UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

A REPRESENTAÇÃO DO ESPAÇO DE SCHWARTZ COMO ESPAÇO DE SEQUÊNCIAS E O TEOREMA DO NÚCLEO

Rogério de Aguiar

Agosto - 1991

202801

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

"Mestre em Ciências"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Dr. Gerardo A. Lara Luna
Coordenador

Banca Examinadora:

P. Otterson

Prof. Ph.D. Paul James Otterson
Orientador

Jardel Morais Pereira

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira

WQuandt

Prof. Dr. Waldir Quandt

Agradecimentos

Ao professor Ph.D. Paul James Otterson por sua orientação segura, pelo seu apoio, compreensão e amizade durante a elaboração deste trabalho.
Ao professor Jardel Morais Pereira pelas valiosas e oportunas sugestões dadas ao texto.
Aos meus colegas de curso, ao Júlio, Aldo e em especial ao João L. Martins pelo incentivo.
Aos meus professores, em especial ao professor Genaldo Leite Nunes pelas sugestões durante a fase inicial de elaboração deste trabalho. Ao professor Waldir Quandt pelas correções oportunas e pelo apoio na fase final de elaboração deste trabalho.

Este trabalho é dedicado aos meus pais:

Osmar de Aguiar (in memorian)
Leonida Machado Aguiar

RESUMO

Neste trabalho demonstramos os teoremas da N-representação para S, o espaço de Schwartz, e S', o espaço das distribuições temperadas, usando como elemento essencial as funções de Hermite e como aplicações destes teoremas apresentamos uma demonstração dos Teoremas do Núcleo e da Regularidade.

ABSTRACT

This work presents theorems concerning the representation of S, the Schwartz's space, and S', the temperated distributions space, as spaces of sequences using Hermite functions as an essential ingredient. Demonstrations of the Nuclear Theorem and the Regularity Theorem are givem as applications.

INDICE

INTRODUÇÃO

O espaço das funções de rápido decrescimento (ou o espaço de Schwartz) denotado por $S(\mathbf{R^n})$ é o conjunto das funções $\varphi : \mathbf{R^n} \to \mathbf{C}$ de classe C^∞ tais que

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbf{R^n}} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty \qquad (1)$$

para todo $\alpha, \beta \in I_+^n$ onde I_+^n representa o conjunto de n-uplas de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \_\_, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, com $|x_i| + \alpha_i > 0$ e

$$D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}, \quad |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

O espaço $S(\mathbf{R^n})$ munido da topologia gerada pelas seminormas (1) constitui um espaço localmente convexo, cujo dual $S'(\mathbf{R^n})$ chama-se o espaço das distribuições temperadas sobre $\mathbf{R^n}$.

Um dos aspectos importantes do espaço $S'(\mathbf{R^n})$ reside no fato de que seus elementos possuem transformada de Fourier, o que o faz adequado para a análise de operadores diferencias e equações diferencias parciais a eles associados.

Nosso objetivo principal nesta dissertação é apresentar os teoremas de representação para os espaços $S(\mathbf{R^n})$ e $S'(\mathbf{R^n})$ no caso n=1, isto é, identifica-los com espaços de sequências . Isto será feito seguindo a linha das referências [1] e [2], utilizando como elemento essencial as funções de Hermite. Em linhas gerais consideramos o espaço topológico s_1 das sequências $\{a_n\}_{n\in I^1_+}$ tais que,

$$\sup_{n\in I^1_+} |a_n|\,|n|^m < \infty \qquad \forall m \in I^1_+$$

e provaremos os seguintes fatos:

1) A aplicação que a cada $f \in S(\mathbf{R})$ corresponde uma sequência $a_n \in s_1$, onde $a_n = < \phi_n , f >$ e $\{\phi_n\}_{n\in I_1}$ denota o conjunto ortonormal das funções de Hermite em relação ao produto interno de $L^2(\mathbf{R})$ é um isomorfismo topológico (Teorema da N-representação para $S(\mathbf{R})$).

2) A aplicação que a cada $T \in S'(\mathbf{R})$ associa $b_\alpha \in s_1'$ onde $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ e s_1' denota as sequências de números complexos $\{b_\alpha\}$ tais que $|b_\alpha| \leq C(\alpha+1)^\beta$ para algum $\beta \in I^1_+$ e para todo $\alpha \in I^1_+$ é uma bijeção (Teorema da N-representação para $S'(\mathbf{R})$)

3) Provaremos os Teoremas do Núcleo e da Regularidade e outros corolários interessantes dos Teoremas da N-representação para $S(\mathbf{R})$ e $S'(\mathbf{R})$.

4) Veremos como se comportam algumas operações em $S(\mathbf{R})$ e $S'(\mathbf{R})$ quando levadas para os espaços de sequências correspondentes.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo I colecionamos alguns resultados referentes a espaços localmente convexos necessários para a leitura deste trabalho; introduzimos os espaços S e S', o mergulho m, $m : S \to S'$, e a derivada fraca em S'. Para fixar os conceitos damos alguns exemplos de distribuições temperadas e cálculos de derivadas fracas incluindo o cálculo das soluções fundamentais dos operadores de onda e do calor unidimensional.

No capítulo II determinamos as funções de Hermite, introduzimos os operadores A e A^+ junto com alguns lemas que envolvem propriedades desses operadores. Além disso introduzimos um novo conjunto de seminormas e provamos que este novo conjunto é equivalente as seminormas mencionadas no começo dessa introdução e para finalizar provamos que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ onde as ϕ_n são as funções de Hermite formam uma base ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$

No capítulo III apresentamos os teoremas da N-representação para S e S' e como aplicações desses teoremas demonstramos os teoremas do Núcleo e da Regularidade. Por fim levaremos algumas operações de S e S' para s_1 e s_1' acrescentando diversos aspectos a N-representação. Será notado que as séries que ocorrem são integrais sob uma medida discreta, possibilitando o aproveitamento dos teoremas de Lebesgue. Operações como derivada, produto pontual, translação, dilatação, transformada de Fourier serão levadas para s_n. Calculamos as sequências T_n para algumas das distribuições mais conhecidas como polinômios e transformada de Fourier de uma distribuição, inclusive para a "função" delta de Dirac que figura no primeiro capítulo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais que possibilitam a compreensão deste trabalho. As demonstrações omitidas podem ser encontradas na ref [2]. Os resultados de espaços localmente convexos e funções de decrescimento rápido e inclusive as notações são apresentadas segundo a exposição da ref [2].

1.1 Espaços Localmente Convexos

Definição. Uma **seminorma** sobre um espaço vetorial X é uma aplicação $\rho : X \longrightarrow [0, \infty)$ que satisfaz:

(i) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

(ii) $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$ para $\alpha \in \mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}$)

Diz-se que uma família de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ separa pontos se:

(iii) $\rho_\alpha(x) = 0 \ \forall \ \alpha \in A$ implica $x = 0$

Definição. Um **espaço localmente convexo** é um espaço vetorial

X (sobre **R** ou **C**) com uma família de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ que separa pontos.

Definição. A **topologia natural** sobre um espaço localmente convexo X é a topologia mais fraca na qual todas as ρ_α são contínuas e na qual a operação de adição é contínua. Isto é, as aplicações:

$$\rho_\alpha : X \to [0,\infty), \text{ para cada } \alpha \in A$$

e

$$\begin{aligned} s \ : \ & X \times X \to X \\ & (x,y) \mapsto x+y \end{aligned}$$

são contínuas.

Proposição 1. *A topologia natural de um espaço localmente convexo é Hausdorff.*

Definição. Uma rede $\{x_\beta\}$ em um espaço localmente convexo X chama-se uma rede de Cauchy, se e somente se, $\forall\epsilon > 0$, e para cada seminorma ρ_α, existe um índice β_0 tal que:

$$\rho_\alpha(x_\beta - x_\gamma) < \epsilon, \text{ se } \beta,\gamma > \beta_0$$

X é chamado completo se toda rede de Cauchy converge.

Definição. Duas famílias de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{d_\beta\}_{\beta\in B}$ sobre um espaço vetorial X são **equivalentes** se elas geram a mesma topologia natural.

Proposição 2. *Seja* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *e* $\{d_\beta\}_{\beta\in B}$ *duas famílias de seminormas. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) As famílias são famílias equivalentes de seminormas.

(ii) Cada ρ_α é contínua na d-natural topologia e cada d_β é contínua na ρ-natural topologia

(iii) Para cada $\alpha \in A$, existem $\beta_1, \_\_, \beta_n \in B$ e $C > 0$ tais que para todo $x \in X$:

$$\rho_\alpha(x) \leq C(d_{\beta_1}(x) + \_\_ + d_{\beta_n}(x))$$

e para cada $\beta \in B$, existem $\alpha_1, \_\_, \alpha_m \in A$ e $D > 0$ tais que, $\forall x \in X$:

$$d_\beta(x) \leq D(\rho_{\alpha_1}(x) + \_\_ + \rho_{\alpha_m}(x))$$

Definição. Uma família de seminormas sobre um espaço vetorial X chama-se **dirigida** se, e somente se, $\forall \alpha, \beta \in A$, existem $\gamma \in A$ e um $C \in [0, \infty)$ tais que:

$$\rho_\alpha(x) + \rho_\beta(x) \leq C\rho_\gamma(x)$$

para todo $x \in X$. Equivalentemente por indução, para todo $\alpha_1, \_\_, \alpha_n \in A$ existem $\gamma \in A$ e $D \in [0, \infty)$ tais que:

$$\rho_{\alpha_1}(x) + \_\_ + \rho_{\alpha_n}(x) \leq D\rho_\gamma(x) \ \forall x \in X.$$

Observação 1. Se $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família dirigida então $\{\{x \mid \rho_\alpha(x) < \epsilon\} \mid \alpha \in A, \epsilon > 0\}$ é uma base do sistema de vizinhanças de 0.

Proposição 3. *Todo espaço localmente convexo tem uma família dirigida de seminormas equivalente a família de seminormas que define o espaço.*

Definição. Sejam X, Y, Z espaços vetoriais topológicos e

$$B : X \times Y \to Z$$

uma aplicação bilinear. Diz-se que B é **separadamente contínua** se para todo $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ as aplicações

$$\begin{aligned} B_{x_0} \;:\; & Y \to Z \\ & y \mapsto B_{x_0}(y) = B(x_0, y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_{y_0} \;:\; & X \to Z \\ & x \mapsto B_{y_0}(x) = B(x, y_o) \end{aligned}$$

são contínuas

Proposição 4. *Sejam X e Y dois espaços normados com uma família enumerável e dirigida de normas $\{\| \quad \|_r\}$ e $\{\| \quad \|_\lambda\}$. Seja B uma forma bilinear sobre $X \times Y$. Se B é contínua então existem r, λ, e C tais que:*

$$|B(x, y)| \leq C\|x\|_r\|y\|_\lambda \qquad \forall (x, y) \in X \times Y$$

Demonstração. Como B é contínua, B é contínua em $(0, 0)$ logo existe uma vizinhança V de $(0, 0)$ tal que $B(V) \subset (-1, 1)$. Usando a definição de topologia produto e o fato de que as normas são dirigidas existem índices r e λ e constantes C_1 e C_2 positivas tais que,

$$\{(x, y) \mid \|x\|_\lambda \leq C_1 \quad \text{e} \quad \|y\|_r \leq C_2\} \subset V$$

Agora sejam x e y arbitrários, com $\|x\|_\lambda \neq 0$ e $\|y\|_r \neq 0$

Desde que

$$\left(\frac{C_1 x}{\|x\|_\lambda}, \frac{C_2 y}{\|y\|_r}\right) \in V$$

Concluimos que,

$$\left|B\left(\frac{C_1 x}{\|x\|_\lambda}, \frac{C_2 y}{\|y\|_r}\right)\right| < 1$$

Por outro lado da bilinearidade de B segue que

$$\begin{aligned} |B(x, y)| &= \frac{\|x\|_\lambda}{C_1} \frac{\|y\|_r}{C_2} \left|B\left(\frac{C_1 x}{\|x\|_\lambda}, \frac{C_2 y}{\|y\|_r}\right)\right| \\ &< C\|x\|_\lambda \|y\|_r \qquad \text{onde} \quad C = \frac{1}{|C_1 C_2|} \end{aligned}$$

Se $\|x\|_\lambda = 0$ ou $\|y\|_r = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$ logo,

$$B(x, y) = \|x\|_\lambda \|y\|_r = 0$$

Portanto para x e y arbitrários existem r, λ e $C \geq 0$ tais que

$$B(x, y) \leq C\|x\|_\lambda \|y\|_r$$

Teorema 2. *Sejam X e Y espaços localmente convexos com famílias de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ respectivamente. Então a aplicação linear $T : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo $\beta \in B$, existem $\alpha_1, \_\_, \alpha_n \in A$ e $C > 0$ com*

$$d_\beta(Tx) \leq C(\rho_{\alpha_1}(x) + \_\_ + \rho_{\alpha_n}(x))$$

Se a família $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é dirigida então T é contínua se, e somente se, existem $\alpha \in A$ e $D > 0$ tais que

$$\forall \beta \in B,\ d_\beta(Tx) \leq D\rho_\alpha(x)$$

Teorema 3. *Seja X um espaço localmente convexo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) X é metrizável.

(b) Existe uma base enumerável de vizinhanças de zero.

(c) A topologia de X é gerada por uma família enumerável de seminormas.

Observação 2. Seja $\{\rho_n\}_{n=1,2,...}$ uma família enumerável de seminormas que gera a topologia de um espaço vetorial X. Definimos

$$M : X \times X \to \mathbf{R}$$

$$M(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left[\frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}\right] \tag{1.1}$$

M assim definida é uma métrica e a topologia natural gerada pelas semi-normas coincide com a topologia gerada por essa métrica .

Proposição 5. *Uma rede $\{x_\alpha\}$ é de Cauchy na métrica 1.1 se, e somente se, ela é de Cauchy em cada ρ_n. Assim um espaço localmente convexo metrizável X, é completo como um espaço métrico se, e somente se, é completo como um espaço localmente convexo.*

Definição. Um espaço localmente convexo metrizável e completo chama-se de *espaço de Fréchet*.

Teorema 4. *Se X e Y são espaços de Fréchet e $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua então f é aberta.*

Teorema 5. *Sejam X e Y espaços de Fréchet. Seja $\mathcal{F}$ a família de aplicações contínuas de X em Y tal que, para toda seminorma contínua ρ sobre Y e todo $x \in X$, o conjunto $\{\rho(F(x)) \mid F \in \mathcal{F}\}$ é limitado. Então, para cada ρ existem uma seminorma contínua d sobre X e um $C > 0$ tais que:*

$$\rho(F(x)) \leq Cd(x), \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

Corolário. *Se X é um espaço de Fréchet, então um funcional bilinear separadamente contínuo, B, é contínuo, isto é $|B(f,g)| \leq C\rho_1(f)\rho_2(g)$, para algumas seminormas contínuas ρ_1, ρ_2.*

1.2 As Funções de Decrescimento Rápido e as Distribuições Temperadas

Nesta seção nós vamos descrever o espaço das funções C^∞ de decrescimento rápido S e seu dual S', as distribuições temperadas. Para que as definições ocorram naturalmente nós vamos introduzir algumas notações. As funções sobre $\mathbf{R}^n$ serão escritas apenas como $f(x)$, onde $x = (x_1, \_\_, x_n)$. I_+^n denotará o conjunto das n-uplas de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \_\_, \alpha_n)$ e $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$; $I_+^1 = I_+$. Todas as integrais em que não figurem os limites de integração são integrais sobre $\mathbf{R}$. O espaço $L^2(\mathbf{R})$ será denotado apenas por L^2.

Usaremos as notações:

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad \text{se } |x_i| + \alpha_i > 0,\ i = 1, \_\_ . n$$

Definição. As funções de decrescimento rápido $S(\mathbf{R^n})$ é o conjunto das funções a valores complexos infinitamente diferenciáveis $\varphi(x)$ sobre $\mathbf{R^n}$ para as quais,

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbf{R^n}} |x^{\alpha} D^{\beta} \varphi(x)| < \infty$$

para todo $\alpha, \beta \in I_+^n$.

Assim as funções em $S(\mathbf{R^n})$ são aquelas funções que junto com suas derivadas decrescem mais rapidamente do que o inverso de qualquer polinômio. Quando $n = 1$ denotaremos $S(\mathbf{R})$ simplesmente por S.

Teorema 6. *O Espaço $S(\mathbf{R^n})$ com a topologia natural dada pelas seminormas $\|.\|_{\alpha,\beta}$ é um espaço de Fréchet.*

Observação 3. Por razões técnicas, nós às vezes queremos uma família dirigida de seminormas, assim nós definimos para $k, m \in I_+$ e $f \in S(\mathbf{R^n})$:

$$\|f\|_{k,m} = \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ |\beta| \le m}} \|f\|_{\alpha,\beta}$$

Definição. O espaço dual de $S(\mathbf{R^n})$ denotado por $S'(\mathbf{R^n})$ é chamado o espaço das distribuições temperadas. No caso $n = 1$ denotaremos $S'(\mathbf{R})$ por S'.

Definição. A topologia fraca-* de S', a $\sigma(S', S)$- topologia, é a topologia mais fraca na qual os funcionais lineares $T \to T(h)$ $h \in S$ são contínuas.

Para um funcional linear T, sobre $S(\mathbf{R^n})$, estar em $S'(\mathbf{R^n})$ ele deve ser contínuo. Pelo teorema 2, isto é equivalente a existência de uma seminorma $\|.\|_{k,m}$ com

$$|T(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{k,m}$$

para todo $\varphi \in S(\mathbf{R^n})$. Agora daremos alguns exemplos do caso $n = 1$. A extensão para o caso geral não apresenta maiores dificuldades.

Exemplo 1. Seja $g \in S$ e seja m_g um funcional sobre S definido por

$$m_g(\phi) = \int g(x)\phi(x)\, dx \tag{1.2}$$

m_g é claramente linear e

$$|m_g(\phi)| \leq \|g\|_{L^1(\mathbf{R})}\|\phi\|_\infty$$

Como $\|\phi\|_\infty$ é uma seminorma contínua então m_g é contínuo e portanto é um elemento de S'. Além disso, se $g_1 \neq g_2$ como funções em S, então $m_{g_1} \neq m_{g_2}$ como elementos de S'. Isto é, a transformação que a cada g associa o funcional definido por 1.2 é uma aplicação injetiva de S em S'. Esta aplicação é contínua quando em S' é dada a $\sigma(S', S)$–topologia.

Definição. Seja m a aplicação definida por:

$$\begin{aligned} m \ : \ S &\longrightarrow S' \\ g &\longrightarrow m_g \end{aligned}$$

Isto é,

$$m(g) = m_g$$

Onde,

$$\begin{aligned} m_g \ &: \ S \longrightarrow \mathbf{C} \\ &\quad\ \phi \longrightarrow m_g(\phi) \\ m_g(\phi) &= \int g(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

À aplicação m assim definida daremos o nome de **mergulho.** Vemos assim que S está naturalmente mergulhado em S' através de m.

Definição. Seja f uma função contínua tal que $\forall \varphi \in S$ tenhamos $f\varphi \in S$. Definamos o produto de f por $T \in S'$ como sendo a distribuição temperada dada por

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi)$$

Exemplo 2. Sejam $g \in S$ e f contínua tal que $fg \in S$. Assim,

$$\begin{aligned} (fm_g)(\varphi) &= m_g(f\varphi) \\ &= \int g(x)(f\varphi)(x)dx \\ &= \int g(x)f(x)\varphi(x)dx \\ &= \int (fg)(x)\varphi(x)dx \\ &= m_{fg}(\varphi) \end{aligned}$$

Logo,

$$fm_g = m_{fg}$$

Exemplo 3. (*A "função" delta*)

Seja $b \in \mathbf{R}$. Defina δ_b como sendo o funcional $\delta_b(\phi) \equiv \varphi(b)$, $\forall\, \phi \in S$. Já que $|\delta_b(\phi)| \leq \|\phi\|_{0,0}$, então o funcional $\delta_b(.)$ está em S'. Não existe função integrável $g(x)$ tal que:

$$\delta_b(\varphi) = \int g(x)\varphi(x)\, dx$$

para todo $\varphi \in S$. Ainda que exista uma medida μ_b (medida discreta) com:

$$\delta_b(\varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu_b(x).$$

mas o simbolismo de 1.2 é tão sugestivo que, ás vezes, escrevemos,

$$\delta_b(\varphi) = \int \varphi(x)\delta(x-b)\, dx \tag{1.3}$$

$\delta(x-b)$ não é uma função e a equação 1.3 será tratado meramente como uma notação simbólica; $\delta(x-b)$ é chamada **a "função" delta em b.**

Definição. Seja $T \in S'(\mathbf{R^n})$, $\alpha \in \mathbf{I^n_+}$. **A Derivada Fraca**, $D^\alpha T$, ou a derivada no sentido das distribuições é definida por:

$$(D^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha f)$$

Seja $\phi \in S$ e $D^\alpha\phi \in S$ a derivada de ϕ e seja $T = m_\phi$ e $m_{D^\alpha\phi} = (D^\alpha T)$. O funcional $(D^\alpha T)$ é a derivada fraca de T, isto é,

$$(D^\alpha T) \equiv D^\alpha(m_\phi)$$

onde a identidade acima é apenas notacional. Logo temos:

$$D^{\alpha} m_{\phi} = m_{D^{\alpha}\phi}$$

Isto significa que a derivada do mergulho é o mergulho da derivada. Portanto,

$$\int (D^{\alpha}\phi)(x) f(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int \phi(x)(D^{\alpha} f)(x)\, dx.$$

Logo temos a seguinte igualdade, que é uma notação simbólica, que também exprime que a derivada do mergulho é o mergulho da derivada:

$$\int (D^{\alpha}\phi)(x) f(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int \phi(x) \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f \right) (x)\, dx.$$

Provemos que D assim definida é a única transformação linear contínua em S' com a propriedade $md = Dm$. Suponhamos que exista outra transformação linear contínua E de S' em S' tal que $md = Em$. Logo $Dm - Em = 0$, ou seja $(D-E)m = 0$. Portanto $D = E$ em $m(S)$, isto é, para todo $g \in m(S)$ temos $Dg = Eg$. Como E e D são contínuas $D - E$ também é contínua. Por outro lado $m(S)$ é denso em S' (Corolário 1 do Teorema 1 do Capítulo 3 deste Trabalho). Assim $D - E$ se anula em um subconjunto denso de S' e sendo $D - E$ contínua temos que $D - E$ se anula em S', deste modo $D - E = 0$ em S'. Portanto $D = E$

Exemplo 4.

Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}$$

A função g assim definida é contínua mas não é diferenciável em todos os pontos no sentido clássico. Desde que,

$$
\begin{aligned}
|g(\varphi)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{0}^{\infty} x\varphi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}(1+x^2)^2\varphi(x)dx\right| \qquad \forall\varphi \in S \\
&\leq \sup_{x\in\mathbf{R}} |(1+x^2)^2\varphi(x)| \left|\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx\right| \\
&\leq \left|\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx\right| (\|\varphi\|_{0,0} + 2\|\varphi\|_{2,0} + \|\varphi\|_{4,0})
\end{aligned}
$$

temos que $g \in S'$. Assim g também tem uma derivada em S'. Por definição:

$$\left(\frac{dg}{dx}\right)(\varphi) = -g\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

Assim,

$$\left(\frac{d}{dx}g\right)(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \theta(\varphi)$$

Isto é:

$$\frac{d}{dx}g(x) = \theta(x).$$

onde θ é a função de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

A função θ também não é derivável em todos os pontos, mas ela também tem uma derivada em S' dada por,

$$\left(\frac{d}{dx}\theta\right)(\varphi) = -\theta\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

Assim $d\theta/dx = \delta$ e δ por sua vez também tem uma derivada.

Nos exemplos seguintes provaremos que as funções

$$G(t,x) = \frac{1}{2}\theta(t+x)\theta(t-x)$$

e

$$H(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & para\ t > 0 \\ 0 & para\ t \leq 0 \end{cases}$$

onde $G, H \in S'(\mathbf{R^2})$ são soluções fundamentais das equações da onda e do calor unidimensional respectivamente. Antes de começarmos os exemplos daremos a definição de solução fundamental e faremos alguns comentários pertinentes a operadores diferenciais. Seja $P(\xi)$ um polinômio em $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ e seja $P(D)$ um operador diferencial linear trocando-se ξ_j por $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $P(D)$ pode ser escrito como $P(D) = \sum_\alpha c_\alpha D_\alpha$, onde $\alpha = (\alpha_1, \_\_, \alpha_n)$ e $D_\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Por uma solução fundamental de $P(D)$ nos entendemos uma distribuição E em $S'(\mathbf{R}^n)$ tal que

$$P(D)E = \delta$$

onde δ e a "função" delta de Dirac. Obtendo-se uma solução fundamental E de $P(D)$ a função u obtida por

$$u = E * f$$

onde o sinal $*$ indica o produto de convolução e $f \in S(\mathbf{R}^n)$, fornece uma solução da equação:

$$P(D)u = f$$

De fato, pela regra de diferenciação do produto de convolução temos,

$$P(D)u = (P(D)E) * f = \delta * f = f$$

A existência de uma solução fundamental para toda equação diferencial parcial linear com coeficientes constantes foi provada independentemente por B. Malgrange e L. Ehrenpreis por volta de 1954-55 para um espaço de distribuições maior que $S'(\mathbf{R}^n)$ (a saber $D'(\mathbf{R}^n)$). Em 1958 Hormander provou este mesmo resultado para o espaço $S'(\mathbf{R}^n)$ (ver ref [5] pag. 182 e ref [10] pg 342).

Exemplo 5.

Seja

$$G(t,x) = \frac{1}{2}\theta(t+x)\theta(t-x)$$

Vamos mostrar agora que $G(t,x)$ assim definida é uma solução fundamental de $P(D)$ onde,

$$P(D) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

Assim devemos mostrar que

$$P(D)(G(t,x)) = \delta(t,x)$$

Ou seja,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\theta(t+x)\theta(t-x) = 2\delta(t)\delta(x)$$

Então para todo $u \in S(\mathbf{R}^2)$ devemos ter

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\theta(t+x)\theta(t-x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 2u(0.0)$$

De fato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\theta(t+x)\theta(t-x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \int_0^{\infty} dt \int_{-t}^{t} dx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dt \int_{-t}^{t} dx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= \int_0^{\infty} dt \int_{-t}^{t} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int_0^{\infty} dt \int_{-t}^{t} dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{|x|}^{\infty} dt \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int_0^{\infty} dt \int_{-t}^{t} dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [u_t(\infty, x) - u_t(|x|, x)] dx \\
&\quad - \int_0^{\infty} [u_x(t,t) - u_x(t,-t)] dt \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} u_t(|x|, x) dx - \int_0^{\infty} [u_x(t,t) - u_x(t,-t)] dt
\end{aligned}$$

Sejam.

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{-\infty}^{0} u_t(|x|. x) dx \\
I_2 &= \int_0^{\infty} u_x(t, -t) dt \\
I_3 &= -\int_0^{\infty} u_x(t, t) dt \\
I_4 &= -\int_0^{\infty} u_t(|x|, x)
\end{aligned}$$

Para I_1 temos o seguinte,

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{-\infty}^{0} u_t(|x|, x) dx \\
&= -\int_0^{\infty} u_t(s, -s) ds
\end{aligned}$$

Logo

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\infty} [u_x(s. -s) - u_t(s, -s)] ds$$

Seja $f(s) = u(s, -s)$ então $f'(s) = u_t(s, -s) - u_x(s, -s)$ e daí concluimos que

$$I_1 + I_2 = \int_0^\infty -f'(s)ds = -f(\infty) + f(0) = u(0,0)$$

Também

$$I_3 + I_4 = -\int_0^\infty [u_x(s.s) + u_t(s,s)]ds$$

Seja $g(s) = u(s,s)$ então $g'(s) = u_t(s.s) + u_x(s,s)$ e assim

$$I_3 + I_4 = -\int g'(s)ds = -g(\infty) + g(0) = u(0,0)$$

Portanto

$$\int_0^\infty dt \int_{-t}^t dx \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2u(0,0)$$

Exemplo 6.

Seja

$$H(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & para\ t > 0 \\ 0 & para\ t \leq 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que $H(t,x)$ assim definida é uma solução fundamental de $P(D)$ onde

$$P(D) = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Novamente devemos mostrar que $P(D)(H(t,x)) = \delta(t.x)$. Para provarmos este fato necessitamos do seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

Vamos provar agora que $P(D)(H(t,x))u = u(0,0)$. De fato,

$$\begin{aligned}
P(D)(H(t,x))u &= \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right) u = -H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\
-P(D)(H(t,x))u &= H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \\
&= \int\int H(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + \int\int H(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= \int\int \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \theta(t) \frac{\partial u}{\partial t} \\
&\quad + \int\int \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \theta(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\partial u}{\partial t} \\
&\quad + \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^\infty dx \int_\epsilon^\infty dt \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^\infty dx \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} u(t,x)\Big|_\epsilon^\infty - \int_\epsilon^\infty u(t,x) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt \right] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^\infty dx \left[-\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} u(\epsilon,x) \right] \\
&\quad - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^\infty dx \int_\epsilon^\infty u(t,x) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt \\
&= -u(0,0) - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^\infty dx \int_\epsilon^\infty u(t,x) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt
\end{aligned}$$

Onde a última igualdade segue do fato:

$$u(0,0) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^\infty dx \left[-\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} u(\epsilon,x) \right]$$

Para vermos isto façamos a mudança de variável $y = \frac{x}{2\sqrt{\epsilon}}$ assim,

$$\begin{aligned}
P_2 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \epsilon^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} u(\epsilon, x) \right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \epsilon^{-y^2} u(\epsilon, 2\sqrt{\epsilon}y) 2\sqrt{\epsilon} \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \epsilon^{-y^2} u(\epsilon, 2\sqrt{\epsilon}y) \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} u(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \epsilon^{-y^2} dy \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} u(0,0) \\
&= u(0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \epsilon^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \left[\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \right] \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) u(t,x) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} dx u(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx u(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\epsilon^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-P(D)(H(t,x))u &= P_1 + P_3 \\
&= -u(0,0) - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\epsilon}^{\infty} u(t,x) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt \\
&\quad + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx u(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) \\
&= -u(0.0)
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) u = u(0,0) = \delta(t,x)u
$$

Logo

$$
P(D)(H) = \delta
$$

Capítulo 2

As Funções de Hermite

A representação de S e S' envolve algumas propriedades especiais das funções de Hermite (as auto funções do oscilador harmônico). As funções de Hermite são as soluções da família de equações diferenciais ordinárias do oscilador harmônico e neste capítulo vamos encontrar as soluções desta família de equações introduzindo de uma maneira natural os operadores A e A^+. Demonstraremos alguns lemas que envolvem propriedades desses operadores e usando essas propriedades vamos demonstrar alguns lemas sobre equivalência de seminormas. Por fim demonstraremos que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ formado pelas funções de Hermite forma uma base ortonormal para L^2. De posse de todos esses resultados estaremos em condições de proceder a N- representação de S e S'.

Considere a família de equações diferencias:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x^2y + \lambda y = 0 \qquad onde \quad \lambda = 2n+1 \quad n \in \mathbf{N} \tag{2.1}$$

Estas equações podem ser escritas nas seguintes formas:

$$AA^+y = \frac{1}{2}(\lambda + 1)y$$

$$A^+Ay = \frac{1}{2}(\lambda - 1)y$$

onde

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx}) \qquad \text{e} \qquad A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^+A(A^+y) &= \tfrac{1}{2}(\lambda + 1)(A^+y) = \tfrac{1}{2}((\lambda + 2) - 1)A^+y \\ AA^+(Ay) &= \tfrac{1}{2}(\lambda - 1)(Ay) = \tfrac{1}{2}((\lambda - 2) + 1)Ay \end{aligned}$$

Assim se y é uma solução de 3.1 então A^+y é uma solução de 3.1 com λ repassado por $\lambda + 2$ e da mesma forma Ay é uma solução de 3.1 com λ repassado por $\lambda - 2$. Mas isso nos diz que se y_n é uma solução da equação $y'' - x^2y + (2n+1)y = 0$ então $y_{n+1} = k'A^+y_n$ é uma solução dessa equação com $n+1$ no lugar de n. Analogamente $y_{n-1} = k''Ay_n$ é uma solução com $n-1$ no lugar de n, onde $k', k'' \in$ **R**.

Uma solução de 3.1 com $n = 0$ é $\phi_0 = ke^{-\frac{x^2}{2}}$, onde k é uma constante, e a partir dessa solução podemos agora determinar um conjunto de soluções para a família de equações em 3.1.

O nosso objetivo é encontrar soluções de 3.1 pertencentes a S e com esse intuito vamos considerar os seguintes operadores

$$A : S \to S$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)$$

$$A^+ : S \to S$$

$$A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$$

onde para cada $\omega \in S$

$$A^+\omega : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$

$$(A^+\omega)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\omega - \frac{d}{dx}\omega\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t\omega(t) - \omega'(t)$$

Analogamente

$$(A\omega)(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}tw(t) + \omega'(t)$$

e seja $N = A^+A$.

Afirmação 1. *A é o adjunto de A^+ em S.*

Demonstração. Considerando $S \subset L^2$ e o produto interno em L^2 dado por:

$$< f, g > = \int \overline{f}g \qquad f, g \in L^2$$

Devemos provar que,

$$< Af, g > = < f, A^+g > \qquad f, g \in S$$

De fato,

$$\begin{aligned}
< Af\,,g > &= \int Af.g = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \overline{(x+\frac{d}{dx})f}.g \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int x\overline{f}g + \int \overline{\frac{df}{dx}}g\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int \overline{f}xg + \int \overline{\frac{df}{dx}}g\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int \overline{f}xg - \int \overline{f}\frac{dg}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \overline{f}\left(xg - \frac{dg}{dx}\right) \\
&= \int \overline{f}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)g = \int \overline{f}A^{+}g \\
&= < f\,, A^{+}g >
\end{aligned}$$

Como

$$\phi_0 = k\epsilon^{-\frac{x^2}{2}}$$

vamos agora determinar k de modo que tenhamos $\|\phi_0\|_2 = 1$

$$\begin{aligned}
\|\phi_0\|_2^2 &= < \phi_0\,, \phi_0 > \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} k^2\epsilon^{-\frac{x^2}{2}}\epsilon^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= k^2\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^{-x^2}dx \\
&= k^2\pi^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Logo $k = \pi^{-\frac{1}{4}}$ e assim $\phi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}}\epsilon^{-\frac{x^2}{2}}$. Sabemos que se ϕ_n é solução de (2.1) então $k'A^{+}\phi_n$ é solução de (2.1) com n repassado por $n+1$ e $k''A\phi_n$ é solução de (2.1) com n repassado por $n-1$. mas também desejamos que $\|\phi_{n+1}\|_2 = 1$ e para que isto aconteça devemos ter $\phi_{n+1} = (n+1)^{-\frac{1}{2}}A^{+}\phi_n$. Provemos agora que ϕ_{n+1} assim definida satisfaz $\|\phi_{n+1}\|_2 = 1$. Faremos isso por indução sobre n. Sabemos que $\|\phi_0\|_2 = 1$. Suponhamos que $\|\phi_n\|_2 = 1$. Portanto para $n+1$

temos,

$$
\begin{aligned}
\|\phi_{n+1}\|_2^2 &= <\phi_{n+1}, \phi_{n+1}> \\
&= (n+1)^{-1} < A^+\phi_n, A^+\phi_n > \\
&= (n+1)^{-1} < \phi_n, AA^+\phi_n > \\
&= (n+1)^{-1} < \phi_n, \frac{1}{2}(2n+1+1)\phi_n > \\
&= (n+1)(n+1)^{-1} < \phi_n, \phi_n > \\
&= \|\phi_n\|_2^2 \\
&= 1 \\
\|\phi_{n+1}\|_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Analogamente para que $\|\phi_{n-1}\|_2 = 1$ devemos ter $\phi_{n-1} = (n)^{-\frac{1}{2}} A\phi_n$. Como $\phi_{n+1} = (n+1)^{-\frac{1}{2}} A^+\phi_n$ concluimos que $\phi_n = (n!)^{-\frac{1}{2}}(A^+)^n\phi_0$.

Desenvolvendo $(A^+)^n\phi_0$ onde $\phi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}}\epsilon^{-\frac{x^2}{2}}$ obtemos a expressão:

$$\phi_n = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}}(-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} \epsilon^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \epsilon^{-x^2}$$

que é a expressão mais conhecida para as funções de Hermite. Obviamente ϕ_n é uma solução da equação $y'' + (2n+1-x^2)y = 0$ e como esta é uma equação diferencial de segunda ordem existe um conjunto de soluções ψ_n tal que para cada n ϕ_n e ψ_n sejam linearmente independentes. A título de informação e aproveitando os operadores A e A^+ vamos determinar as soluções ψ_n. Utilizando o wronskiano e a solução ϕ_0 vamos agora determinar uma solução ψ_0.

$$W_{\phi_0\psi_0} = \psi_0'\phi_0 - \phi_0'\psi_0$$

Derivando os dois menbros da igualdade acima temos,

$$W' = \psi_0''\phi_0 - \phi_0''\psi_0$$

Mas por hipótese ϕ_0 e ψ_0 são soluções de $y'' - f(x)y = 0$,onde $f(x) = x^2 - (2n+1)$, assim

$$\phi_0'' - f(x)\phi_0 = 0 \qquad (i)$$

$$\psi_0'' - f(x)\psi_0 = 0 \qquad (ii)$$

Multiplicando (i) por ψ_0 e (ii) por ϕ_0 e diminuindo uma da outra temos:

$$\psi_0''\phi_0 - \phi_0''\psi_0 = 0$$

Logo $W' = 0$ e por conseguinte $W = k$ onde k é uma constante diferente de zero, pois caso contrário as duas soluções não serão linearmente independentes. Deste modo temos a equação diferencial ordinária linear de primeira ordem $\psi_0'\phi_0 - \phi_0'\psi_0 = k$ para ψ_0. Como $\phi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ temos $\phi_0' = -\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}x$. Fazendo $k = 1$ e resolvendo esta equação diferencial ordinária com a condição incial $\psi_0 = 0$ conseguimos a seguinte expressão para ψ_0:

$$\psi_0 = \pi^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{t^2}dt$$

Não é difícil demonstrar que ψ_0 assim definida é uma solução da equação 3.1 para $n = 0$. Quando aplicamos o operador A^+ em uma solução obtemos outra solução da equação 3.1 com $n+1$ no lugar de n. A função ψ_0 não pertence a S e para obtermos a demais soluções vamos estender os operadores A e A^+ para o conjunto das funções C^∞ ou seja vamos considerar $A, A^+ : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R})$ onde $C^\infty(\mathbf{R})$ denota o conjunto das funções com derivadas contínuas de todas as ordens definidas em **R** e tomando valores complexos. Com esta formalização podemos escrever:

$$\psi_{n+1} = A^+\psi_n$$

isto é

$$\psi_{n+1} = (A^+)^n\psi_0$$

Resta agora provarmos que para cada n, ψ_n e ϕ_n são L.I. (linearmente independentes). Considerando A, A^+ atuando em $C^\infty(\mathbf{R})$ vamos agora determinar o núcleo do operador A^+. Se $\omega \in KerA^+$ então $A^+\omega = 0$ ou seja, $t\omega(t) - \omega'(t) = 0$. Resolvendo esta EDO temos que $\omega = ke^{\frac{t^2}{2}}$, k constante. Assim

$$KerA^+ = [e^{\frac{t^2}{2}}]$$

Isto é $KerA^+$ é o espaço gerado pela função $e^{\frac{t^2}{2}}$. Provemos por indução que ϕ_n e ψ_n são L.I. Para $n = 0$, se $a\phi_0 + b\psi_0 = 0$ com $a, b \in \mathbf{R}$ então:

$$\begin{aligned} A(a\phi_0 + b\psi_0) &= 0 \\ aA\phi_0 + bA\psi_0 &= 0 \\ bA\psi_0 &= 0 \\ b\frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}e^{\frac{x^2}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

Logo $b = 0$ e como $\phi_0(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ então $a = 0$ e deste modo ϕ_0 e ψ_0 são L.I. Suponhamos que ϕ_n e ψ_n são L.I. Se $a\phi_{n+1} + b\psi_{n+1} = 0$ então $A^+(a(n+1)^{-\frac{1}{2}}\phi_n + b\psi_n) = 0$ e com isso $a(n+1)^{-\frac{1}{2}}\phi_n + b\psi_n \in KerA^+$ ou seja $a(n+1)^{-\frac{1}{2}}\phi_n + b\psi_n = ke^{\frac{x^2}{2}}$

e aplicando AA^+ aos dois lados dessa igualdade vem,

$$AA^+(a(n+1)^{-\frac{1}{2}}\phi_n + b\psi_n = kAA^+e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$(2n+1)(a(n+1)^{-\frac{1}{2}}\phi_n + b\psi_n) = 0 .$$

Por hipótese ϕ_n e ψ_n são L.I e portanto $a = b = 0$. Mas isto significa que ϕ_{n+1} e ψ_{n+1} são L.I.

Afirmação 2. *Seja o operador [...] definido por*

$[A, A^+] = AA^+ - A^+A$ então $[A, A^+]f = f, \quad \forall f \in S$

$$\begin{aligned}
[A, A^+]f &= AA^+f - A^+Af \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)f - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)f \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\left(xf - \frac{df}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left(xf + \frac{df}{dx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2f - x\frac{df}{dx} + x\frac{df}{dx} + f - \frac{d^2f}{dx^2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(x^2f + x\frac{df}{dx} - x\frac{df}{dx} - f - \frac{d^2f}{dx^2}\right) \\
&\quad \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f = f
\end{aligned}$$

Ou seja

$$[A, A^+] = I$$

onde I é o operador identidade.

Observação. Sendo A^+ o adjunto de A temos que N é o adjunto de N, pois $< Nf, g > = < A^+Af, g > = < Af, Ag > = < f, A^+Ag > = < f, Ng >$ logo $< (N+m)f, g > = < f, (N+m)g >$.

Logo $N+m$ é autoadjunto e naturalmente $(N+m)^k$ também é autoadjunto.

Pelo operador $N+m$ nos entendemos

$$(N+m)f = Nf + mIf = Nf + mf.$$

Partindo da afirmação 1, temos as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} [A, A^+] &= I \\ [A, A^+] &= AA^+ - A^+A = I \\ AA^+ &= I + A^+A = I + N \\ A^+A &= AA^+ - I. \end{aligned}$$

Da definição de $[.,.]$ temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} [N, A^+] &= NA^+ - A^+N \\ [A, N] &= AN - NA \end{aligned}$$

É fácil ver $[N, A^+] = A^+$ e $[A, N] = A$. Logo teremos também as fórmulas:

$$\begin{aligned} [N, A^+] &= A^+ = NA^+ - A^+N \\ A^+N &= NA^+ - A \\ NA^+ &= A^+ + A^+N \\ [A, N] &= AN - NA = A \\ AN &= A + NA \\ NA &= AN - A \end{aligned}$$

O lema seguinte apresenta algumas propriedades dos operadores A, A^+ e N, que serão utilizados na demonstração da proposição 2.

Lema 1. *Os operadores A, A^+ e N possuem as seguintes pro-*

priedades:

$$
\begin{aligned}
A^+N^mA &= N(N-1)^m \\
A^+(N+m)^mA &= N(N+(m-1))^m \\
AN^mA^+ &= (N+1)^{m+1} \\
A(N+m)^mA^+ &= (N+1)(N+(m+1))^m \\
A(A^+)^n &= n(A^+)^{n-1}+(A^+)^nA
\end{aligned}
$$

Demonstração:

$$A^+N^mA = N(N-1)^m \tag{2.2}$$

Vamos fazer a demonstração usando a indução sobrde m. Para m=1 temos:

$$A^+NA = A^+[AN-A] = A^+AN - A^+A = N^2 - N = N(N-1)$$

Suponhamos que a igualdade vale para m

$$
\begin{aligned}
A^+N^{m+1}A &= A^+N^mNA = A^+N^m(AN-A) \\
&= A^+N^mAN - A^+N^mA \\
&= N(N-1)^mN - N(N-1)^m \\
&= N(N-1)^m(N-1) \\
&= N(N-1)^{m+1}
\end{aligned}
$$

$$A^+(N+m)^mA = N(N+(m-1))^m \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
A^+(N+m)^m A &= A^+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N^{m-k}m^k A \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^+N^{m-k}Am^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N(N-1)^{m-k}m^k \\
&= N\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(N-1)^{m-k}m^k \\
&= N((N-1)+m)^m \\
&= N(N+(m-1))^m
\end{aligned}
$$

$$
AN^m A^+ = (N+1)^{m+1} \tag{2.4}
$$

Provaremos isso por indução sobre m.

Para $m=1$

$$
\begin{aligned}
ANA^+ &= A(A^+ + A^+N) = AA^+ + AA^+N \\
&= AA^+(1+N) = (N+1)(N+1) \\
&= (N+1)^2
\end{aligned}
$$

Suponhamos que vale para m

$$
\begin{aligned}
AN^{m+1}A^+ &= AN^mNA^+ = AN^m(A^+ + A^+N) \\
&= AN^mA^+ + AN^mA^+N \\
&= (N+1)^{m+1} + (N+1)^{m+1}N \\
&= (N+1)^{m+1}(N+1) \\
&= (N+1)^{m+2}
\end{aligned}
$$

Mostraremos agora a seguinte identidade:

$$A(N+m)^m A^+ = (N+1)(N+(m+1))^m \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
A(N+m)^m A^+ &= A\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}N^{m-k}m^k A^+ \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}AN^{m-k}A^+m^k \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(N+1)^{m-k+1}m^k \\
&= (N+1)\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(N+1)^{m-k}m^k\right) \\
&= (N+1)((N+1)+m)^m \\
&= (N+1)(N+(m+1))^m
\end{aligned}$$

$$A(A^+)^n = n(A^+)^{n-1} + (A^+)^n A \tag{2.6}$$

Provaremos usando indução sobre n. Para n=1 temos:

$$AA^+ = 1 + A^+A$$

Suponhamos que a igualdade se verifica para n.

$$\begin{aligned}
A(A^+)^{n+1} &= AA^+(A^+)^n \\
&= [1+A^+A](A^+)^n \\
&= (A^+)^n + A^+A(A^+)^n \\
&= (A^+)^n + A^+[n(A^+)^{n-1} + (A^+)^n A] \\
&= (A^+)^n + n(A^+)^n + (A^+)^{n+1}A
\end{aligned}$$

$$= (n+1)(A^+)^n + (A^+)^{n+1}A$$

As equivalências das famílias de seminormas em S apresentadas nas proposições 1 e 2 seguintes são cruciais para as demonstrações dos teoremas de representação.

Para $f \in S$, $\alpha, \beta \in I_+^n$, $n \in I_+$, definimos

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2} = \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

$$\|f\|_n = \|(N+1)^n\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

Para distinguir as seminormas $\|.\|_{\alpha,\beta,2}$ das seminormas $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ introduzidas no capítulo I, escreveremos $\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}$ ao invés de apenas $\|f\|_{\alpha,\beta}$. Usaremos também a notação $\|.\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$

Proposição 1. *As famílias de seminormas* $\{\|.\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ *e* $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ *sobre* $S(\mathbf{R^n})$ *são equivalentes.*

Demonstração. Nós formeceremos a demonstração no caso $n = 1$ por simplicidade de notação. Desde que $(1+x^2)^{-1} \in L^2$, temos que:

$$\|f\|_2 \le \|(1+x^2)^{-1}\|_2 \|(1+x^2)f\|_\infty$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\alpha,\beta,2} &= \|x^\alpha D^\beta f\|_2 \le \|(1+x^2)^{-1}\|_2 \|(1+x^2)x^\alpha D^\beta f\|_\infty \\
&\le C\|x^\alpha D^\beta f + x^{\alpha+2} D^\beta f\|_\infty \\
&\le C(\|x^\alpha D^\beta f\|_\infty + \|x^{\alpha+2} D^\beta f\|_\infty) \\
&\le C(\|f\|_{\alpha,\beta,\infty} + \|f\|_{\alpha+2,\beta,\infty})
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)\, dt$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathcal{R}} |f(x)|$$

e

$$\|f'\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx$$

Como

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |\int_{-\infty}^{x} f'(t)dt| \\ &\leq \int_{-\infty}^{x} |f'(t)|dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt \end{aligned}$$

Logo

$$|f| \leq \|f'\|_1$$

então

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} &\leq |\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, dt| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dt \\ &= \|f'\|_1 \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f'\|_1 \leq \|(1+x^2)f'\|_2 \|(1+x^2)^{-1}\|_2$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\alpha,\beta,\infty} &= \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty \leq \|(x^\alpha D^\beta f)'\|_1 \\
&\leq \|(1+x^2)(x^\alpha D^\beta f)'\|_2 \|(1+x^2)^{-1}\|_2 \\
&= C\|(1+x^2)(x^\alpha D^\beta f)'\|_2 \\
&= C\|(x^\alpha D^\beta f)' + x^2(x^\alpha D^\beta f)'\|_2 \\
&= C\|\alpha x^{\alpha-1} D^\beta f + x^\alpha D^{\beta+1} f + x^2(\alpha x^{\alpha-1} D^\beta f + x^\alpha D^{\beta+1} f)\|_2 \\
&\leq C\,(\alpha\|x^{\alpha-1} D^\beta f\|_2 + \|x^\alpha D^{\beta+1} f\|_2 \\
&\quad +\alpha\|x^{\alpha+1} D^\beta f\|_2 + \|x^{\alpha+2} D^{\beta+1} f\|_2) \\
&\leq C\left(\alpha\|f\|_{\alpha-1,\beta,2} + \|f\|_{\alpha,\beta+1,2} + \alpha\|f\|_{\alpha+1,\beta,2} + \|f\|_{\alpha+2,\beta+1,2}\right)
\end{aligned}
$$

Portanto pela Proposição 2 item *iii*, do capítulo 1, temos que $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ e $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ são equivalentes .

Proposição 2. *As seminormas* $\{\|.\|_n\}$ *são uma família dirigida equivalente a família de seminormas* $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ *sobre* S.

Demonstração. A família de seminormas $\{\|\cdot\|_n\}$ é uma família dirigida pois dados $m, n \in \mathbf{N}$ temos que:

$$
\|f\|_m + \|f\|_n = \|(N+1)^m f\|_2 + \|(N+1)^n f\|_2 \leq 2\|(N+1)^k f\|_2 \leq 2\|f\|_k
$$

onde $k = \max\{m, n\}$. Para provar a equivalência das normas necessitamos da seguinte desigualdade

$$
\|A_1^\# A_2^\# \ldots A_m^\# f\|_2^2 \leq < f, (N+m)^m f > \tag{2.7}
$$

onde $A^\#$ significa A^+ ou A indiferentemente, $f \in S$.

Usaremos indução sobre m e os resultados do Lema 1. Para $m = 1$ temos que provar que:

$$\|A^{\#} f\|_2^2 \leq < f , (N+1) f >$$

Para $A^{\#} = A$ temos:

$$\begin{aligned}
\|Af\|_2^2 &= < Af , Af > = < f , A^{+} A f > \\
&= < f , N f > \leq < f , N f > + < f , f > \\
&\leq < f , (N+1) f >
\end{aligned}$$

Para $A^{\#} = A^{+}$ temos:

$$\begin{aligned}
\|A^{+} f\|_2^2 &= < A^{+} f , A^{+} f > = < f , A A^{+} f > \\
&= < f , (N+1) f > = < f , N f + f > \\
&= < f , N f > + < f , f > \\
&= < f , (N+1) f >
\end{aligned}$$

Logo temos que

$$\|A^{\#} f\|_2^2 \leq < f , (N+1) f >$$

Suponhamos que a desigualdade 2.7 vale para m. Para $g = A^{\#}_{m+1} f$ temos que

$$\|A_1^{\#} \ldots A_m^{\#} A_{m+1}^{\#} f\|_2^2 = \|A_1^{\#} \ldots A_m^{\#} g\|_2^2 \leq < g , (N+m)^m g >$$

a) No caso em que $g = Af$ e observando a equação 2.3 obtemos

$$\begin{aligned} < g , (N+m)^m g > &= < Af , (N+1)^m Af > \\ &= < f , A^+(N+m)^m Af > \\ &= < f , N(N+(m-1))^m f > \\ &\leq < f , (N+(m+1))^{m+1} f > \end{aligned}$$

Disso resulta

$$\|A_1^\# \dots A_m^\# Af\|_2^2 \leq < f , (N+(m+1))^{m+1} f >$$

b) No caso em que $g = A^+ f$ e observando a igualdade 2.5 obtemos

$$\begin{aligned} < g , (N+m)^m g > &= < A^+ f , (N+m)^m A^+ f > \\ &= < f , A(N+m)^m A^+ f > \\ &= < f , (N+1)(N+(m+1))^m f > \\ &\leq < f , (N+(m+1))(N+(m+1))^m f > \\ &= < f , (N+(m+1))^{m+1} f > \end{aligned}$$

Disso resulta

$$\|A_1^\# \dots A_m^\# A^+ f\|_2^2 \leq < f , (N+(m+1))^{m+1} f >$$

Portanto de a) e b) segue que

$$\|A_1^\# \dots A_{m+1}^\# f\|_2^2 \leq < f , (N+(m+1))^{m+1} f >$$

Para completar a demonstração do Proposição 2 vamos introduzir as notações a seguir:

$$(A^\#)^k \stackrel{\text{def}}{=} A_1^\# \dots A_k^\#$$

onde $A_j^{\#} = A$ ou A^+ para $j = 1 \ldots k$. Como:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{e} \quad A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$$

então,

$$\frac{d}{dx} = \frac{A - A^+}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad x = \frac{A + A^+}{\sqrt{2}}$$

Desenvolvendo $(A \pm A^+)^\alpha$ e usando a nossa notação concluimos que:

$$(A \pm A^+)^\alpha = 2^\alpha (A^{\#})^\alpha$$

Ou seja $(A \pm A^+)^\alpha$ é a soma de 2^α monômios em A e A^+ com coeficientes -1 ou $+1$. Agora,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\alpha,\beta,2} &= \|x^\alpha D^\beta f\|_2 = \left\|\left(\frac{A + A^+}{\sqrt{2}}\right)^\alpha \left(\frac{A - A^+}{\sqrt{2}}\right)^\beta f\right\|_2 \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^{\alpha+\beta}} \|(A + A^+)^\alpha (A - A^+)^\beta f\|_2 \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \|2^{\alpha+\beta} (A^{\#})^{\alpha+\beta} f\|_2 \\
&\leq \frac{2^{\alpha+\beta}}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \|(A^{\#})^{\alpha+\beta} f\|_2 \\
&\leq 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \|(A^{\#})^{\alpha+\beta} f\|_2
\end{aligned}$$

Fazendo $k = \alpha + \beta$ e usando a equação 2.7 temos,

$$
\begin{aligned}
\|(A^{\#})^k f\|_2^2 &\leq \; < f, (N+k)^k f > \\
&= \; < f, ((N+1)+(k-1))^k f > \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-1)^j < f, (N+1)^{k-j} f > \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} 2^k k^k < f, (N+1)^{k-j} f > \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} (2k)^k < f, (N+1)^{2(k-j)} f > \\
&\leq \sum_{j=0}^{k} (2k)^{2k} \|(N+1)^{k-j} f\|_2^2
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\|(A^{\#})^k f\|_2 \leq \sum_{j=0}^{k} (2k)^k \|(N+1)^{k-j} f\|_2
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\alpha,\beta,2} &\leq 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \|(A^{\#})^{\alpha+\beta} f\|_2 \\
&\leq 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} (2(\alpha+\beta))^{\alpha+\beta} \|(N+1)^{\alpha+\beta-j} f\|_2 \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} 2^{\alpha+\beta} (\alpha+\beta)^{\alpha+\beta} \|(N+1)^{\alpha+\beta-j} f\|_2 \\
&= (2^{\frac{3}{2}}(\alpha+\beta))^{\alpha+\beta} \sum_{j=0}^{\alpha+\beta} \|f\|_{\alpha+\beta-j}
\end{aligned}
$$

Como A e A^+ são combinações lineares de x e d/dx temos que

AA^+ é um polinômio em x e d/dx, isto é:

$$\begin{aligned}
AA^+f &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)f \\
&= \frac{1}{2}\left(x+\frac{d}{dx}\right)\left(xf-\frac{df}{dx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2f-x\frac{df}{dx}+\frac{d}{dx}(xf)-\frac{d^2f}{dx^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2f-x\frac{df}{dx}+x\frac{df}{dx}+f-\frac{d^2f}{dx^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+f-\frac{d^2f}{dx^2}\right)
\end{aligned}$$

Daí resulta

$$\begin{aligned}
AA^+ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-x^0D^2+x^2D^0+x^0D^0\right)
\end{aligned}$$

Em vista do resultado anterior o operador $(AA^+)^n$ é um polinômio em x e $\frac{d}{dx}$ e como tal é uma combinação linear de elementos da forma $x^\alpha D^\beta$. Suponhamos que

$$(AA^+)^n = \sum_{i\in I} u_i x^{\alpha_i} D^{\beta_i}$$

onde I é finito e os coeficientes u_i são reais.

Temos então que

$$\begin{aligned}
\|f\|_n &= \|(N+1)^n f\|_2 = \|(AA^+)^n f\|_2 \\
&= \|\sum_{i\in I} u_i x^{\alpha_i} D^{\beta_i} f\| \\
&\le \sum_{i\in I} \|u_i x^{\alpha_i} D^{\beta_i}\|_2 \le \sum_{i\in I} \|f\|_{\alpha_i,\beta_i,2}
\end{aligned}$$

Com isso concluimos a demonstração do Proposição 2.

A seguir provamos que as funções de Hermite constituem um conjunto ortonormal completo para o espaço $L^2(\mathbf{R})$ (Proposição 3).

Seja $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}dx)$ munido do produto interno definido por $< f, g >_{\mathcal{H}} = \int fge^{-x^2}dx$ Seja $\psi_n = x^n$ e considere o conjunto ortonormal $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ obtido de $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ pelo processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt.

Afirmação 3. *Se $\eta \in \mathcal{H}$ e $< x^m, \eta >_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall m$ então $\eta = 0$.*

De fato aplicando a transformada de Fourier a função ηe^{-x^2} temos,

$$\begin{aligned}
(\widehat{\eta e^{-x^2}})(y) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-x^2} e^{-iyx}\, dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} x^n\, dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta e^{-x^2}(-iy)^n x^n}{n!} \right) dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta e^{-x^2}(-iy)^n x^n}{n!}\, dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \eta x^n e^{-x^2}\, dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} < x^n, \eta >_{\mathcal{H}} = 0
\end{aligned}$$

Logo $\eta e^{-x^2} = 0$ e portanto $\eta = 0$.

Lema 2. *O conjunto $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbf{R})$.*

Demonstrào. Como $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ é um conjunto ortonormal obtido de $\psi_n = x^n$ temos que:

$$x^n = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_n H_n.$$

Seja $P = \{H_n \mid n = 0.1, 2, \ldots\}$. Suponhamos que P não seja uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Logo $\exists P' \supset P$, e $P' \neq P$ tal que P' é um conjunto ortonormal ,isto é, $\exists g \in P'$ tal que $g \perp H_n$, $n = 0, \ldots$ e $g \neq 0$. Mas se $g \perp H_n$ então $g \perp x^n$ logo $< g \,.\, x^n > = 0$ e portanto $g = 0$. Contradição. Assim $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$.

Lema 3. *Seja* $\check{\phi}_n = H_n e^{-\frac{x^2}{2}}$. *O conjunto* $\{\check{\phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma base ortonormal para* $L^2(\mathbf{R})$.

Demonstração. Considere o conjunto $\{\check{\phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $\check{\phi}_n \in L^2(\mathbf{R})$. Deste modo obtemos,

$$\begin{aligned}
< \check{\phi}_i \,.\, \check{\phi}_j >_{L^2} &= \int_{\mathbf{R}} \check{\phi}_i \check{\phi}_j \, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} H_i(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_j(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} H_i H_j e^{-x^2} \, dx \\
&= < H_i \,.\, H_j >_{\mathcal{H}} = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

donde vem que $\{\check{\phi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ é um conjunto ortogonal.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\|\phi_n\|^2_{L^2} &= <\phi_n\,,\phi_n>^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbf{R}} \phi_n(x)\phi_n(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbf{R}} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= <H_n\,,H_n>^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}} = \|H_n\|_{\mathcal{H}} = 1
\end{aligned}
$$

Logo $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ é um conjunto ortonormal.

Seja $R = \{\phi_n, \quad n = 0,1,2,\dots\}$. Suponhamos que $\exists\, h \in L^2$ tal que $h \perp \phi_n \quad, n = 0,1,2,\dots \quad, h \neq 0$ então $<h\,,\phi_n>_{L^2} = 0$. Mas,

$$
\begin{aligned}
<h\,,\phi_n>_{L^2} &= \int_{\mathbf{R}} hH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} he^{\frac{x^2}{2}} H_n e^{-x^2}\,dx \\
&= <he^{\frac{x^2}{2}}\,,H_n>_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

Assim $<he^{\frac{x^2}{2}}\,,H_n> = 0$, $he^{\frac{x^2}{2}} \perp H_n, \quad n = 0,1,2,\dots,$ $he^{\frac{x^2}{2}} = 0$ pois H_n é base. Deste modo $h = 0$. Contradição. Logo $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma base ortonormal para L^2.

Provemos agora que as funções $\phi_n = e^{-x^2/2}H_n$ assim definidas são justamente as n-ésimas funções de Hermite.

Lema 4. *O conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde ϕ_n é a n-ésima função de Hermite, é um conjunto ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$.*

Demonstracão. Seja $\phi_n = (n!)^{-1/2}(A^+)^n\phi_0$ a n-ésima função de Hermite. Tem-se:

$$< (A^+)^n\phi_0 , (A^+)^n\phi_0 > = n! \qquad (2.8)$$

Provaremos usando indução sobre n. Para n=1 temos:

$$\begin{aligned} < A^+\phi_0 , A^+\phi_0 > &= < \phi_0 , AA^+\phi_0 > \\ &= < \phi_0 , (1 + A^+A)\phi_0 > \\ &= < \phi_0 , \phi_0 > + < \phi_0 , A^+A\phi_0 > \\ &= 1 \end{aligned}$$

Suponhamos que a igualdade se verifica para n.

$$\begin{aligned} < (A^+)^{n+1}\phi_0 , (A^+)^{n+1}\phi_0 > &= < (A^+)^n\phi_0 , A(A^+)^{n+1}\phi_0 > \\ &= < (A^+)^n\phi_0 , (n+1)(A^+)^n\phi_0 + (A^+)^{n+1}A\phi_0 > \\ &= < (A^+)^n\phi_0 , (n+1)(A^+)^n\phi_0 > \\ &= (n+1)< (A^+)^n\phi_0 , (A^+)^n\phi_0 > \\ &= (n+1)n! = (n+1)! \end{aligned}$$

Logo, utilizado o resultado acima temos,

$$\begin{aligned} < \phi_n , \phi_n > &= < (n!)^{-\frac{1}{2}}(A^+)^n\phi_0 , (n!)^{-\frac{1}{2}}(A^+)^n\phi_0 > \\ &= (n!)^{-1}< (A^+)^n\phi_0 , (A^+)^n\phi_0 > \\ &= (n!)^{-1}(n!) = 1 \end{aligned}$$

Suponhamos que $m \neq n$, se $k \leq m$ e $k \leq n$. Temos assim que:

$$< (A^+)^n \phi_0 \, , (A^+)^m \phi_0 > = m(m-1)\ldots(m-(k-1)) < (A^+)^{n-k} \phi_0 \, , (A^+)^{m-k} \phi_0 >.$$

Provaremos usando indução sobre k. Para $k = 1$ temos,

$$\begin{aligned}
< (A^+)^n \phi_0 \, , (A^+)^m \phi_0 > &= < (A^+)^{n-1} \phi_0 \, , A(A^+)^m \phi_0 > \\
&= < (A^+)^{n-1} \phi_0, m(A^+)^{m-1} \phi_0 \\
&\quad + (A^+)^m A\phi_0 > \\
&= m < (A^+)^{n-1} \phi_0 \, , (A^+)^{m-1} >
\end{aligned}$$

Suponhamos que a igualdade se verifica para $k - 1$ e provemos que ela se verifica para k.

$$\begin{aligned}
< (A^+)^n \, , (A^+)^m \phi_0 > &= m(m-1)\ldots(m-(k-2)). \\
&\quad < (A^+)^{n-(k-1)} \phi_0 \, , (A^+)^{m-(k-1)} \phi_0 > \\
&= m(m-1)\ldots(m-(k-2)). \\
&\quad < (A^+)^{n-(k-1)-1} \phi_0 \, , A(A^+)^{m-(k-1)} \phi_0 > \\
&= m(m-1)\ldots(m-(k-2)). \\
&\quad < (A^+)^{n-k} \phi_0, (m-(k-1))(A^+)^{m-(k-1)-1} \phi_0 \\
&\quad + (A^+)^{m-(k-1)} A\phi_0 > \\
&= m(m-1)\ldots(m-(k-2)). \\
&\quad < (A^+)^{n-k} \phi_0 \, , (m-(k-1))(A^+)^{m-k} \phi_0 > \\
&= m(m-1)\ldots(m-(k-2))(m-(k-1)). \\
&\quad < (A^+)^{n-k} \phi_0 \, , (A^+)^{m-k} \phi_0 >
\end{aligned}$$

Se $m > n$ fazemos $k = n$, assim:

$$
\begin{aligned}
< (A^+)^n\phi_0 , (A^+)^m\phi_0 > &= m(m-1)\dots(m-(n-1))< \phi_0 , (A^+)^{m-n}\phi_0 > \\
&= m(m-1)\dots(m-(n-1))< A\phi_0 , (A^+)^{m-n-1}\phi_0 > \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Se $m < n$ fazemos $k = m$, assim,

$$
\begin{aligned}
< (A^+)^n\varphi_0 , (A^+)^m\phi_0 > &= m!< (A^+)^{n-m}\phi_0 , \phi_0 > \\
&= m!< (A^+)^{n-m-1}\phi_0 , A\phi_0 > \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto se $m \neq n$ temos,

$$< (A^+)^n\phi_0 , (A^+)^m\phi_0 > = 0$$

Assim,

$$< \phi_n , \phi_m > = 0 \quad \text{se} \quad m \neq n$$

Logo $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ é um conjunto ortonormal.

Proposição 3. *O conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, onde ϕ_n é a n-ésima função de Hermite, é uma base ortonormal para L^2.*

Demonstraçào Seja $\breve{\phi}_n = \varphi_n e^{x^2/2}$ deste modo $\breve{\phi}_n$ é um polinômio de grau n. Assim $[\breve{\phi}_0, \dots, \breve{\phi}_k] = [1, x, \dots, x^k] = [H_0, \dots, H_k]$, isto é, o espaço de polinômios gerado pelos conjuntos $\{\breve{\phi}_j\}_{j=0}^k$, $\{x^j\}_{j=0}^k$, e $\{H_j\}_{j=0}^k$ é o mesmo. Assim,

$$\breve{\phi}_k = \alpha_0 H_0 + \alpha_1 H_1 + \dots + \alpha_k H_k.$$

Além disso temos:

$$< H_m \,, \breve{\phi}_k > = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j < H_m \,, H_j > = 0, \qquad m > k.$$

Também temos que:

$$H_l = \beta_0 \breve{\phi}_0 + \beta_1 \breve{\phi}_1 + \ldots + \beta_n \breve{\phi}_l$$

e assim,

$$< \breve{\phi}_m \,, H_l > = \sum_{j=0}^{l} \beta_j < \breve{\phi}_m \,, \breve{\phi}_j > = 0.$$

Portanto se $m \neq n$ temos $< \breve{\phi}_m \,, H_n > = 0$ e sendo $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma base ortonormal temos que:

$$\begin{aligned} \breve{\phi}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} < \breve{\phi}_m \,, H_k > H_k \\ &= < \breve{\phi}_n \,, H_m > H_m \\ &= \lambda_m H_m \end{aligned}$$

Mas, $< \breve{\phi}_m \,, \breve{\phi}_m > = 1$ e assim $\lambda_m^2 = 1$ logo $\lambda_m = \pm 1$ e $\breve{\phi}_m = \pm H_m$. Mas o coeficiente de maior grau de $\breve{\phi}_m$ e de H_m são positivos, isto implica que $\breve{\phi}_m = H_m$. Portanto:

$$\begin{aligned} \phi_m e^{\frac{x^2}{2}} &= H_m \\ \phi_m &= H_m e^{-\frac{x^2}{2}}. \\ \phi_m &= \dot{\phi}_m \end{aligned}$$

Logo $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma base ortonormal para L^2 onde as ϕ_n são as n-ésimas funções de Hermite.

Capítulo 3

A N-representação para S e S'

3.1 Teoremas de N-representação para S e S' e Aplicações

Teorema 1. (A N-representação para S)

Seja s_k o conjunto das multiseqüências $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I_+^k}$ com a propriedade:

$$\sup_{\alpha \in I_+^k} |a_\alpha||\alpha|^m < \infty$$

para cada inteiro positivo m. Topologize s_k com as seminormas,

$$\|\{a_\alpha\}\|_\beta^2 = \sum_\alpha (\alpha + 1)^{2\beta} |a_\alpha|^2$$

onde $\beta \in I_+^k$ e $(\alpha + 1)^{2\beta} = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)^{2\beta_i}$.

Seja $f \in S(\mathbf{R^k})$. Então a seqüência $\{a_\alpha\}$, $a_\alpha = < \phi_\alpha, f >$ com $\phi(x) = \prod_{i=1}^k \phi_{\alpha_i}(x_i)$ está em s_k e a aplicação $f \rightarrow \{a_\alpha\}$ é um isomorfismo topológico.

A expansão de Hermite $f = \sum_\alpha a_\alpha \phi_\alpha$ converge em $S(\mathbf{R^k})$. Os $\{a_\alpha\}$ são chamados os coeficientes de Hermite.

Demonstração. Vamos fazer os detalhes para o caso $k = 1$. Como sabemos,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\phi_n = (2n+1)\phi_n$$

e

$$AA^+ = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1\right)$$

Assim,

$$\begin{aligned}(2AA^+ - 1)\phi_n &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\phi_n \\ &= (2n+1)\phi_n\end{aligned}$$

daí decorrem as seguintes identidades

$$\begin{aligned}(2(N+1)-1)\phi_n &= (2n+1)\phi_n \\ (2N+1)\phi_n &= (2n+1)\phi_n \\ N\phi_n &= n\phi_n\end{aligned}$$

Suponha $f \in S$ e considere a expansão L^2-convergente

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n$$

onde

$$a_n = < \phi_n , f > = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi_n(x)} f(x)\, dx$$

Como $N^m \in S$ temos $N^m \in L^2(\mathbf{R})$. Mas,

$$N^m f = N^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n N^m \phi_n .$$

Assim

$$
\begin{aligned}
< N^m f , N^m f > &= < \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^m \phi_n , \sum_{k=0}^{\infty} a_k k^m \phi_k > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \overline{a_k} < \phi_n , \phi_k > n^m k^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_n} n^m n^m < \phi_n , \phi_n > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 n^{2m}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^m \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 n^{2m} < \infty
$$

Logo $\sup_n |a_n| n^m < \infty$ e daí concluimos que $a_n \in s_1$

Defina agora a aplicação:

$$
u : S \to s_1
$$

$$
u(f) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}
$$

onde $a_n = < \phi_n , f >$.

Provemos que esta aplicação é um isomorfismo topológico.

$$
\begin{aligned}
\|f\|_m^2 &= \|(N+1)^m f\|_2^2 \\
&= < (N+1)^m f , (N+1)^m f > \\
&= < (N+1)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n , (N+1)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k >
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < (N+1)^m \phi_n \, , (N+1)^m \phi_n > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < (n+1)^m \phi_n \, , (n+1)^m \phi_n > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{2m} < \phi_n \, , \phi_n > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{2m} \\
&= \|\{a_n\}\|_m^2
\end{aligned}
$$

Como $\|.\|_m$ são normas sobre S temos que se $f \neq g$ então $f - g \neq 0$ e daí $\|f - g\|_m > 0$. Seja $u(f) = a_n$ e $u(g) = a_k$ então temos que $\|a_n - a_k\|_m > 0$ e assim $a_n - a_k \neq 0$ isto é $u(f) \neq u(g)$. E com isso concluimos que u é injetiva.

Agora seja $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in s_1$ e seja $f_l = \sum_{n=0}^{l} a_n \phi_n$

$$
\begin{aligned}
\|f_l - f_r\|_m^2 &= \|(N+1)^m (f_l - f_r)\|_2^2 \\
&= < (N+1)^m (f_l - f_r) \, , (N+1)^m (f_l - f_r) > \\
&= < (N+1)^m \left(\sum_{n=0}^{l} a_n \phi_n - \sum_{k=0}^{r} a_k \phi_k \right) . \\
&\qquad (N+1)^m \left(\sum_{n=0}^{l} a_n \phi_n - \sum_{k=0}^{r} a_k \phi_k \right) > \\
&= < (N+1)^m \sum_{n=l+1}^{r} a_n \phi_n \, , (N+1)^m \sum_{n=l+1}^{r} a_n \phi_n > \\
&= \sum_{n=l+1}^{r} |a_n|^2 < (n+1)^m \phi_n \, , (n+1)^m \phi_n >
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=l+1}^{r} |a_n|^2(n+1)^{2m}$$

Concluimos daí que

$$\|f_l - f_r\|_m^2 \longrightarrow 0$$

quando $l, r \longrightarrow \infty$ (pois $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2(n+1)^{2m}$ é convergente). Assim $(f_l)_{l=0}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em cada $\|.\|_m$ e por conseguinte é de Cauchy em S (Proposição 1 e Proposição 2). Como S é completo $\exists f \in S$ tal que $f_l \longrightarrow f$. Se $f_l \longrightarrow f$ em S então $\|f_l - f\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$ para todo $\alpha, \beta \in I_+$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f_l - f\|_2 \\ &\leq C\|(1+x^2)(f_l - f)\|_\infty \\ &\leq C(\|f_l - f\|_\infty + \|x^2(f_l - f)\|_\infty) \\ &\leq C(\|f_l - f\|_{0.0} + \|f_l - f\|_{2,0}) \end{aligned}$$

Mas $\|f_l - f\|_{0,0} \longrightarrow 0$ e $\|f_l - f\|_{2.0} \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$. Logo $\|f_l - f\|_2 \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$. Deste modo $f_l \longrightarrow f$ em L^2 e portanto $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n$ onde $a_n = <\phi_n, f>$.

Deste modo dado $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in S$ existe $f \in S$ tal que $u(f) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ onde $a_n = <\phi_n, f>$ e com isso u é sobrejetiva.

Sejam $f = \sum_n a_n(f)\phi_n$, $g = \sum_n a_n(g)\phi_n$ em S onde $a_n(f) = <\phi_n . f>$, $a_n(g) = <\phi_n ; g>$ e seja $\lambda \in \mathbf{R}$. Então,

$$\lambda f + g = \sum_n (\lambda a_n(f) + a_n(g))\phi_n$$

e

$$\begin{aligned} u(\lambda f + g) &= \{\lambda a_n(f) + a_n(g)\}_{n=0}^{\infty} \\ &= \lambda\{a_n(f)\}_{n=0}^{\infty} + \{a_n(g)\}_{n=0}^{\infty} \\ &= \lambda u(f) + u(g) \end{aligned}$$

Segue dai que u é linear. Além disso u^{-1} também é linear e como $\|f\|_m = \|\{a_n\}\|_m$ pelo Teorema 2, Capítulo 1, concluimos que u e u^{-1} são contínuas e por conseguinte u é um isomorfismo topológico de S em s_1.

Teorema 2. *(O Teorema da N-representação para S')*

Seja $T \in S'(\mathbf{R^k})$. Seja $b_\alpha = T(\varphi_\alpha)$ para cada $\alpha \in I_+^k$. Então para algum β, $|b_\alpha| \leq C(\alpha+1)^\beta$ para todo α.

Reciprocamente, se $|b_\alpha| \leq C(\alpha+1)^\beta$ para todo α, existe um única $T \in S'$ com $T(\phi_\alpha) = b_\alpha$. Se $T \in S'$ e $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ são seus coeficientes de Hermite então $\sum_\alpha b_\alpha\phi_\alpha$ converge na $\sigma(S', S)$-topologia para T.

Demonstração. Consideremos o caso k=1. Seja $T \in S'$. Como $\{\|.\|_m\}$ é uma família dirigida de seminormas em S e T é contínuo pelo Teorema 2 do capítulo 2, existem $C > 0$ e inteiro positivo m tais que $|T(\phi)| \leq C\|\phi\|_m$ $\forall \phi \in S$ Em particular $|T(\phi)| \leq C\|\phi\|_m$. $\forall n \in I_+$ Agora,

$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_m &= \|(N+1)^m\phi_n\|_2 \\ &= \|(n+1)^m\phi_n\|_2 \\ &= (n+1)^m \end{aligned}$$

assim

$$|T(\phi_n)| \leq C\|\phi_n\|_m$$

logo

$$|b_n| \leq C(n+1)^m$$

Reciprocamente, suponhamos que $|b_n| \leq C(n+1)^m$. Para $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in s$ defina,

$$B(\{a_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |b_n a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n a_n| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} C(n+1)^m |a_n| \\
&= C\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(n+1)^m
\end{aligned}$$

fazendo $k = n + 1$ temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n a_n| \leq C\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k^m \leq C\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 k^{2m} < \infty.$$

Logo esta defiunição faz sentido. Usando a desigualdade de Hölder e a identidade

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

obtemos o seguinte,

$$
\begin{aligned}
|B(\{a_n\})| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\,|a_n| \\
&\leq C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^m |a_n| \\
&\leq C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^m \frac{(n+1)}{(n+1)}|a_n| \\
&\leq C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{m+1}|a_n|\frac{1}{(n+1)} \\
&\leq C\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2m+2}|a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&\qquad \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\{a_n\}\|_{m+1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\Big(\frac{\pi^2}{6}\|\{a_m\}\|_{m+1}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{\pi^2}{6}\|\{a_n\}\|_{m+1}
\end{aligned}
$$

Assim, pelo Teorema 2, Capítulo 1, B define um funcional linear contínuo sobre s. Defina $T : S \to \mathbf{C}$ por $T = B \circ u$ onde u é a N-representação de S. Logo T é contínuo e assim $T \in S'$. Se $f \in S$, com $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n$ segue que,

$$
\begin{aligned}
T(f) &= B(u(f)) \\
&= B(\{a_n\})
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

isto é,

$$T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Como cada $\phi_n \in S$ temos que:

$$T(\phi_n) = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k\right)$$

onde $a_k = \delta_{k,n}$. Logo.

$$T(\phi_n) = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = b_n.$$

Se $T \in S'$ e $b_n = T(\phi_n)$ são seus coeficientes de Hermite então $t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \phi_n$ é a sua expansão de Hermite . Provemos que $m_t = T$, de fato:

$$\begin{aligned}
m_t(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \phi(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(x)\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\phi_k(x)\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \\
&= T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad T(\varphi)$$

Assim $m_t = T$ e portanto $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\phi_n$ converge para $T \in S'$na $\sigma(S', S)$ topologia.

Corolário 1. *S é denso em S' na $\sigma(S', S)$ topologia.*

Demonstração. Dado $T \in S'$ temos, pelo Teorema 2, que $\sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha\phi_\alpha$ converge para T na $\sigma(S', S)$ topologia onde $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ e $\sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha\phi_\alpha \in S$.

Corolário 2. *S é separável. S' é separável na $\sigma(S', S)$ topologia.*

Demonstração. Em primeiro lugar vamos demonstrar que S é separável. Seja,

$$\mathcal{A} = \{f_{k,l} \mid f_{k,l} = \sum_{n=0}^{l} b_{k,n}\phi_n, \quad \text{com } b_{k,n} \in \mathbf{Q} \text{ e } k \in \mathbf{N}\}$$

Logo $\mathcal{A}$ é enumerável pois $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{N}$ são enumeráveis. Assim $\mathcal{A}$ é uma coleção enumerável de funções pertencentes a S. Provemos que $\mathcal{A}$ é denso em S. De fato, dado $f \in S$ temos que $\sum_{n=0}^{l} a_n\phi_n \longrightarrow f$ quando $n \longrightarrow \infty$. Seja $f_l = \sum_{n=0}^{l} a_n\phi_n$, desta maneira $\|f_l - f\|_m \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$ para cada m, isto é, dado $\epsilon > 0$ $\exists\, l_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\|f_l - f\|_m < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall l \geq l_0$$

Dado $f_l = \sum_{n=0}^{l} a_n\phi_n$, como $\mathbf{Q}$ é denso em $\mathbf{R}$, para cada $a_n \in \mathbf{R}$, existe uma seqüência $\{b_{k,n}\}_{k=1,...} \subset \mathbf{Q}$ tal que $b_{k,n} \longrightarrow a_n$

quando $k \longrightarrow \infty$, logo:

$$\begin{aligned} f_l &= \sum_{n=0}^{l} \lim_{k\to\infty} b_{k,n}\phi_n \\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{l} b_{k,n}\phi_n\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} f_{k,l} \end{aligned}$$

e portanto $\|f_{k,l} - f_l\|_m \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$. Assim dado $\epsilon > 0$, $\exists\, k_0 \in \mathbf{N}$ tal que,

$$\|f_{k,l} - f_l\|_m < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k > k_0$$

deste modo,

$$\begin{aligned} \|f_{k,l_0} - f\|_m &\leq \|f_{k,l_0} - f_{l_0}\|_m + \|f_{l_0} - f\|_m \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall\, k > k_0 \end{aligned}$$

Portanto $f_{k,l_0} \longrightarrow f$ quando $k \longrightarrow \infty$ e $f_{k,l_0} \in \mathcal{A}$.Com isso provamos que $\mathcal{A}$ é denso em S, isto é, S é separável.

Provemos agora que S' é separável. Se $\phi \in S$ e $T \in S'$ então $\phi = \sum a_n\phi_n$ e $T(\phi) = \sum a_n b_n$.

Seja $\alpha = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|$ então $\alpha < \infty$. Já que $l/2^l \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$ dado $\epsilon \in 0$, $\exists\, l_1$ tal que

$$\frac{l}{2^l} < \frac{\epsilon}{2\alpha} \qquad \forall\, l > l_1.$$

Como $\sum a_n b_n$ é convergente temos que $\sum_{n>l} a_n b_n \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$,assim $\exists\, l_2 \in \mathbf{N}$ tal que,

$$|\sum_{n>l} a_n b_n| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\, l > l_2$$

Seja agora $l_0 = \max\{l_1, l_2\}$. Para cada l seja $q_{n,l} \in \mathbf{Q}$ tal que

$$|b_n - q_{n,l}| < \frac{1}{2^{n+l}}$$

e seja também,

$$T_l = \sum_{n=0}^{l} q_{n,l}\phi_n$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|T_l(\phi) - T(\phi)| &= |\sum_{n=0}^{l} a_n q_{n,l} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n| \\
&\leq |\sum_{n=0}^{l} |a_n|\, |q_{n,l} - b_n|| + |\sum_{n>l} a_n b_n| \\
&\leq \sum_{n=0}^{l} \alpha\frac{1}{2^l} + |\sum_{n>l} a_n b_n| \\
&\leq l\alpha\frac{1}{2^l} + |\sum_{n>l} a_n b_n| \\
&< \alpha\frac{\epsilon}{2\alpha} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \forall l > l_0
\end{aligned}$$

Com isso concluimos que $T_l(\phi) \longrightarrow T(\phi)$ quando $l \longrightarrow \infty$. Isto prova que

$$\mathcal{D} = \{T_l \mid T_l = \sum_{n=0}^{l} q_{n,l}\phi_n, \quad l \in \mathbf{N}, \quad q_{n,l} \in \mathbf{Q}\}$$

é denso em S' sendo $\mathcal{D}$ é enumerável, isto é, que S' é separável.

Corolário 3. *Para todo l, $S(\mathbf{R}^l)$ e S são isomorfos como espaços vetoriais topológicos. Assim para quaisquer s e l, $S(\mathbf{R}^l)$ e $S(\mathbf{R}^s)$ são isomorfos.*

Demonstração. Nós faremos a demonstração para o caso $l = 2$. Para o caso $l > 2$ a demonstração é similar. Sendo $S(\mathbf{R}^2)$ isomorfo a s_2 para provarmos que $S(\mathbf{R}^2)$ e S são isomorfos basta apenas provarmos que s_1 e s_2 são isomorfos.

Considere a aplicação:

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbf{N} \times \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{N} \\ & & (r, s) & \mapsto & u(r, s) = \frac{1}{2}(r+s)(r+s+1)+s \end{array}$$

Seja F a aplicação:

$$\begin{array}{rcccl} F & : & s_1 & \longrightarrow & s_2 \\ & & a & \mapsto & (F(a))_{r,s} = a_{u(r,s)} \end{array}$$

onde $a = \{a_n\}_{n \in I_+}$.

A partir da definição obtemos as seguintes relações,

$$\begin{array}{rcl} r & \leq & u(r, s) \\ s & \leq & u(r, s) \\ u(r, s) + 1 & \leq & (r+1)^2(s+1)^2 \end{array}$$

E destas relações segue que:

$$\begin{array}{rcl} \|a_n\|_m^2 & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{2m} |a_{u(r,s)}|^2 \\ & = & \displaystyle\sum_{u(r,s)=1}^{\infty} (u(r, s)+1)^{2m} |a_{u(r,s)}|^2 \\ & \leq & \displaystyle\sum_{r,s=1}^{\infty} (r+1)^{2k}(s+1)^{2k} |(F(a))_{r,s}|^2 \\ & \leq & \|(F(a))_{r,s}\|_{k_1,k_2} \end{array}$$

onde $k_1 = k_2 = k = 2m$. E também segue que:

$$
\begin{aligned}
\|(F(a))_{r,s}\|_{m_1,m_2} &= \sum_{r,s=1}^{\infty}(r+1)^{2m_1}(s+1)^(s+1)^{2m_2}|F(a)_{r,s}|^2 \\
&\leq \sum_{r,s=1}^{\infty}(u(r,s)+1)^{2m_1}(u(r,s)+1)^{2m_2}|a_{u(r,s)}|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{2m_1}(n+1)^{2m_2}|a_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{2(2m_1m_2)}|a_n|^2 \\
&\leq \|a_n\|_j^2
\end{aligned}
$$

onde $j = 2m_1m_2$.

Portanto pelo Teorema 2, capítulo 1, temos que F é bicontínua e assim s_1 e s_2 são isomorfos.

Corolário 4. *(O Teorema da Regularidade para Distribuições) Seja $T \in S'(\mathbf{R^k})$. Então $T = D^{\beta}g$ para alguma função contínua polinomialmente limitada g e algum $\beta \in I_+^k$,isto é,*

$$T(\varphi) = \int (-1)^{|\beta|}g(x)(D^{\beta}\varphi(x)\,d^kx$$

para todo $\varphi \in S$.

Demonstração. Outra vez nós somente vamos considerar o caso $k = 1$. Desde que $\|f\|_{\infty} \leq C\|(1+x^2)f'\|_2$ nós temos que:

$$\|\phi_n\|_{\infty} \leq C\|(1+x^2)\frac{d}{dx}\phi_n\|_2$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
V &\stackrel{\text{def}}{=} (1+x^2)\frac{d}{dx} \\
&= \left[1+\left(\frac{A+A^+}{2^{1/2}}\right)^2\right]\frac{A-A^+}{2^{1/2}} \\
&= \frac{A-A^+}{2^{1/2}}+\frac{(A+A^+)^2}{2^{3/2}}(A-A^+) \\
&= \frac{A-A^+}{2^{1/2}}+\frac{A^2+2A^{\#}A^{\#}+(A^+)^2)(A-A^+)}{2^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2^{3/2}}(2A-2A^++A^3+2A^{\#}A^{\#}A \\
&\quad +(A^+)^2A-A^2A^+-2A^{\#}A^{\#}A^+-(A^+)^3)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|\phi_n\|_\infty &\leq D\|V\phi_n\|_2 \leq D\|V\phi_n\|_2 \\
&\leq D(2\|A\phi_n\|_2+2\|A^+\phi_n\|_2+\|A^3\phi_n\|_2 \\
&\quad +2\|A^{\#}A^{\#}A^{\#}\phi_n\|_2+\|(A^+)^2A\phi_n\|_2 \\
&\quad +\|A^2A^+\phi_n\|_2+2\|A^{\#}A^{\#}A^{\#}\phi_n\|_2+\|A^3\phi_n\|_2) \\
&\leq D(4\|A^{\#}\varphi_n\|_2+8\|A^{\#}A^{\#}A^{\#}\phi_n\|_2) \\
&\leq 4D\|A^{\#}\phi_n\|_2+8D\|A^{\#}A^{\#}A^{\#}\phi_n\|_2
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade 2.7 e o Lema 4, capítulo 2, obtemos.

$$
\begin{aligned}
\|A^{\#}\phi_n\|_2^2 &\leq \langle \phi_n,(N+1)\phi_n\rangle \\
&= \langle \phi_n,(n+1)\phi_n\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (n+1)< \phi_n\,,\phi_n > = n+1 \\
\|A^{\#}\phi_n\|_2 &\leq (n+1)^{1/2} \leq (n+1)^{3/2}
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
\|A^{\#}A^{\#}A^{\#}\phi_n\|_2^2 &\leq (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+1)^2 2 + (n+1)2^2 + 2^3 \\
&\leq (n+1)^3 + 2(n+1)^3 + 2^2(n+1)^3 + 2^3(n+1)^3 \\
&\leq 15(n+1)^3 \\
\|A^{\#}A^{\#}A^{\#}\phi_n\|_2 &\leq 15^{1/2}(n+1)^{3/2}
\end{aligned}
$$

A partir destes resultados obtemos a seginte desigualdade,

$$
\begin{aligned}
\|\phi_n\|_\infty &\leq 4D(n+1)^{3/2} + 8D15^{1/2}(n+1)^{3/2} \\
&\leq D'(n+1)^{3/2}
\end{aligned}
$$

Seja $T \in S'$ e seja $\{b_n\}$ seus coeficientes de Hermite, então $|b_n| \leq E(n+1)^m$ para algum m. Seja $a_n = (n+1)^{-m-3}b_n$. então:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,\|\phi_n\|_\infty &\leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-m-3}|b_n|\,\|\phi_n\|_\infty \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-m-3}E(n+1)^m C'(n+1)^{3/2} \\
&\leq EC'\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-3/2} < \infty
\end{aligned}
$$

Assim $\sum a_n\phi_n$ converge uniformemente para alguma função contínua e limitada F sobre $\mathbf{R}$. F tem coeficientes de Hermite (como elemento de S'), $\{a_n\}$. Estendendo os operadores A^+, A, $N = \frac{1}{2}(-d^2/dx^2 + x^2 - 1)$ para S' temos que:

$$T = (N+1)^{m+3}F = \frac{1}{2^{m+3}}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right)^{m+3} F$$

$$T(\varphi) = \frac{1}{2^{m+3}}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right)^{m+3} F(\varphi)$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d^2}{dx^2} + (1+x^2) \right)^n F(\varphi) &= \int \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} + (1+x^2) \right)^n F \right](x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} \right)^n F + \sum_k \alpha_k \frac{d^k}{dx^k} F \right](x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int (-1)^n \left[\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \right) F \right](x)\varphi(x)\,dx \\
&\quad + \sum_k \int \alpha_k(x) \left(\frac{d^k}{dx^k} F \right)(x)\varphi(x)\,dx \\
&= (-1)^n \int \left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} F \right)(x)\varphi(x)\,dx \\
&\quad + \sum_k \int \alpha_k(x) \left(\frac{d^k}{dx^k} F \right)(x)\varphi(x)\,dx \\
&= (-1)^n(-1)^{2n} \int F(x) \left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \varphi \right)(x)\,dx \\
&\quad + \sum_k (-1)^k \int (\alpha_k F)(x) \left(\frac{d^k}{dx^k} \varphi \right)(x)\,dx
\end{aligned}$$

Seja $g_k = I^{2n-k}(\alpha F)$ onde I é o operador de integraçào,

$$(Ih)(x) = \int_0^x h(y)\,dy$$

então integrando por partes $2n-k$ vezes a função $g_k(x)(d^{2n}/dx^{2n}\varphi)(x)$ obtemos o seguinte:

$$(-1)^k \int (\alpha_k F)(x)\left(\frac{d^k}{dx^k}\varphi\right)(x)\,dx = \int g_k(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\,dx$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d^2}{dx^2}+(1+x^2)\right)^n F(\varphi) &= (-1)^n \int F(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\,dx \\
&\quad \sum_k \int g_k(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\,dx \\
&= \int \left[(-1)^n F(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\right. \\
&\quad \left.+\sum_k g_k(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\right]\,dx \\
&= \int \left[(-1)^n F(x)+\sum_k g_k(x)\right]\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\,dx
\end{aligned}$$

Seja

$$G(x) = (-1)^n F(x) + \sum_k g_k(x)$$

assim.

$$\begin{aligned}
\left[\left(-\frac{d^2}{dx^2}+1+x^2\right)^n F\right](x) &= \int G(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\,dx \\
&= (-1)^{2n}\int G(x)\left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\varphi\right)(x)\,dx \\
&= \int (D^{2n}G)(x)\varphi(x)\,dx \\
&= (D^{2n}G)(\varphi)
\end{aligned}$$

Logo

$$T(\varphi) = \frac{1}{2^{m+3}}\left(D^{2(m+3)}G\right)(\varphi)$$

Seja $g = \frac{1}{2^{m+3}}G$ e $\beta = 2(m+3)$. Portanto $T(\varphi) = (D^{\beta}g)(\varphi)$, isto é, $T = D^{\beta}g$.

Corolário 4. *(Teorema Nuclear)*

Seja B(f,g) um funcional bilinear contínuo separadamente sobre $S(\mathbf{R^n}) \times S(\mathbf{R^m})$. Então existe uma única distribuição temperada $T \in S'(\mathbf{R^{n+m}})$ com $B(f,g) = T(f \odot g)$ onde

$$(f \odot g)(x_1, \_\_, x_{n+m}) = f(x_1, \_\_, x_n)g(x_{n+1}, \_\_, x_{n+m}).$$

Demonstração. Em decorrência do Teorema 6 e do corolário do Teorema 5 (Capítulo 1) vemos que a continuidade separada implica na continuidade . Em vista disso daremos a demonstração para o caso em que $B(f,g)$ é contínuo.

Sendo B contínuo,$|B(f,g)| \leq C\|f\|_r\|g\|_s$ para algum $r \in I_+^n$ e $s \in I_+^m$. Então,

$$\begin{aligned} |B(\phi_\alpha, \phi_\beta)| &\leq C\|\phi_\alpha\|_r\,\|\phi_\beta\|_s \\ &= C(\alpha+1)^r(\beta+1)^s \\ &= C[<\alpha,\beta> +1]^{<r,s>} \end{aligned}$$

onde

$$<\alpha,\beta>=<\alpha_1, \_\_, \alpha_n, \beta_1, \_\_, \beta_m> \in I_+^{n+m}.$$

Seja $b_{<\alpha,\beta>} \stackrel{\text{def}}{=} B(\phi_\alpha, \phi_\beta)$, logo

$$|b_{<\alpha,\beta>}| \leq C[<\alpha,\beta> +1]^{<r,s>}$$

e portanto existe um $T \in S'(\mathbf{R}^{n+m})$ tal que

$$T(\phi_{<\alpha,\beta>}) = T(\phi_\alpha \otimes \phi_\beta) = b_{<\alpha,\beta>}$$

Seja $f = \sum a_\alpha \phi_\alpha$ e $g = \sum c_\beta \phi_\beta$. desde que estas expansões convergem em S, temos que

$$\begin{aligned}
T(f \otimes g) &= T\Big(\sum_\alpha a_\alpha \phi_\alpha \otimes \sum_\beta c_\beta \phi_\beta\Big) \\
&= T\Big(\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha c_\beta \phi_\alpha \otimes \phi_\beta\Big) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha c_\beta T(\phi_\alpha \otimes \phi_\beta) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} b_{<\alpha,\beta>} \\
&= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha c_\beta B(\phi_\alpha, \phi_\beta) \\
&= B\Big(\sum_\alpha a_\alpha \phi_\alpha, \sum_\beta c_\beta \phi_\beta\Big) \\
&= B(f, g)
\end{aligned}$$

3.2 Aspectos da N-representação

No capítulo anterior vimos como determinar os coeficientes de Hermite de funções pertencentes a S e S'. Neste capítulo veremos como se comportam algumas operações simples de S e S' quando levadas para os espaços de sequências correspondentes, mais explicitamente vamos determinar os coeficientes de Hermite de algumas funções resultantes de operações simples efetuadas sobre elementos de S (respectivamente S'). Estes coeficientes serão dados em função dos coeficientes das funções iniciais nas quais efetuamos alguma operação.

Derivada

Vamos agora determinar os coeficientes de Hermite para a derivada de uma função $f \in S$. Se $f \in S$ temos $\frac{df}{dx} \in S$. Vimos no capítulo anterior que $\phi_{n+1} = (n+1)^{-\frac{1}{2}} A^+ \phi_n$ assim $A^+\phi_n = (n+1)^{\frac{1}{2}}\phi_{n+1}$ Analogamente para $n \geq 1$ temos $A\phi_n = n^{\frac{1}{2}}\phi_{n-1}$. Com isso obtemos,

$$\begin{aligned}
\phi_n' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A - A^+)\phi_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(n^{\frac{1}{2}}\phi_{n-1} - (n+1)^{\frac{1}{2}}\phi_{n+1}) \\
&= \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \phi_{n-1} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \phi_{n+1}
\end{aligned}$$

Denotemos por d_n os coeficientes de Hermite para a função $\dfrac{df}{dx}$. Logo

$$d_n = < \phi_n , \frac{df}{dx} > = \int \phi_n(x)\frac{df}{dx}(x)dx$$

Integrando por partes temos.

$$\begin{aligned}
d_n &= \phi_n(x)f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int f(x)\phi_n'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \phi_{n-1}(x) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \phi_{n+1}(x)\right] dx \\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int \phi_{n+1} f - \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int \phi_{n-1} f \\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a_{n+1} - \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a_{n-1}
\end{aligned}$$

onde os a_n são os coeficientes de Hermite da função f.

Para n=0 temos

$$d_0 = < \phi_0 , \frac{df}{dx} > = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x) \frac{df}{dx}(x) dx$$

Mas $\phi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ e consequentemente $\phi_0' = -x\phi_0$. Por outro lado $A^+\phi_0 = \phi_1$ e da definição de A^+ segue que $x\phi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_1$. Integrando por partess temos

$$\begin{aligned} d_0 &= \phi_0(x)f(x)|_{-\infty}^{\infty} + \int f(x)x\phi_0(x)dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int f\phi_1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 \end{aligned}$$

Seja μ a medida definida por:

$$\mu : P(\mathbf{N}) \to \mathbf{R}$$

onde $\mu(E) = \infty$ se $E \subset \mathbf{N}$ é um conjunto infinito e $\mu(E) = \#E$ se E é um conjunto finito. A medida μ assim definida é chamada amedida da contagem. Seja $f \in S$ e seja $a : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ a função definida por $a(n) = a_n$ onde $a_n = \int \varphi_n f$. Para cada $x \in \mathbf{R}$ seja $\varphi_x : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ definida por $\varphi_x(n) = \phi_n(x)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{N}} a(n)\varphi_x(n)d\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\varphi_x(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x) \end{aligned}$$

Produto Pontual

Seja $w(x) = u(x)v(x)$ onde $u, v \in S$. A função assim definida é chamada o produto pontual de u e v. Denotemos por w_n os coeficientes de Hermite de w.

$$\begin{aligned}
w_n &= <\phi_n, uv> \\
&= \int \phi_n uv \\
&= \int \phi_n \sum_m u_m \phi_m \sum_k v_k \phi_k \\
&= \int_{\mathbf{R}} \phi_n(x)dx \int_N u(m)\varphi_x(m)d\mu \int_{\mathbf{N}} v(k)\varphi_x(k)d\mu
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini vem

$$\begin{aligned}
w_n &= \int_{\mathbf{N}} d\mu \int_{\mathbf{N}} d\mu \int_{\mathbf{R}} u(m)v(k)\phi_n(x)\varphi_x(m)\varphi_x(k)dx \\
&= \int_{\mathbf{N}} d\mu \int_{\mathbf{N}} d\mu \int_{\mathbf{R}} u_m v_k \phi_n \phi_m \phi_k \\
&= \sum_{m,k} u_m v_k \int \phi_n \phi_m \phi_k
\end{aligned}$$

Considerando $T_{n,m,k} = \int \phi_n \phi_m \phi_k$

$$w_n = \sum_{m,k} u_m v_k T_{n,m,k}$$

Onde u_m e v_k são os coeficientes de Hermite de u e v respectivamente

Translação

Seja $U_a : S \to S$ definida por $(U_a f)(x) = f(x - a)$. Denotemos por $(U_a f)_n$ os coeficientes de Hermite da função $U_a f$. Então:

$$(U_a f)_n = \int \phi_n(x) f(x - a)dx$$

fazendo $y = x - a$ temos

$$\begin{aligned}
(U_a f)_n &= \int \varphi_n(y+a) f(y) dy \\
&= \int \varphi_n(y+a) \sum a_m \phi_m(y) dy \\
&= \sum_m a_m \int \phi_n(y+a) \phi_m(y) dy \\
&= \sum_m a_n T^a_{n,m}
\end{aligned}$$

Onde $T^a_{n,m} = \int \phi_n(y+a)\phi_m(y)dy$

Para uma distribuição $T \in S'$ a translação em S' está definida por:

$$(U_a T)(\varphi) = T(U_{-a}\varphi)$$

Logo os coeficientes de Hermite para $U_a T$ são

$$\begin{aligned}
(U_a T)_k &= (U_a T)(\phi_n) \\
&= T(U_{-a}\phi_n) \\
&= T(\sum_n T^{-a}_{n,k} \phi_n) \\
&= \sum_n T^{-a}_{n,k} T(\phi_n) \\
&= \sum_n T^{-a}_{n,k} b_n
\end{aligned}$$

onde b_n são os coeficientes de Hermite para T.

Dilatação

Seja $V_a : S \to S$ definida por $(V_a f)(x) = f(ax)$, $a \neq 0$ e $a \in \mathbf{R}$. Denotemos por $(V_a f)_n$ os coeficientes de Hermite da função $V_a f$, então

$$\begin{aligned}
(V_a f)_n &= \int \phi_n(x) f(ax) dx \\
&= \frac{1}{a} \int \phi_n\left(\frac{y}{a}\right) \sum_k a_k \phi_k(y) dy \\
&= \frac{1}{a} \sum_k a_k V^a_{n,k}
\end{aligned}$$

onde $V^a_{n,k} = \displaystyle\int \phi_n\left(\frac{y}{a}\right) \phi_k(y) dy$ e os a_k são os coeficientes de Hermite para a função f.

Para um funcional $T \in S'$ a dilatação em S' está definida por:

$$(V_a T)(\varphi) = \frac{1}{a} T(V_{\frac{1}{a}} \varphi)$$

Seja $(V_a T)_n$ os coeficientes de Hermite para a distribuição $V_a T$. assim

$$\begin{aligned}
(V_a T)_k &= (V_a T)(\phi_n) \\
&= \frac{1}{a} T(V_{\frac{1}{a}} \phi_n) \\
&= \frac{1}{a} T(\sum_n V^a_{n,k} \phi_n) \\
&= \frac{1}{a} \sum_n V^a_{n,k} T(\phi_n) \\
&= \frac{1}{a} \sum_n V^a_{n,k} b_n
\end{aligned}$$

onde os b_n são os coeficientes de Hermite para a distribuição T

Função Delta de Dirac

Vamos agora calcular os coeficientes de Hermite para o funcional linear $\delta \in S'$ (a função delta de Dirac). Representemos por δ_n estes coeficientes. Portanto,

$$\delta_n = \delta(\phi_n) = \phi_n(0)$$

Com isso precisamos determinar $\phi_n(0)$. Sabemos que:

$$\phi_n(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}}(-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} \epsilon^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \epsilon^{-x^2}$$

Seja

$$D^n(x) = \epsilon^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \epsilon^{-x^2}$$

Como sabemos (ver ref [11] pag 61) os polinômios de Hermite são dados pela fórmula

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

onde $\left[\frac{n}{2}\right]$ é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$. Pela fórmula de Rodrigues para os polinômios de Hermite conseguimos,

$$H_n(x) = (-1)^n \epsilon^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \epsilon^{-x^2}$$

Logo

$$D^n(x) = \epsilon^{-\frac{x^2}{2}}(-1)^n n! \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k})$$

se $n = 2m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} D^{2m}(x) &= (-1)^{2m} \epsilon^{-\frac{x^2}{2}} (2m)! \sum_{k=0}^{[\frac{2m}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!\,(2m-2k)!}(2x)^{2m-2k} \\ &= \epsilon^{-\frac{x^2}{2}}(2m)! \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (2x)^{2(m-k)}}{k!\,(2(m-k))!} + \frac{(-1)^m}{m!}\right] \end{aligned}$$

Assim,

$$D^{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{m!}$$

Se $n = 2m+1$, $m = 1, 2.3, \ldots$

$$D^{2m+1}(x) = (-1)e^{-\frac{x^2}{2}}(2m+1)! \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2x)^{2(m-k)+1}}{k!\,(2(m-k)+1)!}$$

Assim $D^{2m+1}(0) = 0$ pois se $0 \leq k \leq m$ teremos sempre $2(m-k)+1 > 0$ Concluindo,

$$\begin{aligned}
\phi_n(0) &= (2^n n!)^{-\frac{1}{2}}(-1)^n \pi^{-\frac{1}{4}} D^n(0) \\
\phi_{2m}(0) &= \frac{2^{-m}((2m)!)^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}(-1)^m}{m!}, \qquad m \geq 1,\ m \in \mathbf{N} \\
\phi_{2m+1}(0) &= 0, \qquad m \geq 1,\ m \in \mathbf{N}
\end{aligned}$$

Mas $\phi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{2}}$ e $\phi_1(x) = 2^{\frac{3}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}x$. Deste modo $\phi_0(0) = \pi^{-\frac{1}{4}}$ e $\varphi_1(0) = 0$. Daí podemos concluir que:

$$\delta_n = \begin{cases} \dfrac{2^{-m}((2m)!)^{\frac{1}{2}}\pi^{-\frac{1}{4}}(-1)^m}{m!}, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases}$$

para $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Transformada de Fourier

Seja $f \in L^1(\mathbf{R})$. A transformada de Fourier de f é a função $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ dada por:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int f(x)e^{-i\xi x}dx$$

onde $x, \xi \in \mathbf{R}$

Como $S \subset L^1(\mathbf{R})$ podemos aplicar a transforamda de Fourier a elementos de S e além disso se $f \in S$ então $\widehat{f} \in S$ e valem as fórmulas,

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{\frac{d}{dx}f}\right)(\xi) &= i\xi\widehat{f}(\xi) \\
\left(\widehat{xf}\right)(\xi) &= i\left(\frac{d}{dx}\widehat{f}\right)(\xi) \\
< \widehat{f}, \widehat{g} > &= < f, g >
\end{aligned}
$$

Além do mais se

$$\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

então

$$\widehat{\gamma}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \gamma(\xi)$$

ou seja $\widehat{\gamma} = \gamma$. Se $T \in S'$ a transformada de Fourier de T é definida por:

$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$$

Provemos que $\widehat{T} \in S'$. A definição de $\widehat{T}$ nos diz que:

$$\widehat{T}(\varphi) = (T \circ \mathcal{F})(\varphi)$$

Como,

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(\varphi)\|_m^2 &= \|\widehat{\varphi}\|_m^2 = \|\{\widehat{\varphi}_n\}\|_m^2 \\
&= \|\{(-i)^n a_n\}\|_m^2 = \sum_n (n+1)^{2m} |(-i)^n a_n|^2 \\
&= \sum_n (n+1)^{2m} |a_n|^2 = \|\{a_n\}\|_m^2 \\
&= \|\varphi\|_m^2
\end{aligned}
$$

Vemos que $\mathcal{F}$ é uma aplicação contínua de S em S. Mas sabemos que T é contínuo e com isso $T \circ \mathcal{F}$ é contínuo, ou seja $\widehat{T}$ é contínuo. Portanto $\widehat{T} \in S'$

Nosso objetivo agora é determinar os coeficientes de Hermite para a transformada de Fourier de uma função pertencente a S. Logo se,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right) \quad \text{e} \quad A^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$$

Então

$$\begin{aligned}
(\widehat{Af})(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\left(x+\frac{d}{dx}\right) f}(\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{xf}(\xi) + \widehat{\frac{d}{dx}f}(\xi)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\left(\frac{d}{d\xi}\widehat{f}\right)(\xi) + i\xi\widehat{f}(\xi)\right) \\
&= i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{d}{d\xi}+\xi\right)\widehat{f}\right)(\xi) \\
&= i(A\widehat{f})(\xi) \\
(A^+f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{xf}(\xi) - \widehat{\frac{d}{dx}f}(\xi)\right) \\
&= -i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{d}{d\xi}-\xi\right)\widehat{f}\right)(\xi) \\
&= -i(A^+\widehat{f})(\xi)
\end{aligned}$$

Ou seja, $\widehat{Af} = iA\widehat{f}$ e $A^+f = -iA^+\widehat{f}$ e com isso $\widehat{\phi_n} = (n!)(\widehat{A^+})^n\phi_0$. Para $n = 1$ temos,

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_1}(\xi) &= (\widehat{A^+\phi_0}(\xi) \\
&= -iA^+\widehat{\phi_0}(\xi) \\
&= -iA^+(\widehat{\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}})(\xi) \\
&= -iA^+(\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}})(\xi) \\
&= -iA^+(\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}) \\
&= -iA^+\phi_0(\xi) \\
&= -i\phi_1(\xi)
\end{aligned}$$

E por indução podemos provar que :

$$\widehat{\phi_n}(\xi) = (-i)^n \phi_n(\xi), \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Observe que as funções de Hermite são autofunções do operador integral transformada de Fourier e o autovalor de ϕ_n é $(-i)^n$

Seja $f \in S$ e denotemos por $\widehat{f}_n$ os coeficientes de Hermite para $\widehat{f}$ assim,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_n &= <\phi_n, \widehat{f}> \\
&= <i^n \widehat{\phi_n}, \widehat{f}> \\
&= \bar{i}^n <\widehat{\phi_n}, \widehat{f}> \\
&= (-i)^n <\phi_n, f> \\
&= (-i)^n a_n
\end{aligned}$$

Onde os a_n são os coeficientes de Hermite de f.

Para $T \in S'$ seja $\widehat{T_n}$ os coeficientes de Hermite para $\widehat{T} \in S'$ logo

$$\begin{aligned}
\widehat{T_n} &= \widehat{T}(\phi_n) \\
&= T((-i)^n \phi_n) \\
&= (-i)^n T(\phi_n) \\
&= (-i)^n b_n
\end{aligned}$$

onde os b_n são os coeficientes de Hermite de T.

Polinômios

Seja $x^n \in S'$ e $I \in S'$ os funcionais lineares definidos por:

$$\begin{aligned}
x^n(f) &= \int x^n f(x) dx \\
I(f) &= \int f(x) dx
\end{aligned}$$

Um polinômio $p(x) \in S'$ da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \_\_ + a_1 x + a_0$$

deve ser entendido como o seguinte funcional linear

$$p(x)(f) = a_n x^n(f) + a_{n-1}x^{n-1}(f) + \_\_ + a_1 x(f) + a_0 I(f)$$

Inicialmente vamos determinar os coeficientes de Hermite de I. Representemos por I_n os coeficientes deste funcional. Assim,

$$\begin{aligned} I_n &= I(\phi_n) = \int \phi_n \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} \frac{\phi_n e^{i0x}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \widehat{\phi_n}(0) \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-i)^n \delta_n \end{aligned}$$

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{2^{-m}((2m)!)^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} (-1)^m (2\pi)^{\frac{1}{2}} (-i)^{2m}}{m!}, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2(2m)!)^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} (-1)^m (-i)^{2m}}{2^m m!}, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases}$$

Para $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Vamos agora determinar os coeficientes de Hermite de $x(.)$. Denotaremos por x_n estes coeficientes. Portaanto,

$$
\begin{aligned}
x_n &= x(\phi_n) \\
&= \int x\phi_n(x)dx \\
&= K_n \int x e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \\
&= K_n \left(e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}|_{-\infty}^{\infty} - \int e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} e^{-x^2} \right) \\
&= \phi_n|_{-\infty}^{\infty} - \int K_n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} e^{-x^2} \\
&= (2(n+1))^{\frac{1}{2}} \int \phi_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\
&= (2(n+1))^{\frac{1}{2}} I_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
x_n = \begin{cases} \dfrac{(8m(2m)!)^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}(-1)^m(-i)^{2m}}{2^m m!}, & n = 2m-1 \\ 0, & n = 2(m-1) \end{cases}
$$

Para $m = 1, 2, 3, \ldots$

Seja x_n^k o n-ésimo coeficiente de Hermite do funcional $x^k(.) \in S'$. Neste caso se $k = 0$ então $x_n^0 = I_n$. Vamos agora determinar os coeficientes x_n^{k+1} para $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$ através de uma fórmula de recorrência.

$$
\begin{aligned}
x_n^{k+1} &= x^{k+1}(\phi_n) = \int x^{k+1}\phi_n(x)dx \\
&= \int x^{k+1} K_n \epsilon^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \epsilon^{-x^2} dx \\
&= x^k \phi_n|_{-\infty}^{\infty} - \int x^k K_n \epsilon^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \epsilon^{-x^2} + k x^{k-1} K_n \epsilon^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \epsilon^{-x^2} \\
&= (2(n+1))^{\frac{1}{2}} \int x^k \phi_{n+1} - k \int x^{k-1} \phi_n \\
&= (2(n+1))^{\frac{1}{2}} x_{n+1}^k - k x_n^{k-1}
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] **B. Simon**, "Distributions and Their Hermite Expansions" J. Math. Phys. 12 (1971) 140-148.

[2] **M. Reed, and B. Simon**, Functional Analysis. Vol I (Academic New York. 1972).

[3] **R. F. Streater, and A. S. Wightman**, PCT, Spin and Statistics and All That. (Benjamin. New York. 1964).

[4] **F. Treves**, Topological Vector Spaces (Academic. New YOrk. 1967).

[5] **K. Yosida**, Functional Analysis. (Spring-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1978).

[6] **H. L. Royden**, Real Analysis (The Macmillan Company. 1968).

[7] **D. G. de Figueiredo**, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. (CNPq, Projeto Euclides. 1977).

[8] **L. Infeld, T. E. Hu** "The Factorization Method". Reviews of Modern Physics. 23 (1951) 139-40.

[9] **J. Beandi Filho**, Funções Especiais. (Ed. Papirus, Campinas-SP. 1985).

[10] **R. Iório Jr e V. Iório**, Equções Diferenciais Parciais. Uma Introdução. (CNPq, Projeto Euclides. 1988).