

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TRANSIÇÃO NEMÁTICO-ISOTRÓPICA PELO MÉTODO DA TEORIA DE CAMPOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS.

JOSÉ ALBERTO PINHO

FLORIANÓPOLIS

SANTA CATARINA - BRASIL

JANEIRO - 1993

TRANSIÇÃO NEMÁTICO-ISOTRÓPICA PELO MÉTODO DA TEORIA DE CAMPOS

JOSÉ ALBERTO PINHO

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do grau de Mestre em Ciência, especialidade em Física, e demais membros da banca examinadora



Prof. Dr. Subramania Jayaraman
(orientador)



Prof. Dr. Wagner Figueiredo
(coordenador)

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Subramania Jayaraman



Prof. Dr. Vitor Hugo Ferreira dos Santos



Prof. Dr. Wagner Figueiredo

AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Física da Universidade Federal de Santa Catarina.

Ao Professor Subramania Jayaraman pela orientação recebida nesta dissertação.

À funcionária Neusa pela datilografia deste trabalho de dissertação.

Ao grupo de mecânica estatística pela possibilidade de escrever a tese no computador.

Ao prof. Eleutério pelos desenhos usados.

À todas as pessoas que me ajudaram, com seu apoio neste trabalho.

À minha família.

Ao CNPq pela bolsa de estudo cedida.

RESUMO

O campo do parâmetro de ordem dos Nemáticos-Liotrópicos é representado por um tensor de segunda ordem simétrico e com traço nulo, com cinco componentes ($Q_{\alpha\beta}$). Neste trabalho, estudaremos a transição nemático-isotrópico como uma aplicação da Teoria de Campo Tensorial Euclideana. A Densidade Lagrangeana de acordo com Landau-de Gennes é escrito por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla Q_{\alpha\beta} \cdot \nabla Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} m^2 Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{3!} u_3 Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\gamma} \cdot Q_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4!} u_4 (Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\alpha})^2$$

A teoria de Landau mostra um diagrama de fases com nemáticos-uniaxiais e fase isotrópica. A transição uniaxial-isotrópica é de primeira ordem exceto num ponto isolado de segunda ordem, conhecida como ponto de Landau e a transição entre as fases uniaxiais são de primeira ordem. Assumindo que as flutuações não mudem em geral o diagrama de fases, usaremos a teoria de perturbação renormalizada e as condições de renormalização da teoria de campo, para calcular as funções de Wilson $\beta(u_4)$, $\gamma_\phi(u_4)$ e $\gamma_\phi^2(u_4)$ para uma teoria sem massa referente ao ponto de Landau ($m^2=0$ e $u_3=0$). Usando os diagramas de Feynman os expoentes críticos em torno deste ponto de Landau são determinados.

Quando $u_3=0$, o comportamento crítico do sistema é dominado pelo ponto de Landau. Se a constante de acoplamento for $u_3 \neq 0$, o sistema faz um "crossover" do ponto de Landau para uma transição de primeira ordem. O expoente de "crossover" do ponto de Landau para uma transição de primeira ordem é calculado até a ordem ϵ^2 , onde $\epsilon=4-d$.

ABSTRACT

The order parameter field of the Liotropic-Nematics is represented by a symmetric traceless second rank tensor with five independent components $(Q_{\alpha\beta})$. In this work we will study the nematic-isotropic transition as an Euclidean Tensor Field Theory model. The Lagrangian density according to Landau-de Gennes is given by:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} Q_{\beta\gamma} \cdot \nabla_{\beta} Q_{\gamma\alpha} + \frac{1}{2} m^2 Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{3!} u_3 Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\gamma} \cdot Q_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4!} u_4 (Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\alpha})^2$$

Landau's theory shows a phase diagram with uniaxial-nematics and isotropic phases. The uniaxial-isotropic transition is of first order except for an isolated point of second order transition known as Landau's point and the phase transition between the two uniaxial phases is of first order. Assuming that, in general, the fluctuations do not change the phase diagram, we will use the renormalized perturbation theory and field theory renormalization conditions to calculate Wilson's functions $\beta(u_4)$, $\gamma_{\phi}(u_4)$, $\gamma_{\phi^2}(u)$ for a theory which is massless in relation to Landau's point ($m^2=0$ and $u_3=0$). Using Feynman diagrams the critical exponents around this point are evaluated.

When $u_3 = 0$, the critical behaviour of the system is dominated by Landau's point. If the coupling constant, u_3 , has a non-zero value the system executes a crossover from Landau's point to a first order transition. The crossover exponent from Landau's point to a first order transition is calculated up to order ε^2 , where $\varepsilon = 4-d$.

SUMÁRIO

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
CAPÍTULO I - Introdução	1
CAPÍTULO II - A densidade Lagrangeana e as funções de Green	9
CAPÍTULO III - Grupo de renormalização	32
CAPÍTULO IV - Determinação dos expoentes críticos	49
CAPÍTULO V - Determinação do expoente de "crossover".....	58
CAPÍTULO VI - Conclusão	65
APÊNDICE A	66
BIBLIOGRAFIA -	79

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

De acordo com a teoria de Landau, usando um parâmetro de ordem tensorial na expansão do potencial termodinâmico, pode-se prever a existência de um diagrama de fases apresentando um ponto crítico isolado de transição de segunda ordem, numa linha de transições de primeira ordem. Tal ponto é conhecido como *Ponto de Landau*. No ponto de Landau, o coeficiente do termo cúbico na expansão do potencial termodinâmico no parâmetro de ordem, vai para zero.

Nos cristais líquidos liotrópicos, a transição de fases nemático uniaxial-isotrópico, pode ser descrita por um parâmetro de ordem tensorial. Esta transição é de primeira ordem, e pela teoria de Landau, um ponto isolado de segunda ordem deve unir as linhas de primeira ordem uniaxial positiva e uniaxial negativa.

Vamos definir o parâmetro de ordem utilizado na transição de fases nemático uniaxial-isotrópico.

1.1 -PARÂMETRO DE ORDEM¹

O parâmetro de ordem dos Nemáticos-Liotrópicos pode ser definido como a parte anisotrópica do tensor de susceptibilidade ou constante dielétrica $Q_{\alpha\beta}$. Sendo que $Q_{\alpha\beta}$ é um tensor de segunda ordem, simétrico e com traço nulo.

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} \quad (1.1)$$

$$Q_{\alpha\alpha} = 0$$

$Q_{\alpha\beta}$ possui cinco componentes independentes, e pode ser escrito:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & -Q_{11} & -Q_{22} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Quando os componentes diagonais são iguais, o tensor tem simetria axial, temos uma fase nemática uniaxial, e quando $Q_{\alpha\beta}$ é tensor nulo, temos a fase isotrópica. A fase isotrópica tem simetria rotacional, e a fase nemática uniaxial tem simetria axial.

Como $Q_{\alpha\beta}$ é simétrico, pode ser diagonalizado, então:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Se $a=b=0$, ele representa uma fase isotrópica.

Se $a=b \neq 0$, para $a > 0$, ele representa uma fase nemática uniaxial positiva (FNu^+).

Se $a=b \neq 0$, para $a < 0$, ele representa uma fase nemática uniaxial negativa (FNu^-).

Vamos fazer o diagrama de fases dos nemáticos uniaxiais e da fase isotrópica, usando a teoria de Landau.

1.2 - TEORIA DE LANDAU¹

Segundo essa teoria a Energia Livre de Gibbs (G), pode ser expressa através de uma expansão em série de potências do parâmetro de ordem, de acordo com a simetria da fase nemática. Como G é um escalar, precisamos de todos os invariantes escalares de $Q_{\alpha\beta}$. Vamos obter esses invariantes:

(i) o primeiro invariante é o traço de $Q_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\alpha} = 0$.

(ii) o segundo invariante é o traço do produto $Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha}$,

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} = 2(a^2 + b^2 + ab).$$

(iii) o terceiro invariante é o traço do produto $Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha}$,

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} = -3ab(a+b).$$

(iv) o quarto invariante é o quadrado do segundo invariante,

$$(Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha})^2 = 4(a^2 + b^2 + ab)^2.$$

Com isso podemos construir a densidade de Energia Livre,

$$G = G_0 + \frac{1}{2} r_0 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} + u_3 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} + u_4 (Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha})^2 \quad (1.4)$$

onde:

G_0 é a Energia Livre da fase isotrópica.

r_0 , u_3 , u_4 são constante fenomenológicas que dependem da pressão e temperatura: $r_0 = A(T - T_c)$, A é constante e T_c é a temperatura onde ocorre a transição de fases de segunda ordem, $u = u(P)$ e u é independente da temperatura.

Usando os invariantes, a Energia Livre fica:

$$G = G_0 + r_0 (a^2 + b^2 + ab) - 3u_3 ab(a+b) + 4u_4 (a^2 + b^2 + ab)^2 \quad (1.5)$$

Para que se manifestem as fases nemática e isotrópica, a tem que ser igual a b .

$$G = G_0 + 3r_0 a^2 - 6u_3 a^3 + 36u_4 a^4 \quad (1.6)$$

Minimizando a Energia Livre com respeito a a ,

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 6r_0 a - 18u_3 a^2 + 144u_4 a^3 = 0 \quad (1.7)$$

$a=0$, implica na fase isotrópica e se for $a \neq 0$, teremos a fase nemática uniaxial, logo:

$$24u_4 a^2 - 3u_9 a + r_0 = 0 \quad (1.8)$$

Teremos os seguintes valores de a :

$$a_{\pm} = \frac{u_9 \pm \sqrt{u_9^2 - \frac{32}{3} u_4 r_0}}{16u_4} \quad (1.9)$$

No ponto da transição uniaxial-isotrópica, só há um potencial $G=G_0$, com isso só há um valor de a diferente de zero. O parâmetro a pode assumir dois valores: $a=0$ e $a \neq 0$. O valor de $a \neq 0$ é obtido de:

$$G_0 - G_0 + 36u_4 a^4 - 6u_9 a^3 + 3r_0 a^2 = 0 \quad (1.10)$$

e daí,

$$a_{\pm} = \frac{u_9 \pm \sqrt{u_9^2 - 12u_4 r_0}}{12u_4} \quad (1.11)$$

Como na curva de coexistência só há um potencial, então há um único valor diferente de zero de a . Da eq. (1.11):

$$u_9^2 = 12u_4 r_0 \quad (1.12)$$

Usando este valor na eq. (1.9), temos:

$$a_{\pm} = \frac{u_9 \pm u_9/3}{16u_4} \quad (1.13)$$

Obtemos dois valores:

$$a_+ = u_3 / 12u_4 \text{ e } a_- = u_3 / 24u_4 \quad (1.14)$$

Se levarmos esses valores à eq. (1.7) verificaremos que: a_+ minimiza G e a_- não minimiza. Logo, a curva de coexistência da transição de fases de primeira ordem, onde se dá a transição de fases nemático uniaxial-isotrópica, é dada por:

$$u_3 = \pm \sqrt{12u_4 r_0}, \text{ com } r_0 > 0, \quad (1.15)$$

e os parâmetros de ordem nesta curva são:

$$a = u_3 / 12u_4 \text{ e } a = 0 \quad (1.16)$$

$u_3 > 0$ o que implica $a > 0$, corresponde à curva de coexistência entre a fase isotrópica com a fase nemática uniaxial positiva (FNU⁺).

$u_3 < 0$ o que implica $a < 0$, corresponde à curva de coexistência entre a fase isotrópica com a fase nemática uniaxial negativa (FNU⁻).

Assim para:

i) $r_0 < u_3^2 / 12u_4$ e $u_3 > 0$, corresponde à FNU⁺,

ii) $r_0 < u_3^2 / 12u_4$ e $u_3 < 0$, corresponde à FNU⁻,

iii) $r_0 > u_3^2 / 12u_4$, corresponde à fase isotrópica,

iv) $u_3 = r_0 = 0$, corresponde ao ponto isolado de Landau,

v) para $r_0 < 0$, quando $u_3 \rightarrow 0$, existe uma descontinuidade no parâmetro de ordem: $(a_+ - a_-)$:

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\frac{32}{3} u_4 |r_0|}{16u_4}} \quad (1.17)$$

Assim, a linha $u_3 = 0$, $r_0 < 0$, é uma linha de transição de fases de primeira ordem, correspondendo à uma curva de coexistência entre as fases FNU⁺ e FNU⁻.

Todas essas conclusões estão mostradas no diagrama de fases da figura colocada no final do capítulo. A figura mostra:

- i) para $u_s \neq 0$ e $r_0 > 0$, as linhas pontilhadas correspondem à transição de primeira ordem entre as fases FNu^+ e isotrópica e a FNu^- e isotrópica,
- ii) para $u_s = r_0 = 0$, caracteriza o ponto isolado de segunda ordem de Landau (L),
- iii) para $u_s = 0$ e $r_0 < 0$, as fases FNu^+ e FNu^- estão separadas por uma linha de primeira ordem.

Experimentalmente essas previsões tem sido confirmadas nos Cristais Líquidos Liotrópicos, embora o Ponto de Landau não tenha sido observado ainda^{2,7}. Mas acredita-se ser possível encontra-lo à altas pressões.

Entretanto, apesar de seus sucessos a teoria de Landau fornece valores incorretos para os expoentes críticos⁽⁶⁾. Por outro lado tem-se manifestado frequentemente correta na suas previsões da ordem da transição e fornecendo assim um ponto de partida para uma teoria mais completa.

A consequência dessas limitações é a necessidade de usar um outro método que forneça os expoentes críticos em torno do ponto de Landau, levando em conta as flutuações do parâmetro de ordem. O método usado será o Grupo de Renormalização de Wilson (GRW) com a Teoria de Perturbação Renormalizada.

A Densidade Lagrangeana para uma transição nemática-isotrópica, segundo Landau-de Gennes pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \nabla Q_{\alpha\beta} \nabla Q_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mu^2 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{3!} \lambda_3 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma} Q_{\gamma\alpha} \\ & + \frac{1}{4!} \lambda_4 (Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha})^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Como queremos obter os expoentes críticos em torno do ponto de Landau, onde se dá a transição de fases de segunda ordem, fazemos a constante de acoplamento da interação cúbica $\lambda_3 = 0$, com isso o

comportamento crítico do sistema é dominado pelo ponto de Landau. Se $\lambda_3 \neq 0$, o sistema pode fazer uma mudança ("crossover") do ponto de Landau para uma transição de fases de primeira ordem.

No capítulo II, vamos construir uma Densidade Lagrangeana⁶ que seja mais fácil de manipular, em torno da transição nemático uniaxial-isotrópica, de onde se obterá diretamente as funções de correlação ou funções de Green. Neste capítulo serão apresentadas as regras de Feynman, de maneira que as funções de Green serão escritas em termos dos diagramas de Feynman; e depois serão definidas as funções de "vertex". Entretanto verificaremos que essas funções divergem para valores grandes e pequenos momentos, quando $d \rightarrow 4$.

No capítulo III, calcularemos os expoentes críticos⁶ em torno do ponto de Landau usando o método do GRW, ele só é aplicado neste ponto, onde ocorre a transição de fases de segunda ordem. Como queremos que o comportamento crítico do sistema seja dominado pelo ponto de Landau, desprezaremos o termo cúbico da Densidade Lagrangeana, fazendo $\lambda_3 = 0$.

Devido à divergência das funções de "vertex", a massa do campo μ^2 e a constante de acoplamento λ_4 perdem o significado, divergindo. Por isso devemos criar novos parâmetros renormalizados de massa m^2 e constante de acoplamento u_4 , que não divergem.

Fazendo uma renormalização das funções de "vertex", teremos as funções de "vertex" renormalizadas, que não mais divergirão para valores grandes de momentos, com "cutoff" $\Lambda \rightarrow \infty$, e em $d \rightarrow 4$. O "cutoff" (comprimento de onda de corte) Λ é definido como inverso da distância da rede. No caso dos cristais líquidos não há rede, a distância é nula, logo $\Lambda \rightarrow \infty$. Há vantagem em formular a teoria em termos das integrais que convergem para $\Lambda \rightarrow \infty$ e $d \rightarrow 4$, deste modo os detalhes microscópicos são isolados. Para o estudo dos fenômenos críticos este procedimento assegura que o "cutoff" microscópico, $\Lambda \rightarrow 0$, não será importante.

No ponto de Landau a massa desaparece ($m^2 \rightarrow 0$), então vamos usar as condições de renormalização, para fixar as funções de "vertex" renormalizadas numa dada escala de momento externo. Feito isso, podemos determinar os parâmetros não renormalizados: λ_4, \dots , em termos dos parâmetros renormalizados: u_4, \dots .

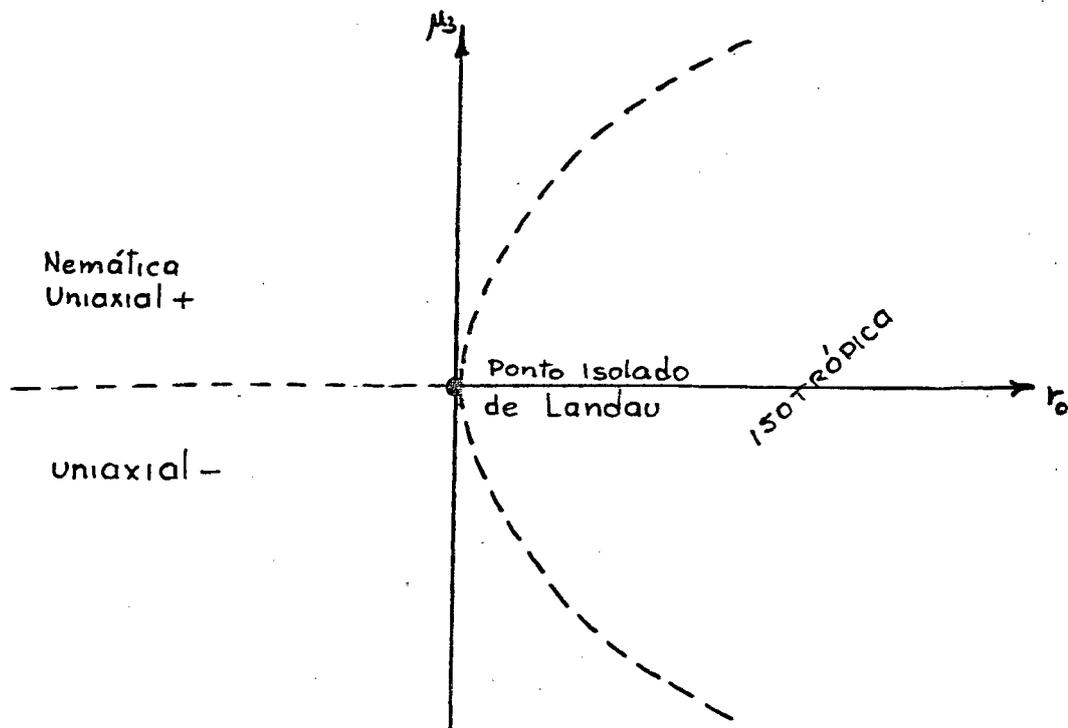
Pela variação infinitesimal da escala de momento, teremos um grupo de equações renormalizadas, deste grupo obteremos as funções de Wilson⁶: $\beta(u_4)$, $\gamma_\phi(u_4)$ e $\gamma_{\phi^2}(u_4)$ escritas em potências de u_4 e ε , $\varepsilon = d-4$.

Da equação $\beta(u_4 = u_4^*) = 0$, teremos os pontos fixos, onde a mudança de escala do momento não afeta a constante de acoplamento u_4 , isto se dá no ponto de Landau. Usaremos o ponto fixo u_4^* diferente de zero.

No capítulo IV, a partir das funções de Wilson $\gamma_\phi(u_4^*)$ e $\gamma_{\phi^2}(u_4^*)$ no ponto fixo u_4^* , calcularemos os expoentes críticos⁶ de flutuações η e ν , na ordem ε^2 , e usando as relações de Escala⁶ determinaremos os outros expoentes críticos: α , β , δ e γ .

No capítulo V, calcularemos o expoente de "crossover" ϕ_3 em ordem ε^2 , introduzindo o termo cúbico na Densidade Lagrangeana. Com a introdução da constante de acoplamento da interação cúbica u_3 , o sistema pode fazer um "crossover" do ponto de Landau para uma transição de fases de primeira ordem⁶.

Gráfico do Diagrama de Fases:



CAPÍTULO II

A DENSIDADE DO LAGRANGEANO E AS FUNÇÕES DE GREEN

Usando o parâmetro de ordem $Q_{\alpha\beta}$ e sua simetria, que definimos na introdução, podemos construir a *Densidade do Lagrangeano*. Pela Densidade do Lagrangeano determinaremos as regras de Feynman, e obteremos as funções de Green em termos dos diagramas de Feynman.

2.1 - CONSTRUÇÃO DO LAGRANGEANO^{5,6}

A densidade Lagrangeana é formada pelos invariantes do parâmetro de ordem ou campo⁶, que obtivemos na introdução. A densidade Lagrangeana será dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \nabla Q_{\alpha\beta} \nabla Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{2!} \mu^2 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{3!} \lambda_3 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\nu} Q_{\nu\alpha} \\ & + \frac{1}{4!} \lambda_4 \left[Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde:

μ^2 é a massa do campo, e é proporcional a $(T-T_c)$,

λ_3 , λ_4 são constantes de acoplamento da interação cúbica e quadrática, respectivamente.

A densidade do Lagrangeano é uma função do campo ou parâmetro de ordem e também do gradiente do campo. Todas as interações são locais, com isso podemos usar a Teoria de Campo Euclideana. De forma que não depende explicitamente das coordenadas espaciais. Devido a esta invariância translacional, podemos formular a teoria no

no espaço de momentos.

As regras de Feynman são determinadas diretamente da Densidade Lagrangeana. A parte quadrática (\mathcal{L}_0) determina o propagador livre ou função de Green livre (G_0) e o resto determina os vértices (\mathcal{L}_{int}).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

onde:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \nabla Q_{\alpha\beta} \nabla Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{2!} \mu^2 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{3!} \lambda_3 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\nu} Q_{\nu\alpha} + \frac{1}{4!} \lambda_4 \left[Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} \right]^2 \quad (2.3)$$

No espaço de momentos, \mathcal{L}_0 fica:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left[k^2 + \mu^2 \right] Q_{\alpha\beta}(k) Q_{\beta\alpha}(-k) \quad (2.4)$$

Queremos exprimir o invariante do parâmetro de ordem de forma mais simétrica, como $Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta, \nu\delta} \cdot Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\nu\delta}$, sendo $A_{\alpha\beta, \nu\delta}$ um tensor.

Com isso, vamos reescrever a Densidade Lagrangeana.

O propagador livre é (ver referência⁶ na página 55):

$$G_{0 \alpha\beta, \nu\delta}(k) = \langle Q_{\alpha\beta}(k) Q_{\nu\delta}(-k) \rangle = \frac{A_{\alpha\beta, \nu\delta}^{-1}}{k^2 + \mu^2} \quad (2.5)$$

2.2 - DETERMINAÇÃO DO PROPAGADOR LIVRE^{5,6}

A inversão de um tensor do tipo de $A_{\alpha\beta, \nu\delta}$ é muito difícil. Então faremos uma transformação do tensor $Q_{\alpha\beta}$, que tem cinco componentes independentes, em um vetor Ψ_i com cinco componentes. E o tensor $A_{\alpha\beta, \nu\delta}$ se transformará em uma matriz, que é mais fácil de resolver.

$Q_{\alpha\beta}$ foi definido em (1.2), logo seu produto $Q_{\alpha\beta} \cdot Q_{\beta\alpha}$ é:

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} = 2 \left[Q_{11}^2 + Q_{22}^2 + Q_{12}^2 + Q_{13}^2 + Q_{23}^2 + Q_{11} Q_{22} \right] \quad (2.6)$$

Vamos reescrever os cinco componentes independentes do tensor $Q_{\alpha\beta}$, em cinco componentes de um vetor ψ_i , $i = 1, \dots, 5$, da seguinte maneira:

$Q_{\alpha\beta}$	11	22	12	13	23
ψ_i	1	2	3	4	5

(2.7)

A eq. (2.6) em termos dos ψ_i , fica:

$$Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} = 2 \left[\sum_{i=1}^2 \psi_i \psi_i + \sum_{i=3}^5 \psi_i \psi_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^2 \psi_i \psi_j \right] = \psi_i V_{ij} \psi_j \quad (2.8)$$

onde V_{ij} é uma matriz:

$$V_{ij} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A inversa desta matriz é:

$$V_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Com isto a parte quadrática da Densidade Lagrangeana fica:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left(K^2 + \mu^2 \right) \psi_i V_{ij} \psi_j, \quad (2.11)$$

e o propagador livre:

$$G_0(K) = \frac{V_{ij}^{-1}}{K^2 + \mu^2} \quad (2.12)$$

Podemos escrever V_{ij}^{-1} numa combinação linear dos índices: α, β, ν e δ .

$$V_{ij}^{-1} = V_{\alpha\beta, \nu\delta}^{-1} = C_1 \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\delta} + C_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\nu} + C_3 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\nu\delta} \quad (2.13)$$

Usando a mesma correspondência dos índices: $\alpha\beta = i$ e $\nu\delta = j$, fica:

$$V_{ij}^{-1} = V_{\alpha\beta, \nu\delta}^{-1} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\nu} \right] - \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\nu\delta} \quad (2.14)$$

onde:

$\delta_{\alpha\beta}$ são tensores unitários de n dimensões e n é a dimensão do tensor $Q_{\alpha\beta}$, no nosso caso, $n=3$.

Fazemos:

$$V_{ij}^{-1} = \Delta_{ij} = \Delta_{\alpha\beta, \nu\delta} \quad (2.15)$$

Com isso determinamos o \mathcal{L}_0 :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left[k^2 + \mu^2 \right] Q_{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta, \nu\delta}^{-1} Q_{\nu\delta} \quad , \quad (2.16)$$

e o propagador livre fica:

$$G_{\alpha\beta, \nu\delta}(K) = \langle Q_{\alpha\beta}(K) Q_{\nu\delta}(-K) \rangle = \frac{\Delta_{\alpha\beta, \nu\delta}}{K^2 + \mu^2} \quad (2.17)$$

Para simplificar trocamos cada par de índices por uma letra, assim: $\alpha\beta$ por a , $\nu\delta$ por b , Assim as equações (2.14), (2.16) e (2.17) ficam:

$$\Delta_{ab} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\nu} \right] - \frac{\delta_{\alpha\beta} \delta_{\nu\delta}}{n} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left[k^2 + \mu^2 \right] Q_a \Delta_{ab}^{-1} Q_b \quad (2.19)$$

$$G_{ab}(K) = \frac{\Delta_{ab}}{K^2 + \mu^2} \quad (2.20)$$

Sendo que:

$$\Delta_{\alpha\alpha} = \Delta_{\alpha\beta, \alpha\beta} = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \Delta \quad (2.21)$$

$$\Delta_{\alpha\alpha, \nu\delta} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta_{\alpha\beta, \nu\nu} = 0 \quad (2.22)$$

onde Δ é o número de componentes independentes do tensor $Q_{\alpha\beta}$. No nosso caso $n = 3 \Rightarrow \Delta = 5$

2.3 - DETERMINAÇÃO DA PARTE COM INTERAÇÃO^{5,6}

Devemos escrever os invariantes que aparecem na Densidade Lagrangeana de Interação da forma mais simétrica possível e em conformidade com a estrutura tensorial da função de Green Livre.

O terceiro invariante pode ser escrito como: $\Delta_{abc} Q_a Q_b Q_c$, sendo que Δ_{abc} não tem estrutura e seu traço é nulo sobre cada um dos pares a, b e c ($\Delta_{aac} = 0$). O quarto invariante escreve-se como: $\Gamma_{4abcd} Q_a Q_b Q_c Q_d$,

onde:

$$\Gamma_{4abcd} = \frac{1}{3} \left[\Delta_{ab} \Delta_{cd} + \Delta_{ac} \Delta_{bd} + \Delta_{ad} \Delta_{bc} \right] \quad (2.23)$$

Com os invariantes escritos deste modo, teremos a Densidade Lagrangeana de interação expressa na forma:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda_3}{3!} \Delta_{abc} Q_a Q_b Q_c + \frac{\lambda_4}{4!} \Gamma_{4abcd} Q_a Q_b Q_c Q_d \quad (2.24)$$

Δ_{ab} tem as seguintes propriedades:

$$\Delta_{ab} \Delta_{bc} = \Delta_{ac}$$

$$\Delta_{ab} \Delta_{bcd} = \Delta_{acd}$$

$$\Delta_{ab} Q_a = Q_b$$

$$\Delta_{ade} \Gamma_{4debc} = \frac{2}{3} \Delta_{abc}$$

(2.25)

Vamos a seguir enunciar as regras de Feynman, para podermos escrever as funções de Green em termos dos diagramas de Feynman.

2.4 - REGRAS DE FEYNMAN⁶

As funções de Green $G_{i_1 \dots i_N}^{(N)}(K_1, \dots, K_N)$ podem ser expandidas em termos dos diagramas de Feynman.

Um diagrama consiste de N pontos externos, marcados com índices, de cada um partindo uma linha externa denominada K_i ($i=1, \dots, N$), e de n_{r_i} vértices de interação do tipo λ_{r_i} , representadas por pontos. De cada vértice partem r linhas internas, marcadas com índices, denominadas q_1^i, \dots, q_r^i (i percorre todos os vértices). Todas as linhas devem ser conectadas aos pares, sendo que os índices de cada par de linha devem ser iguais.

Para avaliar um gráfico, apliquemos as regras acima, conservando o momento de cada vértice e também o momento total do gráfico. A fim de obter a expressão analítica de cada gráfico, usamos as seguintes regras:

i) para cada linha chamada q , associamos um fator $G_0(q)$;

ii) para cada vértices do tipo r , associamos um fator

$$-\frac{\lambda_r}{r!} \Gamma_{rabc\dots};$$

ii) integramos todos os momentos internos independentes por

$$\int \frac{d^d c}{(2\pi)^d};$$

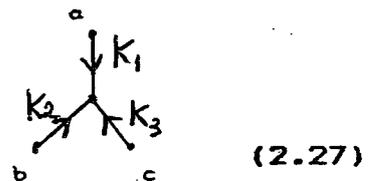
- iv) multiplicamos por um fator $\frac{1}{n_r!}$, onde n_r é o número de vértices do tipo r ;
- v) Multiplicamos por um fator de simetria S , determinado pela número de modo nos quais as linhas podem ser conectados para dar a mesma estrutura topológica;
- vi) índices repetidos nos tensores devem ser somados.

Usando estas regras, o propagador livre fica:

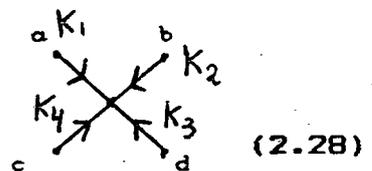
$$G_{ab}(K) = \frac{\Delta_{ab}}{K^2 + \mu^2} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{a} \xrightarrow{\quad K \quad} \text{b} \end{array} \quad (2.26)$$

Os vértices de interação são obtidos diretamente do \mathcal{L}_{int} ; às suas expressões associadas são representadas:

$$\frac{-\lambda_3}{3!} \Delta_{abc} \delta(K_1 + K_2 + K_3) \Rightarrow$$



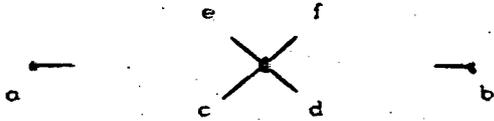
$$\frac{-\lambda_4}{4!} \Gamma_{abcd} \delta(K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \Rightarrow$$



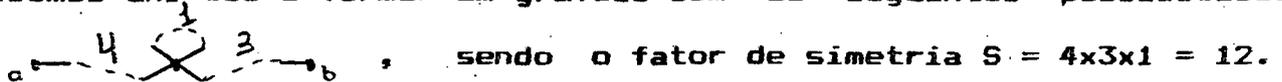
Seguem-se agora alguns exemplos de aplicação das regras de Feynman.

Exemplo 1: Função de dois pontos $G^{(2)}$ em primeira ordem de λ_4 .

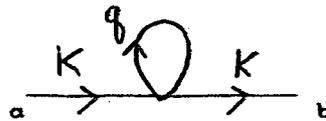
Temos dois pontos externos e um vértice de $r = 4$, marcando os pontos externos e as linhas internas.



podemos uni-los e formar um gráfico com as seguintes possibilidades



Resultando o gráfico:



Aplicando as regras:

$$= \frac{\lambda_4}{4!} \cdot \frac{1}{1!} 4 \times 3 \times 1 \cdot \Gamma_{4abcc} \int G_0(K) G_0(q) G_0(K) \frac{d^d}{(2\pi)^d}$$

onde:

$$\Gamma_{4abcc} = \frac{1}{3} \left[\Delta_{ab} \Delta_{cc} + \Delta_{ac} \Delta_{bc} + \Delta_{ac} \Delta_{bc} \right]$$

Sabendo-se que:

$$\Delta_{cc} = \Delta = \frac{n^2 + n}{2} - 1 \quad \text{e} \quad \Delta_{ac} \Delta_{bc} = \Delta_{ab}$$

logo:

$$\Gamma_{4abcd} = \frac{1}{3} \left[\Delta \Delta_{ab} + \Delta_{ab} + \Delta_{ab} \right] = \frac{(\Delta + 2)}{3} \Delta_{ab} \quad (2.29)$$

O termo na integral fica:

$$\int G_0(K) G_0(q) G_0(K) \frac{d^d q}{(2\pi)^d} = G_0^2(K) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_0(q)$$

Substituindo $G_0(K)$ e $G_0(q)$:

$$G_0^2(K) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} G_0(q) = \frac{1}{(K^2 + \mu^2)^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)}$$

Com isso a expressão analítica do gráfico, fica:

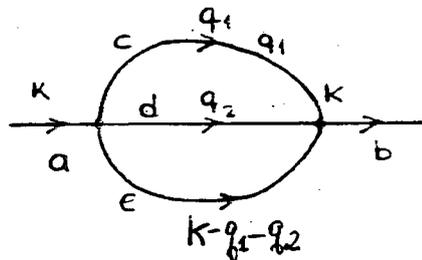
$$-\frac{\lambda^4}{6} (\Delta+2) \Delta_{ab} \frac{1}{(K^2 + \mu^2)^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)} \quad (2.30)$$

Exemplo 2: Função de dois pontos $G^{(2)}$ em segunda ordem em λ_4 .

Temos dois pontos externos e dois vértices λ_4 , marcando os pontos externos e as linhas internas.



resulta no gráfico:



A expressão associada ao gráfico é:

$$\left(\frac{-\lambda_4}{4!}\right)^2 \frac{1}{2!} \cdot 8 \times 4 \times 3 \times 2 \cdot \Gamma_{4acde} \Gamma_{4cdeb} \text{Go}(K) \times$$

$$\int_{q_1} \int_{q_2} \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \cdot \text{Go}(q_1) \text{Go}(q_2) \text{Go}(K - q_1 - q_2)$$

onde:

$$\Gamma_{4acde} \Gamma_{4cdeb} = \frac{1}{q} \left[\Delta_{ac} \Delta_{de} + \Delta_{ad} \Delta_{ce} + \Delta_{ae} \Delta_{cd} \right] \times$$

$$\left[\Delta_{cd} \Delta_{eb} + \Delta_{ce} \Delta_{db} + \Delta_{cb} \Delta_{de} \right]$$

$$= \frac{1}{q} \left[\Delta_{ab} + \Delta_{ab} + \Delta_{ab} \Delta + \Delta_{ab} + \Delta \Delta_{ab} + \Delta_{ab} \right.$$

$$\left. + \Delta_{ab} \Delta + \Delta_{ab} + \Delta_{ab} \right]$$

$$= \frac{1}{3} (\Delta + 2) \Delta_{ab} \quad (2.31)$$

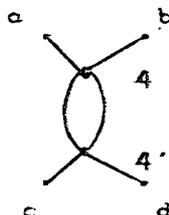
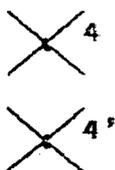
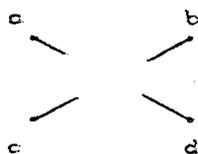
A expressão final é:

$$\frac{\lambda_4^2}{6} \left(\frac{\Delta+2}{3}\right) \Delta_{ab} \cdot \frac{1}{(K^2 + \mu^2)^2} \times$$

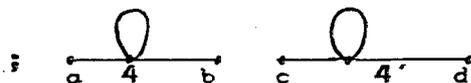
$$\int_{q_1} \int_{q_2} \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \cdot \frac{1}{(q_1^2 + \mu^2)(q_2^2 + \mu^2)[(K - q_1 - q_2)^2 + \mu^2]} \quad (2.32)$$

Os diagramas de Feynman podem ser classificados em conexos, desconexos e de vácuo. Vejamos isto num exemplo: construir diagramas com quatro pontos externos e dois vértices de interação λ_4 , ou seja, $G^{(4)}$ em segunda ordem em λ_4 .

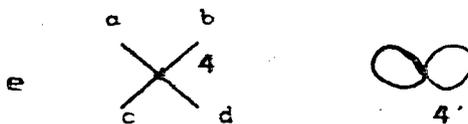
pontos externos vértices



(i)



(ii)



(iii)

diagrama (i), é chamado de conexo, os (ii) são chamados de desconexos, sendo que na última, a interação 4, que não está ligada a nenhum ponto externo, chama-se parte de vácuo.

2.5 - FUNÇÕES DE GREEN^o

As funções de Green podem ser expandidas em termos dos diagramas de Feynman. Desta maneira cada função de Green $G_{i_1 \dots i_N}^{(N)}(K_1, \dots, K_N)$ pode ser escrita como uma soma de uma série de diagramas, conexos e de desconexos, de Feynman, de ordem cada vez maior na interação λ_r , com vários números de "loops". Os diagramas de vácuo não aparecem, pois podemos mostrar que eles se cancelam.

Sendo o número de "loop" (L) definido como: $L = I - (n - 1)$, onde I é o número de linhas internas e n é o número de vértices.

Vamos escrever as função de Green de 2 pontos $G_{ab}^{(2)}$, com várias ordens de interação λ , até 3 "loops":

$$G_{ab}^{(2)}(K_1, K_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} K_1 \quad K_2 \\ \xrightarrow{a} \quad \xleftarrow{b} \end{array} + \begin{array}{c} K_1 \quad \text{loop} \quad K_2 \\ \xrightarrow{a} \quad \quad \quad \xleftarrow{b} \end{array} + \begin{array}{c} K_1 \quad \text{loop} \quad K_1 \quad \text{loop} \quad K_2 \\ \xrightarrow{a} \quad \quad \quad \xrightarrow{a} \quad \quad \quad \xleftarrow{b} \end{array} \\ + \begin{array}{c} K_1 \quad \text{loop} \quad K_2 \\ \xrightarrow{a} \quad \quad \quad \xleftarrow{b} \end{array} + \begin{array}{c} K_1 \quad \text{loop} \quad K_2 \\ \xrightarrow{a} \quad \quad \quad \xleftarrow{b} \end{array} + \begin{array}{c} K_1 \quad \text{loop} \quad K_2 \\ \xrightarrow{a} \quad \quad \quad \xleftarrow{b} \end{array} \\ + \dots \end{array} \quad (2.33)$$

2.5.1 - FUNÇÕES DE GREEN COM OPERADORES COMPOSTOS⁶

Para obter a correlação entre a densidade de energia em vários pontos e a magnetização, devemos considerar médias do tipo:

$$G_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N, L)}(K_1, \dots, K_N; p_1, \dots, p_L) = \left(\frac{1}{Z}\right)^L \langle Q_{i_1}(K_1) Q_{i_2}(K_2) \dots Q_{i_N}(K_N) Q_{j_1}^2(p_1) \dots Q_{j_L}^2(p_L) \rangle \quad (2.34)$$

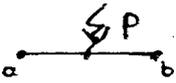
A Densidade Lagrangeana incluindo o operador composto, fica:

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} - \frac{1}{2!} t \Delta_{ab} Q_a Q_b \quad (2.35)$$

onde: t é um escalar, dependente da temperatura

A regra de Feynman com operadores compostos é idêntica a seção 2.4, só o que é acrescentado é, para cada valor de L :

(i) corresponde a um fator $\left(\frac{1}{2!}\right)$, que se coloca nas expressões analíticas dos diagramas.

(ii) corresponde à inserção do gráfico  nos diagramas, sendo $a = b$. A expressão analítica da inserção é:

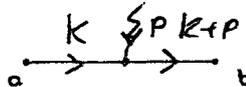
$$\frac{1}{2!} \Delta_{ab} \delta(K_1 + K_2 + p).$$

Exemplo 1: Função de 4 pontos $G_{ab}^{(2,1)}$ em ordem zero de λ_4 . Temos uma

inserção  (L=1) e dois pontos externos (N= 2):



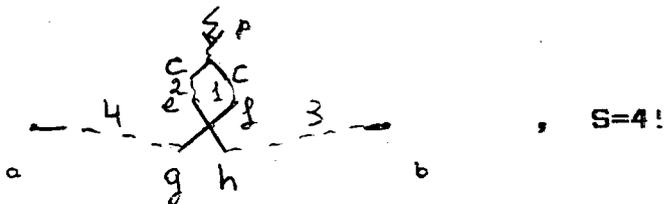
Resulta no gráfico:



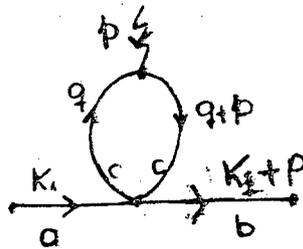
A expressão analítica fica:

$$\frac{1}{2!} 2! \Delta_{ab} \frac{1}{(K^2 + \mu^2)[(K+p)^2 + \mu^2]} \quad (2.36)$$

Exemplo 2: Função de 4 pontos $G_{ab}^{(2,1)}$ em ordem 1 de λ_4 . Temos dois pontos externos (N=2), uma inserção (L=1) e uma interação λ_4 :



resulta no gráfico:



corresponde a expressão analítica:

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^4 \left(\frac{\Delta+2}{3} \right) \frac{\Delta_{ab}}{(k^2 + \mu^2)[(k+p)^2 + \mu^2]} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)[(q+p)^2 + \mu^2]} \quad (2.37)$$

As funções de Green com operadores compostos $G^{(N,L)}$, são uma soma de uma série de diagramas com inserções, de várias ordens de interações.

2.6 - FUNÇÕES DE "VERTEX"

Podemos reduzir o número de diagramas de uma série, construindo as funções de Green conexas $G_c^{(N,L)}_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}$, onde só aparecem os diagramas conexas, pois pode-se mostrar que os diagramas desconexos podem ser escritos como produto dos conexas. Com isso o número de diagramas na série diminui.

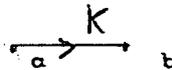
Podemos fazer uma outra simplificação, separar um diagrama em outros dois, "cortando" apenas um propagador livre G_0 . Quando podemos fazer isto, o diagrama é chamado de "uma partícula redutível" (1PR). E quando não podemos separar em dois diagramas, o diagrama é chamado de "uma partícula irreduzível" (1PI).

Exemplo de um diagrama 1PR:



Exemplo de dois diagramas 1PI:

O próprio propagador livre G_0 e um diagrama sem os propagadores livres :



e um diagrama sem os propagadores livres :



A sua expressão analítica fica:

$$-\frac{\lambda}{6} (\Delta+2) \Delta_{ab} \int \frac{d^d g}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)} \quad (2.38)$$

Se desmembrarmos os diagramas conexos em 1PI, da função de 2 pontos $G_c^{(2)}$, fica:

$$\left[G_c^{(2)} \right]^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{-1} \\ a \rightarrow b \end{array} \\ - \begin{array}{c} \text{loop} \\ a \rightarrow b \end{array} \\ - \begin{array}{c} \text{two loops} \\ a \rightarrow b \end{array} \\ - \begin{array}{c} \text{circle} \\ a \rightarrow b \end{array} \\ \\ - \begin{array}{c} \text{figure-eight} \\ a \rightarrow b \end{array} \\ - \dots \end{array} \quad (2.39)$$

esta equação é a chamada equação de Dyson.

Podemos construir as funções de "vertex" $\Gamma^{(N,L)}$, que são uma soma de uma série de diagramas 1PI, a partir das funções de Green conexas $G_c^{(N,L)}$. As relações entre $G_c^{(N)}$ e $\Gamma^{(N)}$ são:

$$\text{Para } N = 2 \Rightarrow \Gamma_{ab}^{(2)}(K_1, K_2) = [G_c^{(2)}(K_1, K_2)]^{-1} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Para } N > 2 \Rightarrow G_c^{(N)}_{i_1 \dots i_N}(K_1, \dots, K_N) = & -G_c^{(2)}(K_1) \dots \\ & \dots G_c^{(2)}(K_N) \cdot \Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)}(K_1, \dots, K_N) + Q^{(N)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $Q^{(N)}$ são todos os diagramas 1PR.

Para calcular $G_c^{(N)}$, necessitamos dos gráficos 1PI e 1PR, e para obtermos $\Gamma^{(N)}$ só necessitamos os gráficos 1PI de $G_c^{(N)}$, desprezamos os redutíveis ($Q^{(N)}$). Segundo Amit⁶, $\Gamma^{(N)}$ é definido como menos a parte 1PI de $G_c^{(N)}$ ou de $G^{(N)}$, e para a função de "vertex" de 4 pontos $\Gamma^{(2,1)}$ é a parte 1PI de $G_c^{(2,1)}$ ou de $G^{(2,1)}$.

Podemos escrever as seguintes funções de "vertex":

I) A função de "vertex" de 2 pontos $\Gamma_{ab}^{(2)}$, com várias ordens de interação λ_4 , até 3 "loops" :

É definida pelas eqs. (2.39) e (2.40) .

II) A função de "vertex" de 4 pontos $\Gamma_{abcd}^{(4)}$, com várias ordens de interação λ_4 , até 2 "loops" :

$$\Gamma_{abcd}^{(4)}(K_1, K_2, K_3, K_4) = - \left[\begin{array}{l} \text{Diagram 1: Four external lines meeting at a central point.} \\ \text{Diagram 2: Two internal lines forming a loop between two vertices.} \\ \text{Diagram 3: Two internal lines forming two loops between two vertices.} \\ \text{Diagram 4: Two internal lines forming a loop and a tadpole-like structure.} \end{array} \right] + \dots \quad (2.42)$$

bes

III) A função de "vertex" de 3 pontos $\Gamma_{abc}^{(3)}$, com interações λ_3 e λ_4 , até 2 "loops" :

$$\Gamma_{abc}^{(3)}(K_1, K_2, K_3) = - \left[\begin{array}{l} \text{Diagram 1: One internal line forming a loop between two vertices.} \\ \text{Diagram 2: Two internal lines forming two loops between two vertices.} \\ \text{Diagram 3: Two internal lines forming a loop and a tadpole-like structure.} \\ \text{Diagram 4: Two internal lines forming a loop and a tadpole-like structure (different orientation).} \end{array} \right] + \dots \quad (2.43)$$

IV) A função de "vertex" de 4 pontos $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$, com interação λ_4 , até 2-"loops" :

$$\Gamma_{ab}^{(2,1)}(K_1, K_2, P) = \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \\ \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} \\ + \dots \end{array} \quad (2.44)$$

Usando os valores dos diagramas no apêndice A, obtemos as expressões analíticas das funções de "vertex":

I) Função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = \left[K^2 + \mu^2 + \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} D_1(\mu^2, \Lambda) - \lambda_4^2 \left[\frac{\Delta+2}{6} \right]^2 D_2(\mu^2, \Lambda) \right. \\ \left. - \lambda_4^2 \left[\frac{\Delta+2}{18} \right] D_3(K^2, \mu^2, \Lambda) \right. \\ \left. + \lambda_4^3 \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{108} D_5(K^2, \mu^2, \Lambda) \right] \Delta_{ab} \quad (2.45)$$

II) Função de "vertex" $\Gamma_{abcd}^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) = & \lambda_4 \Gamma_{4abcd} - \frac{\lambda_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} I(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per} \right\} \\
 & + \frac{\lambda_4^3}{4} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efgh} \Gamma_{4ghcd} I^2(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per} \right\} \\
 & + \frac{\lambda_4^3}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4eghc} \Gamma_{4gfhd} I_4(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + 5 \text{ per} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

III) Função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ab}^{(2,1)}(K, p) = & \left[1 - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} I(K, p, \mu^2, \Lambda) \right. \\
 & + \lambda_4^2 \left[\frac{(\Delta+2)}{6} \right]^2 I^2(K, p, \mu^2, \Lambda) \\
 & \left. + \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{6} I_4(K, p, \mu^2, \Lambda) \right] \cdot \Delta_{ab}
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

IV) Função de "vertex" $\Gamma_{abc}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{abc}^{(3)}(K_i) = & \left[\lambda_3 - \frac{\lambda_3 \lambda_4}{3} \left\{ I(K_1, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\} \right. \\ & + \frac{\lambda_3 \lambda_4^2}{9} \left\{ I^2(K_1, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\} \\ & + \frac{2\lambda_3 \lambda_4^2}{9} \left\{ I_4(K_1, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\} \\ & \left. + \lambda_3 \lambda_4^2 \frac{(\Delta+6)}{6} \left\{ I_4(K_1, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\} \right] \Delta_{abc} \end{aligned}$$

(2.48)

Em resumo, transformamos a função de Green $G^{(N,L)}$, que é constituída de diagramas conexos e desconexos, em uma função de "vertex" $\Gamma^{(N,L)}$, que só é constituída por diagramas irreduzíveis (1PI) e com isso simplificamos os cálculos.

Vamos fazer mais uma simplificação, no cálculo das funções de "vertex". Pode-se mostrar^o que as funções de "vertex": $\Gamma_{ab}^{(2)}$, $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$, $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ e $\Gamma_{abc}^{(3)}$ no ponto simétrico (PS), são proporcionais a Δ_{ab} , Δ_{ab} , Γ_{4abcd} e Δ_{abc} , respectivamente, em todas as ordens de perturbação, ou seja, todos os números de "loops". Com isso podemos calcular $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(2,1)}|_{PS}$, tirando das expressões analíticas de $\Gamma_{ab}^{(2)}$ e $\Gamma_{ab}^{(2,1)}|_{PS}$ o fator Δ_{ab} , e para achar $\Gamma^{(4)}|_{PS}$ tirando o fator Γ_{4abcd} de $\Gamma_{abcd}^{(4)}|_{PS}$, e para achar $\Gamma^{(3)}|_{PS}$ tirando o fator Δ_{abc} de $\Gamma_{abcd}^{(4)}|_{PS}$.

Com isso, temos:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = \Gamma^{(2)}(K) \Delta_{ab}, \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) \Big|_{PS} = \Gamma^{(4)}(K_i) \Big|_{PS} \Gamma_{4abcd}, \quad (2.50)$$

$$\Gamma_{ab}^{(2,1)}(K, p) \Big|_{PS} = \Gamma^{(2,1)}(K, p) \Big|_{PS} \Delta_{ab}, \quad (2.51)$$

$$\Gamma_{abc}^{(3)}(K_i) \Big|_{PS} = \Gamma^{(3)}(K_i) \Big|_{PS} \Delta_{abc}. \quad (2.52)$$

No ponto simétrico (PS), as integrais que aparecem nas expressões analíticas das combinações de um determinado gráfico são iguais (ver referência⁶ na página 160).

As funções de "vertex" no ponto simétrico são:

I) Função de "vertex" de 2 pontos $\Gamma^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(K) = & K^2 + \mu^2 + \lambda_4 \frac{(\Delta + 2)}{6} D_1(\mu^2, \Lambda) - \lambda_4^2 \left(\frac{\Delta+2}{6}\right)^2 D_2(\mu^2, \Lambda) \\ & - \lambda_4^2 \frac{(\Delta + 2)}{18} D_3(K^2, \mu^2, \Lambda) \\ & + \lambda_4^3 \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{108} D_5(K^2, \mu^2, \Lambda) \end{aligned} \quad (2.53)$$

II) Função de 4 pontos $\Gamma^{(4)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(K_i) \Big|_{PS} &= \lambda_4 - \lambda_4^2 \frac{(\Delta+8)}{6} I_{SP}(K, \mu^2, \Lambda) \\ &+ \lambda_4^3 \frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{SP}^2(K, \mu^2, \Lambda) \\ &+ \lambda_4^3 \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4SP}(K, \mu^2, \Lambda) \end{aligned} \quad (2.54)$$

III) Função de 4 pontos $\Gamma^{(2,1)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,1)}(K, p) \Big|_{PS} &= 1 - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} I_{SP}(K, p, \mu^2, \Lambda) \\ &+ \lambda_4^2 \left(\frac{\Delta+2}{6} \right)^2 I_{SP}^2(K, p, \mu^2, \Lambda) \\ &+ \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{6} I_{4SP}(K, p, \mu^2, \Lambda) \end{aligned} \quad (2.55)$$

IV) Função de 3 pontos $\Gamma^{(3)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}(K_i) \Big|_{PS} &= \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_4 I_{SP}(K, \mu^2, \Lambda) \\ &+ \frac{1}{2} \lambda_3 \lambda_4^2 I_{SP}^2(K, \mu^2, \Lambda) \\ &+ \lambda_3 \lambda_4^2 \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4SP}(K, \mu^2, \Lambda) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Nos próximos capítulos vamos obter os expoentes críticos em torno do ponto de Landau, com isso desprezaremos a interação cúbica, e a função de "vertex" $\Gamma^{(3)}$.

CAPÍTULO III

GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Temos o interesse de conhecer o comportamento das funções de correlação no ponto de transição de fases de segunda ordem, e pela construção de um grupo dessas funções, obteremos os expoentes críticos das flutuações neste ponto crítico.

Queremos também determinar o comportamento das funções de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$, $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ e $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ para $d=4$, onde a Teoria de Campo é renormalizável, as divergências das funções de "vertex" não dependem do número de interações λ , e para "cutoff" $\Lambda \rightarrow \infty$, onde os detalhes microscópicos são desprezados e o campo é contínuo⁶.

Usamos as expressões analíticas dos diagramas definidos no apêndice A. Na aproximação 0-"loop", as funções de "vertex"⁶ são escritas:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab}^{(2)}(K) &= (K^2 + u^2)\Delta_{ab} \quad , \\ \Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) &= \lambda_4 \Gamma_{4abcd} \quad , \\ \Gamma_{ab}^{(2,1)}(K,p) &= \Delta_{ab} \quad .\end{aligned}\tag{3.1}$$

Estas tem valores finitos para $\Lambda \rightarrow \infty$ em $d = 4$. Esta aproximação de 0-"loop" corresponde à Teoria de Landau, que não possui flutuações.

3.1 - RENORMALIZAÇÃO DA MASSA E CONSTANTE DE ACOPLAMENTO NA APROXIMAÇÃO DE 1-"LOOP"⁶.

Na aproximação 1-"loop" da $\Gamma_{ab}^{(2)}$, eq. (2.45), a sua expressão analítica é:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = \left[K^2 + \mu^2 + \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)} \right] \Delta_{ab} \quad (3.2)$$

Na aproximação de 0-"loop" toma-se só os termos que não tem integração interna e na aproximação de 1-"loop" toma-se os termos que não tem integração interna e também os que tem uma integração interna.

Para ver o comportamento de $\Gamma_{ab}^{(2)}$, vamos estudar o comportamento da integral. Para valores altos dos momentos, $q^2 \gg \mu^2$, podemos desprezar μ^2 e a integral pode ser escrita:

$$\int^\Lambda dq q^{d-3}$$

$$\text{Para } d = 4 \Rightarrow \int^\Lambda dq q = q^2 \Big|^\Lambda = q^2(\infty) = \infty .$$

Para valores altos dos momentos $\Lambda \rightarrow \infty$, a integral diverge no ultravioleta; com isso a função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$ possui divergência no ultravioleta.

Devido a esta divergência, a massa μ^2 é infinita e sem significado. Podemos absorver esta divergência, definindo um novo parâmetro de massa m_1^2 finito, cujo valor é a função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$ no ponto simétrico (PS) com momentos externos nulos.

No ponto simétrico $\Gamma_{ab}^{(2)}$ é igual às eq. (2.49) e (2.53). Logo a massa m_1^2 , é definida por:

$$m_1^2 = \Gamma^{(2)}(K=0) = \mu^2 + \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \mu^2)} \quad (3.3)$$

Logo,

$$\mu^2 = m_1^2 - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \mu^2)} .$$

Na aproximação 0-"loop", a massa μ^2 é:

$$\mu^2 = m_1^2 . \quad (3.4)$$

Inserindo este valor, a massa não renormalizada é escrita em termos da massa renormalizada:

$$\mu^2 = m_1^2 - \lambda_4 \frac{(\Delta + 2)}{6} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q_1^2 + m_1^2)} \quad (3.5)$$

Da eq. (3.3), a função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$ fica:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = K^2 + m_1^2, \quad (3.6)$$

sendo a função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$ finita para $\Lambda \rightarrow \infty$ com $d = 4$. Vamos agora ver o comportamento da função de "vertex" $\Gamma_{abcd}^{(4)}$. Na aproximação 1-"loop" da $\Gamma_{abcd}^{(4)}$, eq. (2.46), a sua expressão analítica é:

$$\Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) = \lambda_4 \Gamma_{4abcd} - \frac{\lambda_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} \int^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \mu^2)[(K_1 + K_2 - q)^2 + \mu^2]} + 2 \text{ per} \right\}. \quad (3.7)$$

Para ver o comportamento de $\Gamma_{abcd}^{(4)}$, devemos estudar o comportamento da integral. Para valores grandes dos momentos podemos desprezar: K_1 , K_2 e μ^2 ; a integral pode ser escrita como:

$$\int^\Lambda dq q^{d-5}$$

$$\text{Para } d = 4 \Rightarrow \int^\Lambda \frac{dq}{q} = \text{Ln } q \Big|^\Lambda$$

A integral tem divergência logarítmica para $\Lambda \rightarrow \infty$ em $d = 4$. Com isso a função de "vertex" $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ possui divergência logarítmica. Mas também para valores pequenos dos momentos $q \rightarrow 0$ e massa $\mu^2 \rightarrow 0$, a integral diverge, com isso possuindo divergência infravermelha. Que são os limites nas quais estamos interessados em estudar o ponto crítico. O comportamento crítico é dominado para valores pequenos dos momentos, correspondente a uma escala macroscópica independentemente da constituição microscópica dos materiais.

Devido a esta divergência infravermelha a constante de acoplamento λ_4 é infinita e sem significado. Podemos absorver esta divergência, definindo um novo parâmetro de constante de acoplamento g_4 finito, cujo valor é a função de "vertex" $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ no ponto simétrico (PS) com momentos externos nulos.

No ponto simétrico, $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ é igual às eq. (2.50) e (2.54). Logo g_4 é definido por:

$$g_4 = \Gamma^{(4)}(K_i=0) \Big|_{\text{PS}} = \lambda_4 - \frac{\lambda_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)^2} + 2 \text{ per.} \right\} \quad (3.8)$$

Logo

$$\lambda_4 = g_4 + \frac{\lambda_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)^2} + 2 \text{ per.} \right\},$$

e na aproximação 0-"loop":

$$\lambda_4 = g_4 \quad (3.9)$$

Usando a aproximação 0-"loop" da massa μ^2 , eq. (3.4), e da constante de acoplamento λ_4 , a massa e a constante de acoplamento não renormalizada são escritos em termos de m_1 , g_4 e Λ :

$$\lambda_4 = g_4 + \frac{g_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} \int^{\Lambda} \frac{d_q^d}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + m_1^2)^2} + 2 \text{ per.} \right\}, \quad (3.10)$$

$$\mu_4 = m_1^2 - g_4 \frac{(\Delta + 2)}{6} \int^{\Lambda} \frac{d_q^d}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + m_1^2)}. \quad (3.11)$$

Usando a eq. (3.10), a função de "vertex" $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ fica:

$$\begin{aligned} \Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) &= g_4 \Gamma_{4abcd} \\ &- \frac{g_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} \left[\int^{\Lambda} \frac{d_q^d}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + m_1^2) [(K_1 + K_2 - q)^2 + m_1^2]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int^{\Lambda} \frac{d_q^d}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + m_1^2)^2} \right] + 2 \text{ per.} \right\}. \end{aligned}$$

Usando série de Taylor em K_s , se conclui que

$$\begin{aligned} \Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) &= g_4 \\ &+ \frac{g_4^2}{2} \left\{ \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} K_s^2 \int^{\Lambda} \frac{d_q^d}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m_1^2) [(K_s + q)^2 + m_1^2]^2} \right\}_{K_s^2=0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo $K_s = -(K_1 + K_2)$.

Para grandes valores dos momentos $\Lambda \rightarrow \infty$ e a integral se comporta como:

$$\int^{\Lambda} dq q^{d-7}$$

$$\text{Para } d = 4 \Rightarrow \int^{\Lambda} \frac{dq}{q^3} = \frac{1}{q^2} \Big|_{\Lambda}$$

Para $\Lambda \rightarrow \infty$, a integral converge, logo $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ é finita para $\Lambda \rightarrow \infty$ em $d = 4$.

3.2 - RENORMALIZAÇÃO DO CAMPO COMPOSTO^o

Vamos analisar a função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ no limite $\Lambda \rightarrow \infty$ em $d = 4$.

Na aproximação 1-"loop" da $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$, eq. (2.47), sua expressão analítica é:

$$\Gamma_{ab}^{(2,1)}(K, p) = \Delta_{ab} - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \Delta_{ab} \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2)[(p+q)^2 + \mu^2]} \quad (3.13)$$

O comportamento da $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ no limite desejado é idêntica ao da $\Gamma_{abcd}^{(4)}$, divergindo no infravermelho.

Usando a aproximação de 0-"loop" da massa, eq. (3.4), e da constante de acoplamento, eq. (3.9), a função pode ser escrita como:

$$\Gamma_{ab}^{(2,1)}(K,p) = \Delta_{ab} - g_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \Delta_{ab} \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2+m_1^2)[(p+q)^2+m_1^2]}, \quad (3.14)$$

Porém no limite desejado, ela ainda diverge no infravermelho. Esta divergência pode ser removida pela multiplicação da função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$, por uma função independente do momento. Esta função dependerá de m_1 , g_4 e Λ . Pode ser escolhida por exemplo, como o inverso de $\Gamma_{ab}^{(2,1)}(K_i=0)|_{ps}$.

Na ponto simétrico $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ é igual às eqs. (2.51) e (2.55). Logo definimos esta função como:

$$Z_{\phi^2}^1(g_4, m_1^2, \Lambda) = \frac{\Delta_{ab}}{\Gamma_{ab}^{(2,1)}(K_i=0)|_{ps}}, \quad (3.15)$$

onde $Z_{\phi^2}^1$ é chamada de constante de renormalização do campo composto ϕ^2 .

Resolvendo a expressão, a função $Z_{\phi^2}^1$ torna-se,

$$Z_{\phi^2}^1 = 1 + g_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2+m_1^2)^2}. \quad (3.16)$$

Podemos definir uma função de "vertex" renormalizada $\Gamma_{abR}^{(2,1)}$ por:

$$\Gamma_{abR}^{(2,1)}(K,p) = Z_{\phi^2}^1 \Gamma_{ab}^{(2,1)}(K_i), \quad (3.17)$$

e isto implica que

$$\Gamma_{abR}^{(2,1)}(K,p) = \Delta_{ab} - g_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \Delta_{ab} \left[\int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2+m_1^2)[(p+q)^2+m_1^2]} - \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2+m_1^2)^2} \right]$$

Usando a série de Taylor em $p+q$, a expressão acima fica:

$$\Gamma_{abR}^{(2,1)}(K,p) = \Delta_{ab} + g_4 \frac{(\Delta+2)}{6} \Delta_{ab} p^2 \int^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2+m_1^2)[(p+q)^2+m_1^2]^2} \Bigg|_{p^2=0} \quad (3.18)$$

A função $\Gamma_{abR}^{(2,1)}$ tem o mesmo comportamento da função $\Gamma_{abcd}^{(4)}$, convergindo para $\Lambda \rightarrow \infty$ em $d = 4$, logo ela é finita.

3.3 - RENORMALIZAÇÃO DO CAMPO NA APROXIMAÇÃO DE 2-"LOOPS"⁶

Vamos analisar o comportamento da função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$ na aproximação de 2-"loops" da eq. (2.45), no limite $\Lambda \rightarrow \infty$ em $d = 4$. As integrais são representadas pelas eqs. (A.3), (A.5) e (A.7) do Apêndice A. Usando a definição de massa m_1 dada pela eq. (3.3), temos que:

$$m_1^2 = \mu^2 + \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} D_1(\mu^2, \Lambda) - \lambda_4^2 \left[\frac{(\Delta+2)}{6} \right]^2 D_2(\mu^2, \Lambda) - \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} D_3(\mu^2, \Lambda) \quad (3.19)$$

Na aproximação de 2-"loop" toma-se os termos que tem até duas integração internas.

Isto implica que:

$$\mu^2 = m_1^2 - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} D_1(\mu^2, \Lambda) + \lambda_4^2 \left[\frac{(\Delta+2)}{6} \right]^2 D_2(\mu^2, \Lambda) + \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} D_3(\mu^2, \Lambda) .$$

Na aproximação 1-"loop":

$$\mu^2 = m_1^2 - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} D_1(m_1^2, \Lambda) . \quad (3.20)$$

Usando este valor de μ^2 na integral D_1 teremos que

$$D_1(\mu^2, \Lambda) = D_1(m_1^2, \Lambda) + \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} D_2(m_1^2, \Lambda) . \quad (3.21)$$

Usando as eq. (3.20) e (3.21), a massa μ^2 fica:

$$\mu^2 = m_1^2 - \lambda_4 \frac{(\Delta+2)}{6} D_1(m_1^2, \Lambda) + \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} D_3(m_1^2, \Lambda) . \quad (3.22)$$

Com este valor da massa não renormalizada μ^2 , a função de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ é escrita como:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = \left\{ K^2 + m_1^2 + \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} \left[D_3(m_1^2, \Lambda) - D_3(K^2, m_1^2, \Lambda) \right] \right\} \Delta_{ab}$$

Usando a série de Taylor em K^2 se conclui:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = \left\{ K^2 + m_1^2 - \lambda_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} \frac{\partial D_3}{\partial K^2}(K^2, m_1^2, \Lambda) \Big|_{K^2=0} \cdot K^2 \right\} \Delta_{ab}$$

(3.23)

Pelo estudo do comportamento da derivada de D_3 em relação ao momento externo K , veremos se $\Gamma_{ab}^{(2)}$ é convergente ou não. Ela pode ser escrita como:

$$\frac{\partial D_3}{\partial K^2} = - \int_{q_1} \int_{q_2} \frac{d^d q_1 \cdot d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \cdot \frac{1}{\left[q_1^2 + m_1^2 \right] \left[q_2^2 + m_1^2 \right] \left[\left(K - q_1 - q_2 \right)^2 + m_1^2 \right]^2}$$

Para grandes valores dos momentos $q \rightarrow \infty$, podemos desprezar K^2, m_1^2 , e se $q_1 = q_2$; a integral se comporta como:

$$\int^{\Lambda} dq q^{2d-3}$$

$$\text{Se } d = 4 \Rightarrow \int^{\Lambda} \frac{dq}{q} = \text{Ln} q \Big|_{\Lambda}$$

A integral para valores altos dos momentos $\Lambda \rightarrow \infty$, tem divergência logarítmica. Mas nós estamos interessados na região do ponto crítico: $q \rightarrow 0$ e $m_1^2 \rightarrow 0$. Mas também nesta região desejada a integral diverge. Com isso a função $\Gamma_{ab}^{(2)}$ é divergente na infravermelho.

Usando a aproximação 0-"loop" de λ_4 na $\Gamma_{ab}^{(2)}$:

$$\Gamma_{ab}^{(2)}(K) = \left\{ K^2 + m_1^2 - g_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} \frac{\partial D_3}{\partial K^2}(K^2, m_1^2, \Lambda) \Big|_{K^2=0} \cdot K^2 \right\} \Delta_{ab} \quad (3.24)$$

Mas $\Gamma_{ab}^{(2)}$ ainda diverge no infravermelho. Podemos tentar tirar a forte dependência em Λ pela absorção de um fator multiplicativo. A função de "vertex" renormalizada é escrita como:

$$\Gamma_{abR}^{(2)}(K, m_1^2, \Lambda) = Z_{\phi}(g_4, m_1^2, \Lambda) \Gamma_{ab}^{(2)}(K, m_1^2, \Lambda) \quad (3.25)$$

onde $Z_{\phi}^{1/2}$ é chamada de constante de renormalização do campo ϕ .

A nova função Z_ϕ é expandida no número de "loops" e os vários termos são determinados para fazer $\Gamma_{abR}^{(2)}$ finita para $\Lambda \rightarrow \infty$ em quatro dimensões. Escrevendo que:

$$Z_\phi = 1 + g_4 z_1 + g_4^2 z_2 + \dots ,$$

e resolvendo a expressão, a função de "vertex" renormalizada é:

$$\Gamma_{abR}^{(2)}(K) = \left\{ K^2 + m_1^2 (1 + g_4^2 z_2) - g_4^2 \frac{(\Delta+2)}{18} \left[\frac{\partial D_3}{\partial K^2} \Big|_{K^2=0} \cdot K^2 - \frac{18}{\Delta+2} z_2 K^2 \right] \right\}_{\Delta_{ab}} ,$$

onde $z_1 = 0$, desde que no nível de 1-"loop" a $\Gamma_{ab}^{(2)}$ é finita.

Se escolhermos:

$$z_2 = \frac{(\Delta+2)}{18} \frac{\partial D_3}{\partial K^2} \Big|_{K^2=0} \tag{3.27}$$

a divergência no infravermelho será cancelada.

A massa pode ser redefinida como:

$$m^2 = Z_\phi m_1^2 \approx m_1^2 (1 + g_4^2 z_2) \quad e \tag{3.28}$$

com isso a função $\Gamma_{abR}^{(2)}$ é finita no limite desejado; então:

$$\Gamma_{abR}^{(2)}(K, m^2, g_4) = K^2 + m^2 \tag{3.29}$$

3.4 - RENORMALIZAÇÃO NO PONTO CRÍTICO⁶

Vimos anteriormente nas seções 3.1, 3.2 e 3.3, que pela mudança de (μ^2, λ_4) para (m^2, g_4) e pela absorção de dois fatores multiplicativos Z_ϕ^2 e Z_ϕ em $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ e $\Gamma_{ab}^{(2)}$ respectivamente, que conseguimos gerar funções de "vertex" renormalizadas finitas em $\Lambda \rightarrow \infty$ para $d = 4$, dependendo de novos parâmetros renormalizados m^2 e g_4 . Em termos gerais, podemos gerar funções de "vertex" renormalizadas finitas, com N-pontos e L-inserções, fazendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N,L)}(K_i, p_j; m^2, g_4) \\ = Z_\phi^{N/2} Z_\phi^L \Gamma_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N,L)}(K_i, p_j; \mu^2, \lambda_4, \Lambda) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Resumindo, podemos produzir funções renormalizadas que são expressas em termos de uma expansão perturbativa, na qual todas as integrais convergem para $\Lambda \rightarrow \infty$. Isto é, a dependência sobre Λ torna-se muito fraca, exceto nos parâmetros μ^2, λ_4, Z_ϕ e Z_ϕ^2 .

O novo parâmetro de massa renormalizada m^2 é proporcional a $(T - T_c)$, T_c sendo a temperatura crítica onde ocorre a transição de fases de segunda ordem. Fazemos a renormalização das funções de correlação no ponto simétrico com momentos externos nulos, porque a maioria dos cálculos são mais simples. Como estamos interessados no comportamento das funções de correlação no ponto crítico, a massa $m^2 \rightarrow 0$ e para valores pequenos dos momentos $q \rightarrow 0$. Mas no ponto crítico, as funções de correlação divergem no infravermelho. Então para fazermos a renormalização no ponto crítico, $m^2 \rightarrow 0$, devemos introduzir um parâmetro de massa arbitrária \mathcal{M} , pequeno e diferente de zero, que caracterizará a escala de momento na qual a renormalização é fixada. Para tornar os cálculos mais simétricos, os momentos externos permanecem finitos, e são escolhidos no ponto simétrico (PS).

A expressão geral das funções de "vertex" renormalizadas no ponto crítico é:

$$\Gamma_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N,L)}(K_i, p_j; g_4, \mathcal{X}) = \bar{Z}_\phi^{N/2} Z_\phi^L \Gamma_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N,L)}(K_i, p_j; \lambda_4, \Lambda) \quad (3.31)$$

Com isso para eliminar as divergências das funções de "vertex" $\Gamma_{ab}^{(2)}$, $\Gamma_{ab}^{(2,1)}$ e $\Gamma_{abcd}^{(4)}$ fazemos:

$$\Gamma_{abR}^{(2)}(K) = Z_\phi \Gamma_{ab}^{(2)}(K) \quad , \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{abcdR}^{(4)}(K_i) = Z_\phi^2 \Gamma_{abcd}^{(4)}(K_i) \quad , \quad (3.33)$$

$$\Gamma_{abR}^{(2,1)}(K, p) = \bar{Z}_\phi^2 \Gamma_{ab}^{(2,1)}(K, p), \quad \bar{Z}_\phi^2 = Z_\phi Z_\phi^2 \quad . \quad (3.34)$$

As funções λ_4 , Z_ϕ e \bar{Z}_ϕ^2 são expandidos em termos de "loops" e os vários termos são escolhidos para fazer $\Gamma_{abR}^{(2)}$, $\Gamma_{abR}^{(2,1)}$ e $\Gamma_{abcdR}^{(4)}$ finitos. Podemos escrever essas funções como uma série de potências em g_4 , na qual os coeficientes dependem de Λ e com isso, divergem para $\Lambda \rightarrow \infty$ se $d = 4$.

No ponto crítico, podemos impor as seguintes condições de renormalização, para determinar as funções renormalizadas: λ_4 , Z_ϕ e \bar{Z}_ϕ^2 :

$$\frac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial K^2}(K, g_4) \Big|_{K^2 = \mathcal{X}^2} = 1 \quad , \quad (3.35)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(K_i, g_4) \Big|_{PS} = g_4 \quad (3.36)$$

$$\text{e } \Gamma_R^{(2,1)}(K, p, g_4) \Big|_{PS} = 1 \quad . \quad (3.37)$$

3.5 - GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO⁶

Como foi visto, há uma grande liberdade em fixar o momento arbitrário \mathcal{K} , onde a renormalização é feita. Fazemos a escolha dos momentos externos iguais a zero, para uma massa renormalizada diferente de zero. Mas no ponto crítico, a massa renormalizada é igual a zero, e fazemos a renormalização para um momento \mathcal{K} , diferente de zero. Podemos pela variação infinitesimal do momento arbitrário \mathcal{K} , criar um grupo de renormalização. Como a função de "vertex" não renormalizada é independente de \mathcal{K} , temos:

$$\left[\mathcal{K} \frac{\partial}{\partial \mathcal{K}} \right]_{\lambda_4, \Lambda} \left[Z_\phi^{-N/2} Z_\phi^{-L} \Gamma_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N,L)}(K_i, p_j, g_4, \mathcal{K}) \right] = 0 \quad (3.38)$$

No limite $\Lambda \rightarrow \infty$, isto pode ser escrito como:

$$\left[\mathcal{K} \frac{\partial}{\partial \mathcal{K}} + \beta_4(u_4) \frac{\partial}{\partial u_4} - \frac{N}{2} \gamma_\phi(u_4) + L \overline{\gamma}_{\phi^2}(u_4) \right] \times \Gamma_{i_1 \dots i_N, j_1 \dots j_L}^{(N,L)}(K_i, p_j, u_4, \mathcal{K}) = 0, \quad (3.39)$$

que é chamada de equação de grupo renormalizada.

temos que:

$$\beta_4(u_4) = \left[\mathcal{K} \frac{\partial u_4}{\partial \mathcal{K}} \right]_{\lambda_4}, \quad (3.40)$$

$$\gamma_\phi(u_4) = \mathcal{K} \left[\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mathcal{K}} \right]_{\lambda_4}, \quad (3.41)$$

$$\overline{\gamma}_{\phi^2}(u_4) = - \mathcal{K} \left[\frac{\partial \ln \overline{Z}_{\phi^2}}{\partial \mathcal{K}} \right]_{\lambda_4}, \quad (3.42)$$

onde usamos duas quantidades u_{40} e u_4 sem dimensões:

$$\lambda_4 = u_{40} \mathcal{K}^\varepsilon \text{ e } g_4 = u_4 \mathcal{K}^\varepsilon, \quad \varepsilon = 4 - d. \quad (3.43)$$

As funções de renormalização (u_{40} , Z_ϕ e \overline{Z}_ϕ^2) e β , γ_ϕ e $\overline{\gamma}_\phi^2$, que são chamadas de funções de Wilson, podem ser escritas em uma série de potências de u_4 , cujos coeficientes dependem de ε .

Enquanto as funções de renormalização divergem para $\Lambda \rightarrow \infty$ em $\varepsilon \rightarrow 0$ ($d \rightarrow 4$), as funções de Wilson são finitas. Quando a constante de acoplamento u_4 , atinge um valor tal que qualquer mudança na escala do momento, não lhe afeta, o ponto correspondente a este valor é chamado de ponto fixo u_4^* , que caracteriza uma transição de fases de segunda ordem. Podemos identificar esses pontos fazendo:

$$\beta_4(u_4 = u_4^*) = 0. \quad (3.44)$$

Isto pode ocorrer em vários casos:

i) quando $u_4^* = 0$, não há interação, que é o modelo clássico (Gaussiano).

ii) quando $u_4^* \neq 0$, há interação, que é o caso que estamos estudando.

As funções γ_ϕ e $\overline{\gamma}_\phi^2$, calculadas no ponto fixo, correspondem aos expoentes críticos das flutuações η e ν . Estão relacionados por:

$$\gamma_\phi(u_4^*) = \eta(u_4^*), \quad (3.45)$$

$$\overline{\gamma}_\phi^2(u_4^*) = 2 - \nu^{-1}(u_4^*) - \eta(u_4^*), \quad (3.46)$$

onde os expoentes críticos η e ν são chamados de dimensão anômala dos operadores ϕ e ϕ^2 respectivamente. A partir da determinação de dois críticos, podemos usar as Relações de Escala, para achar os expoentes críticos estáticos: α , β , γ e δ .

As Relações de Escala são:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \alpha + \nu d = 2 \quad , \\
 \text{ii)} \quad & \gamma = \nu(2-\eta) \quad , \\
 \text{iii)} \quad & \beta(\delta - 1) = \gamma \quad , \\
 \text{iv)} \quad & \alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

A partir das funções de "vertex" no ponto simétrico, eqs. (2.53)-(2.55), as funções de "vertex" no ponto crítico $m^2 \rightarrow 0$, podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(2)}(K, u_{40}, \Lambda) &= K^2 + u_{40} \frac{(\Delta+2)}{6} D_1(\Lambda) - u_{40}^2 \left[\frac{\Delta+2}{6} \right]^2 D_2(\Lambda) \\
 &\quad - u_{40}^2 \frac{(\Delta+2)}{18} D_3(K^2, \Lambda) \\
 &\quad + u_{40}^3 \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{108} D_5(K^2, \Lambda) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(4)}(K_i, u_{40}, \Lambda) \Big|_{PS} &= u_{40} - u_{40}^2 \frac{(\Delta+8)}{6} I_{SP}(\Lambda) \\
 &\quad + u_{40}^3 \frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{SP}^2(\Lambda) \\
 &\quad + u_{40}^3 \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4SP}(K_i, \Lambda) \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2,1)}(K_i, p, u_{40}, \Lambda) \Big|_{PS} &= 1 - u_{40} \frac{(\Delta+2)}{6} I_{SP}(p, \Lambda) \\
&+ u_{40}^2 \left(\frac{\Delta+2}{6} \right)^2 I_{SP}^2(p, \Lambda) \\
&+ u_{40}^2 \frac{(\Delta+2)}{6} I_{4SP}(K_i, p, \Lambda) .
\end{aligned}$$

(3.50)

Onde usamos a eq. (3.43), embutindo o fator \mathcal{L} nas integrais.

No próximo capítulo vamos calcular as funções de Wilson, que possibilitam determinar os expoentes críticos.

CAPÍTULO IV

DETERMINAÇÃO DOS EXPOENTES CRÍTICOS

Vimos que podemos expandir β em potências de u_4 e ε ; tal que $u^*(\varepsilon)$, e as dimensões anômalas, são calculadas por uma dada ordem de ε . Esta expansão é finita para ε muito pequeno ($\varepsilon < 1$). O fato dos expoentes críticos obtidos dessa forma, estão de acordo com outras teorias para dimensão 3 ($\varepsilon=1$), com razoável precisão numérica, é agradável surpresa.

As expansões num número pequeno de "loops" das funções de "vertex" não renormalizadas, eqs.(3.48)-(3.50), já são suficientes para obtermos os expoentes críticos em ordem ε^2 .

4.1 - DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE RENORMALIZAÇÃO^o

Usando as condições de normalização obtemos as funções de renormalização em potências de u_{40} e ε . Da condição de renormalização eq. (3.35), determinamos a função de renormalização Z_ϕ :

$$Z_\phi \left. \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial K^2} (K, u_{40}, \Lambda) \right|_{K^2=\mathcal{K}^2} = 1, \quad (4.1)$$

sendo a função de "vertex" $\Gamma^{(2)}$ definida pela eq. (3.48). A condição de renormalização fica:

$$Z_\phi \left[1 - \frac{(\Delta+2)}{18} \frac{\partial D_3}{\partial K^2} \right]_{K^2=\mathcal{K}^2} u_{40}^2 + \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{108} \frac{\partial D_5}{\partial K^2} \left[\right]_{K^2=\mathcal{K}^2} u_{40}^3 = 1.$$

A função Z_ϕ pode ser escrita como:

$$Z_\phi = 1 + \frac{(\Delta+2)}{18} D'_9 u_{40}^2 - \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{108} D'_5 u_{40}^3, \quad (4.2)$$

onde

$$D'_9 = \left. \frac{\partial D_9}{\partial k^2} \right|_{k^2=\kappa^2} \text{ e } D'_5 = \left. \frac{\partial D_5}{\partial k^2} \right|_{k^2=\kappa^2}. \quad (4.3)$$

Da condição de renormalização eq. (3.36), determinamos a função de renormalização u_{40} :

$$u_4 = \kappa^{-\epsilon} Z_\phi^2 \Gamma^{(4)}(K_i, u_{40}, \Lambda) \Big|_{PS},$$

sendo a função de vértex $\Gamma^{(4)} \Big|_{PS}$ definida pela eq. (3.49) e sendo o fator κ^ϵ está embutido nas integrais. A expressão fica:

$$u_4 = Z_\phi^2 \left[u_{40} - u_{40}^2 \frac{(\Delta+2)}{6} I_{SP} + \frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{SP}^2 u_{40}^3 + \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4SP} u_{40}^3 \right].$$

Fazendo-se $u_4^2 = u_{40}^2$ na eq. (4.2), e tomando-se uma aproximação de 2-"loops" de Z_ϕ ,

$$Z_\phi = 1 + \frac{(\Delta+2)}{18} D'_9 u_4^2. \quad (4.4)$$

Usando-se este valor, obtemos uma expressão de u_4 em potências de u_{40} :

$$u_4 = u_{40} - \frac{(\Delta+8)}{6} I_{PS} u_{40}^2 + \frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{PS}^2 u_{40}^3 + \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4PS} u_{40}^3 + \frac{(\Delta+2)}{9} D'_9 u_{40}^3. \quad (4.5)$$

Para obter a função de renormalização u_{40} em termos de uma série de potências em u_4 , fazemos:

$$u_{40} = u_4 + \frac{(\Delta+8)}{6} I_{PS} u_{40}^2 - \frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{PS}^2 u_{40}^3 - \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4PS} u_{40}^3 - \frac{(\Delta+2)}{9} D_3 u_{40}^3 ,$$

usando a aproximação de 1-"loop":

$$u_{40} = u_4 + \frac{(\Delta+8)}{6} I_{PS} u_4^2 . \quad (4.6)$$

Finalmente, u_{40} pode ser escrito como:

$$u_{40} = u_4 + \frac{(\Delta+8)}{6} I_{PS} u_4^2 + \left[\frac{(\Delta^2+26\Delta+108)}{36} I_{PS}^2 - \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4PS} - \frac{(\Delta+2)}{9} D_3 \right] u_4^3 . \quad (4.7)$$

Da condição de renormalização, eq. (3.37), determinamos a função de renormalização \overline{Z}_ϕ^2 :

$$\overline{Z}_\phi^2 \Gamma^{(2,1)}(K,p,u_{40},\Lambda) \Big|_{PS} = 1 . \quad (4.8)$$

Sendo que o valor da função de "vertex" $\Gamma^{(2,1)}$ é dado pela eq. (3.50), a expressão acima fica:

$$\overline{Z}_\phi^2 \left[1 - \frac{(\Delta+2)}{6} I_{PS} u_{40} + \left(\frac{\Delta+2}{6} \right)^2 I_{PS}^2 u_{40}^2 + \frac{(\Delta+2)}{6} I_{4PS} u_{40}^2 \right] = 1 .$$

Resolvendo essa equação podemos escrever a função de renormalização \overline{Z}_ϕ^2 como:

$$\overline{Z}_\phi^2 = 1 + \frac{(\Delta+2)}{6} I_{PS} u_{40} - \frac{(\Delta+2)}{6} I_{4PS} u_{40}^2 . \quad (4.9)$$

4.2 - DETERMINAÇÃO DAS FUNÇÕES DE WILSON⁶

Com as funções de renormalização definidas podemos encontrar as funções de Wilson em potências de u_4 e ϵ .

Usando o valor de u_4 da eq. (4.5) na definição da função de Wilson β_4 , que foi dada no capítulo anterior, obtemos

$$\beta_4 = \mathcal{K} \left. \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4} - \frac{(\Delta+8)}{6} I_{PS} 2 u_{40} \mathcal{K} \left. \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4} + \left[\frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{PS}^2 + \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{9} D_3' \right] 3u_{40}^3 \mathcal{K} \left. \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4} . \quad (4.10)$$

Da eq. (3.43) se deduz que,

$$\mathcal{K} \left. \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4} = -\epsilon u_{40} . \quad (4.11)$$

A função β_4 pode ser escrita como

$$\beta_4 = -\epsilon \left\{ u_{40} - \frac{(\Delta+8)}{3} I_{PS} u_{40}^2 + \left[\frac{(\Delta^2+6\Delta+20)}{36} I_{PS}^2 + \frac{(5\Delta+22)}{9} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{9} D_3' \right] 3u_{40}^3 \right\} .$$

Usando o valor da aproximação de 1-"loop" de u_{40} , eq. (4.6), a função β_4 pode ser escrita em uma série de potências em u_4 :

$$\beta_4(u_4) = -\epsilon \left\{ u_4 - \frac{(\Delta+8)}{6} I_{PS} u_4^2 + \left[-\frac{(5\Delta+22)}{9} I_{PS}^2 + \frac{2}{9} (5\Delta+22) I_{4PS} + \frac{2}{9} (\Delta+2) D_3' \right] u_4^3 \right\} . \quad (4.21)$$

Segundo Amit⁽⁶⁾, as integrais tem as seguintes expansões em ϵ :

$$\mathcal{K}^\epsilon I_{SP} = \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \right),$$

$$\mathcal{K}^{2\epsilon} I_{SP}^2 = \frac{1}{\epsilon^2} (1 + \epsilon),$$

$$\mathcal{K}^{2\epsilon} I_{4SP} = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right),$$

$$\mathcal{K}^{2\epsilon} D'_3 = -\frac{1}{8\epsilon},$$

$$\mathcal{K}^{3\epsilon} D'_5 = \frac{-1}{6\epsilon^2} (1 + 2\epsilon). \quad (4.13)$$

Dado os valores das integrais, a função de Wilson β_4 pode ser escrita como:

$$\beta_4(u_4) = -\epsilon u_4 + \frac{(\Delta+8)}{6} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon \right) u_4^2 - \frac{(9\Delta+42)}{36} u_4^3. \quad (4.14)$$

Com o valor da função de renormalização Z_ϕ , eq. (4.2), na definição da função de Wilson γ_ϕ , que foi definida no capítulo anterior, tem que:

$$\begin{aligned} \gamma_\phi &= \mathcal{K} \frac{1}{Z_\phi} \left. \frac{\partial Z_\phi}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4} = \frac{(\Delta+2)}{9} D'_3 u_{40} \mathcal{K} \left. \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4} \\ &\quad - \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{108} D'_5 3u_{40}^2 \mathcal{K} \left. \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_4}. \end{aligned}$$

Usando a eq.(4.11), essa equação fica:

$$\gamma_\phi = -\epsilon \frac{(\Delta+2)}{9} D'_3 u_{40}^2 + \epsilon \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{36} D'_5 u_{40}^3. \quad (4.15)$$

Usando a aproximação para u_{40} , eq. (4.6), e os valores das integrais, função de Wilson γ_ϕ pode ser escrita em potenciais de u_4 e ϵ :

$$\gamma_\phi(u_4) = \frac{(\Delta+2)}{72} \left[\left(1 + \frac{5}{4} \epsilon \right) u_4^2 - \frac{(\Delta+8)}{12} u_4^3 \right]. \quad (4.16)$$

Usando o valor da função de renormalização \overline{Z}_ϕ^2 , eq. (4.9), na definição da função de Wilson $\overline{\gamma}_\phi^2$, definida no capítulo anterior, temos que

$$\overline{\gamma}_\phi^2 = - \kappa \frac{1}{\overline{Z}_\phi^2} \frac{\partial \overline{Z}_\phi^2}{\partial \kappa} \Bigg|_{\lambda_4} = - \varepsilon \frac{(\Delta+2)}{6} I_{SP} u_{40} + \varepsilon \frac{(\Delta+2)}{3} I_{4SP} u_{40}^2 . \quad (4.17)$$

Usando a eq. (4.6) e os valores das integrais, a função de Wilson $\overline{\gamma}_\phi^2$ pode ser escrita em potências de u_4 e ε :

$$\overline{\gamma}_\phi^2 (u_4) = \frac{(\Delta+2)}{6} u_4 \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} u_4 \right] . \quad (4.18)$$

4.3 - DETERMINAÇÃO DOS EXPOENTES CRÍTICOS⁶

Como os expoentes críticos das flutuações η e ν dependem das funções de Wilson $\overline{\gamma}_\phi(u_4^*)$ e $\overline{\gamma}_\phi^2(u_4^*)$ no ponto fixo, devemos obter primeiramente o ponto fixo não trivial u_4^* .

Para acharmos os pontos fixos, fazemos:

$$\beta_4(u_4^*) = - \varepsilon u_4^* + \left[\frac{\Delta+8}{6} \right] \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) u_4^{*2} - \left[\frac{9\Delta + 42}{36} \right] u_4^{*3} = 0 . \quad (4.19)$$

A função $\beta_4(u_4^*)$ tem um zero em $u_4^* = 0$, que é o ponto fixo Gaussiano, e outro:

$$u_4^* = \frac{6}{\Delta+8} \varepsilon \left\{ 1 + \varepsilon \left[\frac{3(3\Delta+14)}{(\Delta+8)^2} - \frac{1}{2} \right] \right\} . \quad (4.20)$$

Quando este valor de u_4^* é inserido na eq. (3.45), obtemos o expoente crítico η :

$$\gamma_\phi(u_4^*) = \eta(u_4^*) = \varepsilon^2 \frac{\Delta + 2}{2(\Delta + 8)^2} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{6(3\Delta + 14)}{(\Delta + 8)^2} - \frac{1}{4} \right) \right], \quad (4.21)$$

e da eq. (4.18), temos:

$$\overline{\gamma_\phi^2}(u_4^*) = \varepsilon \frac{\Delta + 2}{\Delta + 8} \left[1 + \frac{6(\Delta + 3)}{(\Delta + 8)^2} \varepsilon \right]. \quad (4.22)$$

Usando a eq. (3.46), teremos o expoente crítico ν :

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{(\Delta + 2)}{4(\Delta + 8)} \varepsilon + \frac{(\Delta + 2)(\Delta^2 + 23\Delta + 60)}{8(\Delta + 8)^3} \varepsilon^2. \quad (4.23)$$

Usando as Relações de Escala eqs. (3.47), teremos os outros expoentes críticos, em ordem ε^2 :

$$\gamma = 1 + \frac{\Delta + 2}{2(\Delta + 8)} \varepsilon + \frac{(\Delta + 2)(\Delta^2 + 22\Delta + 52)}{4(\Delta + 8)^3} \varepsilon^2,$$

$$\alpha = \frac{4 - \Delta}{2(\Delta + 8)} \varepsilon - \frac{(\Delta + 2)(\Delta^2 + 30\Delta + 56)}{4(\Delta + 8)^3} \varepsilon^2,$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(\Delta + 8)} \varepsilon + \frac{(\Delta + 2)(2\Delta + 1)}{2(\Delta + 8)^3} \varepsilon^2,$$

$$\delta = 3 + \varepsilon + \frac{\Delta^3 + 28\Delta^2 + 152\Delta + 64}{2(\Delta + 8)^3} \varepsilon^2. \quad (4.24)$$

Como em nosso caso $\Delta = 5$, porque o tensor $Q_{\alpha\beta}$ tem 5 componentes independentes, os expoentes críticos em ordem ε^2 são escritos como

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{7}{338} \varepsilon^2, \\ \nu &= \frac{1}{2} + \frac{7}{52} \varepsilon + \frac{175}{2197} \varepsilon^2, \\ \gamma &= 1 + \frac{7}{26} \varepsilon + \frac{1309}{8788} \varepsilon^2, \\ \alpha &= -\frac{1}{26} \varepsilon - \frac{1617}{8788} \varepsilon^2, \\ \beta &= \frac{1}{2} - \frac{3}{26} \varepsilon + \frac{77}{4394} \varepsilon^2, \\ \delta &= 3 + \varepsilon + \frac{1649}{4394} \varepsilon^2.\end{aligned}$$

(4.25)

Vamos comparar os valores dos expoentes críticos, eqs. (4.21), (4.23) e (4.24), para dimensão espacial $d=3$ ($\varepsilon=1$) e dimensões do parâmetro de ordem $\Delta=1$ e $\Delta=3$, com os resultados das expansões das séries de altas temperaturas que são bastantes precisas⁶. Temos também os valores dos expoentes críticos para $\Delta=5$, eq. (4.25), na dimensão espacial $d=3$. Ver tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Comparação das Expansões em ε com as Séries de Altas Temperaturas⁶.

	D	Δ	α	β	γ	δ	η	ν
TEORIA CAMPO MÉDIO			0,000	0,500	1,000	3,000	0,000	0,500
MODELO DE ISING	2		0,000	0,125	1,750	15,000	0,250	1,000
MODELO DE ISING	3		0,120	0,310	1,250	5,000	0,040	0,640
MODELO HEISENBERG	3		-0,060	0,340	1,380	5,059	0,050	0,700
TEORIA DE CAMPO	3	1	-0,536	0,646	1,244	2,926	0,037	0,634
TEORIA DE CAMPO	3	3	-0,744	0,699	1,346	2,926	0,039	0,686
SÉRIES ALTAS TEMP.	3	1	-0,552	0,651	1,250	2,920	0,041	0,638
SÉRIES ALTAS TEMP.	3	3	-0,812	0,719	1,375	2,912	0,043	0,703
TEORIA DE CAMPO	3	5	-0,222	0,402	1,418	4,375	0,021	0,714

CAPÍTULO V

DETERMINAÇÃO DO EXPOENTE DE "CROSSOVER"

Até agora consideramos a Densidade Lagrangeana como sendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla Q_{\alpha\beta} \nabla Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{2!} m^2 Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha} + \frac{1}{4!} \mu_4 (Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\alpha})^2, \quad (5.1)$$

que descreve um ponto isolado de uma transição de segunda ordem, ou o Ponto de Landau (PL). No último capítulo, calculamos os expoentes críticos para o Ponto Isolado de Landau até a ordem ε^2 .

Vamos adicionar uma interação cúbica na Densidade Lagrangeana acima. A interação cúbica é dada por:

$$\frac{u_3}{3!} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\nu} Q_{\nu\alpha}. \quad (5.2)$$

Neste capítulo vamos estudar o problema da relevância de u_3 com respeito ao ponto de Landau. Vamos calcular o expoente de "Crossover" do ponto de Landau para a transição de primeira ordem devido a esta perturbação causada pela presença de u_3 .

5.1 - DEFINIÇÃO DE EXPOENTE DE "CROSSOVER"

Quando $u_3 = 0$, o comportamento crítico do sistema é dominado pelo ponto de Landau. Mas por outro lado, quando $u_3 \neq 0$, o sistema pode fazer um "Crossover" para uma transição de primeira ordem.

A lei de Escala para uma dada quantidade termodinâmica $f(t, u_3)$ é descrita por uma função homogênea do tipo:

$$f(t, u_3) = t^\Delta \bar{f} \left(u_3 / t^{\phi_3} \right), \quad (5.3)$$

onde $t \propto T - T_c$

e Δ é o expoente crítico da função termodinâmica f no ponto de Landau.

Se $u_3 \neq 0$, quando $t \rightarrow 0$, temos dois tipos de comportamento de Escala:

- (i) Se $\phi_3 < 0$, temos $f \sim T^\Delta$. Implica que u_3 pode ficar finito, mas o comportamento crítico é dominado pelo ponto de Landau.
- (ii) se $\phi_3 > 0$, o termo u_3 / t^{ϕ_3} vai para o infinito. Com isso a interação u_3 é relevante e o comportamento crítico não está mais no ponto de Landau. O sistema faz um "crossover" para um novo comportamento, isto é, para uma transição de primeira ordem.

O expoente ϕ_3 é chamado de expoente de "crossover". Se d_3 é a dimensão crítica, no ponto de Landau, do operador $Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\nu} Q_{\nu\alpha}$, o expoente de "crossover" é dado por:

$$\phi_3 = -\nu d_3. \quad (5.4)$$

Definimos uma função de Wilson β_3 por:

$$\beta_3(u_3, u_4) = \mathcal{K} \left. \frac{\partial u_3}{\partial \mathcal{K}} \right|_{\lambda_3}, \quad (5.5)$$

onde u_3 e u_4 são interações renormalizadas sem dimensões.

A dimensão crítica d_3 é dada por

$$d_3 = \frac{\partial \beta_3}{\partial u_3} (u_3, u_4^*) \Big|_{PL} . \quad (5.6)$$

Com essas definições, vamos calcular o expoente de "crossover" do ponto de Landau para uma transição de primeira ordem até ordem ϵ^2 .

5.2 - DETERMINAÇÃO DO EXPOENTE DE "CROSSOVER"⁶

Vamos agora usar a função de "vertex" de três pontos $\Gamma_{abc}^{(3)}$ com interações λ_3 e λ_4 . Mas como foi visto no capítulo III, as funções de "vertex" no ponto crítico, divergem no infravermelho. Para tirarmos esta divergência, criamos as funções de "vertex" renormalizadas, definidas pela eq. (3.31). Então para tirarmos a divergência de $\Gamma_{abc}^{(3)}$ fazemos:

$$\Gamma_{abcR}^{(3)}(K_i, u_4, u_3) = Z_\phi^{3/2} \Gamma_{abc}^{(3)}(K_i, u_{40}, u_{30}) . \quad (5.7)$$

Como no capítulo III, se queremos determinar a função de renormalização u_{30} , fazemos a seguinte condição de renormalização:

$$\Gamma_R^{(3)}(K_i, u_4, u_3) \Big|_{SP} = u_3 , \quad (5.8)$$

onde u_3 e u_{30} são as constantes de acoplamento do termo cúbico renormalizada e não renormalizadas, sendo u_{30} definida por

$$\lambda_3 = u_{30} \epsilon^{\frac{2+\epsilon}{2}} . \quad (5.9)$$

Usando a condição de renormalização, e a eq. (2.52) temos que:

$$u_3 = Z_\phi^{3/2} \Gamma^{(3)}(K_i, u_{40}, u_{30}) \Big|_{PS} . \quad (5.10)$$

A função de "vertex" não renormalizada $\Gamma^{(3)}$ no ponto simétrico é definida pela eq. (2.56). Usando as eqs. (3.43) e (5.9), com os fatores κ^2 e κ^ϵ embutidos nas integrais, a função $\Gamma^{(3)}|_{PS}$ pode ser escrita como:

$$\Gamma^{(3)}(K_i, u_{40}, u_{30})|_{PS} = u_{30} - u_{30} u_{40} I_{PS}(\Lambda) + \frac{u_{30} u_{40}^2}{3} I_{PS}^2(\Lambda) + u_{30} u_{40}^2 \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS}(K_i, \Lambda). \quad (5.11)$$

Usando para Z_ϕ a aproximação até 2-"loops", a eq. (5.10) fica:

$$u_9 = u_{30} - u_{30} u_{40} I_{PS} + u_{30} u_{40}^2 \left[\frac{I_{PS}^2}{3} + \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{12} D'_9 \right]. \quad (5.12)$$

Se queremos determinar a função de renormalização u_{30} , escrita em potências de u_4 e u_3 , primeiro isolamos u_{30} ,

$$u_{30} = u_3 + u_{30} u_{40} I_{PS} - u_{30} u_{40}^2 \left[\frac{I_{PS}^2}{3} + \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{12} D'_9 \right]. \quad (5.13)$$

Fazendo-se a aproximação de 1-"loop",

$$u_{30} = u_3 + u_{34} I_{PS}. \quad (5.14)$$

Introduzindo as aproximações de 1-"loop", eqs. (4.6) e (5.14), na eq. (5.13), a expressão de u_{30} em potências de u_3 e u_4 torna-se:

$$u_{30} = u_3 + u_3 u_4 I_{PS} + u_3 u_4^2 \left[\frac{(\Delta+2)}{6} I_{PS}^2 - \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS} - \frac{(\Delta+2)}{12} D_3' \right] \quad (5.15)$$

Vamos agora calcular a função de Wilson β_3 usando a eq.(5.12):

$$\begin{aligned} \beta_3(u_3, u_4) &= \mathcal{K} \frac{\partial u_3}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} \\ &= \mathcal{K} \frac{\partial u_{30}}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} - \mathcal{K} \frac{\partial u_{30}}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} u_{40} I_{PS} - \mathcal{K} \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} u_{30} I_{PS} \\ &\quad + \mathcal{K} \frac{\partial u_{30}}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} u_{40}^2 \left[\frac{I_{PS}^2}{3} + \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{12} D_3' \right] \\ &\quad + 2 u_{40} \mathcal{K} \frac{\partial u_{40}}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} u_{30} \left[\frac{I_{PS}^2}{3} + \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{12} D_3' \right] \end{aligned}$$

Da eq. (5.9), se conclui que:

$$\mathcal{K} \frac{\partial u_{30}}{\partial \mathcal{K}} \Big|_{\lambda_3} = \left[-1 - \frac{\varepsilon}{2} \right] u_{30} \quad (5.16)$$

Usando as eqs. (4.11) e (5.16), a função β pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \beta(u_3, u_4) &= \left[-1 - \frac{\varepsilon}{2} \right] u_{30} + \left[1 + \frac{3\varepsilon}{2} \right] u_{30} u_{40} I_{PS} \\ &\quad - \left[1 + \frac{5\varepsilon}{2} \right] \left[\frac{I_{PS}^2}{3} + \frac{(\Delta+10)}{6} I_{4PS} + \frac{(\Delta+2)}{12} D_3' \right] u_{30} u_{40}^2 \quad (5.17) \end{aligned}$$

Colocando nesta equação os valores de u_{30} e u_{40} em potências de u_4 , eqs. (4.7) e (5.15), de tal maneira que a função β_3 só tenha termos até 2-"loops", obtemos

$$\beta_3(u_3, u_4) = \left[-1 - \frac{\varepsilon}{2} \right] u_3 + \varepsilon u_3 u_4 I_{PS} + \frac{\varepsilon}{2} u_3 u_4^2 \left[\frac{(\Delta+10)}{3} I_{PS}^2 - \frac{2}{3} (\Delta+10) I_{4PS} - \frac{(\Delta+2)}{3} D_3 \right]. \quad (5.18)$$

Vamos derivar a função β_3 com respeito à interação cúbica u_3 :

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial u_3}(u_3, u_4) = -1 - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon u_4 I_{PS} + \frac{\varepsilon}{2} u_4^2 \left[\frac{(\Delta+10)}{3} I_{PS}^2 - \frac{2}{3} (\Delta+10) I_{4PS} - \frac{(\Delta+2)}{3} D_3 \right].$$

Usando as expansões em ε das integrais, eq. (4.13), obtemos

$$\frac{\partial \beta_3}{\partial u_3}(u_3, u_4) = -1 - \frac{\varepsilon}{2} + u_4 + \frac{\varepsilon}{2} u_4 - u_4^2 \frac{(3\Delta+38)}{48} \dots \quad (5.19)$$

Vamos agora calcular a dimensão crítica do operador $Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\nu} Q_{\nu\alpha} d_3$, no ponto de Landau, que implica no ponto fixo u_4^* diferente de zero:

$$d_3 = \left. \frac{\partial \beta_3}{\partial u_3}(u_3, u_4^*) \right|_{PL} = -1 - \frac{\varepsilon}{2} + u_4^* + \frac{\varepsilon}{2} u_4^* - u_4^{*2} \frac{(3\Delta+38)}{48}. \quad (5.20)$$

O ponto fixo u_4^* diferente de zero foi obtido no capítulo anterior, eq. (4.20). Usando este valor, a dimensão crítica d_3 até ordem ε^2 é:

$$d_3 = -1 - \frac{(\Delta-4)}{2(\Delta+8)} \varepsilon + \frac{(96+30\Delta-9\Delta^2)}{4(\Delta+8)^3} \varepsilon^2. \quad (5.21)$$

Dada a dimensão crítica d_g e o valor do expoente crítico ν , eq. (4.23), podemos calcular o expoente de "crossover" pela eq. (5.4). Resolvendo esta equação, temos:

$$\phi_g = \frac{1}{2} + \frac{(\Delta-1)}{2(\Delta+8)} \varepsilon + \frac{(\Delta^3+20\Delta^2+26\Delta-20)}{4(\Delta+8)^3} \varepsilon^2 . \quad (5.22)$$

Em nosso caso $\Delta = 5$, porque o tensor $Q_{\alpha\beta}$ tem cinco componentes independentes e o expoente de "crossover" tem a seguinte expressão:

$$\phi_g = \frac{1}{2} + \frac{2}{13} \varepsilon + \frac{735}{8788} \varepsilon^2 . \quad (5.23)$$

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Da Teoria de Landau¹, usando um parâmetro de ordem tensorial na expansão da Densidade de Energia de Gibbs, obtivemos um diagrama de fases que mostra um ponto crítico isolado de transição de segunda ordem ($r_0 = u_9 = 0$), numa linha de transições de primeira ordem, conhecido como o Ponto de Landau.

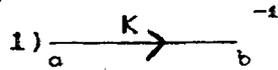
Experimentalmente esses resultados foram confirmados nos Cristais Líquidos Liotrópicos. Mas o ponto de Landau não foi ainda confirmado^{2,6}.

A teoria de Landau fornece valores errados dos expoentes críticos⁽⁶⁾, usamos o Grupo de Renormalização de Wilson com a teoria de perturbação renormalizada, aplicadas em torno do Ponto de Landau. Obtivemos os expoentes críticos em presença de flutuação: ν, η . Usando as Relações de Escala determinamos os outros expoentes críticos: α, β, δ e γ , até segunda ordem em ϵ . Comparamos os expoentes críticos com dimensão espacial $d=3$ e dimensões do parâmetro de ordem $\Delta=1$ e $\Delta=3$, com os resultados bastantes precisos das expansões de séries de altas temperaturas e os resultados são muito bons.

Pela introdução da constante de acoplamento da interação cúbica u_9 na Densidade Lagrangeana, determinamos o expoente de "crossover" do Ponto de Landau para uma transição de primeira ordem, até ordem ϵ^2 e os valores obtidos para os expoentes críticos e para o expoente de "crossover" concordam com os valores calculados por C. Vause e J. Sak¹.

APÊNDICE A

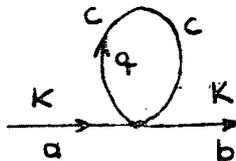
Usando as regras de Feynman, vamos obter as expressões analíticas dos diagramas que apareceram nas funções de "vertex" $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$, $\Gamma^{(2,1)}$ e $\Gamma^{(3)}$:



Este gráfico é o inverso do propagador livre G_0 , da eq. (2.26) cujo valor é:

$$(K^2 + \mu^2) \Delta_{ab} \quad . \quad (A.1)$$

2)



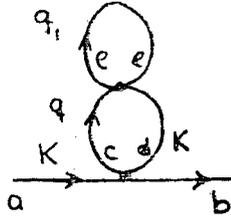
O valor deste gráfico é a eq. (2.29), sem os propagadores livres livres:

$$\frac{-\lambda}{6} (\Delta+2) \Delta_{ab} D_1(\mu^2, \Lambda) \quad (A.2)$$

onde

$$D_1(\mu^2, \Lambda) = \int_q^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \mu^2)} \quad . \quad (A.3)$$

3)



Este gráfico tem duas interações λ_4 , cujo fator de simetria é $S = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3$, e o seu valor é:

$$\left[\frac{-\lambda^2}{4!} \right] \left[\frac{-\lambda^2}{4!} \right] \frac{1}{2!} 4! \times 4 \times 3 \Gamma_{4abcd} \Gamma_{4cdee} D_2(\mu^2, \Lambda)$$

Resolvendo a expressão para $\Gamma_{4abcd} \Gamma_{4cdee}$, ficamos com

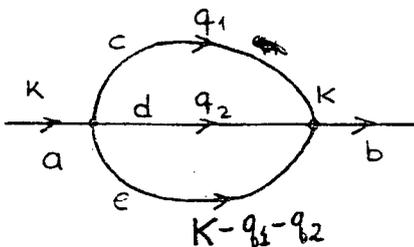
$$\Gamma_{4abcd} \Gamma_{4cdee} = \frac{(\Delta+2)^2}{9} \Delta_{ab},$$

logo o valor final do gráfico é:

$$\frac{\lambda^2}{4} \frac{(\Delta+2)^2}{9} \Delta_{ab} D_2(\mu^2, \Lambda), \tag{A.4}$$

onde $D_2(\mu^2, \Lambda) = \int_q^\Lambda \int_{q_1}^\Lambda \frac{d_q^d d_{q_1}^d}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{(q^2 + \mu^2)(q_1^2 + \mu^2)}$. (A.5)

4)

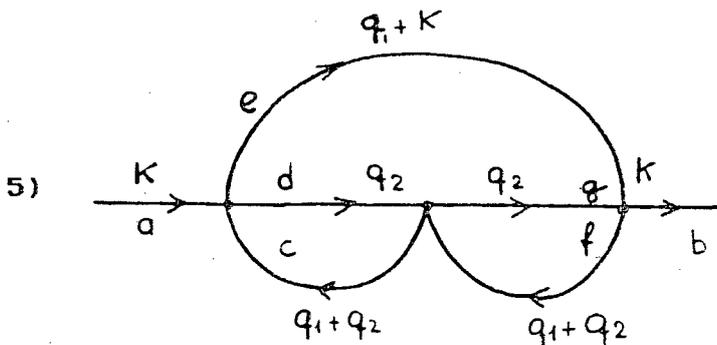


O valor deste gráfico é a eq. (2.30), sem os propagadores livres:

$$\frac{\lambda^2}{6} \frac{(\Delta+2)}{3} \Delta_{ab} D_3(K^2, \mu^2, \Lambda) \quad (\text{A.6})$$

onde: $D_3(K^2, \mu^2, \Lambda) = \int_{q_1}^{\Lambda} \int_{q_2}^{\Lambda} \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \cdot \frac{1}{[q_1^2 + \mu^2][q_2^2 + \mu^2][(K - q_1 - q_2)^2 + \mu^2]}$

(A.7)



Este gráfico tem três interações λ_4 , cujo fator de simetria é $S = 4! \times 4! \times 4 \times 3 \times 3$. O seu valor é:

$$\frac{-\lambda_4}{4!} \cdot \frac{\lambda_4}{4!} \cdot \frac{\lambda_4}{4!} \cdot \frac{1}{3!} 4! \times 4! \times 4 \times 3 \times 3 \Gamma_{4acde} \Gamma_{4cdfg} \Gamma_{4fgeb} D_3(K^2, \mu^2, \Lambda)$$

Como

$$\Gamma_{4acde} \Gamma_{4cdfg} \Gamma_{4fgeb} = \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{27}$$

o valor final do gráfico é:

$$\frac{-\lambda_4^3}{4} \frac{(\Delta+2)(\Delta+8)}{27} D_3(K^2, \mu^2, \Lambda) \quad (\text{A.8})$$

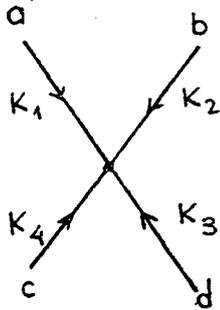
onde

$$D_5(K^2, \mu^2, \Lambda) = \int_{q_1}^{\Lambda} \int_{q_2}^{\Lambda} \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \cdot \frac{1}{[(q_1 + K)^2 + \mu^2]} \cdot \left[\frac{1}{(q_2^2 + \mu^2) [(q_1 + q_2)^2 + \mu^2]} \right]^2$$

(A.9)

Pela conservação de momento total: $K = -K_1 = K_2$

6)

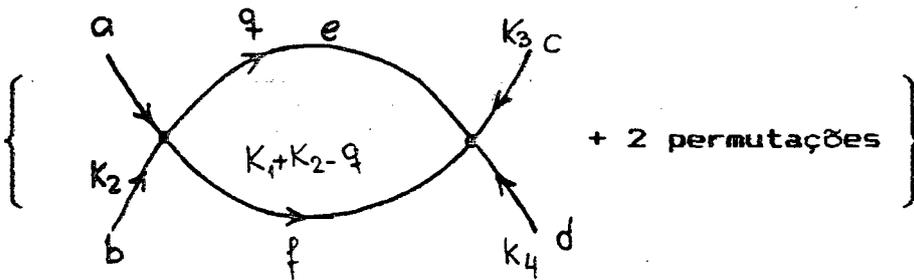


Este gráfico tem uma interação λ_4 , cujo fator de simetria é $S=4!$. O seu valor é :

$$\frac{-\lambda_4}{4!} 4! \Gamma_{4abcd}$$

(A.10)

7)



O gráfico tem duas interações λ_4 , e o fator de simetria é $S=4! \times 4!$. O seu valor é:

$$\left\{ \frac{\lambda_4}{4!} \cdot \frac{\lambda_4}{4!} \cdot \frac{1}{2!} 4! 4! \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} I(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\}$$

Somando-se as três permutações, ficamos com

$$\frac{\lambda^2}{2} \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} I(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + \frac{\lambda^2}{2} \Gamma_{4acef} \Gamma_{4efbd} I(K_1 + K_3, \mu^2, \Lambda) \\ + \frac{\lambda^2}{2} \Gamma_{4adef} \Gamma_{4efbc} I(K_1 + K_4, \mu^2, \Lambda) .$$

No ponto simétrico (PS), as integrais de cada permutação são iguais. Somando os termos ficamos com

$$\frac{\lambda^2}{2} I_{PS}(K, \mu^2, \Lambda) \left[\Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} + \Gamma_{4acef} \Gamma_{4efbd} + \Gamma_{4adef} \Gamma_{4efbc} \right] .$$

Resolvendo-se essas expressões:

$$\Gamma_{4abef} \Gamma_{4efcd} = \frac{1}{9} \left[(\Delta+4)\Delta_{ab}\Delta_{cd} + 2\Delta_{ac}\Delta_{bd} + 2\Delta_{ad}\Delta_{bc} \right] ,$$

$$\Gamma_{4acef} \Gamma_{4efbd} = \frac{1}{9} \left[2\Delta_{ab}\Delta_{cd} + (\Delta+4)\Delta_{ac}\Delta_{bd} + 2\Delta_{ad}\Delta_{bc} \right] ,$$

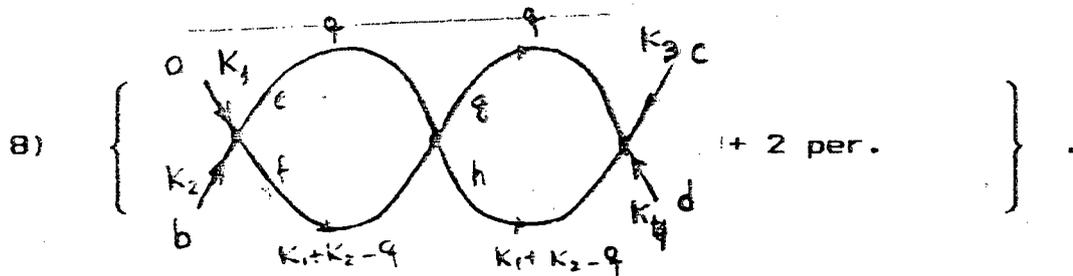
$$\Gamma_{4adef} \Gamma_{4efbc} = \frac{1}{9} \left[2\Delta_{ab}\Delta_{cd} + 2\Delta_{ac}\Delta_{bd} + (\Delta+4)\Delta_{ad}\Delta_{bc} \right] .$$

Somando-se essas expressões, obtemos finalmente o valor do gráfico:

$$\frac{\lambda^2}{2} \frac{(\Delta+8)}{3} \Gamma_{4abcd} I_{PS}(K_i, \mu^2, \Lambda) , \quad (A.11)$$

onde

$$I_{PS}(K_i, \mu^2, \Lambda) = \int_q^\Lambda \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{(q^2 + \mu^2) [(K_1 + K_2 - q)^2 + \mu^2]} . \quad (A.12)$$



O gráfico tem três interações λ_4 , e o fator de simetria é $S = 4 \times 3 \times 3 \times 4! \times 4!$. logo o seu valor é:

$$\left\{ - \frac{\lambda_4}{4!} \frac{\lambda_4}{4!} \frac{\lambda_4}{4!} \frac{1}{3!} 4 \times 3 \times 3 \times 4! \times 4! \Gamma_{4abef} \Gamma_{4efgh} \Gamma_{4ghcd} I^2(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\}.$$

Levando-se em conta o valor de $\Gamma_{4abef} \Gamma_{4efgh} \Gamma_{4ghcd}$, obtemos

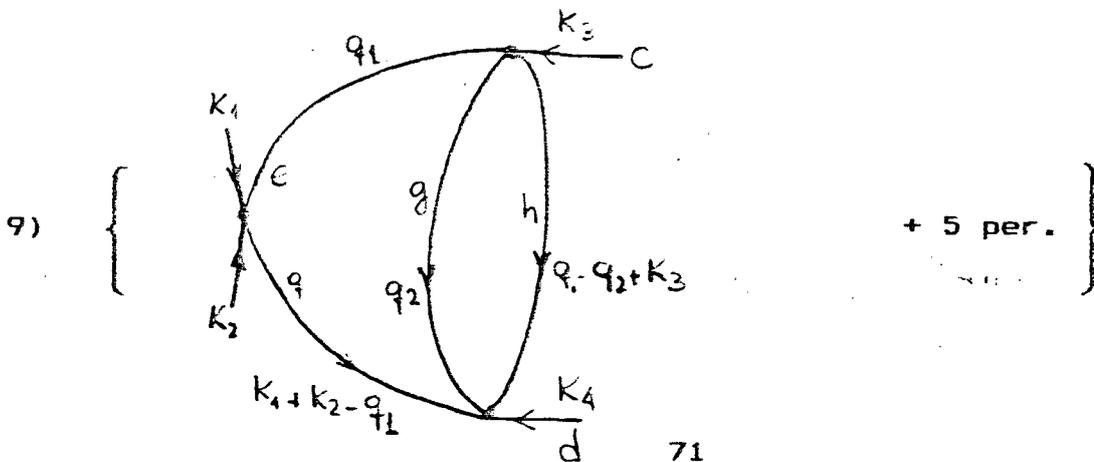
$$\left\{ - \frac{\lambda_4^3}{3} \cdot \frac{1}{27} \left[(\Delta^2 + 6\Delta + 12) \Delta_{ab} \Delta_{cd} + 4\Delta_{ac} \Delta_{bd} + 4\Delta_{ad} \Delta_{bc} \right] I^2(K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\}.$$

No ponto de simetria somamos as permutações, e com isso o valor do gráfico fica:

$$- \frac{\lambda_4^3}{4} \frac{(\Delta^2 + 6\Delta + 20)}{9} \Gamma_{4abcd} I_{PS}^2(K_i, \mu^2, \Lambda), \quad (A.13)$$

onde

$$I_{PS}^2(K_i, \mu^2, \Lambda) = \left[\int_{-q}^{\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \cdot \frac{1}{[q^2 + \mu^2] [(K_1 + K_2 - q)^2 + \mu^2]} \right]^2. \quad (A.14)$$



O gráfico tem três interações λ_4 , e o fator de simetria é

$S=(4!)^3 \times 3$. O seu valor é :

$$\left\{ -\left(\frac{\lambda_4}{4!}\right)^3 \frac{1}{3!} (4!)^3 \times 3 \Gamma_{4abef} \Gamma_{4eghc} \Gamma_{4gfhd} I_4(K_1+K_2, \mu^2, \Lambda) + 5 \text{ per.} \right\}.$$

Fazendo-se a multiplicação dos Γ_4 , a expressão fica:

$$\left\{ -\frac{\lambda_4^3}{2 \cdot 27} \left[(3\Delta+10) \Delta_{ab} \Delta_{cd} + (\Delta+6) \Delta_{ac} \Delta_{bd} + (\Delta+6) \Delta_{ad} \Delta_{bc} \right] I_4(K_1+K_2, \mu^2, \Lambda) + 5 \text{ per.} \right\}.$$

No ponto simétrico, somamos todas as suas permutações, e com isso o gráfico tem o seguinte valor :

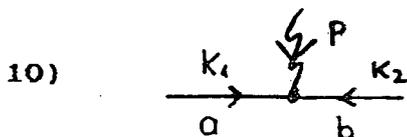
$$-\frac{\lambda_4^3}{2} \cdot \frac{2}{9} (5\Delta + 22) \Gamma_{4abcd} I_{4PS}(K_i, \mu^2, \Lambda), \quad (\text{A.15})$$

onde

$$I_{4PS}(K_i, \mu^2, \Lambda) = \int_q^\Lambda \int_{q_1}^\Lambda \frac{d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2d}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[q_1^2 + \mu^2 \right] \left[(K_1 + K_2 - q_1)^2 + \mu^2 \right] \left[q_2^2 + \mu^2 \right] \left[(q_1 - q_2 + K_3)^2 + \mu^2 \right]} \quad (\text{A.16})$$

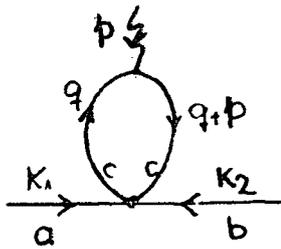
Pela conservação do momento total: $K_4 = - (K_1 + K_2 + K_3)$.



Este gráfico tem uma única inserção ($L=1$), e o fator de simetria é $S = 2!$. O seu valor é:

$$\frac{1}{2!} 2! \Delta_{ab} \quad (A.17)$$

11)



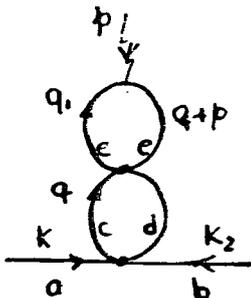
Este gráfico tem uma inserção do momento externo p , uma interação λ_4 , e o fator de simetria é $S=4!$. O seu valor é:

$$-\frac{\lambda_4}{4!} \frac{1}{2!} 4! \Gamma_{4abcc} I_{SP}(K_i, p, \mu^2, \Lambda)$$

Da eq. (2.29) se obtém o valor de Γ_{4abcc} e a integral $I_{PS}(K, p, \mu^2, \Lambda)$ é igual à eq. (A.12). O valor do gráfico é:

$$-\frac{\lambda_4}{2} \frac{(\Delta+2)}{3} \Delta_{ab} I_{PS}(K_i, p, \mu^2, \Lambda) \quad (A.18)$$

12)



Este gráfico tem uma inserção p , duas interações λ_4 e fator de simetria $S=(4!)^2$. O seu valor é:

$$\left(\frac{\lambda_4}{4!}\right)^2 \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} (4!)^2 \Gamma_{4abcd} \Gamma_{4cdee} I_{PS}^2(K_i, p, \mu^2, \Lambda)$$

onde

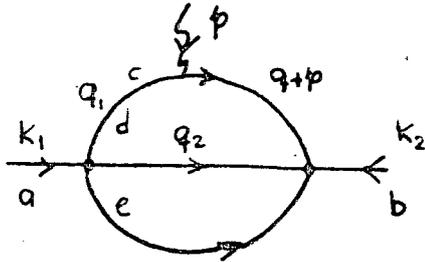
$$\Gamma_{4abcd} \Gamma_{4cdee} = \left(\frac{\Delta+2}{3}\right)^2 \Delta_{ab},$$

e a integral $I_{PS}^2 (K_i, p, \mu^2, \Lambda)$ é igual à eq. (A.14).

O valor final do gráfico é:

$$\frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{\Delta+2}{3}\right)^2 \Delta_{ab} I_{PS}^2 (K_i, p, \mu^2, \Lambda). \quad (A.19)$$

13)



Este gráfico tem inserção p , duas interações λ_4 e fator de simetria $S=2 \times (4!)^2$. O seu valor é:

$$\left(\frac{\lambda_4}{4!}\right)^2 \frac{1}{2!} \frac{1}{2!} 2 \times (4!)^2 \Gamma_{4acde} \Gamma_{4cdeb} I_{4PS} (K_i, p, \mu^2, \Lambda),$$

onde

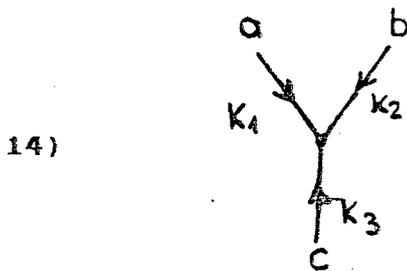
$$\Gamma_{4acde} \Gamma_{4cdeb} = \frac{(\Delta+2)}{3},$$

e a integral $I_{4PS} (K_i, p, \mu^2, \Lambda)$ é igual à eq. (A.16).

O valor final do gráfico é:

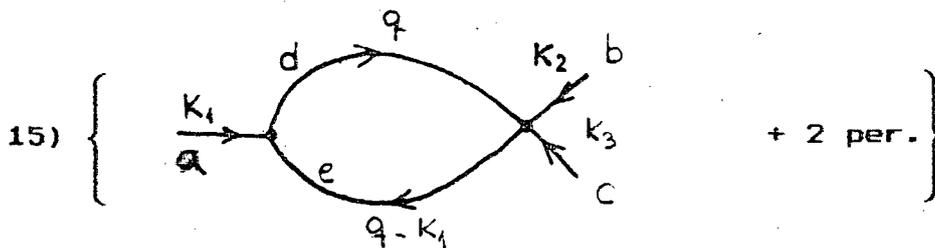
$$\frac{\lambda^2}{2} \frac{(\Delta+2)}{3} \Delta_{ab} I_{4PS} (K_i, p, \mu^2, \Lambda). \quad (A.20)$$

Pela conservação do momento total: $K_2 = - (K_1 + p)$.



Este gráfico tem uma interação λ_3 , e o fator de simetria é $S = 3!$; seu valor é:

$$-\frac{\lambda_3}{3!} 3! \Delta_{abc} . \quad (A.21)$$



Este gráfico tem uma interação λ_3 e uma λ_4 , o seu fator de simetria é $S = 3 \times 4!$, e o seu valor é:

$$\left\{ \left[-\frac{\lambda_3}{3!} \right] \left[-\frac{\lambda_4}{4!} \right] 3 \times 4! \Delta_{ade} \Gamma_{4bcde} I (K_1, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\} ,$$

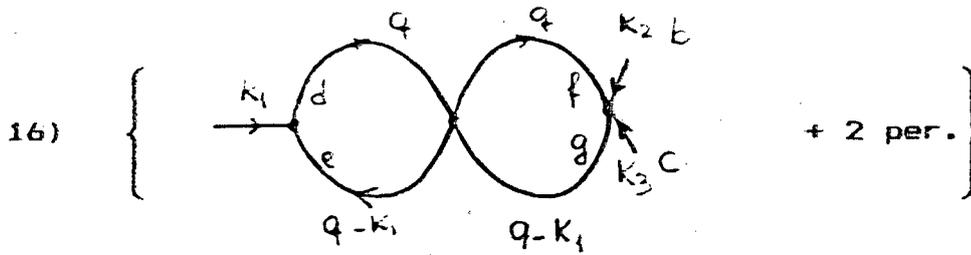
onde

$$\Delta_{ade} \Gamma_{4bcde} = \frac{2}{3} \Delta_{abc} ,$$

e a integral $I (K_1, \mu^2, \Lambda)$ é igual à integral $I (K_1 + K_2, \mu^2, \Lambda)$.

No ponto simétrico obtém-se

$$\lambda_3 \lambda_4 \Delta_{abc} I_{PS} (K_1, \mu^2, \Lambda) . \quad (A.22)$$



Este gráfico possui uma interação λ_3 e duas λ_4 , e o seu fator de simetria é $S = 3 \times (4!)^2$. O seu valor é:

$$\left\{ -\frac{\lambda_3}{3!} \left[\frac{\lambda_4}{4!} \right]^2 \frac{1}{2!} 3 \times (4!)^2 \Delta_{ade} \Gamma_{4defg} \Gamma_{4fgbc} I^2 (k_1, \mu^2, \Lambda) + 2 \text{ per.} \right\},$$

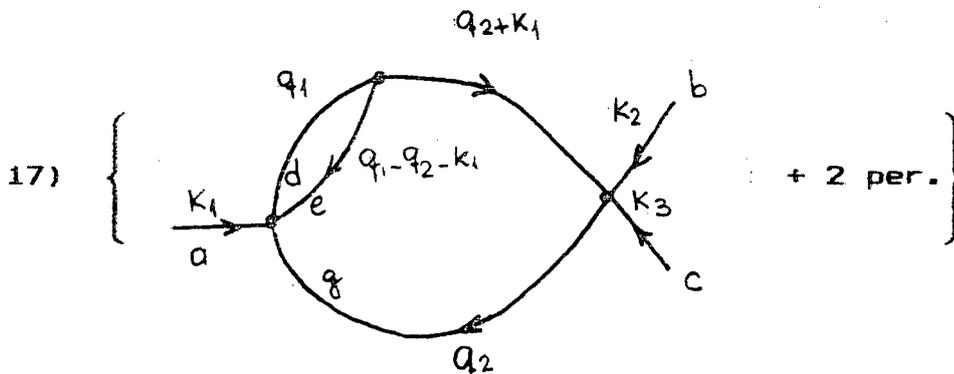
onde

$$\Delta_{ade} \Gamma_{4defg} \Gamma_{4fgbc} = \frac{4}{9} \Delta_{abc},$$

e a integral $I^2 (k_1, \mu^2, \Lambda)$ é igual à integral $I^2 (k_1+k_2, \mu^2, \Lambda)$.

No ponto simétrico vale

$$-\frac{\lambda_3 \lambda_4^2}{4} \Delta_{abc} I_{PS}^2 (k_1, \mu^2, \Lambda). \quad (\text{A.23})$$



Este gráfico possui uma interação λ_3 e duas λ_4 , e o seu fator de simetria é $S = (4!)^2 \times 3$. O seu valor é:

$$\left\{ -\frac{\lambda_3}{3!} \left[\frac{\lambda_4}{4!} \right]^2 \frac{1}{2!} (4!)^2 \times 3 \Delta_{def} \Gamma_{4adeg} \Gamma_{4fgbc} I_4 \left(K_1, \mu^2, \Lambda \right) + 2 \text{ per.} \right\},$$

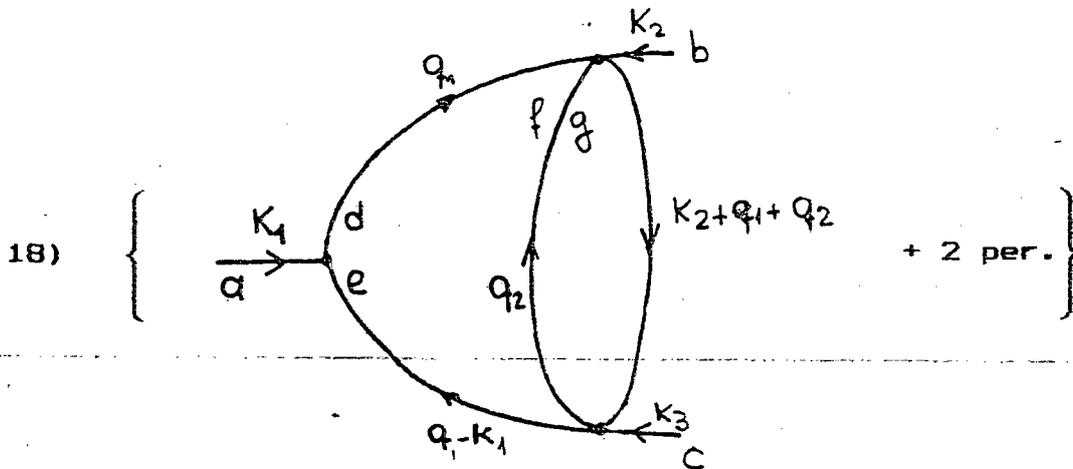
onde

$$\Delta_{def} \Gamma_{4adeg} \Gamma_{4fgbc} = \frac{4}{9} \Delta_{abc}$$

e a integral $I_4(K_1, \mu^2, \Lambda)$ é igual à integral $I_4(K_1+K_2, \mu^2, \Lambda)$.

No ponto simétrico vale

$$-\frac{2}{3} \lambda_3 \lambda_4^2 \Delta_{abc} I_{4SP}(K_1, \mu^2, \Lambda). \quad (\text{A.24})$$



Este gráfico possui uma interação λ_3 e duas λ_4 , e o seu fator de simetria é $S = (4!)^2 \times 3$. O seu valor é:

$$\left\{ -\frac{\lambda_3}{3!} \left[\frac{\lambda_4}{4!} \right]^2 \frac{1}{2!} (4!)^2 \times 3 \Delta_{ade} \Gamma_{4bdfg} \Gamma_{4cefg} I_4 \left(K_1, \mu^2, \Lambda \right) + 2 \text{ per.} \right\},$$

onde

$$\Delta_{ade} \Gamma_{4bdfg} \Gamma_{4cefg} = \frac{(\Delta+6)}{9} \Delta_{abc}$$

No ponto simétrico esse gráfico tem o seguinte valor

$$- \lambda_3 \lambda_4^2 \frac{(\Delta+6)}{6} \Delta_{abc} I_{4PS} \left(K_1, \mu^2, \Lambda \right), \quad (\text{A.25})$$

e pela conservação do momento total $K_3 = - (K_1 + K_2)$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. C. Vause and J. Sak , Phys. Rev. B 18 , 1455(1978).
2. L.J. Yu and A. Saupe , Phys. Rev. Letts. 45 , 1000(1980).
3. C. Vause and J. Sak, Phys. Letts. A 65 , 183(1978).
4. S.K. Ma, "Modern Theory of Critical Phenomena", W.A. Benjamin, 1976.
5. P.B. Vigman, A.I. Larkin and V.M. Filev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 68, 1883(1975) [Sov. Phys. - JETP 41 , 944(1976)].
6. D.J. Amit, "Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena", 2nd edition, McGraw-Hill, 1978.
7. E.F. Gramsbergen, L. Longa and W.H. de Jeu, Phys. Reports 135, No. 4, 195(1986).
8. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Statistical Physics", 3rd edition, Pergamon Press, 1980.
9. P.G. de Gennes, "The Physics of Liquid Crystals", Clarendon Press, 1974.