

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Curso de Pós-Graduação em Física

**Investigação de Fenômenos Não Lineares  
em Circuitos Eletrônicos**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

André Luiz de Oliveira

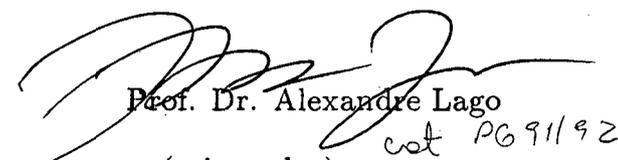
Florianópolis- Santa Catarina- Brasil

Fevereiro- 1993.

Investigação de Fenômenos Não Lineares  
em Circuitos Eletrônicos

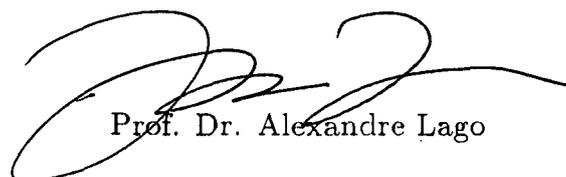
André Luiz de Oliveira

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do grau de Mestre em Ciências, especialidade em Física, e aprovada em sua forma final pelo orientador e demais membros da banca examinadora.

  
Prof. Dr. Alexandre Lago  
cot PG 91192  
(orientador)

  
Prof. Dr. Wagner Figueiredo  
(coordenador)

banca examinadora:

  
Prof. Dr. Alexandre Lago

  
Prof. Dr. Sérgio Artur Bianchini Bilac

  
Prof. Dr. Fernando Cabral

“À Adalgiza, minha eterna Flôr de Manacá”.

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao Prof. Alexandre Lago, pela imensa dedicação e paciência demonstrada ao longo da elaboração deste trabalho.
- Ao Prof. Fernando Cabral, pelas proveitosas discussões sobre os aspectos teóricos envolvidos neste tema.
- Ao Prof. Sérgio A. B. Bilac, pelo real interesse e ajuda na estruturação final deste trabalho.
- Ao Prof. Carlos V. Speller, pelo incentivo e apoio durante a elaboração do trabalho.
- À minha inestimável amiga Cláudia Mendes Mählmann, por todo incentivo, apoio e amizade demonstrados em todos estes anos de convivência.
- Aos amigos, Antônio Vanderlei dos Santos, José Arthur Martins, Milton José Cinelli, Liane M. Mählmann, Ivani T. Lawall, J. Pinho A. Neto, Sandro Fernando Stolf, Gean Carlo Dallagnolo e Allan Seeber, pelo incomparável apoio sem o qual tornar-se-ia impossível a realização do presente trabalho.
- Ao meu amigo e irmão Sérgio Galdino e sua esposa Adriana M. Galdino, pela ajuda fundamental na conclusão deste trabalho.
- À minha incansável família, meu Pai, minha Mãe e minhas Irmãs por sempre acreditar em mim e não deixar que por qualquer motivo eu desista dos meus objetivos.
- Aos meus sogros Ivete e Sidnei Roos , pelo apoio logístico dado ao longo do último ano de realização deste trabalho.
- A todos aqueles que contribuíram das mais diversas formas para a melhor realização desta tarefa.
- Aos órgãos financiadores CAPES e CNPq.

## RESUMO

Desenvolvemos um sistema automatizado para aquisição de dados e sua posterior análise voltada para o estudo de sistemas físicos que apresentem regime de operação caótico.

Com este sistema, realizamos um estudo sobre o comportamento de um circuito oscilador, não linear, constituído por um resistor, um indutor e um diodo, excitado externamente. Investigamos as condições necessárias para que este sistema evolua para um regime caótico, mostrando em cada uma das fases o espectro de potência e a reconstrução do atrator, a partir do sinal digitalizado.

## ABSTRACT

We developed an automated system for data acquisition and analysis, suitable to study several physical systems that show chaotic behaviour. With this system we investigated a nonlinear oscillatory driven electronic circuit, consisting of a resistor, an inductor and a diode. We investigated the necessary experimental conditions in which the circuit response evolves to a chaotic behaviour. In each step we measured the time response, the power spectrum and we reconstructed the attractor in phase space, from the data acquired.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO .....	1
I- REVISÃO DA TEORIA	
DO CAOS DETERMINÍSTICO .....	3
I.1- Sistemas Caóticos .....	3
I.1.1- Como Identificar Comportamento Caótico em um Sistema .....	4
I.1.2- Exemplos .....	4
I.2- Espectro de Fourier .....	7
I.2.1- Exemplos .....	9
I.3- Secções de Poincaré .....	14
I.4- Atratores .....	16
II- MONTAGEM EXPERIMENTAL .....	18
II.1- O Experimento .....	18
II.1.1- Montagem do Circuito .....	19
II.1.2- Características do diodo 1N4007 .....	21
II.2- Métodos .....	24
II.3- Erros .....	26
III- RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	28
III.1- Diagrama do Comportamento do Circuito .....	28
III.2- Espectro de Fourier e Atratores no Espaço de Fase .....	32
CONCLUSÃO .....	52

APÊNDICE A .....	53
APÊNDICE B .....	70
BIBLIOGRAFIA .....	73

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, um novo tipo de estudo em física tem surgido com uma importância muito grande. E neste estudo, as idéias de dinâmica diferenciável tem dado uma ajuda substancial ao nosso entendimento do comportamento irregular do comportamento de fenômenos físicos, químicos, biológicos e outros fenômenos da natureza.

Um sistema dinâmico diferenciável, nada mais é que a evolução no tempo definida pela equação de evolução [1]:

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

no caso de tempo contínuo , ou por um mapa :

$$x(n + 1) = f(x(n))$$

caso de tempo discreto, onde  $f$  e  $F$  são funções diferenciáveis.

O comportamento irregular dos sistemas anteriormente mencionados, tem sido chamado de não linear, turbulento ou caótico. E esta questão extremamente diversa inclui turbulência termodinâmica cinética química e estudo de circuitos eletrônicos.

O estudo do comportamento não linear de circuitos eletrônicos tem, recentemente, chamado a atenção de muitos pesquisadores[2 – 6]. Talvez a razão para que o estudo destes sistemas chame tanto a atenção dos pesquisadores esteja na simplicidade em montar-se o experimento, e como os resultados que ele apresenta podem ser úteis no estudo de sistemas físicos mais complicados.

Motivados por este fator decidimos partir para o estudo, do comportamento não linear em um circuito eletrônico, mais precisamente um circuito do tipo R-L-Diodo,

ligado em série, excitado externamente por uma fonte senoidal, onde o diodo utilizado é um diodo retificador diferente do tipo comumente utilizado em experimentos anteriores [2 – 6], mas que apresenta um comportamento extremamente semelhante. Sabemos também da existência de evidências que outros sistemas físicos, tais como : Lasers e descargas elétricas de uma maneira geral[7 – 9], podem apresentar este tipo de comportamento.

Sendo assim, decidimos estudar este sistema para que, a partir do mesmo, tivéssemos a capacidade de compreender o fenômeno e desenvolver ferramentas que nos auxiliem em posteriores estudos de outros sistemas.

O presente trabalho vem apresentado em três capítulos e dois apêndices, a saber:

- I- Revisão da Teoria do Caos Determinístico, onde fazemos um apanhado dos aspectos teóricos mais importantes, evidenciando aqueles utilizados em nosso trabalho;
- II- Montagem Experimental, onde mostramos o esquema do experimento, materiais( equipamentos) e métodos utilizados e uma pequena abordagem sobre os erros no experimento;
- III- Resultados e Discussões, onde apresentamos os resultados obtidos e comentamos os mesmos;
- A- Primeiro apêndice onde mostramos as listagens dos softwares utilizados no decorrer do trabalho;
- B- Segundo apêndice onde mostramos a equação para o nosso circuito.

# CAPÍTULO I

## REVISÃO DA TEORIA

### DO CAOS DETERMINÍSTICO

#### I.1 Sistemas Caóticos

Pode-se dizer que um sistema caótico é o sistema dinâmico que apresenta grande sensibilidade às condições iniciais[1]. Aqui devemos esclarecer que estamos tratando com sistemas físicos cuja dependência temporal é determinística, ou seja, existe uma prescrição em termos de equações diferenciais ou de diferença para calcular seu comportamento futuro a partir de condições iniciais dadas.

De acordo com o que foi dito no parágrafo anterior, estamos tratando com caos determinístico. Caos determinístico, denota o movimento irregular ou caótico, que é gerado por sistemas não lineares cujas leis dinâmicas determinam unicamente a evolução no tempo de um estado do sistema a partir de um conhecimento de sua história anterior [10].

Portanto torna-se praticamente impossível prever o comportamento desses sistemas por um tempo arbitrariamente longo, já que na prática o que pode-se fazer, apenas, é fixar com precisão finita suas condições iniciais., pois passado um certo tempo característico o erro na predição passa a ser da ordem do valor predito [11].

Assim podemos citar dois fenômenos que caracterizam processos caóticos [11].

- a) Comportamento irregular das variáveis em função do tempo, descritas através de equações determinísticas;
- b) Crescimento exponencial de incertezas previamente presentes no sistema.

### I.1.1 Como Identificar Comportamento Caótico em um Sistema

- a) Identificar o elemento não -linear no sistema( Em nosso sistema o diodo);
- b) Variar os parâmetros do sistema( Em nosso sistema , Freqüência e Amplitude).
- c) Observar a evolução temporal do sinal medido;
- d) Observar a evolução na Secção de Poincaré;
- e) Examinar o espectro de Fourier do sinal;

Existe também como técnica, a medida de duas propriedades do sistema :

- 1) Dimensão Fractal [1] e,
- 2) Expoentes de Lyapunov[1].

### I.1.2 Exemplos

#### I.1.2.1 Pêndulo Forçado

Aqui consideraremos o exemplo simples de um pêndulo forçado periodicamente [10]. Sua equação de movimento é:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \text{sen}\theta = A\cos(\omega t) \quad (I.1.2.1)$$

onde  $\gamma$  é constante de amortecimento,  $A$  é a amplitude e  $\omega$  é a freqüência.

Esta equação foi integrada numericamente para diferentes conjuntos de parâmetros  $(A, \omega, \gamma)$  e a fig.I.1.2.1 mostra que a variação do angulo  $\theta$  com tempo parece caótico simplesmente se a amplitude  $A$  atinge um certo valor crítico,  $A_c$ . O surgimento do caos na Eq.I.1.2.1 é devido ao termo não linear  $\text{sen}\theta$ . Como função dos parâmetros  $A$  e  $\omega$ , o comportamento do pêndulo varia bruscamente entre o movimento regular e o movimento caótico, como mostra a figura I.1.2.1e

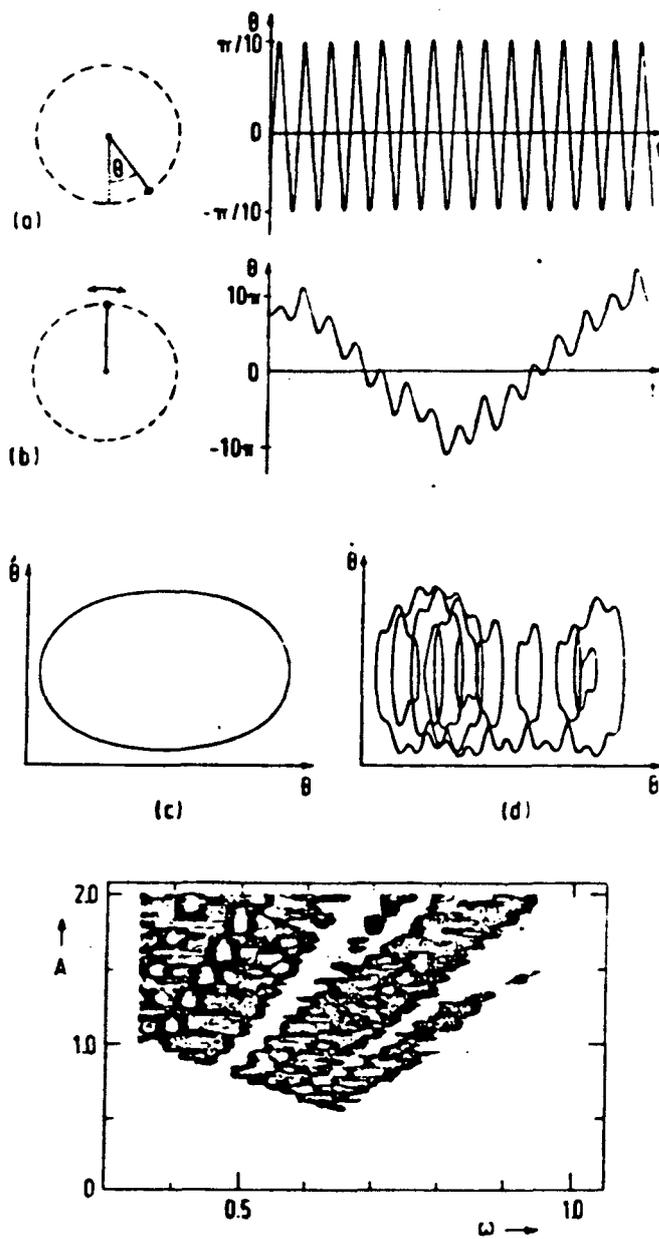


Fig.I.1.2.1 Transição para o caos em um pêndulo forçado. a) Movimento regular em pequenos valores da amplitude  $A$ . b) Movimento caótico em  $A = A_c$  (note as diferentes escalas para  $\theta$ ). c) e d) Trajetória regular e irregular no espaço de fase  $(\theta, \dot{\theta})$  que corresponde a a) e b). e) Diagrama de fase do pêndulo forçado ( $\gamma = 0.2, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ ). As partes escuras denotam os valores dos parâmetros  $(A, \omega)$  para os quais o movimento é caótico [10].

### I.1.2.2 Oscilações Forçadas em um Indutor Não Linear : Equação de Duffing[12]

Um dos primeiros exemplos de caos em um circuito elétrico a ser descoberto, foi o de um indutor não linear em um um circuito tratado por Ueda[13]. A equação para um circuito com indutância não linear e resistor linear, forçado por uma voltagem harmônica é:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos t \quad (I.1.2.2.1)$$

onde  $k$  é a medida da resistência do circuito e  $B$  é a medida da voltagem forçada, que é um outro caso especial da equação de Duffing. Ueda encontrou que variando os dois parâmetros, mencionados anteriormente, poderia-se obter uma grande variedade de movimentos periódicos, subharmônicos, ultrasubharmônicos, bem como movimentos caóticos. As regiões de comportamento caótico no plano  $(k, B)$ , são mostradas na Fig.I.1.2.2.1.

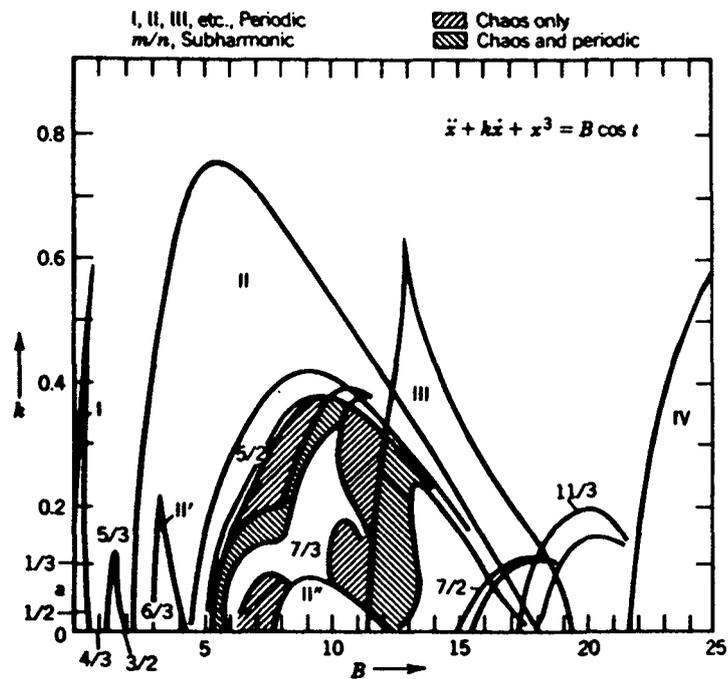


Fig.I.1.2.2.1 Diagrama de caos, mostrando regiões de movimento caótico e movimentos periódicos para um circuito não linear como função do amortecimento e amplitude forçada. Figura retirada de [12].

A seguir faremos uma breve explicação de algumas técnicas utilizadas para identificação de comportamento caótico.

## I.2 Espectro de Fourier

Se temos uma função que depende do tempo, esta função pode ser representada como uma combinação linear de sinais senoidais com frequências bem definidas. Cada uma destas componentes possui uma amplitude que depende do seu “peso” na composição

do sinal.

Pode-se passar do espaço em  $t$ , para o espaço de freqüências através da transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (I.2.1)$$

onde  $f(t)$  é a função a ser representada como uma combinação linear de sinais senoidais. Um sinal aparentemente complexo no tempo pode ser simples no espaço de freqüências.

Em nossos gráficos utilizamos o valor absoluto de  $|F(\omega)|^2$ , pois representa o “peso” com que cada componente de freqüência contribui para o sinal.

Geralmente usa-se um computador para calcular  $|F(\omega)|^2$  a partir da entrada de dados no experimento. quando tem-se um movimento periódico ou quasi-periódico,  $|F(\omega)|^2$  mostra um conjunto de picos estreitos, indicando que o sinal pode ser representado por um conjunto discreto de funções harmônicas  $\{e^{\pm\omega_k t}\}$ , onde  $k = 1, 2, \dots$ . Próximo do caos, no entanto, aparece uma distribuição contínua de freqüência, e no regime completamente caótico, o espectro contínuo pode ser dominado por picos discretos.

O cálculo numérico de  $F(\omega)$ , dado  $f(t)$ , pode consumir muito tempo computacional mesmo em um computador rápido. Entretanto, existe uma técnica para calcular a transformada de Fourier numericamente, a *Transformada Rápida de Fourier*, ou como é mais conhecida *FFT*.

A FFT é um algoritmo que foi desenvolvido em 1965 por Cooley e Tukey[14] e que pode computar muito mais rapidamente a Transformada de Fourier.

A FFT precisa de  $2^n$  pontos ( $n = 1, 2, \dots$ ) para realizar o cálculo. Outra vantagem é que a FFT é discreta, visto que calcula somente as componentes de freqüências dadas por  $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \dots, \frac{n}{T}$ , onde  $T$  é a duração do sinal (medido) e  $n$  é o número de pontos

medidos ( $T = n\Delta t$ ).

Pode-se ainda definir o *espectro de potência* de um sinal escalar  $f(t)$  como o quadrado de sua amplitude de Fourier,  $|F(\omega)|$ , por unidade de tempo[15], tipicamente mede a quantidade de energia por unidade de tempo.

### I.2.1 Exemplos

Mostraremos como exemplo três funções, uma com período 1 e uma outra com período 2.

$$a) f(t) = A\text{sen}(\omega_1 t)$$

Aqui temos o caso de uma função periódica simples, como mostra a figura I.2.1.1, seu espectro de Fourier é constituído de apenas um pico, na frequência dominante, Fig.I.2.1.2

$$b) f(t) = A\text{sen}(\omega_1 t) + B\text{sen}(\omega_2 t)$$

Neste caso temos uma função duplamente periódica como mostra a Fig.I.2.1.3, seu espectro de Fourier é constituído de dois picos, Fig.I.2.1.4.

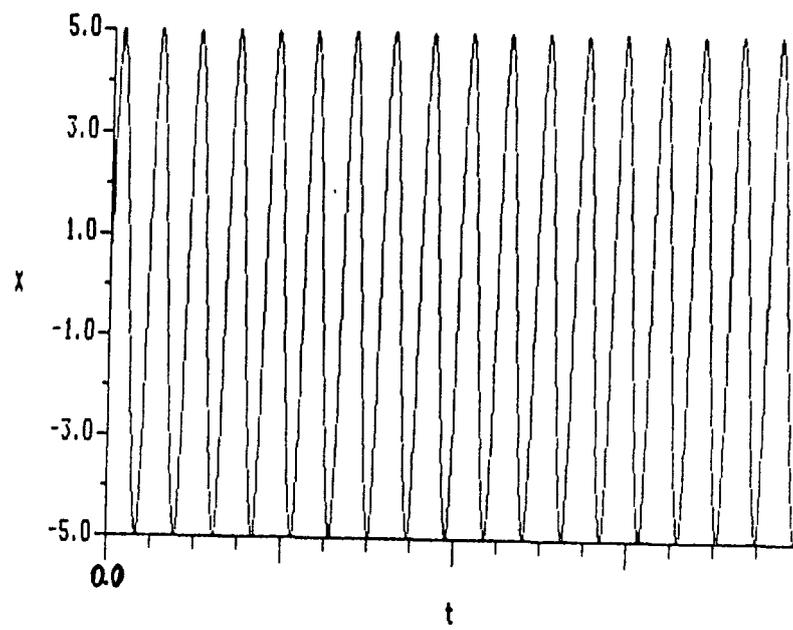


Fig.I.2.1.1 Sinal senoidal com período simples

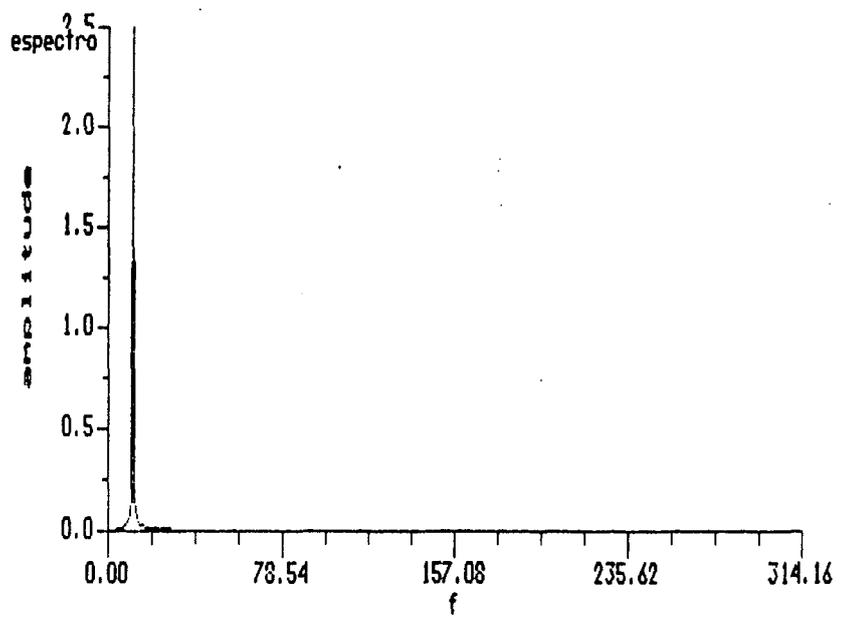


Fig.I.2.1.2 Espectro de Fourier, mostrando apenas um pico, relativo à uma única frequência dominante no sinal.

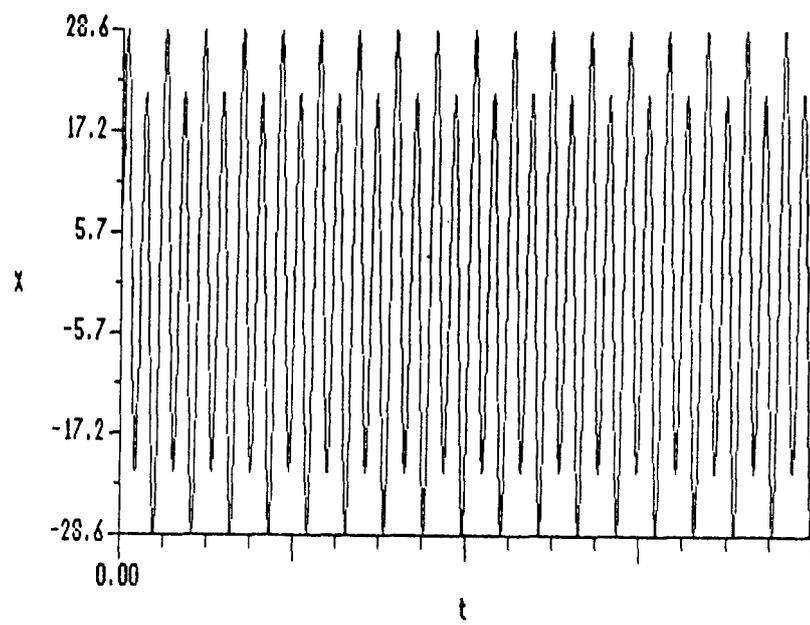


Fig.I.2.1.3 Sinal com período 2.

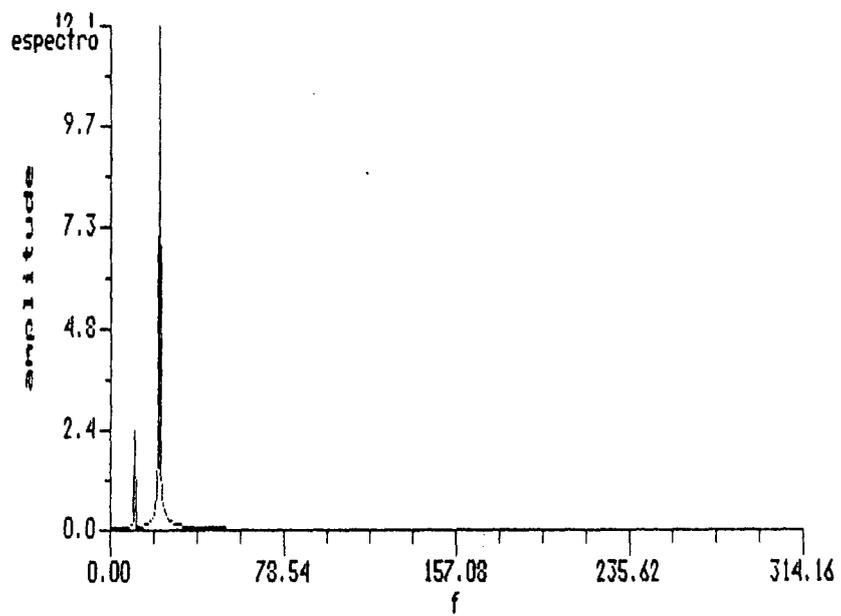


Fig.I.2.1.4 Espectro de Fourier mostrando dois picos referentes a  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , as duas frequências que compõem o sinal.

### I.3 Secções de Poincaré

Para visualizar o comportamento das trajetórias num espaço de fase de muitas dimensões, Poincaré imaginou interceptá-las por uma superfície, chamada *Secção de Poincaré* e estudar a figura formada pelos pontos em que a superfície é perfurada pelas trajetórias.

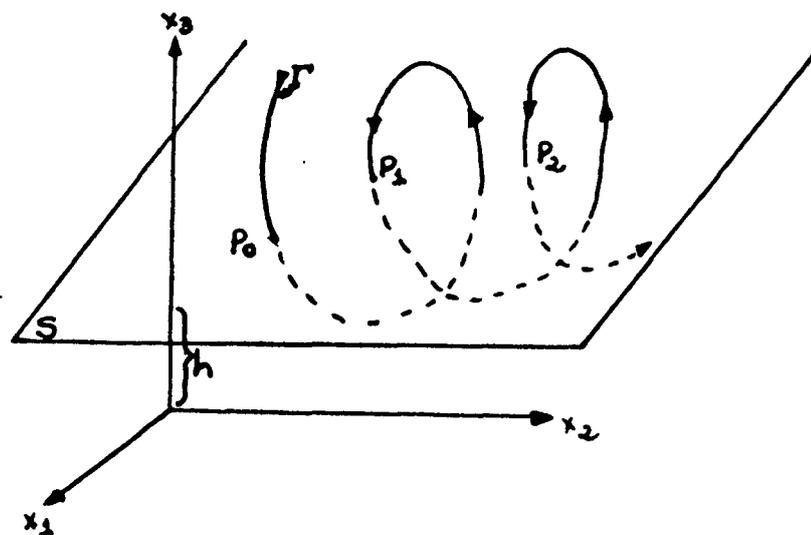
Considerando a equação :

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = F(\vec{X}, t) \quad (I.3.1)$$

onde  $\vec{X}$  é um vetor em  $\mathfrak{R}^n$  (espaço de fase).

Um sistema de equações diferenciais do tipo de (I.3.1), é chamado fluxo em  $\mathfrak{R}^n$  [15].

Fazendo-se um estudo da solução para a equação I.3.1 em  $\mathfrak{R}^3$ , devemos observar com atenção os pontos de intersecção da trajetória com o plano (Figura I.3.1).



**Fig.I.3.1** Ilustração de uma Secção de Poincaré. A trajetória  $\Gamma$  intersecciona o plano  $S$  em sucessivos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots$ . Estes pontos pertencem a secção de Poincaré de  $\Gamma$  com o plano  $S$ .

Na figura I.3.1, o plano  $S$  é definido por  $x_3 = \text{constante}$ . A altura  $h$  do plano é escolhida tal que a trajetória  $\Gamma$  interseccione o plano  $S$  nos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots$ .  $S$  pode ser qualquer plano, mas a escolha deve ser feita de modo a facilitar a análise da evolução da trajetória. Estes planos assim utilizados, são conhecidos como *Planos de Poincaré* e as

secções obtidas por estes planos são conhecidas como *Secções de Poincaré* [15].

Este método de secções de Poincaré, simplifica o estudo de fluxos contínuos, já que a secção representa um corte no espaço de fase. Com isto, o que estamos querendo fazer é diminuir a dimensão do problema. Outra vantagem, é que passamos de um tempo contínuo para um tempo discreto e podemos também reduzir a quantidade de dados a ser manipulada, neste ponto estamos perdendo parte da informação sobre a evolução da trajetória, mas esta perda não afeta a interpretação desta evolução .

Vale agora salientar os tipos que a secção de Poincaré pode apresentar :

- Quando temos uma solução para o sistema sendo periódica, temos então a trajetória no espaço de fase sendo uma órbita fechada, ou de ciclo limite (veja Fig.III.2.1). A secção de Poincaré correspondente é muito simples, reduz-se a um ponto, ou possivelmente vários pontos quando o ciclo limite tem uma forma tortuosa.
- Quando temos uma solução aperiódica, a trajetória no espaço de fase se apresenta como um conjunto de pontos tal como uma nuvem, neste caso, sua secção de Poincaré pode ser considerada, praticamente, como um conjunto de pontos distribuídos ao longo da curva (um segmento em linha, um arco de uma curva, etc...); Neste caso define-se uma coordenada  $x$  para cada ponto da curva e estuda-se como  $x$  varia no tempo.

#### 1.4 Atratores

Atratores são subespaços do espaço de fase nos quais a trajetória fica confi-

nada por um intervalo de tempo muito grande ( $t \rightarrow \infty$ ) [1]. Um atrator  $A$  é definido como um conjunto compacto no espaço de fase, com as seguintes propriedades [15]:

- $A$  é invariante sob a ação do fluxo, ou seja,  $\phi A = A$   $\phi$  é um sistema de equações diferenciais do tipo da Eq. I.3.1, em  $\mathbb{R}^n$ . [15]. Para um sistema dissipativo,  $\phi$  possui u atrator.
- $A$  tem volume zero no espaço de fase  $n$ -dimensional,
- $A$  está contido em um domínio  $B$ , de volume diferente de zero, que constitui sua *base de atração*. A base de atração, é definida como o conjunto de pontos a partir dos quais originam-se trajetórias que convergem para  $A$  com  $t \rightarrow \infty$ .

Pode-se perceber então, que um atrator é o limite assintótico de soluções com pontos iniciais em sua base de atração.

Em sistemas dissipativos, o volume no espaço de fase contrai-se a medida que o tempo cresce. O volume de um atrator, como já foi visto anteriormente, deve ser zero, o que no espaço de fase tridimensional, implica em  $d < 3$  ( $d$  é a dimensão do atrator). Um atrator capaz de representar um regime caótico deve ser tal que  $2 < d < 3$ , ou seja, um atrator que tenha dimensão fractal. Este tipo de atrator é chamado *Atrator Estranho*.

Para que exista um atrator caótico, é necessário ter-se um espaço de fase com dimensão maior, ou no mínimo igual a três.

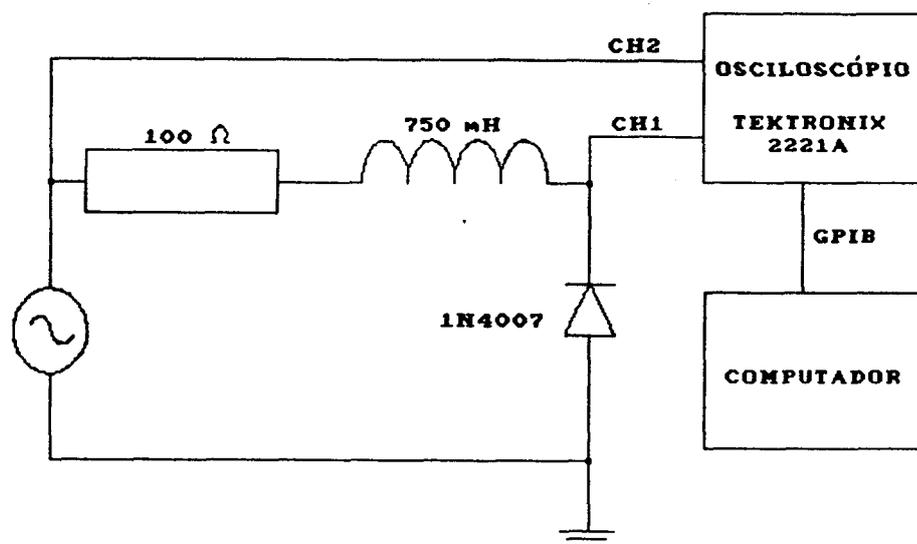
## **CAPÍTULO II**

### **MONTAGEM EXPERIMENTAL**

Neste capítulo, mostraremos o esquema da montagem experimental, as características do diodo e do equipamento utilizado para a aquisição dos dados. Em uma outra secção faremos menção aos métodos utilizados no decorrer da experiência. Dedicaremos, também, uma secção ao comentário dos erros ocorridos nesta parte do trabalho.

#### **II.1 O Experimento**

O experimento montado, consiste de um circuito R-L-Diodo em série excitado externamente por uma fonte senoidal como mostra a fig. II.1



**Fig.II.1** Montagem experimental do sistema .

### II.1.2 Montagem do Circuito

O circuito foi condicionado dentro de uma caixa de alumínio, para poder ficar isolado. Com este procedimento, tentamos evitar que o sistema pudesse sofrer perturbações, que afetassem o seu comportamento.

A aquisição do sinal, feita por um osciloscópio digitalizador TEKTRONIX 2221A [15], que possui uma resolução vertical de 8 bits ( 25 níveis por divisão ), horizontal

de 10 bits( 100 pontos por divisão ). Fizemos a aquisição utilizando o modo Peakdect ( Captura de pulsos muito rápidos,  $10ns$ , em todas as velocidades de varredura).

O osciloscópio possui 2 canais de aquisição . No canal 1, fizemos a aquisição do sinal de saída, ou seja, a resposta do circuito a excitação externa, introduzida pela fonte. Esta resposta é captada sobre o diodo.

A fonte utilizada , um gerador de função TEKTRONIX CFG 250, possui quatro formas de onda disponíveis para o uso. Utilizamos como forma de onda a senoidal. O intervalo de frequência escolhido para o trabalho foi de  $0.2Hz$  a  $400KHz$ , com uma precisão de  $\pm 5\%$  da escala(dado fornecido pelo fabricante). O intervalo de amplitude foi de  $100mV$  a  $20V$  (P-P), a impedância do gerador é de  $50\Omega \pm 10\%$ . A precisão do gerador para a amplitude, segundo o fabricante, é a mesma que dada para a frequência. Estas características operacionais segundo o fabricante, são observadas após 1 hora à temperatura de  $23^{\circ}C \pm 5^{\circ}C$  e umidade relativa do ar em torno de 75%.

Observando o comportamento do gerador, no que tange ao tempo necessário para que ele torne-se estável, chegamos à conclusão que o mesmo necessita , no mínimo, de 24 horas para atingir a estabilidade. Após este período a precisão do aparelho era de  $\pm 3\%$  da escala.

A ligação do circuito com o gerador e o osciloscópio, foi feita utilizando cabos coaxiais, cuja impedância era de  $50\Omega \pm 2\Omega$ .

O fato de ser este osciloscópio analógico-digital, facilitou bastante a nossa observação do sinal, principalmente no espaço de fase, onde com um fator de deflexão de  $2mV/div$  a  $5V/div \pm 2\%$  (de  $+15^{\circ}C$  a  $+35^{\circ}C$ , dado fornecido pelo fabricante), foi possível observar a evolução do sistema na rota para o caos. Este modo de operação (X-Y, ou

espaço de fase) corresponde a observação dos atratores do nosso sistema. Assim com esta observação, aliada ao Espectro de Fourier, foi possível também a caracterização do comportamento caótico do sistema.

Como o osciloscópio nos possibilitava a aquisição de 1K a 4K de memória de gravação com resolução vertical de 8 bits, fizemos a aquisição em 4K, pois nos possibilitava adquirir o número máximo de pontos, ou seja 4096 pontos. A transferência dos dados para o computador, foi feita utilizando para tal uma placa GPIB ( GENERAL PURPOSE INTERFACE BUS ), estes dados foram analisados no computador através de softwares e passados deste a plotter, utilizando uma interface RS-232. Estes softwares serão mostrados no apêndice A.

O resistor utilizado, no sistema, é um resistor comum, com o valor de  $100\Omega$ . O indutor foi produzido por nós, utilizando um fio de cobre, enrolado em um núcleo de plástico e devidamente preso ao circuito, para evitar que o mesmo sofresse vibrações diferentes das do circuito e pudesse assim influenciar o comportamento do sistema, pois tivemos a oportunidade de observar que o indutor livre tornava-se instável, influenciando a estabilidade do sistema, o valor para a indutância foi obtido através de medidas realizadas no próprio circuito (frequência de ressonância), usando um capacitor de capacitância  $66pF$  resultando em  $\approx 750mH$ , para o valor da indutância.

O diodo utilizado, 1N4007, é um diodo retificador cujas características, mostraremos a seguir.

### II.1.1 Características do diodo 1N4007

As características que apresentaremos, referem-se particularmente ao diodo utilizado em nosso sistema, já que estes diodos são muito comuns e a variação nas suas

características torna-se considerável, de um diodo fabricado para outro.

A característica mais importante que este diodo apresenta, pelo menos para o nosso trabalho, é a sua não linearidade advinda da variação da tensão em relação à tensão aplicada, sendo assim este componente torna-se o mais importante do circuito. veja fig.II.1.1.1.

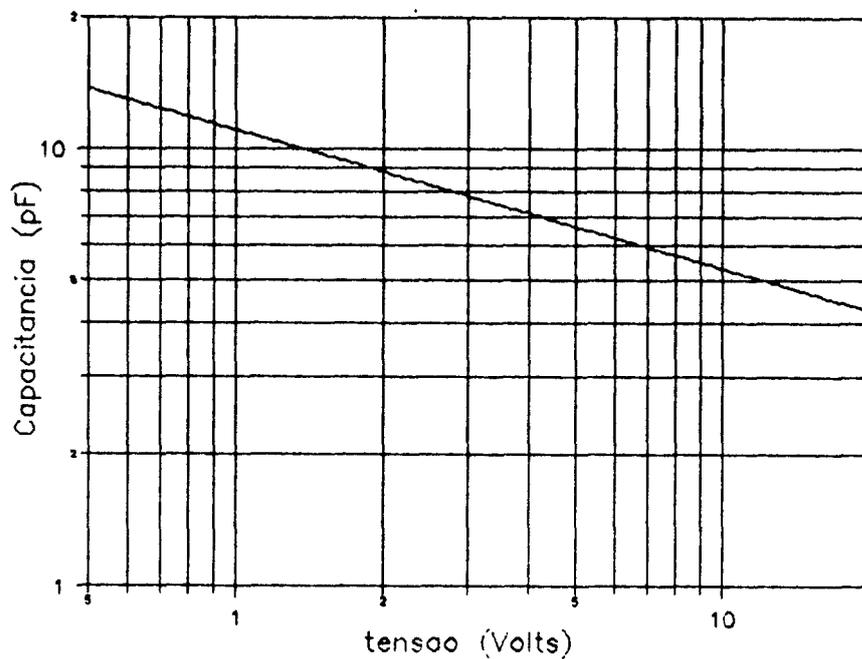


Fig.II.1.1.1 Curva característica da variação da capacitância de junção do diodo em relação a tensão aplicada.

A fig.II.1.1.1 mostra a variação da capacitância de junção do diodo em relação

a tensão aplicada. A observação desta curva é importante, pois é a partir dela que vamos ter uma equação para descrever a relação entre a capacitância de junção e tensão aplicada. Esta equação nos dará o termo da capacitância, que utilizaremos para a dedução da equação do nosso circuito, que será mostrada no apêndice B.

Este diodo apresenta, também como característica importante, o tempo de recuperação reverso.

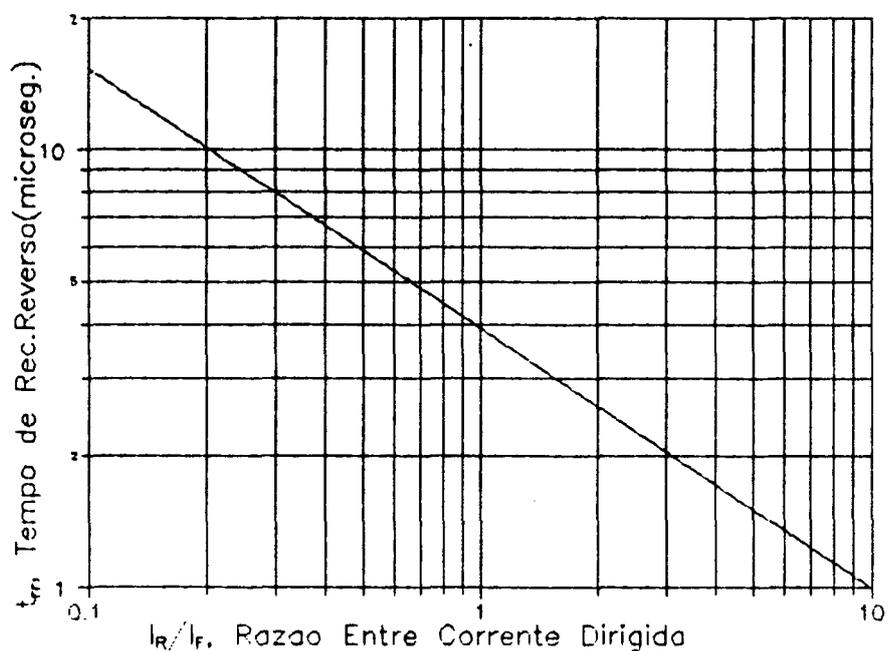


Fig.II.1.1.2 Tempo de recuperação reverso.

A fig.II.1.1.2, mostra a curva característica ao tempo de recuperação reverso do diodo. segundo [16], a medida que a frequência do sinal de entrada é aumentada, o tempo de recuperação reverso, torna-se significativo, resultando em um acréscimo na componente

AC da voltagem, através da resistência do cabo, que é oposta em polaridade a corrente direta.

Pode-se encontrar na literatura trabalhos em que é atribuído a esta característica, o comportamento caótico do sistema [26]. Estes aspectos serão enfatizados no capítulo III.

Este diodo apresenta uma capacitância particular,  $C_0 = 16.9pF$ , medida em uma ponte de capacitância do tipo HP 4284A.

## II.2 Métodos

Nesta secção comentaremos os métodos utilizados, no decorrer do trabalho experimental.

As medidas eram realizadas sempre 24 horas após ligarmos o gerador, para que o mesmo estivesse o mais estabilizado possível, a partir deste instante ligávamos o osciloscópio e esperávamos cerca de 30 minutos, para que pudéssemos começar as observações. Depois de todo este “ritual”, ajustávamos a base de tempo do oscioscópio em  $20\mu s^*$ . Como o osciloscópio fornecia-nos as informações relativas a frequência, quantidade de memória utilizada (era importante para que soubéssemos a quantidade de pontos digitalizados), canal utilizado, modo de aquisição, etc..., na própria tela, tornava-se mais simples a nossa observação. Estas observações eram realizadas no modo Store, que possibilitava a aquisição do sinal pelo computador. No modo Nonstore, observávamos apenas a evolução do sistema no espaço de fase, já que no modo Store os pontos eram destacados e a observação tornava-se bastante difícil.

---

\* Escolhemos esta base de tempo, porque esta fornecia a maior nitidez do sinal, mas poderíamos ter escolhido qualquer uma outra, sem influenciar nos resultados.

Depois de ajustado o osciloscópio, começamos a variar a frequência de 10 em  $10\text{KHz}$ , a partir de  $40\text{KHz}$  até  $220\text{KHz}$ , onde sistema voltava a ter período 1, ou seja o mesmo período do sinal de excitação. Em cada valor de frequência fixa, variamos a tensão e observamos o comportamento do sistema, sempre variando a tensão de  $100\text{mV}$  até  $20\text{V}$  (P-P).

A frequência de ressonância do circuito, medida excitando o circuito com uma tensão de  $\approx 250\text{mV}$ , variando a frequência de excitação e observando a amplitude do sinal de saída do circuito até que esta atingisse o máximo. Este máximo foi alcançado com a frequência em  $141.5\text{KHz}$ . Comparando com o valor obtido através do cálculo da frequência de ressonância utilizando a expressão  $f = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ , observamos que o resultado é muito diferente,  $280\text{KHz}$ , um fator 1.97 vezes maior. Esta diferença vem do fato que o valor para a capacitância do diodo na frequência de ressonância, é maior que o valor de  $C_0$ .

Escolhemos para realizar nossas observações, aquisição de sinal e análise do mesmo, a frequência de valor  $140\text{KHz}$ . Esta frequência foi escolhida arbitrariamente, em um intervalo que varia de  $100\text{KHz}$  a  $150\text{KHz}$ . Neste intervalo é possível observar melhor a evolução no comportamento do sistema. Usando esta frequência como a fundamental, determinamos o espectro de Fourier do sinal e reconstrução dos atratores, em função da amplitude do sinal, que variava de 0 a 20 Volts.

Para realizarmos a construção do diagrama do comportamento do circuito (Frequência X Amplitude), utilizamos o mesmo procedimento anterior, com a diferença de termos utilizado todas as frequências onde ocorrem as variações no comportamento do sistema.

Todas as medições foram realizadas cinco vezes, para pudéssemos obter a

maior precisão possível no comportamento apresentado pelo sistema.

### II.3 Erros

É claro que o nosso sistema, assim como outros sistemas experimentais, apresenta erros. Estes erros podem ser causados por limitações dos equipamentos utilizados, pela dificuldade em se diferenciar, no osciloscópio dois sinais muito próximos ou por ambas razões .

Ao usarmos um sistema digital de resolução finita, estamos afetando a resolução de qualquer medida que use números discretos. A resolução do digitalizador depende do número de bits usado no armazenamento. O número de dígitos armazenados refere-se à representação decimal do número. Na realidade a amplitude do sinal é expressa como  $N = 2^{\text{bits}}$  níveis de resolução da amplitude máxima selecionada no osciloscópio. Toda memória digital armazena valores de amplitude como números discretos e associa os valores da amplitude a tempos numerados discretamente. Muitas medidas devem ser aproximadas ou truncadas. O quanto se trunca ou se aproxima torna-se uma parte do erro da medida.

No osciloscópio utilizado (TEKTRONIX 2221A), os canais de entrada são digitalizados em uma resolução de 8 bits, onde uma divisão é igual a 25 contagens. Existe uma imprecisão de 4% de uma divisão , em qualquer medida de voltagem, no momento da aquisição . Isto significa dizer que em nosso experimento há uma imprecisão de  $\approx 200mV$  em cada aquisição da amplitude, pois utilizamos para amplificação de cada sinal 5 Volts/divisão . Já na aquisição do tempo temos o seguinte caso: Como fizemos a aquisição de 4K pontos, então 4K intervalos de tempo são representados. Entretanto, no modo 4K, nem toda resolução dos 4K pontos pode ser mostrada nos 10 bits da tela, já que a mesma

possui 1K pontos , ou seja, 1024 pontos. Portanto, se seleciona-se 4K para representar o total de uma figura na tela de uma vez, somente permanece a resolução de 1K na amostragem, o que não influi em nada na precisão .

Neste caso da aquisição do sinal, a nossa precisão é, segundo o fabricante, da ordem de 10 ns, pois trabalhamos com o limite máximo de 100 Msamples/s. Isto implica dizer que a imprecisão apresentada pelo osciloscópio na medida do sinal no tempo, não interfere em nossos resultados, já que realizamos tais medidas em intervalos de tempo da ordem de microsegundos.

Este estudo pode ser feito com o auxílio de um “spectrum analyzer”, que além do sinal exibe também o espectro de Fourier do sinal, possibilitando uma comodidade maior no estudo do comportamento do sistema em questão .

A montagem do sistema é muito simples, desde que se possua toda a aparelhagem necessária para aquisição e análise dos dados. Os sistemas que possuem este tipo de comportamento, exigem que sejam utilizados equipamentos sofisticados. O uso de um computador rápido é muito útil para realizar a análise dos dados em um tempo menor, isto porque, geralmente, o número de pontos é muito grande.

No capítulo seguinte, faremos a apresentação e discussão dos resultados.

## CAPÍTULO III

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

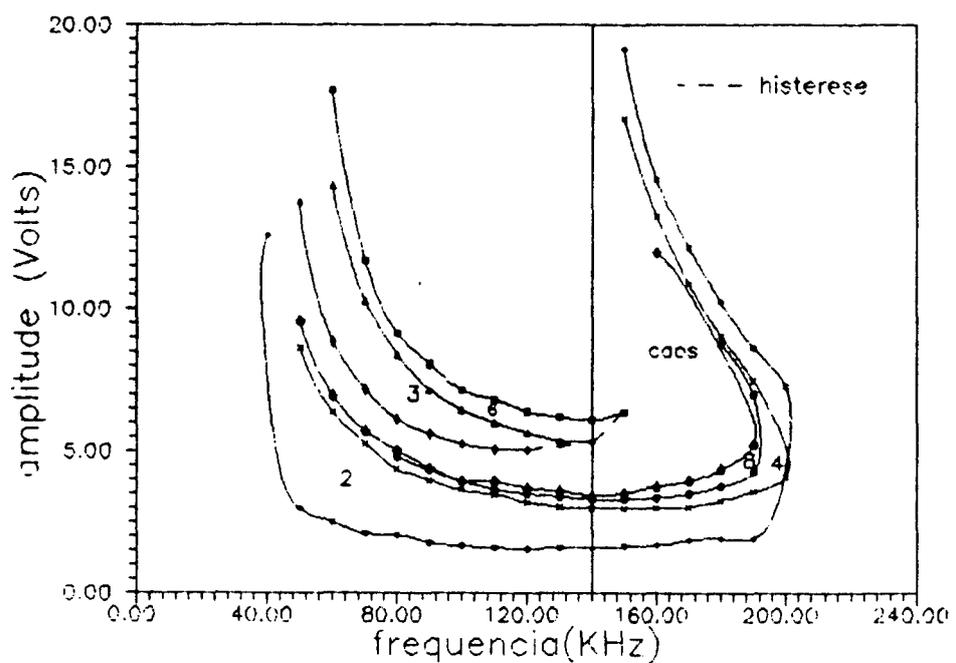
Neste capítulo, iremos apresentar os resultados obtidos, apresentando também discussões relativas aos mesmos. Estes resultados compreendem o diagrama de fase ou diagrama do comportamento do circuito, espectro de Fourier e o comportamento do sistema no espaço de fase (atrator) para cada sinal obtido.

#### III.1 Diagrama do Comportamento do Circuito

O diagrama do comportamento do circuito é mostrado na Fig.III.1.1. Nesta figura mostramos o período do sinal obtido no canal 1, ou seja, em cima do diodo, em função da amplitude e frequência de excitação. A região marcada com dois significa que o período do sinal no canal 1 é o dobro do período do sinal de excitação. Os pontos assinalados na figura correspondem a mudanças no comportamento do sistema. A região marcada com 4 significa que o período do sinal no canal 1 é quatro vezes o período do sinal de excitação, do mesmo modo a região marcada com 8 representa que o sinal do canal 1 é oito vezes o período do sinal de excitação. A região marcada com caos mostra que o sinal do canal 1 é muito maior que o período do sinal de excitação (fundamental).

A fig. III.1.1 apresenta também regiões marcadas com 3 e 6, nestas regiões o período do sinal no canal 1 é respectivamente três e seis vezes o período do sinal de excitação. Estas regiões são o que chama-se janelas no caos.

O aparecimento destas regiões é comum em sistemas com este tipo de circuito e que apresentem este tipo de comportamento [4,5]. A presença destas regiões em um diagrama, indica que o sistema estudado certamente apresenta comportamento caótico [12], o que nos leva a conclusão de que se há uma janela deste tipo, então existe comportamento



**Fig. III.1.1** Diagrama do comportamento do circuito, mostrando regiões de dobramento de período, caos e janelas de período 3 e 6, a janela de período 3 é um indicador do comportamento caótico.

caótico no sistema, já que este tipo de período , três, só aparece no durante a manifestação do comportamento caótico. Nestas regiões o sistema torna-se aparentemente periódico, apresentando costumeiramente, também, evolução com dobramento de período passando de 3 para 6, isto devido à grande sensibilidade do mesmo a variação nos parâmetros que

regem seu comportamento. Apareceu, também em nossas observações, uma janela de período 5, que devido a sua grande instabilidade não foi possível assinalar-mos no diagrama.

Observa-se também o aparecimento de histerese, no intervalo de frequência entre  $120\text{KHz}$  e  $160\text{KHz}$ , com amplitude em  $5.16\text{Volts}$  e  $6.0\text{Volts}(P - P)$ . Esta histerese aparece na janela de período 3. Quando realiza-se a variação crescente na amplitude, o sistema evolui do caos para a janela de período 6, mas fazendo-se a variação no sentido inverso, ou seja, decrescendo-se a amplitude, o sistema passa da janela de período 6 para a janela de período 3 e deste ponto ao caos.

Observando a figura III.1.1, nota-se também que escolhendo qualquer um dos parâmetros de variação ( amplitude ou frequência), em um intervalo compreendido entre  $\approx 4\text{ Volts}$  e  $\approx 20\text{ Volts}$  e  $\approx 45\text{ KHz}$  e  $\approx 190\text{ KHz}$ , tem-se a rotra para o caos.

A título de curiosidade, podemos traçar uma linha horizontal em  $\approx 2.5\text{Volts}$  de 0 a  $240\text{KHz}$ , observaremos que o sistema nunca chega ao caos. pois ele passa de uma região onde o período do sinal no canal 1 é igual ao período do sinal de excitação para uma região onde este período é o dobro do período do sinal de excitação e vai para uma região onde o período é novamente igual ao período do sianl de excitação .

Comparando o nosso diagrama com [5] e [6], percebemos uma semelhança entre os diagramas. A diferença está no fato destes outros dois diagramas apresentarem mais algumas regiões onde o sistema demonstra o comportamento caótico e usarem outros valores para resistência, indutância e também o tipo de diodo, tanto [5] quanto [6] utilizam um diodo varactor.

A linha vertical próximo ao centro do eixo das abscissas refere-se a frequência utilizada para obtenção dos sinais de reposta do circuito à excitação do gerador,  $140\text{ KHz}$ .

Acompanhado esta linha, em uma ascensão vertical, observamos o surgimento de novos períodos em função da variação da amplitude do sinal de entrada. Note-se que a escolha desta frequência de trabalho deveu-se ao fato da mesma mostrar todas as variações de comportamento do circuito.

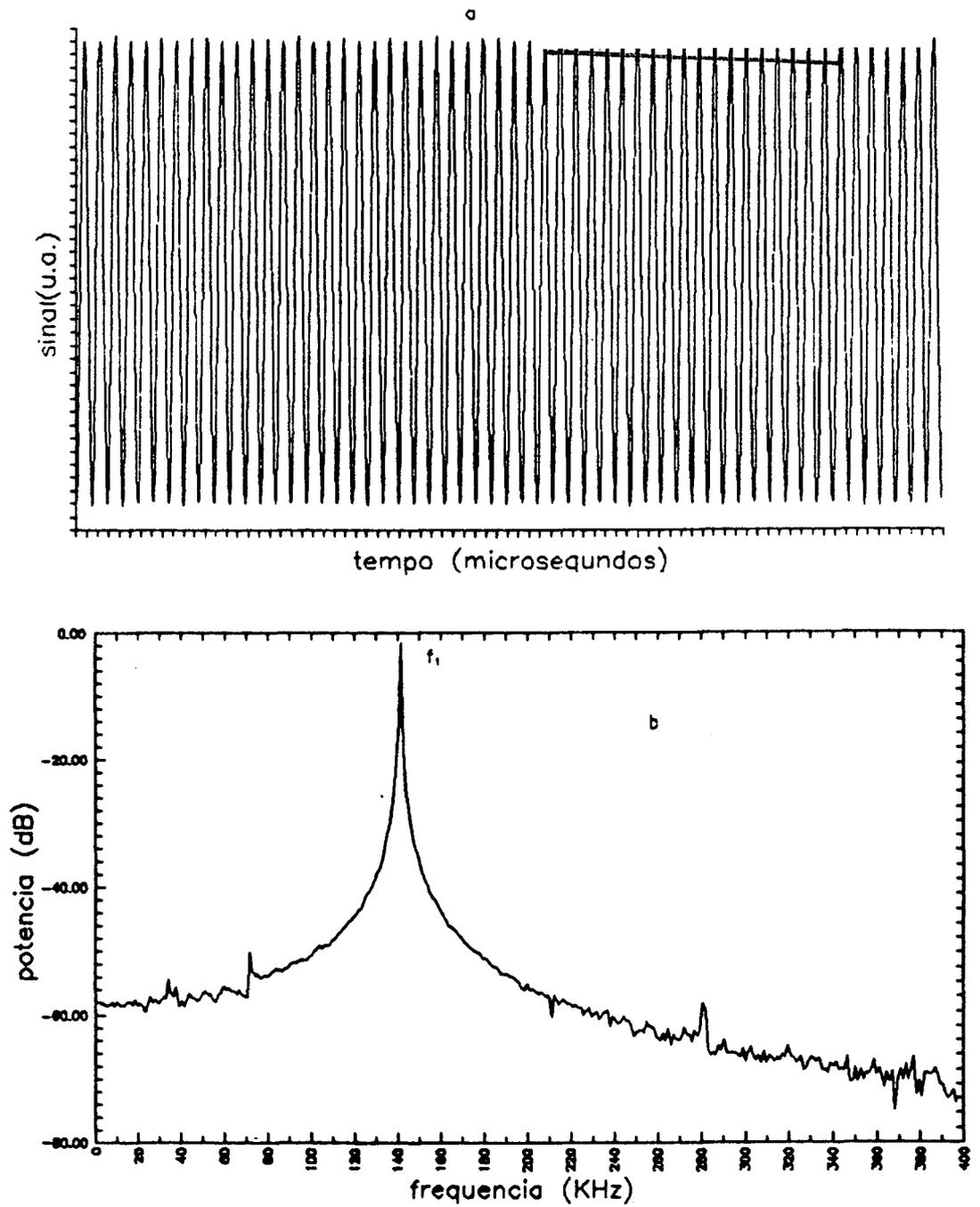
Nosso experimento ficou limitado a sensibilidade do gerador, o qual não permitia-nos observações além de  $20\text{Volts}$ . Face a esta limitação operacional não podemos afirmar como o sistema continuará evoluindo no regime caótico, com o crescimento da amplitude, no intervalo de frequência compreendido entre  $\approx 100\text{ KHz}$  a  $\approx 160\text{ KHz}$ .

Este diagrama foi construído fazendo-se a observação do comportamento do circuito em função das características da excitação. A cada variação da frequência (realizada a cada  $10\text{ KHz}$ , como já foi explicado no capítulo anterior), realizava-se a variação da amplitude de  $100\text{ mV}$  a  $20\text{ V}$ .

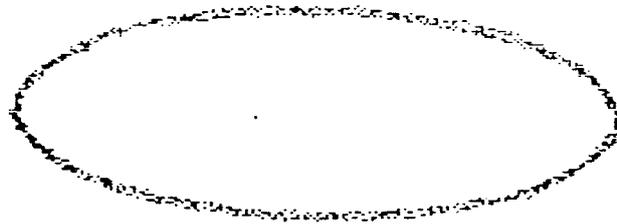
### III.2 Espectro de Fourier e Atratores no Espaço de Fase

Uma das maneiras de detectar comportamentos caóticos é o aparecimento de uma banda de frequências no sinal de saída , quando o sinal de entrada apresenta um movimento harmônico de frequência única (veja secção I.2).

A seguir mostraremos os sinais obtidos na evolução do nosso sistema, seus respectivos espectros de Fourier, e os atratores relativos a cada um.



**Fig.III.2.1** a) Sinal da freqüência fundamental, 140 KHz , tensão 1.25 V(P-P), e base de tempo  $20\mu s$  b) Espectro de potência apresentando um pico pronunciado na freqüência fundamental. Note a escala logarítmica no eixo y.



**Fig.III.2.2** Comportamento do sistema no espaço de fase, atrator periódico simples.

A figura III.2.1 mostra o sinal da frequência fundamental, ou seja, a frequência que alimenta o sistema e mostra também o seu espectro de potência (espectro de Fourier). Pode-se notar claramente que o sinal de entrada apresenta um comportamento senoidal, este sinal foi obtido com a tensão (P-P) em 1.25 Volts e a base de tempo do osciloscópio em  $20\mu s$ .

Como era esperado, na figura III.2.1.b, nota-se que existe apenas um pico pronunciado, o que corresponde a uma única frequência, sem subharmônicos. Este fato caracteriza o sinal como periódico simples, ou de período 1.

O espectro é dado em decibéis (dB), que guarda a seguinte relação com o

sinal :

$$1 \text{ dB} = 20 \log(\text{sinal}) \quad (\text{III.2})$$

aqui o sinal é normalizado , ou seja, sinal/máx, onde máx é o valor máximo do sinal. Este gráfico, mais conhecido na literatura como densidade espectral de potência, é obtido usando para tal a *Transformada Rápida de Fourier (FFT)*, cujo software está mostrado no apêndice A.

A figura III.2.1.b, mostra o espectro de potência até 400 KHz, deste ponto em diante, o sistema não apresenta qualquer particularidade que seja de interesse de trabalho.

A figura III.2.2 mostra o atrator do sistema muito simples, sem apresentar qualquer mudança na sua trajetória no espaço de fase. Os pontos percorrem uma única trajetória. Este fato demonstra mais uma vez a periodicidade simples do sistema.

Para realizar-se a reconstrução dos atratores a partir do sinal digitalizado, utilizaremos um método baseado em [30], que consiste em tomar-se os  $N$  pontos do conjunto de dados que formam o sinal espaçados entre si de um intervalo  $\tau$ . A partir destes pontos originais, geram-se  $n - 1$  conjuntos de pontos, formados pelas ordenadas correspondentes a esses pontos. Estas ordenadas serão correspondentes ao sinal digitalizado, estes conjuntos gerados serão vetores tridimensionais no espaço de fase e serão eles ( os pontos formados por estes vetores) que determinarão a trajetória no espaço .O parâmetro  $\tau$  determinará a forma que iremos visualizar esta trajetória sem alterar sua característica, ou seja, o período da mesma. Estes novos conjuntos consistem dos mesmos pontos originais, mas diferenciam-se pelo fato que agora estes novos conjuntos estão deslocados  $k \cdot \Delta t$ , em relação ao conjunto anterior.

A escolha de  $\tau$  é importante para observarmos o comportamento do atrator

no espaço de fase. Observando as figuras III.2.3 e III.2.4, pode-se perceber a mudança na forma do atrator em função da variação de  $\tau$ . Utilizamos como exemplo o atrator do sinal que tem o dobro do período do sinal de excitação. Para  $1 \leq \tau \leq 4$  os pontos que constituem o atrator reconstruído tendem a seguir um alinhamento sobre um determinado eixo. Para  $\tau \geq 4$  a tendência, é não mais seguir um determinado sentido de alinhamento, e sim formar figuras mais complexas, porém sem alterar o período do atrator.

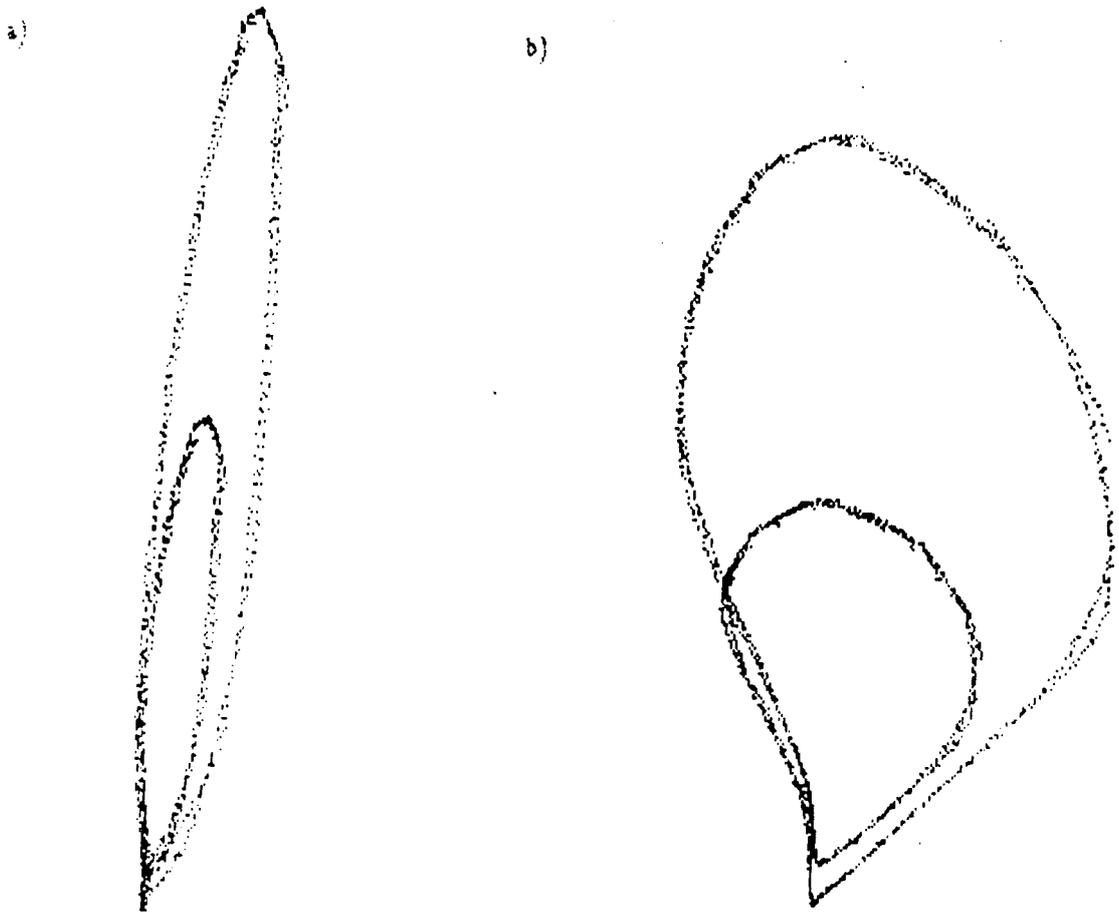


Fig.III.2.3 a) Atrator com  $\tau = 1$ , note a tendência a se alinhar dos pontos. b) Atrator com  $\tau = 5$ , a figura começa a mostrar maior complexidade

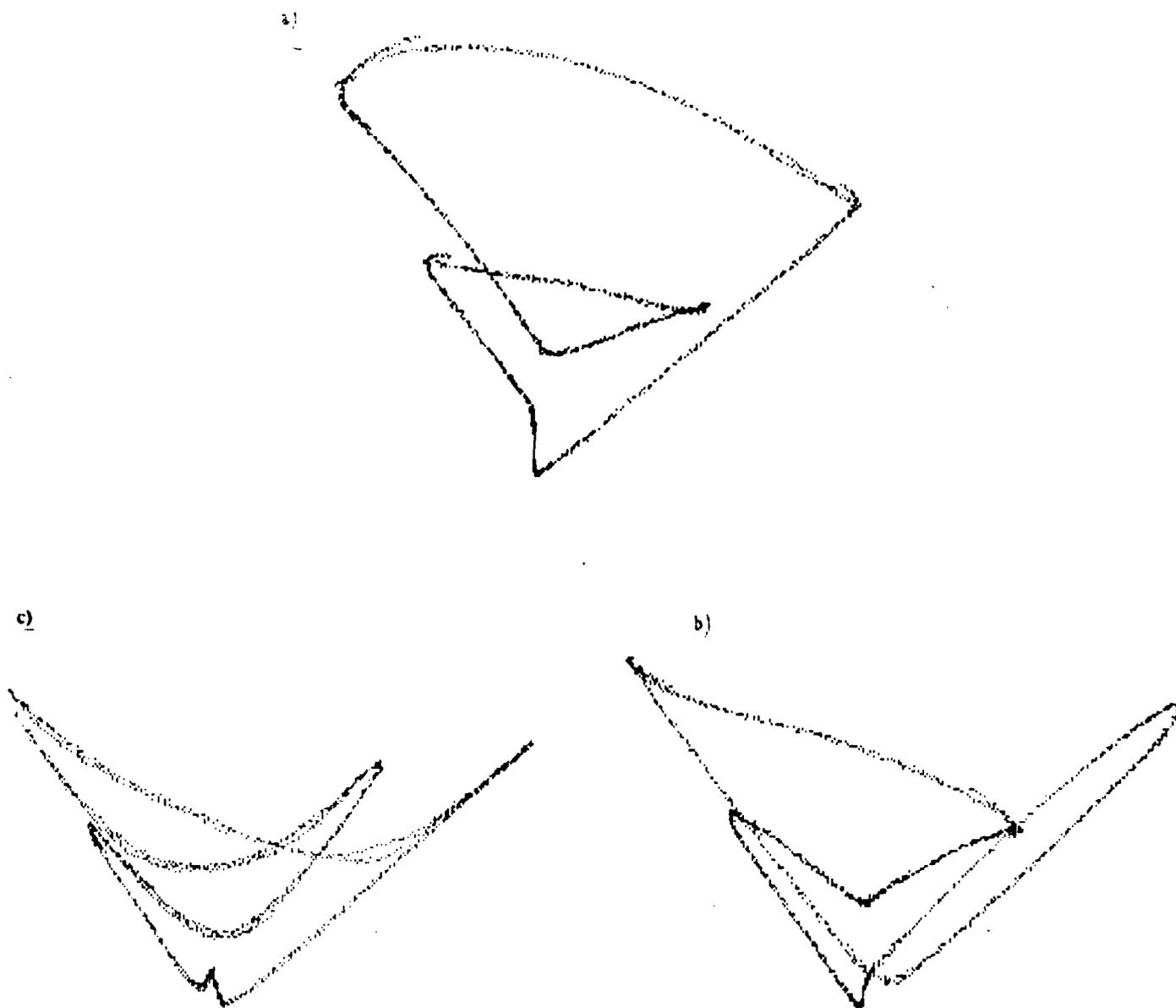
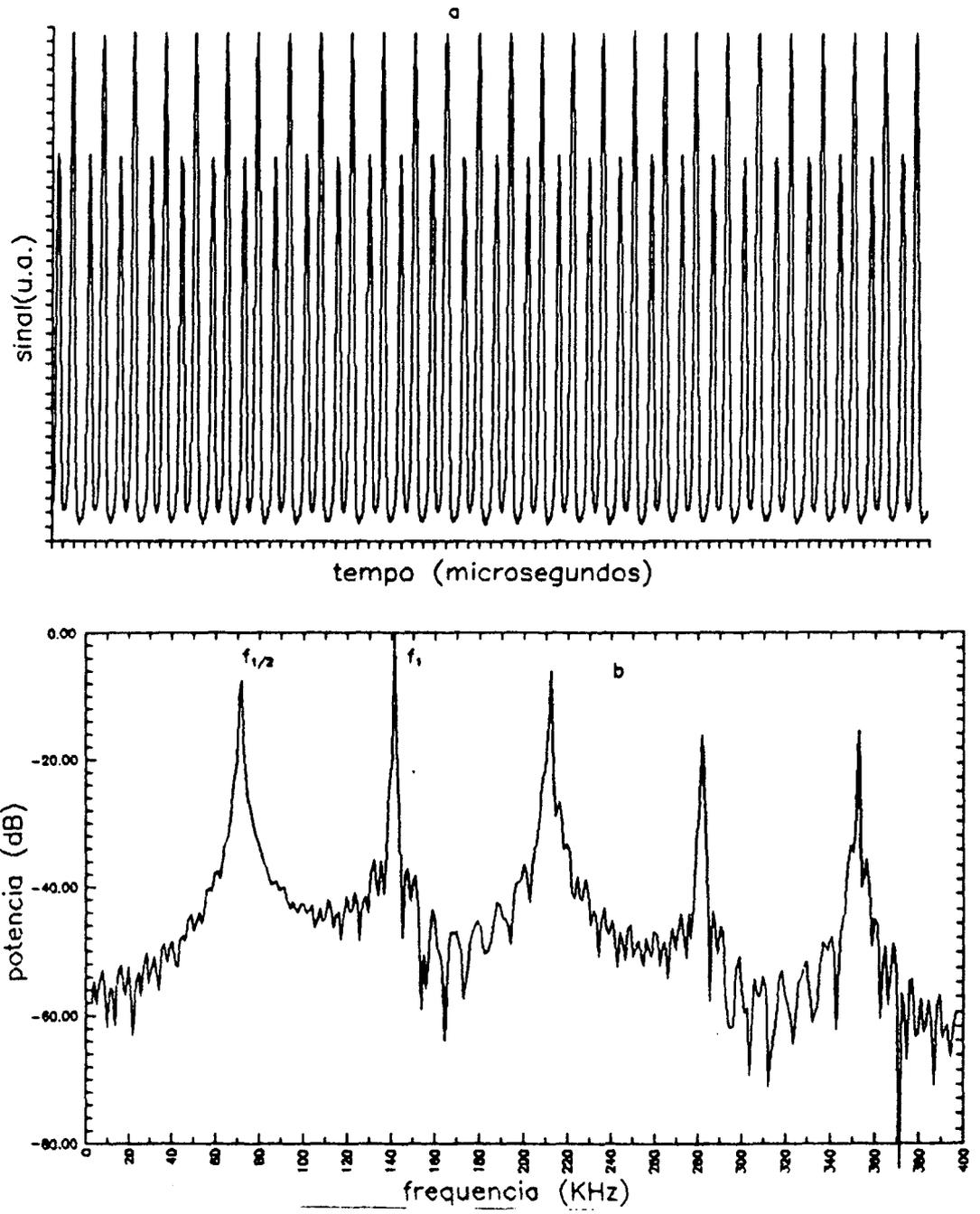
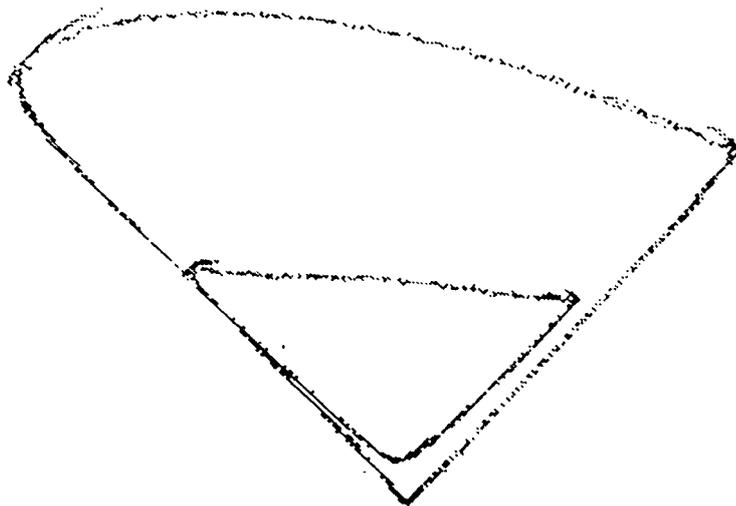


Fig.III.2.4 a) Atrator com  $\tau = 10$ . b) Atrator com  $\tau = 15$ . c) Atrator com  $\tau = 20$ .

Note que a medida que  $\tau$  aumenta mais complexa torna-se a forma da figura.



**Fig.III.2.5** a) Sinal com o primeiro dobramento de período, tensão 1.60 V(P-P) e base de tempo  $20\mu s$ . b) Espectro de potência apresentando o primeiro subharmônico,  $f_{1/2}$ .



**Fig.III.2.6** Comportamento do sistema no espaço de fase apresentando um atrator duplamente periódico.

A figura III.2.5.a mostra um sinal com dobramento de período. Este gráfico mostra a resposta do circuito a excitação da fonte, para uma amplitude de  $1.60\text{Volts}$  pico a pico para uma frequência de  $140\text{KHz}$ . Esta mudança no comportamento acontece a partir de  $1.36\text{Volts}$ .

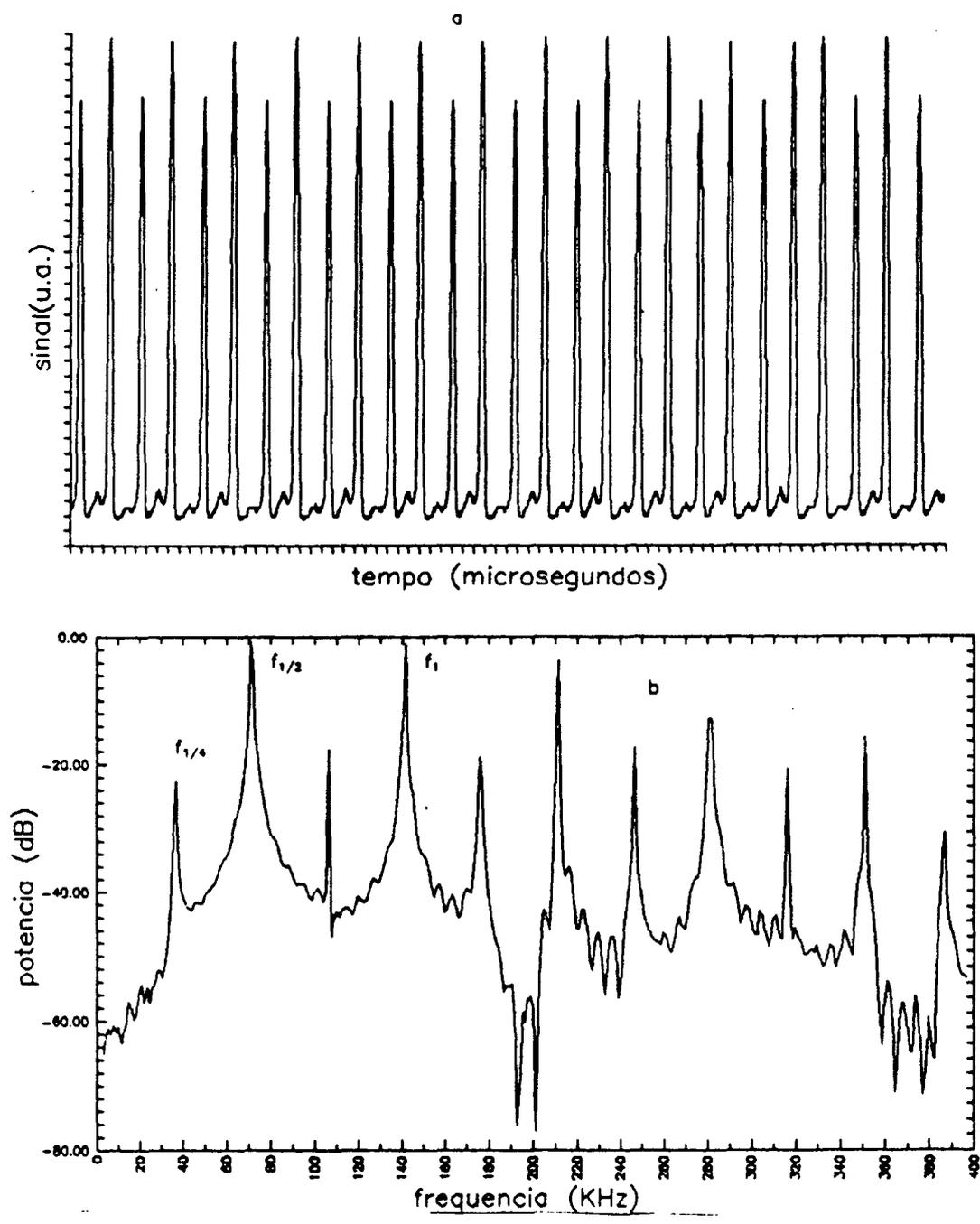
Na figura III.2.5.b vemos o o espectro de potência, onde percebemos a presença do primeiro subharmônico da frequência fundamental  $f_1 = 140\text{KHz}$ , em  $f_2 = f_1/2$ . Neste espectro podemos observar a presença dos harmônicos que são combinações lineares

de  $f_1$  e  $f_2$ ,

$$f = nf_1 + mf_2$$

A figura III.2.6 mostra-nos a comportamento do sistema no espaço de fase. Percebe-se nesta figura o surgimento de uma outra órbita, ou seja, neste caso o atrator deixa de ser periódico simples e passa a ser duplamente periódico.

Nesta figura podemos perceber que a nova trajetória afasta-se da primeira, revelando uma tendência do sistema a divergir da trajetória inicial, o que significa dizer que se traçarmos uma secção de Poincaré neste plano aparecerão dois pontos, indicando a biperiodicidade do atrator.



**Fig.III.2.7** a) Sinal com período 4, tensão 2.95 V(P-P) e base de tempo  $20\mu s$ . b) Espectro de potência apresentando o terceiro subhamônico,  $f_1/4$ .



**Fig.III.2.8** Comportamento do sistema no espaço de fase, neste caso o atrator tem período 4, ou seja, precisa de quatro voltas para passar pelo mesmo ponto.

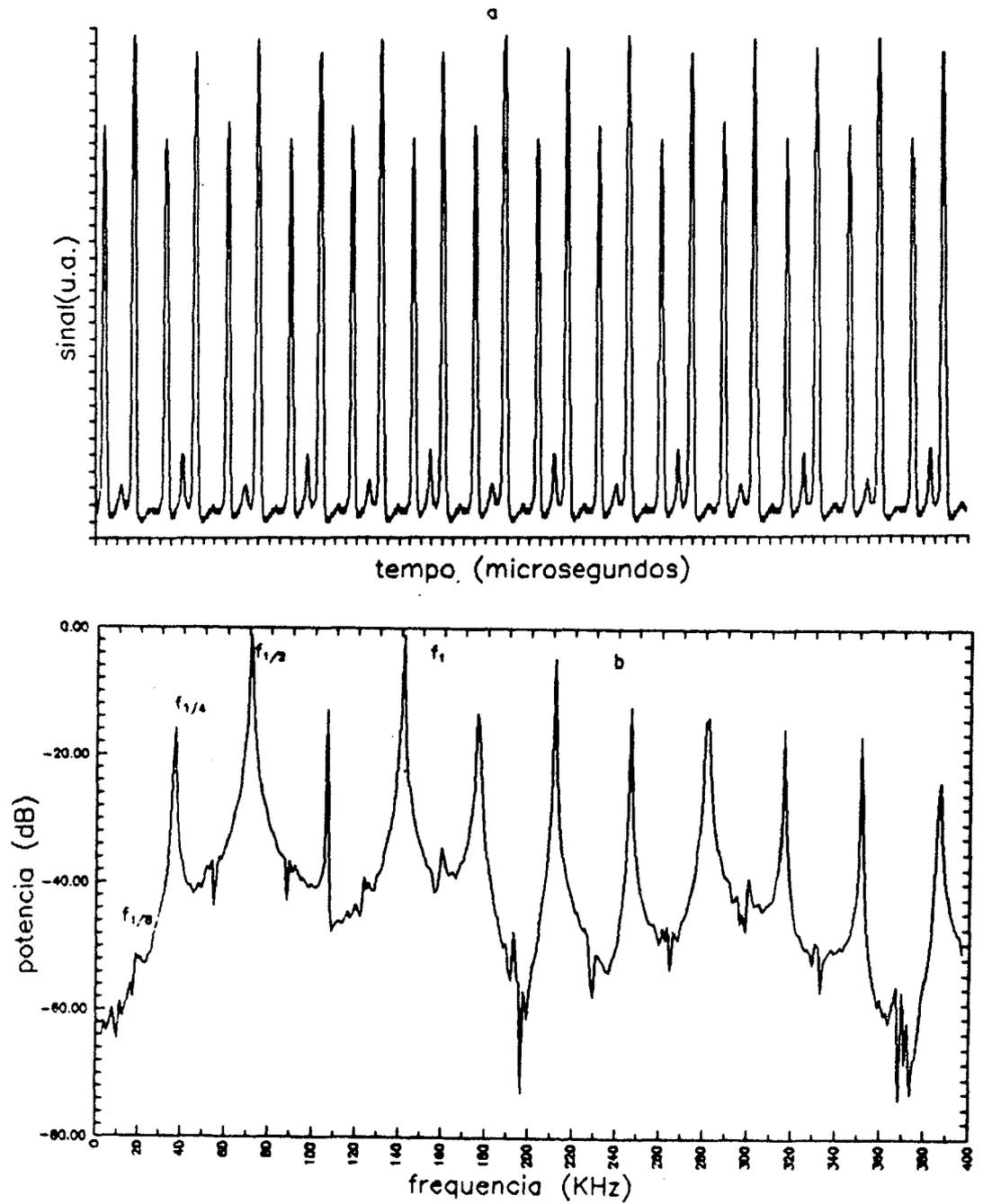
A figura III.2.7.a mostra um sinal de período 4, este dobramento acontece quando tensão , que está sendo introduzida no circuito, atinge o valor 2.83 Volts(P-P), a frequência continua fixa já que nos propusemos a variar somente a tensão de entrada.

Observando a figura III.2.7.b, nota-se o surgimento de mais um subharmônico de  $f_1$ ,  $f_1/4$  que está em  $\approx 35$  KHz. Os outros picos que aparecem entre as novas frequências são combinações lineares de  $f_1$  e de  $f_1/2$ .

A observação da figura III.2.8, nos permite acompanhar mais um estágio da evolução do sistema no espaço de fase. Nesta figura podemos ver que existem quatro

trajetórias descritas pelos pontos.

Estas quatro trajetórias aparecem bem próximas, duas a duas, ou seja, existem duas trajetórias que são as partes mais escuras da figura, semelhantes a uma pequena nuvem de pontos, e as outras duas de raio maior, desenhando duas linhas estreitas.



**Fig.III.2.9** a) Sinal com período 8, tensão 3.20 V(P-P) e base de tempo  $20\mu s$ . b)Espectro de potência apresentando o quarto subharmônico,  $f_1/8$  e da mesma forma das figuras anteriores, exibindo os harmônicos que são combinações lineares de  $f_1$  e  $f_1/2$ .



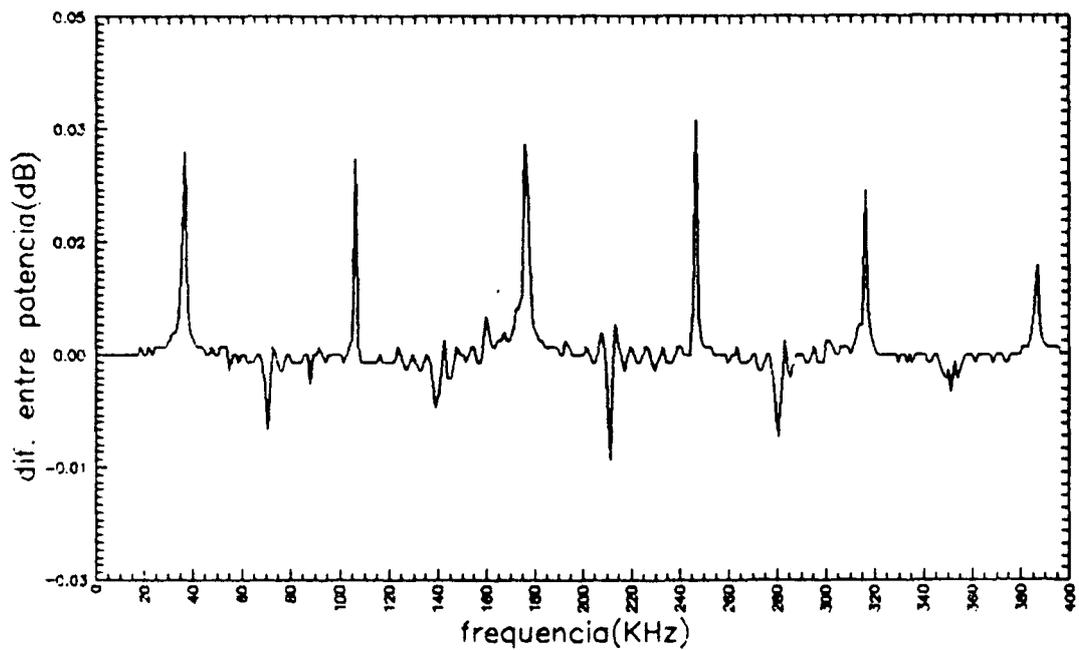
**Fig.III.2.10** Comportamento do sistema no espaço de fase, aqui mostra mais um estágio na evolução na rota para o caos, são necessárias oito voltas para retornar a origem.

Na figura III.2.9.a, observa-se mais um dobramento de período. O nosso sistema continua evoluindo na rota para o caos. O surgimento deste novo período acontece quando a tensão de entrada chega a 3.15 Volts(P-P). O comportamento do diodo está intimamente ligado à tensão de entrada a forma desta variação será mostrada na equação do circuito.

Observando atentamente a figura III.2.9.b nota-se o surgimento de mais um subharmônico de  $f_1$ ,  $f_1/8$ , este espectro apresenta uma aparente semelhança com o espectro mostrado na figura III.2.9.b, já que o novo pico não aparece tão pronunciado. Mas para

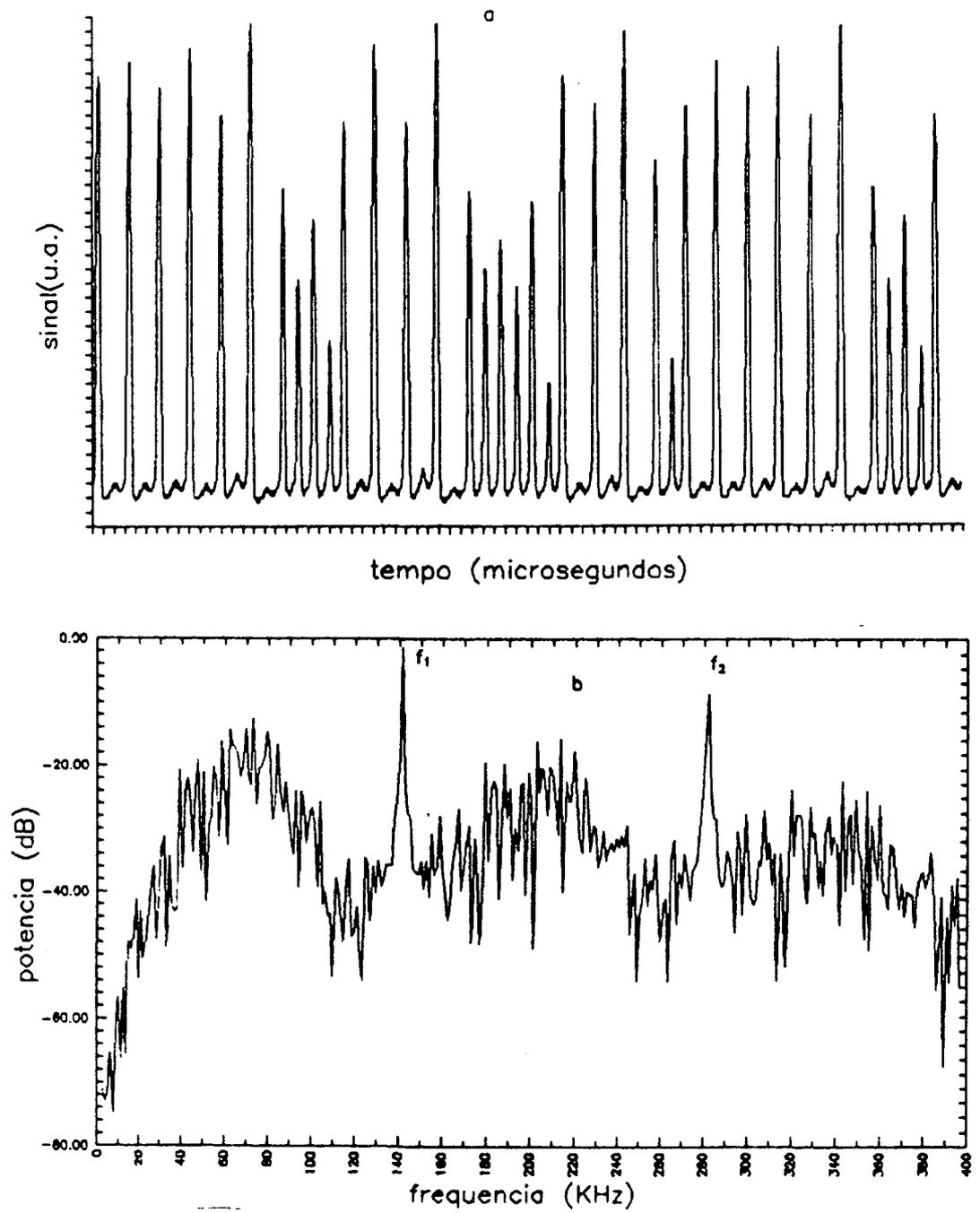
que fosse melhor esclarecida esta questão mostramos na figura III.2.11 a diferença entre os espectros das figuras III.2.7.b e III.2.9.b.

A figura III.2.10 mostra o sistema em mais uma estágio de sua evolução no espaço de fase. As partes mais escuras, mostram trajetórias mais próximas que somando as outras formam um total de oito trajetórias descritas pelo sistema. A observação desta figura requer uma atenção maior, já que estas trajetórias são formadas por pontos não interligados, e propiciam uma tendência a confundir as mesmas.

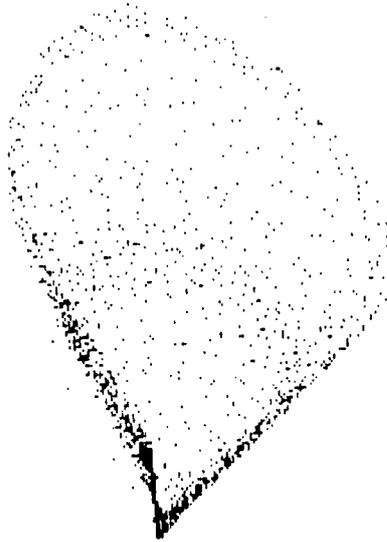


**Fig.III.2.11** Diferença entre os espectros das figuras III.2.7.b e III.2.9.b.

As figuras III.2.7.b e III.2.9.b, são a primeira vista, semelhantes. Os dois espectros, que apresentam o terceiro e o quarto subharmônico de  $f_1$  respectivamente mostram uma pequena diferença, melhor observada quando fazemos a subtração entre estes dois espectros, mostrada na figura III.2.11. Os picos que estão na parte positiva do eixo das ordenadas, são o novo subharmônico e seus múltiplos, mostrando assim que realmente existe uma diferença entre os dois espectros.



**Fig.III.2.12** a) Sinal caótico, tensão em 3.35 V(P-P) e base de tempo  $20\mu s$ . b) Espectro de potência apresentando dois picos pronunciados, duas frequências independentes, note que o espectro apresenta banda larga, que é uma característica de um espectro de potência de um sinal caótico.



**Fig.III.13** Comportamento no espaço de fase, note que agora já não é mais possível contar o número de voltas necessárias para o sistema passar pelo ponto inicial.

A figura III.2.10.a mostra um sinal nitidamente caótico, observe que não é possível identificar qualquer periodicidade. O sistema comporta-se desordenadamente. Este comportamento surge quando a tensão atinge 3.24 Volts(P-P).

A figura III.2.12.b mostra o espectro de potência de sinal caótico. Podemos observar nitidamente que existem dois picos pronunciados, referentes as duas frequências independentes que dominam este sinal. Podemos ainda observar a irregularidade do movimento face a largura de banda do espectro , o que aliado a presença dos dois picos o caracteriza realmente como um sinal caótico [18].

No espaço de fase, como podemos ver na figura III.2.13, o comportamento do sistema muito interessante descrevendo várias trajetórias. Não há como distinguir estas trajetórias, podemos observar apenas uma grande nuvem de pontos, demonstrando que o período deste sinal é muito maior que o período do sinal de excitação .

## CONCLUSÃO

Estudamos um circuito tipo R-L-Diodo, que apresenta uma dinâmica não linear.

Este circuito possibilitou o desenvolvimento de um sistema de aquisições de dados e análise de sistemas experimentais que podem apresentar comportamento caótico. Este sistema de aquisições é de suma importância já que a partir dele podemos analisar dados medidos em tempo real. O desenvolvimento do software de aquisição de dados não foi tarefa simples e exigiu longos seis meses para o seu aperfeiçoamento. Também nos exigiu muito trabalho o desenvolvimento do sistema de análise, para isto tivemos também que fazer uso de outros softwares aperfeiçoando-os e adaptando-os as nossas reais necessidades.

A técnica utilizada para a reconstrução dos atratores no espaço de fases, obteve grande sucesso, mostrando a evolução do sistema em uma rota para o caos.

Por ser um sistema simples de se montar, os resultados apresentados são extremamente importantes, já que o mesmo evidencia os principais conceitos de dinâmica não linear.

Com as ferramentas desenvolvidas podemos, agora, sugerir como trabalhos futuros, o estudo de outros sistemas físicos, tais como: Lâmpada de Catodo Oco, Lasers, etc... . Estes sistemas têm sido alvo de crescente interesse dos pesquisadores que desejam conhecer mais sobre este fenômeno.

## APÊNDICE A

Neste apêndice mostraremos os softwares utilizados para a aquisição dos dados pelo computador e para a realização da FFT. O software para realizar a FFT foi feito a partir de [23].

Até a página 63 mostramos o software utilizado para a realização da aquisição de dados pelo computador, a partir do osciloscópio via GPIB. Da página 64 em diante mostramos o software que realiza a FFT a partir dos dados experimentais.

```
program osciloscope:
{$N+}
uses GRAPH. GPIB. CRT
:
```

-----

Controle do osciloscopio Tektronix atraves do GPIB

placa GPIB da STD

versao 6.0

(c) a.lago 1991

-----

```
type st40 = string[40];
```

```
{ ***** Declaracao de constantes usadas em sistemas GPIB *****}
{ ***** arquivo decl.tp4 da STD *****}
```

Const

```
UNL = $3f; (* GPIB comando unlisten *)
UNT = $5f; (* GPIB comando untalk *)
GTL = $01; (* GPIB go to local *)
SDC = $04; (* GPIB selected device clear *)
PPC = $05; (* GPIB ppoll configure *)
GET = $08; (* GPIB group execute trigger *)
TCT = $09; (* GPIB tome o controle *)
LLO = $11; (* GPIB local lock out *)
DCL = $14; (* GPIB device clear *)
PPU = $15; (* GPIB ppoll unconfigure *)
SPE = $18; (* GPIB habilitar poll serial *)
SPD = $19; (* GPIB desabilitar poll serial *)
PPE = $60; (* GPIB habilitar poll paralelo *)
PPD = $70; (* GPIB desabilitar poll paralelo*)
S = $08; (* especifica sentido de PPR *)
```

```
REOS = $400;
XEOS = $800;
BIN = $1000;
LF = $0A;
TIMO = $4000;
SRQI = $1000;
CIC = $20;
TACS = $08;
LACS = $04;
```

```
{**** fim das declaracoes da STD ****}
```

```

b_recebido      : cbuf;

valor           : array[1..Nam] of integer;
ev_val         : integer;

Y               : PltArray;
kk             : integer;
Graphdriver.
graphmode      : integer;
max,min        : real;
x,xin,xfi,delta : real;
P              : pointer;
resp          : char;
saida         : string;
preambulo     : array[1..250] of char;
Arq           : string[40];
N_Arq        : text;

```

```
{ ***** PROCEDURES ***** }
```

```

PROCEDURE Plota (var
                func      :PltArray ;           {----- Plota -----
                npt      :word;
                ampli    :real);

var j,x1,x2,y1,y2      :word;
    Xo,delta,delxr     :real;

begin
max:=func[1]; min:= max;
for j:=2 to npt do begin
    if max < func[j] then max:= func[j];
    if min > func[j] then min:= func[j];
end;
delta:= Max - Min;

if delta = 0 then delta:=Max / 2 ;
delta:= delta /(ampli * MaxY);
delxr := (MaxX / npt);
if delxr = 0 then delxr :=1;

y1:= MaxY + trunc( min / delta);
line(1,y1,MaxX,y1);

x1:=1; y1:= MaxY - round( (func[1] - min ) / delta );
MoveTo(x1, y1);
for j:= 2 to npt do begin
    x2:= 1 + round(delxr*j);
    y2:= MaxY - round( ( func[j] - min ) / delta)

    line(x1,y1,x2,y2);
    x1:=x2;
    y1:=y2;
end;

end; { plota }

```

```

PROCEDURE Eixos(X01,X02      : real);      { ----- Eixos -----}

    var deltax,deltay      : word;
        n1,x1,y1          : word;

    begin
        deltax := MaxX div 10;
        deltay := MaxY div 10;
        x1:=0;
        for kk:= 1 to 10 do begin
            Line(x1,MaxY,x1+deltax,MaxY);
            Line(x1+deltax,MaxY,x1+deltax,MaxY-10);
            x1:= x1+deltax;
            end;

        y1:=0;
        for kk:= 1 to 10 do begin
            Line(1,y1,1,y1+deltay);
            Line(1,y1+deltay,10,y1+deltay);
            y1:= y1+deltay;
            end;

        Str(X01:3:1,saida);
        OutTextXY(1,MaxY+10,saida);
        Str(X02:3:1,saida);
        OutTextXY(MaxX-20,MaxY+10,saida);
        Str(max:6:2,saida);
        OutTextXY(10,10,saida);

    end; { eixos}

```

```

Procedure Send2 ( linha : integer;          { ----- Send2 -----}
                ordem : st40);

var counter,i : integer;
    b_ordem    : cbuf;

begin

    counter := 0;
    repeat
        inc(counter);
        b_ordem[counter] := ordem[counter];

    until ((ordem[counter] = ' ') and
           ( ordem[counter+1] = ' ') ) or
           (counter > 40
            );

    b_ordem[counter] := ' ';
    ibesc(pc,linha,b_ordem,counter);

end;

```

```

}
Procedure Leia(linha, counter : integer ); {----- Ler mensagem do tek ----}
var
    j,i,err      : integer;

```

```

begin
  for j:= 1 to Nam do b_recebido[j] := ' ';
  ibler(pc,linha,b_recebido.counter);

  for j:= 1 to counter do valor[j] := ord(b_recebido[j]);
end;

Procedure Leiapreamb(linha, counter : integer ); {----- Ler preambulo-----}
}
var
  j,i,err      : integer;
begin
  for j:= 1 to Nam do b_recebido[j] := ' ';
  ibler(pc,linha,b_recebido.counter);
  for j:= 1 to counter do preambulo[j] := b_recebido[j];
end;

procedure mostra(counter : word); { ----- Mostra -----}
begin
  for k:= 1 to counter do write(b_recebido[k]);
end;

Procedure ClearOscilosc( linha : integer); {-----Clearoscilosc-----}
}
begin
  ibclr(pc,linha);
end;

Procedure Inicializa_interface; {----- inicializa interface -----}
-}
begin
  b_recebido[1] := ' ';
  ibsic(pc);
  ibsre(pc,1);
  ibeot(pc,1);
  ibesc(pc,tek,b_recebido,1);
end;

procedure gravar: { ----- GRAVAR -----}
}
var t,dt : real;
    bb,kk : integer;
    coco  : char;
begin
  gotoxy(30,5);write('Arquivo? : '); read(arq);

  assign(n_arq,arq);
  rewrite(n_arq);
{  writeln(n_arq, preambulo); }
  gotoxy(30,6);write('base de tempo (microsegundos)? ');read(dt);
  dt := dt / 100.0;

```

```

for j:= 1 to 4096 do begin
    t := j*dt;
    bb := ord(b_recebido[j + 9]); { tira CURVE % XX }
    writeln(n_arq, t:6:3, ' ',bb);
end;
close(n_arq);
gotoxy(10,10);write('          OK          ');
end;

```

```

procedure plotar: { ----- PLOTAR -----

```

```

begin
    Graphdriver:=Detect;
    InitGraph(Graphdriver,graphmode,'');
    SetLineStyle(Solidln,0,NormWidth);
    SetColor(10);

    amplif:=1.0;
    npts := 4050;
    for k := 1 to npts do Y[k] := valor[k];

    plota ( Y , npts , amplif );
    Eixos( xin , xfi);

    OutTextXY(1,MaxY - 40,'press enter ...');
    resp := readkey;
    CloseGraph;
end;

```

```

procedure Graphinit;
begin
    directvideo := false;
    grdriver := detect;
    initgraph(grdriver, grmode, '');
    xmax := getmmaxX;
    SetColor(10);
    SetBKColor(1);
    ymax := getmmaxY;
end;

```

```

procedure LeAngulos;
begin
    gotoxy(2,2);write('angulo de giro em torno de Z : ');

    readln(wz); wz := wz * deg2rad;
    gotoxy(2,3);write('angulo de giro em torno de X : ');
    readln(wx); wx := wx * deg2rad;
    write('tau: ');readln(tau);
    swx := sin(wx);
    cwx := cos(wx);
    swz := sin(wz);
    cwz := cos(wz);

    R[1,1] := cwx;      R[1,2] := -swx;      R[1,3] := 0.0;
    R[2,1] := cwz*swx; R[2,2] := cwz*cwx;   R[2,3] := -swz;
    R[3,1] := swz*swx; R[3,2] := swz*cwx;   R[3,3] := cwz;
end;

```

```

procedure gira( var p1,p2 : pontos);
var l,k : integer;
begin
  for l := 1 to 3 do
    begin
      p2[l] := 0.0;
      for k := 1 to 3 do p2[l] := p2[l] + R[l,k]*p1[k];
    end;
  end;
end;

```

```

procedure Learquivo:

```

```

begin
  clrscr;
  gotoxy(2,2);write('Nome do arquivo : ');readln(qn_arq);
  assign(parq,qn_arq);
  reset(parq);
  nnpt := 0;
  for l := 1 to 4200 do read(parq,bf[l]);
  close(parq);

  for k:= 1 to 3900 do f[k] := ord(bf[k+260]);
end;

```

```

procedure PPlota( p      : pontos;          {----- plota -----}
                  delta : integer;
                  linha  : boolean);

```

```

var cons      : real;
begin
  cons := 0.90; { - (yt - p[2])/(yobs-p[2]);}
  zt := (p[3] * cons);
  xt := (p[1] * cons);

  xp := 10 + trunc( xt);

  yp := ymax -10 - trunc( zt);
  if linha then begin
    line(xvtela,yvtela,xp+delta,yp);
    xvtela := xp + delta;
    yvtela := yp;
  end
  else putpixel(xp+ delta ,yp,14);
end;

```

```

procedure Poincare; {----- POINCARE -----}

```

```

begin
  directvideo := false;
  Graphdriver:=Detect;
  InitGraph(Graphdriver,graphmode,'');
  SetLineStyle(Solidln,0,NormWidth);
  SetColor(10);

```

```

amplif:=1.0;
npts := 4050;
for k := 1 to npts do Y[k] := valor[k];

vt      := 435;
yobs    := 5700;
xvtela  := 2300;

yvtela := 1150;
setcolor(10);
repeat
  ClearDevice;
  Leangulos:
    point1[1] := y[1];
    point1[2] := y[1+tau];
    point1[3] := y[1+2*tau];
    gira(point1,point2);
    pplota(point2,300,false);
    k := 10;
    repeat
      inc(k);
      point1[1] := y[k];
      point1[2] := y[k+tau];
      point1[3] := y[k+2*tau];
      gira(point1,point2);
      pplota(point1,0,false);
      pplota(point2,400,false);
    until ( k+2*tau > 4000) or KeyPressed;;
  readln;

  until readkey = 'q ' ;
closegraph;
end;

```

```

Procedure PutMenu: { ----- MENU -----}
begin

```

```

  gotoxy(20, 9);write('L - aquisicao do CH1');
  gotoxy(20,10);write('R - aquisicao do CH2');
  gotoxy(20,11);write('G - grava dados no disco');
  gotoxy(20,12);write('P - plota curva');
  gotoxy(20,13);write('S - Oscilloscope settings');
  gotoxy(20,14);write('I - inicializa osciloscopio');
  gotoxy(20,15);write('F - seccao de Poincare');
  gotoxy(20,16);write('Q ou ESC - termina o programa');
end;

```

```

{===== MAIN PROGRAM =====}

```

61

```

begin
  ClrScr;
  Inicializa_interface;
  ClearOscilosc(tek);
  PutMenu;
  Ymax := maxY;

```

```

repeat
  ch := UpCase(readkey);
  case ch of

    'I': Send2(tek, 'INIt ');           { ---- inicializar ----}

    'G': begin                          { ---- gravar ----}
      gravar;
      PutMenu;

      end;

    'P': begin                          { ---- plotar ----}
      plotar;
      PutMenu;
      end;

    'S': begin                          { ---- settings --}
      Send2(tek, 'WFMpre? ');
      Leiapreamb(tek,240);
      gotoxy(1,1);
      mostra(240);
      { send2(tek, 'WFMpre? XINcr: ');
      Leia(tek,80);
      gotoxy(1,2);
      mostra(80);
      send2(tek, 'ACQuisition? POInts ');
      leia(tek,80);
      gotoxy(1,3);
      mostra(80); }
      end;

    'L': begin                          { ---- Ler canal 1 ----}
      Send2(tek, 'DATA CHAnnel: CH1 ');
      send2(tek, 'DATA ENCdg: BIN ');
      send2(tek, 'DATA SOUrcE: ACQ ');
      send2(tek, 'WFMpre? ');
      Leiapreamb(tek,240);
      send2(tek, 'CURVe? ');
      num := 4500;
      Leia(tek,num);
      Clearoscilosc(tek);
      Plotar;
      Poincare;
      PutMenu;
      end;

    'R': begin                          { ---- Ler canal 2 ----}
      Send2(tek, 'DATA CHAnnel: CH2 ');
      delay(100);
      send2(tek, 'DATA ENCdg: BIN ');
      delay(100);
      send2(tek, 'DATA SOUrcE: ACQ ');
      delay(500);
      send2(tek, 'CURVe? ');
      num := 4500;
      Leia(tek,num);
      ClearOscilosc(tek);
      Plotar;
      PutMenu;
      end;
  end;
end;

```

```
    'F': begin  
          Poincare;  
          PutMenu;  
          end;
```

```
end;
```

```
until (ch = 'Q') or (ch = #27);           { fim do programa }  
end. { of program Oscilosc }
```

program fft:

```
{ $N+ }  
{-----}  
{ usa as subrotinas do Numerical Recipes }  
{ em um array de dados experimental, ou em }  
{ uma funcao gerada internamente. }  
{ (C) A.Lago 26.3.92 }  
{ }  
{-----}
```

uses crt, graph;

const

```
maxX = 650;  
maxY = 390;  
pi = 3.1415926535;  
nn = 2048;  
nn2= 4098; {2nn + 2}  
ln1020 = 0.4342944819*20.0;
```

type

```
dados = array[1..nn2] of real;
```

var

```
medidas,power : dados;  
entrada,saida : text;  
arquivo : string;  
  
j,k,npt : integer;  
max,min,delta,omega,  
t,dt,df : real;  
  
tecla : char;  
  
graphdriver, graphmode,  
grmode, grdriver : integer;
```

procedure four1( var data: dados; nn, isign: integer);

{ modified by lago : 26.03.92 }

var

```
ii,jj,n,mmax,m,j,istep,i: integer;  
wtemp,wr,wpr,wpi,wi,theta: double;  
tempr,tempi: real;
```

begin

```
n := 2*nn;  
j := 1;  
for ii := 1 to nn do begin  
  i := 2*ii-1;  
  if j > i then begin  
    tempr := data[j];  
    tempi := data[j+1];  
    data[j] := data[i];  
    data[j+1] := data[i+1];  
    data[i] := tempr;  
    data[i+1] := tempi
```

```

end:
m := n div 2:

while ((m >= 2) and (j > m)) do
begin
j := j-m;
m := m div 2
end:
j := j+m;
end:
mmax := 2:
while (n > mmax) do
begin
istep := 2*mmax;
theta := 6.28318530717959/(isign*mmax);
wpr := -2.0*sqr(sin(0.5*theta));
wpi := sin(theta);
wr := 1.0;
wi := 0.0;
for ii := 1 to (mmax div 2) do begin
m := 2*ii-1;
for jj := 0 to ((n-m) div istep) do
begin
i := m + jj*istep;
j := i+mmax;
tempr := (wr)*data[j]-(wi)*data[j+1]; {<<<<<<<<<< snl(wr) ..w

tempi := (wr)*data[j+1]+(wi)*data[j]; {<<<<< tirei o snl..}
data[j] := data[i]-tempr;
data[j+1] := data[i+1]-tempi;
data[i] := data[i]+tempr;
data[i+1] := data[i+1]+tempi
end:
wtemp := wr;
wr := wr*wpr-wi*wpi+wr;
wi := wi*wpr+wtemp*wpi+wi
end:
mmax := istep;
end:
end: { of Four1 }

procedure realft( var data: dados; n,isign: integer);
{modified by lago : 26.03.92 }

var
wr,wi,wpr,wpi,wtemp,theta: double;
i,i1,i2,i3,i4: integer;
c1,c2,h1r,h1i,h2r,h2i,wrs,wis: real;
begin
theta := 6.28318530717959/(2.0*n);
wr := 1.0;
wi := 0.0;
c1 := 0.5;

if isign = 1 then
begin
c2 := -0.5;
four1(data,n,1);
data[2*n+1] := data[1];
data[2*n+2] := data[2]
end

```

```

else
begin
c2 := 0.5;
theta := -theta;
data[2*n+1] := data[2];
data[2*n+2] := 0.0;
data[2] := 0.0
end;

wpr := -2.0*sqr(sin(0.5*theta));
wpi := sin(theta);

for i := 1 to (n div 2)+1 do
begin
i1 := i+i-1;
i2 := i1+1;
i3 := n+n+3-i2;
i4 := i3+1;
wrs := (wr); {<<<<<<< tirei o snl }
wis := (wi); {<<<<<<< idem      }
h1r := c1*(data[i1]+data[i3]);
h1i := c1*(data[i2]-data[i4]);
h2r := -c2*(data[i2]+data[i4]);
h2i := c2*(data[i1]-data[i3]);
data[i1] := h1r+wrs*h2r-wis*h2i;
data[i2] := h1i+wrs*h2i+wis*h2r;
data[i3] := h1r-wrs*h2r+wis*h2i;
data[i4] := -h1i+wrs*h2i+wis*h2r;
wtemp := wr;
wr := wr*wpr-wi*wpi+wr;
wi := wi*wpr+wtemp*wpi+wi
end;

if isign = 1 then data[2] := data[2*n+1]
else four1(data,n,-1);

end; { of realft }

PROCEDURE Plota (var
func      :dados ;           {----- Plota -----}
npt       :integer;
ampli     :real);

var j,x1,x2,y1,y2           :integer;
    Xo,delta,delxr         :real;
    max,min                 :real;

begin
max:=func[1]; min:= max;
for j:=2 to npt do begin
    if max < func[j] then max:= func[j];
    if min > func[j] then min:= func[j];
end;
delta:= Max - Min;

if delta = 0 then delta:=Max / 2 ;

```

```

delta:= delta /(ampli * MaxY);
delxr := (MaxX / npt);
if delxr = 0 then delxr :=1;

y1:= MaxY + trunc( min / delta);
line(1,y1,MaxX,y1);

x1:=1; y1:= MaxY - round( (func[1] - min ) / delta );
MoveTo(x1, y1);
for j:= 2 to npt do begin
    x2:= 1 + round(delxr*j);
    y2:= MaxY - round( ( func[j] - min ) / delta)

    line(x1,y1,x2,y2);
    x1:=x2;
    y1:=y2;
end;

end; { plota }

```

```

PROCEDURE Eixos(X01,X02      : real);      { ----- Eixos -----}

var deltax,deltay      : integer;
    kk,n1,x1,y1        : integer;
    max, min           : real;
    saida              : string;

begin
deltax := MaxX  div 10;
deltay := MaxY  div 10;
x1:=0;
for kk:= 1 to 10 do begin
    Line(x1,MaxY,x1+deltax,MaxY);
    Line(x1+deltax,MaxY,x1+deltax,MaxY-10);
    x1:= x1+deltax;
end;

y1:=0;
for kk:= 1 to 10 do begin
    Line(1,y1,1,y1+deltay);
    Line(1,y1+deltay,10,y1+deltay);
    y1:= y1+deltay;
end;

Str(X01:3:1,saida);
OutTextXY(1,MaxY+10,saida);
Str(X02:3:1,saida);
OutTextXY(MaxX-20,MaxY+10,saida);
Str(max:6:2,saida);
OutTextXY(10,10,saida);

end; { eixos}

```

67

```

PROCEDURE PLOTAR;
var
    amplif,
    xin,xfi      : real;

BEGIN

Graphdriver := Detect;
InitGraph(GraphDriver, graphmode, ' ');

```

```

SetLineStyle(Solidln,0, NormWidth);
SetColor(1);
amplif := 0.8;
{ npts := 1000;
  plota ( vetor , npts, amplif);
}
Eixos ( xin, xfi);

CloseGraph;
end:

PROCEDURE GRAPHINIT:
var
  xmax, ymax,
  getmmaxX, getmmaxY : integer;
begin
  directvideo := false;
  grdriver := detect;
  initgraph(grdriver, grmode, '');
  xmax := getmmaxX;
  SetColor(15);
  ymax := getmmaxY;
end;

{===== MAIN PROG =====}

begin
clrscr;

npt := nn2;

write('arquivo de dados : '); readln(arquivo);
write('base de tempo do osciloscopio?(us)'); readln(dt);
dt := dt/1e8;
df := 1.0/(dt*nn2);
assign(entrada, arquivo);
reset(entrada);
for j := 1 to npt-2 do readln(entrada, medidas[j]);
close(entrada);

min := medidas[1];
for j := 2 to nn do
  if min > medidas[j] then min := medidas[j];

for j:= 1 to nn do medidas[j] := medidas[j] - min;

realft(medidas, nn, 1); { faz a fft }
max := sqrt(sqr(medidas[1]) +sqr(medidas[1]));

for j := 1 to nn do begin
  power[j]:= sqrt(sqr(medidas[2*j-1]) + sqr(medidas[2*j]));
  if max < power[j] then max := power[j];
end;

for j := 1 to nn do power[j] := power[j]/max;

```

```
for j := 1 to nn do
    power[j] := ln(power[j])*ln1020;
write('arquivo de saida : ');readln(arquivo);
assign(saida,arquivo);
rewrite(saida);
for j := 2 to nn do writeln(saida,j*df/1000:8:3,' ',power[j]:5:3);
close(saida);

graphinit;
plota(power,nn,0.8);
tecla := readkey;

end.
```

## APÊNDICE B

### EQUAÇÃO PARA O CIRCUITO R-L-DIODO 1N4007

O modelo para a capacitância foi escolhido baseado em [2].

Seja  $C$  a capacitância, então :

$$C = \frac{C_0}{(\delta - \alpha U)^\gamma} \quad (B.1)$$

onde  $C_0 = 16.9pF$  é a capacitância do diodo,  $\gamma \simeq 415$ ,  $\alpha = -\frac{1}{\varphi}$ , onde  $\varphi = 0.6V$   $\delta = 0.6$ ,  $U = U(t)$  é a queda de tensão no diodo.

A equação para o circuito  $RLC$  é :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = A \cos \Omega t \quad (B.2)$$

o terceiro termo de (B.2) é:

$$U(t) = \frac{1}{C} \int idt$$

mas,

$$\frac{dU}{dQ} = \frac{1}{C}$$

substituindo (B.1) na equação anterior, temos:

$$\frac{dU}{dQ} = \frac{(\delta - \alpha U)^\gamma}{C_0}$$

igualando a zero :

$$\frac{dU}{dQ} - \frac{(\delta - \alpha U)^\gamma}{C_0} = 0 \quad (B.3)$$

$$\frac{dU}{(\delta - \alpha U)^\gamma} = \frac{dQ}{C_0} \quad (B.4)$$

integrando ambos os membros de (B.4)

$$\int_{U_0}^U \frac{dU}{(\delta - \alpha U)^\gamma} = \int_0^Q \frac{dQ}{C_0} \quad (B.5)$$

Utilizando a solução tabelada [27] para a integral do lado esquerdo de (B.5):

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a}$$

onde:

$$n = -\gamma$$

$$a = -\alpha$$

$$b = 1$$

teremos:

$$\int \frac{dU}{(\delta - \alpha U)^\gamma} = -\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{(\delta - \alpha U)^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{(\delta - \alpha U_0)^{1-\gamma}}{(1-\gamma)} \quad (B.6)$$

$$\frac{Q}{C_0} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(1-\gamma)} [(\delta - \alpha U)^{1-\gamma} - (\delta - \alpha U_0)^{1-\gamma}] \quad (B.7)$$

Rearranjando os termos, chegamos a seguinte forma para  $U$  :

$$U = \frac{\delta - [(\delta - \alpha U_0)^{1-\gamma} - Q\alpha(1-\gamma)/C_0]^{\frac{1}{1-\gamma}}}{\alpha} \quad (B.8)$$

Substituindo (B.8) em (B.2) e rearranjando os termos :

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \delta - \frac{[(\delta - \alpha U_0)^{1-\gamma} - Q\alpha(1-\gamma)/C_0]^{\frac{1}{1-\gamma}}}{\alpha} = A \cos \Omega t \quad (B.9)$$

Usando em (B.9) a normalização :

$$q = \frac{Q\alpha}{C_0}$$

$$\tau = t \left( \frac{1}{C_0 L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (B.10)$$

$$r = R \left( \frac{C_0}{L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a = A\alpha \quad (B.10)$$

$$b = \alpha U_0$$

$$\omega = \Omega(C_0 L)^{\frac{1}{2}}$$

teremos :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \delta - [(\delta - b)^{1-\gamma} - q(1-\gamma)]^{\frac{1}{1-\gamma}} = a \cos \omega t \quad (B.11)$$

Esta é a equação para o nosso circuito na forma adimensional.

## BIBLIOGRAFIA

- 1- Eckmann, J.-P., Ruelle, D., Rev. of Mod. Phys. 57, 617(1985).
- 2- Linsay, P.S., Phys. Rev. Lett. 47, 1349 ( 1981).
- 3- Brorson, S.D., Dewey, D., Linsay, P.S. ,Phys. Rev. A 28, 1201(1983).
- 4- Testa, J., Pérez, J., Jeffries, C., Phys. Lett. 48, 714 ( 1981).
- 5- Bocko, M. F., Douglass, D.H., Frutchy, H., H., Phys. Lett. 104A, 388 (1984).
- 6- Klinker, T., Meyer-Ilse, W., Lauterborn, W., Phys. Lett. 101A, 371 ( 1984).
- 7- Puccioni, G.P., Poggi, A., Gadamiski, W., Tredicce, J.R., Arecchi, F.T., Phys. Rev. Lett. 55, 339 (1985).
- 8- Braun, T., Lisboa, J.A., Francke, R.E., Gallas, J.A.C., Phys. Rev. Lett. 59, 613 (1987)
- 9- Atmanspacher, H., Scheingraber, H., Phys. Rev. A 34, 253(1986).
- 10- Schuster, H.G., "Deterministic Chaos An Introduction", VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim(1988).
- 11- Gallas, J.A.C., "Introdução à Teoria do Caos Determinístico", II Escola de Verão Jorge André Swieca - Óptica Quântica e Não Linear, IFQSC/USP (1990).
- 12- Moon, F.C., "Chaotic Vibrations", John Wiley & Sons (1987).
- 13- Ueda, Y., J. Stat. Phys. 20, 181(1979).
- 14- Cooley, J.W., Tukey, J.W., Math. Computation 19,90, 297(1965).
- 15- Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, C., "Order Within Chaos", John Wiley & Sons (1986).
- 16- "2221A Portable Oscilloscope Operators" Tektronix, Inc.(1990).
- 17- "The Semiconductor Data Book", Motorola Semiconductors Products Inc. (1970).
- 18- Eckmann, J.-P., Rev. of Mod. Phys. 53, 643(1981).

- 19- Thompson, J.M.T., Stewart, H.B., "Nolinear Dynamics and Chaos", John Wiley & Sons (1988).
- 20- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolky, S.A., Vetterhing. W.T., "Numerical Recipes", Cambrige University Press (1987).
- 21- Spiegel, M.R., "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas", Col. Schaum, McGraw-Hill do Brasil(1973).
- 22- Hunt, E.R., Phys. Rev. Lett. 49, 1054 (1982).
- 23- Hunt, E.R., Rollins, R.W., Phys. Rev. A 29, 1000(1984).
- 24- Hubermann, B.A., Crutchfield, Phys. Rev. Lett. 43, 1743(1971).
- 25- Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J.A, Science 238, 632(1987).
- 26- Rajarshi, R., Murphy Jr., T.W., Maier, T.D., Gills, Z., Hunt, E.R., Phys. Rev. Lett. 68, (1992).
- 27- Grassberger, P., Procaccia, I., Physica 9D, 189(1983).
- 28- Farmer, J.D., Ott, E., Yorke, J.A., Physica 7D, 153(1983).
- 29- Brigham, O., "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall, Inc. (1974).
- 30- Takens, F., Lec. Notes in Math. 898(1981).
- 31- Rollins, R.W., Hunt, E.R., Phys. Rev. Lett. 49, 1295(1982).
- 32- Hirsch, M.W., Smale, S., "Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra", Academic, N.Y.(1965).