ v_t + \left(\frac{1}{3}v^3 + v_{xx}\right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uma segunda lei de conservação para a KdV pode ser obtida diretamente da equação, multiplicando-a por u e reescrevendo-a do seguinte modo

$$\begin{aligned} uu_t + u^2 u_x + uu_{xxx} &= \\ \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde o invariante temporal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 \, dx$ implica fisicamente na conservação do momentum. O mesmo pode ser feito para a mKdV.

Durante o desenvolvimento de um estudo variacional de equações diferenciais parciais não-lineares, Whitham [1965] descobriu uma terceira lei de conservação para a KdV:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{3}u^3 - u_x^2, \\ X_3 &= \frac{1}{4}u^4 + u^2 u_{xx} - 2uu_x^2 - 2u_x u_{xxx} + u_{xx}^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

o que leva à conservação da energia $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{3}u^3 - u_x^2\right] \, dx$.

Leis de conservação adicionais (T_4 e T_5) foram encontradas por Kruskal & Zabusky [1967] durante o estudo de uma conjectura de que as soluções das equações de KdV e KdV modificada estariam relacionadas entre si. (Tal conjectura foi efetivamente demonstrada por Miura [1968].)

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{4}u^4 - 3uu_x^2 + \frac{9}{5}u_{xx}^2, \\ T_5 &= \frac{1}{5}u^5 - 6u^2 u_x^2 + \frac{36}{5}uu_{xx}^2 - \frac{108}{35}u_{xxx}^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

[X_4 e X_5 são relativamente extensos e encontram-se no Apêndice A, equações (A.8) e (A.10)]

Miura, Gardner & Kruskal [1968] calcularam mais cinco densidades, T_6, T_7, T_8, T_9 e T_{10} , para a KdV e seis para a mKdV conjecturando a existência de infinitas leis de conservação para estas duas equações. A demonstração desta conjectura ainda permanece em aberto.

Com o objetivo de sistematizar a discussão de invariantes vamos agora definir o que se entende por *rank de um monômio*. Para tanto utilizaremos a notação u_j para representar $\partial^j u / \partial x^j$ ($j \geq 0$, inteiro e $u_0 \equiv u$), bem como a palavra *monômio* para designar uma expressão da forma $u_0^{a_0} u_1^{a_1} \dots u_l^{a_l}$, onde l, a_0, a_1, \dots, a_l são números inteiros não-negativos. O *rank* de um monômio é definido como o número de fatores u_0, u_1, u_2, \dots mais a metade do número de diferenciações, i.e. $r = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots)$. Por exemplo, o rank do monômio u_2^2 (último termo em T_4) é $r = 2 + \frac{1}{2}(2 \times 2) = 4$; do monômio $u_0^2 u_1^2$ é $r = 2 + 2 + \frac{1}{2}2 = 5$; para $u_1 u_3^3$ o rank é $r = 1 + 3 + \frac{1}{2}(1 + 3 \times 3) = 9$. O conceito de *rank* é especialmente importante já que um polinômio conservado, uma densidade, é uniforme com respeito ao rank, i.e. todos os seus termos têm o mesmo rank.

Para verificar a possível existência de leis de conservação adicionais, Kruskal *et al.* [Kruskal, Miura, Gardner & Zabusky, 1970] utilizaram dois procedimentos básicos:

- (i) MUC (*Method of Undetermined Coefficients*) que consiste em escrever T como uma combinação linear geral de todos os termos "irredutíveis" [veja artigo original] de mesmo *rank* e determinar os coeficientes;
- (ii) emprego da equação

$$T_r \approx (-1)^{r-1} \partial_r (K - r - 1)^{-1} \partial_t (K - r)^{-1} \partial_t \dots (K - 2)^{-1} \partial_t u_0 \quad (2.9)$$

para obter as densidades T_r . Nesta equação \approx significa "igualdade a menos da adição de um termo que é uma derivada total em x "; o efeito do operador K é multiplicar cada termo pelo número de seus fatores e diferenciações combinados: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots)$

É interessante observar que, como relatado pelos autores acima, tais procedimentos consomem quantidade considerável de tempo, além de porções não desprezíveis da memória do computador: o cálculo da oitava densidade excedeu a capacidade de 48 dígitos binários do computador então disponível (um computador AEC CDC-6600).

2.2 Método combinatorial.

Num trabalho bastante interessante Torriani [1986] recentemente mostrou como usar métodos combinatoriais para simplificar a obtenção de constantes de movimento para a equação de Korteweg-deVries e equações relacionadas. O processo por ele proposto consiste em associar *partições de inteiros* e seus *grafos de Ferrers* à primeira densidade T e ao primeiro fluxo $-X$ e então, através de regras simples, gerar as densidades e fluxos subsequentes.

Uma *partição* de um inteiro é uma divisão do inteiro em partes inteiras positivas (a ordem destas partes não é importante). Por exemplo, as cinco diferentes partições do inteiro 4 são $4, 3+1, 2+2, 2+1+1$ e $1+1+1+1$, que denotaremos de uma forma mais resumida como $4, 3 \cdot 1, 2 \cdot 1^2$ e 1^4 . Um *grafo de Ferrers* consiste de linhas de pontos, sendo tais pontos arranjados de modo que uma linha superior contenha no mínimo tantos pontos quanto uma linha inferior. Uma partição de um inteiro pode ser representada por um grafo de Ferrers fazendo-se cada linha no grafo corresponder a uma parte na partição, com o número de pontos na linha especificando o valor da parte correspondente. Por exemplo, a partição do inteiro 4 em $2 \cdot 1^2$ é representada pelo seguinte grafo de Ferrers:



Estes conceitos são utilizados em análise combinatorial [Liu, 1968].

Baseando-se em propriedades das densidades e fluxos conhecidos na literatura, Torriani [1986] enunciou duas conjecturas como possíveis geradoras dos monômios presentes em todas as densidades e fluxos da equação de KdV:

Conjectura 1. Seja $\{T_r\}$ o conjunto de monômios em T_r e seja \mathcal{T}_r o conjunto de grafos de Ferrers a eles associados. Então as seguintes regras produzem $\{T_r\}$ para todo $r \geq 1$.

(i) Comece com $\{T_1\} = \{u_0\}$ e \mathcal{T}_1 igual a, por exemplo, $\{\cdot \cdot\}$.

Para obter \mathcal{T}_{r+1} adicione dois pontos a cada membro de \mathcal{T}_r ($r \geq 1$) de tal modo que cada grafo resultante seja um grafo de Ferrers.

(ii) Toda linha e toda coluna de cada grafo de Ferrers resultante

2.3 Relações de recorrência.

O objetivo da presente seção é apresentar um dos resultados principais desta dissertação: um método alternativo para gerar os monômios presentes nas densidades e fluxos das equações KdV e mKdV. Este método consiste em relações de recorrência a partir das quais os monômios podem ser obtidos. Em contraste com todos os métodos desenvolvidos até o presente, nossas relações de recorrência são triviais de serem programadas em sistemas capazes de efetuar cálculos algébricos, tais como REDUCE, permitindo portanto a investigação de invariantes de ordem superior de um modo mais sistemático, bem como desenvolver métodos mais eficientes para atacar problemas não-lineares mais complicados do tipo genérico discutido no Capítulo 1.

Começemos pela equação de KdV. Denotaremos o conjunto de monômios em T_r por $\{T_r\}$, em X_r por $\{X_r\}$, etc. Nosso método é baseado nas seguintes observações, a partir das densidades disponíveis na literatura (veja seção 2.1):

- (i) para um dado rank r , o conjunto $\{P_{2r}\}$ de todas as partições do número $2r$ contém todos os monômios de $\{X_{r-1}\}$ e $\{T_r\}$, além de outros monômios;
- (ii) os monômios que pertencem a $\{P_{2r}\}$ mas não a $\{X_{r-1}\}$ formam o conjunto $\{Q_{2r}\}$; aqueles em $\{P_{2r}\}$ mas não em $\{T_r\}$ formam o conjunto $\{R_{2r}\}$;
- (iii) os conjuntos $\{P_i\}$ podem ser facilmente gerados recursivamente através de integrações em u e nas derivadas de u ;
- (iv) a geração de $\{Q_i\}$ e $\{R_i\}$ é idêntica à de $\{P_i\}$, i.e. todos os três conjuntos são obtidos de relações de recorrência idênticas mas com diferentes condições iniciais.

A Figura 1 mostra esquematicamente as observações (i) e (ii) acima. As observações (iii) e (iv) são facilmente entendidas através de um exemplo simples. Considere as partições 4 e 2^2 do inteiro 4, escritas na forma $u_2 + u_0^2$. Quando integramos estes dois monômios em u_0 obtemos $u_0 u_2 + u_0^3$ que são partições do inteiro 6 ($2 \cdot 4$ e 2^3).

Como o método gera apenas os monômios (e não os coeficientes numéricos), todas as integrações em u e suas derivadas podem ser efetuadas como simples multiplicações por u_j , onde j denota a ordem da derivada. Isto facilita as computações.

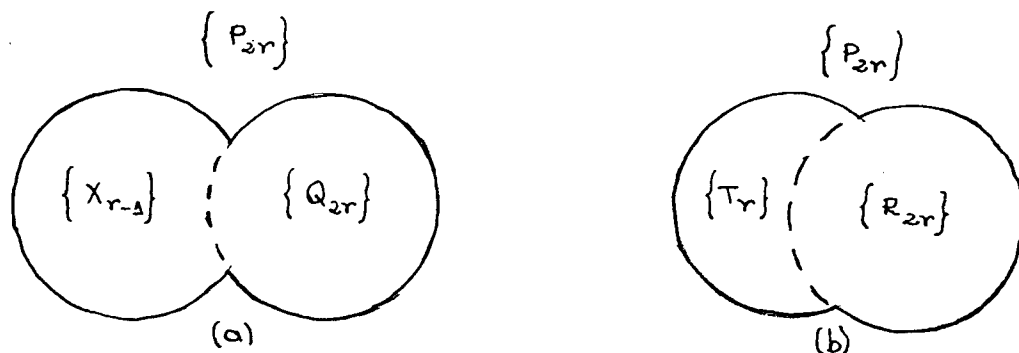


Figura 1 As duas maneiras possíveis de se decompor o conjunto $\{P_{2r}\}$: (a) $\{P_{2r}\} = \{Q_{2r}\} + \{X_{r-1}\}$; (b) $\{P_{2r}\} = \{R_{2r}\} + \{T_r\}$.

Assim, para $r \geq 2$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \{T_r\} &= \{P_{2r}\} - \{R_{2r}\}, \\ \{X_r\} &= \{P_{2r+2}\} - \{Q_{2r+2}\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

$$P_i = u_{i-2} + \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}(i-4)]} u_k P_{i-k-2}, \quad i \geq 4, \quad (2.11a)$$

$$Q_i = u_{i-2} + \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}(i-7)]} u_k Q_{i-k-2}, \quad i \geq 7, \quad (2.11b)$$

$$R_i = u_{i-2} + \sum_{k=0}^{[\frac{1}{2}(i-5)]} u_k R_{i-k-2}, \quad i \geq 5 \quad (2.11c)$$

e o símbolo $[x]$ representa o maior inteiro não superior a x . Os seguintes valores são necessários para inicializar as relações de recorrência: $P_2 = Q_2 = R_2 = u_0$, $P_3 = Q_3 = R_3 = u_1$, $Q_4 = R_4 = u_2$, $Q_5 = u_3$ e $Q_6 = u_4$.

Embora os coeficientes numéricos dos monômios nas equações (2.11) não tenham qualquer importância, achamos conveniente evitar soma de termos repetidos. Isto pode ser conseguido eliminando-se dos somatórios todos os produtos de u_k por monômios contendo u_j com $j < k$. Além de reduzir o tempo de processamento, isto faz com que todos os coeficientes numéricos sejam iguais a 1.

Através das relações de recorrência acima podemos agora gerar todos os monômios contidos nas densidades e fluxos para a equação de KdV. Tal como o

método combinatorial proposto por Torriani, nosso método produz todos e apenas aqueles monômios presentes nas densidades e fluxos da KdV.

Obviamente, para determinarmos as leis de conservação completas falta ainda determinar os coeficientes numéricos. Isto pode ser conseguido colocando-se coeficientes indeterminados para os monômios tanto da densidade como do fluxo de um mesmo r e, usando-se a condição $T_t + X_x = 0$, gerar um sistema de equações algébricas lineares tendo como incógnitas os próprios coeficientes.

Cabe ressaltar que uma dessas incógnitas não pode ser completamente definida pelo sistema, já que existe a liberdade da multiplicação por uma constante em qualquer lei de conservação. Isto significa que a solução do sistema é obtida através da determinação de todos os coeficientes em função de um deles. Seguindo Miura, Gardner & Kruskal [1968], escolhemos este coeficiente como sendo o coeficiente do termo de maior grau de T_r e seu valor foi arbitrado como $1/r$.

A Tabela 2 dá uma idéia de como o número de equações e o número de incógnitas (coeficientes de T e coeficientes de X) aumentam com r . Note que o número total de incógnitas cresce rapidamente a medida que r aumenta. Isto implica resolver sistemas de equações cada vez maiores.

| rank r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|--------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| nr. coef. T_{FB} | 1 | 2 | 4 | 7 | 12 | 21 | 34 | 55 | 88 | 137 | 210 |
| nr. coef. T_M | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 10 | 14 | 22 | 32 | 45 |
| nr. coef. X_{BF} | 2 | 4 | 7 | 12 | 21 | 34 | 55 | 88 | 137 | 210 | 320 |
| nr. coef. X_M | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 20 | 31 | 47 | 71 | 105 | 153 |
| total incógnitas | 2 | 3 | 6 | 10 | 16 | 26 | 40 | 60 | 92 | 136 | 197 |
| nr. equações | 2 | 3 | 6 | 10 | 16 | 27 | 42 | 64 | 99 | 148 | 216 |

Tabela 2 Número de incógnitas em T_r e X_r com rank $r \leq 11$. FB representa o número de todos os monômios que existem para um dado rank enquanto M dá o número efetivo de monômios presentes em T_r ou X_r quando gerado por nosso método. As últimas duas linhas dão o número total de incógnitas e de equações no sistema obtido pela substituição de T_M e X_M na equação (2.2). Para $r > 5$ o sistema é superdeterminado.

Agora, apesar de trivial, é bastante enfadonho verificar que nossas relações

de recorrência realmente reproduzem todos os monômios conhecidos, discutidos na seção 2.1.

As densidades para a equação modificada de KdV também podem ser obtidas a partir de relações de recorrência análogas às anteriores:

$$T_r = v_{r-1}^2 + \sum_{k=0}^{r-2} v_k^2 T_{r-k-1} + R_r, \quad r \geq 2 \quad (2.12)$$

onde $T_1 = v_0^2$, $R_r = 0$ para $r \leq 4$ e

$$R_r = v_{r-3}^2 v_0 v_2 + (1 - \delta_{r,5})(1 - \delta_{r,6}) v_{r-4}^2 (v_1 v_3 + (1 - \delta_{r,7}) v_0 v_4), \quad r \geq 5$$

sendo δ_{ij} a função delta de Kronecker.

Como antes, pode-se verificar facilmente que tais relações reproduzem todos os monômios das densidades conhecidas para a mKdV [Miura, Gardner & Kruskal, 1968].

2.4 Novos invariantes.

Nas seções anteriores apresentamos dois métodos (o de Torriani e um método novo por nós desenvolvido) para gerar os monômios presentes nas densidades e fluxos conhecidos para a KdV, bem como aqueles presentes nas densidades conhecidas para a mKdV. Não é trivial estabelecer qual o grau de semelhança entre estes dois métodos. Tanto o método de Torriani quanto as nossas relações de recorrência geram com perfeição todos os monômios das densidades para a mKdV, até $r = 5$. [No Apêndice B apresentamos uma lista destas densidades e dos fluxos associados para a mKdV]. Apesar do aparente sucesso é importante ressaltar que a reprodução dos monômios conhecidos até $r = 5$ foi condição imposta para a própria obtenção dos métodos. Neste sentido, *ambos os métodos devem ser vistos apenas como um conjunto de conjecturas a serem testadas*. Na presente seção nos propomos a investigar a eficácia destes métodos na geração de novos invariantes. Para tanto, usando os dois métodos, geramos invariantes até $r = 15$ para a equação de KdV e até $r = 8$ para a mKdV. Obviamente, para testar a validade dos métodos, faz-se também necessário determinar os invariantes exatos, a partir da condição $T_t + X_x = 0$. Uma

lista de todos os invariantes determinados no presente trabalho pode ser encontrada nos Apêndices A (para a KdV) e B (para a mKdV).

Como não dispomos de um método para gerar os monômios dos fluxos para a mKdV, uma combinação linear geral de todos os monômios possíveis. Comparando-se os invariantes exatos com os obtidos através dos dois métodos observa-se que todos os monômios das densidades para a KdV são gerados corretamente tanto pelo método de Torriani como pelas nossas relações (2.10) e (2.11). Também não há diferenças entre os fluxos para $r \leq 10$. Porém, a partir de $r = 11$, ambos os métodos geram menos monômios do que os necessários. No caso das nossas relações, o conjunto $\{Q_{2r+2}\}$ é formado com mais elementos do que deve. A Figura 2 mostra esta situação esquematicamente:

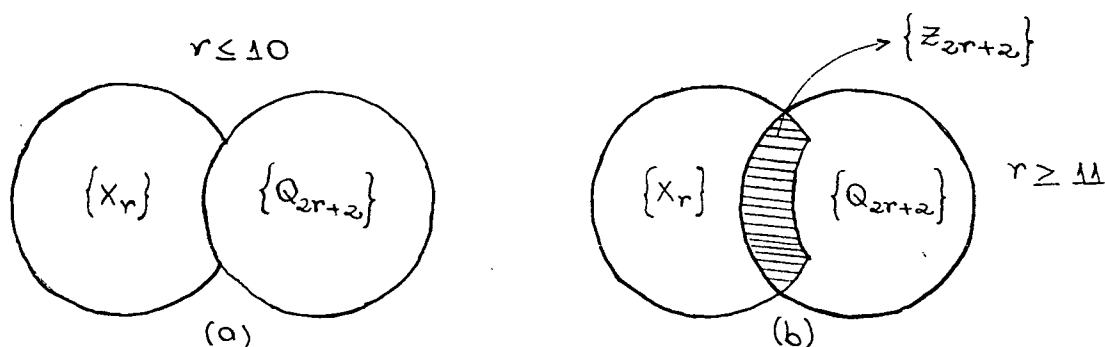


Figura 2 (a) Situação para $r \leq 10$, mostrada na Figura 1. (b) Para $r \geq 11$ a intersecção de $\{X_r\}$ com $\{Q_{2r+2}\}$, que chamaremos de $\{Z_{2r+2}\}$, deixa de ser um conjunto vazio.

Da Tabela 3 vê-se que o número de monômios em $\{Z_{2r+2}\}$ cresce rapidamente. Acreditamos ser possível estabelecer uma relação de recorrência capaz de gerar os monômios faltantes em $\{X_r\}$, ou seja, o conjunto $\{Z_{2r+2}\}$. Entretanto o número de monômios aqui obtidos ainda é insuficiente para estabelecer tal relação de recorrência. [Note que o número de equações necessárias para determinar os invariantes “explode” a medida que o rank cresce (veja Tabelas 2 e 4)]. A determinação de novos invariantes a partir de combinações lineares gerais (*força bruta*) para serem usados como elemento de comparação requer, a julgar pela tendência na última linha da Tabela 4 e pelos números de coeficientes em T_{FB} e X_{FB} mostrados na Tabela 2, a solução de sistemas de equações com não menos que 1000 equações.

Assim sendo, optamos por deixar em aberto a determinação de eventual relação

| r | $\{Z_{2r+2}\}$ |
|-----|--|
| 11 | $u_0^5 u_8$ |
| 12 | $u_0 u_5^2 u_8 + u_5 u_6 u_9$ |
| 13 | $u_0^2 u_5^2 u_8 + u_0 u_5 u_6 u_9 + u_2 u_5^2 u_8 + u_6^2 u_{10} + u_5 u_7 u_{10}$ |
| 14 | $u_0^3 u_5^2 u_8 + u_0^2 u_5 u_6 u_9 + u_0 u_2 u_5^2 u_8 + u_0 u_6^2 u_{10} + u_0 u_5 u_7 u_{10} + u_1^2 u_5^2 u_8 + u_1 u_6^2 u_9 + u_2 u_5 u_6 u_9 + u_4 u_5^2 u_8 + u_6 u_7 u_{11} + u_5 u_8 u_{11} + u_7^2 u_{10}$ |

Tabela 3 Monômios que faltam nos fluxos quando estes são gerados pelo método combinatorial ou pelas relações de recorrência (2.10–11).

| rank r | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------------------|-----|-----|-----|-----|
| nr. coef. T | 67 | 95 | 134 | 192 |
| nr. coef. X | 227 | 330 | 477 | 684 |
| total incógnitas | 293 | 424 | 610 | 875 |
| nr. equações | 323 | 470 | 676 | 971 |

Tabela 4 Os números acima se referem ao sistema algébrico linear quando todos e apenas os monômios presentes em T_r e X_r são usados, ou seja, não se referem a combinações lineares gerais (*força bruta*), cujos números seriam muito maiores.

de recorrência para $\{Z_{2r+2}\}$ e passamos a nos dedicar a um *approach* alternativo para investigar a integrabilidade de sistemas dinâmicos, que é nosso objetivo principal.

Capítulo 3

A teoria de Lie

Como mencionado no capítulo anterior, desejamos agora partir para o estudo de métodos alternativos para investigar a integrabilidade de sistemas dinâmicos. Como grande parte dos estudos sobre integrabilidade de sistemas dinâmicos são baseados na teoria de grupos de transformações contínuos (grupos de Lie), dedicamos este capítulo a uma apresentação da teoria de Lie.

No fim do século passado Sophus Lie [1891] tentou sistematizar a integração de equações diferenciais a partir da invariância destas equações sob grupos contínuos de transformações (ou *simetrias*). Do ponto de vista prático, a importância destes grupos de transformações vem da possibilidade de usá-los para abaixar a ordem das equações diferenciais ordinárias ou diminuir o número de variáveis nas equações diferenciais parciais, através da construção de constantes de integração. O método adquire, além disso, uma especial importância de um ponto de vista físico já que neste contexto as constantes e simetrias têm, frequentemente, uma interpretação prática.

Na seção 3.1 apresentamos um resumo da teoria de Lie para o caso de uma equação diferencial com duas variáveis independentes e uma dependente e, logo a seguir, generalizamos os resultados. Na seção 3.2 são resolvidos 2 exemplos simples, como aplicação dos resultados da primeira seção. Na terceira e última seção damos as simetrias de diversas equações conhecidas. Nesta seção, os resultados B, D e E são contribuições originais nossas. Note que as equações (3.36) e (3.39), contendo as derivadas cruzadas u_{xt} e u_{xxt} , são mais complicadas que as da família da KdV.

3.1 Teoria.

Nesta seção introduzimos a teoria de Lie para equações diferenciais com duas variáveis independentes e, logo a seguir, fazemos a generalização para qualquer número de variáveis.

Para evitar trechos cansativos retiramos dos cálculos passos simples porém longos. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes em Bluman & Cole [1974].

A. Caso especial de 1 variável dependente e 2 independentes.

Considere uma equação diferencial parcial com uma variável dependente u e duas variáveis independentes x e t :

$$\omega(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

onde os índices x, t, xx, \dots representam diferenciações parciais.

Desejamos submeter esta equação diferencial a um conjunto de transformações das variáveis x, t, u :

$$\tilde{x} = f(x, t, u, \epsilon), \quad \tilde{t} = g(x, t, u, \epsilon), \quad \tilde{u} = h(x, t, u, \epsilon), \quad (3.2)$$

sujeito às condições iniciais

$$f(x, t, u, \epsilon = 0) = x, \quad g(x, t, u, \epsilon = 0) = t, \quad h(x, t, u, \epsilon = 0) = u,$$

de modo que a equação (3.1), quando transformada, seja formalmente idêntica à equação original. Para tanto, seguindo Lie [1891], expandimos (3.2) em torno de $\epsilon = 0$ obtendo a transformação infinitesimal

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon\xi(x, t, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{t} &= t + \epsilon\tau(x, t, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{u} &= u + \epsilon\eta(x, t, u) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

As funções ξ, τ e η são os infinitesimais das transformações das variáveis x, t e u , respectivamente.

Nosso objetivo é encontrar o grupo de transformações que deixa a equação diferencial (3.1) invariante, ou seja, determinar as funções ξ, τ e η . Para isto precisamos estender o grupo para calcular como as derivadas se transformam.

Usando a regra da cadeia é simples mostrar que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = u_x + \epsilon \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) u_x - \frac{\partial \tau}{\partial x} u_t - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_x^2 - \frac{\partial \tau}{\partial u} u_x u_t \right] + O(\epsilon^2).$$

Usaremos ζ_x, ζ_t para representar os infinitesimais de $\partial \tilde{u}/\partial \tilde{x}, \partial \tilde{u}/\partial \tilde{t}$, respectivamente.

Então

$$\zeta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) u_x - \frac{\partial \tau}{\partial x} u_t - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_x^2 - \frac{\partial \tau}{\partial u} u_x u_t$$

e, de forma similar,

$$\zeta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) u_t - \frac{\partial \xi}{\partial t} u_x - \frac{\partial \tau}{\partial u} u_t^2 - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_x u_t,$$

são, como chamaremos, a *primeira extensão*. A segunda extensão, $\zeta_{xx}, \zeta_{xt}, \zeta_{tt}$, assim como as subsequentes são obtidas analogamente.

Dizer que a equação (3.1) é invariante sob o grupo de transformações ξ, τ, η significa dizer que

$$\omega(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{xx}, \tilde{u}_{xt}, \tilde{u}_{tt}, \dots) = \omega(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots),$$

ou seja,

$$\omega(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_t, \tilde{u}_{xx}, \tilde{u}_{xt}, \tilde{u}_{tt}, \dots) = 0.$$

Como estamos considerando apenas a primeira ordem do parâmetro ϵ , temos

$$\omega(x + \epsilon \xi, t + \epsilon \tau, u + \epsilon \eta, u_x + \epsilon \zeta_x, u_t + \epsilon \zeta_t, u_{xx} + \epsilon \zeta_{xx}, u_{xt} + \epsilon \zeta_{xt}, u_{tt} + \epsilon \zeta_{tt}, \dots) = 0,$$

que pode ser escrita como

$$\omega(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) + \epsilon \left[\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial t} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial u} + \zeta_x \frac{\partial \omega}{\partial u_x} + \zeta_t \frac{\partial \omega}{\partial u_t} + \zeta_{xx} \frac{\partial \omega}{\partial u_{xx}} + \dots \right] = 0.$$

Desta forma, a condição para a invariância é:

$$\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial t} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial u} + \zeta_x \frac{\partial \omega}{\partial u_x} + \zeta_t \frac{\partial \omega}{\partial u_t} + \zeta_{xx} \frac{\partial \omega}{\partial u_{xx}} + \dots = 0. \quad (3.4)$$

A fim de encontrar os elementos infinitesimais ξ, τ, η que deixam a equação (3.1) invariante, nós substituímos os infinitesimais $\zeta_x, \zeta_t, \zeta_{xx}, \dots$ em (3.4). A equação resultante é tratada como um polinômio nas derivadas de u cujos coeficientes dependem das variáveis x, t, u e das incógnitas ξ, τ, η . Estes coeficientes devem ser iguais a zero para que toda a equação (3.4) seja zero, para todo x, t e qualquer solução $u(x, t)$ da equação diferencial.

B. Invariância em geral.

Vamos agora generalizar os resultados do item anterior para sistemas de equações diferenciais contendo um número arbitrário de variáveis dependentes e independentes. Mostraremos como calcular as extensões para qualquer ordem dos infinitesimais das transformações. Em todo o restante desta seção índices repetidos denotam somatório.

Considere um sistema ω_ν de N equações diferenciais, ordinárias ou parciais, denotado por

$$\omega_\nu(x_i, u^\alpha, u_{i_j}^\alpha, \dots, u_{i_1 \dots i_k}^\alpha) = 0, \quad \nu = 1 \dots N, \quad (3.5)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor de n componentes reais, identificado com as variáveis independentes; $u = (u^1, \dots, u^m)$ é o vetor de m componentes das funções de x , as variáveis dependentes;

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}, \quad u_{i_j}^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{e} \quad u_{i_1 \dots i_k}^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

são as derivadas em relação às variáveis independentes x .

A transformação nas variáveis x, u a que desejamos submeter o sistema de equações diferenciais (3.5) pode ser escrita genericamente como

$$\tilde{x} = f(x, u, \epsilon), \quad \tilde{u} = h(x, u, \epsilon). \quad (3.6)$$

Expandindo-a em torno de $\epsilon = 0$ obtemos a transformação infinitesimal

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_i + \epsilon \xi_i(x, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{u}^\alpha &= u^\alpha + \epsilon \eta^\alpha(x, u) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para resumir os cálculos das derivadas parciais em relação a x_i das funções que dependem de x_i e $u^\alpha(x_i)$ introduzimos o operador diferencial total:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (3.8)$$

Desta forma os infinitesimais $\zeta_i^\alpha, \dots, \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha$ podem ser gerados recursivamente através das relações

$$\begin{aligned} \zeta_i^\alpha &= D_i(\eta^\alpha) - u_i^\alpha D_i(\xi_s), \\ \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha &= D_{i_k}(\zeta_{i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha) - u_{i_1 \dots i_{k-1} s}^\alpha D_{i_k}(\xi_s). \end{aligned} \quad (3.9)$$

A condição para invariância, obtida de modo análogo a (3.4), é

$$\xi_i \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial \omega_\nu}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial \omega_\nu}{\partial u_i^\alpha} + \dots + \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha \frac{\partial \omega_\nu}{\partial u_{i_1 \dots i_k}^\alpha} = 0, \quad \nu = 1 \dots N. \quad (3.10)$$

É fácil perceber que a equação acima pode ser escrita na forma

$$U^{(k)} \omega_\nu = 0, \quad \nu = 1 \dots N, \quad (3.11a)$$

onde

$$U^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \dots + \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_k}^\alpha} \quad (3.11b)$$

é o operador da transformação infinitesimal para equações diferenciais de ordem k , ou seja, a k -ésima extensão do operador da transformação infinitesimal das variáveis x, u

$$U = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (3.12)$$

A aplicação do operador $U^{(k)}$ em cada equação do sistema, conforme (3.11a), dá um polinômio nas derivadas dos u^α que deve ser igual a zero. Fazendo os coeficientes das derivadas iguais a zero formamos um sistema de equações diferenciais parciais lineares para as funções (a serem determinadas) $\xi_i(x, u)$ e $\eta^\alpha(x, u)$. A solução geral deste sistema (quando existir) dá os *grupos de simetrias do sistema* (3.5). Na próxima seção mostraremos como fazê-lo em dois exemplos. A primeira aplicação, com a equação do calor, foi primeiramente desenvolvida pelo próprio Lie [1881]. Depois, usaremos a experiência adquirida neste primeiro para obter o grupo de simetrias de outro caso de 1 variável dependente e 2 independentes, a equação de Korteweg-deVries.

3.2 Exemplos simples.

A. Exemplo 1: equação do calor.

Como um primeiro exemplo, vamos determinar o grupo de simetrias da equação do calor,

$$u_t = u_{xx},$$

usando a teoria descrita na seção anterior. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\omega = u_{xx} - u_t = 0. \quad (3.13)$$

A transformação infinitesimal procurada é

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon \xi(x, t, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{t} &= t + \epsilon \tau(x, t, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{u} &= u + \epsilon \eta(x, t, u) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A equação do calor é de segunda ordem em x , portanto a condição para invariância sob a transformação (3.3) é

$$U^{(2)}\omega = 0,$$

ou seja,

$$\xi \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial t} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial u} + \zeta_t \frac{\partial \omega}{\partial u_t} + \zeta_x \frac{\partial \omega}{\partial u_x} + \zeta_{tt} \frac{\partial \omega}{\partial u_{tt}} + \zeta_{xx} \frac{\partial \omega}{\partial u_{xx}} + \zeta_{xt} \frac{\partial \omega}{\partial u_{xt}} = 0. \quad (3.14)$$

Substituindo a equação diferencial (3.13) em (3.14) temos

$$U^{(2)}\omega = \zeta_{xx} - \zeta_t = 0, \quad (3.15)$$

para todo t, x e qualquer solução $u(x, t)$, onde

$$\begin{aligned} \zeta_{xx} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) u_x - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} u_t + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} \right) u_x^2 \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial u} u_x u_t - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} u_x^3 - \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} u_x^2 u_t + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) u_{xx} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \tau}{\partial x} u_{xt} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial u} u_{xx} u_x - \frac{\partial \tau}{\partial u} u_{xx} u_t - 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} u_{xt} u_x \end{aligned} \quad (3.16a)$$

e

$$\zeta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) u_t - \frac{\partial \xi}{\partial t} u_x - \frac{\partial \tau}{\partial u} u_t^2 - \frac{\partial \xi}{\partial u} u_x u_t, \quad (3.16b)$$

são obtidas de (3.8) e (3.9), com

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv t, & x_2 &\equiv x, & u^1 &\equiv u, \\ \xi_1 &\equiv \tau, & \xi_2 &\equiv \xi & \text{e } \eta^1 &\equiv \eta. \end{aligned}$$

Substituindo-se as equações (3.16) em (3.15) chegamos a um polinômio nas derivadas de u . A equação do calor (3.13) é invariante sob a transformação (3.3) se e somente se $\zeta_{xx} - \zeta_t = 0$ para todo x, t e qualquer solução $u(x, t)$ da equação do calor. Para garantir esta última condição, usamos a própria equação do calor, $u_t = u_{xx}$, no polinômio, dando

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] + \left[2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] u_x + \left[\frac{\partial \tau}{\partial t} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \right] u_t \\ &+ \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} \right] u_x^2 + \left[-2 \frac{\partial \xi}{\partial u} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial u} \right] u_x u_t - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} u_x^3 \\ &- \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} u_x^2 u_t - 2 \frac{\partial \tau}{\partial x} u_{xt} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial u} u_{xt} u_x = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde cada coeficiente deve ser igual a zero, produzindo o sistema de 7 equações diferenciais parciais lineares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, & \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, & \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, & & \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, & & \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. & & \end{aligned} \quad (3.18)$$

Das 4 primeiras equações obtemos que as soluções τ , ξ e η devem ser necessariamente da forma

$$\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(t) \quad \text{e} \quad \eta = u\varphi(t, x) + \psi(t, x).$$

No caso particular em que $\psi(t, x) = 0$, a solução do sistema é:

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha + 2\beta t + \gamma t^2, \\ \xi &= \kappa + \delta t + \beta x + \gamma x t, \\ \eta &= -\gamma u \left(\frac{x^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - \frac{\delta}{2} x u + \lambda u, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa$ e λ são seis parâmetros arbitrários.

A cada um destes seis parâmetros está associado um operador infinitesimal Ξ_i , correspondendo a uma simetria, i.e. a uma transformação infinitesimal. O método para determinar os operadores Ξ_i é simples: substituindo a solução (3.19) na expressão do operador U (3.12) e fazendo cada vez um parâmetro (letras gregas) igual a 1 enquanto os outros são mantidos zero, obtemos uma simetria:

$$\begin{aligned} U &= (\alpha + 2\beta t + \gamma t^2) \frac{\partial}{\partial t} + (\kappa + \delta t + \beta x + \gamma x t) \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \left[-\gamma u \left(\frac{x^2}{4} + \frac{t}{2} \right) - \frac{\delta}{2} x u + \lambda u \right] \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha = 1 &\longrightarrow \Xi_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \\ \beta = 1 &\longrightarrow \Xi_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\ \gamma = 1 &\longrightarrow \Xi_3 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \left[\frac{x^2}{4} + \frac{t}{2} \right] u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \delta = 1 &\longrightarrow \Xi_4 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{2} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \kappa = 1 &\longrightarrow \Xi_5 = \frac{\partial}{\partial x}, \\ \lambda = 1 &\longrightarrow \Xi_6 = u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Estes seis operadores formam um grupo de transformações infinitesimais, ditas “de Lie”, que deixam a equação do calor (3.13) invariante. Alguns deles representam invariância sob transformações triviais no espaço (x, t) : Ξ_1 representa invariância sob translação em t , i.e. invariância frente à transformação $\tilde{x} = x$ e $\tilde{t} = t + \epsilon$; Ξ_2

denota invariância sob a transformação $\tilde{x} = e^\epsilon x$, $\tilde{t} = e^{2\epsilon} t$, chamada de estiramento, Ξ_4 significa invariância galileana, ou seja, invariância sob a transformação $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \epsilon t$; Ξ_5 invariância sob a transformação $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \epsilon$, ou seja, translação em x . Contudo, nem sempre é possível determinar diretamente o significado físico de cada "simetria de Lie", apesar de podermos determinar a que transformação cada operador Ξ_i está associado. Por exemplo, se a equação diferencial tem uma simetria da forma

$$\Xi = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

dizemos que tal equação é invariante frente à rotação infinitesimal no plano xy . Isto pode ser notado quando se faz

$$\begin{aligned} \Xi x &= -y, & \Xi y &= x, \\ \Xi^2 x &= \Xi(-y) = -x, & \Xi^2 y &= \Xi x = -y, \\ \Xi^3 x &= \Xi(-x) = y, & \Xi^3 y &= \Xi(-y) = -x, \\ \Xi^4 x &= \Xi(y) = x, & \Xi^4 y &= \Xi(-x) = y, \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon(\Xi x) + \frac{\epsilon^2}{2!}(\Xi^2 x) + \frac{\epsilon^3}{3!}(\Xi^3 x) + \dots, \\ \tilde{x} &= x + \epsilon(-y) + \frac{\epsilon^2}{2!}(-x) + \frac{\epsilon^3}{3!}(y) + \frac{\epsilon^4}{4!}(x) + \dots, \\ \tilde{x} &= x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= y + \epsilon(\Xi y) + \frac{\epsilon^2}{2!}(\Xi^2 y) + \frac{\epsilon^3}{3!}(\Xi^3 y) + \dots, \\ \tilde{y} &= y + \epsilon(x) + \frac{\epsilon^2}{2!}(-y) + \frac{\epsilon^3}{3!}(-x) + \frac{\epsilon^4}{4!}(y) + \dots, \\ \tilde{y} &= y \cos \epsilon + x \sin \epsilon. \end{aligned}$$

B. Exemplo 2: equação de KdV.

A teoria de Lie aplica-se igualmente bem a equações diferenciais lineares quanto não-lineares. Neste exemplo veremos que não há nenhum detalhe adicional no

cálculo do grupo de transformações infinitesimais de uma equação diferencial parcial não-linear. Escolhemos, para este segundo exemplo, a própria equação de KdV

$$\omega = u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.20)$$

cujo grupo de transformações infinitesimais foi determinado por Shen & Ames [1974].

Analogamente à equação do calor, esta equação tem uma variável dependente u e duas independentes x e t . A transformação que devemos submetê-la é portanto a mesma que no exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t + \epsilon\tau(t, x, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{x} &= x + \epsilon\xi(t, x, u) + O(\epsilon^2), \\ \tilde{u} &= u + \epsilon\eta(t, x, u) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

A equação de KdV é de terceira ordem, necessitando portanto da terceira extensão do operador U , ou seja

$$\begin{aligned} U^{(3)} &= \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial u_x} \\ &+ \zeta_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} \\ &+ \zeta_{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{ttt}} + \zeta_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \zeta_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xtt}} + \zeta_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xxt}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A aplicação de $U^{(3)}$ na equação de KdV dá a condição de invariância sob a transformação (3.3):

$$U^{(3)}\omega = \zeta_t + u\zeta_x + \eta u_x + \zeta_{xxx} = 0, \quad (3.22)$$

onde as funções ζ_t , ζ_x e ζ_{xxx} são obtidas das relações (3.8) e (3.9), usando as mesmas definições do exemplo anterior:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv t, & x_2 &\equiv x, & u^1 &\equiv u, \\ \xi_1 &\equiv \tau, & \xi_2 &\equiv \xi & \text{e} & \eta^1 &\equiv \eta. \end{aligned}$$

Após usar a própria equação diferencial (3.20), na forma $u_t = -uu_x - u_{xxx}$, para que (3.22) seja igual a zero para qualquer solução $u(x, t)$ da equação diferencial, obtemos o sistema de equações diferenciais ao igualar a zero os coeficientes das derivadas de u :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \\ \eta - \frac{\partial \xi}{\partial t} - u \frac{\partial \xi}{\partial x} + u \frac{\partial \tau}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - 3 \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Repare que, apesar da equação sob investigação ser não-linear, o sistema é de equações diferenciais parciais lineares!

Ao integrarmos o sistema (3.23) chegamos às transformações

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha t + \beta, \\ \xi &= \frac{\alpha}{3} x + \gamma t + \delta, \\ \eta &= -\frac{2}{3} \alpha u + \gamma,\end{aligned}\tag{3.24}$$

onde os quatro parâmetros α, β, γ e δ levam ao grupo de simetrias da equação de KdV:

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{3} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \Xi_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \Xi_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ \Xi_4 &= \frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

3.3 Grupos de simetrias de algumas equações conhecidas.

O procedimento descrito nas seções anteriores é simples e direto mas pode se tornar muito trabalhoso para mais que três variáveis e equações diferenciais de ordem superior a dois. Contudo este problema foi simplificado por Schwarz [1982] ao desenvolver um pacote de rotinas REDUCE que fazem o trabalho quase automaticamente[†]. Nesta seção daremos os grupos de transformações de diversas equações diferenciais por nós obtidos usando o pacote original de Schwarz.

A. Equação de Schrödinger não-linear.

A equação de Schrödinger não-linear em uma dimensão [Johnson, Lonngren & Nicholson, 1979] pode ser escrita como

$$\psi_{xx} + i\psi_t + K|\psi|^2\psi = 0. \quad (3.26)$$

Se definirmos

$$\psi(x, t) = u(x, t) + iv(x, t), \quad (3.27)$$

substituímos na equação (3.26) e igualarmos as partes real e imaginária, obtemos as equações acopladas

$$\begin{aligned} u_{xx} - v_t + Ku(u^2 + v^2) &= 0, \\ v_{xx} + u_t + Kv(u^2 + v^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Usando a notação introduzida na seção 3.1B, definimos

$$\begin{aligned} t = x_1, & \quad u = u^1, \\ & \quad e \\ x = x_2 & \quad v = u^2. \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso da rotina LIE4 do pacote REDUCE de Schwarz, podemos facilmente determinar as simetrias da equação de Schrödinger não-linear como sendo:

$$U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v}, \quad (3.29)$$

[†] A versão 3.3 do REDUCE contém um pacote mais completo para determinar as simetrias de equações diferenciais parciais, também de autoria de F. Schwarz.

onde

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2\alpha t + \delta, \\ \xi_2 &= \alpha x + \beta t + \gamma, \\ \eta^1 &= -\alpha u - \frac{1}{2}(\beta x + \kappa)v, \\ \eta^2 &= -\alpha v + \frac{1}{2}(\beta x + \kappa)u.\end{aligned}$$

O resultado acima concorda com o obtido por Johnson, Lonngren & Nicholson [1979].

B. Equações de Maxwell-Bloch reduzidas.

As equações de Maxwell-Bloch reduzidas

$$\begin{aligned}u_x &= -\mu v, \\ v_x &= Ew + \mu u, \\ w_x &= -Ev, \\ E_t &= -v,\end{aligned}\tag{3.30}$$

derivadas inicialmente por Eilbeck *et al.* [1973], são usadas para descrever a propagação de pulsos ópticos curtos através de materiais dielétricos com uma transição ressonante não-degenerada. Grauel [1986] mostrou que este sistema de equações possui a propriedade de Painlevé implicando integrabilidade. Porém o grupo de simetrias de Lie para as equações de Maxwell-Bloch reduzidas não havia sido determinado. Damos, aqui, este grupo.

Para simplificar introduzimos as definições

$$\begin{aligned}t &= x_1, & u &= u^1, & w &= u^3, \\ x &= x_2, & v &= u^2, & E &= u^4.\end{aligned}$$

Usando a rotina LIE4 de Schwarz chegamos ao sistema de equações diferenciais parciais lineares:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial E} &= 0, & \frac{\partial \eta^1}{\partial E} &= \frac{\partial \eta^2}{\partial E} = \frac{\partial \eta^3}{\partial E} = 0, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = \frac{\partial \xi_2}{\partial w} = \frac{\partial \xi_2}{\partial E} = \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0,\end{aligned}$$

$$v \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial \eta^4}{\partial u} = 0,$$

$$v \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta^4}{\partial v} = 0,$$

$$v \frac{\partial \xi_1}{\partial w} + \frac{\partial \eta^4}{\partial w} = 0,$$

$$v \frac{\partial \xi_1}{\partial w} - w \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = 0,$$

$$v \frac{\partial \eta^1}{\partial w} - w \frac{\partial \eta^1}{\partial v} = 0,$$

$$v \frac{\partial \eta^4}{\partial E} - \frac{\partial \eta^4}{\partial t} - v \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \eta^2 = 0,$$

$$\mu v \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \mu u \frac{\partial \xi_1}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0,$$

$$\mu v \frac{\partial \eta^1}{\partial u} - \mu u \frac{\partial \eta^1}{\partial t} - \mu v \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta^1}{\partial x} - \mu \eta^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \mu v \frac{\partial \eta^2}{\partial u} - (\mu u + Ew) \frac{\partial \eta^2}{\partial v} + Ev \frac{\partial \eta^2}{\partial w} - \frac{\partial \eta^2}{\partial x} + (\mu u + Ew) \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \\ \mu \eta^1 + E\eta^3 + w\eta^4 = 0, \end{aligned}$$

$$\mu v \frac{\partial \eta^3}{\partial u} - (\mu u + Ew) \frac{\partial \eta^3}{\partial v} + Ev \frac{\partial \eta^3}{\partial w} - \frac{\partial \eta^3}{\partial x} - Ev \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - E\eta^2 - v\eta^4 = 0.$$

Tal sistema foi resolvido propondo-se soluções polinomiais para os ξ_i e os η^α . Quando o grau destes polinômios é menor ou igual a 3, encontramos uma solução da forma

$$\xi_1 = \alpha + \beta t + \gamma t^2,$$

$$\xi_2 = \delta,$$

$$\eta^1 = -(\beta + 2\gamma t)u,$$

$$\eta^2 = -(\beta + 2\gamma t)v,$$

$$\eta^3 = -(\beta + 2\gamma t)w,$$

$$\eta^4 = 0,$$

implicando uma simetria

$$U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial w} + \eta^4 \frac{\partial}{\partial E}.$$

C. Equação de KdV generalizada.

As equações de KdV e KdV modificada pertencem a uma família de equações diferenciais que pode ser escrita genericamente como

$$u_t + u^n u_x + u_{xxx} = 0 \quad (n \geq 1), \quad (3.32)$$

chamada de equação de KdV generalizada e que tem sido investigada em relação à sua integrabilidade. Procedendo como no Exemplo 2 da seção 3.2 obtemos as simetrias da equação (3.32):

$$U = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

onde as funções ξ , τ e η são

- i) para $n = 1$, equação (3.24);
- ii) para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{2}{3}\alpha u, \\ \xi &= \frac{1}{3}n\alpha x + \delta, \\ \tau &= n\alpha t + \beta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

As funções (3.33), a menos da normalização, concordam com as recentemente publicadas por Lakshmanan & Kaliappan [1983]. Note que a equação de KdV generalizada com $n = 1$ possui um número maior de simetrias do que quando $n \geq 2$. Isto deve-se ao aparecimento, no sistema de equações diferenciais, de n e $n - 1$ como potências de u . Assim, quando $n = 1$, o coeficiente de u^{n-1} soma-se com o termo independente, impondo menos restrições às funções ξ , τ e η .

D. Efeito Zeeman quadrático.

Vamos agora determinar o grupo de transformações infinitesimais da equação de Schrödinger para um átomo de hidrogênio sujeito a um campo magnético intenso, o efeito Zeeman quadrático. Este problema é de grande interesse hoje em dia devido

a possibilidade de realizar experimentos em estados de Rydberg, que permitem investigar eventuais manifestações quânticas de propriedades caóticas presentes no hamiltoniano clássico [Wintgen & Friedrich, 1986, Delande & Gay, 1986 e Wunner *et al.*, 1986].

Em coordenadas esféricas, a equação diferencial correspondente é [Wintgen & Friedrich, 1987]

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\gamma L_z + \frac{1}{8}\gamma^2 r^2 \sin^2 \theta \right] \Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi),$$

onde L_z é a componente z do momentum angular e $\gamma = eB/(mc)$ corresponde à intensidade do campo magnético em unidades de 2.35×10^9 Gauss.

Usando coordenadas parabólicas,

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \phi = \arctan(y/x),$$

o termo em ϕ pode ser separado da maneira usual, $\Psi(r, \theta, \phi) = e^{im\phi}\psi(\xi, \eta)$, resultando na equação diferencial em duas dimensões

$$\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{m^2}{\xi \eta} \right\} - \frac{2}{\xi + \eta} + \frac{\gamma^2}{8} \xi \eta + \frac{\gamma}{2} m - E \right] \psi(\xi, \eta) = 0. \quad (3.34)$$

Nesta equação ξ e η representam coordenadas parabólicas; portanto, designaremos os infinitesimais das transformações através de $A(\xi, \eta, \psi)$ e $B(\xi, \eta, \psi)$ para as variáveis independentes ξ e η , respectivamente e $C(\xi, \eta, \psi)$ para a variável dependente $\psi(\xi, \eta)$.

Desta forma, aplicando a rotina LIE3 de Schwarz, obtemos o sistema de equações diferenciais parciais lineares:

$$\frac{\partial A}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial \psi^2} = 0,$$

$$\xi \frac{\partial B}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& 2\xi\eta \left[\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial B}{\partial \eta} \right] + \xi B - \eta A = 0, \\
& \xi\eta \left[\frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 C}{\partial \psi \partial \eta} \right] + \xi \left[\frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\partial B}{\partial \xi} - 2\partial A \partial \xi \right] + \xi^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + A = 0, \\
& \xi\eta \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \xi^2 \left[\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 C}{\partial \psi \partial \xi} \right] + \xi \left[\frac{\partial A}{\partial \eta} - \frac{\partial A}{\partial \xi} \right] + A = 0, \\
& \xi\eta \{ [\gamma^2 \xi^2 \eta^2 + 4m + (4m\gamma - 8E)\xi\eta] (\xi + \eta) - 16\xi\eta \} \times \\
& \quad \left\{ 2\psi \frac{\partial A}{\partial \xi} - \psi \frac{\partial C}{\partial \psi} + C \right\} - 16\xi^2 \eta^2 \left[\eta \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} + \xi\eta \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{\partial C}{\partial \eta} \right] + \\
& \quad \eta\psi A [\gamma^2 \xi^3 \eta^2 - (4m\gamma - 8E)\xi\eta^2 + 16\xi\eta + 4m^2(\xi + 2\eta)] + \\
& \quad \xi^2 \psi B [\gamma^2 \xi \eta^2 (\xi + 2\eta) + (4m\gamma - 8E)\eta^2 - 4m^2] = 0.
\end{aligned}$$

que pode ser resolvido, como no caso das equações de Maxwell-Bloch reduzidas (ítem **B** desta seção), propondo-se *soluções polinomiais* para as funções A, B e C . Considerando polinômios de grau até 4, encontramos como única solução

$$A = 0, \quad B = 0 \quad \text{e} \quad C = \alpha\psi, \quad (3.35)$$

para quaisquer valores de m, E ou γ , que corresponde à simetria

$$U = \psi \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Seria interessante relacionar este grupo de simetrias com possíveis invariantes para o efeito Zeeman.

E. Equações do tipo $u_t - u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx}, \dots)$

A procura de invariantes para esta classe de equações é mais complicada do que para a KdV já que o termo com as derivadas cruzadas (u_{xt}, u_{xxt}, \dots) dificulta a utilização de diversos métodos conhecidos. Vejamos a seguir dois exemplos de equações desta classe:

i) Equação de BBM

A equação de BBM [Benjamin, Bona & Mahony, 1972] ou equação de onda longa regularizada,

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad (3.36)$$

pode ser escrita de uma forma mais compacta, como aparece no Capítulo 1, quando u é substituído por $-u - 1$ na equação acima:

$$u_t - uu_x - u_{xxt} = 0. \quad (3.37)$$

Usando o procedimento descrito nas seções anteriores, chega-se facilmente a um sistema de 10 equações diferenciais parciais lineares cuja única solução é:

$$\begin{aligned} \tau &= \alpha + \gamma t, \\ \xi &= \beta, \\ \eta &= -\gamma u, \end{aligned} \quad (3.38)$$

correspondendo à simetria

$$U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

ii) Equação (26) de Caldas & Tasso [1979]

$$u_t - u_{xxt} - 2uu_x - 4u_x u_{xx} - 2uu_{xxx} = 0. \quad (3.39)$$

Esta equação, descrita por Caldas & Tasso [1979], possui uma simetria da forma

$$U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u},$$

onde

$$\tau = -\beta t, \quad \xi = \alpha \quad \text{e} \quad \eta = \beta u. \quad (3.40)$$

Os resultados i e ii, que não encontramos em lugar algum da literatura, como veremos no capítulo seguinte, poderão eventualmente servir para obter invariantes para estas equações.

Capítulo 4

Outros resultados

No capítulo anterior estudamos uma teoria de grupos de transformações contínuas, a teoria de Lie, como base para a investigação de métodos de integrabilidade de sistemas dinâmicos. No presente capítulo vamos analisar alguns destes métodos que encontramos na literatura recente, a fim de investigar sua possível aplicação a equações de evolução não-lineares que contenham termos com as derivadas cruzadas, como é o caso da BBM e a equação (26) de Caldas & Tasso [1979].

Na primeira seção é feito um estudo de um trabalho de K.M. Case [1985] onde constantes de movimento de equações de evolução não-lineares que podem ser escritas em um formalismo hamiltoniano são relacionadas às soluções das equações variacionais obtidas pela linearização das equações de evolução.

Na seção seguinte analisamos dois métodos para a construção de constantes de movimento usando as simetrias da equação dinâmica do sistema, obtidas pela teoria de Lie.

4.1 Constantes de movimento e as equações variacionais.

Equações de evolução descrevendo sistemas contínuos podem ser escritas genericamente [veja Capítulo 2] como

$$u_t = F[u]. \quad (2.1)$$

Cada equação do tipo acima pode ser linearizada em torno de uma solução particular, obtendo-se a “equação variacional” associada a ela [Whittaker, 1937], através de

$$\delta u_t = F'[\delta u], \quad (4.1)$$

onde

$$F'[\delta u] = \left. \frac{dF[u + \varepsilon \delta u]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (4.2)$$

A vantagem de se fazer isso é associar a cada equação diferencial parcial não-linear uma equação diferencial *linear*, para a qual há métodos bem mais simples e conhecidos para a determinação de suas soluções.

Case [1985] conseguiu relacionar as soluções destas equações variacionais (lineares) com as constantes de movimento das equações de evolução do tipo (2.1) que podem ser escritas no formalismo hamiltoniano, através do colchete de Poisson

$$\delta u = [u, I]. \quad (4.3)$$

I é uma constante de movimento para a equação de evolução e δu é uma solução da equação variacional. O colchete de Poisson relacionado às equações de evolução da forma

$$u_t = A \frac{\delta H}{\delta u}, \quad (1.8)$$

é definido por [veja Capítulo 1]

$$[F, G] = \int_L dx \frac{\delta F}{\delta u} A \frac{\delta G}{\delta u}. \quad (1.7)$$

Desta forma Case reproduziu constantes de movimento de algumas equações conhecidas como a KdV além de obter uma nova constante para a equação de Kadomtsev-Petviashvili (uma extensão ao espaço de duas variáveis da equação de KdV).

Como um exemplo, vamos considerar a equação de Korteweg-deVries

$$u_t = -uu_x - u_{xxx}.$$

Esta equação pode ser escrita na forma hamiltoniana tomando-se $A = \partial_x$ e

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x^2}{2} - \frac{u^3}{6} \right) dx.$$

Para linearizar a equação de KdV em primeiro lugar obtém-se $F[u + \varepsilon \delta u]$ (veja equação (4.2)):

$$\begin{aligned} F[u + \varepsilon \delta u] &= -(u + \varepsilon \delta u)(u + \varepsilon \delta u)_x - (u + \varepsilon \delta u)_{xxx}, \\ &= -uu_x - u_{xxx} - \varepsilon(u\delta u_x + u_x\delta u + \delta u_{xxx}) - \varepsilon^2\delta u\delta u_x. \end{aligned}$$

Derivando-se este resultado em relação a ε e fazendo-se $\varepsilon = 0$ temos o funcional $F'[\delta u]$:

$$\begin{aligned} F'[\delta u] &= [-u\delta u_x - u_x\delta u - \delta u_{xxx} - 2\varepsilon\delta u\delta u_x]_{\varepsilon=0}, \\ &= -u\delta u_x - u_x\delta u - \delta u_{xxx}. \end{aligned}$$

Agora, de (4.1), chegamos à equação variacional

$$(\delta u)_t = -u(\delta u)_x - u_x(\delta u) - (\delta u)_{xxx}. \quad (4.5)$$

Uma solução para a equação acima é

$$\delta u = tu_x - 1,$$

que pode ser escrita como $\delta u = [u, T]$ desde que tomemos

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{tu^2}{2} - xu \right] dx, \quad (4.6)$$

Isto porque, de acordo com a equação (4.4),

$$[u, T] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta u(x')}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\delta T}{\delta u} dx', \quad (4.7a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\delta T}{\delta u} dx', \quad (4.7b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta T}{\delta u}, \quad (4.7c)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (tu - x) = tu_x - 1. \quad (4.7d)$$

Na passagem de (4.7a) para (4.7b) utilizamos a equação (C.9) [veja o Apêndice C para uma revisão do conceito e propriedades de derivada funcional].

Ou seja, T é uma constante de movimento para a equação de KdV. De fato, esta constante foi apontada por Miura, Gardner & Kruskal [1968] e, conforme conjecturado por eles, é a única dependente explicitamente de x e t (em geral as constantes de movimento não dependem t).

Além disso, como T é explicitamente dependente de t ,

$$T' = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \quad (4.8)$$

também é constante de movimento. Uma outra constante pode ser construída a partir do colchete de Poisson destas duas primeiras:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= [T', T] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta T'}{\delta u} \partial_x \frac{\delta T}{\delta u} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \partial_x (tu - x) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (tu u_x - u) dx = t \frac{u^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u dx. \end{aligned}$$

Como as soluções u da equação de KdV se anulam nos extremos do intervalo, temos uma terceira constante de movimento da forma

$$\tilde{T} = - \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx, \quad (4.9)$$

que é a mais conhecida constante para a KdV, obtida diretamente da própria equação [veja seção 2.1]. Neste caso particular não obtivemos nenhuma informação nova. Entretanto o método permite construir invariantes adicionais, como no caso da equação de Kadomtsev-Petviashvili, reportado pelo próprio Case [1985].

4.2 Simetrias e leis de conservação.

Do estudo da Mecânica Clássica é bem sabido que as simetrias de um sistema físico têm um papel importante na identificação de constantes de movimento. O Teorema de Noether [1918][†], por exemplo, tem sido usualmente empregado na obtenção de quantidades conservadas a partir de simetrias do lagrangeano porém, é obviamente necessário restringir-se a formulações lagrangeanas. Por outro lado, tem-se investigado um método simples e direto para a construção de constantes de movimento a partir das simetrias de Lie, obtidas diretamente da equação dinâmica do sistema, ou seja, sem necessidade outra que as equações diferenciais que descrevem o sistema. Além disto, o método de Lie em geral dá origem a mais simetrias que o método de Noether[‡] (no pior caso os dois métodos produzem as mesmas simetrias). Desta forma, dedicamos esta última seção para analisar dois procedimentos para a construção de constantes de movimento a partir das simetrias de Lie.

A. Prince & Eliezer [1981] descreveram um método que permite a construção de constantes de movimento associadas com cada elemento do grupo de simetrias de Lie. Estas constantes de movimento são construídas a partir de constantes de integração assim como a teoria de Lie constrói as “variáveis de similaridade”. O método pode ser resumido como segue:

[†] O Teorema de Noether [Arnold, 1978 e Goldstein, 1980] afirma que, a cada transformação infinitesimal que deixa o lagrangeano invariante corresponde uma primeira integral das equações de movimento. Porém o inverso não é verdade: há constantes de movimento que não correspondem a propriedades de simetria.

[‡] Não encontramos explicação plausível para este fato. Entretanto ele é bem conhecido na literatura [veja, por exemplo, Prince & Eliezer, 1980] onde também é mencionado sem explicação.

Para cada elemento Ξ_n do grupo de simetrias de Lie

1. determina-se sua primeira extensão, o operador Ξ'_n ;
2. constrói-se as constantes de integração do operador Ξ'_n ;
3. obtém-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, invariantes sob a aplicação do operador Ξ''_n , derivando-se as constantes do ítem 2 umas em relação às outras;
4. integra-se as equações, construindo-se novamente constantes de integração, em função daquelas do ítem 2;
5. estas novas constantes, quando explicitadas nas variáveis do sistema, são as quantidades conservadas do sistema.

No caso do problema de Kepler, em duas dimensões, temos as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} &= 0,\end{aligned}\tag{4.10}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Aplicando a teoria de Lie, descrita na seção 3.1B, encontramos três simetrias para o sistema (4.10):

$$\Xi_1 = \frac{\partial}{\partial t},\tag{4.11a}$$

$$\Xi_2 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},\tag{4.11b}$$

$$\Xi_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{3} \frac{\partial}{\partial y}.\tag{4.11c}$$

Este último operador, Ξ_3 , não pode ser obtido a partir do teorema de Noether aplicado na formulação lagrangeana da equação (4.10) [Prince & Eliezer, 1981], assim o escolhemos para aplicar o método. Usando as equações (3.8, 9, 11b) obtemos a primeira extensão de Ξ_3

$$\Xi'_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2y}{3} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\dot{x}}{3} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\dot{y}}{3} \frac{\partial}{\partial \dot{y}}.\tag{4.12}$$

As funções invariantes para Ξ'_3 são encontradas integrando-se

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\frac{2}{3}x} = \frac{dy}{\frac{2}{3}y} = \frac{d\dot{x}}{-\frac{1}{3}\dot{x}} = \frac{d\dot{y}}{-\frac{1}{3}\dot{y}},\tag{4.13}$$

as constantes de integração para as equações diferenciais acima são

$$\begin{aligned}
 u_1 &= xt^{-2/3}, \\
 u_2 &= yt^{-2/3}, \\
 v_1 &= \dot{x}t^{1/3}, \\
 v_2 &= \dot{y}t^{1/3}.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Quando derivamos umas em relação às outras, encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{du_2}{du_1} &= \frac{\partial u_2 / \partial y \dot{y} + \partial u_2 / \partial t}{\partial u_1 / \partial x \dot{x} + \partial u_1 / \partial t}, \\
 &= \frac{3\dot{y}t^{1/3} - 2yt^{-2/3}}{3\dot{x}t^{1/3} - 2xt^{-2/3}}, \\
 &= \frac{3v_2 - 2u_2}{3v_1 - 2u_1} = \Phi(u_1, u_2, v_1, v_2),
 \end{aligned}
 \tag{4.15a}$$

analogamente,

$$\frac{dv_1}{du_1} = \frac{v_1 - 3\mu u_1 P^{-3}}{3v_1 - 2u_1} = \Psi(u_1, u_2, v_1, v_2),
 \tag{4.15b}$$

$$\frac{dv_2}{du_1} = \frac{v_2 - 3\mu u_2 P^{-3}}{3v_1 - 2u_1} = \Theta(u_1, u_2, v_1, v_2),
 \tag{4.15c}$$

onde

$$P = (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} = rt^{-2/3}.
 \tag{4.16}$$

As soluções de (4.15) são [Prince & Eliezer, 1981]

$$W_1(u_1, u_2, v_1, v_2) = u_1 v_2^2 - u_2 v_1 v_2 - \frac{\mu u_1}{P} = \text{constante},
 \tag{4.17a}$$

$$W_2(u_1, u_2, v_1, v_2) = u_2 v_1^2 - u_1 v_1 v_2 - \frac{\mu u_2}{P} = \text{constante}.
 \tag{4.17b}$$

Após substituir (4.14) e (4.16) nas equações (4.17), temos as componentes x e y do vetor de Runge-Lenz:

$$\begin{aligned}
 x\dot{y}^2 - y\dot{x}\dot{y} - \frac{\mu x}{r} &= \text{constante}, \\
 y\dot{x}^2 - x\dot{x}\dot{y} - \frac{\mu y}{r} &= \text{constante}.
 \end{aligned}$$

Este método descrito por Prince & Eliezer [1981] é capaz de gerar constantes de movimento que o teorema de Noether não fornece, como é o caso do vetor de Runge-Lenz para o problema de Kepler. Porém sua aplicação requer solução de equações diferenciais às vezes muito complexas.

B. Um outro método para obter constantes de movimento a partir das simetrias de Lie, com aplicação mais simples e direta, foi descrito por Moreira, Ritter & Santos [1985]. Esse trabalho é uma extensão de um resultado de Whittaker [1937] que mostra que se uma equação descrevendo um sistema hamiltoniano discreto, admite uma quantidade conservada I explicitamente dependente do tempo, então $\frac{\partial I}{\partial t}$ será também uma quantidade conservada para este sistema. O que Moreira *et al.* fizeram foi sugerir que o resultado de Whittaker para o caso discreto é um caso particular de um resultado mais geral que relaciona as simetrias de Lie da equação de movimento com as quantidades conservadas, mesmo no caso de sistemas não-hamiltonianos. Mais tarde [Moreira, 1986] o resultado foi estendido para equações de evolução que descrevem sistemas contínuos e é utilizado como método de construção de novas leis de conservação a partir do conhecimento das transformações de simetria da equação e de outras leis de conservação.

Em resumo, o resultado de Moreira *et al.* é o seguinte: se I for uma quantidade conservada (com possível dependência até derivadas em x de n -ésima ordem) para uma equação que admite uma simetria Ξ , então

$$I' = \Xi^{(n)} I, \quad (4.18)$$

também é uma quantidade conservada, onde $\Xi^{(n)}$ é a n -ésima extensão do operador Ξ (veja Capítulo 3, equações 3.11b e 3.12).

No caso de sistemas contínuos (uma variável dependente u e duas independentes x e t) o operador infinitesimal Ξ é escrito da seguinte forma

$$\Xi = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

A densidade associada a I' pode ser obtida fazendo-se a transformação infinitesimal $\Xi^{(n)}$ em I :

$$\bar{I} = I + \epsilon \Xi^{(n)} I + O(\epsilon^2).$$

Como

$$\tilde{T} = T + \varepsilon \Xi^{(n)} T + O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \xi + O(\varepsilon^2),$$

onde T é a densidade associada a I , contendo derivadas até n -ésima ordem, temos:

$$I + \varepsilon \Xi^{(n)} I + O(\varepsilon^2) = \int [T + \varepsilon \Xi^{(n)} T + O(\varepsilon^2)] d[x + \varepsilon \xi + O(\varepsilon^2)],$$

$$I + \varepsilon \Xi^{(n)} I + O(\varepsilon^2) = \int T dx + \varepsilon \int \left[\Xi^{(n)} T + T \frac{d\xi}{dx} \right] dx + O(\varepsilon^2).$$

I' é o termo de primeira ordem em ε . Assim

$$I' = \int T' dx = \int \left[\Xi^{(n)} T + T \frac{d\xi}{dx} \right] dx,$$

portanto

$$T' = \Xi^{(n)} T + T \frac{d\xi}{dx}. \quad (4.19)$$

Uma verificação simples deste resultado pode ser feita com a equação de Korteweg-deVries,

$$u_t = -uu_x - u_{xxx}.$$

Usaremos como ponto de partida duas constantes de movimento publicadas por Miura, Gardner & Kruskal [1968]:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u^4}{4} - 3uu_x^2 + \frac{9}{5}u_{xx}^2 \right] dx \quad (4.20a)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[xu - t \frac{u^2}{2} \right] dx. \quad (4.20b)$$

Como vimos na seção 3.2B, as simetrias de Lie para a KdV são

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \Xi_2 &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{3} u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \Xi_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ \Xi_4 &= \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como I_1 e I_2 contêm somente derivadas até segunda ordem, necessitamos calcular as extensões $\Xi_i^{(2)}$

$$\begin{aligned}\Xi_1^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \Xi_2^{(2)} &= t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{3} \frac{\partial}{\partial u} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - \frac{5u_t}{3} \frac{\partial}{\partial u_t} \\ &\quad - \frac{4u_{xx}}{3} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \frac{8u_{tt}}{3} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} - 2u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}}, \\ \Xi_3^{(2)} &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} - u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - 2u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} - u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xt}}, \\ \Xi_4^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}\tag{4.21}$$

Aplicando-se estes operadores a I_1 , temos

$$\begin{aligned}\Xi_1^{(2)} I_1 &= \frac{\partial}{\partial x} I_1 = 0, \\ \Xi_2^{(2)} I_1 &= \left[-\frac{2u}{3} \frac{\partial}{\partial u} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - \frac{4u_{xx}}{3} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \right] I_1 \\ &= -\frac{8}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u^4}{4} - 3uu_x^2 + \frac{9}{5}u_{xx}^2 \right] dx = -\frac{8}{3} I_1, \\ \Xi_3^{(2)} I_1 &= \frac{\partial}{\partial u} I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^3 - 3u_x^2) dx = I_3, \\ \Xi_4^{(2)} I_1 &= \frac{\partial}{\partial t} I_1 = 0.\end{aligned}$$

Aplicando agora os operadores (4.21) em I_2 temos:

$$\begin{aligned}\Xi_1^{(2)} I_2 &= \frac{\partial}{\partial x} I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = I_4, \\ \Xi_2^{(2)} I_2 &= \left[t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2u}{3} \frac{\partial}{\partial u} \right] I_2 \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[xu - \frac{tu^2}{2} \right] dx = -\frac{1}{3} I_2, \\ \Xi_3^{(2)} I_2 &= \left[t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \right] I_2 = 0, \\ \Xi_4^{(2)} I_2 &= \frac{\partial}{\partial t} I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2} dx = I_5.\end{aligned}$$

Obviamente, o método pode ser aplicado a cada nova constante, possibilitando gerar outras quantidades conservadas:

$$\begin{aligned}\Xi_1^{(2)} I_3 &= -2I_3, & \Xi_1^{(2)} I_4 &= -\frac{4}{3} I_4, & \Xi_1^{(2)} I_5 &= -\frac{2}{3} I_5, \\ \Xi_2^{(2)} I_3 &= 0, & \Xi_2^{(2)} I_4 &= 0, & \Xi_2^{(2)} I_5 &= 0, \\ \Xi_3^{(2)} I_3 &= 6I_4, & \Xi_3^{(2)} I_4 &= I_5, & \Xi_3^{(2)} I_5 &= 0, \\ \Xi_4^{(2)} I_3 &= 0, & \Xi_4^{(2)} I_4 &= 0, & \Xi_4^{(2)} I_5 &= 0.\end{aligned}$$

Entretanto, pela própria natureza do método, a geração de constantes de movimento não é infinita já que o rank das constantes é *abaixado* a cada aplicação dos operadores. Neste caso começamos com um invariante de rank 4 (I_1) e obtivemos outros 3, todos de rank menor que 4. Desejável seria ter-se um método que *aumentasse* o rank. Entretanto tal método é bastante difícil de ser concebido.

Conclusões

O objetivo central do presente estudo era investigar a integrabilidade de equações de evolução contínuas não lineares do tipo genérico

$$u_t = F[u, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \dots],$$

onde F é um funcional que inclui derivadas cruzadas como u_{xt}, u_{xxt}, \dots . A motivação para esta investigação veio da possibilidade de escrever tais equações em um formalismo hamiltoniano estendido, proposto por Tasso [1979] e descrito no Capítulo 1. Assim, o passo inicial foi estudar as constantes de movimento de uma das mais simples equações de evolução contínuas não-lineares: a equação de KdV, além da equação mKdV, pertencente à mesma família.

Em resumo obtivemos os seguintes resultados: As infinitas constantes de movimento das equações de KdV e mKdV têm uma construção sistemática. Este fato já havia sido apontado por Torriani [1986] quando mostrou que os invariantes para estas duas equações poderiam ser obtidos a partir de métodos combinatoriais. Baseados nesta construção sistemática apresentamos relações de recorrência para gerar os invariantes destas equações. Nossas relações de recorrência são facilmente programáveis em computadores capazes de efetuar manipulações algébricas. Nós as escrevemos em REDUCE (Apêndice D) a fim de obter os 15 primeiros invariantes para a KdV e os 8 primeiros para a mKdV (listados nos apêndices A e B). A intenção era testar nossas relações de recorrência.

Concluimos que as relações geravam perfeitamente os polinômios conhecidos para a KdV, mas ainda não estão completas para invariantes de grau elevado [veja seção 2.4]. A relação de recorrência que gera as densidades para a mKdV não mostrou falhas até onde investigamos ($r = 8$).

Nesta linha, um próximo passo seria aperfeiçoar estas relações de recorrência e criar uma relação para os fluxos da mKdV para que gerassem invariantes de qualquer *rank* para a KdV e mKdV. Contudo, optamos por investigar métodos alternativos para a obtenção de constantes de movimento para equações de evolução não-lineares.

A literatura a este respeito é bastante fragmentada e os métodos propostos

por diversos autores funcionam apenas para casos particulares. Em outros casos os métodos se tornam um tanto trabalhosos e até mesmo sem solução.

O primeiro método analisado por nós, apresentado por Case [1985], deu resultados muito bons quando aplicado pelo próprio Case às equações de KdV (reproduzindo constantes já conhecidas) e Kadomtsev-Petviashvili (gerando uma nova constante). Porém o método envolve soluções de equações variacionais difíceis de serem resolvidas. Além disto é necessário conhecer-se uma constante para poder-se aplicar o método.

Uma outra alternativa seria analisar métodos que construíssem invariantes a partir das simetrias do sistema, assim como o teorema de Noether permite a construção de constantes a partir das simetrias do Lagrangeano. Já que a teoria de Lie dá as simetrias da equação dinâmica, sem a necessidade de uma formulação Lagrangeana, buscamos métodos que produzissem constantes a partir das simetrias de Lie.

Prince & Eliezer [1981] apresentam um método bastante interessante para a obtenção de constantes de movimento a partir das simetrias de Lie. O método produziu uma constante (conhecida) para o problema de Kepler em duas dimensões: o vetor de Runge-Lenz. Porém, Prince & Eliezer não apresentam o método formalmente, apenas uma aplicação dele onde há passos dos cálculos que não ficam claros para nós. Por exemplo, achamos difícil entender a solução das equações diferenciais (A3), (A4) e (A5) [equações (4.15) nesta dissertação], produzindo (A7) e (A8) [equações (4.17) nesta dissertação]. Exceto em umas poucas aplicações, onde já se conhece os invariantes, resolver as equações diferenciais a fim de obter as constantes de integração é uma tarefa trabalhosa e até mesmo impossível. Entretanto, o método destes autores é muito interessante e deveria ser estudado com mais detalhes, visando uma possível sistematização.

Outro procedimento analisado por nós que também trata da obtenção de constantes de movimento utilizando as simetrias de Lie do sistema, foi o exposto em *Simetrias e leis de conservação para equações de evolução não-lineares* [Moreira, 1986]. Moreira mostra que a aplicação de cada operador infinitesimal do grupo de simetrias de Lie, em um invariante pode produzir outra constante de movimento (ou uma constante numérica). Mas, neste caso como no método de Case,

também é necessário conhecer-se pelo menos um invariante. E, quando o sistema é contínuo, com constantes polinomiais, como descrito no Capítulo 2, o método proposto por Moreira produz invariantes com *rank* cada vez mais baixos. Ou seja, a aplicação do método não gera invariantes infinitamente, mesmo que haja infinitos invariantes para aquela equação. É importante enfatizar que este comportamento é característico de *todos* os métodos conhecidos e de modo algum é uma limitação exclusiva do procedimento proposto por Moreira.

Nenhum dos métodos analisados por nós produziu invariantes adicionais para as equações que nos propusemos a estudar. Isto entretanto não significa que tais equações não possuam invariantes adicionais.

Apêndice A

Invariantes para a KdV

Como discutido na seção 2.1, os invariantes já conhecidos foram publicados por Miura, Gardner & Kruskal [1968]: T_r para $r \leq 10$ e X_r para $r \leq 7$ e, posteriormente [Kruskal, Miura, Gardner & Zabusky, 1970], T_{11} . Os outros, no que nos consta, são novos. Chamamos a atenção para dois erros de impressão nas expressões publicadas nas referências acima: em X_6 [Miura *et al.*, 1968] o coeficiente de $u_0 u_4^2$ (quarta linha da página 1205) deveria ser $+\frac{144}{7}$ e não $-\frac{144}{7}$. O monômio da sexta linha da página 960 de Kruskal *et al.* [1970], em T_{11} , deveria ser $u_0^2 u_2 u_5^2$ e não $u_0^2 u_1 u_5^2$ como está escrito.

$$T_1 = u_0 \tag{A.1}$$

$$X_1 = \frac{1}{2} u_0^2 + u_2 \tag{A.2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} u_0^2 \tag{A.3}$$

$$X_2 = \frac{1}{3} u_0^3 + u_0 u_2 - \frac{1}{2} u_1^2 \tag{A.4}$$

$$T_3 = \frac{1}{3} u_0^3 - u_1^2 \tag{A.5}$$

$$X_3 = \frac{1}{4} u_0^4 + u_2^2 u_2 - 2u_0 u_1^2 - 2u_1 u_3 + u_2^2 \tag{A.6}$$

$$T_4 = \frac{1}{4} u_0^4 - 3u_0 u_1^2 + \frac{9}{5} u_2^2 \tag{A.7}$$

$$X_4 = \frac{1}{5} u_0^5 + u_0^3 u_2 - \frac{9}{2} u_0^2 u_1^2 + \frac{24}{5} u_0 u_2^2 - 6u_0 u_1 u_3 + 3u_1^2 u_2 + \frac{18}{5} u_2 u_4 - \frac{9}{5} u_3^2 \tag{A.8}$$

$$T_5 = \frac{1}{5} u_0^5 - 6u_0^2 u_1^2 + \frac{36}{5} u_0 u_2^2 - \frac{108}{35} u_3^2 \tag{A.9}$$

$$X_5 = \frac{1}{6} u_0^6 + u_0^4 u_2 - 8u_0^3 u_1^2 + \frac{66}{5} u_0^2 u_2^2 - 12u_0^2 u_1 u_3 + 12u_0 u_1^2 u_2 - 3u_1^4 + \frac{72}{5} u_0 u_2 u_4 - \frac{72}{7} u_0 u_3^2 - \frac{72}{5} u_1 u_2 u_3 + \frac{36}{35} u_2^3 - \frac{216}{35} u_3 u_5 + \frac{108}{35} u_4^2 \tag{A.10}$$

$$T_6 = \frac{1}{6} u_0^6 - 10u_0^3 u_1^2 + 18u_0^2 u_2^2 - 5u_1^4 - \frac{108}{7} u_0 u_3^2 + \frac{120}{7} u_2^3 + \frac{36}{7} u_4^2 \tag{A.11}$$

$$X_6 = \frac{1}{7} u_0^7 + u_0^5 u_2 - \frac{25}{2} u_0^4 u_1^2 + 28u_0^3 u_2^2 - 20u_0^3 u_1 u_3 + 30u_0^2 u_1^2 u_2 - 20u_0 u_1^4 + 36u_0^2 u_2 u_4 - \frac{234}{7} u_0^2 u_3^2 + \frac{156}{7} u_0 u_3^3 - 72u_0 u_1 u_2 u_3 + 66u_1^2 u_2^2 - 20u_1^3 u_3 - \frac{216}{7} u_0 u_3 u_5 + \frac{144}{7} u_0 u_4^2 + \frac{360}{7} u_2^2 u_4 - \frac{108}{7} u_2 u_3^2 + \frac{216}{7} u_1 u_3 u_4 + \frac{72}{7} u_4 u_6 - \frac{36}{7} u_5^2 \tag{A.12}$$

$$T_7 = \frac{1}{7} u_0^7 - 15u_0^4 u_1^2 + 36u_0^3 u_2^2 - 30u_0 u_1^4 - \frac{324}{7} u_0^2 u_3^2 + \frac{720}{7} u_0 u_3^3 + 108u_1^2 u_2^2 + \frac{216}{7} u_0 u_4^2 - \frac{1080}{7} u_2 u_3^2 - \frac{648}{77} u_5^2 \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
X_7 = & \frac{1}{8}u_0^8 + u_0^6u_2 - 18u_0^5u_1^2 + 51u_0^4u_2^2 - 30u_0^4u_1u_3 + 60u_0^3u_1^2u_2 - 75u_0^2u_1^4 + \\
& 72u_0^3u_2u_4 - \frac{576}{7}u_0^3u_3^2 + \frac{828}{7}u_0^2u_2^3 - 216u_0^2u_1u_2u_3 + 504u_0u_1^2u_2^2 - 120u_0u_1^3u_3 + \\
& 90u_1^4u_2 - \frac{648}{7}u_0^2u_3u_5 + \frac{540}{7}u_0^2u_4^2 - \frac{1728}{7}u_0u_2u_3^2 + \frac{1296}{7}u_0u_1u_3u_4 - \frac{1404}{7}u_1^2u_3^2 + \\
& \frac{2160}{7}u_0u_2^2u_4 - \frac{522}{7}u_2^4 - \frac{3672}{7}u_1u_2^2u_3 + 216u_1^2u_2u_4 + \frac{432}{7}u_0u_4u_6 - \frac{432}{11}u_0u_5^2 - \\
& \frac{432}{7}u_1u_4u_5 + \frac{648}{11}u_2u_4^2 - \frac{1080}{77}u_3^2u_4 - \frac{2160}{7}u_2u_3u_5 - \frac{1296}{77}u_5u_7 + \frac{648}{77}u_6^2
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
T_8 = & \frac{1}{8}u_0^8 - 21u_0^5u_1^2 + 63u_0^4u_2^2 - 105u_0^2u_1^4 - 108u_0^3u_2^2 + 360u_0^2u_3^2 + 756u_0u_1^2u_2^2 + \\
& 108u_0^2u_4^2 - 324u_1^2u_3^2 - 1080u_0u_2u_3^2 + 378u_2^4 - \frac{648}{11}u_0u_5^2 + \frac{4536}{11}u_2u_4^2 + \frac{1944}{143}u_6^2
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
X_8 = & \frac{1}{9}u_0^9 + u_0^7u_2 - \frac{49}{2}u_0^6u_1^2 + 84u_0^5u_2^2 - 42u_0^5u_1u_3 + 126u_0^4u_2u_4 + 105u_0^4u_1^2u_2 - \\
& 171u_0^4u_3^2 + 396u_0^3u_2^3 - 504u_0^3u_1u_2u_3 + 216u_0^3u_4^2 - 210u_0^3u_1^4 - 216u_0^3u_3u_5 + \\
& 1080u_0^2u_2^2u_4 + 2142u_0^2u_1^2u_2^2 - 1404u_0^2u_2u_3^2 + 216u_0^2u_4u_6 + 648u_0^2u_1u_3u_4 - \\
& 420u_0^2u_1^3u_3 - \frac{1836}{11}u_0^2u_5^2 - 144u_0u_2^4 - 3672u_0u_1u_2^2u_3 + \frac{9072}{11}u_0u_2u_4^2 + \\
& 1512u_0u_1^2u_2u_4 + 630u_0u_1^4u_2 - 2160u_0u_2u_3u_5 - \frac{1080}{11}u_0u_3^2u_4 + \frac{10368}{143}u_0u_6^2 - \\
& 1728u_0u_1^2u_3^2 - \frac{1296}{11}u_0u_5u_7 + 1512u_2^3u_4 + 2340u_1^2u_2^3 + \frac{1404}{11}u_2^2u_3^2 + \frac{9072}{11}u_2u_4u_6 + \\
& 3456u_1u_2u_3u_4 - 1512u_1^3u_2u_3 - \frac{26568}{143}u_2u_5^2 + \frac{13608}{143}u_4^3 + 540u_1^2u_4^2 + \\
& \frac{18144}{143}u_3u_4u_5 - 432u_0u_1u_4u_5 + \frac{3888}{143}u_6u_8 - 105u_1^6 - 648u_1^2u_3u_5 - \frac{14688}{11}u_1u_3^3 - \\
& \frac{1944}{143}u_7^2 + \frac{1296}{11}u_1u_5u_6
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
T_9 = & \frac{1}{9}u_0^9 - 28u_0^6u_1^2 + \frac{504}{5}u_0^5u_2^2 - 280u_0^3u_1^4 - 216u_0^4u_3^2 + 960u_0^3u_2^3 + 3024u_0^2u_1^2u_2^2 - \\
& 168u_1^6 + 288u_0^3u_4^2 - 4320u_0^2u_2u_3^2 - 2592u_0u_1^2u_3^2 + 3024u_0u_4^2 + \frac{26496}{5}u_1^2u_2^3 - \\
& \frac{2592}{11}u_0^2u_5^2 + \frac{36288}{11}u_0u_2u_4^2 + 864u_1^2u_4^2 - \frac{169344}{55}u_1u_3^3 - \frac{545184}{55}u_2^2u_3^2 + \frac{15552}{143}u_0u_6^2 - \\
& \frac{145152}{143}u_2u_5^2 + \frac{653184}{715}u_4^3 - \frac{15552}{715}u_7^2
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
X_9 = & \frac{1}{10}u_0^{10} + u_0^8u_2 - 32u_0^7u_1^2 - 56u_0^6u_1u_3 + \frac{644}{5}u_0^6u_2^2 + 168u_0^5u_1^2u_2 + \frac{1008}{5}u_0^5u_2u_4 - \\
& \frac{1584}{5}u_0^5u_3^2 - 490u_0^4u_1^4 - 1008u_0^4u_1u_2u_3 + 1032u_0^4u_2^3 - 432u_0^4u_3u_5 + 504u_0^4u_4^2 - \\
& 1120u_0^3u_1^3u_3 + 6720u_0^3u_1^2u_2^2 + 1728u_0^3u_1u_3u_4 + 2880u_0^3u_2^2u_4 - 5184u_0^3u_2u_3^2 + \\
& 576u_0^3u_4u_6 - \frac{5760}{11}u_0^3u_5^2 + 2520u_0^2u_1^4u_2 + 6048u_0^2u_1^2u_2u_4 - 8208u_0^2u_1^2u_3^2 - \\
& 14688u_0^2u_1u_2^2u_3 - 1728u_0^2u_1u_4u_5 + 936u_0^2u_4^2 - 8640u_0^2u_2u_3u_5 + \frac{54432}{11}u_0^2u_2u_4^2 - \\
& \frac{4320}{11}u_0^2u_3^2u_4 - \frac{5184}{11}u_0^2u_5u_7 + \frac{49248}{143}u_0^2u_6^2 - 1008u_0u_1^6 - 12096u_0u_1^3u_2u_3 + \\
& \frac{120096}{5}u_0u_1^2u_2^3 - 5184u_0u_1^2u_3u_5 + 5184u_0u_1^2u_4^2 + 27648u_0u_1u_2u_3u_4 - \\
& \frac{756864}{55}u_0u_1u_3^3 + \frac{10368}{11}u_0u_1u_5u_6 + 12096u_0u_2^3u_4 - \frac{489024}{55}u_0u_2^2u_3^2 + \\
& \frac{72576}{11}u_0u_2u_4u_6 - \frac{357696}{143}u_0u_2u_5^2 + \frac{145152}{143}u_0u_3u_4u_5 + \frac{108864}{65}u_0u_4^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{31104}{143}u_0u_6u_8 - \frac{93312}{715}u_0u_7^2 - 1008u_1^5u_3 + 8568u_1^4u_2^2 + 5184u_1^3u_3u_4 + \\
 & \frac{79488}{5}u_1^2u_2^2u_4 - \frac{144288}{5}u_1^2u_2u_3^2 + 1728u_1^2u_4u_6 - \frac{14688}{11}u_1^2u_5^2 - \frac{166464}{5}u_1u_2^3u_3 - \\
 & \frac{110592}{11}u_1u_2u_4u_5 - \frac{508032}{55}u_1u_3^2u_5 + \frac{9835776}{715}u_1u_3u_4^2 - \frac{31104}{143}u_1u_6u_7 - \frac{254736}{55}u_2^5 - \\
 & \frac{1090368}{55}u_2^2u_3u_5 - \frac{204768}{715}u_2^2u_4^2 + \frac{1252800}{143}u_2u_3^2u_4 - \frac{290304}{143}u_2u_5u_7 + \frac{368064}{715}u_2u_6^2 - \\
 & \frac{2116368}{715}u_3^4 - \frac{290304}{715}u_3u_5u_6 + \frac{870912}{715}u_4^2u_6 - \frac{145152}{143}u_4u_5^2 - \frac{31104}{715}u_7u_9 + \frac{15552}{715}u_8^2
 \end{aligned}
 \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10} = & \frac{1}{10}u_0^{10} - 36u_0^7u_1^2 - 630u_0^4u_1^4 + \frac{756}{5}u_0^6u_2^2 - 1512u_0u_1^6 + 2160u_0^4u_2^3 + 9072u_0^3u_1^2u_2^2 - \\
 & \frac{1944}{5}u_0^5u_3^2 + 13608u_0^2u_4^4 + \frac{238464}{5}u_0u_1^2u_2^3 + 13608u_1^4u_2^2 - 12960u_0^3u_2u_3^2 - \\
 & 11664u_0^2u_1^2u_3^2 + 648u_0^4u_4^2 + \frac{178848}{11}u_5^2 - \frac{1524096}{55}u_0u_1u_3^3 + \frac{1679616}{715}u_2u_6^2 - \\
 & \frac{4906656}{55}u_0u_2^2u_3^2 - \frac{7776}{11}u_0^3u_5^2 - \frac{334368}{5}u_1^2u_2u_3^2 - \frac{11045808}{715}u_3^4 + \frac{163296}{11}u_0^2u_2u_4^2 + \\
 & 7776u_0u_1^2u_4^2 + \frac{5878656}{715}u_0u_4^3 + \frac{22208256}{715}u_1u_3u_4^2 + \frac{26570592}{715}u_2^2u_4^2 - \frac{23328}{11}u_1^2u_5^2 - \\
 & \frac{1306368}{143}u_0u_2u_5^2 + \frac{69984}{143}u_0^2u_6^2 - \frac{5878656}{715}u_4u_5^2 - \frac{139968}{715}u_0u_7^2 + \frac{419904}{12155}u_8^2
 \end{aligned}
 \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
 X_{10} = & \frac{1}{11}u_0^{11} + u_0^9u_2 - \frac{81}{2}u_0^8u_1^2 - 72u_0^7u_1u_3 + \frac{936}{5}u_0^7u_2^2 + 252u_0^6u_1^2u_2 + \\
 & \frac{1512}{5}u_0^6u_2u_4 - 540u_0^6u_3^2 - 1008u_0^5u_1^4 - \frac{9072}{5}u_0^5u_1u_2u_3 + \frac{11448}{5}u_0^5u_2^3 - \\
 & \frac{3888}{5}u_0^5u_3u_5 + \frac{5184}{5}u_0^5u_4^2 - 2520u_0^4u_1^3u_3 + 17388u_0^4u_1^2u_2^2 + 3888u_0^4u_1u_3u_4 + \\
 & 6480u_0^4u_2^2u_4 - 14904u_0^4u_2u_3^2 + 1296u_0^4u_4u_6 - \frac{14904}{11}u_0^4u_5^2 + 7560u_0^3u_1^4u_2 + \\
 & 18144u_0^3u_1^2u_2u_4 - 28512u_0^3u_1^2u_3^2 - 44064u_0^3u_1u_2^2u_3 - 5184u_0^3u_1u_4u_5 + \\
 & 7344u_0^3u_4^2 - 25920u_0^3u_2u_3u_5 + \frac{217728}{11}u_0^3u_2u_4^2 - \frac{12960}{11}u_0^3u_2^2u_4 - \frac{15552}{11}u_0^3u_5u_7 + \\
 & \frac{15552}{13}u_0^3u_6^2 - 5292u_0^2u_1^6 - 54432u_0^2u_1^3u_2u_3 + \frac{659664}{5}u_0^2u_1^2u_3^2 - 23328u_0^2u_1^2u_3u_5 + \\
 & 27216u_0^2u_1^2u_4^2 + 124416u_0^2u_1u_2u_3u_4 - \frac{4167936}{55}u_0^2u_1u_3^3 + \frac{46656}{11}u_0^2u_1u_5u_6 + \\
 & 54432u_0^2u_2^3u_4 - \frac{4653936}{55}u_0^2u_2^2u_3^2 + \frac{326592}{11}u_0^2u_2u_4u_6 - \frac{2262816}{143}u_0^2u_2u_5^2 + \\
 & \frac{653184}{143}u_0^2u_3u_4u_5 + \frac{8328096}{715}u_0^2u_4^3 + \frac{139968}{143}u_0^2u_6u_8 - \frac{489888}{715}u_0^2u_7^2 - 9072u_0u_1^5u_3 + \\
 & 90720u_0u_1^4u_2^2 + 46656u_0u_1^3u_3u_4 + \frac{715392}{5}u_0u_1^3u_2^2u_4 - 326592u_0u_1^2u_2u_3^2 + \\
 & 15552u_0u_1^2u_4u_6 - \frac{155520}{11}u_0u_1^2u_5^2 - \frac{1498176}{5}u_0u_1u_2^3u_3 - \frac{995328}{11}u_0u_1u_2u_4u_5 - \\
 & \frac{4572288}{55}u_0u_1u_3^2u_5 + \frac{22146048}{143}u_0u_1u_3u_4^2 - \frac{279936}{143}u_0u_1u_6u_7 - \frac{1398384}{55}u_0u_2^5 - \\
 & \frac{9813312}{55}u_0u_2^2u_3u_5 + \frac{4945536}{143}u_0u_2^2u_4^2 + \frac{11275200}{143}u_0u_2u_3^2u_4 - \frac{2612736}{143}u_0u_2u_5u_7 + \\
 & \frac{4992192}{715}u_0u_2u_6^2 - \frac{6018624}{143}u_0u_3^4 - \frac{2612736}{715}u_0u_3u_5u_6 + \frac{7838208}{715}u_0u_4^2u_6 - \\
 & \frac{12410496}{715}u_0u_4u_5^2 - \frac{279936}{715}u_0u_7u_9 + \frac{559872}{2431}u_0u_8^2 + 7560u_1^6u_2 + \\
 & 27216u_1^4u_2u_4 - 36936u_1^4u_8^2 - \frac{987552}{5}u_1^3u_2^2u_3 - 15552u_1^3u_4u_5 + \frac{673272}{5}u_1^2u_2^4 - \\
 & \frac{668736}{5}u_1^2u_2u_3u_5 + \frac{5699808}{55}u_1^2u_2^2u_4^2 + \frac{5917536}{55}u_1^2u_3^2u_4 - \frac{46656}{11}u_1^2u_5u_7 + \\
 & \frac{443232}{143}u_1^2u_6^2 + \frac{24525504}{55}u_1u_2^2u_3u_4 - \frac{15132096}{65}u_1u_2u_3^3 + \frac{3825792}{143}u_1u_2u_5u_6 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{44416512}{715} u_1 u_3 u_4 u_6 - \frac{30466368}{715} u_1 u_3 u_5^2 - \frac{30046464}{715} u_1 u_4^2 u_5 + \frac{279936}{715} u_1 u_7 u_8 + \\
& \frac{894240}{11} u_2^4 u_4 - \frac{9961056}{715} u_2^3 u_3^2 + \frac{53141184}{715} u_2^2 u_4 u_6 - \frac{863136}{715} u_2^2 u_5^2 - \\
& \frac{6625152}{143} u_2 u_8 u_4 u_5 - \frac{139968}{5} u_2 u_4^3 + \frac{3359232}{715} u_2 u_6 u_8 - \frac{15816384}{12155} u_2 u_7^2 - \\
& \frac{44183232}{715} u_3^3 u_5 + \frac{24051168}{715} u_3^2 u_4^2 + \frac{13436928}{12155} u_3 u_6 u_7 - \frac{94058496}{12155} u_4 u_5 u_7 + \\
& \frac{40310784}{12155} u_4 u_6^2 - \frac{5878656}{12155} u_5^2 u_6 + \frac{839808}{12155} u_8 u_{10} - \frac{419904}{12155} u_9^2 \quad (A.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} = & \frac{1}{11} u_0^{11} - 45 u_0^8 u_1^2 + 216 u_0^7 u_2^2 - 1260 u_0^5 u_1^4 - 648 u_0^6 u_3^2 + 4320 u_0^5 u_2^3 + 22680 u_0^4 u_1^2 u_2^2 - \\
& 7560 u_0^2 u_1^6 + 1296 u_0^5 u_4^2 - 32400 u_0^4 u_2 u_3^2 - 38880 u_0^3 u_1^2 u_3^2 + 45360 u_0^3 u_4^2 + \\
& 238464 u_0^2 u_1^2 u_3^2 + 136080 u_0 u_1^4 u_2^2 - \frac{19440}{11} u_0^4 u_5^2 + \frac{544320}{11} u_0^3 u_2 u_4^2 - 58320 u_0^4 u_1^2 u_3^2 + \\
& 38880 u_0^2 u_1^2 u_4^2 + \frac{1788480}{11} u_0 u_2^5 - \frac{1524096}{11} u_0^2 u_1 u_3^3 + 423792 u_1^2 u_2^4 - \frac{4906656}{11} u_0^2 u_2^2 u_3^2 - \\
& 668736 u_0 u_1^2 u_2 u_3^2 - \frac{22091616}{143} u_0 u_3^4 + \frac{233280}{143} u_0^3 u_6^2 + \frac{5878656}{143} u_0^2 u_4^3 - \\
& \frac{6531840}{143} u_0^2 u_2 u_5^2 - \frac{233280}{11} u_0 u_1^2 u_5^2 + \frac{44416512}{143} u_0 u_1 u_3 u_4^2 + \frac{53141184}{143} u_0 u_2^2 u_4^2 + \\
& \frac{2659392}{11} u_1^2 u_2 u_4^2 - \frac{12908160}{13} u_1 u_2 u_3^3 - \frac{131803200}{143} u_2^3 u_3^2 - \frac{139968}{143} u_0^2 u_7^2 + \\
& \frac{3359232}{143} u_0 u_2 u_6^2 + \frac{699840}{143} u_1^2 u_6^2 - \frac{11757312}{143} u_0 u_4 u_5^2 - \frac{13436928}{143} u_1 u_3 u_5^2 - \\
& \frac{17775936}{143} u_2^2 u_5^2 + \frac{37511424}{143} u_2 u_4^3 + \frac{54447552}{143} u_3^2 u_4^2 + \frac{839808}{2431} u_0 u_8^2 - \frac{12597120}{2431} u_2 u_7^2 + \\
& \frac{5038848}{221} u_4 u_6^2 - \frac{2519424}{46189} u_9^2 \quad (A.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{11} = & \frac{1}{12} u_0^{12} + u_0^{10} u_2 - 50 u_0^8 u_1^2 - 90 u_0^8 u_1 u_3 + 261 u_0^8 u_2^2 + 360 u_0^7 u_1^2 u_2 + 432 u_0^7 u_2 u_4 - \\
& 864 u_0^7 u_3^2 - 1890 u_0^6 u_1^4 - 3024 u_0^6 u_1 u_2 u_3 + 4536 u_0^6 u_2^3 - 1296 u_0^6 u_3 u_5 + 1944 u_0^6 u_4^2 - \\
& 5040 u_0^5 u_1^3 u_3 + 39312 u_0^5 u_1^2 u_2^2 + 7776 u_0^5 u_1 u_3 u_4 + 12960 u_0^5 u_2^2 u_4 - 36288 u_0^5 u_2 u_3^2 + \\
& 2592 u_0^5 u_4 u_6 - \frac{33696}{11} u_0^5 u_5^2 + 18900 u_0^4 u_1^4 u_2 + 45360 u_0^4 u_1^2 u_2 u_4 - 81000 u_0^4 u_1^2 u_3^2 - \\
& 110160 u_0^4 u_1 u_2^2 u_3 - 12960 u_0^4 u_1 u_4 u_5 + 29700 u_0^4 u_2^4 - 64800 u_0^4 u_2 u_3 u_5 + \\
& \frac{680400}{11} u_0^4 u_2 u_4^2 - \frac{32400}{11} u_0^4 u_3^2 u_4 - \frac{38880}{11} u_0^4 u_5 u_7 + \frac{486000}{143} u_0^4 u_6^2 - 20160 u_0^3 u_1^6 - \\
& 181440 u_0^3 u_1^3 u_2 u_3 + 519264 u_0^3 u_1^2 u_2^2 - 77760 u_0^3 u_1^2 u_3 u_5 + 103680 u_0^3 u_1^2 u_4^2 + \\
& 414720 u_0^3 u_1 u_2 u_3 u_4 - \frac{3286656}{11} u_0^3 u_1 u_3^3 + \frac{155520}{11} u_0^3 u_1 u_5 u_6 + 181440 u_0^3 u_2^3 u_4 - \\
& \frac{4738176}{11} u_0^3 u_2^2 u_3^2 + \frac{1088640}{11} u_0^3 u_2 u_4 u_6 - \frac{9720000}{143} u_0^3 u_2 u_5^2 + \frac{2177280}{143} u_0^3 u_3 u_4 u_5 + \\
& \frac{7511616}{143} u_0^3 u_4^3 + \frac{466560}{143} u_0^3 u_6 u_8 - \frac{373248}{143} u_0^3 u_7^2 - 45360 u_0^2 u_1^5 u_3 + \\
& 521640 u_0^2 u_1^4 u_2^2 + 233280 u_0^2 u_1^3 u_3 u_4 + 715392 u_0^2 u_1^2 u_2^2 u_4 - 1967328 u_0^2 u_1^2 u_2 u_3^2 + \\
& 77760 u_0^2 u_1^2 u_4 u_6 - \frac{894240}{11} u_0^2 u_1^2 u_5^2 - 1498176 u_0^2 u_1 u_2^3 u_3 - \frac{4976640}{11} u_0^2 u_1 u_2 u_4 u_5 - \\
& \frac{4572288}{11} u_0^2 u_1 u_3^2 u_5 + \frac{132938496}{143} u_0^2 u_1 u_3 u_4^2 - \frac{1399680}{143} u_0^2 u_1 u_6 u_7 - \\
& \frac{504144}{11} u_0^2 u_2^5 - \frac{9813312}{11} u_0^2 u_2^2 u_3 u_5 + \frac{51298272}{143} u_0^2 u_2^2 u_4^2 + \frac{56376000}{143} u_0^2 u_2 u_3^2 u_4 - \\
& \frac{13063680}{143} u_0^2 u_2 u_5 u_7 + 46656 u_0^2 u_2 u_6^2 - \frac{41138928}{143} u_0^2 u_3^4 - \frac{2612736}{143} u_0^2 u_3 u_5 u_6 + \\
& \frac{7838208}{143} u_0^2 u_4 u_6 - \frac{18289152}{143} u_0^2 u_4 u_5^2 - \frac{279936}{143} u_0^2 u_7 u_9 + \frac{3219264}{2431} u_0^2 u_8^2 + \\
& 75600 u_0 u_1^6 u_2 + 272160 u_0 u_1^4 u_2 u_4 - 427680 u_0 u_1^4 u_3^2 - 1975104 u_0 u_1^3 u_2^2 u_3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 155520u_0u_1^3u_4u_5 + 1770336u_0u_1^2u_4^2 - 1337472u_0u_1^2u_2u_3u_5 + \\
 & \frac{14059008}{11}u_0u_1^2u_2u_4^2 + \frac{11835072}{11}u_0u_1^2u_3^2u_4 - \frac{466560}{11}u_0u_1^2u_5u_7 + \frac{466560}{13}u_0u_1^2u_6^2 + \\
 & \frac{49051008}{11}u_0u_1u_2^2u_3u_4 - \frac{43172352}{13}u_0u_1u_2u_3^3 + \frac{38257920}{143}u_0u_1u_2u_5u_6 + \\
 & \frac{88833024}{143}u_0u_1u_3u_4u_6 - \frac{74369664}{143}u_0u_1u_3u_5^2 - \frac{60092928}{143}u_0u_1u_4^2u_5 + \\
 & \frac{559872}{143}u_0u_1u_7u_8 + \frac{8942400}{11}u_0u_2^4u_4 - \frac{151725312}{143}u_0u_2^3u_3^2 + \frac{106282368}{143}u_0u_2^2u_4u_6 - \\
 & \frac{19502208}{143}u_0u_2^2u_5^2 - \frac{66251520}{143}u_0u_2u_3u_4u_5 - \frac{2519424}{143}u_0u_2u_4^3 + \frac{6718464}{143}u_0u_2u_6u_8 - \\
 & \frac{44229888}{2431}u_0u_2u_7^2 - \frac{88366464}{143}u_0u_3^3u_5 + \frac{102549888}{143}u_0u_3^2u_4^2 + \frac{26873856}{2431}u_0u_3u_6u_7 - \\
 & \frac{188116992}{2431}u_0u_4u_5u_7 + \frac{136048896}{2431}u_0u_4u_6^2 - \frac{11757312}{2431}u_0u_5^2u_6 + \frac{1679616}{2431}u_0u_8u_{10} - \\
 & \frac{18475776}{46189}u_0u_9^2 - 9450u_1^8 - 272160u_1^5u_2u_3 + 1040688u_1^4u_2^3 - 116640u_1^4u_3u_5 + \\
 & 136080u_1^4u_4^2 + 1804032u_1^3u_2u_3u_4 - \frac{11415168}{11}u_1^3u_3^3 + \frac{466560}{11}u_1^3u_5u_6 + \\
 & 1695168u_1^2u_3^2u_4 - \frac{55668384}{11}u_1^2u_2^2u_3^2 + \frac{5318784}{11}u_1^2u_2u_4u_6 - \frac{48102336}{143}u_1^2u_2u_5^2 - \\
 & \frac{108988416}{143}u_1^2u_3u_4u_5 + \frac{67884480}{143}u_1^2u_4^3 + \frac{1399680}{143}u_1^2u_6u_8 - \frac{979776}{143}u_1^2u_7^2 - \\
 & \frac{36912672}{11}u_1u_2^4u_3 - \frac{244570752}{143}u_1u_2^2u_4u_5 - \frac{38724480}{13}u_1u_2u_3^2u_5 + \\
 & \frac{611100288}{143}u_1u_2u_3u_4^2 - \frac{9517824}{143}u_1u_2u_6u_7 + \frac{103607424}{143}u_1u_3^3u_4 - \\
 & \frac{26873856}{143}u_1u_3u_5u_7 + \frac{295892352}{2431}u_1u_3u_6^2 + \frac{644972544}{2431}u_1u_4u_5u_6 - \\
 & \frac{287214336}{2431}u_1u_5^3 - \frac{1679616}{2431}u_1u_8u_9 - \frac{47950704}{143}u_2^6 - \frac{263606400}{143}u_2^3u_3u_5 - \\
 & \frac{12550464}{143}u_2^3u_4^2 + \frac{465860160}{143}u_2^2u_3^2u_4 - \frac{35551872}{143}u_2^2u_5u_7 + \frac{30373056}{2431}u_2^2u_6^2 - \\
 & \frac{22091616}{143}u_2u_3^4 + \frac{254741760}{2431}u_2u_3u_5u_6 + \frac{1031284224}{2431}u_2u_4^2u_6 - \frac{317167488}{2431}u_2u_4u_5^2 - \\
 & \frac{25194240}{2431}u_2u_7u_9 + \frac{141927552}{46189}u_2u_8^2 + \frac{108895104}{143}u_3^2u_4u_6 - \frac{1052979264}{2431}u_3^2u_6^2 + \\
 & \frac{997411968}{2431}u_3u_4^2u_5 - \frac{125971200}{46189}u_3u_7u_8 - \frac{89929440}{2431}u_4^4 + \frac{1048080384}{46189}u_4u_6u_8 - \\
 & \frac{461054592}{46189}u_4u_7^2 - \frac{634894848}{46189}u_5^2u_8 + \frac{221709312}{46189}u_5u_6u_7 + \frac{277136640}{46189}u_6^3 - \\
 & \frac{5038848}{46189}u_9u_{11} + \frac{2519424}{46189}u_{10}^2 \tag{A.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{12} = & \frac{1}{12}u_0^{12} - 55u_0^9u_1^2 + 297u_0^8u_2^2 - \frac{7128}{7}u_0^7u_3^2 - 2310u_0^6u_4^2 + 7920u_0^6u_5^2 + 2376u_0^6u_6^2 + \\
 & 49896u_0^5u_1^2u_2^2 - 71280u_0^5u_2u_3^2 - 3888u_0^5u_5^2 - 106920u_0^4u_1^2u_3^2 + 124740u_0^4u_2^4 + \\
 & 136080u_0^4u_2u_4^2 + \frac{58320}{13}u_0^4u_6^2 - 27720u_0^3u_1^6 + 874368u_0^3u_1^2u_3^2 + 142560u_0^3u_1^2u_4^2 - \\
 & 508032u_0^3u_1u_3^3 - 1635552u_0^3u_2^2u_3^2 - \frac{2177280}{13}u_0^3u_2u_5^2 + \frac{1959552}{13}u_0^3u_4^3 - \\
 & \frac{46656}{13}u_0^3u_7^2 + 748440u_0^2u_1^4u_2^2 - 3678048u_0^2u_1^2u_2u_3^2 - 116640u_0^2u_1^2u_5^2 + \\
 & \frac{22208256}{13}u_0^2u_1u_3u_4^2 + 894240u_0^2u_5^2 + \frac{26570592}{13}u_0^2u_2^2u_4^2 + \frac{1679616}{13}u_0^2u_2u_6^2 - \\
 & \frac{11045808}{13}u_0^2u_3^4 - \frac{5878656}{13}u_0^2u_4u_5^2 + \frac{419904}{221}u_0^2u_8^2 - 641520u_0u_1^4u_3^2 + \\
 & 4661712u_0u_1^2u_4^2 + 2659392u_0u_1^2u_2u_4^2 + \frac{699840}{13}u_0u_1^2u_6^2 - \frac{141989760}{13}u_0u_1u_2u_3^3 - \\
 & \frac{13436928}{13}u_0u_1u_3u_5^2 - \frac{131803200}{13}u_0u_2^3u_3^2 - \frac{17775936}{13}u_0u_2^2u_5^2 + \frac{37511424}{13}u_0u_2u_4^3 - \\
 & \frac{12597120}{221}u_0u_2u_7^2 + \frac{54447552}{13}u_0u_3^2u_4^2 + \frac{55427328}{221}u_0u_4u_6^2 - \frac{2519424}{4199}u_0u_9^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 14850u_1^8 + 1910304u_1^4u_2^3 + 213840u_1^4u_4^2 - \frac{13747968}{7}u_1^3u_3^3 - \frac{96445728}{7}u_1^2u_2^2u_3^2 - \\
& \frac{10171008}{13}u_1^2u_2u_5^2 + \frac{102176640}{91}u_1^2u_4^3 - \frac{139968}{13}u_1^2u_7^2 + \frac{1178437248}{91}u_1u_2u_3u_4^2 + \\
& \frac{57946752}{221}u_1u_3u_6^2 - \frac{498845952}{1547}u_1u_5^3 + \frac{110213136}{91}u_2^6 + \frac{402221376}{91}u_2^3u_4^2 + \\
& \frac{84120768}{221}u_2^2u_6^2 - \frac{669319200}{91}u_2u_3^4 - \frac{4717201536}{1547}u_2u_4u_5^2 + \frac{46189440}{4199}u_2u_8^2 - \\
& \frac{2140530624}{1547}u_3^2u_5^2 + \frac{1497307680}{1547}u_4^4 - \frac{249422976}{4199}u_4u_7^2 + \frac{110854656}{2261}u_6^3 + \frac{2519424}{29393}u_{10}^2
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
X_{12} = & \frac{1}{13}u_0^{13} + u_0^{11}u_2 - \frac{121}{2}u_0^{10}u_1^2 - 110u_0^9u_1u_3 + 352u_0^9u_2^2 + 495u_0^8u_1^2u_2 + \\
& 594u_0^8u_2u_4 - \frac{9207}{7}u_0^8u_3^2 - 3300u_0^7u_1^4 - 4752u_0^7u_1u_2u_3 + \frac{57816}{7}u_0^7u_2^3 - \\
& \frac{14256}{7}u_0^7u_3u_5 + \frac{23760}{7}u_0^7u_4^2 - 9240u_0^6u_1^3u_3 + 80388u_0^6u_1^2u_2^2 + 14256u_0^6u_1u_3u_4 + \\
& 23760u_0^6u_2^2u_4 - 78408u_0^6u_2u_3^2 + 4752u_0^6u_4u_6 - 6264u_0^6u_5^2 + 41580u_0^5u_1^4u_2 + \\
& 99792u_0^5u_1^2u_2u_4 - 199584u_0^5u_1^2u_3^2 - 242352u_0^5u_1u_2^2u_3 - 28512u_0^5u_1u_4u_5 + \\
& 90288u_0^5u_4^2 - 142560u_0^5u_2u_3u_5 + 163296u_0^5u_2u_4^2 - 6480u_0^5u_3^2u_4 - 7776u_0^5u_5u_7 + \\
& \frac{108864}{13}u_0^5u_6^2 - 62370u_0^4u_1^6 - 498960u_0^4u_1^3u_2u_3 + 1646568u_0^4u_1^2u_2^3 - \\
& 213840u_0^4u_1^2u_3u_5 + 320760u_0^4u_1^2u_4^2 + 1140480u_0^4u_1u_2u_3u_4 - 948672u_0^4u_1u_3^3 + \\
& 38880u_0^4u_1u_5u_6 + 498960u_0^4u_2^3u_4 - 1593432u_0^4u_2^2u_3^2 + 272160u_0^4u_2u_4u_6 - \\
& \frac{2974320}{13}u_0^4u_2u_5^2 + \frac{544320}{13}u_0^4u_3u_4u_5 + \frac{2367792}{13}u_0^4u_4^3 + \frac{116640}{13}u_0^4u_6u_8 - \\
& \frac{104976}{13}u_0^4u_7^2 - 166320u_0^3u_1^5u_3 + 2162160u_0^3u_1^4u_2^2 + 855360u_0^3u_1^3u_3u_4 + \\
& 2623104u_0^3u_1^2u_2^2u_4 - 8439552u_0^3u_1^2u_2u_3^2 + 285120u_0^3u_1^2u_4u_6 - 336960u_0^3u_1^2u_5^2 - \\
& 5493312u_0^3u_1u_2^3u_3 - 1658880u_0^3u_1u_2u_4u_5 - 1524096u_0^3u_1u_3^2u_5 + \\
& \frac{51715584}{13}u_0^3u_1u_3u_4^2 - \frac{466560}{13}u_0^3u_1u_6u_7 + 130032u_0^3u_2^5 - 3271104u_0^3u_2^2u_3u_5 + \\
& \frac{25956288}{13}u_0^3u_2^2u_4^2 + \frac{18792000}{13}u_0^3u_2u_3^2u_4 - \frac{4354560}{13}u_0^3u_2u_5u_7 + \frac{2783808}{13}u_0^3u_2u_6^2 - \\
& \frac{17394912}{13}u_0^3u_3^4 - \frac{870912}{13}u_0^3u_3u_5u_6 + \frac{2612736}{13}u_0^3u_4^2u_6 - \frac{8055936}{13}u_0^3u_4u_5^2 - \\
& \frac{93312}{13}u_0^3u_7u_9 + \frac{93312}{17}u_0^3u_8^2 + 415800u_0^2u_1^6u_2 + 1496880u_0^2u_1^4u_2u_4 - \\
& 2673000u_0^2u_1^4u_3^2 - 10863072u_0^2u_1^3u_2^2u_3 - 855360u_0^2u_1^3u_4u_5 + 12067704u_0^2u_1^2u_2^4 - \\
& 7356096u_0^2u_1^2u_2u_3u_5 + 8359200u_0^2u_1^2u_2u_4^2 + 5917536u_0^2u_1^2u_3^2u_4 - \\
& 233280u_0^2u_1^2u_5u_7 + \frac{2916000}{13}u_0^2u_1^2u_6^2 + 24525504u_0^2u_1u_2^2u_3u_4 - \\
& \frac{308442816}{13}u_0^2u_1u_2u_3^3 + \frac{19128960}{13}u_0^2u_1u_2u_5u_6 + \frac{44416512}{13}u_0^2u_1u_3u_4u_6 - \\
& \frac{43903296}{13}u_0^2u_1u_3u_5^2 - \frac{30046464}{13}u_0^2u_1u_4^2u_3 + \frac{279936}{13}u_0^2u_1u_7u_8 + \\
& 4471200u_0^2u_2^4u_4 - \frac{141764256}{13}u_0^2u_2^3u_3^2 + \frac{53141184}{13}u_0^2u_2^2u_4u_6 - \frac{18639072}{13}u_0^2u_2^2u_5^2 - \\
& \frac{33125760}{13}u_0^2u_2u_3u_4u_5 + \frac{17496000}{13}u_0^2u_2u_4^3 + \frac{3359232}{13}u_0^2u_2u_6u_8 - \\
& \frac{28413504}{221}u_0^2u_2u_7^2 - \frac{44183232}{13}u_0^2u_3^3u_5 + \frac{78498720}{13}u_0^2u_3^2u_4^2 + \frac{13436928}{221}u_0^2u_3u_6u_7 - \\
& \frac{94058496}{221}u_0^2u_4u_5u_7 + \frac{95738112}{221}u_0^2u_4u_6^2 - \frac{5878656}{221}u_0^2u_5^2u_6 + \frac{839808}{221}u_0^2u_8u_{10} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{10497600}{4199} u_0^2 u_9^2 - 118800 u_0 u_1^8 - 2993760 u_0 u_1^5 u_2 u_3 + 13357872 u_0 u_1^4 u_3^2 - \\
 & 1283040 u_0 u_1^4 u_3 u_5 + 1710720 u_0 u_1^4 u_4^2 + 19844352 u_0 u_1^3 u_2 u_3 u_4 - \\
 & \frac{93654144}{7} u_0 u_1^3 u_3^3 + 466560 u_0 u_1^3 u_5 u_6 + 18646848 u_0 u_1^2 u_2^3 u_4 - \\
 & \frac{486124416}{7} u_0 u_1^2 u_2^2 u_3^2 + 5318784 u_0 u_1^2 u_2 u_4 u_6 - \frac{58273344}{13} u_0 u_1^2 u_2 u_5^2 - \\
 & \frac{108988416}{13} u_0 u_1^2 u_3 u_4 u_5 + \frac{577368000}{91} u_0 u_1^2 u_4^3 + \frac{1399680}{13} u_0 u_1^2 u_6 u_8 - \\
 & \frac{1119744}{13} u_0 u_1^2 u_7^2 - 36912672 u_0 u_1 u_2^4 u_3 - \frac{244570752}{13} u_0 u_1 u_2^2 u_4 u_5 - \\
 & \frac{425969280}{13} u_0 u_1 u_2 u_3^2 u_5 + \frac{5456139264}{91} u_0 u_1 u_2 u_8 u_4^2 - \frac{9517824}{13} u_0 u_1 u_2 u_6 u_7 + \\
 & \frac{103607424}{13} u_0 u_1 u_3^3 u_4 - \frac{26873856}{13} u_0 u_1 u_3 u_5 u_7 + \frac{353839104}{221} u_0 u_1 u_3 u_6^2 + \\
 & \frac{644972544}{221} u_0 u_1 u_4 u_5 u_6 - \frac{2509346304}{1547} u_0 u_1 u_5^3 - \frac{1679616}{221} u_0 u_1 u_8 u_9 - \\
 & \frac{225441792}{91} u_0 u_2^6 - \frac{263606400}{13} u_0 u_2^3 u_3 u_3 + \frac{314368128}{91} u_0 u_2^3 u_4^2 + \\
 & \frac{465860160}{13} u_0 u_2^2 u_3^2 u_4 - \frac{35551872}{13} u_0 u_2^2 u_5 u_7 + \frac{114493824}{221} u_0 u_2^2 u_6^2 - \\
 & \frac{823960512}{91} u_0 u_2 u_3^4 + \frac{19595520}{17} u_0 u_2 u_3 u_5 u_6 + \frac{1031284224}{221} u_0 u_2 u_4^2 u_6 - \\
 & \frac{6937373952}{1547} u_0 u_2 u_4 u_5^2 - \frac{25194240}{221} u_0 u_2 u_7 u_9 + \frac{188116992}{4199} u_0 u_2 u_8^2 + \\
 & \frac{108895104}{13} u_0 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{9511385472}{1547} u_0 u_3^2 u_5^2 + \frac{997411968}{221} u_0 u_3 u_4^2 u_5 - \\
 & \frac{125971200}{4199} u_0 u_3 u_7 u_8 + \frac{867801600}{1547} u_0 u_4^4 + \frac{80621568}{323} u_0 u_4 u_6 u_8 - \\
 & \frac{710477568}{4199} u_0 u_4 u_7^2 - \frac{634894848}{4199} u_0 u_5^2 u_8 + \frac{221709312}{4199} u_0 u_5 u_6 u_7 + \frac{3381067008}{29393} u_0 u_6^3 - \\
 & \frac{5038848}{4199} u_0 u_9 u_{11} + \frac{20155392}{29393} u_0 u_{10}^2 - 118800 u_1^7 u_3 + 1912680 u_1^6 u_2^2 + \\
 & 1283040 u_1^5 u_3 u_4 + 5730912 u_1^4 u_2^2 u_4 - 16722288 u_1^4 u_2 u_3^2 + 427680 u_1^4 u_4 u_6 - \\
 & 447120 u_1^4 u_5^2 - 33929280 u_1^3 u_2^3 u_3 - 7029504 u_1^3 u_2 u_4 u_5 - \frac{41243904}{7} u_1^3 u_3^2 u_5 + \\
 & \frac{1237472640}{91} u_1^3 u_3 u_4^2 - \frac{1399680}{13} u_1^3 u_6 u_7 + \frac{84972240}{7} u_1^2 u_2^5 - \frac{192891456}{7} u_1^2 u_2^2 u_3 u_5 + \\
 & \frac{2001363552}{91} u_1^2 u_2^2 u_4^2 + \frac{5673945024}{91} u_1^2 u_2 u_3^2 u_4 - \frac{20342016}{13} u_1^2 u_2 u_5 u_7 + \\
 & \frac{13110336}{13} u_1^2 u_2 u_6^2 - \frac{1733841936}{91} u_1^2 u_3^4 + 2426112 u_1^2 u_3 u_5 u_6 + \frac{237945600}{91} u_1^2 u_4^2 u_6 - \\
 & \frac{8179076736}{1547} u_1^2 u_4 u_5^2 - \frac{279936}{13} u_1^2 u_7 u_9 + \frac{3219264}{221} u_1^2 u_8^2 + \frac{6860422656}{91} u_1 u_2^3 u_3 u_4 - \\
 & \frac{672810624}{13} u_1 u_2^2 u_3^3 + \frac{76235904}{13} u_1 u_2^2 u_5 u_5 + \frac{2356874496}{91} u_1 u_2 u_3 u_4 u_6 - \\
 & \frac{25232124672}{1547} u_1 u_2 u_3 u_5^2 - \frac{35342573184}{1547} u_1 u_2 u_4^2 u_5 + \frac{34712064}{221} u_1 u_2 u_7 u_8 - \\
 & \frac{24631475328}{1547} u_1 u_3^2 u_4 u_5 + \frac{2504027520}{119} u_1 u_3 u_4^3 + \frac{115893504}{221} u_1 u_3 u_6 u_8 - \\
 & \frac{1367767296}{4199} u_1 u_3 u_7^2 - \frac{3250056960}{4199} u_1 u_4 u_6 u_7 - \frac{23989955328}{29393} u_1 u_5^2 u_7 + \\
 & \frac{34589172096}{29393} u_1 u_5 u_6^2 + \frac{5038848}{4199} u_1 u_9 u_{10} + \frac{661278816}{91} u_2^5 u_4 - \frac{1061194608}{91} u_2^4 u_3^2 + \\
 & \frac{804442752}{91} u_2^3 u_4 u_6 + \frac{991953216}{1547} u_2^3 u_5^2 - \frac{5696324352}{221} u_2^2 u_3 u_4 u_5 - \frac{2180281536}{221} u_2^2 u_4^3 + \\
 & \frac{168241536}{221} u_2^2 u_6 u_8 - \frac{265239360}{4199} u_2^2 u_7^2 - \frac{2677276800}{91} u_2 u_3^3 u_5 + \frac{41180591808}{1547} u_2 u_3^2 u_4^2 - \\
 & \frac{835329024}{4199} u_2 u_3 u_6 u_7 - \frac{97775486208}{29393} u_2 u_4 u_5 u_7 + \frac{14299690752}{29393} u_2 u_4 u_6^2 + \\
 & \frac{4591230336}{4199} u_2 u_5^2 u_6 + \frac{92378880}{4199} u_2 u_8 u_{10} - \frac{202393728}{29393} u_2 u_9^2 - \frac{8675333280}{1547} u_3^4 u_4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{4281061248}{1547} u_3^2 u_5 u_7 + \frac{43593733440}{29393} u_3^2 u_6^2 + \frac{713276928}{323} u_3 u_4 u_5 u_6 - \\ & \frac{59462325504}{29393} u_3 u_5^3 + \frac{184757760}{29393} u_3 u_8 u_9 - \frac{8421874560}{29393} u_4^3 u_6 - \frac{19821288384}{29393} u_4^2 u_5^2 - \\ & \frac{1829101824}{29393} u_4 u_7 u_9 + \frac{822172032}{29393} u_4 u_8^2 + \frac{332563968}{4199} u_5 u_6 u_9 - \frac{498845952}{29393} u_5 u_7 u_8 + \\ & \frac{1995383808}{29393} u_6^2 u_8 - \frac{249422976}{4199} u_6 u_7^2 + \frac{5038848}{29393} u_{10} u_{12} - \frac{2519424}{29393} u_{11}^2 \end{aligned} \quad (A.24)$$

$$\begin{aligned} T_{13} = & \frac{1}{13} u_0^{13} - 66 u_0^{10} u_1^2 + 396 u_0^9 u_2^2 - \frac{10692}{7} u_0^8 u_3^2 - 3960 u_0^7 u_1^4 + \\ & \frac{95040}{7} u_0^7 u_2^3 + \frac{28512}{7} u_0^7 u_4^2 + 99792 u_0^6 u_1^2 u_2^2 - 142560 u_0^6 u_2 u_2^2 - 7776 u_0^6 u_5^2 - \\ & 256608 u_0^5 u_1^2 u_3^2 + 299376 u_0^5 u_2^4 + 326592 u_0^5 u_2 u_4^2 + \frac{139968}{13} u_0^5 u_6^2 - \\ & 83160 u_0^4 u_1^6 + 2623104 u_0^4 u_1^2 u_2^3 + 427680 u_0^4 u_1^2 u_4^2 - 1524096 u_0^4 u_1 u_3^3 - \\ & 4906656 u_0^4 u_2^2 u_3^2 - \frac{6531840}{13} u_0^4 u_2 u_5^2 + \frac{5878656}{13} u_0^4 u_4^3 - \frac{139968}{13} u_0^4 u_7^2 + \\ & 2993760 u_0^3 u_1^4 u_2^2 - 14712192 u_0^3 u_1^2 u_2 u_3^2 - 466560 u_0^3 u_1^2 u_5^2 + \frac{8833024}{13} u_0^3 u_1 u_3 u_4^2 + \\ & 3576960 u_0^3 u_2^5 + \frac{106282368}{13} u_0^3 u_2^2 u_4^2 + \frac{6718464}{13} u_0^3 u_2 u_6^2 - \frac{44183232}{13} u_0^3 u_3^4 - \\ & \frac{23514624}{13} u_0^3 u_4 u_5^2 + \frac{1679616}{221} u_0^3 u_8^2 - 3849120 u_0^2 u_1^4 u_3^2 + 27970272 u_0^2 u_1^2 u_2^4 + \\ & 15956352 u_0^2 u_1^2 u_2 u_4^2 + \frac{4199040}{13} u_0^2 u_1^2 u_6^2 - \frac{851938560}{13} u_0^2 u_1 u_2 u_3^3 - \\ & \frac{80621568}{13} u_0^2 u_1 u_3 u_5^2 - \frac{790819200}{13} u_0^2 u_2^3 u_3^2 - \frac{106655616}{13} u_0^2 u_2^2 u_5^2 + \frac{225068544}{13} u_0^2 u_2 u_4^3 - \\ & \frac{75582720}{221} u_0^2 u_2 u_7^2 + \frac{326685312}{13} u_0^2 u_3^2 u_4^2 + \frac{332563968}{221} u_0^2 u_4 u_6^2 - \frac{15116544}{4199} u_0^2 u_9^2 - \\ & 178200 u_0 u_1^6 + 22923648 u_0 u_1^4 u_3^2 + 2566080 u_0 u_1^4 u_4^2 - \frac{164975616}{7} u_0 u_1^3 u_3^3 - \\ & \frac{1157348736}{7} u_0 u_1^2 u_2^2 u_3^2 - \frac{122052096}{13} u_0 u_1^2 u_2 u_5^2 + \frac{1226119680}{91} u_0 u_1^2 u_4^3 - \\ & \frac{1679616}{13} u_0 u_1^2 u_7^2 + \frac{14141246976}{91} u_0 u_1 u_2 u_3 u_4^2 + \frac{695361024}{221} u_0 u_1 u_3 u_6^2 - \\ & \frac{5986151424}{1547} u_0 u_1 u_5^3 + \frac{1322557632}{91} u_0 u_6^2 + \frac{4826656512}{91} u_0 u_3^2 u_4^2 + \frac{1009449216}{221} u_0 u_2^2 u_6^2 - \\ & \frac{8031830400}{91} u_0 u_2 u_3^4 - \frac{56606418432}{1547} u_0 u_2 u_4 u_5^2 + \frac{554273280}{4199} u_0 u_2 u_8^2 - \\ & \frac{25686367488}{1547} u_0 u_3^2 u_5^2 + \frac{17967692160}{1547} u_0 u_4^3 - \frac{2993075712}{4199} u_0 u_4 u_7^2 + \frac{1330255872}{2261} u_0 u_6^3 + \\ & \frac{30233088}{29393} u_0 u_{10}^2 + 2993760 u_1^6 u_2^2 - 31306176 u_1^4 u_2 u_3^2 - 699840 u_1^4 u_5^2 + \\ & \frac{2345863680}{91} u_1^3 u_3 u_4^2 + \frac{359437824}{7} u_1^2 u_5^2 + \frac{5732809344}{91} u_1^2 u_2 u_4^2 + \frac{30233088}{13} u_1^2 u_2 u_6^2 - \\ & \frac{4438245312}{91} u_1^2 u_3^4 - \frac{19550730240}{1547} u_1^2 u_4 u_5^2 + \frac{5038848}{221} u_1^2 u_8^2 - \frac{2086456320}{7} u_1 u_2^2 u_3^3 - \\ & \frac{76862587392}{1547} u_1 u_2 u_3 u_5^2 + \frac{121234682880}{1547} u_1 u_3 u_4^3 - \frac{221709312}{323} u_1 u_3 u_7^2 + \\ & \frac{92785347072}{29393} u_1 u_5 u_6^2 - \frac{11314313280}{91} u_2^4 u_3^2 - \frac{28862521344}{1547} u_2^3 u_5^2 + \frac{109369875456}{1547} u_2^2 u_4^3 - \\ & \frac{4560157440}{4199} u_2^2 u_7^2 + \frac{3831204096}{17} u_2 u_3^2 u_4^2 + \frac{315381496320}{29393} u_2 u_4 u_6^2 - \frac{665127936}{29393} u_2 u_9^2 + \\ & \frac{134360881920}{29393} u_3^2 u_6^2 - \frac{353737207296}{29393} u_3 u_5^3 - \frac{746379360000}{29393} u_4^2 u_5^2 + \frac{332563968}{2261} u_4 u_8^2 - \\ & \frac{997691904}{2261} u_6 u_7^2 - \frac{90699264}{676039} u_{11}^2 \end{aligned} \quad (A.25)$$

$$\begin{aligned} X_{13} = & \frac{1}{14} u_0^{14} + u_0^{12} u_2 - 72 u_0^{11} u_1^2 - 132 u_0^{10} u_1 u_3 + 462 u_0^{10} u_2^2 + 660 u_0^9 u_1^2 u_2 + \\ & 792 u_0^9 u_2 u_4 - \frac{13464}{7} u_0^9 u_3^2 - 5445 u_0^8 u_1^4 - 7128 u_0^8 u_1 u_2 u_3 + \frac{98604}{7} u_0^8 u_2^3 - \\ & \frac{21384}{7} u_0^8 u_3 u_5 + \frac{39204}{7} u_0^8 u_4^2 - 15840 u_0^7 u_1^3 u_3 + 152064 u_0^7 u_1^2 u_2^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{171072}{7}u_0^7u_1u_3u_4 + \frac{285120}{7}u_0^7u_2^2u_4 - \frac{1083456}{7}u_0^7u_2u_3^2 + \frac{57024}{7}u_0^7u_4u_6 - \\
 & \frac{82944}{7}u_0^7u_5^2 + 83160u_0^6u_1^4u_2 + 199584u_0^6u_1^2u_2u_4 - 441936u_0^6u_1^2u_3^2 - \\
 & 484704u_0^6u_1u_2^2u_3 - 57024u_0^6u_1u_4u_5 + 230472u_0^6u_2^4 - 285120u_0^6u_2u_3u_5 + \\
 & 381024u_0^6u_2u_4^2 - 12960u_0^6u_3^2u_4 - 15552u_0^6u_5u_7 + \frac{241056}{13}u_0^6u_6^2 - \\
 & 166320u_0^5u_1^6 - 1197504u_0^5u_1^3u_2u_3 + 4476384u_0^5u_1^2u_3^2 - 513216u_0^5u_1^2u_3u_5 + \\
 & 855360u_0^5u_1^2u_4^2 + 2737152u_0^5u_1u_2u_3u_4 - 2581632u_0^5u_1u_3^3 + 93312u_0^5u_1u_5u_6 + \\
 & 1197504u_0^5u_2^3u_4 - 4805568u_0^5u_2^2u_3^2 + 653184u_0^5u_2u_4u_6 - \frac{8444736}{13}u_0^5u_2u_5^2 + \\
 & \frac{1306368}{13}u_0^5u_3u_4u_5 + \frac{6858432}{13}u_0^5u_4^3 + \frac{279936}{13}u_0^5u_6u_8 - \frac{279936}{13}u_0^5u_7^2 - \\
 & 498960u_0^4u_1^5u_3 + 7234920u_0^4u_1^4u_2^2 + 2566080u_0^4u_1^3u_3u_4 + 7869312u_0^4u_1^2u_2^2u_4 - \\
 & 28996704u_0^4u_1^2u_2u_3^2 + 855360u_0^4u_1^2u_4u_6 - 1127520u_0^4u_1^2u_5^2 - \\
 & 16479936u_0^4u_1u_2^3u_3 - 4976640u_0^4u_1u_2u_4u_5 - 4572288u_0^4u_1u_3^2u_5 + \\
 & \frac{177355008}{13}u_0^4u_1u_3u_4^2 - \frac{1399680}{13}u_0^4u_1u_6u_7 + 1284336u_0^4u_2^5 - 9813312u_0^4u_2^2u_3u_5 + \\
 & \frac{104439456}{13}u_0^4u_2^2u_4^2 + \frac{56376000}{13}u_0^4u_2u_3^2u_4 - \frac{13063680}{13}u_0^4u_2u_5u_7 + \\
 & \frac{10031040}{13}u_0^4u_2u_6^2 - 4863888u_0^4u_3^4 - \frac{2612736}{13}u_0^4u_3u_5u_6 + \frac{7838208}{13}u_0^4u_4^2u_6 - \\
 & \frac{30046464}{13}u_0^4u_4u_5^2 - \frac{279936}{13}u_0^4u_7u_9 + \frac{4059072}{221}u_0^4u_8^2 + 1663200u_0^3u_1^5u_2 + \\
 & 5987520u_0^3u_1^4u_2u_4 - 11975040u_0^3u_1^4u_3^2 - 43452288u_0^3u_1^3u_2^2u_3 - \\
 & 3421440u_0^3u_1^3u_4u_5 + 57594240u_0^3u_1^2u_2^4 - 29424384u_0^3u_1^2u_2u_3u_5 + \\
 & 38755584u_0^3u_1^2u_2u_4^2 + 23670144u_0^3u_1^2u_3^2u_4 - 933120u_0^3u_1^2u_5u_7 + \\
 & \frac{13063680}{13}u_0^3u_1^2u_6^2 + 98102016u_0^3u_1u_2^2u_3u_4 - \frac{1517750784}{13}u_0^3u_1u_2u_3^3 + \\
 & \frac{76515840}{13}u_0^3u_1u_2u_5u_6 + \frac{177666048}{13}u_0^3u_1u_3u_4u_6 - \frac{202487040}{13}u_0^3u_1u_3u_5^2 - \\
 & \frac{120185856}{13}u_0^3u_1u_4^2u_5 + \frac{1119744}{13}u_0^3u_1u_7u_8 + 17884800u_0^3u_2^4u_4 - \\
 & \frac{830665424}{13}u_0^3u_2^3u_3^2 + \frac{212564736}{13}u_0^3u_2^2u_4u_6 - \frac{110108160}{13}u_0^3u_2^2u_5^2 - \\
 & \frac{132503040}{13}u_0^3u_2u_3u_4u_5 + \frac{145006848}{13}u_0^3u_2u_4^3 + \frac{13436928}{13}u_0^3u_2u_6u_8 - \\
 & \frac{138848256}{221}u_0^3u_2u_7^2 - \frac{176732928}{13}u_0^3u_3^8u_5 + \frac{422889984}{13}u_0^3u_3^2u_4^2 + \frac{53747712}{221}u_0^3u_3u_6u_7 - \\
 & \frac{376233984}{221}u_0^3u_4u_5u_7 + \frac{493807104}{221}u_0^3u_4u_6^2 - \frac{23514624}{221}u_0^3u_5^2u_6 + \frac{3359232}{221}u_0^3u_8u_{10} - \\
 & \frac{47029248}{4199}u_0^3u_9^2 - 801900u_0^2u_1^8 - 17962560u_0^2u_1^5u_2u_3 + 91609056u_0^2u_1^4u_3^2 - \\
 & 7698240u_0^2u_1^4u_3u_5 + 11547360u_0^2u_1^4u_4^2 + 119066112u_0^2u_1^3u_2u_3u_4 - \\
 & \frac{644412672}{7}u_0^2u_1^3u_3^3 + 2799360u_0^2u_1^3u_5u_6 + 111881088u_0^2u_1^2u_2^3u_4 - \\
 & \frac{3495420864}{7}u_0^2u_1^2u_2^2u_3^2 + 31912704u_0^2u_1^2u_2u_4u_6 - \frac{410666112}{13}u_0^2u_1^2u_2u_5^2 - \\
 & \frac{653930496}{13}u_0^2u_1^2u_3u_4u_5 + \frac{4077267840}{91}u_0^2u_1^2u_4^3 + \frac{8398080}{13}u_0^2u_1^2u_6u_8 - \\
 & \frac{7558272}{13}u_0^2u_1^2u_7^2 - 221476032u_0^2u_1u_2^4u_3 - \frac{1467424512}{13}u_0^2u_1u_2^2u_4u_5 - \\
 & \frac{2555815680}{13}u_0^2u_1u_2u_3^2u_5 + \frac{39807459072}{91}u_0^2u_1u_2u_3u_4^2 - \frac{57106944}{13}u_0^2u_1u_2u_6u_7 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{621644544}{13} u_0^2 u_1 u_3^3 u_4 - \frac{161243136}{13} u_0^2 u_1 u_3 u_5 u_7 + \frac{2470715136}{221} u_0^2 u_1 u_3 u_6^2 + \\
& \frac{3869835264}{221} u_0^2 u_1 u_4 u_5 u_6 - \frac{18049153536}{1547} u_0^2 u_1 u_5^3 - \frac{10077696}{221} u_0^2 u_1 u_8 u_9 - \\
& \frac{691371936}{91} u_0^2 u_2^6 - \frac{1581638400}{13} u_0^2 u_2^3 u_3 u_5 + \frac{4299537024}{91} u_0^2 u_2^3 u_4^2 + \\
& \frac{2795160960}{13} u_0^2 u_2^2 u_3^2 u_4 - \frac{213311232}{13} u_0^2 u_2^2 u_5 u_7 + \frac{1191687552}{221} u_0^2 u_2^2 u_6^2 - \\
& \frac{8959678272}{91} u_0^2 u_2 u_3^4 + \frac{117573120}{17} u_0^2 u_2 u_3 u_5 u_6 + \frac{6187705344}{221} u_0^2 u_2 u_4^2 u_6 - \\
& \frac{4113379584}{91} u_0^2 u_2 u_4 u_5^2 - \frac{151165440}{221} u_0^2 u_2 u_7 u_9 + \frac{1405838592}{4199} u_0^2 u_2 u_8^2 + \\
& \frac{653370624}{13} u_0^2 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{69911496576}{1547} u_0^2 u_3^2 u_5^2 + \frac{5984471808}{221} u_0^2 u_3 u_4^2 u_5 - \\
& \frac{755827200}{4199} u_0^2 u_3 u_7 u_8 + \frac{14190655680}{1547} u_0^2 u_4^4 + \frac{483729408}{323} u_0^2 u_4 u_6 u_8 - \\
& \frac{5759403264}{4199} u_0^2 u_4 u_7^2 - \frac{3809369088}{4199} u_0^2 u_5^2 u_8 + \frac{1330255872}{4199} u_0^2 u_5 u_6 u_7 + \\
& \frac{28933065216}{29393} u_0^2 u_6^3 - \frac{30233088}{4199} u_0^2 u_9 u_{11} + \frac{136048896}{29393} u_0^2 u_{10}^2 - 1425600 u_0 u_1^7 u_3 + \\
& 25945920 u_0 u_1^6 u_2^2 + 15396480 u_0 u_1^5 u_3 u_4 + 68770944 u_0 u_1^4 u_2^2 u_4 - \\
& 231973632 u_0 u_1^4 u_2 u_3^2 + 5132160 u_0 u_1^4 u_4 u_6 - 6065280 u_0 u_1^4 u_5^2 - \\
& 407151360 u_0 u_1^3 u_2^3 u_3 - 84354048 u_0 u_1^3 u_2 u_4 u_5 - \frac{494926848}{7} u_0 u_1^3 u_3^2 u_5 + \\
& \frac{17195535360}{91} u_0 u_1^3 u_3 u_4^2 - \frac{16796160}{13} u_0 u_1^3 u_6 u_7 + \frac{1379104704}{7} u_0 u_1^2 u_2^5 - \\
& \frac{2314697472}{7} u_0 u_1^2 u_2^2 u_3 u_5 + \frac{29749171968}{91} u_0 u_1^2 u_2^2 u_4^2 + \frac{68087340288}{91} u_0 u_1^2 u_2 u_3^2 u_4 - \\
& \frac{244104192}{13} u_0 u_1^2 u_2 u_5 u_7 + \frac{187557120}{13} u_0 u_1^2 u_2 u_6^2 - \frac{25244348544}{91} u_0 u_1^2 u_3^4 + \\
& 29113344 u_0 u_1^2 u_3 u_5 u_6 + \frac{2855347200}{91} u_0 u_1^2 u_4 u_6 - \frac{117899651072}{1547} u_0 u_1^2 u_4 u_5^2 - \\
& \frac{3359232}{13} u_0 u_1^2 u_7 u_9 + \frac{3359232}{17} u_0 u_1^2 u_8^2 + \frac{82325071872}{91} u_0 u_1 u_2^3 u_3 u_4 - \\
& \frac{83640024576}{91} u_0 u_1 u_2^2 u_3^3 + \frac{914830848}{13} u_0 u_1 u_2^2 u_5 u_6 + \frac{28282493952}{91} u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_6 - \\
& \frac{379648083456}{1547} u_0 u_1 u_2 u_3 u_5^2 - \frac{424110878208}{1547} u_0 u_1 u_2 u_4^2 u_5 + \\
& \frac{416544768}{221} u_0 u_1 u_2 u_7 u_8 - \frac{295577703936}{1547} u_0 u_1 u_3^2 u_4 u_5 + \frac{511862976000}{1547} u_0 u_1 u_3 u_4^3 + \\
& \frac{1390722048}{221} u_0 u_1 u_3 u_6 u_8 - \frac{19295428608}{4199} u_0 u_1 u_3 u_7^2 - \frac{39000683520}{4199} u_0 u_1 u_4 u_6 u_7 - \\
& \frac{287879463936}{29393} u_0 u_1 u_5^2 u_7 + \frac{507855412224}{29393} u_0 u_1 u_5 u_6^2 + \frac{60466176}{4199} u_0 u_1 u_9 u_{10} + \\
& \frac{7935345792}{91} u_0 u_2^5 u_4 - \frac{24048648576}{91} u_0 u_2^4 u_3^2 + \frac{9653313024}{91} u_0 u_2^3 u_4 u_6 - \\
& \frac{16959082752}{1547} u_0 u_2^3 u_5^2 - \frac{68355892224}{221} u_0 u_2^2 u_3 u_4 u_5 - \frac{73773773568}{1547} u_0 u_2^2 u_4^3 + \\
& \frac{2018898432}{221} u_0 u_2^2 u_6 u_8 - \frac{7743029760}{4199} u_0 u_2^2 u_7^2 - \\
& \frac{32127321600}{91} u_0 u_2 u_3^3 u_5 + \frac{842806674432}{1547} u_0 u_2 u_3^2 u_4^2 - \frac{10023948288}{4199} u_0 u_2 u_3 u_6 u_7 - \\
& \frac{1173305834496}{29393} u_0 u_2 u_4 u_5 u_7 + \frac{486977785344}{29393} u_0 u_2 u_4 u_6^2 + \frac{55094764032}{4199} u_0 u_2 u_5^2 u_6 + \\
& \frac{1108546560}{4199} u_0 u_2 u_8 u_{10} - \frac{3093852672}{29393} u_0 u_2 u_9^2 - \frac{104103999360}{1547} u_0 u_3^4 u_4 - \\
& \frac{51372734976}{1547} u_0 u_3^2 u_5 u_7 + \frac{657485683200}{29393} u_0 u_3^2 u_6^2 + \frac{8559323136}{323} u_0 u_3 u_4 u_5 u_6 - \\
& \frac{1067285113344}{29393} u_0 u_3 u_5^3 + \frac{2217093120}{29393} u_0 u_3 u_8 u_9 - \frac{101062494720}{29393} u_0 u_4^3 u_6 - \\
& \frac{75710370816}{2261} u_0 u_4^2 u_5^2 - \frac{21949221888}{29393} u_0 u_4 u_7 u_9 + \frac{14189395968}{29393} u_0 u_4 u_8^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3990767616}{4199} u_0 u_5 u_6 u_9 - \frac{5986151424}{29393} u_0 u_5 u_7 u_8 + \frac{23944605696}{29393} u_0 u_6^2 u_8 - \\
 & \frac{1995383808}{1729} u_0 u_6 u_7^2 + \frac{60466176}{29393} u_0 u_{10} u_{12} - \frac{60466176}{52003} u_0 u_{11}^2 + \\
 & 1247400 u_1^8 u_2 + 5987520 u_1^6 u_2 u_4 - 10692000 u_1^6 u_3^2 - 86733504 u_1^5 u_2^2 u_3 - \\
 & 5132160 u_1^5 u_4 u_5 + 168976368 u_1^4 u_2^4 - 62612352 u_1^4 u_2 u_3 u_5 + \\
 & 75816000 u_1^4 u_2 u_4^2 + \frac{616092480}{7} u_1^4 u_3^2 u_4 - 1399680 u_1^4 u_5 u_7 + \frac{17496000}{13} u_1^4 u_6^2 + \\
 & \frac{4067843328}{7} u_1^3 u_2^2 u_3 u_4 - \frac{56788750080}{91} u_1^3 u_2 u_3^3 + \frac{318887552}{13} u_1^3 u_2 u_5 u_6 + \\
 & \frac{4691727360}{91} u_1^3 u_3 u_4 u_6 - \frac{4779627264}{91} u_1^3 u_3 u_5^2 - \frac{5201210880}{91} u_1^3 u_4^2 u_5 + \\
 & \frac{3359232}{13} u_1^3 u_7 u_8 + \frac{1797189120}{7} u_1^2 u_2^4 u_4 - \frac{109884304512}{91} u_1^2 u_3^2 u_3^2 + \\
 & \frac{11465618688}{91} u_1^2 u_2^2 u_4 u_6 - \frac{7817772672}{91} u_1^2 u_2^2 u_5^2 - \frac{50474700288}{91} u_1^2 u_2 u_3 u_4 u_5 + \\
 & \frac{29636824320}{119} u_1^2 u_2 u_4^3 + \frac{60466176}{13} u_1^2 u_2 u_6 u_8 - \frac{626496768}{221} u_1^2 u_2 u_7^2 - \\
 & \frac{17752981248}{91} u_1^2 u_3^3 u_5 + \frac{834017523840}{1547} u_1^2 u_3^2 u_4^2 - \frac{120932352}{17} u_1^2 u_3 u_6 u_7 - \\
 & \frac{30212932608}{1547} u_1^2 u_4 u_5 u_7 + \frac{528071270400}{29393} u_1^2 u_4 u_6^2 + \frac{490461308928}{29393} u_1^2 u_5^2 u_6 + \\
 & \frac{10077696}{221} u_1^2 u_8 u_{10} - \frac{125971200}{4199} u_1^2 u_9^2 - \frac{45316879488}{91} u_1 u_2^5 u_3 - \\
 & \frac{32584550400}{91} u_1 u_2^3 u_4 u_5 - \frac{6259368960}{7} u_1 u_2^2 u_3^2 u_5 + \frac{308371898880}{221} u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 - \\
 & \frac{4074748416}{221} u_1 u_2^2 u_6 u_7 + \frac{1456941468672}{1547} u_1 u_2 u_3^3 u_4 - \frac{153725174784}{1547} u_1 u_2 u_3 u_5 u_7 + \\
 & \frac{1681591228416}{29393} u_1 u_2 u_3 u_6^2 + \frac{5242175594496}{29393} u_1 u_2 u_4 u_5 u_6 - \frac{1390722048000}{29393} u_1 u_2 u_5^3 - \\
 & \frac{1491499008}{4199} u_1 u_2 u_8 u_9 - \frac{300747561984}{1547} u_1 u_3^5 + \frac{96305822208}{1729} u_1 u_3^2 u_5 u_6 + \\
 & \frac{5498088606720}{29393} u_1 u_3 u_4^2 u_6 - \frac{6898337436672}{29393} u_1 u_3 u_4 u_5^2 - \frac{443418624}{323} u_1 u_3 u_7 u_9 + \\
 & \frac{24287247360}{29393} u_1 u_3 u_8^2 - \frac{3093567137280}{29393} u_1 u_4^3 u_5 + \frac{62300316672}{29393} u_1 u_4 u_7 u_8 + \\
 & \frac{157635320832}{29393} u_1 u_5 u_6 u_8 - \frac{106974743040}{29393} u_1 u_5 u_7^2 - \frac{88794579456}{29393} u_1 u_6^2 u_7 - \\
 & \frac{60466176}{29393} u_1 u_{10} u_{11} - \frac{3035206080}{91} u_2^7 - \frac{22628626560}{91} u_2^4 u_3 u_5 + \frac{5196312000}{221} u_2^4 u_4^2 + \\
 & \frac{1575443416320}{1547} u_2^3 u_3^2 u_4 - \frac{57725042688}{1547} u_2^3 u_5 u_7 - \frac{74432183040}{29393} u_2^3 u_6^2 + \\
 & \frac{82103222592}{1547} u_2^2 u_3^4 + \frac{22150775808}{247} u_2^2 u_3 u_5 u_6 + \frac{307661981184}{2261} u_2^2 u_4^2 u_6 - \\
 & \frac{1315653290496}{29393} u_2^2 u_4 u_5^2 - \frac{9120314880}{4199} u_2^2 u_7 u_9 + \frac{7210591488}{29393} u_2^2 u_8^2 + \\
 & \frac{7662408192}{17} u_2 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{7257115171584}{29393} u_2 u_3^2 u_5^2 - \frac{666985591296}{4199} u_2 u_3 u_4^2 u_5 + \\
 & \frac{8404798464}{29393} u_2 u_3 u_7 u_8 - \frac{2618214814080}{29393} u_2 u_4^4 + \frac{351409259520}{29393} u_2 u_4 u_6 u_8 - \\
 & \frac{4262865408}{2261} u_2 u_4 u_7^2 - \frac{23944605696}{4199} u_2 u_5^2 u_8 - \frac{24831442944}{4199} u_2 u_5 u_6 u_7 - \\
 & \frac{49441176576}{29393} u_2 u_6^3 - \frac{1330255872}{29393} u_2 u_9 u_{11} + \frac{10007152128}{676039} u_2 u_{10}^2 - \\
 & \frac{549006004224}{4199} u_3^3 u_4 u_5 + \frac{2631529969920}{29393} u_3^2 u_4^3 + \frac{268721763840}{29393} u_3^2 u_6 u_8 - \\
 & \frac{138563281152}{29393} u_3^2 u_7^2 - \frac{23219011584}{4199} u_3 u_4 u_6 u_7 - \frac{893599382016}{29393} u_3 u_5^2 u_7 + \\
 & \frac{335456266752}{29393} u_3 u_5 u_6^2 - \frac{1330255872}{96577} u_3 u_9 u_{10} - \frac{403279160832}{29393} u_4^2 u_5 u_7 - \\
 & \frac{171043695360}{29393} u_4^2 u_6^2 + \frac{29628426240}{4199} u_4 u_5^2 u_6 + \frac{109080981504}{676039} u_4 u_8 u_{10} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{49884595200}{676039} u_4 u_9^2 - \frac{140284047744}{29393} u_5^4 - \frac{143667634176}{676039} u_5 u_7 u_{10} + \\ & \frac{2660511744}{52003} u_5 u_8 u_9 - \frac{11972302848}{96577} u_6^2 u_{10} - \frac{21949221888}{52003} u_6 u_7 u_9 + \\ & \frac{9644355072}{52003} u_6 u_8^2 - \frac{997691904}{52003} u_7^2 u_8 - \frac{181398528}{676039} u_{11} u_{13} + \frac{90699264}{676039} u_{12}^2 \end{aligned}$$

(A.26)

$$\begin{aligned} T_{14} = & \frac{1}{14} u_0^{14} - 78 u_0^{11} u_1^2 + \frac{2574}{5} u_0^{10} u_2^2 - \frac{15444}{7} u_0^9 u_3^2 - 6435 u_0^8 u_1^4 + \frac{154440}{7} u_0^8 u_2^3 + \\ & \frac{46332}{7} u_0^8 u_4^2 + 185328 u_0^7 u_1^2 u_2^2 - \frac{1853280}{7} u_0^7 u_2 u_3^2 - \frac{101088}{7} u_0^7 u_5^2 - \\ & 555984 u_0^6 u_1^2 u_3^2 + 648648 u_0^6 u_2^4 + 707616 u_0^6 u_2 u_4^2 + 23328 u_0^6 u_5^2 - 216216 u_0^5 u_1^6 + \\ & \frac{34100352}{5} u_0^5 u_1^2 u_3^3 + 1111968 u_0^5 u_1^2 u_4^2 - \frac{19813248}{5} u_0^5 u_1 u_3^3 - \frac{63786528}{5} u_0^5 u_2^2 u_3^2 - \\ & 1306368 u_0^5 u_2 u_5^2 + \frac{5878656}{5} u_0^5 u_4^3 - \frac{139968}{5} u_0^5 u_7^2 + 9729720 u_0^4 u_1^4 u_2^2 - \\ & 47814624 u_0^4 u_1^2 u_2 u_3^3 - 1516320 u_0^4 u_1^2 u_5^2 + 22208256 u_0^4 u_1 u_3 u_4^2 + 11625120 u_0^4 u_5^3 + \\ & 26570592 u_0^4 u_2^2 u_4^2 + 1679616 u_0^4 u_2 u_6^2 - 11045808 u_0^4 u_3^4 - 5878656 u_0^4 u_4 u_5^2 + \\ & \frac{419904}{17} u_0^4 u_8^2 - 16679520 u_0^3 u_1^4 u_3^2 + 121204512 u_0^3 u_1^2 u_4^2 + 69144192 u_0^3 u_1^2 u_2 u_4^2 + \\ & 1399680 u_0^3 u_1^2 u_6^2 - 283979520 u_0^3 u_1 u_2 u_3^3 - 26873856 u_0^3 u_1 u_3 u_5^2 - \\ & 263606400 u_0^3 u_2^3 u_3^2 - 35551872 u_0^3 u_2^2 u_5^2 + 75022848 u_0^3 u_2 u_4^3 - \frac{25194240}{17} u_0^3 u_2 u_7^2 + \\ & 108895104 u_0^3 u_3^2 u_4^2 + \frac{110854656}{17} u_0^3 u_4 u_6^2 - \frac{5038848}{323} u_0^3 u_9^2 - 1158300 u_0^2 u_1^8 + \\ & 149003712 u_0^2 u_1^4 u_3^2 + 16679520 u_0^2 u_1^4 u_4^2 - \frac{1072341504}{7} u_0^2 u_1^3 u_3^3 - \\ & \frac{7522766784}{7} u_0^2 u_1^2 u_2 u_3^3 - 61026048 u_0^2 u_1^2 u_2 u_5^2 + \frac{613059840}{7} u_0^2 u_1^2 u_4^3 - \\ & 839808 u_0^2 u_1^2 u_7^2 + \frac{7070623488}{7} u_0^2 u_1 u_2 u_3 u_4^2 + \frac{347680512}{17} u_0^2 u_1 u_3 u_6^2 - \\ & \frac{2993075712}{119} u_0^2 u_1 u_8^2 + \frac{661278816}{7} u_0^2 u_2^3 + \frac{2413328256}{7} u_0^2 u_2^2 u_4^2 + \frac{504724608}{17} u_0^2 u_2^2 u_6^2 - \\ & \frac{4015915200}{7} u_0^2 u_2 u_3^3 - \frac{28303209216}{119} u_0^2 u_2 u_4 u_5^2 + \frac{277136640}{323} u_0^2 u_2 u_8^2 - \\ & \frac{12843183744}{119} u_0^2 u_3^2 u_5^2 + \frac{8983846080}{119} u_0^2 u_4^4 - \frac{1496537856}{323} u_0^2 u_4 u_7^2 + \frac{8646663168}{2261} u_0^2 u_6^3 + \\ & \frac{15116544}{2261} u_0^2 u_{10}^2 + 38918880 u_0 u_1^6 u_2^2 - 406980288 u_0 u_1^4 u_2 u_3^3 - 9097920 u_0 u_1^4 u_5^2 + \\ & \frac{2345863680}{7} u_0 u_1^3 u_3 u_4^2 + \frac{4672691712}{7} u_0 u_1^2 u_5^2 + \frac{5732809344}{7} u_0 u_1^2 u_2 u_4^2 + \\ & 30233088 u_0 u_1^2 u_2 u_6^2 - \frac{4438245312}{7} u_0 u_1^2 u_3^4 - \frac{19550730240}{119} u_0 u_1^2 u_4 u_5^2 + \\ & \frac{5038848}{17} u_0 u_1^2 u_8^2 - \frac{27123932160}{7} u_0 u_1 u_2^2 u_3^3 - \frac{76862587392}{119} u_0 u_1 u_2 u_3 u_5^2 + \\ & \frac{121234682880}{119} u_0 u_1 u_3 u_4^3 - \frac{2882221056}{323} u_0 u_1 u_3 u_7^2 + \frac{92785347072}{2261} u_0 u_1 u_5 u_6^2 - \\ & \frac{11314313280}{7} u_0 u_2^4 u_3^2 - \frac{28862521344}{119} u_0 u_2^3 u_5^2 + \frac{109369875456}{119} u_0 u_2^2 u_4^3 - \\ & \frac{4560157440}{323} u_0 u_2^2 u_7^2 + \frac{49805653248}{17} u_0 u_2 u_3^2 u_4^2 + \frac{315381496320}{2261} u_0 u_2 u_4 u_6^2 - \\ & \frac{665127936}{2261} u_0 u_2 u_9^2 + \frac{134360881920}{2261} u_0 u_3^2 u_6^2 - \frac{353737207296}{2261} u_0 u_3 u_5^3 - \\ & \frac{746379360000}{2261} u_0 u_4^2 u_5^2 + \frac{4323331584}{2261} u_0 u_4 u_8^2 - \frac{12969994752}{2261} u_0 u_6 u_7^2 - \\ & \frac{90699264}{52003} u_0 u_{11}^2 - 16679520 u_1^6 u_3^2 + \frac{1806392016}{5} u_1^4 u_2^4 + 143747136 u_1^4 u_2 u_4^2 + \\ & 2099520 u_1^4 u_6^2 - \frac{52613597952}{35} u_1^3 u_2 u_3^3 - \frac{695361024}{7} u_1^3 u_3 u_9^2 - \frac{16953204096}{5} u_1^2 u_2^3 u_3^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1776193920}{7} u_1^2 u_2^2 u_5^2 + \frac{499816770048}{595} u_1^2 u_2 u_4^3 - \frac{549234432}{85} u_1^2 u_2 u_7^2 + \\
 & \frac{888603364224}{595} u_1^2 u_3^2 u_4^2 + \frac{97441242624}{2261} u_1^2 u_4 u_6^2 - \frac{15116544}{323} u_1^2 u_9^2 + \\
 & \frac{403944288768}{85} u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 + \frac{1954891625472}{11305} u_1 u_2 u_3 u_6^2 - \frac{534762860544}{2261} u_1 u_2 u_5^3 - \\
 & \frac{348639572736}{425} u_1 u_3^5 - \frac{11578728508416}{11305} u_1 u_3 u_4 u_5^2 + \frac{19288710144}{11305} u_1 u_3 u_8^2 - \\
 & \frac{21616657920}{2261} u_1 u_5 u_7^2 + 141927552 u_2^7 + \frac{60842829888}{85} u_2^4 u_4^2 + \frac{80444200504}{11305} u_2^3 u_6^2 - \\
 & \frac{1836398495808}{595} u_2^2 u_3^4 - \frac{11297772421632}{11305} u_2^2 u_4 u_5^2 + \frac{33059881728}{11305} u_2^2 u_8^2 - \\
 & \frac{324763831296}{923} u_2 u_3^2 u_5^2 + \frac{64489696128}{85} u_2 u_4^4 - \frac{394753430016}{11305} u_2 u_4 u_7^2 + \\
 & \frac{4323331584}{133} u_2 u_6^3 + \frac{2358180864}{52003} u_2 u_{10}^2 + \frac{2781363474432}{1615} u_3^2 u_4^3 - \frac{158164399872}{11305} u_3^2 u_7^2 + \\
 & \frac{1547420143104}{11305} u_3 u_5 u_6^2 + \frac{226702810368}{2261} u_4^2 u_6^2 - \frac{12969994752}{37145} u_4 u_9^2 - \\
 & \frac{553484700288}{11305} u_5^4 + \frac{64849973760}{52003} u_6 u_8^2 + \frac{272097792}{1300075} u_{12}^2 \tag{A.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_{14} = & \frac{1}{15} u_0^{15} + u_0^{13} u_2 - \frac{169}{2} u_0^{12} u_1^2 - 156 u_0^{11} u_1 u_3 + \frac{2964}{5} u_0^{11} u_2^2 + \\
 & 858 u_0^{10} u_1^2 u_2 + \frac{5148}{5} u_0^{10} u_2 u_4 - \frac{95238}{35} u_0^{10} u_3^2 - 8580 u_0^9 u_1^4 - 10296 u_0^9 u_1 u_2 u_3 + \\
 & \frac{159588}{7} u_0^9 u_2^3 - \frac{30888}{7} u_0^9 u_3 u_5 + \frac{61776}{7} u_0^9 u_4^2 - 25740 u_0^8 u_1^3 u_3 + \\
 & 270270 u_0^8 u_1^2 u_2^2 + \frac{277992}{7} u_0^8 u_1 u_3 u_4 + \frac{463320}{7} u_0^8 u_2^2 u_4 - \frac{1992276}{7} u_0^8 u_2 u_3^2 + \\
 & \frac{92664}{7} u_0^8 u_4 u_6 - 21060 u_0^8 u_5^2 + 154440 u_0^7 u_1^4 u_2 + 370656 u_0^7 u_1^2 u_2 u_4 - \\
 & \frac{6301152}{7} u_0^7 u_1^2 u_3^2 - \frac{6301152}{7} u_0^7 u_1 u_2^2 u_3 - \frac{741312}{7} u_0^7 u_1 u_4 u_5 + \frac{3644784}{7} u_0^7 u_4^2 - \\
 & \frac{3706560}{7} u_0^7 u_2 u_3 u_5 + 808704 u_0^7 u_2 u_4^2 - \frac{168480}{7} u_0^7 u_3^2 u_4 - \frac{202176}{7} u_0^7 u_5 u_7 + \\
 & \frac{264384}{7} u_0^7 u_6^2 - 396396 u_0^6 u_1^6 - 2594592 u_0^6 u_1^3 u_2 u_3 + \frac{54177552}{5} u_0^6 u_1^2 u_3^2 - \\
 & 1111968 u_0^6 u_1^2 u_3 u_5 + 2038608 u_0^6 u_1^2 u_4^2 + 5930496 u_0^6 u_1 u_2 u_3 u_4 - \\
 & \frac{31269888}{5} u_0^6 u_1 u_3^3 + 202176 u_0^6 u_1 u_5 u_6 + 2594592 u_0^6 u_2^3 u_4 - \frac{62691408}{5} u_0^6 u_2^2 u_3^2 + \\
 & 1415232 u_0^6 u_2 u_4 u_6 - 1625184 u_0^6 u_2 u_5^2 + 217728 u_0^6 u_3 u_4 u_5 + \frac{6695136}{5} u_0^6 u_4^3 + \\
 & 46656 u_0^6 u_6 u_8 - \frac{256608}{5} u_0^5 u_7^2 - 1297296 u_0^5 u_1^5 u_3 + 20756736 u_0^5 u_1^4 u_2^2 + \\
 & 6671808 u_0^5 u_1^3 u_3 u_4 + \frac{102301056}{5} u_0^5 u_1^2 u_2^2 u_4 - \frac{424771776}{5} u_0^5 u_1^2 u_2 u_3^2 + \\
 & 2223936 u_0^5 u_1^2 u_4 u_6 - 3234816 u_0^5 u_1^2 u_5^2 - \frac{214239168}{5} u_0^5 u_1 u_2^3 u_3 - \\
 & 12939264 u_0^5 u_1 u_2 u_4 u_5 - \frac{59439744}{5} u_0^5 u_1 u_3^2 u_5 + \frac{199563264}{5} u_0^5 u_1 u_3 u_4^2 - \\
 & 279936 u_0^5 u_1 u_6 u_7 + \frac{28321488}{5} u_0^5 u_2^5 - \frac{127573056}{5} u_0^5 u_2^2 u_3 u_5 + \frac{131010048}{5} u_0^5 u_2^2 u_4^2 + \\
 & 11275200 u_0^5 u_2 u_3^2 u_4 - 2612736 u_0^5 u_2 u_5 u_7 + \frac{11710656}{5} u_0^5 u_2 u_6^2 - \frac{74276352}{5} u_0^5 u_3^4 - \\
 & \frac{2612736}{5} u_0^5 u_3 u_5 u_6 + \frac{7838208}{5} u_0^5 u_4^2 u_6 - 7185024 u_0^5 u_4 u_5^2 - \frac{279936}{5} u_0^5 u_7 u_9 + \\
 & \frac{4478976}{85} u_0^5 u_8^2 + 5405400 u_0^4 u_1^6 u_2 + 19459440 u_0^4 u_1^4 u_2 u_4 - 43088760 u_0^4 u_1^4 u_3^2 - \\
 & 141219936 u_0^4 u_1^3 u_2^2 u_3 - 11119680 u_0^4 u_1^3 u_4 u_5 + 217482408 u_0^4 u_1^2 u_4^2 - \\
 & 95629248 u_0^4 u_1^2 u_2 u_3 u_5 + 143241696 u_0^4 u_1^2 u_2 u_4^2 + 76927968 u_0^4 u_1^2 u_3^2 u_4 - \\
 & 3032640 u_0^4 u_1^2 u_5 u_7 + 3615840 u_0^4 u_1^2 u_6^2 + 318831552 u_0^4 u_1 u_2^2 u_3 u_4 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 450432576u_0^4u_1u_2u_3^3 + 19128960u_0^4u_1u_2u_5u_6 + 44416512u_0^4u_1u_3u_4u_6 - \\
& 57340224u_0^4u_1u_3u_5^2 - 30046464u_0^4u_1u_4^2u_5 + 279936u_0^4u_1u_7u_8 + \\
& 58125600u_0^4u_2^4u_4 - 273567456u_0^4u_2^3u_3^2 + 53141184u_0^4u_2^2u_4u_6 - \\
& 36415008u_0^4u_2^2u_5^2 - 33125760u_0^4u_2u_3u_4u_5 + 55007424u_0^4u_2u_4^3 + \\
& 3359232u_0^4u_2u_6u_8 - \frac{41010624}{17}u_0^4u_2u_7^2 - 44183232u_0^4u_3^3u_5 + 132946272u_0^4u_3^2u_4^2 + \\
& \frac{13436928}{17}u_0^4u_3u_6u_7 - \frac{94058496}{17}u_0^4u_4u_5u_7 + \frac{151165440}{17}u_0^4u_4u_6^2 - \frac{5878656}{17}u_0^4u_5^2u_6 + \\
& \frac{839808}{17}u_0^4u_8u_{10} - \frac{13017024}{323}u_0^4u_9^2 - 3861000u_0^3u_1^8 - 77837760u_0^3u_1^5u_2u_3 + \\
& 446640480u_0^3u_1^4u_2^2 - 33359040u_0^3u_1^4u_3u_5 + 55598400u_0^3u_1^4u_4^2 + \\
& 515953152u_0^3u_1^3u_2u_3u_4 - \frac{3149902080}{7}u_0^3u_1^3u_3^3 + 12130560u_0^3u_1^3u_5u_6 + \\
& 484818048u_0^3u_1^2u_2^2u_4 - \frac{17654412672}{7}u_0^3u_1^2u_2^2u_3^2 + 138288384u_0^3u_1^2u_2u_4u_6 - \\
& 157230720u_0^3u_1^2u_2u_5^2 - 217976832u_0^3u_1^2u_3u_4u_5 + \frac{1563442560}{7}u_0^3u_1^2u_4^3 + \\
& 2799360u_0^3u_1^2u_6u_8 - 2799360u_0^3u_1^2u_7^2 - 959729472u_0^3u_1u_2^4u_3 - \\
& 489141504u_0^3u_1u_2^2u_4u_5 - 851938560u_0^3u_1u_2u_3^2u_5 + \frac{15626027520}{7}u_0^3u_1u_2u_3u_4^2 - \\
& 19035648u_0^3u_1u_2u_6u_7 + 207214848u_0^3u_1u_3^3u_4 - 53747712u_0^3u_1u_3u_5u_7 + \\
& \frac{939465216}{17}u_0^3u_1u_3u_6^2 + \frac{1289945088}{17}u_0^3u_1u_4u_5u_6 - \frac{7014076416}{119}u_0^3u_1u_5^3 - \\
& \frac{3359232}{17}u_0^3u_1u_8u_9 - \frac{10031040}{7}u_0^3u_2^6 - 527212800u_0^3u_2^3u_3u_5 + \frac{2237621760}{7}u_0^3u_2^3u_4^2 + \\
& 931720320u_0^3u_2^2u_3^2u_4 - 71103744u_0^3u_2^2u_5u_7 + \frac{565470720}{17}u_0^3u_2^2u_6^2 - \\
& \frac{4325197824}{7}u_0^3u_2u_3^3 + \frac{509483520}{17}u_0^3u_2u_3u_5u_6 + \frac{2062568448}{17}u_0^3u_2u_4^2u_6 - \\
& \frac{32743554048}{119}u_0^3u_2u_4u_5^2 - \frac{50388480}{17}u_0^3u_2u_7u_9 + \frac{560991744}{323}u_0^3u_2u_8^2 + \\
& 217790208u_0^3u_3^2u_4u_6 - \frac{27584893440}{119}u_0^3u_3^2u_5^2 + \frac{1994823936}{17}u_0^3u_3u_4^2u_5 - \\
& \frac{251942400}{323}u_0^3u_3u_7u_8 + \frac{7724833920}{119}u_0^3u_4^4 + \frac{2096160768}{323}u_0^3u_4u_6u_8 - \\
& \frac{2418647040}{323}u_0^3u_4u_7^2 - \frac{1269789696}{323}u_0^3u_5^2u_8 + \frac{443418624}{323}u_0^2u_5u_6u_7 + \\
& \frac{12526576128}{2261}u_0^3u_6^3 - \frac{10077696}{323}u_0^3u_9u_{11} + \frac{50388480}{2261}u_0^3u_{10}^2 - 9266400u_0^2u_1^7u_3 + \\
& 188107920u_0^2u_1^6u_2^2 + 100077120u_0^2u_1^5u_3u_4 + 447011136u_0^2u_1^4u_2^2u_4 - \\
& 1711318752u_0^2u_1^4u_2u_3^2 + 33359040u_0^2u_1^4u_4u_6 - 43973280u_0^2u_1^4u_5^2 - \\
& 2646483840u_0^2u_1^3u_2^3u_3 - 548301312u_0^2u_1^3u_2u_4u_5 - \frac{3217024512}{7}u_0^2u_1^3u_3^2u_5 + \\
& \frac{9770699520}{7}u_0^2u_1^3u_3u_4^2 - 8398080u_0^2u_1^3u_6u_7 + \frac{11300526432}{7}u_0^2u_1^2u_5^2 - \\
& \frac{15045533568}{7}u_0^2u_1^2u_2^2u_3u_5 + \frac{17740990656}{7}u_0^2u_1^2u_2^2u_4^2 + \frac{34043670144}{7}u_0^2u_1^2u_2u_3^2u_4 - \\
& 122052096u_0^2u_1^2u_2u_5u_7 + 108895104u_0^2u_1^2u_2u_6^2 - \frac{14841296928}{7}u_0^2u_1^2u_3^4 + \\
& 189236736u_0^2u_1^2u_3u_5u_6 + \frac{1427673600}{7}u_0^2u_1^2u_4^2u_6 - \frac{68625190656}{119}u_0^2u_1^2u_4u_5^2 - \\
& 1679616u_0^2u_1^2u_7u_9 + \frac{24354432}{17}u_0^2u_1^2u_8^2 + \frac{41162535936}{7}u_0^2u_1u_2^3u_3u_4 - \\
& \frac{55381978368}{7}u_0^2u_1u_2^2u_3^3 + 457415424u_0^2u_1u_2^2u_5u_6 + \frac{14141246976}{7}u_0^2u_1u_2u_3u_4u_6 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{228255335424}{119} u_0^2 u_1 u_2 u_3 u_5^2 - \frac{212055439104}{119} u_0^2 u_1 u_2 u_4^2 u_5 + \\
 & \frac{208272384}{17} u_0^2 u_1 u_2 u_7 u_8 - \frac{147788851968}{119} u_0^2 u_1 u_3^2 u_4 u_5 + \frac{316548829440}{119} u_0^2 u_1 u_3 u_4^3 + \\
 & \frac{695361024}{17} u_0^2 u_1 u_3 u_6 u_8 - \frac{11088824832}{323} u_0^2 u_1 u_3 u_7^2 - \frac{19500341760}{323} u_0^2 u_1 u_4 u_6 u_7 - \\
 & \frac{143939731968}{2261} u_0^2 u_1 u_5^2 u_7 + \frac{300320379648}{2261} u_0^2 u_1 u_5 u_6^2 + \frac{30233088}{323} u_0^2 u_1 u_9 u_{10} + \\
 & \frac{3967672896}{7} u_0^2 u_2^5 u_4 - \frac{17681480928}{7} u_0^2 u_2^4 u_3^2 + \frac{4826656512}{7} u_0^2 u_2^3 u_4 u_6 - \\
 & \frac{22910802048}{119} u_0^2 u_2^3 u_5^2 - \frac{34177946112}{17} u_0^2 u_2^2 u_3 u_4 u_5 + \frac{17798050944}{119} u_0^2 u_2^2 u_4^3 + \\
 & \frac{1009449216}{17} u_0^2 u_2^2 u_6 u_8 - \frac{6151593600}{323} u_0^2 u_2^2 u_7^2 - \frac{16063660800}{7} u_0^2 u_2 u_3^3 u_5 + \\
 & \frac{595723123584}{119} u_0^2 u_2 u_3^2 u_4^2 - \frac{5011974144}{323} u_0^2 u_2 u_3 u_6 u_7 - \frac{586652917248}{2261} u_0^2 u_2 u_4 u_5 u_7 + \\
 & \frac{401179640832}{2261} u_0^2 u_2 u_4 u_6^2 + \frac{27547382016}{323} u_0^2 u_2 u_5^2 u_6 + \frac{554273280}{323} u_0^2 u_2 u_8 u_{10} - \\
 & \frac{1879490304}{2261} u_0^2 u_2 u_9^2 - \frac{52051999680}{119} u_0^2 u_3^4 u_4 - \frac{25686367488}{119} u_0^2 u_3^2 u_5 u_7 + \\
 & \frac{395923282560}{2261} u_0^2 u_3^2 u_6^2 + \frac{55635600384}{323} u_0^2 u_3 u_4 u_5 u_6 - \frac{710511160320}{2261} u_0^2 u_3 u_5^3 + \\
 & \frac{1108546560}{2261} u_0^2 u_3 u_8 u_9 - \frac{50531247360}{2261} u_0^2 u_4^3 u_6 - \frac{865307090304}{2261} u_0^2 u_4^2 u_5^2 - \\
 & \frac{10974610944}{2261} u_0^2 u_4 u_7 u_9 + \frac{9256363776}{2261} u_0^2 u_4 u_8^2 + \frac{1995383808}{323} u_0^2 u_5 u_6 u_9 - \\
 & \frac{2993075712}{2261} u_0^2 u_5 u_7 u_8 + \frac{11972302848}{2261} u_0^2 u_6^2 u_8 - \frac{23445759744}{2261} u_0^2 u_6 u_7^2 + \\
 & \frac{30233088}{2261} u_0^2 u_{10} u_{12} - \frac{438379776}{52003} u_0^2 u_{11}^2 + 16216200 u_0 u_1^8 u_2 + \\
 & 77837760 u_0 u_1^6 u_2 u_4 - 155675520 u_0 u_1^6 u_3^2 - 1127535552 u_0 u_1^5 u_2^2 u_3 - \\
 & 66718080 u_0 u_1^5 u_4 u_5 + \frac{12789855936}{5} u_0 u_1^4 u_2^4 - 813960576 u_0 u_1^4 u_2 u_3 u_5 + \\
 & 1129355136 u_0 u_1^4 u_2 u_4^2 + \frac{8009202240}{7} u_0 u_1^4 u_3^2 u_4 - 18195840 u_0 u_1^4 u_5 u_7 + \\
 & 19595520 u_0 u_1^4 u_6^2 + \frac{52881963264}{7} u_0 u_1^3 u_2^2 u_3 u_4 - \frac{336557348352}{35} u_0 u_1^3 u_2 u_3^3 + \\
 & 316887552 u_0 u_1^3 u_2 u_5 u_6 + \frac{4691727360}{7} u_0 u_1^3 u_3 u_4 u_6 - 782141184 u_0 u_1^3 u_3 u_5^2 - \\
 & \frac{5201210880}{7} u_0 u_1^3 u_4^2 u_5 + 3359232 u_0 u_1^3 u_7 u_8 + \frac{23363458560}{7} u_0 u_1^2 u_2^4 u_4 - \\
 & \frac{668093951232}{35} u_0 u_1^2 u_2^3 u_3^2 + \frac{11465618688}{7} u_0 u_1^2 u_2^2 u_4 u_6 - 1370566656 u_0 u_1^2 u_2^2 u_5^2 - \\
 & \frac{50474700288}{7} u_0 u_1^2 u_2 u_3 u_4 u_5 + \frac{2426210350848}{595} u_0 u_1^2 u_2 u_4^3 + \\
 & 60466176 u_0 u_1^2 u_2 u_6 u_8 - \frac{3681718272}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_7^2 - \frac{17752981248}{7} u_0 u_1^2 u_3^3 u_5 + \\
 & \frac{5058690983424}{595} u_0 u_1^2 u_3^2 u_4^2 - \frac{1572120576}{17} u_0 u_1^2 u_3 u_6 u_7 - \frac{30212932608}{119} u_0 u_1^2 u_4 u_5 u_7 + \\
 & \frac{89358930432}{323} u_0 u_1^2 u_4 u_6^2 + \frac{490461308928}{2261} u_0 u_1^2 u_5^2 u_6 + \frac{10077696}{17} u_0 u_1^2 u_8 u_{10} - \\
 & \frac{141087744}{323} u_0 u_1^2 u_9^2 - \frac{45316879488}{7} u_0 u_1 u_2^5 u_3 - \frac{32584550400}{7} u_0 u_1 u_2^3 u_4 u_5 - \\
 & \frac{81371796480}{7} u_0 u_1 u_2^2 u_3^2 u_5 + \frac{1946803783168}{85} u_0 u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 - \\
 & \frac{4074748416}{17} u_0 u_1 u_2^2 u_6 u_7 + \\
 & \frac{1456941468672}{119} u_0 u_1 u_2 u_3^3 u_4 - \frac{153725174784}{119} u_0 u_1 u_2 u_3 u_5 u_7 + \\
 & \frac{1480406823936}{1615} u_0 u_1 u_2 u_3 u_6^2 + \frac{5242175594496}{2261} u_0 u_1 u_2 u_4 u_5 u_6 - \\
 & \frac{101341310976}{119} u_0 u_1 u_2 u_5^3 - \frac{1491499008}{323} u_0 u_1 u_2 u_8 u_9 - \frac{9959166058752}{2975} u_0 u_1 u_3^5 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{96305822208}{133} u_0 u_1 u_3^2 u_5 u_6 + \frac{5498088606720}{2261} u_0 u_1 u_3 u_4^2 u_6 - \\
& \frac{6581487955968}{1615} u_0 u_1 u_3 u_4 u_5^2 - \frac{5764442112}{323} u_0 u_1 u_3 u_7 u_9 + \\
& \frac{140724946944}{11305} u_0 u_1 u_3 u_8^2 - \frac{3093567137280}{2261} u_0 u_1 u_4^3 u_5 + \frac{62300316672}{2261} u_0 u_1 u_4 u_7 u_8 + \\
& \frac{157635320832}{2261} u_0 u_1 u_5 u_6 u_8 - \frac{128591400960}{2261} u_0 u_1 u_5 u_7^2 - \frac{88794579456}{2261} u_0 u_1 u_6^2 u_7 - \\
& \frac{60466176}{2261} u_0 u_1 u_{10} u_{11} - \frac{2041713216}{7} u_0 u_7^2 - \frac{22628626560}{7} u_0 u_2^4 u_3 u_5 + \\
& \frac{86824389888}{85} u_0 u_2^4 u_4^2 + \frac{1575443416320}{119} u_0 u_2^3 u_3^2 u_4 - \frac{57725042688}{119} u_0 u_2^3 u_5 u_7 + \\
& \frac{61754441472}{1615} u_0 u_2^3 u_6^2 - \frac{203697483264}{85} u_0 u_2^2 u_3^4 + \frac{22150775808}{19} u_0 u_2^2 u_3 u_5 u_6 + \\
& \frac{3999605755392}{2261} u_0 u_2^2 u_4^2 u_6 - \frac{17876038874112}{11305} u_0 u_2^2 u_4 u_5^2 - \frac{9120314880}{323} u_0 u_2^2 u_7 u_9 + \\
& \frac{69112839168}{11305} u_0 u_2^2 u_8^2 + \frac{99611306496}{17} u_0 u_2 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{9530461990656}{2261} u_0 u_2 u_3^2 u_5^2 - \\
& \frac{666985591296}{323} u_0 u_2 u_3 u_4^2 u_5 + \frac{8404798464}{2261} u_0 u_2 u_3 u_7 u_8 - \frac{4513944485376}{11305} u_0 u_2 u_4^4 + \\
& \frac{351409259520}{2261} u_0 u_2 u_4 u_6 u_8 - \frac{671839681536}{11305} u_0 u_2 u_4 u_7^2 - \frac{23944605696}{323} u_0 u_2 u_5^2 u_8 - \\
& \frac{24831442944}{323} u_0 u_2 u_5 u_6 u_7 + \frac{3436494336}{323} u_0 u_2 u_6^3 - \frac{1330255872}{2261} u_0 u_2 u_9 u_{11} + \\
& \frac{12365332992}{52003} u_0 u_2 u_{10}^2 - \frac{549006004224}{323} u_0 u_3^3 u_4 u_5 + \frac{32627194170624}{11305} u_0 u_3^2 u_4^3 + \\
& \frac{268721763840}{2261} u_0 u_3^2 u_6 u_8 - \frac{850980805632}{11305} u_0 u_3^2 u_7^2 - \frac{23219011584}{323} u_0 u_3 u_4 u_6 u_7 - \\
& \frac{893599382016}{2261} u_0 u_3 u_5^2 u_7 + \frac{460671639552}{1615} u_0 u_3 u_5 u_6^2 - \frac{1330255872}{7429} u_0 u_3 u_9 u_{10} - \\
& \frac{403279160832}{2261} u_0 u_4^2 u_5 u_7 + \frac{7951302144}{323} u_0 u_4^2 u_6^2 + \frac{29628426240}{323} u_0 u_4 u_5^2 u_6 + \\
& \frac{109080981504}{52003} u_0 u_4 u_8 u_{10} - \frac{340212939264}{260015} u_0 u_4 u_9^2 - \frac{179272134144}{1615} u_0 u_5^4 - \\
& \frac{143667634176}{52003} u_0 u_5 u_7 u_{10} + \frac{34586652672}{52003} u_0 u_5 u_8 u_9 - \frac{11972302848}{7429} u_0 u_6^2 u_{10} - \\
& \frac{285339884544}{52003} u_0 u_6 u_7 u_9 + \frac{190226589696}{52003} u_0 u_6 u_8^2 - \frac{12969994752}{52003} u_0 u_7^2 u_8 - \\
& \frac{181398528}{52003} u_0 u_{11} u_{13} + \frac{362797056}{185725} u_0 u_{12}^2 - 1621620 u_1^{10} - 77837760 u_1^7 u_2 u_3 + \\
& 537080544 u_1^6 u_2^3 - 33359040 u_1^6 u_3 u_5 + 50038560 u_1^6 u_4^2 + 1014114816 u_1^5 u_2 u_3 u_4 - \\
& \frac{5269515264}{7} u_1^3 u_3^3 + 18195840 u_1^5 u_5 u_6 + \frac{7225568064}{5} u_1^4 u_2^3 u_4 - \\
& \frac{246496921632}{35} u_1^4 u_2^2 u_3^2 + 287494272 u_1^4 u_2 u_4 u_6 - 303590592 u_1^4 u_2 u_5^2 - \\
& \frac{5675422464}{7} u_1^4 u_3 u_4 u_5 + \frac{3960954432}{7} u_1^4 u_4^3 + 4199040 u_1^4 u_6 u_8 - \\
& 3779136 u_1^4 u_7^2 - \frac{268554222144}{35} u_1^3 u_2^4 u_3 - \frac{19515458304}{7} u_1^3 u_2^2 u_4 u_5 - \\
& \frac{157840793856}{35} u_1^3 u_2 u_3^2 u_5 + \frac{386206983936}{35} u_1^3 u_2 u_3 u_4^2 - 77262336 u_1^3 u_2 u_6 u_7 + \\
& \frac{124455999744}{35} u_1^3 u_3^3 u_4 - \frac{1390722048}{7} u_1^3 u_3 u_5 u_7 + \frac{21920668416}{119} u_1^3 u_3 u_6^2 + \\
& \frac{53855207424}{119} u_1^3 u_4 u_5 u_6 - \frac{579437286912}{2261} u_1^3 u_5^3 - \frac{10077696}{17} u_1^3 u_8 u_9 + \\
& \frac{11452531680}{7} u_1^3 u_6^2 - \frac{33908408192}{5} u_1^2 u_2^3 u_3 u_5 + \frac{213285197952}{35} u_1^2 u_2^3 u_4^2 + \\
& \frac{151254179712}{5} u_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4 - \frac{3552387840}{7} u_1^2 u_2^2 u_5 u_7 + \frac{183591266688}{595} u_1^2 u_2^2 u_6^2 - \\
& \frac{8635421078208}{595} u_1^2 u_2 u_3^4 + \frac{1296566134272}{595} u_1^2 u_2 u_3 u_5 u_6 + \frac{1230325438464}{595} u_1^2 u_2 u_4^2 u_6 - \\
& \frac{1321201062144}{323} u_1^2 u_2 u_4 u_5^2 - \frac{1098468864}{85} u_1^2 u_2 u_7 u_9 + \frac{12199051008}{1615} u_1^2 u_2 u_8^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1777206728448}{595} u_1^2 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{6658767927936}{2261} u_1^2 u_3^2 u_5^2 - \frac{50529119286528}{11305} u_1^2 u_3 u_4^2 u_5 + \\
 & \frac{31553266176}{1615} u_1^2 u_3 u_7 u_8 + \frac{3774673680192}{2261} u_1^2 u_4^4 + \frac{150439845888}{2261} u_1^2 u_4 u_6 u_8 - \\
 & \frac{642286838016}{11305} u_1^2 u_4 u_7^2 - \frac{3809369088}{323} u_1^2 u_5^2 u_8 - \frac{254743999488}{2261} u_1^2 u_5 u_6 u_7 + \\
 & \frac{8648663168}{133} u_1^2 u_6^3 - \\
 & \frac{30233088}{323} u_1^2 u_9 u_{11} + \frac{136048896}{2261} u_1^2 u_{10}^2 + \frac{587832847488}{35} u_1 u_2^4 u_3 u_4 - \\
 & \frac{10443669209856}{595} u_1 u_2^3 u_3^3 + \frac{178506229248}{119} u_1 u_2^3 u_5 u_6 + \frac{807888577536}{85} u_1 u_2^2 u_3 u_4 u_6 - \\
 & \frac{13866723258624}{2261} u_1 u_2^2 u_3 u_5^2 - \frac{120474985844736}{11305} u_1 u_2^2 u_4^2 u_5 + \frac{87343391232}{1615} u_1 u_2^2 u_7 u_8 - \\
 & \frac{42366264468480}{2261} u_1 u_2 u_3^2 u_4 u_5 + \frac{183034225400832}{11305} u_1 u_2 u_3 u_4^3 + \\
 & \frac{3909783250944}{11305} u_1 u_2 u_3 u_6 u_8 - \frac{2113786658304}{11305} u_1 u_2 u_3 u_7^2 - \\
 & \frac{7171228007424}{11305} u_1 u_2 u_4 u_6 u_7 - \frac{1383345174528}{2261} u_1 u_2 u_5^2 u_7 + \\
 & \frac{9184278016512}{11305} u_1 u_2 u_5 u_6^2 + \frac{1753519104}{2261} u_1 u_2 u_9 u_{10} - \frac{348639572736}{85} u_1 u_3^4 u_5 + \\
 & \frac{92474107508736}{11305} u_1 u_3^3 u_4^2 - \frac{2012888765952}{11305} u_1 u_3^2 u_6 u_7 - \frac{962984318976}{595} u_1 u_3 u_4 u_5 u_7 + \\
 & \frac{15153186502656}{11305} u_1 u_3 u_4 u_6^2 + \frac{5997367899648}{11305} u_1 u_3 u_5^2 u_6 + \frac{38577420288}{11305} u_1 u_3 u_8 u_{10} - \\
 & \frac{521188204032}{260015} u_1 u_3 u_9^2 + \frac{12747267592704}{11305} u_1 u_4^2 u_5 u_6 - \frac{2100363167232}{1615} u_1 u_4 u_5^3 - \\
 & \frac{1432685574144}{260015} u_1 u_4 u_8 u_9 - \frac{850698630144}{52003} u_1 u_5 u_7 u_9 + \frac{2756622730752}{260015} u_1 u_5 u_8^2 + \\
 & \frac{11972302848}{7429} u_1 u_6^2 u_9 + \frac{138346610688}{7429} u_1 u_6 u_7 u_8 - \frac{69173305344}{7429} u_1 u_7^3 + \\
 & \frac{181398528}{52003} u_1 u_{11} u_{12} + 993492864 u_2^6 u_4 - \frac{2510965873728}{595} u_2^5 u_3^2 + \\
 & \frac{121685659776}{85} u_2^4 u_4 u_6 + \frac{64427970240}{2261} u_2^4 u_5^2 - \frac{3310714612224}{323} u_2^3 u_3 u_4 u_5 - \\
 & \frac{23404929958656}{11305} u_2^3 u_4^3 + \frac{1608884011008}{11305} u_2^3 u_6 u_8 + \frac{80011867392}{11305} u_2^3 u_7^2 - \\
 & \frac{7345593983232}{595} u_2^2 u_3^3 u_5 + \frac{205598871188352}{11305} u_2^2 u_3^2 u_4^2 - \frac{454625021952}{1615} u_2^2 u_3 u_6 u_7 - \\
 & \frac{14264454647808}{11305} u_2^2 u_4 u_5 u_7 + \frac{251186572800}{2261} u_2^2 u_4 u_6^2 + \frac{1411915442688}{1615} u_2^2 u_5^2 u_6 + \\
 & \frac{66119763456}{11305} u_2^2 u_8 u_{10} - \frac{212704890624}{260015} u_2^2 u_9^2 + \frac{5676761957760}{2261} u_2 u_3^4 u_4 - \\
 & \frac{649527662592}{323} u_2 u_3^2 u_5 u_7 + \frac{11126950435584}{11305} u_2 u_3^2 u_6^2 + \frac{404034988032}{95} u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 - \\
 & \frac{2105744656896}{2261} u_2 u_3 u_5^3 - \frac{7558272000}{52003} u_2 u_3 u_8 u_9 + \frac{953682605568}{1615} u_2 u_4^3 u_6 - \\
 & \frac{3324717570816}{2261} u_2 u_4^2 u_5^2 - \frac{10376660929536}{260015} u_2 u_4 u_7 u_9 + \frac{52514873856}{7429} u_2 u_4 u_8^2 + \\
 & \frac{311279874048}{7429} u_2 u_5 u_6 u_9 + \frac{3735358488576}{260015} u_2 u_5 u_7 u_8 + \frac{2808502709760}{52003} u_2 u_6^2 u_8 - \\
 & \frac{6658263203328}{260015} u_2 u_6 u_7^2 + \frac{4716361728}{52003} u_2 u_{10} u_{12} - \frac{5714053632}{185725} u_2 u_{11}^2 - \\
 & \frac{31381352019648}{56525} u_3^6 + \frac{717007915008}{1615} u_3^3 u_5 u_6 + \frac{6762446424576}{1615} u_3^2 u_4^2 u_6 - \\
 & \frac{707030995968}{323} u_3^2 u_4 u_5^2 - \frac{316328799744}{11305} u_3^2 u_7 u_9 + \frac{522382411008}{37145} u_3^2 u_8^2 + \\
 & \frac{2419292012544}{1615} u_3 u_4^3 u_5 + \frac{627638906880}{52003} u_3 u_4 u_7 u_8 + \frac{60286530991104}{260015} u_3 u_5 u_6 u_8 - \\
 & \frac{6716008401408}{52003} u_3 u_5 u_7^2 + \frac{15735596709888}{260015} u_3 u_6^2 u_7 + \frac{37730893824}{1300075} u_3 u_{10} u_{11} - \\
 & \frac{1193987786112}{8075} u_4^5 + \frac{2801972362752}{52003} u_4^2 u_6 u_8 - \frac{1714805634816}{52003} u_4^2 u_7^2 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3268438677504}{37145} u_4 u_5^2 u_8 + \frac{5594693400576}{37145} u_4 u_5 u_6 u_7 - \frac{183786941952}{52003} u_4 u_6^3 - \\
& \frac{103759958016}{260015} u_4 u_9 u_{11} + \frac{14149085184}{76475} u_4 u_{10}^2 - \frac{28041521683968}{260015} u_5^3 u_7 + \\
& \frac{22480855623936}{280015} u_5^2 u_6^2 + \frac{700379716608}{1300075} u_5 u_8 u_{11} - \frac{25939989504}{185725} u_5 u_9 u_{10} + \\
& \frac{933839622144}{1300075} u_6 u_7 u_{11} + \frac{1608279349248}{1300075} u_6 u_8 u_{10} - \frac{142669942272}{260015} u_6 u_9^2 - \\
& \frac{933839622144}{1300075} u_7^2 u_{10} + \frac{51879979008}{260015} u_7 u_8 u_9 + \frac{12969994752}{37145} u_8^3 + \frac{544195584}{1300075} u_{12} u_{14} - \\
& \frac{272097792}{1300075} u_{13}^2 \tag{A.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{15} = & \frac{1}{15} u_0^{15} - 91 u_0^{12} u_1^2 + \frac{3276}{5} u_0^{11} u_2^2 - \frac{15444}{5} u_0^{10} u_3^2 - 10010 u_0^9 u_4^2 + \\
& 34320 u_0^9 u_5^2 + 10296 u_0^9 u_6^2 + 324324 u_0^8 u_7^2 u_2^2 - 463320 u_0^8 u_2 u_3^2 - 25272 u_0^8 u_5^2 - \\
& 1111968 u_0^7 u_1^2 u_3^2 + 1297296 u_0^7 u_2^4 + 1415232 u_0^7 u_2 u_4^2 + 46656 u_0^7 u_6^2 - 504504 u_0^6 u_1^6 + \\
& \frac{79567488}{5} u_0^6 u_1^2 u_3^2 + 2594592 u_0^6 u_1^2 u_4^2 - \frac{46230912}{5} u_0^6 u_1 u_3^3 - \frac{148835232}{5} u_0^6 u_2^2 u_3^2 - \\
& 3048192 u_0^6 u_2 u_5^2 + \frac{13716864}{5} u_0^6 u_4^3 - \frac{326592}{5} u_0^6 u_7^2 + 27243216 u_0^5 u_1^4 u_2^2 - \\
& \frac{669404736}{5} u_0^5 u_1^2 u_2 u_3^2 - 4245696 u_0^5 u_1^2 u_5^2 + \frac{310915584}{5} u_0^5 u_1 u_3 u_4^2 + \\
& 32550336 u_0^5 u_2^5 + \frac{371988288}{5} u_0^5 u_2^3 u_4^2 + \frac{23514624}{5} u_0^5 u_2 u_6^2 - \frac{154641312}{5} u_0^5 u_3^4 - \\
& \frac{82301184}{5} u_0^5 u_4 u_5^2 + \frac{5878656}{85} u_0^5 u_8^2 - 58378320 u_0^4 u_1^4 u_3^2 + 424215792 u_0^4 u_1^2 u_4^2 + \\
& 242004672 u_0^4 u_1^2 u_2 u_4^2 + 4898880 u_0^4 u_1^2 u_6^2 - 993928320 u_0^4 u_1 u_2 u_3^3 - \\
& 94058496 u_0^4 u_1 u_3 u_5^2 - 922622400 u_0^4 u_2^3 u_3^2 - 124431552 u_0^4 u_2^2 u_5^2 + \\
& 262579968 u_0^4 u_2 u_4^3 - \frac{88179840}{17} u_0^4 u_2 u_7^2 + 381132864 u_0^4 u_3^2 u_4^2 + \frac{387991296}{17} u_0^4 u_4 u_6^2 - \\
& \frac{17635968}{323} u_0^4 u_9^2 - 5405400 u_0^3 u_1^5 + 695350656 u_0^3 u_1^4 u_3^2 + 77837760 u_0^3 u_1^4 u_4^2 - \\
& 714894336 u_0^3 u_1^3 u_3^3 - 5015177856 u_0^3 u_1^2 u_2^2 u_3^2 - 284788224 u_0^3 u_1^2 u_2 u_5^2 + \\
& 408706560 u_0^3 u_1^2 u_4^3 - 3919104 u_0^3 u_1^2 u_7^2 + 4713748992 u_0^3 u_1 u_2 u_3 u_4^2 + \\
& \frac{1622509056}{17} u_0^3 u_1 u_3 u_6^2 - \frac{1995383808}{17} u_0^3 u_1 u_5^3 + 440852544 u_0^3 u_2^6 + \\
& 1608885504 u_0^3 u_2^3 u_4^2 + \frac{2355381504}{17} u_0^3 u_2^2 u_6^2 - 2677276800 u_0^3 u_2 u_3^4 - \\
& \frac{18868806144}{17} u_0^3 u_2 u_4 u_5^2 + \frac{1293304320}{323} u_0^3 u_2 u_8^2 - \frac{8562122496}{17} u_0^3 u_3^2 u_6^2 + \\
& \frac{5989230720}{17} u_0^3 u_4^4 - \frac{6983843328}{323} u_0^3 u_4 u_7^2 + \frac{5764442112}{323} u_0^3 u_6^3 + \frac{10077696}{323} u_0^3 u_{10}^2 + \\
& 272432160 u_0^2 u_1^6 u_2^2 - 2848862016 u_0^2 u_1^4 u_2 u_3^2 - 63685440 u_0^2 u_1^4 u_5^2 + \\
& 2345863680 u_0^2 u_1^3 u_3 u_4^2 + 4672691712 u_0^2 u_1^2 u_5^2 + 5732809344 u_0^2 u_1^2 u_2^2 u_4^2 + \\
& 211631616 u_0^2 u_1^2 u_2 u_6^2 - 4438245312 u_0^2 u_1^2 u_4^3 - \frac{19550730240}{17} u_0^2 u_1^2 u_4 u_5^2 + \\
& \frac{35271936}{17} u_0^2 u_1^2 u_8^2 - 27123932160 u_0^2 u_1 u_2^2 u_3^3 - \frac{76862587392}{17} u_0^2 u_1 u_2 u_3 u_5^2 + \\
& \frac{121234682880}{17} u_0^2 u_1 u_3 u_4^3 - \frac{20175547392}{323} u_0^2 u_1 u_3 u_7^2 + \frac{92785347072}{323} u_0^2 u_1 u_5 u_6^2 - \\
& 11314313280 u_0^2 u_2^4 u_3^2 - \frac{28862521344}{17} u_0^2 u_2^3 u_5^2 + \frac{109369875456}{17} u_0^2 u_2^2 u_4^3 - \\
& \frac{31921102080}{323} u_0^2 u_2^2 u_7^2 + \frac{348639572736}{17} u_0^2 u_2 u_3^2 u_4^2 + \frac{315381496320}{323} u_0^2 u_2 u_4 u_6^2 - \\
& \frac{665127936}{323} u_0^2 u_2 u_9^2 + \frac{134360881920}{323} u_0^2 u_3^2 u_6^2 - \frac{353737207296}{323} u_0^2 u_3 u_5^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{746379360000}{323} u_0^2 u_4^2 u_5^2 + \frac{4323331584}{323} u_0^2 u_4 u_8^2 - \frac{12969994752}{323} u_0^2 u_6 u_7^2 - \\
 & \frac{90699264}{7429} u_0^2 u_{11}^2 - 233513280 u_0 u_1^5 u_3^2 + \frac{25289488224}{5} u_0 u_1^4 u_2^4 + \\
 & 2012459904 u_0 u_1^4 u_2 u_4^2 + 29393280 u_0 u_1^4 u_6^2 - \frac{105227195904}{5} u_0 u_1^3 u_2 u_3^3 - \\
 & 1390722048 u_0 u_1^3 u_3 u_5^2 - \frac{237344857344}{5} u_0 u_1^2 u_2^3 u_3^2 - 3552387840 u_0 u_1^2 u_2^2 u_5^2 + \\
 & \frac{999633540096}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_4^3 - \frac{7689282048}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_7^2 + \frac{1777206728448}{85} u_0 u_1^2 u_3 u_4^2 + \\
 & \frac{194882485248}{323} u_0 u_1^2 u_4 u_6^2 - \frac{211631616}{323} u_0 u_1^2 u_9^2 + \frac{5655220042752}{85} u_0 u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 + \\
 & \frac{3909783250944}{1615} u_0 u_1 u_2 u_3 u_6^2 - \frac{1069525721088}{323} u_0 u_1 u_2 u_5^3 - \frac{4880954018304}{425} u_0 u_1 u_3^5 - \\
 & \frac{23157457016832}{1615} u_0 u_1 u_3 u_4 u_5^2 + \frac{38577420288}{1615} u_0 u_1 u_3 u_8^2 - \frac{43233315840}{323} u_0 u_1 u_5 u_7^2 + \\
 & 1986985728 u_0 u_2^7 + \frac{851799618432}{85} u_0 u_2^4 u_4^2 + \frac{1608884011008}{1615} u_0 u_2^3 u_6^2 - \\
 & \frac{3672796991616}{85} u_0 u_2^2 u_3^4 - \frac{22595544843264}{1615} u_0 u_2^2 u_4 u_5^2 + \frac{86119763456}{1615} u_0 u_2^2 u_8^2 - \\
 & \frac{4546693638144}{323} u_0 u_2 u_3^2 u_5^2 + \frac{902855745792}{85} u_0 u_2 u_4^4 - \frac{789506860032}{1615} u_0 u_2 u_4 u_7^2 + \\
 & \frac{8646663168}{19} u_0 u_2 u_6^3 + \frac{4716361728}{7429} u_0 u_2 u_{10}^2 + \frac{38939088642048}{1615} u_0 u_3^2 u_4^3 - \\
 & \frac{316328799744}{1615} u_0 u_3^2 u_7^2 + \frac{3094840286208}{1615} u_0 u_3 u_5 u_6^2 + \frac{453405620736}{323} u_0 u_4^2 u_6^2 - \\
 & \frac{181579926528}{37145} u_0 u_4 u_9^2 - \frac{1106969400576}{1615} u_0 u_5^4 + \frac{129699947520}{7429} u_0 u_6 u_8^2 + \\
 & \frac{544195584}{185725} u_0 u_{12}^2 - 2522520 u_1^{10} + 913296384 u_1^6 u_2^3 + 77837760 u_1^6 u_4^2 - \\
 & 1312526592 u_1^5 u_3^3 - \frac{71920270656}{5} u_1^4 u_2^2 u_3^2 - 580027392 u_1^4 u_2 u_5^2 + \\
 & 1085965056 u_1^4 u_4^3 - 5878656 u_1^4 u_7^2 + \frac{119876433408}{5} u_1^3 u_2 u_3 u_4^2 + \\
 & \frac{5895452160}{17} u_1^3 u_3 u_6^2 - \frac{172218866688}{323} u_1^3 u_5^3 + \frac{221855080896}{25} u_1^2 u_2^6 + \\
 & \frac{93446182656}{5} u_1^2 u_3^2 u_4^2 + \frac{78674893056}{85} u_1^2 u_2^2 u_6^2 - \frac{4361228293248}{85} u_1^2 u_2 u_3^4 - \\
 & \frac{18491957420544}{1615} u_1^2 u_2 u_4 u_5^2 + \frac{27441566208}{1615} u_1^2 u_2 u_8^2 - \frac{10735431945984}{1615} u_1^2 u_3^2 u_5^2 + \\
 & \frac{1737686390400}{323} u_1^2 u_4^4 - \frac{219824782848}{1615} u_1^2 u_4 u_7^2 + \frac{52840719360}{323} u_1^2 u_6^3 + \frac{30233088}{323} u_1^2 u_{10}^2 - \\
 & \frac{1723729807872}{17} u_1 u_2^3 u_3^3 - \frac{35608289181696}{1615} u_1 u_2^2 u_3 u_5^2 + \frac{128970177509376}{1615} u_1 u_2 u_3 u_4^3 - \\
 & \frac{179725630464}{323} u_1 u_2 u_3 u_7^2 + \frac{4540163291136}{1615} u_1 u_2 u_5 u_6^2 + \frac{77411521732608}{1615} u_1 u_3^3 u_4^2 + \\
 & \frac{1297402583040}{323} u_1 u_3 u_4 u_6^2 - \frac{150923575296}{37145} u_1 u_3 u_9^2 - \frac{9877192399872}{1615} u_1 u_4 u_5^3 + \\
 & \frac{1011659590656}{37145} u_1 u_5 u_8^2 - \frac{211362877440}{7429} u_1 u_7^3 - \frac{401841316224}{17} u_2^5 u_3^2 - \\
 & \frac{5827654740096}{1615} u_2^4 u_5^2 + \frac{35513451343872}{1615} u_2^3 u_4^3 - \frac{80685393408}{323} u_2^3 u_7^2 + \\
 & \frac{181504888563456}{1615} u_2^2 u_3^2 u_4^2 + \frac{6847451790336}{1615} u_2^2 u_4 u_6^2 - \frac{278718838272}{37145} u_2^2 u_9^2 + \\
 & \frac{382992758784}{95} u_2 u_3^2 u_6^2 - \frac{3815028274176}{323} u_2 u_3 u_5^3 - \frac{7614505543680}{323} u_2 u_4^2 u_5^2 + \\
 & \frac{3958241429504}{37145} u_2 u_4 u_8^2 - \frac{694615274496}{1955} u_2 u_6 u_7^2 - \frac{16507266048}{185725} u_2 u_{11}^2 - \\
 & \frac{57492451983744}{8075} u_3^6 - \frac{41533221961728}{1615} u_3^2 u_4 u_5^2 + \frac{1493847111168}{37145} u_3^2 u_8^2 - \\
 & \frac{932529521664}{1955} u_3 u_5 u_7^2 + \frac{34009835586048}{8075} u_4^5 - \frac{2706234250752}{7429} u_4^2 u_7^2 + \\
 & \frac{1714746848256}{2185} u_4 u_6^3 + \frac{148565394432}{185725} u_4 u_{10}^2 + \frac{9339353602560}{7429} u_5^2 u_6^2 -
 \end{aligned}$$

$$\frac{622559748096}{185725}u_6u_9^2 + \frac{5764442112}{2185}u_8^3 - \frac{60466176}{185725}u_{13}^2 \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} X_{15} = & \frac{1}{16}u_0^{16} + u_0^{14}u_2 - 98u_0^{13}u_1^2 - 182u_0^{12}u_1u_3 + \frac{3731}{5}u_0^{12}u_2^2 + 1092u_0^{11}u_1^2u_2 + \\ & \frac{6552}{5}u_0^{11}u_2u_4 - 3744u_0^{11}u_3^2 - 13013u_0^{10}u_1^4 - \frac{72072}{5}u_0^{10}u_1u_2u_3 + \\ & \frac{176748}{5}u_0^{10}u_2^3 - \frac{30888}{5}u_0^{10}u_3u_5 + \frac{66924}{5}u_0^{10}u_4^2 - 40040u_0^9u_1^2u_3 + \\ & 456456u_0^9u_2^2u_2^2 + 61776u_0^9u_1u_3u_4 + 102960u_0^9u_2^2u_4 - 494208u_0^9u_2u_3^2 + \\ & 20592u_0^9u_4u_6 - 35568u_0^9u_5^2 + 270270u_0^8u_1^4u_2 + 648648u_0^8u_1^2u_2u_4 - \\ & 1714284u_0^8u_1^2u_3^2 - 1575288u_0^8u_1u_2^2u_3 - 185328u_0^8u_1u_4u_5 + 1073358u_0^8u_2^4 - \\ & 926640u_0^8u_2u_3u_5 + 1592136u_0^8u_2u_4^2 - 42120u_0^8u_3^2u_4 - 50544u_0^8u_5u_7 + \\ & 71928u_0^8u_6^2 - 864864u_0^7u_1^6 - 5189184u_0^7u_1^3u_2u_3 + \frac{119721888}{5}u_0^7u_1^2u_2^3 - \\ & 2223936u_0^7u_1^2u_3u_5 + 4447872u_0^7u_1^2u_4^2 + 11860992u_0^7u_1u_2u_3u_4 - \\ & \frac{69144192}{5}u_0^7u_1u_3^3 + 404352u_0^7u_1u_5u_6 + 5189184u_0^7u_2^3u_4 - \frac{146644992}{5}u_0^7u_2^2u_3^2 + \\ & 2830464u_0^7u_2u_4u_6 - 3685824u_0^7u_2u_5^2 + 435456u_0^7u_3u_4u_5 + \frac{15349824}{5}u_0^7u_4^3 + \\ & 93312u_0^7u_6u_8 - \frac{559872}{5}u_0^7u_7^2 - 3027024u_0^6u_1^5u_3 + 52972920u_0^6u_1^4u_2^2 + \\ & 15567552u_0^6u_1^3u_3u_4 + \frac{238702464}{5}u_0^6u_1^2u_2^2u_4 - 220540320u_0^6u_1^2u_2u_3^2 + \\ & 5189184u_0^6u_1^2u_4u_6 - 8255520u_0^6u_1^2u_5^2 - \frac{499891392}{5}u_0^6u_1u_2^3u_3 - \\ & 30191616u_0^6u_1u_2u_4u_5 - \frac{138692736}{5}u_0^6u_1u_3^2u_5 + 103493376u_0^6u_1u_3u_4^2 - \\ & 653184u_0^6u_1u_6u_7 + \frac{93208752}{5}u_0^6u_2^5 - \frac{297670464}{5}u_0^6u_2^2u_3u_5 + \\ & 73537632u_0^6u_2^2u_4^2 + 26308800u_0^6u_2u_3^2u_4 - 6096384u_0^6u_2u_5u_7 + \\ & \frac{31243968}{5}u_0^6u_2u_6^2 - 39817008u_0^6u_3^4 - \frac{6096384}{5}u_0^6u_3u_5u_6 + \frac{18289152}{5}u_0^6u_4^2u_6 - \\ & \frac{97542144}{5}u_0^6u_4u_5^2 - \frac{653184}{5}u_0^6u_7u_9 + \frac{2286144}{17}u_0^6u_8^2 + 15135120u_0^5u_1^6u_2 + \\ & 54486432u_0^5u_1^4u_2u_4 - 132324192u_0^5u_1^4u_3^2 - \frac{1977079104}{5}u_0^5u_1^3u_2^2u_3 - \\ & 31135104u_0^5u_1^3u_4u_5 + \frac{3468969504}{5}u_0^5u_1^2u_2^4 - \frac{1338809472}{5}u_0^5u_1^2u_2u_3u_5 + \\ & \frac{2247388416}{5}u_0^5u_1^2u_2u_4^2 + \frac{1076991552}{5}u_0^5u_1^2u_3^2u_4 - 8491392u_0^5u_1^2u_5u_7 + \\ & 11104128u_0^5u_1^2u_6^2 + \frac{4463641728}{5}u_0^5u_1u_2^2u_3u_4 - \frac{7299984384}{5}u_0^5u_1u_2u_3^3 + \\ & 53561088u_0^5u_1u_2u_5u_6 + \frac{621831168}{5}u_0^5u_1u_3u_4u_6 - \frac{896821632}{5}u_0^5u_1u_3u_5^2 - \\ & \frac{420650496}{5}u_0^5u_1u_4^2u_5 + \frac{3919104}{5}u_0^5u_1u_7u_8 + 162751680u_0^5u_2^4u_4 - \\ & \frac{4752566784}{5}u_0^5u_2^3u_3^2 + \frac{743976576}{5}u_0^5u_2^2u_4u_6 - \frac{634241664}{5}u_0^5u_2^2u_5^2 - \\ & 92752128u_0^5u_2u_3u_4u_5 + \frac{1032683904}{5}u_0^5u_2u_4^3 + \frac{47029248}{5}u_0^5u_2u_6u_8 - \\ & \frac{662328576}{85}u_0^5u_2u_7^2 - \frac{618565248}{5}u_0^5u_3^3u_5 + \frac{2242380672}{5}u_0^5u_3^2u_4^2 + \\ & \frac{188116992}{85}u_0^5u_3u_6u_7 - \frac{1316818944}{85}u_0^5u_4u_5u_7 + \frac{2504307456}{85}u_0^5u_4u_6^2 - \\ & \frac{82301184}{85}u_0^5u_5^2u_6 + \frac{11757312}{85}u_0^5u_8u_{10} - \frac{11757312}{95}u_0^5u_9^2 - 14864850u_0^4u_1^3 - \\ & 272432160u_0^4u_1^3u_2u_3 + 1737079344u_0^4u_1^4u_2^3 - 116756640u_0^4u_1^4u_3u_5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 214053840u_0^4u_1^4u_2^2 + 1805836032u_0^4u_1^3u_2u_3u_4 - 1753674624u_0^4u_1^3u_3^2 + \\
 & 42456960u_0^4u_1^3u_5u_6 + 1696863168u_0^4u_1^2u_2^3u_4 - 10081000800u_0^4u_1^2u_2^2u_3^2 + \\
 & 484009344u_0^4u_1^2u_2u_4u_6 - 621504576u_0^4u_1^2u_2u_5^2 - 762918912u_0^4u_1^2u_3u_4u_5 + \\
 & 883897920u_0^4u_1^2u_4^3 + 9797760u_0^4u_1^2u_6u_8 - 10777536u_0^4u_1^2u_7^2 - \\
 & 3359053152u_0^4u_1u_2^4u_3 - 1711995264u_0^4u_1u_2^2u_4u_5 - 2981784960u_0^4u_1u_2u_3^2u_5 + \\
 & 8991451008u_0^4u_1u_2u_3u_4^2 - 66624768u_0^4u_1u_2u_6u_7 + 725251968u_0^4u_1u_3^3u_4 - \\
 & 188116992u_0^4u_1u_3u_5u_7 + \frac{3693755520}{17}u_0^4u_1u_3u_6^2 + \frac{4514807808}{17}u_0^4u_1u_4u_5u_6 - \\
 & \frac{4005884160}{17}u_0^4u_1u_5^3 - \frac{11757312}{17}u_0^4u_1u_8u_9 + 105197616u_0^4u_2^6 - \\
 & 1845244800u_0^4u_2^3u_3u_5 + 1521032256u_0^4u_2^3u_4^2 + 3261021120u_0^4u_2^2u_3^2u_4 - \\
 & 248863104u_0^4u_2^2u_5u_7 + \frac{2567992896}{17}u_0^4u_2^2u_6^2 - 2831918112u_0^4u_2u_3^4 + \\
 & \frac{1783192320}{17}u_0^4u_2u_3u_5u_6 + \frac{7218989568}{17}u_0^4u_2u_4^2u_6 - \frac{21088978560}{17}u_0^4u_2u_4u_5^2 - \\
 & \frac{176359680}{17}u_0^4u_2u_7u_9 + \frac{2286797184}{323}u_0^4u_2u_8^2 + 762265728u_0^4u_3^2u_4u_6 - \\
 & \frac{15932977344}{17}u_0^4u_3^2u_5^2 + \frac{6981883776}{17}u_0^4u_3u_4^2u_5 - \frac{881798400}{323}u_0^4u_3u_7u_8 + \\
 & 315277920u_0^4u_4^4 + \frac{7336562688}{323}u_0^4u_4u_6u_8 - \frac{10211225472}{323}u_0^4u_4u_7^2 - \\
 & \frac{4444263936}{323}u_0^4u_5^2u_8 + \frac{1551965184}{323}u_0^4u_5u_6u_7 + \frac{7704398592}{323}u_0^4u_6^3 - \\
 & \frac{35271936}{323}u_0^4u_9u_{11} + \frac{27713664}{323}u_0^4u_{10}^2 - 43243200u_0^3u_1^3u_3 + 968647680u_0^3u_1^6u_2^2 + \\
 & 467026560u_0^3u_1^5u_3u_4 + 2086051968u_0^3u_1^4u_2^2u_4 - 8935774848u_0^3u_1^4u_2u_3^2 + \\
 & 155675520u_0^3u_1^4u_4u_6 - 226437120u_0^3u_1^4u_5^2 - 12350257920u_0^3u_1^3u_2^3u_3 - \\
 & 2558739456u_0^3u_1^3u_2u_4u_5 - 2144683008u_0^3u_1^3u_3^2u_5 + 7295754240u_0^3u_1^3u_3u_4^2 - \\
 & 39191040u_0^3u_1^3u_6u_7 + 9091248192u_0^3u_1^2u_2^5 - 10030355712u_0^3u_1^2u_2^2u_3u_5 + \\
 & 13738263552u_0^3u_1^2u_2^2u_4^2 + 22695780096u_0^3u_1^2u_2u_3^2u_4 - 569576448u_0^3u_1^2u_2u_5u_7 + \\
 & 578721024u_0^3u_1^2u_2u_6^2 - 11373613056u_0^3u_1^2u_3^4 + 883104768u_0^3u_1^2u_3u_5u_6 + \\
 & 951782400u_0^3u_1^2u_4^2u_6 - \frac{52267037184}{17}u_0^3u_1^2u_4u_5^2 - 7838208u_0^3u_1^2u_7u_9 + \\
 & \frac{125411328}{17}u_0^3u_1^2u_8^2 + 27441690624u_0^3u_1u_2^3u_3u_4 - 45962629632u_0^3u_1u_2^2u_3^3 + \\
 & 2134605312u_0^3u_1u_2^2u_5u_6 + 9427497984u_0^3u_1u_2u_3u_4u_6 - \\
 & \frac{177791086080}{17}u_0^3u_1u_2u_3u_5^2 - \frac{141370292736}{17}u_0^3u_1u_2u_4^2u_5 + \\
 & \frac{971937792}{17}u_0^3u_1u_2u_7u_8 - \frac{98525901312}{17}u_0^3u_1u_3^2u_4u_5 + \frac{251444113920}{17}u_0^3u_1u_3u_4^3 + \\
 & \frac{3245018112}{17}u_0^3u_1u_3u_6u_8 - \frac{58473031680}{323}u_0^3u_1u_3u_7^2 - \frac{91001594880}{323}u_0^3u_1u_4u_6u_7 - \\
 & \frac{95959821312}{323}u_0^3u_1u_5^2u_7 + \frac{231142035456}{323}u_0^3u_1u_5u_6^2 + \frac{141087744}{323}u_0^3u_1u_9u_{10} + \\
 & 2645115264u_0^3u_2^5u_4 - 15559091712u_0^3u_2^4u_3^2 + 3217771008u_0^3u_2^3u_4u_6 - \\
 & \frac{24894708480}{17}u_0^3u_2^3u_5^2 - \frac{159497081856}{17}u_0^3u_2^2u_3u_4u_5 + 2842470144u_0^3u_2^2u_4^3 + \\
 & \frac{4710763008}{17}u_0^3u_2^2u_6u_8 - \frac{39347804160}{323}u_0^3u_2^2u_7^2 - 10709107200u_0^3u_2u_3^3u_5 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{513361939968}{17} u_0^3 u_2 u_3^2 u_4^2 - \frac{23389212672}{323} u_0^3 u_3 u_3 u_6 u_7 - \frac{391101944832}{323} u_0^3 u_2 u_4 u_5 u_7 + \\
& \frac{372580259328}{323} u_0^3 u_2 u_4 u_6^2 + \frac{128554449408}{323} u_0^3 u_2 u_5^2 u_6 + \frac{2586608640}{323} u_0^3 u_2 u_8 u_{10} - \\
& \frac{1474702848}{323} u_0^3 u_2 u_9^2 - \\
& \frac{34701333120}{17} u_0^3 u_3^4 u_4 - \frac{17124244992}{17} u_0^3 u_3^2 u_5 u_7 + \frac{308735815680}{323} u_0^3 u_3^2 u_6^2 + \\
& \frac{259632801792}{323} u_0^3 u_3 u_4 u_5 u_6 - \frac{591586509312}{323} u_0^3 u_3 u_5^3 + \frac{739031040}{323} u_0^3 u_3 u_8 u_9 - \\
& \frac{33687498240}{323} u_0^3 u_4^3 u_6 - \frac{825664513536}{323} u_0^3 u_4^2 u_5^2 - \frac{7316407296}{323} u_0^3 u_4 u_7 u_9 + \\
& \frac{7612019712}{323} u_0^3 u_4 u_8^2 + \frac{9311791104}{323} u_0^3 u_5 u_6 u_9 - \frac{1995383808}{323} u_0^3 u_5 u_7 u_8 + \\
& \frac{7981535232}{323} u_0^3 u_6^2 u_8 - \frac{19953838080}{323} u_0^3 u_6 u_7^2 + \frac{20155392}{323} u_0^3 u_{10} u_{12} - \\
& \frac{322486272}{7429} u_0^3 u_{11}^2 + \\
& 113513400 u_0^2 u_1^8 u_2 + 544864320 u_0^2 u_1^6 u_2 u_4 - 1206485280 u_0^2 u_1^6 u_3^2 - \\
& 7892748864 u_0^2 u_1^5 u_2^2 u_3 - 467026560 u_0^2 u_1^5 u_4 u_5 + \frac{102173735664}{5} u_0^2 u_1^4 u_2^4 - \\
& 5697724032 u_0^2 u_1^4 u_2 u_3 u_5 + 8911715904 u_0^2 u_1^4 u_2 u_4^2 + 8009202240 u_0^2 u_1^4 u_3^2 u_4 - \\
& 127370880 u_0^2 u_1^4 u_5 u_7 + 151865280 u_0^2 u_1^4 u_6^2 + 52881963264 u_0^2 u_1^3 u_2^2 u_3 u_4 - \\
& \frac{389170946304}{5} u_0^2 u_1^3 u_2 u_3^3 + 2218212864 u_0^2 u_1^3 u_2 u_5 u_6 + 4691727360 u_0^2 u_1^3 u_3 u_4 u_6 - \\
& 6170349312 u_0^2 u_1^3 u_3 u_5^2 - 5201210880 u_0^2 u_1^3 u_4^2 u_5 + 23514624 u_0^2 u_1^3 u_7 u_8 + \\
& 23363458560 u_0^2 u_1^2 u_2^4 u_4 - \frac{786766379904}{5} u_0^2 u_1^2 u_2^3 u_3^2 + 11465618688 u_0^2 u_1^2 u_2^2 u_4 u_6 - \\
& 11370160512 u_0^2 u_1^2 u_3^2 u_5^2 - 50474700288 u_0^2 u_1^2 u_2 u_3 u_4 u_5 + \\
& \frac{2926027120896}{85} u_0^2 u_1^2 u_2 u_4^3 + 423263232 u_0^2 u_1^2 u_2 u_6 u_8 - \frac{29616668928}{85} u_0^2 u_1^2 u_2 u_7^2 - \\
& 17752981248 u_0^2 u_1^2 u_3^3 u_5 + \frac{5947294347648}{85} u_0^2 u_1^2 u_3^2 u_4^2 - \frac{11004844032}{17} u_0^2 u_1^2 u_3 u_6 u_7 - \\
& \frac{30212932608}{17} u_0^2 u_1^2 u_4 u_5 u_7 + \frac{722953755648}{323} u_0^2 u_1^2 u_4 u_6^2 + \frac{490461308928}{323} u_0^2 u_1^2 u_5^2 u_6 + \\
& \frac{70543872}{17} u_0^2 u_1^2 u_8 u_{10} - \frac{1093430016}{323} u_0^2 u_1^2 u_9^2 - 45316879488 u_0^2 u_1 u_2^5 u_3 - \\
& 32584550400 u_0^2 u_1 u_2^3 u_4 u_5 - 81371796480 u_0^2 u_1 u_2^2 u_3^2 u_5 + \\
& \frac{16448236503552}{85} u_0^2 u_1 u_2^2 u_3 u_4^2 - \frac{28523238912}{17} u_0^2 u_1 u_2^2 u_6 u_7 + \\
& \frac{1456941468672}{17} u_0^2 u_1 u_2 u_3^3 u_4 - \frac{153725174784}{17} u_0^2 u_1 u_2 u_3 u_5 u_7 + \\
& \frac{724572905472}{95} u_0^2 u_1 u_2 u_3 u_6^2 + \frac{5242175594496}{323} u_0^2 u_1 u_2 u_4 u_5 u_6 - \\
& \frac{2460247769088}{323} u_0^2 u_1 u_2 u_5^3 - \frac{10440493056}{323} u_0^2 u_1 u_2 u_8 u_9 - \frac{12399643067904}{425} u_0^2 u_1 u_3^5 + \\
& \frac{96305822208}{19} u_0^2 u_1 u_3^2 u_5 u_6 + \frac{5498088606720}{323} u_0^2 u_1 u_3 u_4^2 u_6 - \\
& \frac{57649144200192}{1615} u_0^2 u_1 u_3 u_4 u_5^2 - \frac{40351094784}{323} u_0^2 u_1 u_3 u_7 u_9 + \\
& \frac{9412568064}{95} u_0^2 u_1 u_3 u_8^2 - \frac{3093567137280}{323} u_0^2 u_1 u_4^3 u_5 + \frac{62300316672}{323} u_0^2 u_1 u_4 u_7 u_8 + \\
& \frac{157635320832}{323} u_0^2 u_1 u_5 u_6 u_8 - \frac{150208058880}{323} u_0^2 u_1 u_5 u_7^2 - \frac{88794579456}{323} u_0^2 u_1 u_6^2 u_7 - \\
& \frac{60466176}{323} u_0^2 u_1 u_{10} u_{11} - 1048220352 u_0^2 u_2^7 - 22628626560 u_0^2 u_2^4 u_3 u_5 + \\
& \frac{1033670538432}{85} u_0^2 u_2^4 u_4^2 + \frac{1575443416320}{17} u_0^2 u_2^3 u_3^2 u_4 - \frac{57725042688}{17} u_0^2 u_2^3 u_5 u_7 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1236723095808}{1615} u_0^2 u_2^3 u_6^2 - \frac{3262280878656}{85} u_0^2 u_2^2 u_3^4 + \frac{155055430656}{19} u_0^2 u_2^2 u_3 u_5 u_6 + \\
 & \frac{3999605755392}{323} u_0^2 u_2^2 u_4^2 u_6 - \frac{29173811295744}{1615} u_0^2 u_2^2 u_4 u_5^2 - \frac{63842204160}{323} u_0^2 u_2^2 u_7 u_9 + \\
 & \frac{102172720896}{1615} u_0^2 u_2^2 u_8^2 + \frac{697279145472}{17} u_0^2 u_2 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{11803808809728}{323} u_0^2 u_2 u_3^2 u_5^2 - \\
 & \frac{4668899139072}{323} u_0^2 u_2 u_3 u_4^2 u_5 + \frac{8404798464}{323} u_0^2 u_2 u_3 u_7 u_8 + \\
 & \frac{4063185099648}{1615} u_0^2 u_2 u_4^4 + \frac{351409259520}{323} u_0^2 u_2 u_4 u_6 u_8 - \frac{1066593111552}{1615} u_0^2 u_2 u_4 u_7^2 - \\
 & \frac{167612239872}{323} u_0^2 u_2 u_5^2 u_8 - \frac{173820100608}{323} u_0^2 u_2 u_5 u_6 u_7 + \frac{97552097280}{323} u_0^2 u_2 u_6^3 - \\
 & \frac{1330255872}{323} u_0^2 u_2 u_9 u_{11} + \frac{14723513856}{7429} u_0^2 u_2 u_{10}^2 - \frac{3843042029568}{323} u_0^2 u_3^3 u_4 u_5 + \\
 & \frac{52096738491648}{1615} u_0^2 u_3^2 u_4^3 + \frac{268721763840}{323} u_0^2 u_3^2 u_6 u_8 - \frac{1009145205504}{1615} u_0^2 u_3^2 u_7^2 - \\
 & \frac{162533081088}{323} u_0^2 u_3 u_4 u_6 u_7 - \frac{893599382016}{323} u_0^2 u_3 u_5^2 u_7 + \frac{4772121619968}{1615} u_0^2 u_3 u_5 u_6^2 - \\
 & \frac{9311791104}{7429} u_0^2 u_3 u_9 u_{10} - \frac{403279160832}{323} u_0^2 u_4^2 u_5 u_7 + \frac{282361925376}{323} u_0^2 u_4^2 u_6^2 + \\
 & \frac{207398983680}{323} u_0^2 u_4 u_5^2 u_6 + \frac{109080981504}{7429} u_0^2 u_4 u_8 u_{10} - \frac{431002902528}{37145} u_0^2 u_4 u_9^2 - \\
 & \frac{1808389639296}{1615} u_0^2 u_5^4 - \frac{143667634176}{7429} u_0^2 u_5 u_7 u_{10} + \frac{34586652672}{7429} u_0^2 u_5 u_8 u_9 - \\
 & \frac{83806119936}{7429} u_0^2 u_6^2 u_{10} - \frac{285339884544}{7429} u_0^2 u_6 u_7 u_9 + \frac{255076563456}{7429} u_0^2 u_6 u_8^2 - \\
 & \frac{12969994752}{7429} u_0^2 u_7^2 u_8 - \frac{181398528}{7429} u_0^2 u_{11} u_{13} + \frac{2811677184}{185725} u_0^2 u_{12}^2 - \\
 & 25225200 u_0 u_1^{10} - 1089728640 u_0 u_1^7 u_2 u_3 + 8432424000 u_0 u_1^6 u_2^3 - \\
 & 467026560 u_0 u_1^6 u_3 u_5 + 778377600 u_0 u_1^6 u_4^2 + 14197607424 u_0 u_1^5 u_2 u_3 u_4 - \\
 & 11851557120 u_0 u_1^5 u_3^3 + 254741760 u_0 u_1^5 u_5 u_6 + \frac{101157952896}{5} u_0 u_1^4 u_2^3 u_4 - \\
 & 112982822784 u_0 u_1^4 u_2^2 u_3^2 + 4024919808 u_0 u_1^4 u_2 u_4 u_6 - 4830295680 u_0 u_1^4 u_2 u_5^2 - \\
 & 11350844928 u_0 u_1^4 u_3 u_4 u_5 + 9007873920 u_0 u_1^4 u_4^3 + 58786560 u_0 u_1^4 u_6 u_8 - \\
 & 58786560 u_0 u_1^4 u_7^2 - \frac{537108444288}{5} u_0 u_1^3 u_2^4 u_3 - 39030916608 u_0 u_1^3 u_2^2 u_4 u_5 - \\
 & \frac{315681587712}{5} u_0 u_1^3 u_2 u_3^2 u_5 + 178458080256 u_0 u_1^3 u_2 u_3 u_4^2 - \\
 & 1081672704 u_0 u_1^3 u_2 u_6 u_7 + \frac{248911999488}{5} u_0 u_1^3 u_3^3 u_4 - 2781444096 u_0 u_1^3 u_3 u_5 u_7 + \\
 & \frac{49736788992}{17} u_0 u_1^3 u_3 u_6^2 + \frac{107710414848}{17} u_0 u_1^3 u_4 u_5 u_6 - \frac{1331093440512}{323} u_0 u_1^3 u_5^3 - \\
 & \frac{141087744}{17} u_0 u_1^3 u_8 u_9 + \frac{794481664896}{25} u_0 u_1^2 u_2^6 - \frac{474689714688}{5} u_0 u_1^2 u_2^3 u_3 u_5 + \\
 & 104003315712 u_0 u_1^2 u_2^3 u_4^2 + \frac{2117558515968}{5} u_0 u_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4 - \\
 & 7104775680 u_0 u_1^2 u_2^2 u_5 u_7 + \frac{445857426432}{85} u_0 u_1^2 u_2^2 u_6^2 - \frac{21632070449664}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_3^4 + \\
 & \frac{2593132268544}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_3 u_5 u_6 + \frac{2460650876928}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_4^2 u_6 - \\
 & \frac{110976031770624}{1615} u_0 u_1^2 u_2 u_4 u_5^2 - \\
 & \frac{15378564096}{85} u_0 u_1^2 u_2 u_7 u_9 + \frac{39645656064}{323} u_0 u_1^2 u_2 u_8^2 + \frac{3554413456896}{85} u_0 u_1^2 u_3^2 u_4 u_6 - \\
 & \frac{77323111225344}{1615} u_0 u_1^2 u_3^2 u_5^2 - \frac{101058238573056}{1615} u_0 u_1^2 u_3 u_4^2 u_5 + \\
 & \frac{441745726464}{1615} u_0 u_1^2 u_3 u_7 u_8 + \frac{9287033750784}{323} u_0 u_1^2 u_4^4 + \frac{300879691776}{323} u_0 u_1^2 u_4 u_6 u_8 - \\
 & \frac{300879691776}{323} u_0 u_1^2 u_4 u_7^2 - \frac{53331167232}{323} u_0 u_1^2 u_5^2 u_6 - \frac{509487998976}{323} u_0 u_1^2 u_5 u_6 u_7 +
 \end{aligned}$$

74 Apêndice A: Invariantes para a KdV

$$\begin{aligned}
 & \frac{18254066688}{17} u_0 u_1^2 u_6^3 - \frac{423263232}{323} u_0 u_1^2 u_9 u_{11} + \frac{302330880}{323} u_0 u_1^2 u_{10}^2 + \\
 & \frac{1175665694976}{5} u_0 u_1 u_2^4 u_3 u_4 - \frac{29505987459072}{85} u_0 u_1 u_2^3 u_3^3 + \\
 & \frac{357012458496}{17} u_0 u_1 u_2^3 u_5 u_6 + \frac{11310440085504}{85} u_0 u_1 u_2^2 u_3 u_4 u_6 - \\
 & \frac{174275521767936}{1615} u_0 u_1 u_2^2 u_3 u_5^2 - \frac{240949971689472}{1615} u_0 u_1 u_2^2 u_4^2 u_5 + \\
 & \frac{1222807477248}{1615} u_0 u_1 u_2^2 u_7 u_8 - \frac{84732528936960}{323} u_0 u_1 u_2 u_3^2 u_4 u_5 + \\
 & \frac{99007725662208}{323} u_0 u_1 u_2 u_3 u_4^3 + \frac{7819566501888}{1615} u_0 u_1 u_2 u_3 u_6 u_8 - \\
 & \frac{269800077312}{85} u_0 u_1 u_2 u_3 u_7^2 - \frac{14342456014848}{1615} u_0 u_1 u_2 u_4 u_6 u_7 - \\
 & \frac{2766690349056}{323} u_0 u_1 u_2 u_5^2 u_7 + \frac{4581743864832}{323} u_0 u_1 u_2 u_5 u_6^2 + \\
 & \frac{3507038208}{323} u_0 u_1 u_2 u_9 u_{10} - \frac{4880954018304}{85} u_0 u_1 u_3^4 u_5 + \\
 & \frac{52471947350016}{323} u_0 u_1 u_3^3 u_4^2 - \frac{4025777531904}{1615} u_0 u_1 u_3^2 u_6 u_7 - \\
 & \frac{1925968637952}{85} u_0 u_1 u_3 u_4 u_5 u_7 + \frac{36793385920512}{1615} u_0 u_1 u_3 u_4 u_6^2 + \\
 & \frac{11994735799296}{1615} u_0 u_1 u_3 u_5^2 u_6 + \frac{77154840576}{1615} u_0 u_1 u_3 u_8 u_{10} - \\
 & \frac{238659996672}{7429} u_0 u_1 u_3 u_9^2 + \frac{25494535185408}{1615} u_0 u_1 u_4^2 u_5 u_6 - \\
 & \frac{7856455348224}{323} u_0 u_1 u_4 u_5^3 - \frac{2865371148288}{37145} u_0 u_1 u_4 u_8 u_9 - \\
 & \frac{1701397260288}{7429} u_0 u_1 u_5 u_7 u_9 + \frac{1304981010432}{7429} u_0 u_1 u_5 u_8^2 + \\
 & \frac{167612239872}{7429} u_0 u_1 u_6^2 u_9 + \frac{1936852549632}{7429} u_0 u_1 u_6 u_7 u_8 - \\
 & \frac{1179789152256}{7429} u_0 u_1 u_7^3 + \frac{362797056}{7429} u_0 u_1 u_{11} u_{12} + 13908900096 u_0 u_2^6 u_4 - \\
 & \frac{7031138328576}{85} u_0 u_2^5 u_3^2 + \frac{1703599236864}{85} u_0 u_2^4 u_4 u_6 - \frac{6183375037696}{1615} u_0 u_2^4 u_5^2 - \\
 & \frac{46350004571136}{323} u_0 u_2^3 u_3 u_4 u_5 - \frac{2259281714688}{323} u_0 u_2^3 u_4^3 + \frac{3217768022016}{1615} u_0 u_2^3 u_6 u_8 - \\
 & \frac{243403232256}{1615} u_0 u_2^3 u_7^2 - \frac{14691187966464}{85} u_0 u_2^2 u_3^3 u_5 + \frac{6238975062528}{17} u_0 u_2^2 u_3^2 u_4^2 - \\
 & \frac{6364750307328}{1615} u_0 u_2^2 u_3 u_6 u_7 - \frac{28528909295616}{1615} u_0 u_2^2 u_4 u_5 u_7 + \\
 & \frac{9859317518336}{1615} u_0 u_2^2 u_4 u_6^2 + \frac{19766816197632}{1615} u_0 u_2^2 u_5^2 u_6 + \frac{132239526912}{1615} u_0 u_2^2 u_8 u_{10} - \\
 & \frac{8283866112}{437} u_0 u_2^2 u_9^2 + \frac{11353523915520}{323} u_0 u_2 u_3^4 u_4 - \frac{9093387276288}{323} u_0 u_2 u_3^2 u_5 u_7 + \\
 & \frac{28764777770496}{1615} u_0 u_2 u_3^2 u_6^2 + \frac{5656489832448}{95} u_0 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 - \\
 & \frac{8026517587968}{323} u_0 u_2 u_3 u_5^3 - \frac{15116544000}{7429} u_0 u_2 u_8 u_8 u_9 + \\
 & \frac{13351556477952}{1615} u_0 u_2 u_4^3 u_6 - \frac{14263940685312}{323} u_0 u_2 u_4^2 u_5^2 - \\
 & \frac{20753321859072}{37145} u_0 u_2 u_4 u_7 u_9 + \frac{331838373888}{1615} u_0 u_2 u_4 u_8^2 + \\
 & \frac{4357918236672}{7429} u_0 u_2 u_5 u_6 u_9 + \frac{7470716977152}{37145} u_0 u_2 u_5 u_7 u_8 + \\
 & \frac{5617005419520}{7429} u_0 u_2 u_6^2 u_8 - \frac{5302843324416}{7429} u_0 u_2 u_6 u_7^2 + \frac{9432723456}{7429} u_0 u_2 u_{10} u_{12} - \\
 & \frac{5079158784}{9775} u_0 u_2 u_{11}^2 - \frac{24051031204608}{1615} u_0 u_3^6 + \frac{10038110810112}{1615} u_0 u_3^3 u_5 u_6 + \\
 & \frac{94674249944064}{1615} u_0 u_3^2 u_4 u_6 - \frac{91025391679488}{1615} u_0 u_3^2 u_4 u_5^2 - \frac{632657599488}{1615} u_0 u_3^2 u_7 u_9 + \\
 & \frac{1761440173056}{7429} u_0 u_3^2 u_8^2 + \frac{33870088175616}{1615} u_0 u_3 u_4^3 u_5 + \frac{1255277813760}{7429} u_0 u_3 u_4 u_7 u_8 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{120573061982208}{37145} u_0 u_3 u_5 u_6 u_8 - \frac{84878144925696}{37145} u_0 u_3 u_5 u_7^2 + \\
 & \frac{31471193419776}{37145} u_0 u_3 u_6^2 u_7 + \frac{75461787648}{185725} u_0 u_3 u_{10} u_{11} + \frac{3458801316096}{1615} u_0 u_4^5 + \\
 & \frac{5603944725504}{7429} u_0 u_4^2 u_6 u_8 - \frac{6135845520384}{7429} u_0 u_4^2 u_7^2 - \frac{45758141485056}{37145} u_0 u_4 u_5^2 u_8 + \\
 & \frac{78325707608064}{37145} u_0 u_4 u_5 u_6 u_7 + \frac{27312827000832}{37145} u_0 u_4 u_6^3 - \\
 & \frac{207519916032}{37145} u_0 u_4 u_9 u_{11} + \frac{629634290688}{185725} u_0 u_4 u_{10}^2 - \frac{56083043367936}{37145} u_0 u_5^3 u_7 + \\
 & \frac{91658479260672}{37145} u_0 u_5^2 u_6^2 + \frac{1400759433216}{185725} u_0 u_5 u_8 u_{11} - \frac{363159853056}{185725} u_0 u_5 u_9 u_{10} + \\
 & \frac{1867679244288}{185725} u_0 u_6 u_7 u_{11} + \frac{3216558698496}{185725} u_0 u_6 u_8 u_{10} - \frac{2049259170816}{185725} u_0 u_6 u_9^2 - \\
 & \frac{1867679244288}{185725} u_0 u_7^2 u_{10} + \frac{103759958016}{37145} u_0 u_7 u_8 u_9 + \frac{279575442432}{37145} u_0 u_8^3 + \\
 & \frac{1088391168}{185725} u_0 u_{12} u_{14} - \frac{120932352}{37145} u_0 u_{13}^2 - 25225200 u_1^9 u_3 + \\
 & 658377720 u_1^8 u_2^2 + 467026560 u_1^7 u_3 u_4 + 2739889152 u_1^6 u_2^2 u_4 - \\
 & 10694908224 u_1^6 u_2 u_3^2 + 155675520 u_1^6 u_4 u_6 - 205208640 u_1^6 u_5^2 - \\
 & \frac{155955735936}{5} u_1^5 u_2^3 u_3 - 4958972928 u_1^5 u_2 u_4 u_5 - 3937579776 u_1^5 u_3^2 u_5 + \\
 & 12092488704 u_1^5 u_3 u_4^2 - 58786560 u_1^5 u_6 u_7 + \frac{910654988256}{25} u_1^4 u_5^2 - \\
 & \frac{143840541312}{5} u_1^4 u_2^2 u_3 u_5 + \frac{187982669376}{5} u_1^4 u_2^2 u_4^2 + \frac{499958884224}{5} u_1^4 u_2 u_3^2 u_4 - \\
 & 1160054784 u_1^4 u_2 u_5 u_7 + 1103227776 u_1^4 u_2 u_6^2 - \frac{195421012128}{5} u_1^4 u_3^4 + \\
 & 3283089408 u_1^4 u_3 u_5 u_6 + 2846389248 u_1^4 u_4^2 u_6 - \frac{130150084608}{17} u_1^4 u_4 u_5^2 - \\
 & 11757312 u_1^4 u_7 u_9 + \frac{170481024}{17} u_1^4 u_8^2 + \frac{1050051879936}{5} u_1^3 u_2^3 u_3 u_4 - \\
 & \frac{1719234035712}{5} u_1^3 u_2^2 u_3^3 + 11744994816 u_1^3 u_2^2 u_5 u_6 + \frac{239752866816}{5} u_1^3 u_2 u_3 u_4 u_6 - \\
 & \frac{4271892784128}{85} u_1^3 u_2 u_3 u_5^2 - \frac{5466322589184}{85} u_1^3 u_2 u_4^2 u_5 + \frac{19376050176}{85} u_1^3 u_2 u_7 u_8 - \\
 & \frac{327459055104}{5} u_1^3 u_3^2 u_4 u_5 + \frac{30345133690368}{323} u_1^3 u_3 u_4^3 + \frac{11790904320}{17} u_1^3 u_3 u_6 u_8 - \\
 & \frac{965013295104}{1615} u_1^3 u_3 u_7^2 - \frac{524906873856}{323} u_1^3 u_4 u_6 u_7 - \frac{463325432832}{323} u_1^3 u_5^2 u_7 + \\
 & \frac{980522869248}{323} u_1^3 u_5 u_6^2 + \frac{423263232}{323} u_1^3 u_9 u_{10} + \frac{1331130485376}{25} u_1^2 u_2^5 u_4 - \\
 & 378802816704 u_1^2 u_2^4 u_3^2 + \frac{186892365312}{5} u_1^2 u_2^3 u_4 u_6 - \frac{2326430336256}{85} u_1^2 u_2^3 u_5^2 - \\
 & \frac{27562104410112}{85} u_1^2 u_2^2 u_3 u_4 u_5 + \frac{204000323814144}{1615} u_1^2 u_2^2 u_4^3 + \\
 & \frac{157349786112}{85} u_1^2 u_2^2 u_6 u_8 - \frac{1670547753216}{1615} u_1^2 u_2^2 u_7^2 - \frac{17444913172992}{85} u_1^2 u_2 u_3^3 u_5 + \\
 & \frac{1045394190367488}{1615} u_1^2 u_2 u_3^2 u_4^2 - \frac{2509816596480}{323} u_1^2 u_2 u_3 u_6 u_7 - \\
 & \frac{30068640156672}{1615} u_1^2 u_2 u_4 u_5 u_7 + \frac{26261797211136}{1615} u_1^2 u_2 u_4 u_6^2 + \\
 & \frac{32360015973888}{1615} u_1^2 u_2 u_5^2 u_6 + \frac{54883132416}{1615} u_1^2 u_2 u_8 u_{10} - \frac{31069536768}{1615} u_1^2 u_2 u_9^2 + \\
 & \frac{126619500143232}{1615} u_1^2 u_3^4 u_4 - \frac{21470863891968}{1615} u_1^2 u_3^2 u_5 u_7 + \frac{19022862203136}{1615} u_1^2 u_3^2 u_6^2 + \\
 & \frac{16996679276544}{323} u_1^2 u_3 u_4 u_5 u_6 - \frac{50269670682624}{1615} u_1^2 u_3 u_5^3 - \frac{82153377792}{1615} u_1^2 u_3 u_8 u_9 + \\
 & \frac{3873198601728}{323} u_1^2 u_4^3 u_6 - \frac{4958115017472}{95} u_1^2 u_4^2 u_5^2 - \frac{339880375296}{1615} u_1^2 u_4 u_7 u_9 + \\
 & \frac{6288073734656}{37145} u_1^2 u_4 u_8^2 + \frac{27935373312}{323} u_1^2 u_5 u_6 u_9 + \frac{13111667002368}{37145} u_1^2 u_5 u_7 u_8 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2835883809792}{7429} u_1^2 u_6^2 u_8 - \frac{25577383924224}{37145} u_1^2 u_6 u_7^2 + \frac{60466176}{323} u_1^2 u_{10} u_{12} - \\
& \frac{876759552}{7429} u_1^2 u_{11}^2 - \frac{513254662272}{5} u_1 u_2^6 u_3 - \frac{8057939657472}{85} u_1 u_2^4 u_4 u_5 - \\
& \frac{5171189423616}{17} u_1 u_2^3 u_3^2 u_5 + \frac{53111491748352}{95} u_1 u_2^3 u_3 u_4^2 - \frac{9197059894272}{1615} u_1 u_2^3 u_6 u_7 + \\
& \frac{1212399478789632}{1615} u_1 u_2^2 u_3^3 u_4 - \frac{71216578363392}{1615} u_1 u_2^2 u_3 u_5 u_7 + \\
& \frac{39973748894208}{1615} u_1 u_2^2 u_3 u_6^2 + \frac{9404868704256}{95} u_1 u_2^2 u_4 u_5 u_6 - \\
& \frac{1750804844544}{95} u_1 u_2^2 u_5^3 - \frac{242005791744}{1615} u_1 u_2^2 u_8 u_9 - \frac{1352301817934592}{8075} u_1 u_2 u_3^5 + \\
& \frac{26039093566464}{323} u_1 u_2 u_3^2 u_5 u_6 + \frac{324006561865728}{1615} u_1 u_2 u_3 u_4^2 u_6 - \\
& \frac{452015371219968}{1615} u_1 u_2 u_3 u_4 u_5^2 - \frac{359451260928}{323} u_1 u_2 u_3 u_7 u_9 + \\
& \frac{21370338874368}{37145} u_1 u_2 u_3 u_8^2 - \frac{247119926851584}{1615} u_1 u_2 u_4^3 u_5 + \\
& \frac{77724714129408}{37145} u_1 u_2 u_4 u_7 u_8 + \frac{180632784347136}{37145} u_1 u_2 u_5 u_6 u_8 - \\
& \frac{21921205893120}{7429} u_1 u_2 u_5 u_7^2 - \frac{132652893846528}{37145} u_1 u_2 u_6^2 u_7 - \\
& \frac{12214167552}{7429} u_1 u_2 u_{10} u_{11} + \frac{154823043465216}{1615} u_1 u_3^3 u_4 u_6 - \\
& \frac{147528311053824}{1615} u_1 u_3^3 u_5^2 - \frac{196824472943616}{1615} u_1 u_3^2 u_4^2 u_5 + \\
& \frac{19666361723904}{37145} u_1 u_3^2 u_7 u_8 + \frac{183967240518144}{1615} u_1 u_3 u_4^4 + \\
& \frac{47002938494976}{7429} u_1 u_3 u_4 u_6 u_8 - \frac{9430224187392}{1955} u_1 u_3 u_4 u_7^2 - \\
& \frac{38032740974592}{37145} u_1 u_3 u_5^2 u_8 - \frac{17070367389696}{2185} u_1 u_3 u_5 u_6 u_7 + \\
& \frac{10599593001984}{2185} u_1 u_3 u_6^3 - \frac{301847150592}{37145} u_1 u_3 u_9 u_{11} + \frac{869564077056}{185725} u_1 u_3 u_{10}^2 - \\
& \frac{52606883220480}{7429} u_1 u_4^2 u_6 u_7 - \frac{342797176286208}{37145} u_1 u_4 u_5^2 u_7 + \\
& \frac{711766861396992}{37145} u_1 u_4 u_5 u_6^2 + \frac{509367066624}{37145} u_1 u_4 u_9 u_{10} + \\
& \frac{171704794457088}{37145} u_1 u_5^3 u_6 + \frac{8715836473344}{185725} u_1 u_5 u_8 u_{10} - \frac{5449755976704}{185725} u_1 u_5 u_9^2 - \\
& \frac{1867679244288}{185725} u_1 u_6 u_7 u_{10} - \frac{10064715927552}{185725} u_1 u_6 u_8 u_9 - \frac{12116857319424}{185725} u_1 u_7^2 u_9 + \\
& \frac{3377963077632}{37145} u_1 u_7 u_8^2 - \frac{1088391168}{185725} u_1 u_{12} u_{13} - \frac{395127055152}{85} u_2^8 - \\
& \frac{803682632448}{17} u_2^5 u_3 u_5 + \frac{27310530685824}{1615} u_2^5 u_4^2 + \frac{113116905129600}{323} u_2^4 u_3^2 u_4 - \\
& \frac{11655309480192}{1615} u_2^4 u_5 u_7 - \frac{869770389888}{1615} u_2^4 u_6^2 - \frac{2098535465088}{1615} u_2^3 u_3^4 + \\
& \frac{14530799195136}{323} u_2^3 u_3 u_5 u_6 + \frac{78300466338816}{1615} u_2^3 u_4^2 u_6 - \frac{50772360715776}{1615} u_2^3 u_4 u_5^2 - \\
& \frac{161370786816}{323} u_2^3 u_7 u_9 - \frac{480460875264}{37145} u_2^3 u_8^2 + \frac{363009777126912}{1615} u_2^2 u_3^2 u_4 u_6 - \\
& \frac{218855201557248}{1615} u_2^2 u_3^2 u_5^2 - \frac{442596112685568}{1615} u_2^2 u_3 u_4^2 u_5 + \frac{317024160768}{391} u_2^2 u_3 u_7 u_8 - \\
& \frac{86479859495808}{1615} u_2^2 u_4^4 + \frac{197920870281216}{37145} u_2^2 u_4 u_6 u_8 - \frac{10456748379648}{37145} u_2^2 u_4 u_7^2 - \\
& \frac{70237147244544}{37145} u_2^2 u_5^2 u_8 - \frac{238079360139264}{37145} u_2^2 u_5 u_6 u_7 - \frac{70282335633408}{37145} u_2^2 u_6^3 - \\
& \frac{557437676544}{37145} u_2^2 u_9 u_{11} + \frac{456791726592}{185725} u_2^2 u_{10}^2 - \frac{85016242953216}{323} u_2 u_3^3 u_4 u_5 + \\
& \frac{237607635506688}{1615} u_2 u_3^2 u_4^3 + \frac{765985517568}{95} u_2 u_3^2 u_6 u_8 - \frac{135922148817408}{37145} u_2 u_3^2 u_7^2 - \\
& \frac{565208547618816}{37145} u_2 u_3 u_4 u_6 u_7 - \frac{227535543825408}{7429} u_2 u_3 u_5^2 u_7 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{568283118299136}{37145} u_2 u_3 u_5 u_6^2 - \\
 & \frac{35916908544}{37145} u_2 u_3 u_9 u_{10} - \frac{754363434811392}{37145} u_2 u_4^2 u_5 u_7 - \frac{2604671230464}{1955} u_2 u_4^2 u_6^2 + \\
 & \frac{1237865489989632}{37145} u_2 u_4 u_5^2 u_6 + \frac{4644044181504}{37145} u_2 u_4 u_8 u_{10} - \\
 & \frac{184905586208}{7429} u_2 u_4 u_9^2 + \frac{332252119296}{437} u_2 u_5^4 - \frac{26147509420032}{185725} u_2 u_5 u_7 u_{10} - \\
 & \frac{5788547960832}{185725} u_2 u_5 u_8 u_9 - \frac{15252713828352}{185725} u_2 u_6^2 u_{10} - \frac{73456285833216}{185725} u_2 u_6 u_7 u_9 + \\
 & \frac{3327917239296}{37145} u_2 u_6 u_8^2 + \frac{3916938415104}{37145} u_2 u_7^2 u_8 - \frac{33014532096}{185725} u_2 u_{11} u_{13} + \\
 & \frac{11549039616}{185725} u_2 u_{12}^2 - \frac{344954711902464}{8075} u_3^5 u_5 - \frac{30314256283008}{1615} u_3^4 u_4^2 - \\
 & \frac{48534022692864}{37145} u_3^3 u_6 u_7 - \frac{1534078738225152}{37145} u_3^2 u_4 u_5 u_7 + \frac{224488935392256}{7429} u_3^2 u_4 u_6^2 - \\
 & \frac{267930469868544}{37145} u_3^2 u_5^2 u_6 + \frac{2987694222336}{37145} u_3^2 u_8 u_{10} - \frac{1475888656896}{37145} u_3^2 u_9^2 + \\
 & \frac{1066765467027456}{37145} u_3 u_4^2 u_5 u_6 - \frac{492429977883648}{37145} u_3 u_4 u_5^3 - \frac{47889211392}{2185} u_3 u_4 u_8 u_9 - \\
 & \frac{151033099696128}{185725} u_3 u_5 u_7 u_9 + \frac{16089223062528}{37145} u_3 u_5 u_8^2 + \frac{15252713828352}{185725} u_3 u_6^2 u_9 + \\
 & \frac{1782784733184}{7429} u_3 u_6 u_7 u_8 - \frac{2036594866176}{7429} u_3 u_7^3 - \frac{11004844032}{185725} u_3 u_{11} u_{12} - \\
 & \frac{164955769284096}{37145} u_4^4 u_6 - \frac{203471194945536}{37145} u_4^3 u_5^2 - \frac{7451710442496}{37145} u_4^2 u_7 u_9 + \\
 & \frac{826582703616}{7429} u_4^2 u_8^2 + \frac{137274424455168}{185725} u_4 u_5 u_6 u_9 + \frac{17655155933184}{37145} u_4 u_5 u_7 u_8 + \\
 & \frac{4651642764288}{37145} u_4 u_6^2 u_8 - \frac{3587236512768}{7429} u_4 u_6 u_7^2 + \frac{176077504512}{185725} u_4 u_{10} u_{12} - \\
 & \frac{16507266048}{37145} u_4 u_{11}^2 + \frac{34561639830528}{37145} u_5^2 u_6 u_8 - \frac{26108397881856}{37145} u_5^2 u_7^2 + \\
 & \frac{19618613600256}{37145} u_5 u_6^2 u_7 - \frac{242106568704}{185725} u_5 u_9 u_{12} + \frac{66029064192}{185725} u_5 u_{10} u_{11} + \\
 & \frac{2383020705024}{37145} u_6^4 - \frac{363159853056}{185725} u_6 u_8 u_{12} - \frac{639853074432}{185725} u_6 u_9 u_{11} + \\
 & \frac{57382401024}{37145} u_6 u_{10}^2 - \frac{207519916032}{185725} u_7^2 u_{12} + \frac{155639937024}{37145} u_7 u_8 u_{11} - \\
 & \frac{138346610688}{185725} u_7 u_9 u_{10} + \frac{138346610688}{37145} u_8^2 u_{10} - \frac{622559748096}{185725} u_8 u_9^2 - \\
 & \frac{120932352}{185725} u_{13} u_{15} + \frac{60466176}{185725} u_{14}^2
 \end{aligned}$$

(A.30)

Apêndice B

Invariantes para a mKdV

Apresentamos aqui densidades e fluxos para a equação modificada de Korteweg-deVries até $r = 8$, determinados no nosso trabalho. $T_{r \leq 5}$ e $X_{r \leq 2}$ foram anteriormente publicados por Miura, Gardner & Kruskal [1968]. Os outros são novos.

$$T_1 = \frac{1}{2}v_0^2 \quad (\text{B.1})$$

$$X_1 = \frac{1}{4}v_0^4 + v_0v_2 - \frac{1}{2}v_1^2 \quad (\text{B.2})$$

$$T_2 = \frac{1}{4}v_0^4 - \frac{3}{2}v_1^2 \quad (\text{B.3})$$

$$X_2 = \frac{1}{6}v_0^6 + v_0^3v_2 - 3v_0^2v_1^2 - 3v_1v_3 + \frac{3}{2}v_2^2 \quad (\text{B.4})$$

$$T_3 = \frac{1}{6}v_0^6 - 5v_0^2v_1^2 + 3v_2^2 \quad (\text{B.5})$$

$$X_3 = \frac{1}{8}v_0^8 + v_0^5v_2 - \frac{15}{2}v_0^4v_1^2 - 10v_0^2v_1v_3 + 8v_0^2v_2^2 + 10v_0v_1^2v_2 + \frac{1}{2}v_1^4 + 6v_2v_4 - 3v_3^2 \quad (\text{B.6})$$

$$T_4 = \frac{1}{8}v_0^8 - \frac{21}{2}v_0^4v_1^2 + \frac{63}{5}v_0^2v_2^2 - \frac{63}{10}v_1^4 - \frac{27}{5}v_2^2 \quad (\text{B.7})$$

$$X_4 = \frac{1}{10}v_0^{10} + v_0^7v_2 - 14v_0^6v_1^2 - 21v_0^4v_1v_3 + \frac{231}{10}v_0^4v_2^2 + 42v_0^3v_1^2v_2 - \frac{126}{5}v_0^2v_1^4 + \frac{126}{5}v_0^2v_2v_4 - 18v_0^2v_2^2 - \frac{252}{5}v_0v_1v_2v_3 + \frac{18}{5}v_0v_2^3 - \frac{126}{5}v_1^3v_3 - \frac{9}{5}v_1^2v_2^2 - \frac{54}{5}v_3v_5 + \frac{27}{5}v_4^2 \quad (\text{B.8})$$

$$T_5 = \frac{1}{10}v_0^{10} - 18v_0^6v_1^2 + \frac{162}{5}v_0^4v_2^2 - \frac{342}{5}v_0^2v_1^4 - \frac{972}{35}v_0^2v_3^2 + \frac{432}{7}v_0v_2^3 + \frac{5508}{35}v_1^2v_2^2 + \frac{324}{35}v_4^2 \quad (\text{B.9})$$

$$X_5 = \frac{1}{12}v_0^{12} + v_0^9v_2 - \frac{45}{2}v_0^8v_1^2 - 36v_0^6v_1v_3 + \frac{252}{5}v_0^6v_2^2 + 108v_0^5v_1^2v_2 - 171v_0^4v_1^4 + \frac{324}{5}v_0^4v_2v_4 - \frac{2106}{35}v_0^4v_3^2 - \frac{1296}{5}v_0^3v_1v_2v_3 + \frac{2808}{35}v_0^3v_2^3 - \frac{1368}{5}v_0^2v_1^3v_3 + \frac{21816}{35}v_0^2v_1^2v_2^2 - \frac{1944}{35}v_0^2v_3v_5 + \frac{1296}{35}v_0^2v_4^2 + \frac{2052}{5}v_0v_1^4v_2 + \frac{3888}{35}v_0v_1v_3v_4 + \frac{1296}{7}v_0v_2^2v_4 - \frac{1944}{35}v_0v_2v_3^2 + \frac{1278}{35}v_1^6 + \frac{11016}{35}v_1^2v_2v_4 - \frac{972}{35}v_1^2v_3^2 + \frac{1944}{35}v_1v_2^2v_3 + \frac{54}{35}v_2^4 + \frac{648}{35}v_4v_6 - \frac{324}{35}v_5^2 \quad (\text{B.10})$$

$$T_6 = \frac{1}{12}v_0^{12} - \frac{55}{2}v_0^8v_1^2 + 66v_0^6v_2^2 - 319v_0^4v_1^4 - \frac{594}{7}v_0^4v_3^2 + \frac{2640}{7}v_0^3v_2^3 + \frac{12276}{7}v_0^2v_1^2v_2^2 + \frac{396}{7}v_0^2v_4^2 - \frac{3960}{7}v_0v_2v_3^2 - \frac{5214}{35}v_1^6 - \frac{3564}{7}v_1^2v_3^2 + \frac{2178}{7}v_2^4 - \frac{108}{7}v_5^2 \quad (\text{B.11})$$

$$X_6 = \frac{1}{14}v_0^{14} + v_0^{11}v_2 - 33v_0^{10}v_1^3 - 55v_0^8v_1v_3 + \frac{187}{2}v_0^8v_2^2 + 220v_0^7v_1^2v_2 - 638v_0^6v_1^4 + 132v_0^6v_2v_4 - \frac{1056}{7}v_0^6v_3^2 - 792v_0^5v_1v_2v_3 + \frac{3036}{7}v_0^5v_2^3 - 1276v_0^4v_1^3v_3 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{32406}{7}v_0^4v_1^2v_2^2 - \frac{1188}{7}v_0^4v_3v_5 + \frac{990}{7}v_0^4v_4^2 + 3828v_0^3v_1^4v_2 + \frac{4752}{7}v_0^3v_1v_3v_4 + \\ & \frac{7920}{7}v_0^3v_2^2v_4 - \frac{6336}{7}v_0^3v_2v_3^2 - \frac{31284}{35}v_0^2v_1^6 + \frac{24552}{7}v_0^2v_1^2v_2v_4 - \frac{15048}{7}v_0^2v_1^2v_3^2 - \\ & \frac{24552}{7}v_0^2v_1v_2^2v_3 - \frac{1584}{7}v_0^2v_2^4 + \frac{792}{7}v_0^2v_4v_6 - 72v_0^2v_5^2 - \frac{49104}{7}v_0v_1^3v_2v_3 + \\ & 3960v_0v_1^2v_2^3 - \frac{1584}{7}v_0v_1v_4v_5 - \frac{7920}{7}v_0v_2v_3v_5 + 216v_0v_2v_4^2 - \frac{360}{7}v_0v_3^2v_4 - \\ & \frac{31284}{35}v_1^5v_3 - \frac{2574}{7}v_1^4v_2^2 - \frac{7128}{7}v_1^2v_3v_5 + \frac{1116}{7}v_1^2v_4^2 - \frac{3744}{7}v_1v_2v_3v_4 - 144v_1v_3^3 + \\ & \frac{2232}{7}v_2^3v_4 - \frac{1476}{7}v_2^2v_3^2 - \frac{216}{7}v_5v_7 + \frac{108}{7}v_6^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} T_7 = & \frac{1}{14}v_0^{14} - 39v_0^{10}v_1^2 + 117v_0^8v_2^2 - 1014v_0^6v_4^2 - \frac{1404}{7}v_0^6v_3^2 + \frac{9360}{7}v_0^5v_3^3 + \frac{63180}{7}v_0^4v_1^2v_2^2 + \\ & \frac{1404}{7}v_0^4v_4^2 - \frac{28080}{7}v_0^3v_2v_3^2 - \frac{25740}{7}v_0^2v_1^6 - \frac{42120}{7}v_0^2v_1^2v_3^2 + \frac{35100}{7}v_0^2v_2^4 - \frac{8424}{77}v_0^2v_5^2 + \\ & \frac{179712}{7}v_0v_1^2v_3^3 + \frac{16848}{11}v_0v_2v_4^2 + \frac{96876}{7}v_1^4v_2^2 + \frac{109512}{77}v_1^2v_4^2 - \frac{39312}{11}v_1v_3^3 - \\ & \frac{598104}{77}v_2^2v_3^2 + \frac{1944}{77}v_6^2 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} X_7 = & \frac{1}{16}v_0^{16} + v_0^{13}v_2 - \frac{91}{2}v_0^{12}v_1^2 - 78v_0^{10}v_1v_3 + 156v_0^{10}v_2^2 + 390v_0^9v_1^2v_2 - \\ & \frac{3549}{2}v_0^8v_1^4 + 234v_0^8v_2v_4 - \frac{2223}{7}v_0^8v_3^2 - 1872v_0^7v_1v_2v_3 + \frac{10296}{7}v_0^7v_2^3 - \\ & 4056v_0^6v_1^3v_3 + \frac{134784}{7}v_0^6v_1^2v_2^2 - \frac{2808}{7}v_0^6v_3v_5 + \frac{2808}{7}v_0^6v_4^2 + 18252v_0^5v_1^4v_2 + \\ & \frac{16848}{7}v_0^5v_1v_3v_4 + \frac{28080}{7}v_0^5v_2^2v_4 - \frac{36504}{7}v_0^5v_2v_3^2 - 12870v_0^4v_1^6 + \frac{126360}{7}v_0^4v_1^2v_2v_4 - \\ & \frac{119340}{7}v_0^4v_1^2v_3^2 - \frac{182520}{7}v_0^4v_1v_2^2v_3 + 1170v_0^4v_4^2 + \frac{2808}{7}v_0^4v_4v_6 - \frac{23868}{77}v_0^4v_5^2 - \\ & \frac{505440}{7}v_0^3v_1^3v_2v_3 + \frac{619632}{7}v_0^3v_1^2v_2^3 - \frac{11232}{7}v_0^3v_1v_4v_5 - \frac{56160}{7}v_0^3v_2v_3v_5 + \\ & \frac{33696}{11}v_0^3v_2v_4^2 - \frac{28080}{77}v_0^3v_3^2v_4 - \frac{154440}{7}v_0^2v_1^5v_3 + \frac{735696}{7}v_0^2v_1^4v_2^2 - \frac{84240}{7}v_0^2v_1^2v_3v_5 + \\ & \frac{505440}{77}v_0^2v_1^2v_4^2 + \frac{1684800}{77}v_0^2v_1v_2v_3v_4 - \frac{1117584}{77}v_0^2v_1v_3^3 + \frac{1038960}{77}v_0^2v_2^3v_4 - \\ & \frac{640224}{77}v_0^2v_2^2v_3^2 - \frac{16848}{77}v_0^2v_5v_7 + \frac{10368}{77}v_0^2v_6^2 + \frac{257400}{7}v_0v_1^6v_2 + \frac{168480}{7}v_0v_1^3v_3v_4 + \\ & \frac{539136}{7}v_0v_1^2v_2^2v_4 - \frac{5846256}{77}v_0v_1^2v_2v_3^2 - \frac{415584}{11}v_0v_1v_2^3v_3 + \frac{33696}{77}v_0v_1v_5v_6 - \\ & \frac{699192}{77}v_0v_2^5 + \frac{33696}{11}v_0v_2v_4v_6 - \frac{53136}{77}v_0v_2v_5^2 + \frac{5184}{11}v_0v_3v_4v_5 + \frac{3888}{11}v_0v_4^3 + \\ & \frac{16263}{7}v_1^8 + \frac{193752}{7}v_1^4v_2v_4 + \frac{197964}{77}v_1^4v_3^2 - \frac{3622320}{77}v_1^3v_2^2v_3 + \frac{349596}{77}v_1^2v_2^4 + \\ & \frac{219024}{77}v_1^2v_4v_6 - \frac{44712}{77}v_1^2v_5^2 + \frac{12960}{7}v_1v_2v_4v_5 - \frac{40176}{11}v_1v_3^2v_5 + \frac{191808}{77}v_1v_3v_4^2 - \\ & \frac{379728}{77}v_2^2v_3v_5 + \frac{118584}{77}v_2^2v_4^2 - \frac{155520}{77}v_2v_3^2v_4 - \frac{29916}{77}v_3^4 + \frac{3888}{77}v_6v_8 - \frac{1944}{77}v_7^2 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} T_8 = & \frac{1}{16}v_0^{16} - \frac{105}{2}v_0^{12}v_1^2 + 189v_0^{10}v_2^2 - \frac{5145}{2}v_0^8v_1^4 - 405v_0^8v_3^2 + 3600v_0^7v_3^3 + 31860v_0^6v_1^2v_2^2 + \\ & 540v_0^6v_4^2 - 16200v_0^5v_2v_3^2 - 30474v_0^4v_1^6 - 34020v_0^4v_1^2v_3^2 + 31590v_0^4v_4^2 - \\ & \frac{4860}{11}v_0^4v_5^2 + 286848v_0^3v_1^2v_2^3 + \frac{136080}{11}v_0^3v_2v_4^2 + 330804v_0^2v_1^4v_2^2 + \frac{197640}{11}v_0^2v_1^2v_4^2 - \\ & \frac{571536}{11}v_0^2v_1v_3^3 - \frac{1507896}{11}v_0^2v_2^2v_3^2 + \frac{29160}{143}v_0^2v_6^2 - \frac{3617136}{11}v_0v_1^2v_2v_3^2 + \frac{719280}{11}v_0v_2^5 - \\ & \frac{544320}{143}v_0v_2v_5^2 + \frac{489888}{143}v_0v_4^3 - \frac{63153}{7}v_1^8 - \frac{712476}{11}v_1^4v_2^2 + \frac{3083508}{11}v_1^2v_2^4 - \\ & \frac{515160}{143}v_1^2v_5^2 + \frac{5334336}{143}v_1v_3v_4^2 + \frac{3893832}{143}v_2^2v_4^2 - \frac{2267028}{143}v_3^4 - \frac{5832}{143}v_7^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned}
X_8 = & \frac{1}{18}v_0^{18} + v_0^{15}v_2 - 60v_0^{14}v_1^2 - 105v_0^{12}v_1v_3 + \frac{483}{2}v_0^{12}v_2^2 + 630v_0^{11}v_1^2v_2 + 378v_0^{10}v_2v_4 - \\
& 4116v_0^{10}v_1^4 - 594v_0^{10}v_3^2 - 3780v_0^9v_1v_2v_3 + 3870v_0^9v_2^3 - 10290v_0^8v_1^3v_3 + \\
& 59445v_0^8v_1^2v_2^2 - 810v_0^8v_3v_5 + 945v_0^8v_4^2 + 61740v_0^7v_1^4v_2 + 6480v_0^7v_1v_3v_4 + \\
& 10800v_0^7v_2^2v_4 - 19440v_0^7v_2v_3^2 - 81264v_0^6v_1^6 + 63720v_0^6v_1^2v_2v_4 - 77760v_0^6v_1^2v_3^2 - \\
& 106920v_0^6v_1v_2^2v_3 + 16020v_0^6v_2^4 + 1080v_0^6v_4v_6 - \frac{10800}{11}v_0^6v_5^2 - 382320v_0^5v_1^3v_2v_3 + \\
& 681048v_0^5v_1^2v_3^2 - 6480v_0^5v_1v_4v_5 - 32400v_0^5v_2v_3v_5 + \frac{204120}{11}v_0^5v_2v_4^2 - \\
& \frac{16200}{11}v_0^5v_3^2v_4 - 182844v_0^4v_1^5v_3 + 1335474v_0^4v_1^4v_2^2 - 68040v_0^4v_1^2v_3v_5 + \\
& \frac{604260}{11}v_0^4v_1^2v_4^2 + \frac{2112480}{11}v_0^4v_1v_2v_3v_4 - \frac{1498176}{11}v_0^4v_1v_3^3 + \frac{1098360}{11}v_0^4v_2^3v_4 - \\
& \frac{1490076}{11}v_0^4v_2^2v_3^2 - \frac{9720}{11}v_0^4v_5v_7 + \frac{92340}{143}v_0^4v_6^2 + 609480v_0^3v_1^6v_2 + 272160v_0^3v_1^3v_3v_4 + \\
& 860544v_0^3v_1^2v_2^2v_4 - \frac{15124320}{11}v_0^3v_1^2v_2v_3^2 - \frac{8849952}{11}v_0^3v_1v_2^3v_3 + \frac{38880}{11}v_0^3v_1v_5v_6 - \\
& \frac{851688}{11}v_0^3v_2^5 + \frac{272160}{11}v_0^3v_2v_4v_6 - \frac{1341360}{143}v_0^3v_2v_5^2 + \frac{544320}{143}v_0^3v_3v_4v_5 + \frac{81648}{13}v_0^3v_4^3 - \\
& \frac{505224}{7}v_0^2v_1^8 + 661608v_0^2v_1^4v_2v_4 - \frac{4889160}{11}v_0^2v_1^4v_3^2 - \frac{31094928}{11}v_0^2v_1^3v_2^2v_3 + \\
& \frac{15509880}{11}v_0^2v_1^2v_2^4 + \frac{395280}{11}v_0^2v_1^2v_4v_6 - \frac{2617920}{143}v_0^2v_1^2v_5^2 - \frac{8644320}{143}v_0^2v_1v_2v_4v_5 - \\
& \frac{14125104}{143}v_0^2v_1v_3^2v_5 + \frac{22965120}{143}v_0^2v_1v_3v_4^2 - \frac{2450736}{13}v_0^2v_2^2v_3v_5 + \frac{5365440}{143}v_0^2v_2^2v_4^2 + \\
& \frac{7063200}{143}v_0^2v_2v_3^2v_4 - \frac{5890320}{143}v_0^2v_3^4 + \frac{58320}{143}v_0^2v_6v_8 - \frac{34992}{143}v_0^2v_7^2 - \\
& 1323216v_0v_1^5v_2v_3 + \frac{15627816}{11}v_0v_1^4v_3^2 - \frac{790560}{11}v_0v_1^3v_4v_5 - \frac{7234272}{11}v_0v_1^2v_2v_3v_5 + \\
& \frac{39298808}{143}v_0v_1^2v_2v_4^2 + \frac{54666576}{143}v_0v_1^2v_3^2v_4 + \frac{111370464}{143}v_0v_1v_2^2v_3v_4 - \\
& \frac{75624192}{143}v_0v_1v_2v_3^3 - \frac{116640}{143}v_0v_1v_6v_7 + \frac{14094000}{143}v_0v_2^4v_4 - \frac{5996592}{143}v_0v_2^3v_3^2 - \\
& \frac{1088640}{143}v_0v_2v_5v_7 + \frac{276048}{143}v_0v_2v_6^2 - \frac{217728}{143}v_0v_3v_5v_6 + \frac{653184}{143}v_0v_4^2v_6 - \\
& \frac{544320}{143}v_0v_4v_5^2 - \frac{505224}{7}v_1^7v_3 + \frac{1506708}{11}v_1^6v_2^2 - \frac{1424952}{11}v_1^4v_3v_5 - \frac{1053972}{143}v_1^4v_4^2 + \\
& \frac{44504640}{143}v_1^3v_2v_3v_4 + \frac{2337984}{13}v_1^3v_3^3 + \frac{129432816}{143}v_1^2v_2^3v_4 - \frac{78684696}{143}v_1^2v_2^2v_3^2 - \\
& \frac{1030320}{143}v_1^2v_5v_7 + \frac{246888}{143}v_1^2v_6^2 + \frac{40841496}{143}v_1v_2^4v_3 - \frac{69984}{13}v_1v_2v_5v_6 + \\
& \frac{4136832}{143}v_1v_3v_4v_6 - \frac{1574640}{143}v_1v_3v_5^2 + \frac{544320}{143}v_1v_4^2v_5 - \frac{5248476}{143}v_2^6 + \\
& \frac{2888784}{143}v_2^2v_4v_6 - \frac{1059480}{143}v_2^2v_5^2 - \frac{6531840}{143}v_2v_3^2v_6 + \frac{3149280}{143}v_2v_3v_4v_5 + \\
& \frac{104976}{11}v_2v_4^3 - \frac{2536272}{143}v_3^3v_5 + \frac{2229768}{143}v_3^2v_4^2 - \frac{11664}{143}v_7v_9 + \frac{5832}{143}v_8^2 \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

Apêndice C

Derivada funcional

Consideramos nesta dissertação equações do tipo

$$u_t = F[u] = \tilde{F}(u, u_x, u_{xt}, u_{xx}, \dots), \quad (\text{C.1})$$

com $u = u(x, t)$ definida num certo intervalo conveniente (na maioria dos casos $-\infty < x < \infty$). Estamos interessados somente em soluções de (C.1) periódicas em x ou que se anulem rapidamente nos extremos do intervalo, já que esta é a situação mais comum em aplicações físicas. Estas soluções são elementos de um espaço vetorial Ω (definido sobre o campo dos reais \mathfrak{R}) equipado com um produto interno:

$$\langle f | g \rangle = \int_U fg \, dx, \quad U \subset \mathfrak{R}. \quad (\text{C.2})$$

Define-se *derivada funcional* (também chamada derivada variacional) [Vainberg, 1964] $\delta F / \delta u$, em geral uma função não-linear, pela relação

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta u} \middle| w \right\rangle = \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[u + \varepsilon w] \right|_{\varepsilon=0} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[u + \varepsilon w] - F[u]}{\varepsilon}, \quad (\text{C.3})$$

onde u e w são duas soluções de (C.1) e ε é um parâmetro conveniente.

Exemplo 1.

Para $F = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx$, tem-se $\frac{\delta F}{\delta u} = 2u$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta F}{\delta u} \middle| w \right\rangle &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[u + \varepsilon w] \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[u + \varepsilon w] - F[u]}{\varepsilon}, \\ \left\langle \frac{\delta F}{\delta u} \middle| w \right\rangle &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[u + \varepsilon w] \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u + \varepsilon w)^2 - u^2}{\varepsilon} \, dx, \\ \left\langle \frac{\delta F}{\delta u} \middle| w \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} 2uw \, dx. \end{aligned}$$

82 *Apêndice C: Derivada funcional*

Portanto, da identidade [veja equação (C.2)]

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta u} \mid w \right\rangle \equiv \int \frac{\delta F}{\delta u} w dx, \quad (\text{C.4})$$

segue

$$\frac{\delta F}{\delta u} = 2u. \quad (\text{C.5})$$

Se o funcional F depender somente de u (e não dos u_x, u_{xx} , etc) a derivada funcional obviamente coincidirá com a derivada parcial usual.

Exemplo 2.

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx, \quad \frac{\delta F}{\delta u} = -2u_{xx}.$$

Neste caso

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta F}{\delta u} \mid w \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u + \varepsilon w) \right]^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [2\varepsilon u_x w_x + \varepsilon^2 w_x^2] dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2u_x w_x dx. \end{aligned}$$

Como consideramos somente soluções (físicas) u (e w) que se anulam nos extremos do intervalo, é fácil integrar esta última expressão por partes para obter

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2u_x w_x dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} w dx,$$

dando

$$\frac{\delta F}{\delta u} = -2u_{xx}. \quad (\text{C.6})$$

Exemplo 3.

Para

$$F[u] = \int f(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{nx}) dx, \quad (\text{C.7})$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varepsilon} F[u + \varepsilon w] \Big|_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int f[u + \varepsilon w, (u + \varepsilon w)_x, \dots] dx - \int f(u, u_x, \dots) dx \right\} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int \left[\frac{\partial f}{\partial u} \varepsilon w + \frac{\partial f}{\partial u_x} \varepsilon w_x + \dots \right] dx \right\} \\
 &= \int \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \dots \right] w dx = \int \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k (d_x)^k \frac{\partial f}{\partial u_k} \right] w dx,
 \end{aligned}$$

onde $(d_x)^k$ é a derivada total em relação a x de k -ésima ordem e $u_k = \partial^k u / \partial x^k$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F}{\delta u} &= \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} - \dots \\
 \frac{\delta F}{\delta u} &= \sum_{k=0}^n (-d_x)^k \frac{\partial f}{\partial u_k}.
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Exemplo 4.

$$F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \delta(x - x') dx = u(x'),$$

onde $\delta(x - x')$ é a função delta de Dirac.

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\delta u(x')}{\delta u(x)} = \delta(x - x'). \tag{C.9}$$

Apêndice D

Programas REDUCE

Os invariantes listados nos Apêndices A e B foram gerados em um computador IBM 4341 usando a linguagem de manipulação algébrica REDUCE 3.2. Neste apêndice apresentamos os programas que foram utilizados para chegarmos às formas finais dos invariantes para as equações KdV e mKdV.

Programa KdV1: O seguinte programa é uma implementação das relações de recorrência (2.10-11). Gera todas os monômios das densidades e fluxos para a equação de Korteweg-deVries, até o *rank* definido na variável RNK. A procedure PROD é responsável pelo produto que evita termos repetidos, conforme mencionado na seção 2.3.

```
LINELENGTH 60$ OFF NAT$ ON LIST$ OPERATOR U$  
ARRAY P(50),Q(50),R(50),TT(20),XX(20)$
```

```
COMMENT      GERA AS DENSIDADES TT E OS FLUXOS XX PARA A EQUAGAO DE KDV,  
             ATE R = RNK, USANDO NOSSAS RELACOES DE RECORRENCIA$
```

```
RNK := 15$  
KLIM := 2*(RNK+1)$
```

```
P(2):= U(0)$      Q(2):= U(0)$      R(2):= U(0)$  
P(3):= U(1)$      Q(3):= U(1)$      R(3):= U(1)$  
                Q(4):= U(2)$      R(4):= U(2)$  
                Q(5):= U(3)$  
                Q(6):= U(4)$
```

```
ARRAY G(25),V(25,25),VV(25)$
```

```
PROCEDURE PROD(J,POLIN)$  
BEGIN SCALAR TERMO,PROV$  
  TERMO:=POLIN$  
  IF J EQ 0 THEN  
    PROV:=U(0)*TERMO$  
  IF J NEQ 0 THEN  
    BEGIN$  
      G(0):=COEFF(TERMO,U(0),VV)$
```

```

FOR I:=0:G(0) DO
  V(0,I):=VV(I)$
IF J GEQ 2 THEN
  BEGIN$
  FOR I:=1:J-1 DO
    BEGIN$
    G(I):=COEFF(V(I-1,0),U(I),VV)$
    FOR K:=0:G(I) DO
      V(I,K):=VV(K)$
    END$
  END$
  END$
  PROV:=U(J)*V(J-1,0)$
END$
RETURN PROV$
END$
COMMENT XX(K) = P(2*(K+1)) - Q(2*(K+1))
        TT(K) = P(2*K) - R(2*K)$

FACTOR U(0),U(1),U(2),U(3),U(4),U(5),U(6),U(7),U(8),U(9),U(10),
        U(11),U(12),U(13),U(14),U(15)$

FOR K:=4:KLIM DO
  BEGIN$
  IF K GEQ 4 THEN
    P(K):=U(K-2) + FOR J:=0:((K-4)/2) SUM PROD (J,P(K-J-2))$
  IF K GEQ 5 THEN
    R(K):=U(K-2) + FOR J:=0:((K-5)/2) SUM PROD (J,R(K-J-2))$
  IF K GEQ 7 THEN
    Q(K):=U(K-2) + FOR J:=0:((K-7)/2) SUM PROD (J,Q(K-J-2))$
  IF FIXP(K/2-1) THEN BEGIN$
    XX(K/2-1):= P(K) - Q(K)$
    WRITE " XX(",K/2-1," ) := ",XX(K/2-1)$
  END$
  IF FIXP(K/2) THEN BEGIN$
    TT(K/2):= P(K) - R(K)$
    WRITE " TT(",K/2," ) := ",TT(K/2)$
  END$
END$
END$
END$

```

Programa mKdV1: Implementação da relação de recorrência (2.12) que gera os monômios das densidades para a equação modificada de KdV. O funcionamento é idêntico ao do Programa KdV1.

86 *Apêndice D: Programas REDUCE*

```
LINELENGTH 60$ OFF NAT$ ON LIST$ OPERATOR V$
ARRAY MT(50),MR(50)$
```

```
COMMENT      GERA AS DENSIDADES MT PARA A EQUACAO MODIFICADA DE KDV,
              USANDO NOSSAS RELACOES DE RECORRENCIA.
              ATE R = RNK$
```

```
RNK := 8$
MT(1):= V(0)**2$
MR(1):= 0$      MR(5):=V(0)*V(2)**3$
MR(2):= 0$      MR(6):=V(0)*V(2)*V(3)**2$
MR(3):= 0$      MR(7):=V(0)*V(2)*V(4)**2 + V(1)*V(3)**3$
MR(4):= 0$
```

```
FACTOR V(0),V(1),V(2),V(3),V(4),V(5),V(6),V(7),V(8),V(9),V(10),
        V(11),V(12),V(13),V(14),V(15)$
```

```
FOR K:=2:RNK DO
  BEGIN$
  IF K GEQ 8 THEN
    MR(K):=V(K-3)**2*V(0)*V(2) + V(K-4)**2*(V(1)*V(3) + V(0)*V(4))$
  IF K GEQ 2 THEN
    MT(K):=V(K-1)**2 + FOR J:=0:(K-2) SUM (V(J)**2*MT(K-J-1)) + MR(K)
  WRITE " MT(",K,") := ",MT(K)$
END$
END$
```

Programa mKdV2: A fim de obter os invariantes completos da mKdV foi necessário gerar os fluxos. Como não havia uma relação de recorrência para os fluxos, nós geramos uma combinação linear de todos os monômios possíveis com o programa abaixo. A procedure PROD é a mesma do Programa KdV1.

```
LINELENGTH 60$ OFF NAT$ ON LIST$ OPERATOR V$
ARRAY MP(50),MX(50)$
```

```
COMMENT      OS FLUXOS MX PARA A MKDV SAO GERADOS COMO UMA COMBINACAO
              LINEAR GERAL DE TODOS OS MONOMIOS POSSIVEIS.
              ATE R = RNK$
```

```
RNK := 8$
KLIM := 2*(RNK+1)$
MP(1):= V(0)$
```

```
ARRAY G(25),U(25,25),UU(25)$
```

```

PROCEDURE PROD(J,POLIN)$
BEGIN SCALAR TERMO,PROV$
  TERMO:=POLIN$
  IF J EQ 0 THEN
    PROV:=V(0)*TERMO$
  IF J NEQ 0 THEN
    BEGIN$
    G(0):=COEFF(TERMO,V(0),UU)$
    FOR I:=0:G(0) DO
      U(0,I):=UU(I)$
    IF J GEQ 2 THEN
      BEGIN$
      FOR I:=1:J-1 DO
        BEGIN$
        G(I):=COEFF(U(I-1,0),V(I),UU)$
        FOR K:=0:G(I) DO
          U(I,K):=UU(K)$
        ENDS$
      ENDS$
    END$
    PROV:=V(J)*U(J-1,0)$
  ENDS$
RETURN PROV$
END$

COMMENT  MX(K) => MP(2*(K+1))$

FACTOR V(0),V(1),V(2),V(3),V(4),V(5),V(6),V(7),V(8),V(9),V(10),
V(11),V(12),V(13),V(14),V(15)$

FOR K:=2:KLIM DO
  BEGIN$
  IF K GEQ 2 THEN
    MP(K):=V(K-1) + FOR J:=0:((K-2)/2) SUM PROD (J,MP(K-J-1))$
  IF FIXP(K/2-1) THEN BEGIN$
    MX(K/2-1):= MP(K) - V(K-1)$
    WRITE " MX(",K/2-1,") := ",MX(K/2-1)$
  ENDS$
END$
END$

```

Programa KdV2: Para obter os coeficientes dos monômios nos invariantes nós criamos um programa que, a partir da soma de monômios com coeficientes arbitrários, escreve um sistema de equações nos coeficientes. O programa abaixo foi

88 *Apêndice D: Programas REDUCE*

escrito para a equação de KdV, mas pode ser usado para a mKdV, bastando trocar U por V e, onde indica EQUACAO, escrever a equação mKdV. A procedure COEFFS foi escrita originalmente por Schwarz [1982].

```
LINELENGTH 70$ OFF NAT$
OPERATOR TT,XX,CT,CX$ OPERATOR VAR,GL$ OPERATOR U$ DEPEND U,X,Z$
```

```
COMMENT USA A CONDICAO DXX/DX + DTT/DT = 0 PARA INVARIANTES
DA EQUACAO DE KDV OU MKDV, DE RANK=RNK.
GERA SISTEMA DE EQUACOES NOS COEFICIENTES$
```

```
RNK := 1$
```

```
N := RNK+2$
```

```
TT(1):= CT(1)*U(0)$
```

```
XX(1):= CX(1)*U(0)**2
```

```
+ CX(2)*U(2)$
```

```
FOR ALL I LET U(I) = U(0,I)$
```

```
FOR ALL I,J LET DF(U(I,J),Z) = U(I+1,J),
DF(U(I,J),X) = U(I,J+1)$
```

```
COMMENT ----- EQUACAO -----$
```

```
LET U(1,0) = -U(0,0)*U(0,1) - U(0,3)$
```

```
COMMENT -----$
```

```
FOR ALL I SUCH THAT I>0 LET U(1,I) = DF(U(1,0),X,I)$
```

```
ARRAY V1(10),V2(10),V3(10),V4(10),V5(10),V6(10),V7(10),
V8(10),V9(10),V10(10),V11(10),V12(10),V13(10),V14(10),
V15(10),V16(10),V17(10),V18(10),V19(10),V20(10)$
```

```
PROCEDURE COEFFS(F)$
```

```
BEGIN
```

```
EQN:=0$
```

```
P1:=COEFF(F,VAR(1),V1)$
```

```
FOR I1:=0:P1 DO BEGIN
```

```
P2:=COEFF(V1(I1),VAR(2),V2)$
```

```
FOR I2:=0:P2 DO BEGIN
```

```
P3:=COEFF(V2(I2),VAR(3),V3)$
```

```
FOR I3:=0:P3 DO BEGIN
```

```

P4:=COEFF(V3(I3),VAR(4),V4)$
FOR I4:=0:P4 DO BEGIN
P5:=COEFF(V4(I4),VAR(5),V5)$
FOR I5:=0:P5 DO BEGIN
P6:=COEFF(V5(I5),VAR(6),V6)$
FOR I6:=0:P6 DO BEGIN
P7:=COEFF(V6(I6),VAR(7),V7)$
FOR I7:=0:P7 DO BEGIN
P8:=COEFF(V7(I7),VAR(8),V8)$
FOR I8:=0:P8 DO BEGIN
P9:=COEFF(V8(I8),VAR(9),V9)$
FOR I9:=0:P9 DO BEGIN
P10:=COEFF(V9(I9),VAR(10),V10)$
FOR I10:=0:P10 DO BEGIN
P11:=COEFF(V10(I10),VAR(11),V11)$
FOR I11:=0:P11 DO BEGIN
P12:=COEFF(V11(I11),VAR(12),V12)$
FOR I12:=0:P12 DO BEGIN
P13:=COEFF(V12(I12),VAR(13),V13)$
FOR I13:=0:P13 DO BEGIN
P14:=COEFF(V13(I13),VAR(14),V14)$
FOR I14:=0:P14 DO BEGIN
P15:=COEFF(V14(I14),VAR(15),V15)$
FOR I15:=0:P15 DO BEGIN
P16:=COEFF(V15(I15),VAR(16),V16)$
FOR I16:=0:P16 DO BEGIN
P17:=COEFF(V16(I16),VAR(17),V17)$
FOR I17:=0:P17 DO BEGIN
P18:=COEFF(V17(I17),VAR(18),V18)$
FOR I18:=0:P18 DO BEGIN
P19:=COEFF(V18(I18),VAR(19),V19)$
FOR I19:=0:P19 DO BEGIN
P20:=COEFF(V19(I19),VAR(20),V20)$
FOR J:=0:P20 DO IF V20(J) NEQ 0 THEN
BEGIN
EQN:=EQN+1$
GL(EQN):=V20(J)$
WRITE "EQN(",EQN,") := ",GL(EQN)$
END$
END$ END$ END$ END$ END$
END$ END$ END$ END$ END$
END$ END$ END$ END$ END$
END$ END$ END$ END$ END$

INVAR := DF(TT(RNK),Z) + DF(XX(RNK),X)$

```

```

CLEAR TT(RNK)$ CLEAR XX(RNK)$

ARRAY V(10)$
IND :=0$
FOR I:=0:N DO
IF COEFF(INVAR,U(0,I),V) NEQ 0 THEN
<<IND:=IND+1$ U(0,I):=VAR(IND)$>>$
COEFFS(INVAR)$

END$

```

Programa KdV3: Os sistemas de equações algébricas nos coeficientes foram resolvidos com este programa. É necessário informar o valor do primeiro coeficiente da densidade na variável CT(1), o número de equações em NGL, o número de coeficientes no fluxo com a variável MAXCX, o número de coeficientes na densidade com MAXCT. MARKX e MARKT indicam a partir de quais coeficientes em X e T , respectivamente, começa a solução do sistema e ULTIMO é a última equação do sistema.

```

OFF NAT$ LINELENGTH 70$ OPERATOR GL,CX,CT$ ARRAY V(3)$

COMMENT RESOLVE O SISTEMA DE EQUACOES ALGEBRICAS LINEARES NOS
COEFICIENTES CT(I) E CX(I), PRODUZIDO POR COEFKDV OU MCOEF$

MAXCX:= 2$ MAXCT:= 1$ NGL:= 2$
MARKX:= 1$ MARKT:= 2$ CT(1):= 1$
ULTIMO:= 1$

GL(1):= - CT(1) + CX(2)$
GL(2):= - CT(1) + 2*CX(1)$

FOR KGL:= NGL STEP -1 UNTIL ULTIMO DO
IF GL(KGL) NEQ 0 THEN
BEGIN
AUX := NUM( GL(KGL) )$
NX:= COEFF(AUX,CX(MARKX),V)$
IF NX = 1 THEN
BEGIN
CX(MARKX):= -V(0)/V(1)$
WRITE "CX(", MARKX, "):= ",CX(MARKX)$
MARKX:= MARKX + 1$
END
ELSE BEGIN

```

```

NT:= COEFF(AUX,CT(MARKT),V)$
IF NT NEQ 1 THEN
  WRITE " PROBLEMAS..."
ELSE BEGIN
  CT(MARKT):= -V(0)/V(1)$
  WRITE "CT(",MARKT,"):= ",CT(MARKT)$
  MARKT:= MARKT + 1$
END$
END$
END$
END$

```

Apesar de os programas acima serem simples, a obtenção de invariantes de rank altos requer grande tempo de máquina e memória da ordem de 6 Mb.

Referências

- Arnold, V.I., 1978, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60 (Springer-Verlag, New York).
- Benjamin, T.B., J.L. Bona & J.J. Mahony, 1972, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **272**, 47-78.
- Bluman, G.W. & J.D. Cole, 1974, *Similarity methods for differential equation*, Applied Mathematics Series 13 (Springer-Verlag, New York).
- Caldas, I.L. & H. Tasso, 1979, *Constants of motion of nonlinear equations in an extended Poisson formalism*, Lett. Nuovo Cimento **24**, 500-4.
- Case, K.M., 1985, *Constants of motion and the variational equations*, Phys. Rev. Lett. **55**, 445-8.
- Delande, D. & J.C. Gay, 1986, *Quantum chaos and statistical properties of energy levels: Numerical study of the hydrogen atom in a magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2006-9 (2877 Erratum).
- Eilbeck, J.C., J.D. Gibbon, P.J. Caudrey & R.K. Bullough, 1973, J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6**, 1337.
- Gardner, C.S., 1971, *Korteweg-deVries equation and generalizations. IV. The Korteweg-deVries equation as a hamiltonian system*, J. Math. Phys. **12**, 1548-51.
- Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics*, 2 ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
- Grauel, A., 1986, *The Painlevé test, Bäcklund transformation and solutions of the reduced Maxwell-Bloch equations*, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 479-84.
- Johnson, S.F., K.E. Lonngren & D.R. Nicholson, 1979, *On the invariants of the nonlinear Schrödinger equation*, Physics Letters **74A**, 393-4.
- Korteweg, D.J. & G. deVries, 1895, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. **39**, 422-33.
- Kruskal, M.D., R.M. Miura, C.S. Gardner & N.J. Zabusky, 1970, *Korteweg-deVries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws*, J. Math. Phys. **11**, 952-60.

- Kruskal, M.D., 1975, *Nonlinear wave equations*, Lecture Notes in Physics 38 (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York).
- Lakshmanan, M. & P. Kaliappan, 1983, *Lie transformations, nonlinear evolution equations, and Painlevé forms*, J. Math. Phys. 24, 795-806.
- Lie, S., 1881, *Über die Integration durch bestimmte Integral von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen*, Arch. for Math. vol. VI, no. 3, Kristiana, p. 328.
- Lie, S., 1891, *Differentialgleichungen*, (Leipzig) [reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 1967].
- Liu, C.L., 1968, *Introduction to combinatorial mathematics* (McGraw-Hill, New York).
- Miura, R.M., 1968, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, J. Math. Phys. 9, 1202-4.
- Miura, R.M., C.S. Gardner & M.D. Kruskal, 1968, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion*, J. Math. Phys. 9, 1204-9.
- Moreira, I.C., O.M. Ritter & F.C. Santos, 1985, *Simetrias de Lie para o Problema da interação da carga elétrica-monopolo magnético*, Rev. Bras. Fis. 15, 174-88.
- Moreira, I.C., 1986, *Simetrias e leis de conservação para equações de evolução não-lineares*, não-publicado.
- Noether, E., 1918, *Nachrichten Gesell. Wissenschaft. Gottingen* 2, 235.
- Olver, P.J., 1979, *Euler operators and conservation laws of the BBM equation*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85, 143-60.
- Prince, G.E. & C.J. Eliezer, 1980, *Symmetries of the time-dependent N-dimensional oscillator*, J. Phys. A 13, 815-23.
- Prince, G.E. & C.J. Eliezer, 1981, *On the Lie symmetries of the classical Kepler problem*, J. Phys. A 14, 587-96.
- Schwarz, F., 1982, *A Reduce Package for determining Lie symmetries of ordinary and partial differential equations*, Computer Physics Communications 27, 179-86.
- Shen, H. & W.F. Ames, 1974, *On invariant solutions of the Korteweg-de Vries equation*, Physics Letters 49A, 313-4.
- Symon, K.R., 1960, *Mechanics*, 2 ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).

- Tasso, H., 1979, *A new class of Poisson brackets and related equations of evolution*, Lett. Nuovo Cimento **24**, 136-8.
- Torriani, H.H., 1986, *Conservation laws for the Korteweg-deVries equation and the theory of partitions*, Phys. Lett. A **113**, 345-8.
- Vainberg, M.M., 1964, *Variational methods for the study of nonlinear operators* (Holden-Day, San Francisco, California).
- Whitham, G.B., 1965, *Nonlinear dispersive waves*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **283**, 238-61.
- Whittaker, E.T., 1937, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, 4 ed. (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
- Wintgen, D. & H. Friedrich, 1986, *Regularity and irregularity in spectra of the magnetized hydrogen atom* Phys. Rev. Lett. **57**, 571-4.
- Wintgen, D. & H. Friedrich, 1987, Phys. Rev. A **36**, 131.
- Wunner, G., U. Woelk, I. Zech, G. Zeller, T. Ertl, F. Geyer, W. Schweitzer & H. Ruder, 1986, *Rydberg atoms in uniform magnetic fields: Uncovering the transition from regularity to irregularity in a quantum system*, Phys. Rev. Lett. **57**, 3261-4.
- Zabnsky, N. & M. Kruskal, 1965, *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, Phys. Rev. Lett. **15**, 240-3.
- Zabusky, N.J., 1967, *A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction*, in Proceedings of the Symposium on Nonlinear Partial Differential Equations, W.F. Ames, ed., 223-58 (Academic Press, New York).