CÁLCULO DE INVARIANTES RACIONAIS PARA SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-AUTÔNOMOS

WALTER TRENNEPOHL JÚNIOR

DISSERTAÇÃO

Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física
da Universidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

UFSC

Florianópolis, 15 de outubro de 1991

CÁLCULO DE INVARIANTES RACIONAIS PARA SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-AUTÔNOMOS.

Walter Trennepohl Júnior

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

Especialização em Física e aprovada em sua forma final pelo

Curso de Pós-Graduação em Física da UFSC

Prof. Dr. Jason A. C. Gallas

Orientador

Prof. Dr. Hédio Müller

Coordenador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Lago, UFSC

Prof. Dr. Carlos A. Kuhnen, UFSC

Prof. Dr. Jason A. C. Gallas, UFSC

À meus pais, Walter e Lenita

e,

à minha noiva, Vera,

pelo seu apoio e compreensão.

Meus agradecimentos

- Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

- Ao professor Jason, pela orientação do trabalho.

- Aos membros da banca examinadora, pelas sugestões apresentadas para o aprimoramento deste trabalho.

- Aos demais colegas e professores, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Estudos visando a obtenção de invariantes de movimento são bastante comuns de se encontrar na literatura devido ao grande número de situações onde podemos utilizá-los. Entre eles, existem vários trabalhos, empregando diversos métodos, destinados a obtenção de invariantes racionais, isto é, formados pela razão de dois polinômios na variável momento p, para sistemas Hamltonianos não-autônomos, ou seja, cujos potenciais são dependentes do tempo. Embora em alguns destes trabalhos foram obtidos invariantes racionais contendo polinômios quadráticos em p, nenhum deles obteve invariantes contendo polinômios cúbicos em p. Em vista disto, neste trabalho, desenvolvemos um procedimento para a obtenção de invariantes racionais de movimento contendo polinômios cúbicos em p, mas de uma forma mais simples que os sofisticados métodos existentes na literatura. Desta forma obtivemos, nos casos mais simples, resultados tão gerais quanto os existentes na literatura e, nos outros casos, reduzimos o problema de se obter invariantes a resolução de um sistema de equações para os quais encontramos soluções particulares. Desta forma, foi possível obter-se invariantes racionais de movimento para todos os casos estudados, incluindo o caso onde o invariante contém polinômios cúbicos em p.

Abstract

Studies looking for the determination of the invariants appear very often in the literature, because we can use them in a large number of situations. Among them, there are several works employing different methods to find invariants that are rational functions of the moment p, that is, rational invariants, for non-autonomous Hamiltonian systems (time dependent potentials). Although in some of these works were found rational invariants with quadratic polynomials, none of them found invariants with cubic polynomials in p. In this work we devised a procedure to find these invariants with polynomials of degree three, which is simpler than the sophisticated methods employed before in literature. We applied this procedure from the simplest possible rational invariants to those containing polynomials of cubic order. As a result, for the simplest cases we were able to reproduce the best results found in literature. In the more complex situations we reduce the problem of finding invariants to the solution of a system of equations, for which we found some particular solutions. In this way, we found invariants of motion for all the studied cases, including the more difficult case containing cubic polynomials in p.

Índice

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução aos invariantes de movimento

Pode-se observar que nestes últimos anos foram publicados diversos trabalhos[1-11] com o propósito de se encontrar invariantes de movimento. Este interesse deve-se tanto ao fato de podermos utilizar invariantes de movimento para obtermos informações sobre a estrutura dos mais diversos sistemas dinâmicos, quanto a possibilidade de usarmos invariantes de movimento em diversas áreas da física, tais como astronomia, física de plasma, física quântica[12, 13, 14], etc.

Historicamente a procura de invariantes de movimento está intimamente ligada ao desenvolvimento da física clássica. Este tema já foi abordado, por exemplo, em livros do século *XIX*[12, 15, 16] com o propósito de se encontrar soluções para o clássico problema dos três corpos, que é de fundamental importância no estudo do movimento de corpos celestes.

Atualmente uma importante aplicação de invariantes de movimento, para hamiltonianos do tipo que iremos tratar, é seu uso em física de plasma, mais especificamente para sistemas que podem ser reduzidos a um sistema equivalente unidimensional. Isto porque, nestes casos, a equação que descreve estes sistemas, chamada de equação de Vlasov-Poisson, é exatamente a equação que define um invariante de movimento.

De modo geral, ao encontrarmos um invariante de movimento podemos usá-lo para diminuir a ordem de um sistema de equações diferenciais, isto é, a soma das ordens de cada equação que o compõe, que descreve a evolução temporal de um determinado sistema dinâmico. Assim, num sistema arbitrário, a existência de um invariante de movimento diminui a ordem do sistema em uma unidade, enquanto que, em sistemas hamiltonianos, a ordem pode ser reduzida em até duas unidades. Desta forma, dizemos que um sistema com n graus de liberdade é integrável se ele possuir exatamente n invariantes $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ em involução, ou seja, que obedeçam a seguinte relação:

$$\{I_i, I_j\} = 0, \qquad i,j = 1,\ldots,n,$$

onde $\{I_i, I_j\}$ é o colchete de Poisson entre os invariantes I_i e I_j, que é definido, para duas funções A e B quaisquer, por:

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}.$$

Lembramos que, de acordo com Hietarinta[17], podem existir mais de n invariantes funcionalmente independentes mas, neste caso, eles não estarão então todos em involução.

Um invariante de movimento é, como o próprio nome sugere, uma função que permanece constante durante a evolução temporal de um determinado sistema dinâmico. Assim, se um sistema dinâmico é descrito por um hamiltoniano $\mathcal{H}(q, p, t)$ em termos de seu momento p, sua coordenada q e do tempo t, um invariante de movimento para este sistema é uma função, que representamos por $I = I(q, p, t)$, que satisfaz a relação[18, 19]:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, \mathcal{H}\} = 0, \qquad \textbf{(1.1)}$$

onde $\{I, \mathcal{H}\}$ é o colchete de Poisson entre o hamiltoniano e o invariante.

Esta função recebe também outros nomes na literatura como, por exemplo, constante de movimento, integral de movimento, segundo invariante, etc. Neste trabalho, por questão de comodidade, chamaremos freqüentemente esta função simplesmente de invariante.

Um invariante de movimento é assim uma função composta por uma determinada combinação das variáveis q, p e t e pode, por exemplo, ser o próprio hamiltoniano se este for independente do tempo. No caso de hamiltonianos dependentes do tempo, um invariante pode ser o valor inicial de q ou p expresso em termos de q, p e t.

1.2 Método para a determinação de invariantes

Existem diversos métodos para se obter invariantes de movimento como, por exemplo, o teorema de Noether e a teoria de Lie de grupos extendidos. Os mais utilizadas são, no entanto, o método das transformações canônicas e o método direto. Basicamente, o método das transformações canônicas consiste em simplificar-se as equações de movimento através de uma transformação das coordenadas e momentos para outro conjunto de variáveis, de forma que, nestas novas variáveis, as equações de movimento permaneçam na forma canônica.

Por outro lado, o método direto, que empregaremos neste trabalho, consiste na escolha de uma determinada dependência funcional para o invariante envolvendo funções arbitrárias de q, p e t que é, em seguida, substituída diretamente na equação (1.1). Com isto, obtém-se um sistema de equações que, se resolvido, fornece o invariante para o sistema em questão, definido pelo hamiltoniano utilizado. Desta forma, para utilizarmos este método precisamos escolher, a priori, o tipo de sistema que desejamos tratar, através da escolha do hamiltoniano, e uma dependência funcional para o invariante em relação as variáveis existentes neste sistema. Assim, nosso primeiro passo será o de estabelecer a abrangência dos resultados que obteremos através da escolha do hamiltoniano e da forma do invariante.

1.2.1 Forma do hamiltoniano

Embora seja comum procurar-se invariantes em sistemas contínuos e em sistemas discretos não-hamiltonianos, neste trabalho iremos tratar de sistemas hamiltonianos unidimensionais, do tipo:

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{1}{2}p^2 + V(q,t), \tag{1.2}$$

devido ao seu grande interesse teórico[7, 8, 10, 20-26].

Vale lembrar que podemos encontrar na literatura diversos trabalhos visando a obtenção de invariantes, através do método direto, que utilizam outros tipos de hamiltonianos. Assim, por exemplo, temos o trabalho de Hietarinta[17] que estudou hamiltonianos bidimensionais mas independentes do tempo, cuja forma geral é dada por:

$$\mathcal{H}(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + A(x,y)p_x + B(x,y)p_y + V(x,y).$$

Este trabalho é particularmente interessante pois, além de apresentar invariantes racionais e transcendentais em p_x e p_y inéditos, o autor faz ainda uma revisão de todos os invariantes polinomiais em p_x e p_y conhecidos, onde, nestes casos, $A = B = 0$.

Apesar de nosso hamiltoniano parecer mais simples que o utilizado por Hietarinta, devemos lembrar que qualquer sistema D-dimensional dependente do tempo pode ser escrito como um sistema $D+1$-dimensional independente do tempo. Neste caso, sendo t e p_t variáveis canônicas adicionais, temos que: $\mathcal{H}_{novo} = \mathcal{H}_{velho} + p_x$.

1.2.2 Forma do invariante

Como mencionamos mais acima, é evidente que necessitamos dar explicitamente a dependência do invariante em função de ao menos uma das variáveis independentes que compõe esta função. Bem que poderiamos explicitar, neste caso, qualquer uma das variáveis q, p e t que compõe o invariante, escolhe-se, em geral, explicitar-se o momento p. A princípio existem uma dezena de funções matemáticas "de base" que poderíamos escolher para expressar a dependência do invariante em função do momento p. Entretanto, o invariante poderia ser dado por uma combinação destas funções de base e, neste caso, teríamos um grande número de possibilidades. Desta forma, a maneira mais conveniente de se procurar invariantes de movimento é começando-se a se estudar os casos em que a dependência do invariante com o momento for a mais simples possível e, obviamente, que não tenha sido ainda estudada, antes de procurar-se invariantes com formas mais complexas, usando-se outras função de base ou combinações delas. Pode-se observar então que a dependência para o invariante que preenche estes dois requisitos é o caso de invariantes formados por uma razão entre dois polinômios em p, isto é, invariantes racionais. Antes de vermos alguns aspectos relativos a este tipo de invariante, veremos o que existe na literatura em relação a um caso mais simples, onde invariantes foram expressos como polinômios em p.

Invariantes polinomiais. Invariantes deste tipo podem ser escritos, em geral, como:

$$I(q,p,t) = \sum_{n=0}^{N} f_n(q,t)p^n, \tag{1.3}$$

e foram estudados, em particular, por Lewis e Leach[8]. Utilizando-se então o método direto, o hamiltoniano (1.2) e a forma (1.3) para o invariante, estes autores obtiveram uma relação de recorrência entre os coeficientes $f_n(q, t)$ que os possibilitou encontrar pares potenciais-invariantes para os casos onde $N = 1$ e $N = 2$.

Invariantes racionais. Este tipo de invariante é dado por uma razão entre dois polinômio em p, podendo serem escritos pela seguinte forma geral:

$$I(q,p,t) = \frac{\sum_{n=0}^{M} f_n(q,t)p^n}{\sum_{n=0}^{N} g_n(q,t)p^n}. \tag{1.4}$$

Embora a procura de invariantes racionais em p deveria ser o próximo caso a se estudar após ter sido estabelecido a existência de invariantes polinomiais em p, devemos considerar que procurar invariantes deste tipo pode vir a ser uma tarefa muito difícil e trabalhosa. Assim, é interessante termos, antes de começar um trabalho como este, algumas indicações sobre uma possível existência deste tipo de invariante, e é isto que veremos na próxima seção.

1.3 Evidências da existência de invariantes racionais

Estudos iniciais de invariantes racionais, bem como justificações de sua existência foram inicialmente apresentados por Lewis e Leach[10]. Duas foram as razões principais que levaram estes autores a procurar invariantes desta forma. A primeira deve-se a observação, feita por Lewis e Leach, de que quando se conhece analiticamente invariantes de hamiltonianos do tipo (1.2) é sempre possível escrevê-los como uma função cuja dependência no momento é simples e explícita. Como exemplo disto, os autores citam o caso de um oscilador harmônico simples, com freqüência igual a unidade, cujo hamiltoniano é então dado por:

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right). \tag{1.5}$$

A equação de movimento para este sistema pode ser facilmente encontrada, utilizando-se, por exemplo, as equações hamiltonianas. Se representarmos então a derivada de uma função em relação ao tempo com o símbolo $'$, temos que a equação de movimento para o sistema (1.5) será dada por:

$$q'' + q = 0. \tag{1.6}$$

Com a equação (1.6) pode-se encontrar então que a posição q e o momento p da partícula serão dados por:

$$\begin{aligned} q &= p_0 \operatorname{sen}(t) + q_0 \cos(t), \\ p &= p_0 \cos(t) - q_0 \operatorname{sen}(t), \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde q_0 e p_0 são os valores iniciais de q e p.

Podemos agora usar (1.7) para isolar q_0 e p_0 e assim obter-se que:

$$\begin{aligned} q_0 &= -p \operatorname{sen}(t) + q \cos(t), \\ p_0 &= p \cos(t) + q \operatorname{sen}(t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Como mencionamos anteriormente, q_0 e p_0 são, juntamente com o hamiltoniano (que é independente do tempo), invariantes de movimento. Sendo que o recíproco de um invariante é também um invariante, temos com (1.5) e (1.8) que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{H}} &= \frac{i/q}{p + iq} - \frac{i/q}{p - iq}, \\ \frac{1}{q_0} &= -\frac{1/\operatorname{sen}(t)}{p - q\arctan(t)}, \\ \frac{1}{p_0} &= \frac{1/\cos(t)}{p + q\tan(t)}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

ou seja, os invariantes formados pelos recíprocos de p_0, q_0 e $\mathcal{H}$ se escrevem numa forma racional, como observaram Lewis e Leach.

Podemos encontrar ainda outros invariantes para o hamiltoniano (1.5) se levarmos em conta uma outra solução bem conhecida para a equação (1.6), que é:

$$\begin{aligned} q &= A\, sen(t - \phi), \\ p &= A \cos(t - \phi), \end{aligned} \qquad \textbf{(1.10)}$$

onde A e ϕ são a amplitude e a fase, respectivamente, do movimento, ou seja, constantes relacionadas com a posição inicial da partícula. Desta forma A e ϕ são também invariantes que, em termos de q e p, podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} A^2 &= p^2 + q^2 = 2\mathcal{H}, \\ \phi &= t - \text{arcsen}\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \end{aligned} \qquad \textbf{(1.11)}$$

Com a primeira relação de (1.9) podemos, facilmente, ver que a amplitude A pode ser colocada numa forma racional, embora o mesmo não acontece com a fase ϕ. Entretanto, se a fase não pode ser escrita numa forma racional, pode-se ver que sua tangente pode, pois, com (1.11), temos que:

$$\tan\phi = -\frac{q_0}{p_0} = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} - \frac{q/\cos^2(t)}{p + q\tan(t)} \qquad \textbf{(1.12)}$$

Veremos mais tarde que esta forma racional de (1.12) é o que Lewis e Leach denominam de um invariante com uma ressonância.

A segunda motivação apresentada por Lewis e Leach para se procurar invariantes racionais provém da suposição que invariantes de movimento possam possuir singularidades para valores finitos de q e p, suposição esta proveniente de estudos numéricos com invariantes adiabáticos. Sendo que invariantes polinomiais não permitem o aparecimento de singularidades, uma maneira de se estudar a existência de singularidades seria de se supor que os invariantes pudessem ser dados como uma razão entre dois polinômios em p.

Baseados então nas considerações acima, Lewis e Leach[10] propuseram a seguinte forma geral ou ansatz para se estudar invariantes de movimento:

$$I(q,p,t) = c(t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)}, \tag{1.13}$$

onde o invariante é escrito como uma soma de termos, chamados de ressonâncias, sendo que o número de ressonâncias ou de singularidades do invariante é dado pelo limite superior N do somatório.

1.4 Estudos anteriores de invariantes racionais

Utilizando-se então o hamiltoniano (1.2), o ansatz (1.13) e o método direto, Lewis e Leach conseguiram obter três relações de recorrência que os possibilitou encontrar todos os potenciais que admitem invariantes com uma ressonância, isto é, quando temos $N = 1$ em (1.13). Posteriormente, Goedert e Lewis[27] desenvolveram a teoria de Lewis e Leach e conseguiram encontrar classes de potenciais que admitem invariantes com duas ressonâncias, ou seja, $N = 2$ em (1.13). Ao aplicarem o novo método para o caso $N = 3$, ou seja, para o caso de três ressonâncias, Goedert e Lewis obtiveram dois pares potenciais-invariantes. Entretanto os invariantes obtidos não eram de fato racionais, como se desejava, mas polinomiais em p.

Assim, recentemente, Grigoletti[28] concluiu um trabalho de dissertação cujo objetivo era o de encontrar invariantes racionais com três ressonâncias, mas de uma forma mais simples e direta que o método empregado por Goedert e Lewis. Neste trabalho foi utilizado também o método direto e o hamiltoniano (1.2) mas, diferentemente dos autores anteriores, foi utilizado o ansatz (1.4) com $M = N = 3$.

Em resultado, Grigoletti obteve um sistema de equações diferenciais relacionando os coeficientes $f_3, \ldots, f_0, g_3, \ldots, g_0$. Por não conseguir resolver genericamente este sistema de equações, Grigoletti supôs que estes coeficientes pudessem ser escritos como séries de potências em q e t e substituiu-as no sistema de equações que obteve. Com isto foi possível generalizar os dois pares potenciais-invariantes encontrados por Goedert e Lewis para o caso de invariantes com três ressonâncias. Entretanto, o invariante que obteve também não era verdadeiramente racional e sim polinomial em p.

1.5 Objetivos do trabalho

Sendo que o problema de se obter invariantes racionais com três ressonâncias continua em aberto, este trabalho é, de certa forma, uma continuação do trabalho de Grigoletti, ou seja desejamos encontrar invariantes verdadeiramente racionais de uma maneira mais simples do que a empregada por Goedert e Lewis. Para isto utilizaremos também o método direto, o hamiltoniano (1.2) e o ansatz dado em (1.4).

Como método de trabalho, começaremos nosso estudo com o caso mais simples que permite o ansatz (1.4) para, em seguida, aumentarmos sucessivamente o grau dos polinômios do numerador e do denominador do invariante e, assim, o grau de complexidade do problema. Uma diferença entre este trabalho e o de Grigoletti é que nos casos onde não foi possível resolver completamente o sistema de equações necessárias a obtenção do invariante, resolvemos tantas equações quantas foram possíveis genericamente. Desta forma, fornecemos, em cada caso, pares potenciais-invariantes em função de alguma incógnitas com o sistema de equações que estas incógnitas devem satisfazer. Desta forma, para se encontrar soluções particulares diferentes das que obtivemos, não é mais necessário retomar o problema desde o início. Basta utilizar-se diretamente o par potencial-invariante que obtivemos com o respectivo sistema de equações.

Como resultado deste trabalho, conseguimos obter pares potenciais-invariantes tão gerais quanto os obtidos por Lewis e Leach pra o caso de invariantes com uma ressonância. Nos outros casos não foi possível resolver genericamente todas o sistema de equações, mas conseguimos reduzir significativamente o número de equações de cada sistema, sendo que as equações que restaram foram bastante simplificadas. Enfim, de forma a alcançar os objetivos deste trabalho, determinamos soluções particulares para estes casos, o que nos permitiu encontrar invariantes racionais e seus respectivos potenciais para todos os casos estudados, ou seja, para os casos de invariantes com duas ressonâncias e três ressonâncias.

Capítulo 2

Obtenção de invariantes racionais através do método direto

2.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior, o objetivo deste trabalho é o de se obter invariantes racionais de movimento de uma maneira mais simples que a empregada por Lewis, Leach e Goedert. Desta forma, iremos neste capítulo descrever primeiramente as linhas gerais do método utilizado por estes autores para a obtenção de invariantes racionais. Em seguida, veremos alguns aspectos relacionados a forma na qual abordaremos o problema, bem como a maneira de comparar nossos resultados com os resultados obtidos por Lewis, Leach e Goedert.

Lembramos novamente que os dois métodos tem em comum o fato de utilizarem o método direto e que seus resultados podem ser empregados em qualquer sistema cujo hamiltoniano possa ser escrito como:

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \frac{1}{2}p^2 + V(q,t), \qquad \textbf{(2.1)}$$

isto é, para sistemas dinâmicos não-autônomos.

2.2 Resumo do método de Lewis, Leach e Goedert

Este método para a obtenção de invariantes de movimento pode ser visto mais detalhadamente no trabalho destes autores[10, 27] ou também no trabalho de dissertação de Grigoletti[28]. Utilizando-se então como forma para o invariante de movimento, ou ansatz, a seguinte expressão:

$$I(q,p,t) = c(t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)}, \tag{2.2}$$

Lewis e Leach mostraram, utilizando o método direto, que (2.2) é um invariante de movimento para o hamiltoniano (2.1) se as funções c, v_n e u_n verificarem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial v_n}{\partial q} = 0, && (a)\\
&\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_n v_n)}{\partial q} = 0, && (b)\\
&\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}. && (c)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Este sistema de equações pôde então ser resolvido para o caso $N = 1$, isto é, para invariantes com uma ressonância, através de um conjunto de N transformações de coordenadas lagrangeanas dependentes do tempo. Com isto, pôde-se encontrar todos os potenciais que admitem invariantes com uma ressonância. No entanto, nos casos onde $N > 1$, Lewis e Leach não conseguiram encontrar nenhum invariante verdadeiramente racional.

Em conseqüência, Goedert e Lewis[27] desenvolveram, posteriormente, um método para se resolver o sistema de equações (2.3) nos casos em que $N > 1$. Este método consiste, basicamente, na série de etapas apresentadas abaixo.

Primeiramente, constrói-se com as funções u_n e v_n um conjunto de N momentos discretos $g_k(q, t)$, definidos por:

$$g_k(q,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n^k v_n, \qquad 0 \le k \le N-1. \tag{2.4}$$

e mostra-se, em seguida, que estes momentos satisfazem a relação:

$$g_l = -\sum_{n=1}^{N} a_n\, g_{l-n}, \qquad l \geq N, \tag{2.5}$$

onde os a_n são os coeficientes de um polinômio cujas raízes são os u_n, obtidos da relação:

$$u_n^N + \sum_{k=1}^{N} a_k\, u_n^{N-k} = 0, \qquad 1 \leq n \leq N. \tag{2.6}$$

Devido a esta transformação de variáveis, o invariante (2.2) será agora expresso em termos dos momentos discretos $g_k(q,\, t)$ e dos coeficientes $a_n\,(q,\, t)$, sendo dado então por:

$$I(q,p,t) = c(t) + \frac{\sum_{n=1}^{N} p^{N-n} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\, g_{n-k}}{\sum_{n=0}^{N} a_n\, p^{N-n}}, \tag{2.7}$$

onde, por definição, $a_0 = 1$.

Em seguida mostra-se que os momentos discretos $g_k(q,\, t)$ devem satisfazer a relação de recorrência:

$$\frac{\partial g_k}{\partial q} = -\frac{\partial g_{k-1}}{\partial t} - (k-1)\, g_{k-2}\, \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad k \geq 1 \tag{2.8}$$

com a condição inicial

$$g_0(q,t) = -a_{-1}^{\prime}(t)\, q + a_0(t), \qquad a_{-1}(t) = c(t). \tag{2.9}$$

Finalmente faz-se uma pequena transformação com os u_k, de modo que estes sejam dados por:

$$u_k = A_1 + \sum_{j=2}^{N} \gamma_{kj} A_j, \qquad 1 \leq k \leq N, \tag{2.10}$$

sendo que os γ_{kj} são definidos de acordo com a tabela abaixo:

N	u_n
2	$u_1 = A_1 + A_2$, $u_2 = A_1 - A_2$.
3	$u_1 = A_1 + A_2 + A_3$, $u_2 = A_1 + w A_2 + w^* A_3$, $u_3 = A_1 + w^* A_2 + w A_3$.
4	$u_1 = A_1 - A_2 + i A_3$, $u_2 = A_1 - A_2 - i A_3$, $u_3 = A_1 + A_2 + i A_4$, $u_4 = A_1 + A_2 - i A_4$.

onde $w = e^{i2\pi/3}$ e $w^2 = w^{-1} = w^*$.

Com estas transformações pode-se ver que a equação (2.3a) é satisfeita enquanto que a equação (2.3b) será dada por:

$$\frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=1}^{N} a_k g_{N-k} = \frac{\partial g_{N-1}}{\partial t} + (N-1)\, g_{N-2} \frac{\partial V}{\partial q}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Como resultado destas mudanças, em vez de se resolver o sistema de equações (2.3) para se obter um invariante com N ressonâncias, devemos solucionar agora as equações (2.3c), (2.4) e (2.11) sendo que, neste novo sistema de equações, devemos sempre expressar os u_n correspondentes a cada caso de acordo com a tabela acima. Fazendo-se então $N = 2$ no sistema de equações (2.3c), (2.4) e (2.11), obtém-se um sistema de equações para o qual Goedert e Lewis conseguiram encontrar duas soluções particulares. Desta forma estes autores obtiveram dois pares potenciais-invariantes onde o invariante possui duas ressonâncias. Destas duas soluções, uma corresponde ao caso em que o termo $c(t)$ de (2.2) é uma constante, e foi obtida com ajuda do código de computação *macsyma*, escrito por J. L. Schwarzmeier, baseado na teoria de Lie de grupos extendidos. Já a outra solução, que corresponde ao caso onde $c(t)$ é uma função qualquer de t, foi obtida fazendo-se uma série de transformações de variáveis, resultando num trabalho relativamente extenso.

Ao utilizarem este novo método para o caso $N = 3$, Goedert e Lewis obtiveram duas soluções que resultaram, no entanto, em invariantes polinomiais em p. Estes invariantes, como mencionamos, foram mais tarde generalizados por Grigoletti.

Apresentaremos os pares potenciais-invariantes obtidos através deste novo método nos capítulo onde trataremos com invariantes equivalentes. Com isto, poderemos comparar, quando possível, nossos resultados com os resultados destes autores.

2.3 Considerações gerais sobre o procedimento adotado neste trabalho

Como veremos nos próximos capítulos, nosso método para a obtenção de invariantes de movimento utiliza, basicamente, operações matemáticas elementares de derivação e integração. Entretanto, como em alguns casos obtém-se equações relativamente extensas, foi necessário utilizarmos um programa de resolução analítica de equações chamado *reduce*, de forma a não restar dúvidas quanto a exatidão de nossos resultados. Além do reduce, utilizamos também algumas funções polinomiais que se mostraram ser bastante úteis na resolução e simplificações das equações que deveremos manipular.

Uma das diferenças entre nosso método para a obtenção de invariantes de movimento e o método de Lewis, Leach e Goedert é quanto a escolha do ansatz de partida, já que utilizamos um invariante racional com a seguinte forma geral:

$$I(q,p,t) = \frac{\sum_{n=0}^{M} f_n(q,t)\, p^n}{\sum_{n=0}^{N} g_n(q,t)\, p^n}, \qquad \textbf{(2.12)}$$

sendo que, por definição, $f_M(q, t) = 1$.

Se desenvolvermos o ansatz empregado por Lewis, Leach e Goedert, a fim de compará-lo com o ansatz (2.12), podemos ver que (2.2) pode ser escrito também como:

$$I(q,p,t) = \frac{\sum_{n=0}^{N} F_n(q,t)p^n}{\sum_{n=0}^{N} G_n(q,t)p^n}, \qquad \textbf{(2.13)}$$

sendo que $G_N(q, t) = 1$ e $F_N(q, t) = c(t)$, enquanto que os outros termos F_n e G_n são dados por combinações dos coeficientes $c(t)$, $v_n(q, t)$ e $u_n(q, t)$.

Comparando-se então (2.12) e (2.13) vemos que, aparentemente, (2.13) parece não ser tão geral quanto (2.12), já que o coeficiente F_N que acompanha p^N em (2.13) é uma função somente do tempo. Entretanto, veremos mais tarde que os coeficientes que acompanham p^N são, de fato, funções exclusivas de t, isto é, em (2.12) teremos sempre que $g_M(q, t) = g_M(t)$, de forma que em generalidade (2.12) e (2.13) são equivalentes.

Por outro lado, podemos observar em (2.2) que se $c(t)$ for uma constante, ela pode ser incorporada ao invariante I. Em conseqüência, se $c(t)$ for uma constante temos como resultado um polinômio racional tal que a diferença entre o grau do polinômio do denominador e do numerador é igual a um e, caso contrário, esta diferença é nula. Como Lewis, Leach e Goedert não distinguem estes dois casos, e denominam ambos os casos de invariantes com o mesmo número de ressonâncias, é interessante, por uma questão de clareza, diferenciarmos estes dois casos. Assim, vamos chamar os casos em que $c(t) = cte$ de caso particular dos casos onde $c(t) \neq cte$. Embora esta nomenclatura não seja a mais conveniente, ela nos ajuda a nos situarmos em cada capítulo.

A imposição de que $f_M(q, t) = 1$ em (2.12) corresponde, na verdade, a uma simplificação que pode-se fazer no invariante e que, portanto, não altera sua generalidade. Assim, por exemplo, se todos os coeficientes de (2.12) fossem funções quaisquer, constantes ou não, diferentes da unidade, poderíamos multiplicar o numerador e o denominador de (2.12) por $(f_M)^{-1}$ e, assim, obteríamos funções tão genéricas quanto antes para os vários g_n ($n = 0,\dots, N$) e f_n ($n = 0,\dots, M-1$), com a diferença que agora teríamos $f_M(q, t) = 1$. Por outro lado, como o recíproco de um invariante é também um invariante, pois:

$$\frac{d}{dt}\left(I^{-1}\right) = -I^{-2}\frac{dI}{dt} = -I^{-2}.0 = 0,$$

é indiferente darmos ao coeficiente de f_M ou de g_N o valor 1.

Obviamente poderíamos fazer esta multiplicação com qualquer um dos coeficiente existente em (2.12). Entretanto, escolhendo ter valor unitário o coeficiente que acompanha o termo de maior potência em p não corremos o risco de encontrarmos soluções que anulem este coeficiente.

A princípio existem uma série de ansatz equivalentes que podem ser expressos por uma razão de polinômios em p, como, por exemplo, os ansatz (2.2) e (2.12) ou ainda o ansatz:

$$I(q,p,t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n(q,t)\,p - B_n(q,t)}{p - C_n(q,t)}.$$

Dizemos que estes três ansatz são equivalentes pois podemos sempre escrever, por exemplo, os coeficientes f_n e g_n de (2.12) em função dos coeficientes $c(t)$, v_n e u_n de (2.2). Entretanto, bem que existam várias formas equivalentes de se expressar ansatz racionais, o conjunto de equações que se obtém para tornar cada um destes ansatz um invariante de movimento não devem apresentar necessariamente o mesmo grau de complexidade. Desta forma podemos supor que, entre os vários ansatz existentes, alguns são mais convenientes ou adequados que outros, no sentido de fornecerem um sistema de equações mais simples de se resolver.

Como não há maneiras de se saber, a priori, qual a melhor forma de se expressar um invariante racional para um determinado hamiltoniano, podemos escolher qualquer um dos ansatz disponíveis. Assim, no nosso caso, resolvemos utilizar o ansatz (2.12) pois ele nos pareceu ser mais versátil que o ansatz (2.2), no sentido que ele poderia ser transformado mais facilmente, se necessário, num outro ansatz equivalente, mas que expresse uma forma mais adequada para o invariante, caso ela exista.

Se substituirmos então o hamiltoniano (2.1) e o ansatz (2.12) na equação (1.1) que define um invariante, podemos obter uma razão entre dois polinômios em p que deve ser igual a zero. Como a única maneira de se conseguir isto para qualquer valor de p é anulando-se os coeficientes do polinômio do numerador, obtemos assim relações que, se satisfeitas, nos permitirão encontrar o invariante.

Diferentemente de Lewis e Leach, que obtiveram um sistema de equações geral para um número N qualquer de ressonâncias para, em seguida, determinar invariantes para $N = 1$ e 2, partiremos do caso equivalente a $N = 1$, mas separado em caso geral e particular, de acordo com nossa convenção, e aumentaremos em seguida o número de N até o caso $N = 3$. Desta forma, cada caso é trabalhado independentemente dos outros. Mesmo que, por um lado, este procedimento seja um pouco trabalhoso, por outro lado, ele nos dá uma melhor compreensão do problema e permite-nos observar a dinâmica própria de cada caso.

Com estas considerações, iremos agora apresentar os resultados que obtivemos em nosso estudo dos invariantes racionais.

Capítulo 3

Caso particular de invariantes com uma ressonância

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos tratar do caso mais simples que se pode obter com o ansatz (1.4). Sendo este caso relativamente simples, vamos aproveitar para mostrar como se obtém o sistema de equações que torna uma certa função um invariante de movimento, ou seja, vamos mostrar mais detalhadamente o método direto. Em seguida faremos a determinação do par potencial-invariante resolvendo este sistema de equações da forma convencional e utilizando funções auxiliares pré-definidas, a fim de vermos a simplificação que o uso destas funções nos proporcionam. Finalmente iremos comparar nossos resultados com os existentes na literatura.

3.2 Determinação do invariante da forma convencional

Conforme estabelecemos no capítulo 2, vamos começar a investigar a existência de invariantes racionais fazendo $M = 0$ e $N = 1$ em (1.4). A fim de simplificarmos o trabalho de escritura desta dissertação iremos, daqui em diante, escrever os coeficientes do ansatz (1.4) com letras diferentes, em vez de utilizar a mesma letra com sub-índices diferentes. Assim, com esta terminologia, a forma geral para o invariante pode ser escrita, neste caso, como:

$$I(q,p,t) = \frac{h(q,t)}{l(q,t)p + m(q,t)}, \tag{3.1}$$

que, de acordo com a convenção feita no capítulo anterior, denominaremos de caso particular de invariantes com uma ressonância.

Como regra geral, usaremos, daqui por diante, letras maiúsculas para representar funções que dependem da coordenada q e do tempo t, e letras minúsculas para representar funções que dependem exclusivamente do tempo. Caso desrespeitarmos esta convenção, como o fizemos na relação precedente, assinalaremos nosso deslize. Também convencionaremos, a partir daqui, que a representação de derivadas parciais em relação a uma variável será feita alocando-se esta variável como sub-índice de uma letra ou expressão que represente uma função também desta variável, enquanto que cada derivação de uma função exclusiva do tempo será representada por um símbolo $'$ após a letra ou expressão que represente uma função desta variável.

Podemos observar agora que (3.1) representa a forma mais geral possível de se escrever um invariante formado pela razão entre dois polinômios em p, sendo um de grau zero e outro de grau um. Como não tem sentido $h(q, t)$ ser igual a zero, podemos dividir o numerador e o denominador de (3.1) por $h(q, t)$. Desta forma obtermos:

$$I(q,p,t) = \frac{1}{L(q,t)p + M(q,t)}, \tag{3.2}$$

onde, obviamente,

$$L(q,t) = \frac{l(q,t)}{h(q,t)} \quad \text{e} \quad M(q,t) = \frac{m(q,t)}{h(q,t)}.$$

ou seja, obtemos um invariante mais simples que (3.1) sem nenhuma perda de generalidade. Isto exemplifica a afirmação, feita no capítulo anterior, que sempre podemos igualar a unidade um dos coeficiente dos polinômios que compõe o ansatz (1.4) sem alterar sua generalidade. A escolha de dividir (3.2) por $h(q, t)$ deve-se a convenção feita anteriormente de igualar a unidade o coeficiente de maior grau existente no polinômio do numerador do ansatz (1.4).

Como, por definição, para uma função ser um invariante de movimento seu valor não deve variar com o passar do tempo, temos que a função $I(q, p, t)$ dada em (3.2) será um invariante de movimento para o hamiltoniano $H(q, p, t)$ dado em (2.1) se I e H verificarem a relação (1.1), que pode ser escrita como:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = 0.$$

Substituindo-se então (3.2) e (2.1) na equação acima, obtém-se a seguinte relação:

$$-\frac{L_q p^2 + (L_t + M_q)p + (M_t - LV_q)}{(Lp + M)^2} = 0, \tag{3.3}$$

isto é, uma razão entre dois polinômios em p.

Como a função $I(q, p, t)$ deve ter o mesmo valor sempre, não importando, por exemplo, que valores p possa assumir, temos, em conseqüência, que a equação (3.3) deve também ser válida para qualquer valor de p. Assim, para verificarmos (3.3) devemos anular cada coeficiente existente no polinômio do numerador desta equação, o que nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} L_q &= 0, & (a)\\ L_t + M_q &= 0, & (b)\\ M_t - LV_q &= 0. & (c) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Rigorosamente falando, o sistema de equações (3.4) verifica a equação (3.3) sempre que o polinômio do denominador de (3.3) for diferente de zero. Entretanto, como o polinômio do denominador somente é igual a zero quando $L = M = 0$, ou seja, quando o invariante que estamos estudando, dado em (3.2), não existe, temos que a solução da equação (3.3) é idêntica a solução do sistema (3.4).

Sendo agora a, b, c e d funções dependentes apenas de t, obtemos de (3.4a) que:

$$L(q,t) = a(t). \tag{3.5}$$

Substituindo-se agora (3.5) em (3.4b), podemos obter, após uma integração em relação a q, que:

$$M(q,t) = b - a'q, \tag{3.6}$$

onde $b = b(t)$ é a constante de integração.

Substituindo-se finalmente (3.5) e (3.6) em (3.4c) e fazendo-se, novamente, uma integração em relação a q, obtemos a seguinte equação:

$$aV(q,t) = -(c - b'q + \frac{1}{2}a''q^2), \qquad \textbf{(3.7)}$$

onde $c = c(t)$ é outra constante de integração.

Como não foi feito nenhuma restrição quanto aos valores que podem assumir as variáveis utilizadas, devemos agora, de acordo com (3.7), considerar dois casos: um quando $a = 0$ e outro quando $a \neq 0$.

3.2.1 $\boldsymbol{a = 0}$. Neste caso, podemos obter de (3.7) que:

$$c - b'q = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \text{e} \quad b = b_0 = cte$$

Substituindo-se estas relações em (3.6) obtemos que $M(q, t) = b_0 = cte$. Desta forma, o invariante (3.2) será dado por:

$$I(q,p,t) = (b_0)^{-1} = cte,$$

que, obviamente, não tem interesse fisico, pois já que sabemos que uma constante não varia.

3.2.2 $\boldsymbol{a \neq 0}$. Neste caso, com (3.7), temos que o potencial será dado por:

$$V(q,t) = \frac{-c + b'q - \frac{1}{2}a''q^2}{a}. \qquad \textbf{(3.8)}$$

Substituindo-se agora (3.5) e (3.6) no recíproco do invariante (3.2) que, como vimos, também é um invariante e, para simplificar, chamaremos igualmente de I, obtemos que:

$$I(q,p,t) = ap + b - a'q. \qquad \textbf{(3.9)}$$

Com isto obtemos o potencial e o invariante, dados pelas relações (3.8) e (3.9), respectivamente, que se pode obter com a forma (3.2) para o invariante e com a forma (2.1) para o hamiltoniano. Assim este par potencial-invariante pode ser utilizado em qualquer situação no qual o potencial possa ser escrito na forma (3.8), sendo que, para cada situação, as funções a, b e c terão uma forma específica. Deste modo estas funções não devem ser confundidas, de maneira nenhuma, com incógnitas a serem determinadas aqui. Assim, o fato destas funções não terem um valor específico implica que o par potencial-invariante obtido abrange uma grande variedade de situações. Dizemos assim que (3.8) nos fornece as classes de potenciais que admitem invariantes do tipo (3.9).

3.3 Determinação do invariante com as funções auxiliares Q, R e S

Veremos agora como os cálculos para obtenção de invariantes se tornam mais simples se utilizarmos as funções auxiliares Q, R e S, definidas por:

$$Q(q,t) = b - a'q, \qquad (a)$$

$$R(q,t) = c - b'q + \frac{1}{2}a''q^2, \qquad (b) \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$S(q,t) = d - c'q + \frac{1}{2}b''q^2 - \frac{1}{6}a'''q^3, \qquad (c)$$

sendo a, b, c e d funções dependentes apenas do tempo t.

Iremos utilizar estas funções neste e nos próximos capítulos pois, como veremos, elas se adaptam bem ao sistema de equações que se obtém para tornar o ansatz (1.4) um invariante, permitindo-nos assim compactar estas equações. Além disto, as derivadas das funções Q, R e S estão relacionadas da seguinte forma:

$$a' = -Q_q,$$

$$Q_t = -R_q,$$

$$R_t = -S_q.$$

Estas relações entre derivadas são bastante úteis pois nos permitem integrar facilmente, em relação a q ou t, derivadas destas funções em relação a q ou t, pois uma derivada em relação t pode ser convertida rapidamente numa derivada em relação a q e vive-versa.

Usando-se então estas funções auxiliares, obtém-se facilmente que a solução para o sistema (3.4) é dada por:

$$L(q,t) = a(t), \quad M(q,t) = Q(q,t) \quad \text{e} \quad V(q,t) = -\frac{R(q,t)}{a(t)}, \tag{3.11}$$

de forma que o par potencial-invariante será dado por:

$$V(q,t) = -\frac{R(q,t)}{a(t)} \quad \text{e} \quad I(q,p,t) = a(t)p + Q(q,t). \tag{3.12}$$

Como era de se esperar, obtivemos o mesmo resultado que antes, mas de uma forma muito mais rápida e simples. Por outro lado, pode-se observar que as soluções que obtivemos se escrevem de uma forma mais compacta que anteriormente, como havíamos mencionado.

Valem aqui as mesmas observações feitas na seção precedente, isto é, as funções a, b, c e d não são incógnitas a serem determinadas. Em conseqüência, vemos, com (3.10), que o mesmo é válido para as funções auxiliares Q, R e S.

3.4 Comparação com os resultados da literatura

Levando-se as últimas conseqüências a definição de ressonância feita por Lewis e Leach, temos que um invariante com uma ressonância é obtido fazendo-se $N = 1$ em (2.2). Se, além disto, fizermos também $c(t) = c_0 = cte$, obteremos invariantes com a seguinte forma:

$$I(q,p,t) = c_0 + \frac{v_1(q,t)}{p - u_1(q,t)} = \frac{v_1(q,t)}{p - u_1(q,t)}, \tag{3.13}$$

onde c_0, por ser constante, pode ser incorporada ao invariante.

Como podemos observar, temos em (3.13) a mesma dependência em p e o mesmo número de funções arbitrárias em q e t que em (3.2). Isto pode também ser visto também dividindo-se tanto o numerador quanto o denominador do último termo da equação acima por $v_1(q,t)$. Com isto a forma para o invariante (3.13) será exatamente igual a forma (3.2) que utilizamos neste capítulo. Por esta razão, e devido a convenção feita no capítulo anterior, chamamos (3.2) de caso particular de invariantes com uma ressonância.

O par potencial-invariante (3.8) e (3.9) ou (3.12) que obtivemos neste capítulo é exatamente igual ao par encontrado por Lewis e Leach[8], quando esses autores trabalharam com invariantes polinomiais. Como pode-se ver, o invariante (3.2) obtido neste capítulo não é racional mas polinomial em p, todavia nós o desenvolvemos para que pudéssemos ver um exemplo detalhado do emprego do método direto e, também, porque os valores assumidos por M e N aqui, isto é, 0 e 1, respectivamente, são os menores valores possíveis que fazem sentido utilizar-se em (1.4). Desta forma podemos dizer que começamos a abordar o problema desde o início.

Capítulo 4

Caso geral de invariantes com uma ressonância

4.1 Introdução

Segundo o esquema proposto no segundo capítulo, vamos estudar agora o caso que denominaremos de caso geral de invariantes com uma ressonância, que se obtém aumentando-se em um grau o polinômio do numerador do invariante estudado no capítulo anterior. Em seguida iremos comparar nossos resultados com o da literatura.

4.2 Determinação do par potencial-invariante

Fazendo-se então $M = 1$ e $N = 1$ em (1.4), obtém-se a seguinte forma geral para o invariante:

$$I(q,p,t) = \frac{p + H(q,t)}{L(q,t)p + M(q,t)}. \qquad \mathbf{(4.1)}$$

Procedendo-se então como descrito no capítulo 2 e exemplificado no capítulo 3, pode-se obter que (4.1) será um invariante de movimento para o hamiltoniano (1.2) se as seguintes relações forem satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
L_q &= 0, && (a)\\
L_t - LH_q + M_q &= 0, && (b)\\
HL_t - LH_t + HM_q - MH_q + M_t &= 0, && (c)\\
HM_t - MH_t + MV_q - LHV_q &= 0. && (d)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.2)}
$$

Sejam agora *a, b, c* e *d* funções apenas de *t* e *Q, R* e *S* funções auxiliares, definidas, como no capitulo 3, como:

$$
\begin{aligned}
Q(q,t) &= b - a'q, && (a)\\
R(q,t) &= c - b'q + \tfrac{1}{2}a''q^2, && (b)\\
S(q,t) &= d - c'q + \tfrac{1}{2}b''q^2 - \tfrac{1}{6}a'''q^3. && (c)
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.3)}
$$

podemos então verificar facilmente que as equações (4.2a) e (4.2b) tem, por construção, as seguintes soluções:

$$L(q,t) = a(t), \qquad \textbf{(4.4)}$$

$$M(q,t) = H(q,t)\,a(t) + Q(q,t). \qquad \textbf{(4.5)}$$

Substituindo-se agora (4.4) e (4.5) no recíproco do invariante dado em (4.1) que, para simplificar, também chamaremos de *I*, obteremos que:

$$I(q,p,t) = a(t) + \frac{Q(q,t)}{p + H(q,t)}. \qquad \textbf{(4.6)}$$

Finalmente, com (4.4) e (4.5), obtemos que (4.2c) será dada por:

$$Q(q,t)H(q,t) + R(q,t) = 0. \qquad \textbf{(4.7)}$$

Podemos observar agora que devemos considerar, como antes, dois casos. Um quando $Q(q,t) = 0$ e outro quando $Q(q,t) \neq 0$.

4.2.1 $Q(q, t) = 0$. Neste caso, podemos ver, com (4.6), que o invariante não terá interesse físico, pois será igual a uma constante, já que $Q(q, t) = 0$ implica também que $a = cte$.

4.2.2 $Q(q, t) \neq 0$. Neste caso, com (4.7) temos que:

$$H(q,t) = -\frac{R(q,t)}{Q(q,t)}. \qquad \textbf{(4.8)}$$

Substituindo-se agora (4.4), (4.5) e (4.8) em (4.2.d), obtemos a seguinte relação:

$$QV_q - \left[S - \frac{R^2}{Q}\right]_q = 0, \qquad \textbf{(4.9)}$$

ou, como $Q(q, t) \neq 0$,

$$V(q,t) = \int\left(\frac{1}{Q}\right)\left[S - \frac{R^2}{Q}\right]_q dq. \qquad \textbf{(4.10)}$$

Sendo $Q(q, t)$ um polinômio em p, o fato deste polinômio ser não nulo não implica que todos os coeficientes que compõe este polinômio, isto é a' e b, sejam ambos não nulos. Desta forma, antes de se fazer a integração deve-se considerar dois casos. Um quando $a' = 0$ e outro quando $a' \neq 0$.

4.2.3 $a' = 0$. Neste caso, que também pode ser escrito como $a = a_0 = cte$, pode-se ver com (4.6) que cairemos no caso estudado no capítulo 3 pois, se a é uma constante, ela pode ser incorporada ao invariante. Como resultado, temos que este caso equivale ao caso estudado no capítulo anterior, não havendo, portanto, necessidade de estudá-lo novamente. Entretanto, é interessante observarmos que se $a' = 0$ temos que $Q(q, t) = Q(t)$, de forma que a integração dada em (4.10) poderia ser realizada facilmente.

4.2.4 $a' \neq 0$. Neste caso, devemos determinar o potencial integrando-se a expressão dada em (4.10). Sendo que o integrando em (4.10) é composto por uma relação entre as funções auxiliares Q, R e S, que são polinômios em q, pode-se ver que este integrando será dado por uma razão entre dois polinômios, sendo o polinômio do denominador linear em q. Desta forma, a integração pode ser realizada manualmente, embora seja bastante trabalhosa. No entanto podemos tornar esta integração mais simples, observando-se que a relação (4.10) pode ser escrita também como:

$$V(q,t) = \frac{S}{Q} - \frac{R^2}{Q^2} + Q_q \int \left(\frac{S}{Q^2} - \frac{R^2}{Q^3} \right) dq.$$

Podemos ver agora que se utilizarmos a relação acima em vez de (4.10) não precisaremos mais derivar o integrando e, além disto, podemos separá-lo em duas partes, enquanto que o integrando de (4.10) não pode ser separado em menos que três partes.

Felizmente podemos também integrar (4.10) com auxílio do programa de resolução algébrica de equações *reduce*, que nos dá como resultado para o potencial a seguinte expressão:

$$V(q,t) = \frac{1}{8a''}\left[\frac{(a'')^2}{(a')^3}\right]' Q^2 + \frac{1}{a'}\left[\frac{b}{a'}\right]'' Q - \frac{a'^2}{8} f^2 Q^{-2} + \frac{1}{2} f' \ln Q + g, \tag{4.11}$$

onde $g = g(t)$ é uma constante de integração e $f = f(t)$ é dada por:

$$f = \frac{2c - (b^2/a')'}{a'}.$$

Substituindo-se finalmente (4.8) em (4.6), obtemos que o invariante de movimento correspondente ao potencial (4.11) pode ser escrito como:

$$I(q,p,t) = a(t) + \frac{Q^2(q,t)}{Q(q,t)p - R(q,t)}. \tag{4.12}$$

4.3 Comparação com os resultados da literatura

Fazendo-se agora $N = 1$ no ansatz (2.2) definido por Lewis e Leach, obtemos a seguinte forma para o invariante:

$$I(q,p,t) = c(t) + \sum_{n=1}^{1} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)} = \frac{cp + (v_1 - cu_1)}{p - u_1}, \tag{4.13}$$

que corresponde ao caso geral de invariantes com uma ressonância. Comparando-se (4.13) e

(4.12) vemos que estes dois invariantes são equivalentes, isto é, tanto (4.12) quanto (4.13) são formados por uma razão entre dois polinômio lineares em p, o que justifica assim o nome dado ao invariante (4.1).

O par potencial-invariante mais geral existente na literatura, correspondente a este caso, foi obtido por Lewis e Leach[10], e é dado por:

$$
\begin{aligned}
V(q,t) &= \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\alpha'}{\alpha^2}\right]' W^2 + \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\beta}{\alpha}\right]'' W - \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma'}{2\alpha}\right]^2 W^{-2} + \left[\frac{\gamma'}{2\alpha^2}\right]' \ln W + v_0(t), \\
I(q,p,t) &= -\int \alpha^2 dt + \frac{\alpha W}{p + \left[\frac{\beta}{\alpha}\right]' + \frac{\alpha'}{\alpha^2} W + \frac{\gamma'}{2\alpha} W^{-1}}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.14)}
$$

onde v_0 é uma constante de integração e $W = \alpha q + \beta$, sendo que α, β e γ são funções que dependem apenas de t.

Potenciais para o invariante (4.1) foram também obtidos usando-se o método das transformações canônicas[9]. Entretanto o potencial obtido neste caso é dado em função de apenas duas funções arbitrárias de t, enquanto que Lewis e Leach encontraram três funções, α, β e γ, arbitrárias de t no potencial.

Para podermos compararmos nossos resultados com os de Lewis e Leach, faremos uma mudança das variáveis a, b e c, para as variáveis $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{c}$, definida por:

$$a = -\int \mathfrak{a}^2 dt, \qquad b = \mathfrak{a}\mathfrak{B} \quad \text{e} \quad c = -\frac{1}{2}(\mathfrak{c}' + 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}'), \qquad \textbf{(4.15)}$$

onde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{c}$ são, naturalmente, funções apenas de t.

Substituindo-se então (4.15) em (4.11) e (4.12), obtemos que nosso par potencial-invariante pode também ser escrito como:

$$V(q,t) = \frac{1}{2a}\left[\frac{a'}{a^2}\right]'\omega^2 + \frac{1}{a}\left[\frac{B}{a}\right]''\omega - \frac{1}{2}\left[\frac{c'}{2a}\right]^2\omega^{-2} + \left[\frac{c'}{2a^2}\right]\ln\omega + \omega_0(t),$$

$$I(q,p,t) = -\int a^2 dt + \frac{a\omega}{p + \left[\frac{B}{a}\right]' + \frac{a'}{a^2}\omega + \frac{c'}{2a}\omega^{-1}}, \tag{4.16}$$

onde $\omega = aq + B$ e ω_0 é uma função arbitrária de t, que obtemos somando g de (4.11) com outras funções apenas de t, que sobraram no potencial após a transformação.

4.4 Conclusão

Comparando-se então o par potencial-invariante (4.16) com o par encontrado por Lewis e Leach, dado em (4.14), pode-se ver que ambos são idênticos, já que ambos apresentam a mesma dependência em q e contém o mesmo número de funções arbitrarias de t. Assim, neste caso, não obtivemos nenhum resultado novo.

Entretanto, como mencionamos no capítulo 2, para Lewis e Leach obterem o par potencial-invariante correspondente a este caso, a partir das 3 equações dadas em (2.3), eles tiveram de fazer uma série de transformações lagrangeanas, sendo que os cálculos necessários a este fim ocupam oito páginas em seu trabalho original. Além disto, para obter o potencial, dado em (4.14), os autores fazem uma integração de uma expressão bem mais complexa que a nossa, dada em (4.10).

Assim, podemos concluir que obtivemos neste caso um par potencial-invariante tão geral quanto o par mais geral existente na literatura. Entretanto, podemos observar que obtivemos nossos resultados utilizando apenas operações matemáticas elementares e, embora tenhamos sido auxiliados por um programa de resolução de equações, todos os cálculos podem ser realizados sem o uso de recursos computacionais. Podemos, desta forma, afirmar que nosso método de cálculo não é mais complicado que o método utilizados pelos autores que obtiveram o mesmo resultado que o nosso.

Capítulo 5

Caso particular de invariantes com duas ressonâncias

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar o invariante formado pela razão entre um polinômio linear e um polinômio quadrático em p. Diferentemente do caso anterior, não foi possível resolver-se, neste caso, todo o sistema de equações necessárias a obtenção do invariante. No entanto, encontramos soluções particulares para estas equações, que nos forneceu dois pares potenciais-invariantes diferentes, que iremos comparar com os existentes na literatura.

5.2 Determinação do par potencial-invariante

A forma geral do invariante que trataremos neste capítulo pode ser escrita como:

$$I(q,p,t) = \frac{p + H(q,t)}{K(q,t)p^2 + L(q,t)p + M(q,t)}, \tag{5.1}$$

e é obtida fazendo-se $M = 2$ e $N = 1$ em (1.4). Este invariante será denominado de caso particular de invariante com duas ressonâncias.

Utilizando-se então o método direto, como descrito anteriormente, pode-se obter que (5.1) será um invariante de movimento para o hamiltoniano (1.2) se as seguintes equações forem satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
K_q &= 0, && (a)\\
L_q + K_t - KH_q &= 0, && (b)\\
HL_q - LH_q + HK_t - KH_t + M_q - KV_q &= 0, && (c)\\
HL_t - LH_t + HM_q - MH_q + M_t - 2KHV_q &= 0, && (d)\\
HM_t - MH_t + V_q(M - LH) &= 0. && (e)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Usando-se então as funções auxiliares Q e R, dadas por:

$$
\begin{aligned}
Q(q,t) &= b - a'q,\\
R(q,t) &= c - b'q + \tfrac{1}{2}a''q^2,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

onde a, b e c são funções quaisquer de t, podemos facilmente verificar que as equações (5.2a) e (5.2b) tem, por construção, as seguintes soluções:

$$K(q,t) = a(t), \tag{5.4}$$

$$L(q,t) = H(q,t)a(t) + Q(q,t). \tag{5.5}$$

Para simplificarmos nossos cálculos, faremos agora uma mudança da variável M para a variável Y, dada por:

$$M(q,t) = Y(q,t) + H(q,t)Q(q,t), \tag{5.6}$$

onde Y é uma função qualquer de q e t.

Substituindo-se agora (5.4), (5.5) e (5.6) em (5.2c), obtemos a seguinte relação:

$$aV(q,t) = Y(q,t) - R(q,t), \tag{5.7}$$

que nos faz considerar dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$.

5.2.1 $a = 0$. Neste caso, com (5.4) vemos que $K(q, t) = 0$, o que implica que a forma do invariante (5.1) será equivalente ao invariante abordado no capítulo 4, de forma que não há necessidade de prosseguirmos, pois já conhecemos o resultado deste caso.

5.2.2 $a \neq 0$. Neste caso podemos obter de (5.7) que o potencial será dado por:

$$V(q,t) = \frac{Y(q,t) - R(q,t)}{a(t)}. \tag{5.8}$$

Substituindo-se agora as relações (5.4), (5.5), (5.6) e (5.8) em (5.2d), obteremos que

$$[YH]_q - Y_t = 0, \tag{5.9}$$

ou seja, temos uma primeira relação entre Y e H.

Substituindo-se finalmente (5.5), (5.6), (5.8) e (5.9) em (5.2e) podemos obter que

$$\left[\frac{1}{2}H^2 + \frac{Y - R}{a}\right]_q - H_t = 0, \tag{5.10a}$$

isto é, uma segunda relação entre Y e H, que também pode ser escrita, com (5.9), como:

$$\left[\frac{1}{2}H^2 + V\right]_q - H_t = 0. \tag{5.10b}$$

Para obtermos a forma que o invariante vai assumir, devemos substituir (5.4), (5.5) e (5.6) no recíproco do invariante dado em (5.1) que, para simplificar, também será chamado de I. Obtemos assim que:

$$I(q,p,t) = a(t)p + Q(q,t) + \frac{Y(q,t)}{p + H(q,t)}. \tag{5.11}$$

Assim as relações (5.8) e (5.11) nos dão, respectivamente, a forma geral para o par potencial-invariante. Diferentemente do caso anterior, falta solucionarmos ainda as equações (5.9) e (5.10), de forma que o par potencial-invariante é dado em função duas variáveis, isto é, Y e H, que são as soluções destas equações.

É interessante observar-se que se tivermos $Y = 0$, o par potencial-invariante (5.8) e (5.11) será dado por:

$$V(q,t) = -\frac{R(q,t)}{a(t)} = -\frac{(c - b'q + \frac{1}{2}a''q^2)}{a},$$

$$I(q,p,t) = a(t)p + Q(q,t) = ap + b - a'q,$$

ou seja, obtém-se o par potencial-invariante que encontramos no capítulo 3, correspondendo ao caso particular de invariantes com uma ressonância. Temos então que uma condição necessária para obtermos o que chamamos de caso particular de invariantes com duas ressonâncias é que a função Y seja diferente de zero.

5.3 Determinação de soluções particulares

Como não foi possível resolvermos analiticamente o sistema de equações (5.9) e (5.10a) de maneira a obtermos a solução geral para este caso, iremos agora encontrar soluções particulares para estas equações. Com isto obteremos pares potenciais-invariantes particulares, isto é, o par obtido não é o mais geral possível. Uma maneira de se encontrar soluções para estas equações é pela escolha de determinadas formas para as funções $Y(q, t)$ e $H(q, t)$, isto é, escolhendo-se uma determinada dependência explícita para estas funções em relação a q, por exemplo, de forma que cada termo em q seja multiplicado por um coeficiente que é uma função arbitraria da outra variável na qual Y e H dependem, isto é, t. Desta forma, substituindo-se Y e H no sistema de equações (5.9) e (5.10a), podemos, em tese, ajustar estes coeficientes de modo que este sistema de equações seja satisfeito.

A princípio, podemos escolher diversas formas para Y e H e, então, substituindo a forma escolhida em (5.9) e (5.10a), podemos verificar se a escolha foi válida ou não. Entretanto, observando-se a equação (5.10a), vemos que ela relaciona Y e H com a função auxiliar R, que é, um polinômio em q cujos coeficientes são funções arbitrárias de t. Desta forma pode-se supor que ao menos uma parte das funções Y e H devem ter a forma de polinômios em q. Assim iremos supor que Y e H possam ser escritos exclusivamente como polinômios em q.

Substituindo-se então os polinômio Y e H em (5.9) e (5.10a), pode-se escrever finalmente cada equação como um polinômio em q, sendo que a soma de seus termos deve ser nula. Desta forma, para verificar-se cada equação, devemos anular cada coeficiente em ambos os polinômios, o que nos permite encontrar relações que, se satisfeitas, nos darão a forma procurada de Y e H. Tendo descrito a maneira pela qual resolveremos o sistema de equações restantes, vamos agora ver as soluções que se obtém escolhendo-se duas formas distintas para as funções Y e H.

5.3.1 Solução particular do tipo q^n. Neste caso vamos supor que Y e H possam ser escritos como:

$$\begin{aligned} Y(q,t) &= y_2 q^2 + y_1 q + y_0, \\ H(q,t) &= h_1 q + h_0, \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde as cinco incógnitas y_is e h_is são funções quaisquer de t.

Substituindo-se então (5.12) em (5.9) e (5.10a) obteremos, como explicado acima, um sistema de cinco equações diferenciais não-lineares, dado por:

$$\begin{aligned} y_2' - 3y_2h_1 &= 0, && (a) \\ y_1' - 2y_2h_0 - 2y_1h_1 &= 0, && (b) \\ y_0' - y_1h_0 - y_0h_1 &= 0, && (c) \\ a'' + h_1'a - 2y_2 - ah_1^2 &= 0, && (d) \\ b' - h_0'a + y_1 + ah_1h_0 &= 0. && (e) \end{aligned} \tag{5.13}$$

É conveniente passar-se agora das variáveis a, h_1 e h_0 para as variáveis l, j, m_0, através de uma transformação definida por:

$$a = \frac{l}{j}, \quad h_1 = \frac{j'}{j} \quad \text{e} \quad h_0 = \frac{m_0'}{j}, \tag{5.14}$$

onde l, j e m_0 são funções arbitrárias de t. Como podemos observar, esta mudança de variáveis não implica em nenhuma perda de generalidade às funções a, h_1 e h_0. Com (5.14), pode-se agora encontrar as seguintes soluções para (5.13a), (5.13b) e (5.13c), respectivamente:

$$y_2 = c_2 j^3, \quad y_1 = (2c_2m_0 + c_3)j^2 \quad \text{e} \quad y_0 = (c_2m_0^2 + c_3m_0 + c_4)j, \tag{5.15}$$

onde os c_i são constantes.

Com (5.14) e (5.15), as equações (5.13d) e (5.13e) serão dadas por:

$$[l'/j^2]' = 2c_2j^2, \tag{5.16}$$

e

$$b' = l\left[\frac{m_0'}{j^2}\right]' - j^2(2c_2m_0 + c_3). \qquad \textbf{(5.17)}$$

Substituindo-se agora (5.12), (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17), em (5.8), obtermos que o potencial será dado por:

$$V(q,t) = \frac{j}{2}\left[\frac{j'}{j^2}\right]' q^2 + j\left[\frac{m_0'}{j^2}\right]' q + v_0(t), \qquad \textbf{(5.18)}$$

onde, como c é uma função arbitrária de t, nós a escrevemos como:

$$c = -\frac{l}{j}v_0 + j(c_2m_0^2 + c_3m_0 + c_4).$$

Substituindo-se finalmente (5.12) em (5.11) obteremos que o invariante será dado por:

$$I(q,p,t) = ap + b - a'q + \frac{y_2q^2 + y_1q + y_0}{p + h_1q + h_0}, \qquad \textbf{(5.19)}$$

onde os y_is, os k_is, a e b são dados em (5.14), (5.15), (5.16) e (5.17).

Assim obtemos o par potencial-invariante que corresponde a forma (5.12) escolhida para Y e H, sendo que o invariante possui duas ressonâncias. De fato, falta-nos ainda resolver a equação (5.16) já que b pode ser obtido imediatamente em (5.17).

Assim vamos fazer uma última transformação de variáveis e escrever j como:

$$j = (f')^{1/2}, \qquad \textbf{(5.20)}$$

onde f é uma função qualquer de t.

Substituindo-se então (5.20) em (5.16), podemos obter que:

$$l = c_2f^2 + d_1f + d_0, \qquad \textbf{(5.21)}$$

onde os d_i são constantes.

Com isto determinamos todas as variáveis envolvidas nesta escolha para Y e H e, em conseqüência, o par potencial-invariante correspondente.

5.3.2 Solução particular do tipo $q^{n/2}$. Neste outro exemplo, vamos supor que Y e H possam ser escritos como polinômios em q, como antes, mas, além disto, vamos incluir também nos polinômios potências semi-inteiras de q. Desta forma, vamos supor que Y e H possam ser escritos como:

$$\begin{aligned} Y &= y_2 q^2 + k_3 q^{3/2} + y_1 q + k_1 q^{1/2} + y_0, \\ H &= h_1 q + m_1 q^{1/2} + h_0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde todos os coeficientes que acompanham estes polinômios, isto é, y_i, k_i, h_i e m_i são funções arbitrárias de t.

Substituindo-se então (5.22) em (5.9) e (5.10a) pode-se obter, da mesma forma que anteriormente, um sistema formado por dez equações, que são:

$$\begin{aligned} y_2' - 3y_2 h_1 &= 0, & (a) \\ 2k_3' - 5y_2 m_1 - 5k_3 h_1 &= 0, & (b) \\ y_1' - 2y_2 h_0 - 2y_1 h_1 - 2k_3 m_1 &= 0, & (c) \\ 2k_1' - 3y_1 m_1 - 3k_1 h_1 - 3k_3 h_0 &= 0, & (d) \\ y_0' - y_1 h_0 - y_0 h_1 - k_1 m_1 &= 0, & (e) \\ y_0 m_1 + k_1 h_0 &= 0, & (f) \\ a'' + h_1' a - 2y_2 - a h_1^2 &= 0, & (g) \\ 2m_1' a - 3a h_1 m_1 - 3k_3 &= 0, & (h) \\ 2b' - 2h_0' a + 2y_1 + 2a h_1 h_0 + a m_1^2 &= 0, & (i) \\ a h_0 m_1 + k_1 &= 0. & (j) \end{aligned} \tag{5.23}$$

Como não conseguimos solucionar todas estas equações simultaneamente, diminuiremos um pouco o grau do polinômio Y, fazendo-se

$$y_2 = k_3 = 0. \tag{5.24}$$

Com isto, as equações (5.23a) e (5.23b) se anulam, restando então oito equações que, para resolvermos, iremos antes fazer antes uma transformação de variáveis, passando-se assim de

a, h_0 e h_1 para l, f e j, definida por:

$$a = l/j, \quad h_0 = fj \quad \text{e} \quad h_1 = j'/j, \tag{5.25}$$

onde l, j e f são funções arbitrárias de t. Com esta transformação, podemos encontrar para (5.23c), (5.23f), (5.23g), (5.23h) e (5.23j) as seguintes soluções:

$$y_1 = c_1 j^2, \quad y_0 = ljf^2, \quad k_1 = -c_2 lfj^{3/2} \quad \text{e} \quad m_1 = c_2 j^{3/2}, \tag{5.26}$$

onde os c_i são constantes arbitrárias.

Restam ainda três equações que podem ser simplificadas se impormos que $l = l_0 = cte$. Com isto, a solução destas equações é dada por:

$$l_0 = 4c_1/c_2^2, \quad b = (12c_1/c_2^2)f + c_5 \quad \text{e} \quad f' = -3j^2 c_1/2l_0. \tag{5.27}$$

Assim, obtemos todas as variáveis envolvidas nesta escolha para Y e H e podemos agora determinar o par potencial-invariante. Para encontrarmos o potencial, basta substituirmos em (5.8) as relações (5.22), (5.24), (5.25), (5.26) e (5.27), o que nos dá então:

$$V(q,t) = \frac{j}{2}\left[\frac{j'}{j^2}\right]' q^2 - \frac{7}{8}c_2^2 j^3 q - c_2 fj^{5/2} q^{1/2} + v_0(t), \tag{5.28}$$

onde, como c é uma função arbitrária de t, nós o escrevemos como

$$c = (4g^2 c_1 v_0 + 4f^2 c_1)/(gc_2^2) .$$

Para obtermos o invariante, vamos substituir (5.22) em (5.11) e, assim, obteremos que:

$$I(q,p,t) = ap + b - a'q + \frac{y_1 q + k_1 q^{1/2} + y_0}{p + h_1 q + m_1 q^{1/2} + h_0}, \tag{5.29}$$

onde os y_is, h_is, k_1, m_1, a e b são dados por (5.25), (5.26) e (5.27).

5.4 Comparação com os resultados da literatura

Embora a forma do invariante utilizado neste capítulo tenha sofrido alterações, devido aos resultados obtidos para os termos que compõe o invariante, ele sempre pode ser escrito como uma razão entre um polinômio linear e um quadrático em p. Para se obter esta mesma relação a partir do ansatz de Lewis e Leach deve-se fazer em (2.2) $c(t) = cte$ e $N = 2$. Com isto (2.2) é dado por:

$$I(q,p,t) = \sum_{n=1}^{2} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)} = \frac{p(v_1 + v_2) - (v_1 u_2 - u_1 v_2)}{p^2 - p(u_1 + u_2) + u_1 u_2}, \qquad \textbf{(5.30)}$$

que, como podemos observar, tem a mesma dependência em p e o mesmo número de funções em q e t que o invariante (5.1). Assim, os invariantes (5.1) e (5.30) são equivalentes, o que nos permite, de acordo com a convenção feita no segundo capítulo, chamar (5.1) de caso particular de invariantes com duas ressonâncias.

Classes de potenciais para invariantes do tipo (5.1) foram estudadas apenas por Goedert e Lewis[27], que obtiveram em resultado o seguinte par potencial-invariante:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(q,t)}{\partial q} &= \frac{\rho''}{\rho} q + \frac{\rho\alpha'' - \alpha\rho''}{\rho} - \frac{1}{\rho^3\tau^2} \frac{2F_0(1 + F_0\lambda)^{1/2}}{(4 + 3F_0\lambda)}, \\ I(q,p,t) &= \frac{v_1}{(p - u_1)} + \frac{v_2}{(p - u_2)}, \end{aligned} \qquad \textbf{(5.31)}$$

onde as relações entre os v,s e u,s com ρ, α, e τ podem ser encontradas no trabalho destas autores. A fim compararmos este resultado com o nosso, precisamos, inicialmente, conhecer a dependência do potencial com q. Assim basta sabermos que $\lambda = (q - \alpha)/\rho$, que as funções α, ρ e τ são funções apenas de t e que F_0 é uma constante.

Comparando-se então o potencial (5.31) com o potencial (5.18) que obtivemos na seção 5.3.1, podemos ver imediatamente que estes potenciais são diferentes pois em (5.18) não temos nenhum termo em $q^{1/2}$, como em (5.31). Portanto o par que obtivemos no primeiro exemplo é diferente do par obtido por Goedert e Lewis.

Para compararmos os resultados que obtivemos na seção 5.3.2 com os de Goedert e Lewis devemos, ou integrar o potencial dado em (5.31) ou derivar o potencial obtido em (5.28), em relação a q. Como o programa *reduce* não conseguiu integrar a o potencial (5.31) obtido por Goedert e Lewis, vamos derivar em relação a q o potencial dado em (5.28). Podemos obter assim que:

$$\frac{\partial V(q,t)}{\partial q} = j\left[\frac{j'}{j^2}\right]' q - \frac{7}{8}c_2^2 j^3 - \frac{1}{2}c_2 f j^{5/2} q^{-1/2}. \tag{5.32}$$

Fazendo-se agora uma transformação da variável q para a variável x, dada por:

$$q = \frac{\rho(t)\,(x - 1)}{F_0} + \alpha(t). \tag{5.33}$$

podemos escrever o potencial (5.31) da seguinte forma:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = f_1(t)\,x + f_2(t) + f_3(t)\left[\frac{x^{1/2}}{1 + 3x}\right], \tag{5.34}$$

onde os f_is são funções apenas de t.

Pode-se observar agora que a dependência do potencial (5.34), obtido por Goedert e Lewis, em relação a coordenada, representada agora por x, é diferente da dependência do potencial que obtivemos, dado em (5.32), em relação a coordenada, que continua sendo representada por q. Assim o par potencial-invariante (5.28) obtido na seção 5.3.2 também é diferente do par (5.31) obtido por Goedert e Lewis.

5.5 Conclusão

Partindo-se então de um invariante formado pela razão entre um polinômio linear e outro quadrático em p, obtivemos, como resultado geral, um par potencial-invariante em função de duas variáveis que devem satisfazer um sistema formado de duas equações. Como vimos, este sistema de equações pôde ser compactado, sem nenhuma perda de generalidade, através de uma transformação de variáveis. Em seguida obtivemos duas soluções particulares para o sistema de equações em questão, que nos forneceu dois pares potenciais-invariantes diferentes.

Comparando-se então nossos resultados com o único caso equivalente existente na literatura, vimos que os pares que obtivemos são diferentes do par obtido por Goedert e Lewis. Como estes autores tiveram que utilizar códigos de computação, como explicado no capítulo 2, para encontrarem o par (5.31), enquanto que nosso método consiste em apenas fazer-se transformações de variáveis, pode-se dizer, também neste caso, que nosso método não é mais complicado que o método de Goedert e Lewis.

Por outro lado, é interessante observarmos que assim como obtivemos dois pares potenciais-invariantes diferentes do existente na literatura pode-se, a princípio, obter-se outros pares. Para isto, devemos obter outras soluções para o sistema de equações que não foi resolvido de forma geral, mas que, como vimos, admitem soluções particulares. Sabe-se, além disto, que este sistema admite, ao menos, mais uma solução particular, que forneça assim um par equivalente ao que já existe na literatura. Em conseqüência, vemos que o resultado geral que obtivemos neste capítulo, dado pelo par (5.8) e (5.11) mais as relações (5.9) e (5.10a), nos permite obter outras soluções particulares, diferentes das que já foram encontradas. Esta relativa facilidade em se encontrar novos pares potenciais-invariantes parece não ocorrer com o método de Goedert e Lewis, se observarmos a maneira como eles obtém seus resultados.

Capítulo 6

Caso geral de invariantes com duas ressonâncias

6.1 Introdução

Neste capítulo trataremos do que chamamos de caso geral de invariantes com duas ressonâncias, formado pela razão de dois polinômios quadráticos em p. Como no capítulo anterior, não foi possível, neste caso, obter-se a solução geral para todo sistema de equações. Assim, tivemos de nos contentar em encontrar soluções particulares, que serão então comparadas com os resultados da literatura.

6.2 Determinação do par potencial-invariante

Neste capítulo vamos tratar de invariantes do tipo:

$$I(q,p,t) = \frac{p^2 + G(q,t)p + H(q,t)}{K(q,t)p^2 + L(q,t)p + M(q,t)}, \tag{6.1}$$

que pode ser obtido fazendo-se $M = 2$ e $N = 2$ em (1.4). Chamaremos este invariante de caso geral de invariante com duas ressonâncias.

Procedendo-se então de forma análoga ao que foi feito nos capítulos anteriores, pode-se encontrar que (6.1) será um invariante de movimento para o hamiltoniano (1.2) se o seguinte sistema de equações for satisfeito:

$$
\begin{aligned}
K_q &= 0, && (a)\\
L_q + K_t - KG_q &= 0, && (b)\\
GL_q - LG_q + GK_t - KG_t - KH_q + M_q + L_t &= 0, && (c)\\
GM_q - MG_q + GL_t - LG_t + HL_q - LH_q & && \\
+ HK_t - KH_t + M_t + V_q(L - GK) &= 0, && (d)\\
HM_q - MH_q + GM_t - MG_t + HL_t - LH_t + 2V_q(M - KH) &= 0, && (e)\\
HM_t - MH_t + V_q(GM - LH) &= 0. && (f)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(6.2)}
$$

Utilizando-se novamente as funções auxiliares Q, R e S, definidas por:

$$
\begin{aligned}
Q(q,t) &= b - a'q, && (a)\\
R(q,t) &= c - b'q + \tfrac{1}{2}a''q^2, && (b)\\
S(q,t) &= d - c'q + \tfrac{1}{2}b''q^2 - \tfrac{1}{6}a'''q^3. && (c)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(6.3)}
$$

onde a, b, c e d são funções exclusivamente de t, podemos facilmente verificar que as equações (6.2a), (6.2b) e (6.2c) tem as seguintes soluções:

$$K(q,t) = a(t), \qquad \mathbf{(6.4)}$$

$$L(q,t) = G(q,t)\,a(t) + Q(q,t), \qquad \mathbf{(6.5)}$$

$$M(q,t) = H(q,t)\,a(t) + G(q,t)\,Q(q,t) + R(q,t). \qquad \mathbf{(6.6)}$$

Se substituirmos agora as relações acima no recíproco do invariante (6.1), que continuaremos a chamar de I, obtemos como resultado que:

$$I(q,p,t) = a + \frac{Qp + GQ + R}{p^2 + Gp + H}. \qquad \mathbf{(6.7)}$$

Substituindo-se então (6.4), (6.5) e (6.6) em (6.2d), obtém-se que:

$$Q(q,t)\, V_q = \left[G(q,t) R(q,t) + H(q,t) Q(q,t) + S(q,t)\right]_q. \qquad \textbf{(6.8)}$$

Com a relação acima, podemos ver que deve-se examinar agora dois casos: um quando $Q(q,\, t) = 0$ e outro quando $Q(q,\, t) \neq 0$.

6.2.1 $Q(q,\, t) = 0$. Neste caso, vemos, por (6.3a), que isto implica também que $a' = 0$, ou seja, $a = a_0 = cte$. Assim, sendo $Q(q,\, t) = 0$ e $a = cte$, o invariante (6.7) será dado por:

$$I(q,p,t) = \frac{R}{p^2 + Gp + H}, \qquad \textbf{(6.9)}$$

pois incorporamos a constante a_0 ao invariante. Sendo que a forma deste invariante corresponde a um caso particular tanto invariante tratado no capítulo anterior como deste, não é necessário estudá-lo separadamente.

6.2.2 $Q(q,\, t) \neq 0$. Neste caso, pode-se agora explicitar a derivada do potencial, dado em (6.8). Substituindo-se então (6.4), (6.5), (6.6) e (6.8) em (6.2e) e (6.2f), obtém-se como resultado as seguintes equações:

$$\begin{aligned} &G^2 R_q Q + 2GG_q QR + G(Q_q QH + H_q Q^2 + S_q Q + 2R_q R) \\ &+ G_q(Q^2 H + 2R^2) + 2Q_q HR - G_t QR + H_q QR - H_t Q^2 + 2S_q R = 0, \end{aligned} \qquad \textbf{(6.10)}$$

$$\begin{aligned} &G^3 R_q Q + G^2 G_q QR + G^2(Q_q QH + H_q Q^2 + S_q Q + R_q R) \\ &+ GG_q R^2 + G(Q_q HR + H_q QR - H_t Q^2 + S_q R - 2R_q QH) \\ &- G_q QHR + Q(-2Q_q H^2 + G_t QH - H_q QH - H_t R - 2S_q H) = 0, \end{aligned} \qquad \textbf{(6.11)}$$

que relacionam as duas variáveis que restam a se determinar, isto é, G e H.

Pode-se agora simplificar as equações acima com uma transformação das variáveis G e H para as variáveis Y e N, dada por:

$$N(q,t) = G(q,t) + \frac{R(q,t)}{Q(q,t)} \quad \text{e} \quad Y(q,t) = H(q,t)\, Q(q,t) + N(q,t)\, R(q,t), \qquad \textbf{(6.12)}$$

onde Y e N são funções quaisquer de q e t. Isolando-se então G e H em (6.12) e substituindo-se o resultado em (6.10), obtém-se que:

$$[YN]_q - 2Y\left[\frac{R}{Q}\right]_q - Y_t = 0. \tag{6.13}$$

Utilizando-se agora as expressões para G e H dadas em (6.12) e, usando-se ainda (6.13), obtém-se que (6.11) será dada por:

$$[YQ]_q + Q\left[S - \frac{R^2}{Q}\right]_q + Q^2[NN_q - N_t] = 0. \tag{6.14}$$

Podemos agora encontrar a forma final que assumirá o potencial, substituindo-se (6.12) na relação (6.8), o que nos dá então que:

$$V(q,t) = \int \frac{1}{Q}\left[Y + S - \frac{R^2}{Q}\right]_q dq, \tag{6.15}$$

ou ainda, devido as propriedades das integrais e ao resultado que obtivemos em (4.10), podemos também escrever o potencial como:

$$V(q,t) = \int \frac{Y_q}{Q} dq + \frac{1}{8a''}\left[\frac{(a'')^2}{(a')^3}\right]' Q^2 + \frac{1}{a'}\left[\frac{b}{a'}\right]'' Q - \frac{a^2}{8} f^2 Q^{-2} + \frac{1}{2} f' \ln Q + g, \tag{6.16}$$

onde g e f são funções de t, dadas no capítulo 4.

Finalmente, o invariante, dado em (6.7), devido a transformação (6.12) será dado por:

$$I(q,p,t) = a + \frac{Q^2(p + N)}{Qp^2 + p(QN - R) + Y - NR}, \tag{6.17a}$$

ou, equivalentemente, como

$$I(q,p,t) = a + \frac{Q^2(p + N)}{(Qp - R)(p + N) + Y}. \tag{6.17b}$$

Com isto, obtemos o par potencial-invariante (6.16) e (6.17), respectivamente, em função de duas variáveis, Y e N, as quais devem, entretanto, satisfazer o sistema de equações diferenciais parciais não-lineares (6.13) e (6.14).

Antes de procurarmos soluções para estas equações, é interessante observar que quando $Y = 0$, o par potencial-invariante (6.15) e (6.17b) será dado por:

$$V(q,t) = \int \frac{1}{Q}\left[S - \frac{R^2}{Q}\right]_q dq, \quad \text{e} \quad I(q,p,t) = a + \frac{Q^2}{Qp - R},$$

que é exatamente o par que obtivemos quando estudamos o caso geral de invariantes com uma ressonância. Assim, temos que uma condição necessária para a obtenção de invariantes com duas ressonâncias é que a função Y seja diferente de zero.

6.3 Determinação de soluções particulares

Como não conseguimos solucionar as equações (6.13) e (6.14) genericamente, vamos então encontrar soluções particulares para estas equações. Para isto, procederemos da mesma forma que no capítulo anterior, ou seja, vamos dar a Y e N uma certa dependência explícita em q, tal que, substituída em (6.13) e (6.14), nos permita ajustar os coeficientes que acompanham q de forma a satisfazermos estas equações.

Observando-se agora as equações que devemos solucionar, isto é, (6.13) e (6.14), vemos que as variáveis Y e N estão relacionadas a polinômios de q, por intermédio de Q, R e S. Desta forma, podemos supor que estas variáveis devem também poderem ser escritas como polinômios de q.

Expressando-se então Y e N como polinômios em q e substituindo-os em (6.13) e (6.14), obtemos um polinômio em q ou uma razão entre dois polinômios em q, conforme a escolha de Y e N, em cada uma dessas equações. Igualando-se os coeficientes destes polinômios a zero, ou os coeficientes do polinômio do numerador, quando for o caso, podemos encontrar relações que, se satisfeitas, nos permitirão determinar as funções Y e N e, assim, o par potencial-invariante. A seguir, veremos então os resultados que obtivemos para duas escolhas distintas de Y e N.

6.3.1 Solução particular do tipo q^n. Neste caso, vamos supor que Y e N possam ser escritos como:

$$N(q,t) = n_1 q + n_0, \qquad \textbf{(6.18)}$$

$$Y(q,t) = y_3 q^3 + y_2 q^2 + y_1 q + y_0, \tag{6.19}$$

onde todos os coeficientes y_i e n_i são funções apenas de t.

Substituindo-se então (6.19) e (6.18) em (6.13) e (6.14), podemos obter que estas últimas relações serão satisfeitas se o seguinte sistema de equações também o for:

$$\begin{aligned}
& y_3' a' - a'' y_3 - 4a' y_3 n_1 = 0, && (a) \\[6pt]
& y_2' a^2 - 2y_3' a' b - a'' a' y_2 + 2a'' y_3 b - 3a^2 y_2 n_1 \\
& \qquad - 3a^2 y_3 n_0 + 8a' y_3 b n_1 = 0, && (b) \\[6pt]
& 2y_2' a' b - y_1' a^2 - y_3' b^2 + a'' a' y_1 - 2a'' y_2 b \\
& + 2a^2 y_2 n_0 + 2a^2 y_1 n_1 - 6a' y_2 b n_1 - 2a' y_3 c - 6a' y_3 b n_0 \\
& \qquad + 2b' y_3 b + 4y_3 b^2 n_1 = 0, && (c) \\[6pt]
& y_2' b^2 - 2y_1' a' b + y_0' a^2 - a'' a' y_0 + 2a'' y_1 b \\
& - a^2 y_1 n_0 - a^2 y_0 n_1 + 2a' y_2 c + 4a' y_2 b n_0 + 4a' y_1 b n_1 \\
& \qquad - 2b' y_2 b - 3y_2 b^2 n_1 - 3y_3 b^2 n_0 = 0, && (d) \\[6pt]
& y_1' b^2 - 2y_0' a' b + 2a'' y_0 b + 2a' y_1 c + 2a' y_1 b n_0 \\
& \qquad + 2a' y_0 b n_1 - 2b' y_1 b - 2y_2 b^2 n_0 - 2y_1 b^2 n_1 = 0, && (e) \\[6pt]
& y_0' b^2 + 2a' y_0 c - 2b' y_0 b - y_1 b^2 n_0 - y_0 b^2 n_1 = 0, && (f) \\[6pt]
& 2a''' a' - 3a^2 - 4a^2 n_1' + 4a^2 n_1^2 - 16a' y_3 = 0, && (g) \\[6pt]
& a''' a' b - a^2 b - 2a'' a' b' + a^3 n_0' - a^3 n_1 n_0 \\
& + a^2 b'' - 3a^2 n_1' b + 3a^2 y_2 + 3a^2 b n_1^2 - 7a' y_3 b = 0, && (h) \\[6pt]
& 2c' a^2 + a''' b^2 - 2a'' a' c - 6a'' b' b + 6a^2 n_0' b \\
& - 4a^2 y_1 - 6a^2 b n_1 n_0 + 4a' b'' b - 2a' b^2 - 6a' n_1' b^2 \\
& \qquad + 10a' y_2 b + 6a' b^2 n_1^2 - 6y_3 b^2 = 0, && (i) \\[6pt]
& 2c' a' b - 2a'' c b + a^2 y_0 + 3a' n_0' b^2 - 3a' y_1 b \\
& - 3a' b^2 n_1 n_0 + b'' b^2 - 2b^2 b - n_1' b^3 + 2y_2 b^2 + b^3 n_1^2 = 0, && (j) \\[6pt]
& c' b^2 + a' y_0 b + a' c^2 - 2b' c b + n_0' b^3 - y_1 b^2 - b^3 n_1 n_0 = 0. && (k)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Para resolvermos este sistema, faremos uma transformação de variáveis, de forma a expressar a, b e n_1 em função de l, m e j, dada por:

$$a = \int l^{-1} dt, \quad b = mjl^{-2}, \quad \text{e} \quad n_1 = -j'/j, \tag{6.21}$$

onde supomos que $l\,.\,j \neq 0$. Podemos observar que esta transformação de variáveis não afeta a generalidade dos resultados já que l, m e j são, como a, b e n_1 funções quaisquer de t.

Substituindo-se então (6.21) em (6.20), obtém-se que a solução para 10 destas 11 equações é dada por:

$$\begin{aligned} n_0 &= -jm', & y_3 &= c_3 j^{-4} l^{-2}, \\ y_2 &= -3c_3 mj^{-3} l^{-2}, & y_1 &= 3c_3 m^2 j^{-2} l^{-2}, \\ y_0 &= -c_3 m^3 j^{-1} l^{-2}, & c &= \tfrac{1}{2}\left[(mjl^{-1})^2\right]', \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde c_3 é uma constante arbitrária de integração, sendo a equação que restou dada por:

$$j^3[lj'' - jl''] - 4c_3 l = 0, \tag{6.23}$$

e relaciona, assim, j com l.

Desta forma, as relações (6.22) e a equação (6.23) são as soluções do sistema (6.20) e podemos agora encontrar o par potencial-invariante. Utilizando-se então (6.19) e (6.22), obtemos com (6.16) que o potencial será dado por:

$$V(q,t) = -\frac{l^3(j^4 l'' + 3c_3 l)}{2j^4} Q^2 + l^2(mj)'' Q + v_0(t), \tag{6.24}$$

onde $v_0(t)$ é uma constante de integração e Q é a função auxiliar definida em (6.3a).

Substituindo-se finalmente (6.18), (6.19), (6.3a) e (6.3b) em (6.17a), podemos obter que o invariante será dado por:

$$I(q,p,t) = a + \frac{Q^2(p + n_1 q + n_0)}{Qp^2 + A(q,t)p + B(q,t)}, \tag{6.25}$$

onde A e B são polinômios em q, dados por:

$$A(q,t) = Q(n_1 q + n_0) - R,$$

$$B(q,t) = y_3 q^3 + y_2 q^2 + y_1 q + y_0 - (n_1 q + n_0)R, \tag{6.26}$$

sendo os y_i, n_i, a, b e c funções dadas em (6.22) e (6.23) e Q e R nossos polinômios auxiliares. Com isto determinamos todas as variáveis envolvidas nesta escolha particular de Y e N e o par potencial-invariante correspondente.

6.3.2 Solução particular do tipo q^{-n}. Neste caso vamos expressar Y e N como polinômios da função auxiliar Q e, assim, como polinômios de q. Escrevendo-se então Y e N como:

$$Y(q,t) = k_1 Q^{-1}, \tag{6.27}$$

$$N(q,t) = n_1 Q + n_0 + m_1 Q^{-1}, \tag{6.28}$$

onde os n_is, k_l e m_l são funções exclusivas de t e Q é dado por $b - a'q$, como usualmente.

Substituindo-se então (6.26) e (6.27) em (6.13) e (6.14), pode-se obter o seguinte sistema de equações:

$$2a''k_1 - a'k_1' = 0, \qquad (a)$$

$$5a''bk_1 + a^2k_1n_0 + a'b'k_1 - 3a'k_1'b = 0, \qquad (b)$$

$$\begin{aligned} &3a''b^2k_1 - 2a^2ck_1 + 2a^2bk_1n_0 \\ &+ 2a^2k_1m_1 + 4a'b'bk_1 - 3a'k_1'b^2 = 0, \end{aligned} \qquad (c)$$

$$2a'ck_1 - a'bk_1n_0 - 2a'k_1m_1 - 3b'bk_1 + k_1'b^2 = 0, \qquad (d)$$

$$2a'''a' - 3a^2 + 4a''a^2n_1 + 4a^4n_1^2 + 4a^3n_1' = 0, \qquad (e)$$

$$\begin{aligned} &a'''a'b - a^2b + 3a''a^2bn_1 - 2a''a'b' + 4a^4bn_1^2 \\ &+ a^4n_1n_0 + a^3b'n_1 + 4a^3n_1'b + a^3n_0' + a^2b'' = 0, \end{aligned} \qquad (f) \quad \textbf{(6.29)}$$

$$\begin{aligned} &2c'a^2 + a'''b^2 - 2a''a'c + 6a''a'b^2n_1 - 2a''a'm_1 \\ &- 6a''b'b + 12a^3b^2n_1^2 + 6a^3bn_1n_0 + 6a^2b'bn_1 + 12a^2n_1'b^2 \\ &+ 6a^2n_0'b + 2a^2m_1' + 4a'b''b - 2a'b^2 = 0, \end{aligned} \qquad (g)$$

$$\begin{aligned} &2c'a'b - 2a''cb + a''b^3n_1 - a''bm_1 + 4a^2b^3n_1^2 \\ &+ 3a^2b^2n_1n_0 - a^2n_0m_1 + 3a'b'b^2n_1 - a'b'm_1 + 4a'n_1'b^3 \\ &+ 3a'n_0'b^2 + 2a'm_1'b + b''b^2 - 2b^2b = 0, \end{aligned} \qquad (h)$$

$$\begin{aligned} &c'b^2 + a'c^2 + a'b^4n_1^2 + a'b^3n_1n_0 - a'bn_0m_1 - a'm_1^2 \\ &- 2b'cb + b'b^3n_1 - b'bm_1 + n_1'b^4 + n_0'b^3 + m_1'b^2 = 0. \end{aligned} \qquad (i)$$

Para solucionarmos estas equações, faremos novamente uma mudança de variáveis, de a, b e n_1 para l, m e j, dada por:

$$a = \int l\,dt, \qquad b = ml, \qquad e \qquad n_1 = jl^{-1}, \qquad \textbf{(6.30)}$$

onde l, m e j são funções quaisquer de t. Também agora, pode-se observar que a transformação definida por (6.30) não acarreta nenhuma perda de generalidade para as funções a, b e n_1.

Com (6.30) podemos encontrar as seguintes soluções para 8 destas 9 equações:

$$\begin{aligned} k_1 &= c_1l^2, & c &= \tfrac{1}{2}[lm^2]' + c_2l, \\ n_0 &= -m', & m_1 &= c_2l, \end{aligned} \qquad \textbf{(6.31)}$$

onde os c_i são constantes arbitrárias. Com (6.30) e (6.31), a equação que resta, relacionando j com l, é dada por:

$$4l^2[j' + j^2] + 2l''l - 3(l')^2 = 0. \qquad \textbf{(6.32)}$$

O potencial neste caso, obtido substituindo-se (6.27), (6.30) e (6.31) em (6.16), será dado por:

$$V(q,t) = \frac{2l''l - 3(l')^2}{8l^4}Q^2 + \frac{m''}{l}Q + l^2\left[\frac{c_1 - c_2^2}{2}\right]Q^{-2} + v_o(t), \qquad \textbf{(6.33)}$$

onde v_0 é uma função de t.

Substituindo-se finalmente (6.27) e (6.28) em (6.17a), obtemos que o invariante correspondente a este caso será dado por:

$$I(q,p,t) = a + \frac{Q^3p + Q^2[n_1Q^2 + n_0Q + m_1]}{Qp^2 + A(q,t)p + B(q,t)}, \qquad \textbf{(6.34)}$$

onde A e B são dados por:

$$\begin{aligned} A &= Q(n_1Q^2 + n_0Q + m_1 - R), \\ B &= k_1 - R(n_1Q^2 + n_0Q + m_1), \end{aligned} \qquad \textbf{(6.35)}$$

sendo Q e R dados por (3.2a) e (3.2b) e os n_i, m_i, k_i, a e b dados em (6.30), (6.31) e (6.32).

6.4 Comparação com os resultados da literatura

Fazendo-se então $N = 2$ no ansatz (2.1) de Lewis e Leach, obtém-se a seguinte forma geral para o invariante:

$$\begin{aligned} I(q,p,t) &= c(t) + \sum_{n=1}^{2} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)}, && (a) \\ &= \frac{cp^2 + p[v_1 + v_2 - c(u_1 + u_2)] + (cu_1u_2 - v_1u_2 - u_1v_2)}{p^2 - p(u_1 + u_2) + u_1u_2}, && (b) \end{aligned} \qquad \textbf{(6.36)}$$

que, como podemos ver, é equivalente ao invariante tratado neste capítulo, pois tem a mesma dependência em p e o mesmo número de variáveis em q e t que (6.1). Por isto, chamamos o invariante (6.1) de caso geral de invariantes com duas ressonâncias.

O único par conhecido até agora para este tipo de invariante foi encontrado por Goedert e Lewis[27], e é dado por:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial V(q,t)}{\partial q} &= -V_{-3}X^{-3} - V_{-1}X^{-1} - V_0 - V_1 X, \\
I(q,p,t) &= -\int^{t} \epsilon_1(t)dt' + \frac{X}{2}\left[\frac{1-\delta_\tau}{p-u_+} + \frac{1+\delta_\tau}{p-u_-}\right],
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

onde $X = \epsilon_1 q + \epsilon_2$ e os V_is são funções apenas de t, e as relações entre δ_τ, u_+, u_- e ϵ_i com os V_i podem ser encontradas no trabalho destes autores.

Podemos observar agora que, em relação a dependência do potencial com a coordenada, o potencial de Goedert e Lewis apresenta uma soma de termos em q^{-2}, ln q, q e q^2, sendo que o potencial que obtivemos em nossa primeira solução particular, dado em (6.24), apresenta termos em q^2 e q, enquanto que na segunda solução, dada em (6.33), temos termos em q^2, q e q^{-2}. Assim, podemos dizer que nossas soluções particulares parecem ser diferentes do resultado existente na literatura. Dizemos que elas parecem diferentes pois nossas soluções poderiam perfeitamente serem um caso particular do par potencial-invariante obtido por Goedert e Lewis. Para verificarmos esta possibilidade deve-se conhecer a forma exatas dos termos V_i dados em (6.37). Como isto não foi possível pois, para explicitar-se estes termos deve-se fazer uma série de transformações de variáveis não muito evidentes, não podemos concluir com certeza se obtivemos dois potenciais-invariantes diferentes dos existentes na literatura. No entanto, podemos concluir, da mesma forma que anteriormente, que certamente existem outras soluções particulares para este caso.

Embora não conseguimos comparar conclusivamente o par (6.37) com os que obtivemos nos exemplos *1* e *2*, podemos comparar os métodos de obtenção desses pares. Assim, como vimos no capítulo 2, para obter o par (6.37) Goedert e Lewis fazem uma série de transformações com as equações (2.3c), (2.4) e (2.11), obtidas por sua vez das equações (2.3) dadas no trabalho anterior de Lewis e Leach, obtendo então uma equação diferencial parcial não-linear para resolverem. Em seguida estes autores conseguem encontrar uma função de q e t que, substituída nesta equação, permite sua solução e, por conseguinte, permite a obtenção do par dado em (6.37).

Por outro lado, o nosso procedimento consiste em encontrar duas variáveis que devem satisfazer um sistema de duas equações diferenciais parciais não-lineares. Este sistema, no entanto, permite-nos, como vimos, através de tentativas, descobrir outras possíveis dependências dessas variáveis com q e t, e, desta forma, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias para resolvermos.

Como, em geral, é mais fácil solucionar equações diferenciais ordinárias do que equações diferenciais parciais, podemos afirmar que usando-se o nosso método não teremos mais dificuldades para obter pares potenciais-invariantes do que se utilizarmos o método de Goedert e Lewis.

Capítulo 7

Caso particular invariantes com três ressonâncias

7.1 Introdução

Neste último capítulo vamos tratar de invariantes formados pela razão entre um polinômio quadrático e um polinômio cúbico em p, que chamaremos de caso particular de invariantes com três ressonâncias. Como já era de se esperar, não foi possível encontrarmos a solução geral para este caso, de forma que restou-nos a opção de obtermos uma solução particular para este tipo de invariante.

7.2 Determinação do par potencial-invariante

A forma geral do invariante que iremos tratar neste último capítulo é obtida fazendo-se $M = 2$ e $N = 3$ em (1.4). Com isto obtém-se o seguinte invariante:

$$I(q,p,t) = \frac{p^2 + G(q,t)p + H(q,t)}{J(q,t)p^3 + K(q,t)p^2 + L(q,t)p + M(q,t)}, \qquad \textbf{(7.1)}$$

que denominaremos de caso particular de invariante com três ressonâncias.

Procedendo-se então como nos capítulos anteriores, pode-se obter que (7.1) será um invariante de movimento para o hamiltoniano (1.2) se as seguintes equações forem satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
J_q &= 0, && (a)\\
JG_q - K_q - J_t &= 0, && (b)\\
KG_q - GK_q + JH_q + JG_t - GJ_t - K_t - L_q + JV_q &= 0, && (c)\\
LG_q - GL_q + KG_t - GK_t + KH_q - HK_q & \\
+ JH_t - HJ_t - M_q - L_t + 2V_qGJ &= 0, && (d) \qquad \textbf{(7.2)}\\
MG_q - GM_q + LG_t - GL_t + LH_q - HL_q & \\
+ KH_t - HK_t - M_t + V_q(GK - L + 3HJ) &= 0, && (e)\\
MH_q - HM_q + MG_t - GM_t + LH_t - HL_t + 2V_q(HK - M) &= 0, && (f)\\
MH_t - HM_t + V_q(HL - GM) &= 0. && (g)
\end{aligned}
$$

Utilizando-se novamente as funções auxiliares Q e R, definidas por:

$$
\begin{aligned}
Q(q,t) &= b - a'q,\\
R(q,t) &= c - b'q + \tfrac{1}{2}a''q^2,
\end{aligned}
$$

onde a, b e c são funções que dependem apenas de t, pode-se ver facilmente que (7.2a) e (7.2b) tem as seguintes soluções:

$$J(q,t) = a(t), \qquad \textbf{(7.3)}$$

$$K(q,t) = G(q,t)a(t) + Q(q,t). \qquad \textbf{(7.4)}$$

Para simplificar nossos cálculos, faremos agora uma transformação das variáveis G, L, M e H para Y, N, T e U, dada por:

$$G(q,t) = U(q,t) + N(q,t), \qquad \textbf{(7.5)}$$

$$L(q,t) = a(t)H(q,t) + Q(q,t)G(q,t) + Y(q,t), \qquad \textbf{(7.6)}$$

$$M(q,t) = Q(q,t)H(q,t) + U(q,t)Y(q,t), \qquad \textbf{(7.7)}$$

$$H(q,t) = U(q,t)N(q,t) + T(q,t), \qquad \textbf{(7.8)}$$

onde Y, N e T são funções quaisquer de q e t.

Substituindo-se então (7.3), (7.4) e (7.6) em (7.2c), obtém-se que:

$$a(t)\,V(q,t) = Y(q,t) - R(q,t). \qquad \textbf{(7.9)}$$

Observando-se (7.9), pode-se ver que deveremos agora considerar dois casos: um quando $a = 0$ e outro quando $a \neq 0$.

7.2.1 $\boldsymbol{a = 0}$. Neste caso, com (7.3) vemos que $J(q,t) = 0$ e, com (7.1), que o invariante torna-se equivalente ao estudado no capítulo anterior. Assim sendo, não há necessidade de continuarmos a investigar esta possibilidade.

7.2.2 $\boldsymbol{a \neq 0}$. Neste caso, com (7.9) obtemos que:

$$V(q,t) = \frac{Y(q,t) - R(q,t)}{a(t)}. \qquad \textbf{(7.10)}$$

Substituindo-se então (7.3), (7.4), (7.5), (7.6), (7.7), (7.8) e (7.10) em (7.2d), podemos obter que:

$$[YN]_q = Y_t, \qquad \textbf{(7.11)}$$

e, com a substituição destas mesmas relações acrescidas desta última em (7.2e), obtemos que:

$$Y\left\{\left[\frac{1}{2}N^2 + \frac{Y-R}{a}\right]_q - N_t\right\} = [YT]_q. \qquad \textbf{(7.12)}$$

Utilizando-se agora (7.3), (7.4), (7.5), (7.6), (7.7), (7.8) e (7.10) e ainda as relações (7.11) e (7.12), obtém-se que (7.2f) será dada por:

$$[YTU]_q + 2YTN_q = [YT]_t. \qquad \textbf{(7.13)}$$

Finalmente, com (7.3), (7.4), (7.6), (7.7), (7.8), (7.10), (7.11), (7.12) e (7.13), a relação (7.2g) pode ser escrita como:

$$Y\left\{\left[\frac{1}{2}U^2 + \frac{Y - R}{a} - T\right]_q - U_t\right\} = [YT]_q. \qquad \textbf{(7.14)}$$

Para obtermos a forma que o invariante irá assumir, em virtude dos resultados precedentes, vamos substituir (7.3), (7.4), (7.5), (7.6), (7.7) e (7.8) no recíproco do invariante dado em (7.1), que chamaremos igualmente de I. Com isto, o invariante (7.1) pode ser escrito como:

$$I(q,p,t) = ap + Q + \frac{Y(p + U)}{p^2 + Up + Np + NU + T}, \qquad \textbf{(7.15a)}$$

ou, igualmente,

$$I(q,p,t) = ap + Q + \frac{Y(p + U)}{(p + N)(p + U) + T}. \qquad \textbf{(7.15b)}$$

Obtemos então a forma geral para o par potencial-invariante, dado pelas relações (7.10) e (7.15), respectivamente, em função de quatro variáveis U, Y, N e T, as quais devem, no entanto, satisfazer um sistema formado por quatro equações diferenciais parciais não-lineares, dado por (7.11), (7.12), (7.13) e (7.14). Apesar de não termos conseguido resolver estas equações genericamente, iremos mostrar na próxima seção como encontrar soluções particulares para este sistema.

Antes de procurar soluções particulares para o sistema em questão, é interessante observarmos que quando $T = 0$, o par potencial-invariante será dado por:

$$V(q,t) = \frac{Y(q,t) - R(q,t)}{a(t)},$$

$$I(q,p,t) = a(t)p + Q(q,t) + \frac{Y(q,t)}{p + N(q,t)},$$

ou seja, obtém-se neste caso um par potencial-invariante idêntico ao obtido no capítulo 5, quando trabalhamos com o caso particular de invariantes com duas ressonâncias. Assim, temos que uma condição necessária para obtermos o que chamamos de caso particular de invariantes com três ressonâncias é que a função T seja não nula.

7.3 Determinação de uma solução particular

Para encontrarmos soluções particulares para as equações (7.11), (7.12), (7.13) e (7.14), vamos proceder da mesma maneira que nos capítulos anteriores, ou seja, escreveremos Y, N, U e T como polinômios em q e substituiremos estes polinômios nestas equações Como resultado, cada equação poderá também ser escrita como um polinômio em q, que deve ser igual a zero. Desta forma, anulando-se todos os coeficientes dos quatro polinômios que se obtém com estas quatro equações, podemos, a princípio, solucioná-las.

Assim, vamos supor que as funções Y, N, U e T possam todas serem escritas como polinômios em q, dados por:

$$\begin{aligned} Y(q,t) &= y_2 q^2 + y_1 q + y_0, \\ N(q,t) &= n_1 q + n_0, \\ T(q,t) &= t_2 q^2 + t_1 q + t_0, \\ U(q,t) &= u_1 q + u_0 = (g_1 - n_1)q + (g_0 - n_0), \end{aligned} \tag{7.16}$$

sendo que todos os coeficientes destes polinômios, isto é, os y_i, n_i, t_i e g_i são funções quaisquer de t. Observamos que embora a variável U tenha sido escrita diferentemente das outras, ela é um polinômio tão geral quanto N ou Y e T, se y_2 e t_2 fossem nulos.

Substituindo-se então (7.16) em (7.11), (7.12), (7.13) e (7.14) pode-se obter que estas equações serão verificadas se o seguinte sistema de equações também o for:

$$
\begin{aligned}
y_2' - 3y_2n_1 &= 0, && (a)\\
y_1' - 2y_2n_0 - 2y_1n_1 &= 0, && (b)\\
y_0' - y_1n_0 - y_0n_1 &= 0, && (c)\\
y_2(a'' + n_1'a + 4t_2a - 2y_2 - an_1^2) &= 0, && (d)\\
a''y_1 - b'y_2 + n_1'y_1a + n_0'y_2a + 3t_2y_1a & \\
+ 3t_1y_2a - 3y_2y_1 - y_2an_1n_0 - y_1an_1^2 &= 0, && (e)\\
a''y_0 - b'y_1 + n_1'y_0a + n_0'y_1a + 2t_2y_0a + 2t_1y_1a & \\
+ 2t_0y_2a - 2y_2y_0 - y_1^2 - y_1an_1n_0 - y_0an_1^2 &= 0, && (f)\\
b'y_0 - n_0'y_0a - t_1y_0a - t_0y_1a + y_1y_0 + y_0an_1n_0 &= 0, && (g)\\
y_2(t_2' - 5t_2g_1 + 6t_2n_1) &= 0, && (h) \qquad (7.17)\\
t_2'y_1 + t_1'y_2 - 4t_2y_2g_0 + 6t_2y_2n_0 - 4t_2y_1g_1 & \\
+ 4t_2y_1n_1 - 4t_1y_2g_1 + 5t_1y_2n_1 &= 0, && (i)\\
t_2'y_0 + t_1'y_1 + t_0'y_2 - 3t_2y_1g_0 + 4t_2y_1n_0 & \\
- 3t_2y_0g_1 + 2t_2y_0n_1 - 3t_1y_2g_0 + 5t_1y_2n_0 & \\
- 3t_1y_1g_1 + 3t_1y_1n_1 - 3t_0y_2g_1 + 4t_0y_2n_1 &= 0, && (j)\\
t_1'y_0 + t_0'y_1 - 2t_2y_0g_0 + 2t_2y_0n_0 - 2t_1y_1g_0 & \\
+ 3t_1y_1n_0 - 2t_1y_0g_1 + t_1y_0n_1 - 2t_0y_2g_0 & \\
+ 4t_0y_2n_0 - 2t_0y_1g_1 + 2t_0y_1n_1 &= 0, && (k)\\
t_0'y_0 - t_1y_0g_0 + t_1y_0n_0 - t_0y_1g_0 + 2t_0y_1n_0 - t_0y_0g_1 &= 0, && (l)\\
2a'' + g_1'a + 2t_2a - 4y_2 - ag_1^2 + 2ag_1n_1 - 2an_1^2 &= 0, && (m)\\
2b' - g_0'a - t_1a + 2y_1 + ag_0g_1 - ag_0n_1 - ag_1n_0 + 2an_1n_0 &= 0. && (n)
\end{aligned}
$$

Podemos simplificar um pouco este sistema de equações fazendo-se $n_1 = 0$. Com isto, o sistema de equações (7.17) fica mais simples e com duas equações a menos. Para resolvermos as equações restantes faremos uma transformação das variáveis g_1 e t_1 para l e j, dada por:

$$g_1 = -l'l^{-1} \quad \text{e} \quad t_1 = jl^{-4}, \tag{7.18}$$

onde l e j são funções quaisquer t.

Assim, com (7.18), pode-se ver que *9* das *12* equações restantes do sistema (7.17) são verificadas fazendo-se:

$$\begin{aligned} y_2 &= c_2, & y_1 &= \frac{2c_2 jl}{d_1}, \\ y_0 &= \frac{c_2 j^2 l^2}{d_1}, & n_0 &= \frac{1}{d_1}[jl]', \\ g_0 &= \frac{2lj' + jl'}{d_1}, & t_0 &= \frac{j^2}{2d_1 l^3}, \\ t_2 &= \frac{1}{2}d_1 l^{-5}, \end{aligned} \tag{7.19}$$

onde c_2 e d_1 são constantes arbitrárias.

Substituindo-se agora (7.18) e (7.19) nas equações que restaram do sistema (7.17), obtém-se que a, b e l devem satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a'' &= 2c_2 - 2d_1 a l^{-5}, \\ b' &= \frac{a}{d_1 l}[j'l^2]' - jal^{-4} - \frac{2c_2 jl}{d_1}, \\ l'' &= -3d_1 l^{-4}. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Podemos agora obter o potencial substituindo-se em (7.10) as relações (7.16), (7.18) e (7.19). Assim obteremos que:

$$V(q,t) = d_1 l^{-5} q^2 + \frac{1}{ld_1}\left[(j'l^2)' - d_1 j l^{-3}\right]q + v_0(t), \tag{7.21}$$

onde, como c é uma função qualquer de t, nós a escreveremos como:

$$c = (c_2 j^2 l^2 / d_1^2) - v_0 a.$$

Substituindo-se finalmente (7.16) em (7.15a), obteremos que o invariante será dado por:

$$I(q,p,t) = ap + b - a'q + \frac{(y_2q^2 + y_1q + y_0)[p + g_1q + g_0 - n_0]}{p^2 + (g_1q + g_0)p + n_0(g_1q + g_0) - n_0^2 + t_2q^2 + t_1q + t_0}, \quad \textbf{(7.22)}$$

onde os coeficientes y_i, g_i, n_0, t_i são dados por (7.18) e (7.19) e a, b e l são quaisquer funções que satisfazem (7.20). Com isto, obtemos o par potencial-invariante correspondente a escolha (7.16) feita para as variáveis Y, N, U e T.

7.4 Conclusão

Fazendo-se agora $c(t) = cte$ e $N = 3$ no ansatz de Lewis e Leach, dado em (2.2), obteremos a seguinte forma para o invariante:

$$I(q,p,t) = \sum_{n=1}^{3} \frac{v_n(q,t)}{p - u_n(q,t)},$$

que, pode-se ver, tem a mesma dependência em p e o mesmo número de variáveis em q e t que (7.1). Devido a isto, e a nossa convenção feita anteriormente, denominamos (7.1) de caso particular de invariantes com três ressonâncias.

Para este caso, Goedert e Lewis[27] não conseguiram encontrar nenhum invariante racional, mas apenas recíprocos de invariantes polinomiais. Assim, o par (7.21) e (7.22) que obtivemos é o primeiro par potencial-invariante conhecido na qual o invariante tem o que se chama de três ressonâncias.

Conclusão

Neste trabalho desenvolvemos um procedimento relativamente simples para a obtenção de invariantes racionais de movimento. Ele se baseia na observação que as equações obtidas com a utilização do método direto podem ser compactadas utilizando-se um conjunto de funções auxiliares que são, freqüentemente, soluções de alguns dos termos que compõe o invariante, e simplificadas através de transformações apropriadas de variáveis. Sem isto, as equações a serem resolvidas para a obtenção do invariante tornam-se, na maior parte dos casos, demasiadamente grandes e, em conseqüência, com menores possibilidades de solução.

Como resultado, obtivemos, de acordo com a nomenclatura de Lewis e Leach, resultados tão gerais quanto os existentes na literatura para o caso de invariantes com uma ressonância. Como estas soluções foram obtidas genericamente nos dois casos que esta definição engloba, pode-se dizer que estas soluções fornecem os pares potenciais-invariantes mais gerais possíveis. Para o caso de invariantes com duas ressonâncias, obtivemos uma forma geral para o par potencial-invariante dado em função de duas variáveis e duas relações que estas variáveis devem satisfazer. Em seguida obtivemos duas soluções particulares para os dois casos que esta definição engloba, isto é, para o que chamamos de caso geral e particular, sendo que no caso particular uma solução é certamente diferente do resultado existente na literatura e, para o caso que chamamos de geral, existe a possibilidade que nossas duas soluções particulares sejam um caso particular de resultados já existentes na literatura. Nestes casos, uma comparação conclusiva não pôde ser feita pois, para se conhecer a dependência temporal dos termos que compõe o invariante que é dado na literatura, é preciso se fazer antes uma série de transformações de variáveis. Finalmente, para o caso de três ressonâncias, obtivemos também uma forma geral para o par potencial-invariante, dado em função de quatro variáveis, juntamente com o sistema de equações que estas variáveis devem satisfazer. Em seguida, obtivemos uma solução particular para estas equações, que nos forneceu assim um par potencial-invariante, sendo que o invariante possui três ressonâncias. Como mencionamos, um par deste tipo não foi ainda apresentado na literatura.

De modo geral, podemos separar este trabalho em duas etapas distintas. A primeira consistiu na obtenção de uma solução geral do par potencial-invariante ou de uma solução geral em função de algumas variáveis, com as respectivas equações que estas variáveis devem satisfazer. Esta etapa foi a mais árdua, pois tivemos que encontrar as transformações de variáveis que tornavam este sistema de equações mais compacto e, assim, com possibilidade de solução. A outra parte consistiu na obtenção de soluções particulares para os casos nos quais a solução geral não pôde ser obtida. Isto foi feito fornecendo-se uma dependência particular, em relação a q, para as variáveis ainda desconhecidas. Como não desejávamos obter nenhum resultado em particular, para alguma aplicação específica, foi necessário encontrar dependências coerentes para todas as variáveis desconhecidas. No entanto, como a dependência destas variáveis com o potencial é simples, pode-se, num caso específico, onde o potencial é conhecido, obter facilmente a dependência exata de ao menos uma das variáveis em relação a q e t. Com isto pode-se descobrir mais facilmente a dependência em relação a q das outras variáveis.

Em relação a primeira etapa deste trabalho, pode-se observar que, em todos os casos estudados, supomos inicialmente que o invariante pudesse ser dado pela razão entre dois polinômios em p, e encontrávamos o sistema de equações que os coeficientes destes polinômios deviam satisfazer. Entretanto, ao solucionarmos as equações mais simples deste sistema, observávamos que as equações ainda não resolvidas tornavam-se cada vez maiores. Por outro lado, vimos que estas equações podiam ser reduzidas drasticamente de tamanho com algumas transformações apropriadas de variáveis. Isto aconteceu em todos os casos estudados, embora tenha sido mostrado mais explicitamente no capítulo *6*. Com estas transformações de variáveis, o invariante adquiria uma forma final sensivelmente diferente da forma inicial, embora equivalente. Como na maior parte deste trabalho tentamos encontrar estas transformações, vemos que se houvéssemos utilizado inicialmente um invariante com uma forma igual a forma final que encontramos, nosso trabalho teria sido bem mais simples, pois não haveria mais necessidade de se fazer estas transformações de variáveis. Assim somos levados a pensar que é mais apropriado utilizar esta forma final para se procurar invariantes racionais de movimento do que a forma inicial.

De fato, pode-se observar que obtivemos duas formas apropriadas um pouco distintas, dependendo da diferença dos graus dos polinômios que compõe o invariante. Isto pode ser visto comparando-se o resultado geral do par potencial-invariante obtido para os casos denominados de gerais, onde os polinômios tem o mesmo grau, e os particulares, onde o grau dos polinômios que compõe o invariante diferem por uma unidade. A existência de duas formas apropriadas é também indicada pelo fato que, por exemplo, o invariante na qual os polinômios que o compõe são ambos lineares é um caso particular do invariante na qual os polinômios o que compõe são ambos quadráticos. O mesmo ocorre em relação ao invariante formado por uma razão de um polinômio cúbico e um quadrático e o invariante formado pela razão de um polinômios quadrático e um linear.

Desta forma, sugerimos que outros estudos de invariantes racionais utilizem dois ansatz diferentes, que chamaremos de ansatz apropriados, um para o caso onde os polinômios que compõe o invariante tenham o mesmo grau, e outro para o caso onde estes polinômios tem graus diferentes. Para obtermos estes ansatz apropriados, vamos escrever I_{ij} como sendo um invariante racional formado por um polinômio de grau i dividido por um polinômio de grau j, contendo então $i + j + 1$ funções arbitrárias de q e t. Assim, os invariantes racionais apropriados mais simples nos dois casos serão dados por uma soma de uma parte não fracionária e outra fracionária, do tipo:

$$I_{11} = F_1 + \frac{F_2}{p + F_3}, \quad \text{e} \quad I_{21} = F_1 p + F_2 + \frac{F_3}{p + F_4},$$

onde as funções F_i dependem de q e t. Para obtermos agora os prôximos invariantes, devemos sempre acrescentar, em ambos os casos, um termos $(p - F_i)$ multiplicando o numerador e o denominador da parte fracionaria dos casos respectivos mais simples, e acrescentando-se ainda ao denominador um termo F_{i+1}. Assim, por exemplo, os próximos invariantes, contendo então duas variáveis arbitrárias a mais de q e t, serão dados por:

$$I_{22} = F_1 + \frac{F_2(p + F_4)}{(p + F_3)(p + F_4) + F_5}, \quad \text{e} \quad I_{32} = F_1 p + F_2 + \frac{F_3(p + F_5)}{(p + F_4)(p + F_5) + F_6},$$

e, assim, sucessivamente. Procedendo-se desta maneira, obtém-se invariantes com a mesma forma final obtida neste trabalho e, além disto, cada invariante pode ser obtido como um caso particular do próximo invariante, desde que este seja da mesma "família". Assim, por exemplo, vemos que se $F_5 = 0$ em I_{22} e $F_6 = 0$ em I_{32}, obteremos I_{11} e I_{22}, respectivamente.

Utilizando-se os ansatz descritos acima para procurar-se invariantes racionais de movimento pensamos ser possível simplificar consideravelmente e, mesmo, viabilizar este estudo. A simplificação provém do fato que não necessitaremos mais fazer transformação de variáveis para as funções F_i, já que o invariante se encontra na forma apropriada. A viabilização deve-se ao fato que as equações que agora serão obtidas com o método direto não serão demasiadamente grandes e poderão ser manipuladas. Além disto, para qualquer invariante racional I_{ij} que tenha a forma sugerida acima, obtém-se que $F_1 = a(t)$ e $F_2 = Q(q, t) = b - a'q$, sendo i igual ou diferente de j, qualquer que seja o valor de i e de j.

Referências

[1] W Sarlet, L.Y. Bahar, Inter. J. Non-Linear Mech. 15, 133 (1980)

[2] J. Hietarinta, Phys. Rev. Lett. 52, 1057 (1984)

[3] J. R. Ray, J. Math. Phys. A 13, 1969 (1980)

[4] J. S. Hall, Physica 8D, 90 (1983)

[5] W. Sarlet, Phys. Lett. A 82, 161 (1981)

[6] C. R. Holt, J. Math. Phys. 23, 1037 (1982)

[7] M. R. Feix, H. R. Lewis, J. Math. Phys. 26, 68 (1985)

[8] H. R. Lewis, P. G. Leach, J. Math. Phys. 23, 2371 (1982)

[9] P. G. Leach, H. R. Lewis, W. Sarlet, J. Math. Phys. 25, 486 (1984)

[10] H. R. Lewis, P. G. Leach, Annals of Phys. 164, 47 (1985)

[11] M. R. Feix, S. Bouquet, H. R. Lewis, Physica 28D, 80 (1987)

[12] A. Gautier, *Essai historique sur le problème des trois Corps*, Paris, 1817

[13] G. Schmidt, *Physics of high temperature plasmas*, 2nd ed., New York, Academic Press, 1979

[14] H. R. Lewis Jr., J. Math. Phys. 9, 1976 (1968)

[15] R Grant, *History of physical astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century*, London, 1852.

[16] E. T. Whittaker, *Report on the Progress of the evolution of the Problem of Three Bodies*, London, Brit. Ass. Rep., 1899

[17] J. Hietarianta, Phys. Rep. 89 (1987)

[18] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978

[19] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2^{ed}, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980

[20] M. Lutzky, J. Phys. A 11, 249 (1978)

[21] W. Sarlet, Phys. Lett. A 82, 161 (1981)

[22] W. Sarlet, L. Y. Bahar, Int. Non-Linear Mech. 16, 271 (1981)

[23] J. R. Ray, Phys. Lett. A 78, 4 (1980)

[24] G. E. Prince, C. J. Eliezer, J. Phys. A 13, 815 (1980)

[25] H. R. Lewis, Phys. Rev. 172, 1313 (1968)

[26] P. G. Leach, J. Math. Phys. 22, 465 (1981)

[27] J. Goedert, H. R. Lewis, J. Math. Phys. 28, 728 e 736 (1987)

[28] Giane Gringoletti, *Integrais de movimento racionais para sistemas dinamicos não-autônomos*, Tese UFSC, 1989