

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE, GERAÇÃO ADAPTATIVA DE MALHAS  
E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA OTIMIZAÇÃO DE FORMA  
EM PROBLEMAS DE CONTATO E MECÂNICA DA FRATURA

Eduardo Alberto Fancello

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSI-  
DADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISI-  
TOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

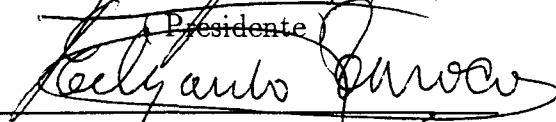
Aprovada por:



---

Prof. Raúl Antonino Feijóo, D. Sc.

(Presidente)



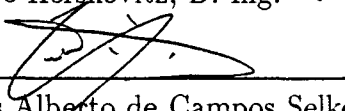
---

Prof. Edgardo Omar Taroco, D. Sc.



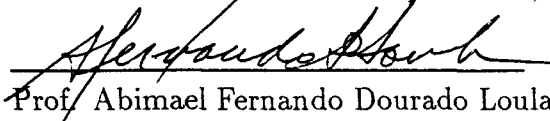
---

Prof. José Herskovitz, D. Ing.



---

Prof. Carlos Alberto de Campos Selke, Ph. D.



---

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D. Sc.



---

Prof. Luiz Carlos Martins, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
Julho de 1993

Fancello, Eduardo Alberto

Análise de Sensibilidade, Geração adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura.[ Rio de Janeiro ] 1993  
vii, 131 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D. Sc., Engenharia Mecânica, 1993)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise de Sensibilidade
  2. Geração adaptativa de Malhas
  3. Elementos Finitos
  4. Problema de Contato
  5. Otimização de Forma
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série).



## AGRADECIMENTOS

Aos Professores e amigos **Raúl Antonino Feijóo** e **Edgardo Omar Taroco** que ao longo destes anos de trabalho me insinaram várias coisas além de mecânica dos sólidos.

Ao amigo, colega de trabalho e (claro!) Professor, **Antonio Carlos Salgado Guimarães**.

Ao Prof. **José Herskovitz**, pelo apoio e por ter aceitado ser meu coorientador frente ao PEM.

Ao Prof. **Nestor Zouain Pereira** quem, entre outras coisas, intercedeu frente à COPPE para obter minha vaga como aluno de doutorado.

Ao Programa de Engenharia Mecânica, na pessoa dos Professores **Moysés Zindeluck** e **Antônio McDowell de Figueiredo**. Agradeço também às secretárias **Maysa** e **Vera**.

Ao Laboratório Nacional de Computação Científica, por ter-me fornecido lugar e recursos de trabalho ao longo destes quatro anos. Agradeço em particular a **Abílio**, **Beauclair** e **Paulo** (da gráfica).

Ao **Contribuinte Brasileiro** que através das organizações CAPES e CNPq brindou o indispensável apoio financeiro.

Aos amigos e colegas do PEM: **Alfredo**, **Lavínia**, **José Luiz**, **Gino**, ...

Aos amigos e colegas do LNCC: **Felipe**, **Adriana**, **Divino**, **Marcelo**, **Gonzalo**, **Renato**, **Regina**, **Karam**, **Bidu**, ...

A **Denise** e **Salgado**, **Liliana** e **Guillermo** (eles sabem porque!).

A **Gustavo** e **Regina**, **Néstor** e **Virginia**, **Carlos Tavares**, **Lincoln**, **David**, **John**, **Ricardo**, **Marcelo Centoya**, **Lucia**, **Claudia**, **Fernando** e **Sonia**, **Eduardo Neto**, **Kevin** e **Cristiana**, **Sra. Anne** e **Sr. Brian**, **Peter** e a todos os amigos que mesmo não nomeados aqui compartilharam esta caminhada. Muitos deles em outras latitudes, mas amigos em fim.

Agradeço profundamente a meus pais, **Juan** e **Marta**, sem cujo apoio incondicional nada disto teria sido possível.

Finalmente, agradeço a **Janet**, pelo amor e carinho sempre presentes.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências ( D. Sc.)

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE, GERAÇÃO ADAPTATIVA DE MALHAS  
E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA OTIMIZAÇÃO DE FORMA  
EM PROBLEMAS DE CONTATO E MECÂNICA DA FRATURA**

Eduardo Alberto Fancello

Julho de 1993

Orientador: Raúl Antonino Feijóo

Co-Orientadores: Edgardo Omar Taroco e José Herskovitz

Programa: Engenharia Mecânica

A determinação da dependência da solução de um modelo mecânico o de funções associadas a este em relação as variáveis envolvidas é conhecida na literatura como Análise de Sensibilidade. Uma forma de trabalhar nesta área consiste em determinar a sensibilidade diretamente sobre as equações contínuas do modelo, sendo a aproximação numérica uma consequência da utilização de técnicas de discretização sobre as expressões contínuas de sensibilidade.

Neste trabalho a análise de sensibilidade à mudança de forma é utilizada como pivô de interdisciplinaridade.

Apresenta-se como a análise de sensibilidade, a geração adaptativa de malhas de elementos finitos e a teoria de otimização podem ser integrados no desenvolvimento de dois temas centrais: determinação da geometria ótima num problema de contato, procurando obter uma distribuição quase constante das tensões na superfície de contato e formalização teórica e numérica de conceitos relacionados à mecânica da fratura tais como as integrais  $J$ ,  $L$  e  $M$  e integral de Rice.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.).

**SENSITIVITY ANALYSIS, ADAPTIVE MESH GENERATION  
AND FINITE ELEMENT METHOD IN SHAPE OPTIMIZATION  
OF CONTACT PROBLEMS AND FRACTURE MECHANICS**

Eduardo Alberto Fancello

July, 1993

Thesis Supervisor: Raúl Antonino Feijóo

Edgardo O. Taroco

José Herskovitz

Department: Mechanical Engineering

The analysis of how and how much the solution of a mechanical model depends on a set of design variables is known as Sensitivity Analysis. A powerful approach into this area is to derive sensitivity expressions directly on the continuum equations that define the mechanical model.

In this work continuum shape sensitivity analysis is focused as an interdisciplinary area.

Shape sensitivity analysis, adaptive mesh generation, finite element method and optimization theory are integrated into the development of two main topics. The first one deals with shape optimization in contact problems, where the goal is to find an appropriate shape for the contact surface providing a quasi-constant pressure distribution. The second one is related to the theoretical and numerical treatment of some fracture mechanics concepts such as  $J$ ,  $L$ ,  $M$  and Rice integrals from the point of view of shape sensitivity analysis.

# Índice

<b>1</b>	<b>PROBLEMA DE CONTATO</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Descrição do problema. Da formulação diferencial à formulação variacional	1
1.3	Problema Primal . . . . .	5
1.4	Formulação Lagrangeana ou Ponto de Sela . . . . .	10
1.5	Aproximação do Problema de Signorini por Penalização . . . . .	13
1.6	Aproximação Numérica: Método dos Elementos Finitos . . . . .	16
1.6.1	Penalização . . . . .	18
1.6.2	Lagrangeano Aumentado . . . . .	19
1.6.3	Quasi-Newton . . . . .	22
<b>2</b>	<b>GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS E ADAPTATIVIDADE</b>	<b>25</b>
2.1	Introdução . . . . .	25
2.2	Algoritmo de geração . . . . .	26
2.2.1	Definição da geometria . . . . .	26
2.2.2	Malha de Parâmetros . . . . .	27
2.2.3	Discretização dos contornos . . . . .	28
2.2.4	Triangularização do domínio . . . . .	28
2.3	Gerenciamento de dados . . . . .	31
2.4	Implementação . . . . .	33
2.4.1	Programação Orientada a Objetos . . . . .	33
2.4.2	Aranha . . . . .	34
2.5	Exemplos de geração e conclusões . . . . .	37
2.6	Adaptatividade . . . . .	41
2.6.1	Estimação do erro em elasticidade linear . . . . .	41
2.6.2	Previsão das características da nova malha. Malha de Parâmetros . . . . .	45
2.7	Da estimativa do erro à nova malha . . . . .	45
2.7.1	Exemplos . . . . .	46
2.7.2	Conclusões . . . . .	51
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE</b>	<b>53</b>
3.1	Conceitos gerais de sensibilidade . . . . .	54
3.2	Derivação de Gateaux e Fréchet . . . . .	57

3.3	Análise de sensibilidade em meios contínuos . . . . .	59
3.3.1	Introdução . . . . .	59
3.3.2	Método Direto . . . . .	61
3.3.3	Método Adjunto . . . . .	61
3.4	Sensibilidade à mudança de forma . . . . .	63
3.4.1	Descrição do problema . . . . .	63
3.4.2	Operações básicas de derivação . . . . .	66
3.4.3	Sensibilidade da função objetivo e equação de estado . . . . .	70
3.4.4	Método Direto . . . . .	72
3.4.5	Método Adjunto . . . . .	72
3.4.6	Método Lagrangeano . . . . .	73
3.5	Exemplos de sensibilidade . . . . .	74
3.5.1	Energia de deformação . . . . .	74
3.5.2	Energia de deformação total $\Pi$ . . . . .	75
3.5.3	Problema de Signorini . . . . .	77
3.6	Comentarios finais . . . . .	81
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO DE FORMA NO PROBLEMA DE CONTATO</b>	<b>83</b>
4.1	Introdução . . . . .	83
4.2	Problema de geometria ótima . . . . .	85
4.2.1	Energia de deformação total $\Pi$ . . . . .	86
4.2.2	Energia Recíproca . . . . .	88
4.3	Aproximação numérica . . . . .	90
4.3.1	Controle da geometria por B-Splines . . . . .	90
4.3.2	Elementos Finitos no problema de ótimo . . . . .	91
4.4	Algoritmo de otimização . . . . .	93
4.5	Exemplos numéricos . . . . .	98
4.6	Conclusões . . . . .	111
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA MECÂNICA DA FRATURA</b>	<b>113</b>
5.1	Introdução . . . . .	113
5.2	Apresentação do problema. Notação . . . . .	114
5.3	Direções de invariância de $\Pi$ . . . . .	115
5.3.1	Translação rígida . . . . .	115
5.3.2	Rotação Rígida . . . . .	115
5.3.3	Mudança de escala . . . . .	117
5.4	Sensibilidade de $\Pi$ em termos de integrais de fronteira . . . . .	118
5.4.1	Translação rígida . . . . .	118
5.4.2	Rotação rígida . . . . .	119
5.4.3	Mudança de escala . . . . .	119
5.5	Integral de Rice . . . . .	120
5.6	Aproximação numérica . . . . .	123
5.6.1	Aproximação por elementos finitos . . . . .	123



5.6.2 Resultados numéricos . . . . . 124  
5.7 Conclusões . . . . . 126

# Prefácio

A determinação da dependência da solução de um modelo mecânico ou de funções associadas a este em relação às variáveis envolvidas (propriedades do material, sua distribuição, propriedades geométricas, etc.) é conhecida na literatura como Análise de Sensibilidade.

Historicamente, dois caminhos conceitualmente diferentes foram adotados para se trabalhar dentro desta área.

O primeiro determina a sensibilidade de modelos discretos, obtidos, já por uma aproximação do modelo contínuo necessária para sua resolução numérica (Elementos Finitos, Diferencias Finitas, Elementos de contorno, etc) ou por serem modelos intrinsecamente discretos: (Trelças, etc.). Esta abordagem é amplamente utilizada por fornecer resultados diretamente aplicáveis aos métodos numéricos.

O segundo caminho, impulsionado principalmente pela escola francesa na década 70-80, estuda a sensibilidade das próprias equações contínuas do modelo. A aproximação numérica é consequência da utilização de técnicas de discretização sobre as expressões contínuas de sensibilidade.

Esta última alternativa possui a vantagem de situar o modelo mecânico e sua sensibilidade num mesmo nível de abstração, possibilitando um melhor estudo de suas estruturas matemáticas sem a introdução de particularizações devido à discretização. Esta propriedade resulta evidente na análise de sensibilidade à mudança de forma, quando o domínio, no caso da abordagem contínua, é uma entidade geométrica independente de qualquer discretização posterior. Na otimização de forma o objetivo consiste em melhorar certas características do sistema em estudo a partir de modificações na definição de sua geometria e não modificações em, por exemplo, uma malha de elementos finitos específica.

A formalização da sensibilidade num contexto contínuo facilita por outro lado, sua relação com áreas sem ligação aparente. Este é o caso de certos aspectos de mecânica da fratura, facilmente compreendidos sob o ponto de vista da análise de sensibilidade à mudança de forma.

Assim, a análise de sensibilidade pode ser vista como pivô de interdisciplinaridade. Este trabalho tem justamente o objetivo de apresentar como a análise de sensibilidade, a geração adaptativa de malhas de elementos finitos e a teoria de otimização podem ser integrados no desenvolvimento de dois temas centrais: determinação da geometria ótima num problema de contato e formalização teórica e numérica de conceitos relacionados à mecânica da fratura.

Desta forma, a presente monografia foi dividida como segue.

No primeiro capítulo é introduzido o problema de contato restrito a casos planos sem

atrato. Apresenta-se a formulação primal, a formulação lagrangeana e a aproximação por penalização . Esta última é utilizada no tratamento numérico do problema, utilizando técnicas de Lagrangeano aumentado.

O segundo capítulo trata do problema de geração automática de malhas apresentando um método possível e sua implementação utilizando programação orientada a objetos e técnicas de gerenciamento e classificação de dados. São apresentados conceitos de estimativa a posteriori do erro em e sua sua utilização em geração adaptativa.

O capítulo três apresenta a análise de sensibilidade no contexto contínuo e sua particularização para o caso de sensibilidade à mudança de forma. São mostradas as operações básicas de derivação e vários exemplos aplicados a formas lineares e funcionais úteis nos temas estudados posteriormente.

O capítulo quatro formula o problema de otimização de forma e sua particularização ao problema de contato. O objetivo consiste em determinar a geometria ótima da superfície em contato de forma a se obter uma distribuição quase constante das tensões sobre a mesma. Mostra-se assim como são interligados os resultados dos capítulos anteriores na resolução numérica deste problema.

Finalmente, o quinto capítulo apresenta a análise de sensibilidade à mudança de forma como meio de obter um conjunto de conhecidas leis de conservação dadas na forma de integrais independentes do caminho uma das quais é a origem a famosa integral de Rice. Mostra-se também que esta abordagem possibilita uma forma alternativa de calcular esta integral através de expressões sobre o domínio, com resultados mais precisos que a integração tradicional de fronteira.

Cada capítulo foi organizado de uma forma autocontida, com com revisão bibliográfica e conclusões próprias. Para finalizar, são apresentadas as conclusões gerais do trabalho e os aportes que se acredita terem sido realizados em cada área.

# Capítulo 1

## PROBLEMA DE CONTATO

### 1.1 Introdução

A transmissão de esforços através de simples contato entre sólidos é uma das situações mais comuns em sistemas mecânicos. Porém, as dificuldades para modelar esta condição de contorno fizeram com que a sua incorporação na análise numérica de problemas mecânicos fosse relativamente lenta, acompanhando a evolução das ferramentas teóricas e computacionais. Hoje, longe de ser um problema fechado, constitui uma importante área de discussão e pesquisa [2].

Na modelagem do problema de contato aparecem, por um lado, os inconvenientes gerados pela condição “unilateral” de contato, assim denominada por restringir os deslocamento sobre o contorno somente num sentido, através do intuitivo princípio de impenetrabilidade entre os corpos. Por outro lado, apresenta-se o fenômeno de atrito que, devido a sua complexidade física, incorpora novas incógnitas à modelagem do problema. Frente a este quadro, a estrutura matemática que na atualidade fornece melhores ferramentas para a análise e modelagem deste tipo de problemas é a teoria de inequações variacionais. A bibliografia obrigatória neste assunto inclui os trabalhos [30], [58], [15], pioneiros no desenvolvimento da mencionada teoria. Nos livros [54], [49], [64], [53], o problema de contato encontra-se formalmente descrito, e encontra-se grande número de referências sobre o tema.

Nas seguintes seções será exposta a formulação básica para o problema de contato elástico submetido a pequenas deformações em ausência de atrito. Pretende-se mostrar as denominadas formulações primal e lagrangeana, a aproximação por penalização, as relações existentes entre elas e resultados clássicos de existência e unicidade de solução.

### 1.2 Descrição do problema. Da formulação diferencial à formulação variacional

Seja uma região aberta  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ocupada por um corpo  $\mathcal{B}$  e limitada por um contorno  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$ , contínuo no sentido de Lipschitz (i.e.,  $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ ). Assume-se que o corpo

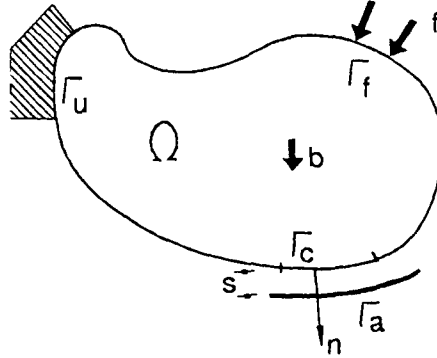


Figura 1.1

está fixo em  $\Gamma_u$ , forças de superfície  $f$  atuam sobre  $\Gamma_f$  e forças de corpo  $b$  atuam sobre o domínio  $\Omega$  (Figura 1.1).

Denomina-se  $\Gamma_c$  à parte da superfície onde o contato entre o sólido  $\mathcal{B}$  e uma superfície rígida  $\Gamma_a$  pode acontecer. Isto significa que para todo o processo de deformação a região de contato efetiva encontra-se sempre dentro de  $\Gamma_c$ . Assume-se também que as superfícies em possível contato são suficientemente planas e que as normais de ambas as superfícies são praticamente colineares, permitindo confundilas em uma única normal  $n$ . O fato de estar trabalhando dentro da teoria de elasticidade linear permite aceitar que esta normal  $n$  não sofre modificações a menos de termos de ordem superior durante o processo de deformação.

Estas considerações linearizam certas condições cinemáticas permitindo colocar o problema de contato dentro da formulação conhecida como Problema de Signorini. A expressão forte deste problema está dada pelo conjunto de equações

$$- \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{b} \quad \text{em } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (1.2)$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{em } \Gamma_f, \quad (1.3)$$

$$\sigma_t(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{em } \Gamma_c, \quad (1.4)$$

$$\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_c, \quad (1.5)$$

$$u_n - s \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_c, \quad (1.6)$$

$$\sigma_n(\mathbf{u})(u_n - s) = 0 \quad \text{em } \Gamma_c. \quad (1.7)$$

O equilíbrio no interior do corpo está dado pela primeira expressão onde  $\operatorname{div}(\cdot)$  é o operador de divergência e  $\sigma(\mathbf{u})$  é o tensor de tensões de Cauchy, dependente do deslocamento  $\mathbf{u}$  através de uma relação constitutiva elástica. A segunda e terceira expressões correspondem às condições de contorno clássicas, onde deslocamentos e forças de superfície

estão prescritas em uma parte da fronteira (Dirichlet e Neumann, respectivamente). Todas as restrições sobre a fronteira de contato estão impostas pelas equações (1.4), (1.5), (1.6), (1.7).

Em (1.4) e (1.5) denota-se  $\sigma_n$  e  $\sigma_t$  às tensões superficiais normal e tangencial atuando sobre  $\Gamma_c$ :

$$\sigma_n = \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma_t = \sigma \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n}. \quad (1.8)$$

Em (1.6), denomina-se  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  à projeção do deslocamento  $\mathbf{u}$  segundo a direção normal  $\mathbf{n}$  e  $s$  à folga (“gap”) inicial segundo a direção normal às superfícies em contato.

Assim, a ausência de atrito impõe nulidade nas tensões tangenciais (equação (1.4)) enquanto a condição unilateral está descrita pelo conjunto de equações denominadas de *complementaridade*. Estas são, na seqüência dada,

- tensões normais negativas (compressão, eq. (1.5)),
- não penetração entre os corpos (o deslocamento normal não pode superar o gap  $s$ , eq. (1.6)),
- tensões normais diferentes de zero somente possíveis em pontos de contato efetivo ( $u_n - s = 0$ , eq. 1.7).

Apesar desta maneira de formular o problema ser interessante pela fácil visualização das condições mecânicas que é preciso impor, sua análoga variacional ou *formulação fraca*, além de situar-se numa posição vantajosa no que se refere à sua aplicação a métodos numéricos, conta com uma estrutura matemática (análise convexa, análise funcional, princípios variacionais) suficientemente poderosa para facilitar o estudo de existência e unicidade de soluções, estimativa de erro, etc. A seguir, será obtida uma expressão variacional do problema de Signorini a partir da formulação forte já vista.

Como o intuito é mostrar a relação existente entre ambas formulações, serão obviados no momento aspectos tais como características dos espaços topológicos e propriedades dos operadores atuantes. Suponha-se apenas que os deslocamentos  $\mathbf{v}$  pertencem a um espaço linear normado  $\mathcal{V}$ , contendo os deslocamentos cinematicamente admissíveis, compatíveis com a restrição  $\mathbf{u} = 0$  em  $\Gamma_u$  e suficientemente regulares para que as operações feitas sobre estes elementos façam sentido:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \text{ suf. regular} : \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma_u\}. \quad (1.9)$$

Define-se também o subconjunto  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{V}$  contendo aqueles deslocamentos compatíveis com as condições na região de contato, isto é,

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : v_n - s \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}. \quad (1.10)$$

Com estas definições e dado um elemento  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  solução do problema (1.4-1.7), pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} (\text{div } \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \quad (1.11)$$

Aplicando o Teorema de Green [32, 53],

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Lembrando que  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  é solução de (1.1-1.7) e considerando a simetria do tensor  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{u})^s \, d\Omega &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por outro lado, devido a condição unilateral e à ausência de atrito, este último termo é sempre positivo. De fato,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega &= \int_{\Gamma_c} (\sigma_n(\mathbf{u}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) (v_n - u_n) \, d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) ((v_n - s) - (u_n - s)) \, d\Omega \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Finalmente, a equação (1.13) junto ao último resultado fornecem uma nova forma de escrever o problema de Signorini:

Determinar  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  tal que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{u}))^s \, d\Omega \geq \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \tag{1.15}$$

Consegue-se assim uma formulação variacional do problema de Signorini partindo das equações diferenciais originais. Porém, alguns comentários são necessários no que se refere à equivalência entre estas duas formas de descrever o problema.

Considerando que a relação constitutiva  $\mathbf{u} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$  é do tipo  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\nabla(\mathbf{u}))$ , isto é, as tensões dependem do gradiente dos deslocamentos, a operação de divergência em (1.1) exige que o elemento  $\mathbf{u}$  possua derivadas segundas contínuas em  $\Omega$  (duas vezes diferenciável) com cargas  $\mathbf{b}$  também contínuas em  $\Omega$ . Situação análoga repete-se com as cargas de superfície  $\mathbf{f}$ .

Quando para obter a formulação variacional multiplica-se a equação (1.1) por um deslocamento admissível e, através do teorema de Green, se integra por partes, a igualdade em (1.13) compara agora os valores reais obtidos por cada uma das integrais, sendo necessário que os valores das mesmas sejam finitos. Assim, usando este novo critério de igualdade, a condição de regularidade do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  é enfraquecida permitindo a resolução de problemas (carregamentos descontínuos ou concentrados, etc.) que carecem de sentido matemático na formulação “forte”.

Em suma, a formulação variacional é uma generalização do problema local ou forte na medida que, sob certas condições de regularidade, ambas soluções são equivalentes.

## 1.3 Problema Primal

Mostrado o caminho para obter a expressão variacional do problema de Signorini, pretende-se agora reescrever a mesma levando em conta as propriedades dos operadores e espaços topológicos utilizados, condições necessárias para a utilização de certos teoremas de existência de solução única.

Considere-se que o contorno  $\Gamma$  goza da propriedade

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c, \quad (1.16)$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_c = \emptyset, \quad (1.17)$$

e sejam os conjuntos

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \gamma_u(\mathbf{v}) = 0 \text{ em } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_u)\} \quad (1.18)$$

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) : \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \leq 0 \text{ em } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_c)\} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^N, \quad N = 2, 3, \quad (1.20)$$

onde  $\gamma_u$  e  $\gamma_{C_n}$  são os operadores de traço definidos por

$$\gamma_u(\mathbf{u}) : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_u), \quad (1.21)$$

$$\gamma_u(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_{\Gamma_u}, \quad (1.22)$$

$$\gamma_{C_n}(\mathbf{u}) : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_c). \quad (1.23)$$

$$\gamma_{C_n}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_{\Gamma_c} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.24)$$

Define-se também a forma bilinear simétrica

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}^s d\Omega \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (1.25)$$

$$a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (1.26)$$



onde  $\mathbf{C}$  é o tensor de elasticidade de Hooke satisfazendo as propriedades

$$C_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) : \exists M > 0 \text{ t.q. } \max_{1 \leq i,j,k,l \leq N} \|C_{ijkl}\|_{0,\infty} \leq M, \quad (1.27)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} \quad \text{a.e. em } \Omega, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \geq p \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad \forall \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^T, \quad \epsilon_{ij} \in \mathbf{R}, \quad p > 0. \quad (1.29)$$

De (1.27) e da definição de  $a(\cdot, \cdot)$ , tem-se que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq M \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad (1.30)$$

Assumindo a existência de forças de corpo  $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  e de superfície  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_f)$ , define-se a forma linear

$$f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\gamma}_f(\mathbf{v}) \, d\Gamma \quad (1.31)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_f(\mathbf{u}) : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_f), \quad (1.32)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_{\Gamma_f}, \quad (1.33)$$

da qual pode-se recuperar a propriedade

$$|f(\mathbf{v})| \leq C(\|\mathbf{b}\|_0 + \|\mathbf{f}\|_{0,\Gamma_f}) \|\mathbf{v}\|_1. \quad (1.34)$$

Denota-se  $\Pi = \Pi(\mathbf{v})$  a energia de deformação total:

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.35)$$

A partir destas definições, o problema de Signorini pode ser formulado como segue:

Determinar  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \quad (1.36)$$

ou, equivalentemente, determinar  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  tal que

$$\Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \quad (1.37)$$

Note-se que (1.36) e (1.15) são exatamente o mesmo problema variacional (muda só a notação). Pretende-se demonstrar agora a equivalência entre (1.36) e (1.37) utilizando conceitos de análise convexa e o teorema seguinte [17]:

**Teorema 1** *Seja  $K$  um subconjunto convexo fechado de um espaço linear  $V$  e seja  $F(v)$  um funcional contínuo, convexo e Gateaux-diferenciável de  $K$  em  $\mathbf{R}$  com derivada contínua  $DF$  em  $V$  (vide seção 3.2). Denotando  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto de dualidade entre  $\mathcal{V}'$ ,  $\mathcal{V}$ , as seguintes condições são equivalentes:*

$$u \text{ é um elemento minimizante de } F \text{ em } K \quad (1.38)$$

$$\langle DF(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (1.39)$$

*Prova:* Se  $K$  é convexo,  $u + \theta(v - u) \in K$ ,  $\theta \in [0, 1] \forall u, v \in K$ . Se  $u$  é elemento minimizante de  $F$ ,

$$F(u) \leq F(u + \theta(v - u)) \quad \forall v \in K, \theta \in [0, 1]. \quad (1.40)$$

Assim, para  $\theta > 0$  e considerando a G-diferenciabilidade de  $F$ ,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\theta} [F(u + \theta(v - u)) - F(u)] = \langle DF(u), v - u \rangle \geq 0. \quad (1.41)$$

Inversamente, se  $u$  satisfaz (1.39), pela convexidade de  $F(u)$ ,

$$\theta F(v) + (1 - \theta)F(u) \geq F(\theta v + (1 - \theta)u) \quad \forall v \in K, \quad (1.42)$$

$$F(v) - F(u) \geq \frac{1}{\theta} [F(u + \theta(v - u)) - F(u)] \quad \forall v \in K. \quad (1.43)$$

Tomando o limite para  $\theta \rightarrow 0$ ,

$$F(v) - F(u) \geq \langle DF(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad \square \quad (1.44)$$

Desta forma, se  $\mathbf{u}$  é elemento minimizante de  $\Pi$  em  $\mathcal{K}$ , segundo o teorema acima,

$$\langle D\Pi(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle = a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \quad (1.45)$$

sendo que, de (1.27) e das propriedades de  $f(\mathbf{u})$ ,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) \leq M\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{f}\|_1\|\mathbf{v}\|_1, \quad (1.46)$$

$$\|\mathbf{f}\|_1 = C(\|\mathbf{b}\|_0 + \|\mathbf{f}\|_{0,\Gamma_f}), \quad (1.47)$$

confirmando a equivalência (1.37)-(1.36).

Para provar a convexidade de  $\Pi(\cdot)$ , opera-se sobre a definição do funcional:

$$\Pi((1 - \theta)\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) = (1 - \theta)\Pi(\mathbf{u}) + \theta\Pi(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)a(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (1.48)$$

Por outro lado, a condição de positividade de  $\mathbf{C}$  (eq. 1.29) permite escrever

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \int_{\Omega} p \epsilon(\mathbf{v}) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, p > 0, \quad (1.49)$$

resultado que substituído em (1.48) permite obter a condição de convexidade procurada:

$$\Pi((1 - \theta)\mathbf{u} + \theta\mathbf{v}) \leq (1 - \theta)\Pi(\mathbf{u}) + \theta\Pi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.50)$$

A partir deste momento seria interessante estudar condições necessárias (e suficientes) para a existência de solução única do problema em questão. Estas são:

- **G-Diferenciabilidade de  $\Pi$  em relação a  $\mathbf{u}$**
- **Convexidade de  $\Pi$**  (Estas duas propriedades já demonstradas para provar a equivalência entre (1.36) e (1.37),
- **Coercividade de  $\Pi$ .**

Esta última propriedade é produto da denominada “Desigualdade de Korn” [63],[53],[49] que para o caso em estudo pode ser restrita ao seguinte teorema, aqui citado sem prova:

**Teorema 2** *Seja  $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ . Existe então uma constante positiva  $c > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{v}) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega \geq c \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (1.51)$$

Com este resultado e levando em conta (1.29), pode-se escrever

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq p \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{v}) \cdot \epsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega \\ &\geq p c \|\mathbf{v}\|_1^2 \\ &\geq m \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad p, c, m > 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Finalmente, de (1.34), (1.52) e da definição de  $\Pi$ ,

$$\Pi(\mathbf{v}) \geq m \|\mathbf{v}\|_1^2 - \|f\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (1.53)$$

$$\|f\|_1 = C(\|\mathbf{b}\|_0 + \|f\|_{0,\Gamma_f}), \quad (1.54)$$

com o qual se prova que o potencial  $\Pi$  é coercivo, isto é,  $\Pi \rightarrow \infty$  se  $\|\mathbf{u}\|_1 \rightarrow \infty$ .

Finalmente, comprovadas as propriedades enunciadas acima, o teorema apresentado a seguir garante existência de solução única para os problemas (1.36)-(1.37):

**Teorema 3** *Seja  $\Pi : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{R}$  o potencial de energia de deformação total definido em (1.35) e seja  $\mathcal{K}$  o cone convexo fechado (1.19) do subespaço  $\mathcal{V}$  (1.18). Seja  $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$  (Lipschitz) com  $\text{meas}(\Gamma_u) > 0$ . Existe então um único deslocamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  que minimiza  $\Pi$  em  $\mathcal{K}$ :*

$$\Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (1.55)$$

*Prova:* [10, 17] Suponha-se  $l$  o limite inferior de  $\Pi(\mathbf{v})$ . Neste caso,  $l < +\infty$ . Seja uma seqüência minimizante  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{K}$  tal que

$$l = \lim_{i \rightarrow \infty} \Pi(\mathbf{v}_i) \quad (1.56)$$

A seqüência  $\|\mathbf{v}_i\|_1$  é limitada; se não fosse, existiria uma sub-seqüência  $\mathbf{v}_{i'}$  tal que  $\lim_{i' \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_{i'}\|_1 = +\infty$ . Da hipótese de coercividade de  $\Pi(\mathbf{v})$ ,  $\lim_{i' \rightarrow \infty} \Pi(\mathbf{v}_{i'}) = +\infty \rightarrow l = +\infty$ , resultado impossível. Assim, se conclui que

$$\|\mathbf{v}_i\|_1 < M < +\infty \quad (1.57)$$

Sendo a seqüência limitada, pode-se extrair uma subseqüência  $\mathbf{v}_{i'} \in \mathcal{K}$  tal que

$$\mathbf{v}_{i'} \rightarrow \mathbf{v}^* \text{ quando } i' \rightarrow +\infty. \quad (1.58)$$

Sendo  $\mathcal{K}$  fechado,  $\mathbf{v}^* \in \mathcal{K}$ . Sendo  $\Pi(\mathbf{v})$  contínuo, o funcional é também semicontínuo inferiormente, isto é,

$$\Pi(\mathbf{v}^*) \leq \liminf \Pi(\mathbf{v}_{i'}), \quad (1.59)$$

e por tanto  $\Pi(\mathbf{v}^*) \leq l$ . Por outra parte, sendo  $l$  o limite inferior de  $\Pi(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ ,

$$\Pi(\mathbf{v}^*) = l. \quad (1.60)$$

A unicidade aparece da convexidade estrita de  $\Pi$ . Em efeito; sendo  $\Pi$  convexa (não estrita) e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  soluções do problema (1.37), o elemento  $\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}$  é também solução. Se a convexidade for estrita isto é impossível dado que de (1.50),

$$\Pi\left(\frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\right) < \frac{1}{2}(\Pi(\mathbf{u}) + \Pi(\mathbf{v})) = \alpha. \quad \square \quad (1.61)$$

Como comentário final, pode-se ver que o teorema foi restrito ao caso em que alguma parte do corpo em análise encontra-se fixo, isto é,  $\text{meas}(\Gamma_u) > 0$ , propriedade que assegura a coercividade do potencial  $\Pi$ . Assim, caso seja relaxada esta restrição uma nova condição sobre o carregamento externo deve ser agregada. Esta condição garante que o trabalho das forças externas seja negativo para todo movimento rígido pertencente a  $\mathcal{K}$ :

$$f(\mathbf{v}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{R}, \quad \mathbf{v} \neq 0 \quad (1.62)$$

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{d} \times \mathbf{x}, \text{ a.e. } \in \Omega\} \quad (1.63)$$

Resolvido o problema de unicidade e existência da solução no problema Primal e antes de continuar com a formulação Lagrangeana ou de Ponto de Sela, serão utilizados alguns parágrafos para recuperar, ainda desta formulação, uma série de conceitos interessantes. O problema de mínimo num espaço com restrições (1.37),

$$\mathbf{u} = \arg \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}} \Pi(\mathbf{v}), \quad (1.64)$$

é completamente equivalente a

$$\mathbf{u} = \arg \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} (\Pi(\mathbf{v}) + I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v})), \quad (1.65)$$

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega) \\ +\infty, & \text{se } \mathbf{v} \notin \mathcal{K}(\Omega) \end{cases} \quad (1.66)$$

O funcional  $I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v})$  é denominado Indicatriz do Convexo  $\mathcal{K}$  e possui a propriedade de tomar valor zero para todo elemento pertencente ao convexo e infinito positivo para todo elemento fora deste.

Esta forma de expressar o mesmo problema, passo inicial para abordar o problema Lagrangeano (como será visto no próximo ítem), permite também caracterizar as reações na superfície de contato.

Quando se trabalha com funções não diferenciáveis no sentido estrito, aparece o conceito de *subdiferenciabilidade* [17, 69]. Considere-se que a indicatriz é tal que

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) = I_{\mathcal{K}}(\gamma_{C_n}(\mathbf{v})), \quad \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c).$$

O elemento  $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$  pertence ao conjunto subdiferencial de  $I_{\mathcal{K}}$  em  $\mathbf{u}$  se e somente se:

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) - I_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}) \geq \langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.67)$$

Se  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  se tem que  $I_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}) = 0$ . Assim, a relação acima se cumpre então automaticamente para todo  $\mathbf{v} \notin \mathcal{K}$ . Porém, para  $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ ,

$$0 \geq \langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \quad (1.68)$$

A expressão (1.14) equivale a:

$$0 \geq \langle -\sigma_n, \gamma_{C_n}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (1.69)$$

o que permite concluir que  $\sigma_n \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$  pertence ao conjunto subdiferencial de  $I_{\mathcal{K}}$  em  $\mathbf{u}$ .

Este resultado tem um peso significativo nas formulações Lagrangeana e Penalizada que serão vistas a seguir.

Resumindo, acaba de ser apresentada a denominada formulação primal do problema de contato. Nesta formulação, a variável independente é o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , sendo todas as demais variáveis resultantes desta. Uma outra forma matemática de modelar este problema está dada pela forma conhecida como formulação Lagrangeana.

## 1.4 Formulação Lagrangeana ou Ponto de Sela

Nesta seção apresentaremos uma forma de expressar o problema de Signorini onde as variáveis independentes que aparecem na formulação não são só os deslocamentos mas também as tensões de contato sobre a superfície  $\Gamma_c$ . Com este intuito denota-se  $Q^+ \subset H^{-1/2}(\Gamma_c)$  ao sub-conjunto dos funcionais lineares sobre  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  tal que:

$$Q^+ = \{ \varphi : \langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K} \} \quad (1.70)$$

Desta forma dado  $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ ,

$$\langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle \leq 0 \quad \forall \varphi \in Q^+. \quad (1.71)$$

Pode-se apreciar que

$$\sup_{\varphi \in Q^+(\Gamma_c)} \langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{v} \in \mathcal{K} \\ +\infty, & \text{se } \mathbf{v} \notin \mathcal{K} \end{cases} = I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) \quad (1.72)$$

Como já foi visto, o problema (1.37) é completamente equivalente a:  
Determinar  $u \in \mathcal{V}$  tal que

$$\begin{aligned} u &= \arg \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{ \Pi(\mathbf{v}) + I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) \} \\ &= \arg \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \sup_{\varphi \in Q^+} \{ \Pi(\mathbf{v}) + \langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle \}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Denominando

$$\mathcal{L}(\varphi, \mathbf{v}) = \{ \Pi(\mathbf{v}) + \langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle \}, \quad (1.74)$$

a equação (1.73) apresenta as bases da formulação Lagrangeana do problema de Signorini:

Determinar o par  $(\mathbf{u}, \lambda) \in \mathcal{V} \times Q^+$  solução do problema de ponto de sela

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \varphi) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in \mathcal{V}(\Omega) \times Q^+ \quad (1.75)$$

O teorema a seguir provê o sistema de inequações que caracterizam o par  $(\mathbf{u}, \lambda)$  solução de (1.75):

**Teorema 4** *Sejam  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{Z}$  dois espaços de Banach tais que*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \subset \mathcal{V} &\quad \text{é convexo, fechado e não vazio.} \\ \mathcal{B} \subset \mathcal{Z} &\quad \text{é côncavo, fechado e não vazio.} \end{aligned} \quad (1.76)$$

*Seja também o funcional  $L(w, p)$  tal que:*

- $\forall p \in \mathcal{Z}$ ,  $w \rightarrow L(w, p)$  é  $G$ -diferenciável, estritamente convexo e semicontínuo inferiormente.
- $\forall w \in \mathcal{A}$ ,  $p \rightarrow L(w, p)$  é  $G$ -diferenciável, côncavo e semicontínuo superiormente.

*Então,  $(\bar{u}, \bar{p}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  é ponto de sela de  $L$  se e somente se:*

$$\langle D_u L(\bar{u}, \bar{p}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{A} \quad (1.77)$$

$$\langle D_p L(\bar{u}, \bar{p}), p - \bar{p} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{p} \in \mathcal{B} \quad (1.78)$$

*Prova:* Dado  $p \in \mathcal{Z}$  se tem que  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_p(w)$ . Da mesma forma, dado  $w \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_w(p)$ . A prova se obtém em forma completamente análoga ao teorema 2.1 para cada uma das funções acima. •

Considerando que os conjuntos  $\mathcal{V}$ ,  $Q^+$  e o funcional  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  possuem as propriedades mencionadas no teorema acima (observe-se que a convexidade e  $G$ -diferenciabilidade de

$\Pi(\cdot)$  com respeito a  $\mathbf{u}$  já foi provada e  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  é o resultado da soma de  $\Pi(\cdot)$  e um operador linear com  $(\mathbf{u}, \lambda)$ , o ponto de sela para o problema de contato está dado por:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \lambda) &\in \mathcal{V} \times Q^+ \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \lambda, \gamma_{C_n} \mathbf{v} - s \rangle &= f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \\ \langle \varphi - \lambda, \gamma_{C_n} \mathbf{u} - s \rangle &\leq 0 \quad \forall \varphi \in Q^+, \end{aligned} \quad (1.79)$$

denominadas *Condições de Optimalidade* do problema Lagrangeano.

Como se verá a seguir, pode-se estabelecer uma relação entre o problema primal (1.37) e o problema de ponto de sela (1.75):

**Teorema 5** *O par ordenado  $(\mathbf{w}, \lambda) \in \mathcal{V} \times Q^+$  é um ponto de sela de  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  se e somente se:*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \text{ em } \Omega; \quad \sigma_n = \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_c} = -\lambda \text{ em } \Gamma_c \quad (1.80)$$

Sendo  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$  a solução do problema (1.37).

*Prova:*

i) Suponha-se  $(\mathbf{w}, \lambda)$  ponto de sela de  $\mathcal{L}$  em  $\mathcal{V}(\Omega) \times Q^+(\Gamma_c)$  então:

$$(\mathbf{w}, \lambda) \in \mathcal{V}(\Omega) \times Q^+(\Gamma_c) : \quad (1.81)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \varphi) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda) \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in \mathcal{V}(\Omega) \times Q^+(\Gamma_c) \quad (1.82)$$

A primeira parte da desigualdade (1.82) pode ser escrita como

$$\langle \varphi - \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) - s \rangle \leq 0 \quad \forall \varphi \in Q^+. \quad (1.83)$$

Escolhendo  $\varphi = \tilde{0}$  (elemento zero em  $Q^+(\Gamma_c)$ ),  $\varphi = 2\lambda$ , e substituindo em (1.82), se obtém que

$$\langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) - s \rangle \leq 0; \quad \langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) - s \rangle \geq 0 \rightarrow \langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) - s \rangle = 0, \quad (1.84)$$

e, portanto,

$$\langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) - s \rangle \leq 0 \quad \forall \varphi \in Q^+(\Gamma_c). \quad (1.85)$$

Desta inequação e da definição de  $Q^+$  se tem que  $\mathbf{w} \in \mathcal{K}(\Omega)$ . Estes resultados substituídos na segunda parte da inequação (1.82), permitem escrever

$$\Pi(\mathbf{w}) \leq \Pi(\mathbf{v}) + \overbrace{\langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle}^{\leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega)} \leq \Pi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega), \quad (1.86)$$

indicando que  $\mathbf{w} \in \mathcal{K}(\Omega)$  é um elemento minimizante de  $\Pi$  que, pelos resultados anteriores, é único. Chega-se então a conclusão que o funcional  $\mathcal{L}(\cdot, \lambda)$  toma valor mínimo em  $\mathcal{V}$  para o elemento  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$  solução do problema (1.37). Aplicando o Teorema 1,

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - s \rangle = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (1.87)$$

resultado válido também para  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ . Subtraindo,

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + \langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) \rangle = f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (1.88)$$

Pelo teorema de Green junto à equação (1.88) chega-se finalmente a conclusão

$$\langle \lambda, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) \rangle = \langle -\sigma_n, \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - \gamma_{C_n}(\mathbf{w}) \rangle. \quad (1.89)$$

ii) Seja  $\mathbf{u}$  solução do problema (1.37) e chame-se  $\sigma_n(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_c} \in Q^+(\Gamma_c)$ . Seja o par  $(\mathbf{u}, -\sigma_n(\mathbf{u})) \in \mathcal{V}(\Omega) \times Q^+(\Gamma_c)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, -\sigma_n(\mathbf{u})) &= \Pi(\mathbf{u}) + \overbrace{\langle -\sigma_n(\mathbf{u}), \gamma_{C_n}(\mathbf{u}) - s \rangle}^{=0} \\ &\geq \Pi(\mathbf{u}) + \overbrace{\langle \varphi, \gamma_{C_n}(\mathbf{u}) - s \rangle}^{\leq 0} \quad \forall \varphi \in Q^+(\Omega) \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, -\sigma_n(\mathbf{u})) \geq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \varphi) \quad \forall \varphi \in Q^+(\Omega). \quad (1.91)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{u}, -\sigma_n(\mathbf{u})) - \mathcal{L}(\mathbf{v}, -\sigma_n(\mathbf{u})) &= \Pi(\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{v}) + \langle -\sigma_n(\mathbf{u}), \gamma_{C_n}(\mathbf{u}) - \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) \rangle, \\ &= -\frac{1}{2}a(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &\quad - \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \langle \sigma_n(\mathbf{u}), \gamma_{C_n}(\mathbf{v}) - \gamma_{C_n}(\mathbf{u}) \rangle + f(\mathbf{v} - \mathbf{u})}_{=0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}} \\ &\leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Demonstra-se assim a equivalência entre o problema primal (1.37) e o denominado problema misto ou ponto de sela (1.75).

Deve-se considerar que no problema misto,  $\mathbf{u}$  pertence ao convexo  $\mathcal{K}$  como consequência da própria formulação e não devido a condição explícita como é o caso do problema primal. Em contrapartida, esta relaxação sobre a restrição em  $\mathbf{u}$  se traduz na inclusão de uma nova variável, esta sim, restrita a um convexo ( $Q^+$ ).

É interessante ressaltar que, sendo a variável de Lagrange  $\lambda \in Q^+$  igual a tensão na região de contato  $\sigma_n$ , se conclui dos resultados anteriores que

$$\lambda \in \partial I_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}). \quad (1.93)$$

## 1.5 Aproximação do Problema de Signorini por Penalização

Uma alternativa que elimina a restrição “ $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ ” sem por isso agregar uma nova variável se consegue através de uma aproximação do problema primal conhecida como *penalização*.



A penalização, como seu nome indica, consiste em substituir a restrição explícita por um funcional penalizante cujo valor aumenta em proporção ao grau de violação da restrição relaxada. Em outras palavras, substitui-se a indicatriz  $I_{\mathcal{K}}(\mathbf{u})$  de (1.73), descontínua em  $\mathbf{u}$ , por um funcional regular  $P_\epsilon(\mathbf{u})$  que a aproxima:

$$\mathbf{u} = \arg \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{ \Pi(\mathbf{v}) + I_{\mathcal{K}}(\mathbf{v}) \} \quad (1.94)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_\epsilon = \arg \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{ \Pi(\mathbf{v}) + P_\epsilon(\mathbf{v}) \} \quad (1.95)$$

A vantagem desta mudança reside, obviamente, na regularidade do funcional  $P_\epsilon(\mathbf{v})$ . O funcional

$$\Pi_\epsilon(\mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{v}) + P_\epsilon(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.96)$$

é contínuo e regular em  $\mathcal{V}$  simplificando a determinação do elemento minimizante.

Encontra-se na literatura várias formas de efetuar a penalização; uma divisão muito utilizada categoriza as mesmas em penalizações externas e internas. Nas primeiras, o termo penalizante adota valores finitos diferentes de zero para elementos  $\mathbf{v}$  interiores ao convexo e tende a  $+\infty$  para elementos vizinhos à fronteira deste. Assim, todo elemento minimizante pertencerá sempre ao interior do convexo. No caso da penalização externa, o termo penalizante vale zero para todo elemento pertencente ao convexo e cresce em forma proporcional ao grau de violação da restrição. Uma forma bastante geral de representar um funcional penalizante externo para o problema que nos atende é a seguinte:

$$P_\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{\epsilon} P(\mathbf{u}), \quad (1.97)$$

onde  $P(\cdot)$  possui as seguintes propriedades:

- i)  $P : \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$  é semicontínuo inferiormente,
  - ii)  $P(\mathbf{v}) \geq 0$ ,  $P(\mathbf{v}) = 0$  se e somente se  $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ ,
  - iii)  $P(\mathbf{v})$  é G-diferenciável em  $\mathcal{V}$ .
- (1.98)

As propriedades de G-diferenciabilidade e coercividade de  $\Pi(\mathbf{v})$  são mantidas por  $\Pi_\epsilon(\mathbf{v})$  e, portanto, o Teorema (2.2) garante solução única de (1.95).

A alternativa, talvez mais intuitiva, entre vários possíveis termos penalizante consiste em tomar uma função da própria restrição, no presente caso,  $\gamma_{\mathcal{C}_n}(\mathbf{u}) - s \leq 0$ . Para simplificar a escrita, se adotará a notação

$$u_n \in H^{1/2}, \quad u_n = \gamma_{\mathcal{C}_n}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

$$g(\mathbf{u}) = \gamma_{\mathcal{C}_n}(\mathbf{u}) - s \leq 0.$$

Assim, o funcional  $P$  da forma

$$P(\mathbf{u}) = [g(\mathbf{u})^+]^2 = [\max(0, g(\mathbf{u}))]^2, \quad (1.99)$$

cumpra as propriedades observadas em (1.98) dado que

$$DP(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall u_n \geq s, \quad (1.100)$$

$$DP(\mathbf{u}) = 2g(\mathbf{u}) \quad \forall u_n \leq s. \quad (1.101)$$

Finalmente o funcional de penalização se escreve

$$P_\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\epsilon} [\max(0, g(\mathbf{u}))]^2, \quad (1.102)$$

Embora este funcional tenha, aparentemente, um sentido exclusivamente matemático, possui características que o vinculam com um conceito já discutido: No problema de Signorini foi comprovado que as tensões sobre a fronteira de contato (com sinal trocado) são elementos que pertencem ao conjunto sub-diferencial da indicatriz  $I_{\mathcal{K}}$ . Se o termo penalizante  $P_\epsilon$  tem a função de simular esta indicatriz, as tensões de contato (com sinal trocado) devem pertencer ao sub-diferencial deste funcional. Em efeito, sendo  $P_\epsilon(\mathbf{v})$  um funcional regular, o conjunto sub-diferencial para cada ponto  $\mathbf{v}$  possui um único elemento dado pela derivada de Gateaux nesse ponto:

$$-\sigma_n = DP_\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{\epsilon} [\max(0, g(\mathbf{u}))], \quad (1.103)$$

isto é, a tensão normal em  $\Gamma_c$  é proporcional à “penetração” entre os corpos possibilitada pela penalização. Em outras palavras, o termo penalizante introduz uma relação constitutiva na fronteira de contato vinculando tensões com deslocamentos na direção normal à mesma.

## 1.6 Aproximação Numérica: Método dos Elementos Finitos

Uma vez modelado o problema, observadas as propriedades dos operadores, características dos espaços onde transita a solução e, inclusive, existência e unicidade da mesma, o objetivo final (pelo menos para todo fim orientado à engenharia) consiste em extrair informação (soluções) destes modelos. Obviamente a complexidade dos mesmos não permite, salvo casos especiais, sua solução analítica sendo os métodos numéricos, entre eles o Método dos Elementos Finitos, a alternativa adequada. A aproximação numérica das formulações vistas consiste basicamente em reduzir o espaço de soluções (espaços de dimensão infinita) para espaços de dimensão finita. O M.E.F. caracteriza-se por fornecer em forma sistemática os elementos base cujo *span* forma o espaço aproximado (de dimensão finita) requerido. O domínio  $\Omega$  é aproximado por um domínio  $\Omega_h$  particionado em subdomínios  $\Omega_e$  (elementos finitos) formando a conhecida *Malha de Elementos Finitos*. A partição é tal que

$$\Omega_h = \cup \Omega_e, \quad \Omega_e \cap \Omega_i = \emptyset \quad \forall i \neq e, \quad (1.104)$$

$$\Omega_e \text{ é fechado e } \partial\Omega \in C^{0,1}. \quad (1.105)$$

A qualidade de uma malha pode ser caracterizada por um parâmetro  $h$  cujo valor indica o maior diâmetro de esfera inscrita nos elementos. Se diz que a malha de elementos finitos é regular se para todos os elementos, o quociente entre o diâmetro da esfera que contém o elemento e o diâmetro da esfera inscrita é limitado<sup>1</sup>.

Os espaços aproximados  $\mathcal{V}_h$  do espaço original  $\mathcal{V}$  são gerados a partir das funções base definidas sobre os elementos finitos e possuem a propriedade de serem densos nos espaços originais, isto é, dada uma família de espaços aproximados  $\mathcal{V}_h$ , onde  $\cup \mathcal{V}_h$  é em todo ponto denso em  $\mathcal{V}$ , denotando-se que “ $\mathcal{V}_h$  converge a  $\mathcal{V}$  quando  $h \rightarrow 0$ ”. Da mesma forma, a aproximação da geometria deve ser tal que  $\Omega_h \rightarrow \Omega$  quando  $h \rightarrow 0$ .

A teoria de interpolação fornece as bases matemáticas para o estudo de erro devido a aproximação. Referências neste sentido podem ser encontradas em [13],[85]<sup>2</sup>.

A classe de elementos utilizados nas aproximações numéricas deste trabalho corresponde aos elementos clássicos de elasticidade plana. Assim, utilizando a notação tradicional, os espaços e variáveis utilizadas adotam a sua expressão discreta como segue:

Seja  $M$  a dimensão de  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  e  $\mathbf{U} \in R^M$  o vetor de deslocamentos nodais associados à aproximação  $\mathbf{u}_h$ . Para um elemento “ $e$ ” da malha,

$$\mathbf{u}_h^e = \mathbf{N}\mathbf{U}^e, \quad (1.106)$$

$$\nabla \mathbf{u}_h^e = \nabla \mathbf{N}\mathbf{U}^e = \mathbf{G}\mathbf{U}^e, \quad (1.107)$$

$$\nabla^s \mathbf{u}_h^e = \nabla^s \mathbf{N}\mathbf{U}^e = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, \quad (1.108)$$

<sup>1</sup>A construção destas partições em domínios quaisquer, satisfazendo as propriedades apontadas, pertence à área que estuda técnicas de geração automática de malhas (Capítulo 2).

<sup>2</sup>Alguns destes resultados serão utilizados em técnicas de adaptatividade, também apresentadas no Capítulo 2.

$$\sigma_h^e = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}^e, \quad (1.109)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz de funções de interpolação local (a nível de cada elemento),  $\mathbf{B}$  a matriz operador de deformação e  $\mathbf{C}$  o tensor de elasticidade de Hooke. Por sua vez, o funcional  $\Pi(\mathbf{v}_h)$  adota a forma

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{v}_h) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - f(\mathbf{v}_h) = \frac{1}{2} \sum_e^{nel} [\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{U}^e - \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{U}^e] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{K}\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} \end{aligned} \quad (1.110)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global e  $\mathbf{F}$  o vetor de forças nodais equivalentes construídas a partir dos correspondentes a nível de cada elemento, isto é,

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{F}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma. \quad (1.111)$$

Denotando  $I$  o conjunto dos índices  $i, i = 1, \dots, m$  tal que  $\mathbf{x}_i$  é um ponto nodal em  $\Gamma_c$ , o espaço  $\mathcal{V}$  e o convexo  $\mathcal{K}$  podem ser aproximados por:

$$\mathcal{V}_h = \{ \mathbf{v}_h \in C(\overline{\Omega_h}) : \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_u \}. \quad (1.112)$$

$$\mathcal{K}_h = \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h : g(\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_i)) = (\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_i) - s) \leq 0, \quad i \in I \}. \quad (1.113)$$

Denomina-se também  $R_+^q$  ao vetor (de dimensão  $q$ ) cujos elementos não têm componentes negativas.

Assim, as expressões discretas equivalentes dos problemas (1.37), (1.75) e (1.95) se escrevem respectivamente,

$$\mathbf{u}_h = \arg \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{K}_h} \Pi(\mathbf{v}_h) \quad (1.114)$$

no primeiro caso,

$$\begin{aligned} &\text{Determinar } (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathbf{R}_+^q \text{ tal que} \\ &\mathcal{I}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h) \leq \mathcal{I}_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \leq \mathcal{I}_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_h), \\ &\mathcal{I}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{p}_h) = \Pi(\mathbf{v}_h) + \sum_{i \in I} g(\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_i)) p_{hi}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

no caso de ponto de sela e

$$\mathbf{u}_h = \arg \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} (\Pi(\mathbf{v}_h) + P_{ch}(\mathbf{v}_h)) \quad (1.116)$$

no caso de penalização.

Cada um destes problemas possui seu próprio conjunto de métodos de solução. No primeiro caso, trata-se de uma procura do ponto de mínimo diretamente na região viável, onde para cada passo dado a função objetivo decrece e as restrições são respeitadas. No segundo caso, o domínio de variáveis muda, dado que são incluídas (e resolvidas simultaneamente) as variáveis duais do problema ([60],[7]). Finalmente, para o último caso aparecem as técnicas de penalização, adotadas no desenvolvimento deste trabalho.

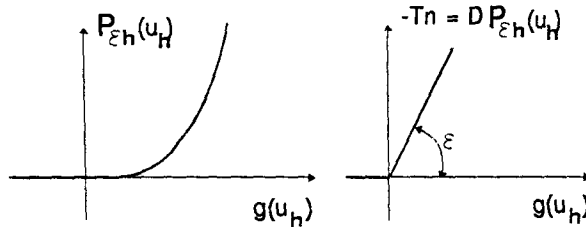


Figura 1.2 Função de penalização e sua derivada

### 1.6.1 Penalização

Como foi apontado, a penalização equivale mecanicamente a introduzir uma equação constitutiva relacionando deslocamentos e tensões superficiais na fronteira de contato. A derivada da função penalização tem o sentido físico de uma reação de contato na superfície proporcional à violação da restrição (Figura 1.2) No presente caso, a penalização adotada (1.102) e a mencionada relação constitutiva (equação (1.103)) se escrevem em forma discreta como segue:

$$P_{\epsilon h}(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{i \in I} [\max\{0; g(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i))\}]^2, \quad (1.117)$$

$$-\sigma_n(\mathbf{x}_i) = DP_{\epsilon h}(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i)) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i \in I} [\max\{0; g(\mathbf{u}_h(\mathbf{x}_i))\}]. \quad (1.118)$$

O problema de equilíbrio, isto é, a determinação do ponto de mínimo de (1.116) é feita mediante a resolução do sistema de equações que caracterizam o ponto de derivada nula, isto é, zerar o resíduo

$$\psi(\mathbf{U}) = \mathbf{KU} - \mathbf{F} - \mathbf{R}_n(\mathbf{U}) = 0. \quad (1.119)$$

Os dois primeiros termos correspondem à derivação do potencial  $\Pi(\mathbf{u}_h)$  (escrito em forma matricial) e o último o vetor de reações de contato decorrente de (1.118), não linear com os deslocamentos.

Este sistema de equações foi resolvido mediante uma técnica de Quasi-Newton cuja característica principal reside na não necessidade de determinação da derivada segunda do potencial (matriz tangente do problema ou Hessiano). O tipo de atualização utilizada corresponde à família BFGS [60, 14]. A sequência deste algoritmo encontra-se na seção 1.6.3.

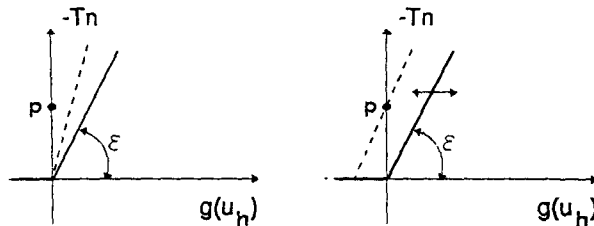


Figura 1.3 Lagrangeano aumentado

### 1.6.2 Lagrangeano Aumentado

Uma das grandes desvantagens dos métodos de penalização tradicionais como o anterior, consiste na instabilidade numérica provocada pelo mal condicionamento do sistema de equações (1.119) ao serem incorporados os termos de penalizantes. Graficamente, este método pretende atingir um ponto  $p$  da curva constitutiva “exata” por uma função contínua que se aproxima à primeira tanto quanto o fator de penalização tende a zero. Uma forma alternativa de obter o ponto  $p$  consiste em “transladar” a equação constitutiva regularizada ao invés de aumentar a inclinação da mesma (figura 1.3).

Esta explicação gráfica baseia-se na formulação denominada de Lagrangeano Aumentado que é o assunto desta seção.

Esta formulação tem suas origens em problemas de minimização de problemas com restrições de igualdade do tipo

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (1.120)$$

para os quais se constrói uma função lagrangeana da forma

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\epsilon} |\mathbf{h}(\mathbf{x})|^2, \quad (1.121)$$

sendo  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m$  um vetor de multiplicadores de Lagrange e  $\epsilon$  o fator de penalização já conhecido da formulação anterior<sup>3</sup>.

O algoritmo de minimização consiste basicamente em resolver uma sequência de  $k$  problemas da forma

$$\min_{\mathbf{x}} L^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k) \quad (1.122)$$

<sup>3</sup>Deve-se observar que se o vetor  $\boldsymbol{\lambda}$  é identicamente igual a zero, se recupera a expressão tradicional de penalização.

onde  $\{\lambda^k\}$  é uma sequência limitada em  $\mathbf{R}^m$  satisfazendo

$$\epsilon^k > \epsilon^{k+1} \quad \forall k, \quad \epsilon^k \rightarrow 0. \quad (1.123)$$

Em [7] mostra-se que as condições acima são necessárias e suficientes para afirmar que todo ponto de acumulação da sequência  $\mathbf{x}^k$  é também ponto de mínimo do problema original. A *performance* do método dependerá da eficiência do algoritmo para resolver o problema de mínimo sem restrições e da forma de atualização dos parâmetros de Lagrange  $\lambda^k$ . O caso que aqui interessa é uma extensão deste princípio para os problemas com restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Assim, opera-se sobre o vetor  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  para obter o problema

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) + z_i = 0, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1 \dots m, \end{aligned} \quad (1.125)$$

que simula a condição de igualdade do caso (1.120). Nesta nova expressão do problema, se um ponto  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_m)$  com  $z_i = \sqrt{-g_i}$  é solução de (1.124) então  $\hat{\mathbf{x}}$  é também solução do problema original (1.120). Definindo o Lagrangeano

$$\hat{L}^k(\mathbf{x}, \lambda^k, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \{ \lambda_i^k [g_i(\mathbf{x}) + z_i] + \frac{1}{2\epsilon^k} |g_i(\mathbf{x}) + z_i|^2 \}, \quad (1.126)$$

o problema (1.124) é resolvido através de uma sequência de problemas de mínimo da forma

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{z} \geq 0)} L^k(\mathbf{x}, \lambda^k, \mathbf{z}) \quad (1.127)$$

sendo a sequência  $\{\lambda^k\}$  limitada e

$$\epsilon^k > \epsilon^{k+1} \quad \forall k, \quad \epsilon^k \rightarrow 0. \quad (1.128)$$

O aspecto mais interessante reside no fato que a minimização em relação aos parâmetros auxiliares  $z_i$  pode ser efetuada em forma explícita: Seja a expressão

$$\min_{\mathbf{z} \geq 0} \hat{L}^k(\mathbf{x}, \lambda^k, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \min_{z_i \geq 0} \{ \lambda_i^k [g_i(\mathbf{x}) + z_i] + \frac{1}{2\epsilon^k} |g_i(\mathbf{x}) + z_i|^2 \}. \quad (1.129)$$

A função entre parêntesis é quadrática em relação a  $z_i$  e portanto seu mínimo (sem levar em conta a restrição) é atingido no ponto  $\hat{z}_i$  de derivada nula:

$$\begin{aligned} \lambda_i^k + \frac{1}{\epsilon^k} [g_i(\mathbf{x}) + \hat{z}_i] &= 0, \\ \Rightarrow \hat{z}_i &= -[\epsilon^k \lambda_i^k + g_i(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Devido à restrição  $z_i \geq 0$ , o mínimo adota a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{z}_i &= \max\{0, -[\epsilon^k \lambda_i^k + g_i(\mathbf{x})]\}, \\ \Rightarrow g_i(\mathbf{x}) + \hat{z}_i &= \max\{g_i(\mathbf{x}), -\epsilon^k \lambda_i^k\}. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Substituindo em (1.129) e fazendo operações simples chega-se finalmente a

$$L^k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^k) = f(\mathbf{x}) + \frac{\epsilon^k}{2} \sum_{i=1}^m \{[\max\{0; \lambda_i^k + \frac{1}{\epsilon^k} g_i(\mathbf{x})\}]^2 - [\lambda_i^k]^2\}. \quad (1.132)$$

Graficamente, a tarefa do vetor  $\boldsymbol{\lambda}^k$  consiste em produzir um deslocamento da curva de penalização. Substituindo as variáveis específicas do problema em estudo na expressão geral (1.132) se obtém

$$L^k(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}^k) = \Pi(\mathbf{v}_h) + P_{\epsilon h}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}^k) \quad (1.133)$$

onde

$$P_{\epsilon h}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}^k) = \frac{\epsilon^k}{2} \sum_{i=1}^m \{[\max\{0; \lambda_{h_i}^k + \frac{1}{\epsilon^k} g(\mathbf{v}_h(\mathbf{x}_i))\}]^2 - [\lambda_{h_i}^k]^2\}, \quad i \in I. \quad (1.134)$$

Finalmente, o algoritmo utilizado para obter o ponto de ótimo se escreve:

0. Dado  $\lambda_h^0 \geq 0, \epsilon^0 > 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$
  1. Determinar  $\mathbf{u}_h^k \in \mathcal{V}_h$  tal que
 
$$\mathbf{u}_h^k = \arg \inf \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - l(\mathbf{v}_h) + P_{\epsilon h}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_h^k) \right\},$$
  2.  $\lambda_{h_i}^{k+1} = \max\{0, \lambda_{h_i}^k + \frac{1}{\epsilon^k} g(\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}_i))\}, \quad i \in I$
  3. If  $\lambda_{h_i}^{k+1} \gamma \geq \frac{1}{\epsilon^k} g(\mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}_i)) \quad i \in I$  STOP.
- Else  
 $\epsilon^{k+1} < \epsilon^k, \quad k = k + 1, \quad \text{Goto 1.}$

O passo 1 é calculado da mesma forma que o caso de penalização tradicional através do método Quasi-Newton. Assim, no final deste passo se obtém uma configuração equilibrada  $\mathbf{u}_h^k$  para valores fixos de  $\lambda_h^k, \epsilon^k$ . A convergência global é atingida para uma configuração equilibrada cuja equação de complementaridade correspondente às condições de contato seja satisfeita dentro de uma tolerância (condição de convergência do passo 3). Nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho foi usada uma tolerância de  $\gamma = 1.0E^{-8}$ . Este processo de "ajuste iterativo" da curva de penalização tem duas consequências principais. Em primeiro lugar, o passo 3 garante a satisfação da condição de complementaridade, condição relaxada na penalização tradicional. Em segundo lugar, a convergência global se atinge com menor esforço numérico (para o mesmo nível de precisão) dado que o fator de penalização pode adotar valores numericamente compatíveis com o resto dos coeficientes



do sistema de equações. Em relação a este fator deve-se também mencionar que a atualização do mesmo no passo 3 foi decisiva para acelerar a convergência. Nos problemas deste trabalho foi utilizada a seguinte relação:  $\epsilon^{k+1} = \epsilon^k \times 0.6667$ .

A seguir mostra-se a seqüência da técnica Quasi-Newton responsável pela solução do passo 1 acima.

### 1.6.3 Quasi-Newton

Vasta é a literatura que trata sobre esta técnica; Entre outros, podem ser mencionados os trabalhos [60],[31],[7], [14]. Este método, como já foi apontado, possui a característica principal de prescindir da determinação Hessiano do problema, propriedade sumamente interessante considerando que em muitos casos este Hessiano não existe. Este situação aparece frequentemente em problemas dissipativos como o caso de atrito e o caso de elasto-plasticidade onde este algoritmo foi utilizado para sua resolução ([44],[19],[28]). No problema estudado neste capítulo, o Hessiano é bem definido é seu cálculo possível. Mesmo assim, o tratamento com o Q.N. foi mantido para facilitar o acoplamento deste tipo de condições de contorno a outros problemas não lineares como o caso apresentado em [28].

Nas referências dadas pode-se encontrar uma extensa descrição do método Quasi-Newton. O objetivo desta seção, remite-se a apresentar os passos do algoritmo utilizado. Na forma em que foi implementado, o mesmo consta de cinco etapas:

- I - Inicialização. Nesta etapa são tomados valores iniciais para o vetor de deslocamento e a matriz hessiana. No presente problema a matriz  $\mathbf{H}_0$  corresponde à matriz de rigidez da estrutura à qual foram agregados elementos lineares de “mola” associados aos graus de liberdade da fronteira de contato. O vetor  $\mathbf{U}^0$  corresponde à solução linear deste sistema. Com estes valores toma-se uma direção inicial  $\rho$ .

$$\begin{aligned} k = 0, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0, \quad \psi = \psi(\mathbf{U}) \\ \text{se } \|\psi\| \leq \epsilon \text{ stop} \\ \rho = -\mathbf{H}^0\psi \end{aligned}$$

- II - Cálculo de uma nova aproximação  $\mathbf{U}$ . Nesta etapa se realiza a procura linear, determinando o passo  $s$  que “zera” a projeção do resíduo na direção de procura.

$$\begin{aligned} |\rho \cdot \psi(\mathbf{U} + s\rho)| \leq \epsilon_L |\rho \cdot \psi(\mathbf{U})| \\ \mathbf{d} = s\rho \\ \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{d} \\ \bar{\psi} = \psi(\bar{\mathbf{U}}) \\ \text{se } \|\bar{\psi}\| \leq \epsilon \text{ stop} \end{aligned}$$

- III - Avaliação dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  do BFGS. Com o passo dado, são calculados os vetores  $\mathbf{v}^k$  e  $\mathbf{w}^k$  necessários para a atualização de  $\mathbf{H}$ .

$$\begin{aligned}\gamma \cdot \mathbf{d} &= \bar{\psi} \cdot \mathbf{d} - \psi \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{w} &= \frac{\mathbf{d}}{\gamma \cdot \mathbf{d}} \\ \mathbf{v} &= [1 + \sqrt{-s(\gamma \cdot \mathbf{d})/(\psi \cdot \mathbf{d})}] \psi - \bar{\psi}\end{aligned}$$

gravar em memória secundária  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{v}^k$  e  $\mathbf{w}$  como  $\mathbf{w}^k$ .

- IV - Cálculo de uma nova direção de procura  $\bar{\rho} = -\mathbf{H}\bar{\psi}$  onde

$$\mathbf{H} = \left[ \prod_{j=k, \dots, 0} (1 + \mathbf{w}^j \otimes \mathbf{v}^j) \right] \mathbf{H}^0 \left[ \prod_{j=0, \dots, k} (1 + \mathbf{v}^j \otimes \mathbf{w}^j) \right] \quad (1.135)$$

$$\bar{\rho} = \bar{\psi}$$

For  $j = k, (k-1), \dots, 1, 0$  do

recupera  $\mathbf{v}^j$  como  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}^j$  como  $\mathbf{w}$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} + (\mathbf{w} \cdot \bar{\rho}) \mathbf{v}$$

$$\bar{\rho} = -\mathbf{H}^0 \bar{\rho}$$

For  $j = 0, 1, \dots, (k-1), k$  do

recupera  $\mathbf{v}^j$  como  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}^j$  como  $\mathbf{w}$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} + (\mathbf{v} \cdot \bar{\rho}) \mathbf{w}$$

endfor

- V - Atualização de variáveis

$$k = k + 1, \quad \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}, \quad \rho = \bar{\rho}, \quad \psi = \bar{\psi} \quad (1.136)$$

Retorna a II.

O vetor de resíduo  $\psi(\mathbf{U})$  é obtido mediante o cálculo das forças internas (seqüência de produtos das matrizes de rigidez pelos seus respectivos deslocamentos nodais), as forças externas (dados) e as forças de contato, dependentes do deslocamento:

$$\psi(\mathbf{U}) = \mathbf{KU} - \mathbf{F} - \mathbf{R}_n(\mathbf{U}) \quad (1.137)$$

O vetor global  $\mathbf{R}_n(\mathbf{U})$  é resultado da montagem das reações de contato  $\lambda_{hi}$  calculadas segundo o passo 2 do algoritmo de Lagrangeano Aumentado.



## Capítulo 2

# GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS E ADAPTATIVIDADE

### 2.1 Introdução

A elaboração artesanal de uma malha de elementos finitos é hoje um fato quase histórico devido ao forte impulso que a área dedicada ao desenvolvimento de técnicas de geração automática de malhas tem recebido nos últimos anos. Sua importância resulta evidente quando se considera que é a malha quem fornece, em última instância, as bases das funções de interpolação. A partir deste fato, pode-se concluir facilmente que não existe formulação matemática de um problema, robusta o suficiente para resistir a uma discretização mal feita.

A etapa de pre-processamento na modelagem via elementos finitos foi, durante muito tempo, fonte de erros e perda de tempo. Este fato, associado às crescentes capacidades dos processadores numéricos tanto no referente à etapa de cálculo quanto às facilidades gráficas, pressionou o desenvolvimento desta área tentando atingir, entre outros, os seguintes objetivos:

- Separação efetiva entre a geometria do domínio de definição do problema e sua discretização (malha de elementos finitos).
- Facilidade para proporcionar malhas adequadas/adaptadas ao caso em estudo com total independência do modelamento das condições de contorno, carregamento, etc.

Estas ferramentas mobilizaram, por outro lado, o crescimento de várias linhas de pesquisa cuja existência depende do desenvolvimento de técnicas eficientes de geração automática. Dentre estas podem ser citadas:

- Estudo de estimadores de erro em diversos modelos mecânicos, dando origem a processos adaptativos. Fornecendo malhas localmente refinadas (adaptadas ao problema modelado), esta área procura soluções suficientemente precisas com o menor custo computacional possível [86], [52], [88];

- Tratamento numérico de grandes deformações. Em muitos modelos para simulação deste tipo de problemas (p.e. conformado de metais) o re-malhado na geometria deformada é passo inevitável quando o grau de deformação torna inválida a malha original [83], [84];
- Problemas de otimização de forma. Sendo a geometria objeto de controle, uma malha deve estar disponível para cada configuração, no processo (em geral iterativo) de procura da geometria ótima [81], [18], [4]

Abundante é a bibliografia disponível relativa à geração automática de malhas. Uma categorização dos métodos clássicos em duas dimensões podem ser vistas em [70], [50], enquanto o alvo atual das pesquisas na área corresponde ao desenvolvimento de geradores completamente automáticos para geometrias tridimensionais [71], [8], [5]

A seguir será apresentada uma técnica particular de geração utilizada no desenvolvimento do gerador de malhas 2D “ARANHA” [23], [24]. Deve-se ressaltar que a elaboração deste programa foi fundamental para alcançar alguns dos objetivos propostos neste trabalho e contribuiu significativamente no desenvolvimento de vários outros [57], [3], [72].

Esta técnica foi proposta inicialmente por Peraire et.al. em [66], [65] e implementada aqui com certas alterações. Um dos aspectos principais da implementação efetuada consiste no rigoroso controle da informação através de procedimentos de estruturação e classificação de dados, permitindo obter uma velocidade de geração praticamente independente do tamanho do problema. Parte da responsabilidade por esta característica deve-se também à escolha da linguagem de programação: Programação Orientada a Objetos (“Object Oriented Programming”) cujas propriedades principais são comentadas posteriormente.

## 2.2 Algoritmo de geração

Dentro de uma classificação, este algoritmo encontra-se sob a categoria das técnicas não estruturadas frontais. A denominação *não estruturada* provem do fato de que a malha não é resultado do mapeamento de uma malha prévia com estrutura e topologia fixas para o domínio de interesse e sim pelo *preenchimento* da geometria pelos elementos finitos. O termo *frontal* indica que a incorporação dos elementos dentro da geometria se produz seguindo uma frente de geração que se desloca pelo interior do domínio.

Duas classes de informação são necessárias para se trabalhar com esta técnica: a primeira trata dos dados necessários para definir a geometria do domínio. A segunda refere-se às características associadas ao tamanho e distribuição dos elementos dentro deste. Estes tópicos são tratados com detalhe nos itens a seguir.

### 2.2.1 Definição da geometria

A definição do domínio de geração através de entidades geométricas independentes das características da malha é, como foi apontado, uma propriedade necessária. Nesta

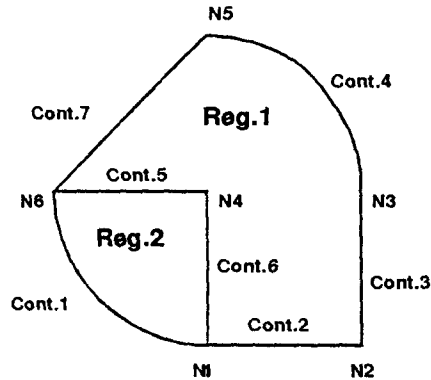


Figura 2.1 Definição de Geometria

implementação, o domínio *corpo* está formado pela junção de um número finito de *regiões*, definida por uma seqüência fechada de *contornos* (Figura 2.1) com características geométricas próprias: *retas*, *arcos* ou curvas *B-Spline*. Cada uma destas entidades estão definidas através de nós iniciais e finais e pontos de controle (*key-points*). Este conjunto de definições permitirá modelar o problema de E.F. com total independência da discretização, dado que os carregamentos e condições de contorno são aplicados sobre *regiões*, *contornos* e não em elementos de uma malha determinada.

### 2.2.2 Malha de Parâmetros

A outra qualidade comentada como desejável num processo de geração consiste na possibilidade de controlar tamanho e forma dos elementos em cada ponto da malha, isto é, o conhecimento, em cada ponto  $(x, y)$  do domínio, do tamanho e forma ideal de um hipotético elemento nesse ponto. Isto é possível definindo uma função  $MP(x)$  sobre o domínio  $\Omega$ ; em cada ponto de  $\Omega$  a função pode ser avaliada fornecendo as características de forma que um elemento finito deve ter nessa posição.

Para a construção da mencionada função, utiliza-se mais uma vez o M.E.F.; toma-se uma rede simples de elementos triangulares denominada *Malha de Parâmetros* ocupando toda a região do corpo e, nesta rede, associam-se aos nós valores que representam os parâmetros de interpolação da função  $MP(x)$  (Figura 2.2).

Os parâmetros associados a cada nó são: tamanho médio do elemento ( $\delta$ ), fator de estiramento ( $s$ ), e ângulo em que este estiramento se produz ( $\alpha$ ). Desta forma, quando são interpolados os valores  $\delta$ ,  $s$  e  $\alpha$  num ponto de  $\Omega$ , significa que o elemento a ser gerado nesse ponto deveria ter dimensão média  $s\delta$  na direção definida pelo ângulo  $\alpha$  e dimensão média  $\delta$  na direção perpendicular (Figura 2.2)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>A possibilidade de produzir elementos com um tamanho maior numa direção preferencial torna-se útil na aproximação numérica de certos problemas, em especial identificação de descontinuidades em fluidos (ver exemplos).

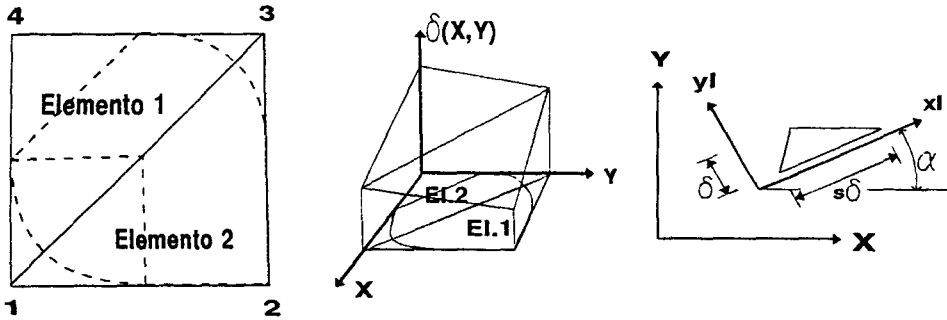


Figura 2.2 Malha de parâmetros

Estes são, em suma, todos os dados necessários para começar o procedimento de geração. Neste processo se destacam duas etapas: discretização sobre os contornos e triangularização das regiões.

### 2.2.3 Discretização dos contornos

Os dados fornecidos pela malha de parâmetros tem uma natureza vetorial; dada uma direção existe um tamanho médio de elemento associado à mesma. Desta forma, para calcular o número de nós a inserir num contorno efetua-se uma integração de linha sobre a função  $\delta_c(\lambda)$  obtida por interpolação na malha de parâmetros. Esta função determina o tamanho médio do elemento na direção tangente à curva do contorno ( $\lambda$  é a coordenada curvilínea). Assim, sendo  $L$  o comprimento do contorno, o número inteiro  $N_L \geq 1$  que mais se aproxima a  $A_L$  dado por:

$$A_L = \int_0^L \frac{1}{\delta c(\lambda)} d\lambda \quad (2.1)$$

indica a quantidade de “lados” contidos no contorno. A posição dos nós  $i$ ,  $1 \leq i \leq N_L - 1$  (os nós  $i = 0$  e  $i = N_L$  correspondem aos nós inicial e final do contorno) é calculada achando o parâmetro  $\lambda^i$  tal que:

$$i = \frac{N_L}{A_L} \int_0^{\lambda^i} \frac{1}{\delta c(\lambda)} d\lambda \quad (2.2)$$

Este procedimento é repetido até completar todos os contornos definidos. A partir deste ponto começa à triangularização propriamente dita.

### 2.2.4 Triangularização do domínio

Esta operação é feita a nível de cada região, tomando esta como um sub-domínio limitado por seus respectivos contornos.

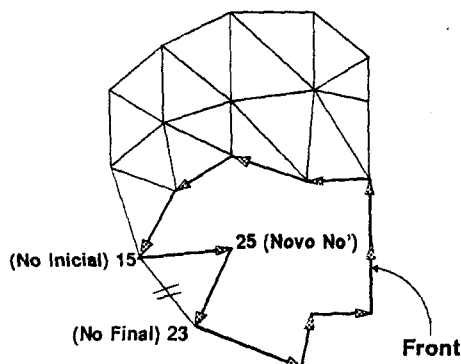


Figura 2.3 Atualização do “front”

A união dos contornos que delimitam a região compõem o *front*. Como os contornos já foram discretizados, o *front* consiste num conjunto de segmentos onde os extremos de cada um destes são os nós dos contornos calculados anteriormente. Estes segmentos são denominados *lados do front* e estão orientados de forma tal que a região a triangularizar esteja sempre a esquerda do vetor [nó inicial → nó final] de cada lado. Este conjunto de lados determina a fronteira existente entre a parte já triangularizada e a que ainda permanece “vazia”. Assim, este conjunto de lados deve ser atualizado cada vez que um triângulo seja gerado, modificando a fronteira *ativa* da região. No exemplo da Figura 2.3, o elemento de front 15 – 23 deverá ser eliminado do conjunto de front e inseridos os elementos 15 – 25 e 25 – 23. O processo de triangularização será finalizado quando o *front* se transformar num conjunto vazio.

O procedimento de geração de um triângulo consta dos passos seguintes: baseado em algum critério escolhe-se um lado do front e, no ponto médio deste lado, interpolam-se os valores  $\delta_m$ ,  $s_m$  e  $\alpha_m$ . Observe-se que os dois últimos valores indicam que o elemento a ser construído possui uma orientação preferencial. Para produzir este efeito, gera-se um triângulo o mais equilátero possível numa configuração denominada *configuração não deformada normalizada* dada pela transformação  $x_l = Fx$ , isto é:

$$\begin{pmatrix} x_l \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_m)/(\delta_m s_m) & \sin(\alpha_m)/(\delta_m s_m) \\ -\sin(\alpha_m)/\delta_m & \cos(\alpha_m)/\delta_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Calcula-se nesta configuração a coordenada de um ponto  $C$  a distância  $\delta_a$  dos nós inicial  $A$  e final  $B$  do lado escolhido, onde  $\delta_a$  está determinada pela seguinte regra procurando-se evitar triângulos inválidos ou distorcidos em excesso:

$$\delta_a = \begin{cases} 0.55\overline{AB} & \text{se } 0.55\overline{AB} > 1 \\ 1 & \text{se } 0.55\overline{AB} < 1 < 2\overline{AB} \\ \frac{1}{2\overline{AB}} & \text{se } 2\overline{AB} < 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde o valor  $\overline{AB}$  é a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  na configuração não deformada normalizada.



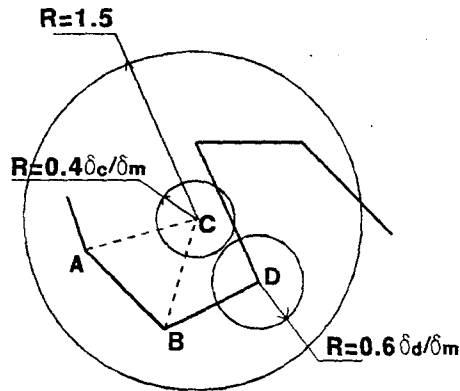


Figura 2.4 Geração de um triângulo

O próximo passo é gerar uma lista de nós pertencentes ao front, situados a esquerda do lado  $[A \rightarrow B]$ , que estejam dentro de um círculo de raio  $R$  com centro em  $C$ , ordenados segundo a menor distância ao ponto  $C$  (sempre na configuração não deformada). Esta lista é denominada *lista de nós candidatos*. Os resultados aqui apresentados utilizaram um raio  $R = 1.5$ . Monta-se uma outra lista, denominada *front ativo*, contendo os lados do front que se encontram dentro ou interceptam o círculo de raio  $R$ .

Todos os nós da primeira lista são candidatos para fechar um novo triângulo. O nó  $C$ , principal candidato, é incluído no início da lista sempre que se verificarem uma série de testes, todos estes feitos na configuração não deformada:

1. Nenhum lado do front ativo, amplificado por um fator  $f = 2$ , intercepta o círculo de raio  $r = 0.4\delta_c/\delta_m$  e centro em  $C$  onde  $\delta_c$  é o valor do tamanho médio de elemento interpolado no ponto  $C$ .
2. Nenhum nó  $N_t$  da lista de nós candidatos interpola um tamanho médio  $\delta_t$  tal que:  $0.6\delta_t/\delta_m > \overline{N_t C}$  onde  $\overline{N_t C}$  é a distância entre  $N_t$  e  $C$  (Figura 2.4). Caso algum nó cumpra esta condição, a lista de candidatos começará a partir dele.

Esta série de condições têm como objetivo determinar se a inclusão do nó  $C$  como primeiro candidato produziria incompatibilidades ou distorções dentro da malha.

Com a lista de candidatos atualizada, se tomará o primeiro nó  $N_i$  que cumpra os seguintes testes:

1. O triângulo  $ABN_i$  não contém nenhum outro nó da lista de nós candidatos.
2. Os lados  $AN_i$  e  $BN_i$  não interceptam nenhum lado pertencente a lista de front ativo.

Anteriormente foi apontada a existência de um critério para escolher o lado de front que servirá de base para gerar um elemento. Vários critérios foram testados e observou-se uma grande sensibilidade no que diz respeito ao aspecto final da malha em relação ao

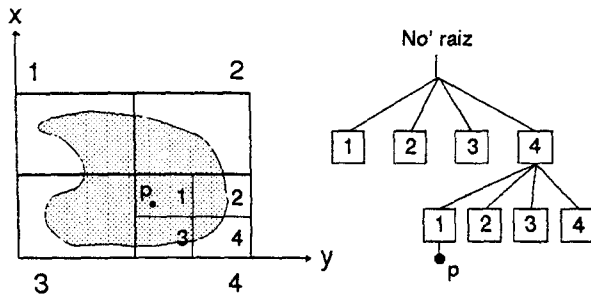


Figura 2.5 Diagrama de árvore

mesmo. Esta sensibilidade motivou a adoção do seguinte método de escolha: Define-se via entrada de dados um conjunto de *segmentos de origem*. O objetivo é construir o front e atualizar seus lados seguindo a ordem dada pela menor distância aos *segmentos de origem*. Neste front ordenado, se toma sempre o primeiro elemento como base para construir um novo triângulo. Este processo produz uma frente de geração que se expande desenhando faixas de elementos equidistantes dos mencionados segmentos.

## 2.3 Gerenciamento de dados

Como foi mencionado, um dos grandes problemas que este método enfrenta é o número de operações de pesquisa e ordenamento da informação. Quando é gerado um elemento, precisa-se um conjunto de informação local, isto é, relativo somente a uma vizinhança do mesmo. Por este motivo, se a identificação desta informação local é feita sem nenhum tipo de classificação, os tempos de geração aumentam em forma quadrática em relação ao tamanho do problema, impossibilitando a obtenção de malhas com grande número de elementos.

Uma forma de administrar racionalmente dados vinculados a uma determinada posição é a estrutura de árvore que, para o caso específico de estados planos denomina-se árvore quaternária. Um nó da árvore é uma estrutura associada a uma região retangular no plano, que pode ser dividido em quatro quadrantes. Cada quadrante ou divisão, constitui um novo nó que, por sua vez pode ser sub-dividido. Desta forma, é possível falar de *níveis* de divisão: existe um *nó raiz* que cobre todo o domínio que se pretende gerenciar, correspondente ao nível 0 e por último as denominadas *folhas* da árvore, isto é aqueles nós do último nível e que já não foram subdivididos (Figura 2.5).

Nesta estrutura, conhecida as coordenadas de um ponto  $p$  no domínio, é possível identificar rapidamente qual das folhas da árvore contém o ponto. É sobre estas folhas que se associa informação relativa à região que esta folha ocupa.

Na implementação do programa ARANHA++ foram utilizadas duas destas estruturas. Uma delas, para gerenciar informações da malha de parâmetros; a outra para o tratamento do front no processo de triangularização.

O processo de interpolação dos parâmetros de controle envolve uma pesquisa que visa determinar o triângulo que contém o ponto que se pretende interpolar. Para otimizar esta procura, se implementou a seguinte seqüência de passos:

- a) Montagem de uma árvore onde cada folha não possui mais que um nó da malha de parâmetros. Esta montagem se realiza varrendo a malha de parâmetros e inserindo seqüencialmente os nós desta. Cada vez que uma folha fica relacionada a dois nós da *MP*, se produz a subdivisão da mesma até conseguir a separação dos mencionados nós.
- b) Associar a cada folha da árvore uma lista encadeada contendo os elementos da malha de parâmetros que interceptam a folha.

Desta forma, a procura do triângulo que cobre o ponto se realiza exclusivamente entre os elementos relacionados com a folha correspondente. Observe-se que no caso de malhas de parâmetros com poucos elementos, esta estrutura não oferece grandes vantagens. Sua utilidade começa quando a malha gerada é usada como nova malha de parâmetros em processos de geração adaptativa.

Durante o processo de triangularização, pretende-se determinar quais dos elementos e nós do *front* encontram-se dentro de um círculo situado em alguma parte do domínio. O procedimento utilizado foi montar uma estrutura de árvore, prévia à triangularização, com divisões proporcionais ao tamanho do elemento correspondente àquela posição na região.

Para esta construção, procede-se como segue: em cada folha da árvore se interpola, nos seus quatro vértices, o valor  $\delta$  e denomina-se  $\delta_{min}$  o menor destes. Chama-se  $h_f$  à maior dimensão (altura ou largura) da folha. A folha é dividida sempre que  $\delta_{min} \cdot fator < h_f$ , onde *fator* é, como seu nome o indica, um fator de proporcionalidade (o valor implementado é *fator* = 7). Com este critério de divisão pretende-se relacionar cada folha a um número medianamente constante de elementos de *front*, dado que o tamanho destes depende da região envolvida.

Uma vez montada a estrutura, nas folhas desta árvore se gerenciam (isto é, procedimentos de procura, inserção, eliminação e atualização de dados) os elementos e nós do *front*. Observa-se que devido ao deslocamento do *front* durante o processo, as folhas afetadas variam constantemente. Escolhido um elemento como base e conhecendo-se o centro e o raio do círculo, é possível determinar as folhas da árvore que são afetadas e que portanto contém a informação necessária para o cálculo.

Este cuidado no que se refere à manipulação de dados permitiu passar de tempos de geração com uma lei de tempo de geração  $t = f(N\sqrt{N})$  na primeira versão do ARANHA para uma lei  $t = f(N)$  na versão atual, onde  $N$  = número de elementos gerados (ver diagrama de tempos, figura 2.10).

## 2.4 Implementação

### 2.4.1 Programação Orientada a Objetos

A característica fundamental das linguagens orientadas a objetos consiste em fornecer ao programador uma série de ferramentas para estruturar, ordenar e modularizar seu código.

O pivô central deste ferramental é a estrutura denominada *classe* através da qual podem ser agrupados, numa mesma entidade, um conjunto de dados e métodos sobre estes dados. *Classe* é a definição da estrutura e *objeto* uma variável (ou *instância*) da mesma. Assim, objetos são declarados variáveis de uma classe da mesma forma em que uma variável é declarada *integer* ou *double*. [16], [59], [82].

Desta forma, a estrutura organizacional que a Programação Orientada a Objetos fornece, assemelha-se muito à forma em que estão organizadas as abstrações matemáticas dos modelos físicos usualmente usados na mecânica computacional.

Três propriedades fundamentais caracterizam toda linguagem orientada a objetos:

#### Encapsulamento

Ao contrário das técnicas tradicionais de programação que requerem o desenvolvimento separado da estrutura de dados, operações e posterior interação, a programação orientada a objetos permite encapsular conjuntos específicos de dados e métodos, formando entidades auto-suficientes denominadas *classes*.

Toda interação entre o objeto (variável declarada como pertencente a uma classe) e o resto do programa é efetuado através de *mensagens*. Quando um objeto recebe uma mensagem executa a operação (*método*) associada a este, atuando sobre os dados do objeto. Assim, a organização dos dados, sua estrutura, posição física na memória e detalhes de implementação são alheios ao código que utiliza o objeto. Se a mensagem que ativa um método de um determinado objeto não é alterada, a implementação do mesmo pode ser modificada com total independência do resto do programa. Por outro lado, a invisibilidade dos dados de um objeto por parte do resto do código (proteção dos mesmos), proporciona confiabilidade nos resultados e facilidade na manutenção.

#### Herança

Definida uma classe, a mesma pode ser utilizada para construir *classes descendentes* que têm acesso a todos os dados e métodos do seu antecessor. Desta forma, quando um objeto recebe uma mensagem, a classe da qual este objeto é uma instância procura entre seus métodos aquele que corresponde à mensagem. Caso este não seja achado, a procura continua no seu antecessor, repetindo-se o processo até o método ser localizado.

Na etapa de implementação, esta propriedade reduz a quantidade de código a ser elaborado e, como consequência, diminui tempos de desenvolvimento e proporciona confiabilidade pela própria reutilização.

## Polimorfismo

Quando novas classes são criadas a partir de uma anterior, (herança), surge o conceito de *polimorfismo*. Através desta característica, uma única mensagem pode ser enviada a todos os membros de uma família de classes, cada uma respondendo de forma particular através de seu próprio método.

Um exemplo de polimorfismo pode ser visto num dos cálculos que nos ocupa: Discretização dos contornos. Cada tipo de contorno pode ser considerado uma classe, todos eles com um antecessor comum que será denominado **Contour**. Em todas estas classes será necessário calcular os nós do contorno sendo que cada um deles possui um algoritmo apropriado à sua geometria. Pela propriedade de polimorfismo todos esses métodos podem ser ativados pela mesma mensagem, por exemplo **CalcNodes**. Assim, o antecessor comum, neste caso **Contour**, atua como “representante” dos diferentes tipos de contornos implementados. Suponha-se um vetor definido como de classe **Contour** ao qual a cada componente do mesmo é atribuída um elemento das classes descendentes (**StrightCont**, **CircularCont**, **BSplineCont**, etc.). Quando uma componente deste vetor recebe a mensagem **CalcNodes**, esta identifica o tipo de descendente e, reconhecido o mesmo, ativa seu método particular.

A partir das propriedades mencionadas, o desenvolvimento de programas orientados a objetos pode ser levado a cabo através de três etapas:

- Determinação das classes necessárias para a análise do problema.
- Especificação da Classe. Nesta etapa são definidas as propriedades e comportamento (dados e métodos) da classe. É uma etapa abstrata, independente de sua implementação computacional.
- Implementação. Definem-se os algoritmos associados aos métodos das classes, particularidades de implementação e estrutura interna de dados. É importante ressaltar que os procedimentos associados a esta etapa podem ser modificados sem por isso alterar o comportamento da classe.

A seguir serão mostradas algumas das classes implementadas a fim de exemplificar os conceitos anteriores.

### 2.4.2 Aranha

Uma classe claramente identificável é a classe **Contour**. Esta permite a leitura da informação necessária para a definição de contornos, calcular nós interiores a este conforme a malha de parâmetros e o desenho dos mesmos. Esta classe deve ser herdada por outras classes de contornos específicos: **StrightCont**, **CircularCont**, etc.

#### a) Classe **Contour**

Como já foi dito, esta classe foi montada seguindo o esquema hierárquico: é considerada “pai” da família e contém os atributos e procedimentos comuns a todo contorno.

As diferentes geometrias que pode adotar este contorno, obriga a definir “filhos”, cada um deles com atributos e métodos próprios. O conceito de polimorfismo se faz presente através do uso dos denominados *métodos virtuais*; estes métodos são declarados na classe “pai” mas sua implementação é feita diferenciadamente para cada classe “filho”. Sejam como exemplo, dois tipos de contorno implementados: contorno reto e contorno circular. Um contorno reto se define univocamente pelas coordenadas dos nós inicial e final do mesmo; o circular deverá incluir a coordenada do centro do círculo.

As estruturas destas classes se apresentam nas seguintes tabelas:

Contour		
Dados	●INode	Nó inicial do contorno
	●FNode	Nó final do contorno
	●NumNodes	Número de nós do contorno
	●VectorNodes	Vetor com numeração dos nós do cont.
	●Length	Longitude do contorno
Métodos	●Contour	Construtor. Reserva área para o objeto
	●Graph (*)	Desenha o contorno na tela
	●Read/Print (*)	Leitura e impressão de dados da classe
	●Get/Set (*)	Atribui/retorna os valores dos dados
	●CalcNodes (*)	Calc. número e posição dos nós do contorno
	●CalcTangSize (*)	Calc. tamanho do elemento na direção tangente ao contorno

StrightCont		
Dados	●INode	Nó inicial do contorno
	●FNode	Nó final do contorno
	●NumNodes	Número de nós do contorno
	●VectorNodes	Vetor com numeração dos nós do cont.
	●Length	Longitude do contorno
	●XiN, YiN	Coordenadas do nó inicial
	●XfN, YfN	Coordenadas do nó final
	●TangVector	Vetor tangente normalizado
Métodos	●StrightCont	Construtor. Reserva área para o objeto
	●Graph (*)	Desenha o contorno na tela
	●Read/Print (*)	Leitura e impressão de dados da classe
	●Get/Set (*)	Atribui/retorna os valores dos dados
	●CalcNodes (*)	Calc. número e posição dos nós do contorno
	●CalcTangSize (*)	Calc. tamanho do elemento na direção tangente ao contorno

CircularCont		
Dados	●INode	Nó inicial do contorno
	●FNode	Nó final do contorno
	●NumNodes	Número de nós do contorno
	●VectorNodes	Vetor com numeração dos nós do cont.
	●Length	Longitude do contorno
	●XiN, YiN	Coordenadas do nó inicial
	●XfN, YfN	Coordenadas do nó final
	●AiN, AfN	Ângulo em relação ao sistema global de coordenadas dos nós inicial e final
	●XC, YC	Coordenadas do centro do círculo
Métodos	●CircularCont	Construtor. Reserva área para o objeto
	●Graph (*)	Desenha o contorno na tela
	●Read/Print (*)	Leitura e impressão de dados da classe
	●Get/Set (*)	Atribui/retorna os valores dos dados
	●CalcNodes (*)	Calc. número e posição dos nós do cont.
	●CalcTangSize (*)	Calcula tam. do elemento na direção tangente ao contorno

O símbolo (\*) indica que se trata de um método virtual declarado na classe ancestral e implementado de forma diferente na classe derivada. O método **CalcNodes** é definido como virtual na classe **Contour**. Assim, cada contorno calcula seus nós utilizando uma operação própria. A particularidade reside em que todas elas possuem o mesmo nome que o declarado na classe “pai”: **CalcNodes**.

Montado um vetor de tipo **Contour**, se atribui a cada componente deste um objeto de uma classe específica: **StrightCont**, **CircCont**, etc. Para ativar o cálculo dos nós de contorno basta fazer o seguinte “loop”:

```
for (i=0; i<NumCont; i++) VCont[i]->CalcNodes();
```

As vantagens são evidentes. Consegue-se total independência entre o procedimento geral que emite a mensagem e o procedimento que cada tipo de contorno utiliza para dar a resposta. A modificação de um destes ou a implementação de outro tipo de contorno não afeta o programa geral. Exige exclusivamente a construção destas funções virtuais para o novo contorno definido.

## b) Classe ParMesh

Um dos cálculos mais freqüentes dentro da técnica apresentada é a interpolação dos valores dados pela malha de parâmetros. Como já foi comentado, este processo requer também a identificação do triângulo que contém o ponto de interpolação. Esta administração da informação pode ser feita independentemente da geração propriamente dita, constituindo uma classe conectada com o resto do programa através dos denominados métodos públicos.

Modificações na implementação dos algoritmos de procura e cálculo dentro da classe não afetam o resto do código já utilizado. O seguinte diagrama mostra a estrutura da classe.

ParMesh		
Dados	• NumNodes	Número de nós da malha
	• NumElem	Número de elementos da malha
	• XCoor, YCoor	Coord. dos nós da malha de par.
	• PMIncid	Incidência dos elementos da malha de par.
	• Parameters	Parâmetros malha ( $\delta, s, \alpha$ )
	• QuadTreePM	“Árvore” da malha de parâmetros
	• MeshWindow	“Window” da malha de parâmetros
	• TriangWindow	“Window” do triângulo
Métodos Públicos	• ParMesh	Construtor da classe
	• Read/Print (*)	Leitura e impressão de dados da classe
	• Get/Set (*)	Atribui/retorna os valores dos dados
	• Read/Save	Lê e grava informação da classe
	• Print	Imprime dados da classe
	• Plot	Desenha malha de parâmetros
	• GetParXY	Retorna valor dos parâmetros para uma coordenada X,Y dada
	• GetParNode	Retorna valor dos parâmetros para a posição de um nó dado
Métodos Privados:	• BuildQuadTree	Constroi a árvore de gerenciamento
	• BuildListPar	Constroi lista de par. associados à árvore
	• etc.	

## 2.5 Exemplos de geração e conclusões

A seguir são apresentadas algumas malhas geradas a fim de mostrar a potencialidade do gerador assim como um diagrama de tempos em função do número de elementos gerados.

Como foi apontado na introdução, o grau de utilização atual do MEF em problemas reais da engenharia, faz imprescindível o uso de geradores automáticos capazes de lidar com malhas de vários milhares de elementos. Por outra parte, o desenvolvimento de técnicas de gerenciamento eficiente de dados neste tipo de problemas é passo indispensável para uma extensão a domínios tridimensionais que não esteja limitada a problemas exclusivamente acadêmicos.

Neste sentido, o método frontal aqui empregado, juntamente com a classificação da informação (obtidas através das técnicas de árvore quaternária, listas e seus métodos) assim como a escolha da linguagem, permitiu obter os seguintes resultados:

a) Desempenho computacional linear com respeito ao tamanho (número de elementos gerados) da malha. Este comportamento é mantido ainda para um número elevado de elementos (ver Figura 2.10).



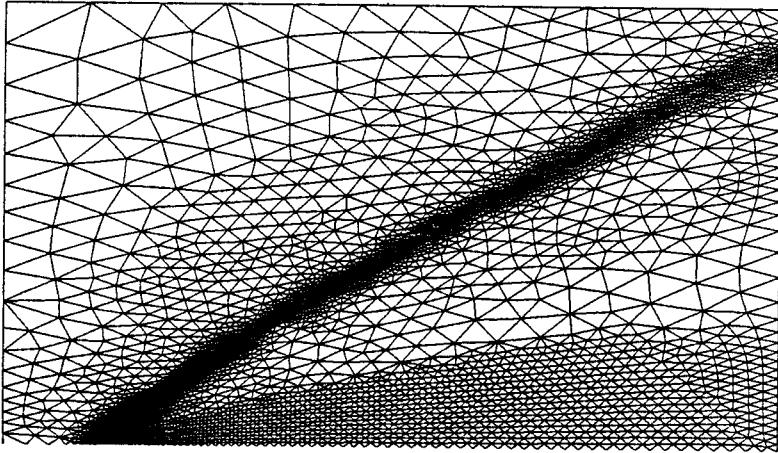


Figura 2.6 Malha para problemas escoamento supersônico sobre placa.

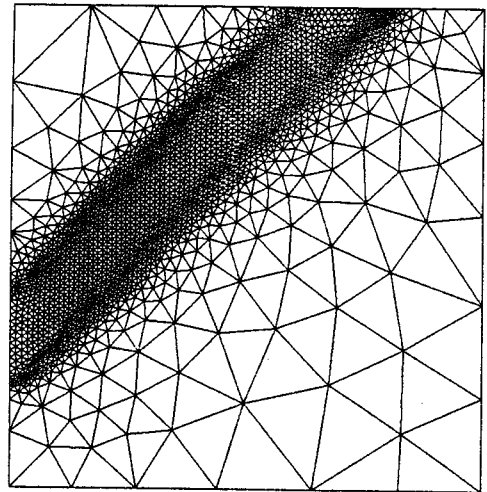
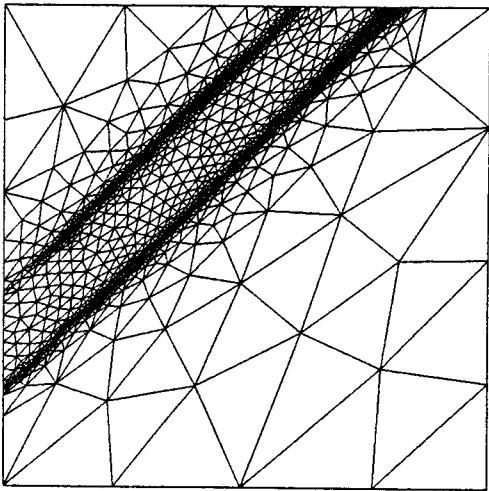


Figura 2.7 Malhas para problemas de transporte predominante convectivo. a) com estiramento, b) sem estiramento

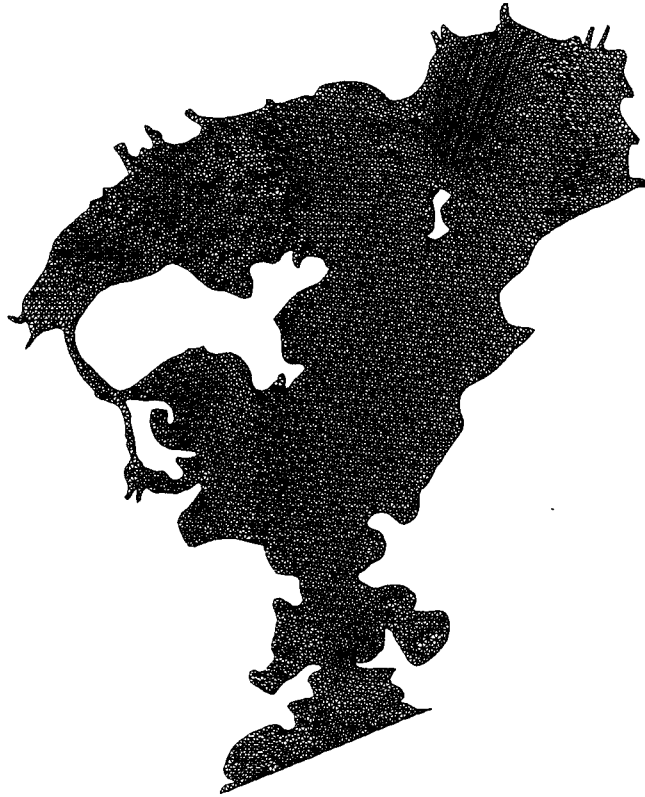


Figura 2.8 Geometria da baía de Guanabara, R.J.

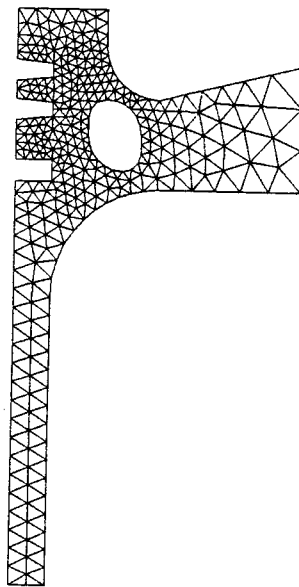


Figura 2.9 Perfil de pistão

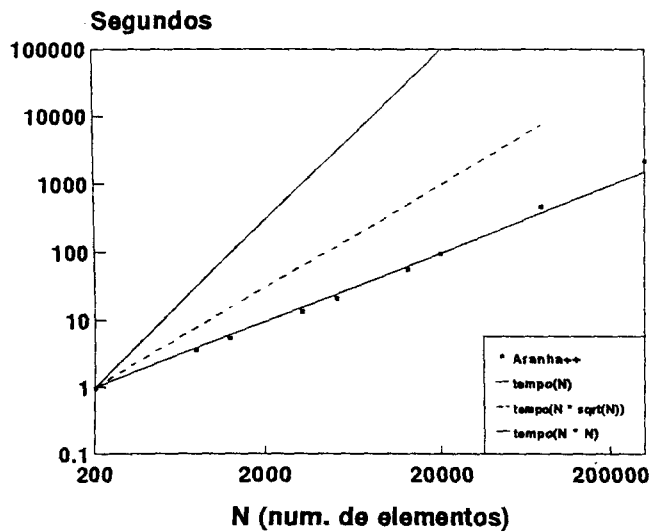


Figura 2.10 Tempos de geração

b) Grande flexibilidade para trabalhar com domínios complicados e com variação do tamanho e forma dos elementos, sendo que estas variações podem ser controladas com relativa facilidade através da malha de parâmetros (ver figuras 2.6, 2.7, 2.8, 2.9). Esta característica, como poderá ser apreciado a seguir, é fundamental na análise adaptativa via FEM.

Em relação à programação orientada a objetos deve-se ressaltar que sua aplicação correta conduz a uma série de resultados importantes [29]: O primeiro é a modularidade e reutilização do código, alcançados com maior facilidade em POO que com linguagens tradicionais. Uma classe aparece para o usuário como uma espécie de *caixa preta* à qual se tem acesso somente através de seus métodos. A manutenção dos programas se vê facilitada, a partir da separação entre especificação e implementação das classes. Modificações na implementação, desde que respeitadas as especificações, não afetam o comportamento das mesmas e, portanto, não introduzem alterações no corpo dos programas aplicativos desenvolvidos. Finalmente, a confiabilidade nos resultados é consequência das propriedades apontadas.

Pode-se concluir que a implementação de programas de grande porte empregando técnicas (e linguagens) de POO resulta em códigos menores, e proporciona um gerenciamento de dados e métodos melhor e mais eficiente que seus correspondentes em linguagens tradicionais.

## 2.6 Adaptatividade

Muitos esforços têm sido dedicados à automação de processos de projeto envolvendo análise numérica por elementos finitos, com o objetivo final de diminuir as exigências de conhecimentos prévios sobre o problema analisado e de experiência do analisador ou projetista. O grau de automação destes processos foi aumentando progressivamente na medida em que foi evoluindo o desenvolvimento em áreas tais como teoria de otimização, análise de sensibilidade, geração automática de malhas, estimativa de erro, visualização de resultados, etc. Nesta seção serão tratados alguns conceitos correspondentes à junção de dois dos itens acima mencionados: Estimativa de erro e geração automática de malhas, ambos orientados à geração adaptativa.

Mediante geração adaptativa pretende-se fornecer malhas de elementos finitos adequadas ao problema em estudo, no sentido que o erro cometido na aproximação seja uniforme e não superior a um valor solicitado. Este tipo de adaptação é conhecida na literatura como de tipo “h”, nos quais, a partir de uma análise e, mediante a estimativa do erro cometido na aproximação (*a priori* ou *a posteriori* da análise), se faz uma previsão da malha a ser utilizada para ajustar o erro na solução a um valor admissível.

Assim, nestes procedimentos podem ser diferenciadas duas etapas. A primeira corresponde ao estabelecimento de estimadores de erro cometido na aproximação, etapa completamente dependente do tipo de problema, tipo de elementos utilizados, etc. A segunda se relaciona com as diferentes formas de utilizar o erro estimado no estabelecimento de uma nova malha.

Aproveitando as facilidades oferecidas pela técnica de geração apresentada, serão apresentados alguns resultados de geração adaptativa. O primeiro passo será mostrar o critério utilizado para obter uma estimativa local do erro após a análise. O segundo será descrever sua utilização no contexto do gerador ARANHA.

### 2.6.1 Estimação do erro em elasticidade linear

Os problemas aqui tratados correspondem a equações variacionais do tipo

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{V} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $a$  é uma forma bilinear e coerciva ( $\mathcal{V}$ -elíptica), propriedades que asseguram existência e unicidade da solução  $\mathbf{u}$  (teorema de Lax-Milgram). A solução aproximada obtida pelo método dos Elementos Finitos cumpre a igualdade

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{V}_h$  é o espaço das funções base da discretização adotada. Considerando que o domínio do problema exato e do problema aproximado coincidem e assumindo que  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  a

equação (2.5) é válida para todo  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$ . Assim, da diferença entre (2.5) e (2.6) se tem que

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h. \quad (2.7)$$

Denominando  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  o erro cometido pela aproximação, pode-se ver que este valor é ortogonal à aproximação efetuada.

No caso de elasticidade, a forma bilinear  $a$  corresponde à operação

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{w}^s d\Omega, \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor de elasticidade de Green e  $\nabla \mathbf{u}^s$  é o tensor de deformação associado ao problema.

Considerando que devido à relação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s, \quad (2.9)$$

pode-se reescrever (2.8) como segue:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) d\Omega. \quad (2.10)$$

As propriedades da forma  $a$  permitem utilizá-la como uma norma, denominada norma energia:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= (a(\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\Omega} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Desta forma, dada a solução exata  $\mathbf{u}$ , a solução aproximada  $\mathbf{u}_h$  e as respectivas tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_h$ , se obtém:

$$\|\mathbf{u}\| = (a(\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

$$\|\mathbf{u}_h\| = (a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h))^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega \right)^{1/2}, \quad (2.13)$$

$$\|\mathbf{e}\| = (a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Naturalmente, a solução exata  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  não é conhecida. Por esta razão, calcula-se uma *estimativa* do erro cometido mediante a utilização de uma tensão  $\boldsymbol{\sigma}^*$  que, sob algum critério, produz uma aproximação melhor de  $\boldsymbol{\sigma}$  que o valor  $\boldsymbol{\sigma}_h$ . Este critério será discutido posteriormente.

Assim, a norma estimada do erro cometido está dada por

$$\|\mathbf{e}\| = \left( \int_{\Omega} \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \right)^{1/2}. \quad (2.15)$$

No trabalho [87] se inclui um fator empírico de correção do erro estimado que depende do tipo de elemento. Este fator vale  $f = 1.3$  para triângulos lineares e  $f = 1.4$  para triângulos quadráticos. Assim,

$$\|\mathbf{e}\| := \|\mathbf{e}\| \cdot f. \quad (2.16)$$

Para adimensionalizar os valores das normas, calcula-se o quociente do erro sobre a norma de energia:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|}{(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2)^{1/2}} \quad (2.17)$$

Este valor indica o erro percentual em termos globais. Porém, um dos objetivos da adaptatividade é garantir uniformidade do erro, isto é, pretende-se que em *todo* elemento da malha o erro não supere um valor pré-estabelecido. Este erro elementar solicitado é calculado da seguinte forma. Seja  $\eta_{ad}$  a percentagem de erro máxima solicitada (admissível) e  $e_{ad}^e$  o erro elementar máximo admissível. Se todos os elementos da malha possuísem este erro teremos que

$$\begin{aligned} \eta_{ad} &= \frac{(m\|\mathbf{e}_{ad}^e\|^2)^{1/2}}{(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{m}\|\mathbf{e}_{ad}^e\|}{(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\|\mathbf{e}_{ad}^e\| = \eta_{ad} \frac{(\|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathbf{e}\|^2)^{1/2}}{\sqrt{m}} \quad (2.19)$$

onde  $m$  é o número de elementos da malha.

Assim, para cada elemento calcula-se a diferença entre o valor de erro estimado na análise e o desejado:

$$\xi^e = \frac{\|\mathbf{e}^e\|}{\|\mathbf{e}_{ad}^e\|} \quad (2.20)$$

Antes de apresentar a maneira em que este valor é utilizado para prever uma nova malha, retornamos a uma aspecto importante já mencionado. Um dos pontos chave na estimativa de erro reside no critério utilizado para estabelecer um novo valor de tensão que melhora, em alguma medida, o valor obtido pela aproximação, sem que este cálculo implique um custo equivalente à própria análise.

Uma escolha possível consiste em assumir um campo de tensões proveniente da utilização das mesmas funções de interpolação que as utilizadas para os deslocamentos:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*. \quad (2.21)$$

Assim, determinam-se valores nodais  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$  tais que produzam o menor valor do seguinte funcional (mínimos quadrados):

$$\mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^2 d\Omega. \quad (2.22)$$

A condição de mínimo é:

$$\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h) \cdot \mathbf{N} \hat{\sigma} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\sigma} \in \mathbf{R}^n, \quad (2.23)$$

ou, equivalentemente a resolução do sistema

$$\mathbf{M} \bar{\sigma}^* = \mathbf{F}, \quad (2.24)$$

onde  $n$  é o número de nós e

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad ; \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \sigma_h d\Omega. \quad (2.25)$$

Resolver o sistema assim como apresentado significa violar a restrição sobre o custo numérico do estimador de erro. Uma forma de enfrentar este problema consiste em tomar algum critério para trabalhar com uma matriz de massa diagonal ao invés da matriz consistente  $\mathbf{M}$  [51].

Um critério válido é adotar a diagonalização por quadratura nodal, isto é, os pontos de integração são tomados acima dos nós. Desta maneira se produz uma diagonalização automática da matriz de massa no momento que a única função de forma com valor diferente de zero é a própria função do nó em questão, com valor igual à unidade. Assim, se obtém para cada elemento:

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j d\Omega \\ &= \sum_{p=1}^{N_p} \varphi_i(p) \varphi_j(p) W(p) \det J. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dado que o ponto de integração  $p$  é um nó do elemento temos que:

$$\begin{aligned} M_{ii}^e &= W(i) \det J(i) \quad i = 1, nn \\ M_{ij}^e &= 0 \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $nn$  é o número de nós do elemento. Analogamente, as forças equivalentes podem ser escritas como:

$$F_i^e = \sigma_h(i) W(i) \det J(i). \quad (2.28)$$

No caso dos elementos triangulares lineares, o determinante do Jacobiano é igual a duas vezes a área do elemento. Assim, os elementos da matriz diagonal  $\mathbf{M}$  são, em cada grau de liberdade correspondente a um nó, proporcionais ao somatório das áreas dos elementos a este nó relacionados. Da mesma forma, os elementos do termo independente são, em cada grau de liberdade de um nó, proporcionais ao somatório do produto da área pela tensão nodal de cada elemento convergente ao nó.

No caso de elementos triangulares quadráticos, o determinante do Jacobiano não é mais constante no elemento. Porém, considerando que se utilizam elementos de boa qualidade em relação à forma, o mesmo critério de aproximação pode ser adotado.

## 2.6.2 Previsão das características da nova malha. Malha de Parâmetros

Através da equação (2.20) obteve-se um valor  $\xi_e$ , isto é, uma medida da relação entre a exatidão requerida e a obtida no elemento que permitirá estimar uma nova distribuição de tamanhos na malha, necessária para obter um erro uniforme.

Da teoria de erro em elementos finitos é bem conhecido que o erro da aproximação, admitindo ausência de descontinuidades na solução, está acotado segundo a seguinte expressão:

$$\|e\| \leq \alpha h^p, \quad (2.29)$$

onde  $h$  é o tamanho do elemento e  $p$  a ordem das funções de interpolação. Caso o problema analisado possua singularidades ou descontinuidades, o expoente  $p$  varia [88]. Desta forma, escreve-se a expressão elementar da equação (2.20) como:

$$\xi^e \simeq \frac{\alpha (h^e)^p}{\alpha (h_{new}^e)^p}, \quad (2.30)$$

$$\rightarrow h_{new}^e = \frac{h^e}{\xi_e^{1/p}}. \quad (2.31)$$

Destas duas últimas expressões pode-se notar que para valores  $\xi > 1$ , o novo tamanho de elemento previsto  $h_{new}$  será menor que o anterior. O contrário acontecerá para valores de  $\xi < 1$ .

Com o intuito de evitar crescimentos excessivos nos elementos, o que pode ocasionar malhas de baixa qualidade e favorecer a obtenção de valores de erro sempre menores que o admissível, foi introduzido um “amortecimento” no crescimento dos elementos, isto é quando o valor de  $\xi$  é menor que 1. Neste caso se faz:

$$\xi := \xi + \frac{(1 - \xi)}{2}. \quad (2.32)$$

O elemento, portanto, não crescerá mais que  $2^{1/p}$  vezes o seu tamanho por iteração.

Resumindo, cada elemento da malha analisada possui um novo valor de tamanho de elemento previsto, função do erro cometido no mesmo. Transportando estes valores elementares aos nós, mediante uma técnica análoga ao caso das tensões, obtem-se uma função contínua no domínio de análise, definido por valores nodais na malha. Dado um ponto qualquer no domínio, é possível determinar o tamanho teórico previsto de um elemento nesse ponto, através de interpolação dos valores nodais do elemento que contem o ponto.

## 2.7 Da estimativa do erro à nova malha

Na seção anterior foi obtido um dos dados fundamentais para a técnica empregada no gerador ARANHA: uma malha de elementos finitos a cujos nós está associada informação



relativa a tamanho ideal de elementos a serem gerados. Esta definição corresponde, portanto, à definição dada para a Malha de Parâmetros na seção 2.2.2.

O processo adaptativo utilizado consiste, então, nos seguintes passos:

1. Definição de geometria e Malha de Parâmetros inicial (geralmente com tamanho de elementos uniforme).
2. Geração segundo a Malha de Parâmetros.
3. Análise do problema: Obtenção das tensões aproximadas  $\sigma_h$ .
4. Estimativa do erro.
5. Caso o erro estimado seja inferior ao erro admissível, fim do processo. Caso contrário,
6. Atribuição dos valores de tamanho de elemento previsto nos nós da malha analisada e definição desta malha como nova Malha de Parâmetros.
7. Retorna a 2.

O critério de fim de processo variará segundo as exigências do usuário em relação ao valor do erro.

A seguir são mostrados alguns exemplos, produto da implementação do critério acima descrito [20].

## 2.7.1 Exemplos

### Exemplo 1

Tem-se no primeiro exemplo, uma placa de espessura unitária com um furo no meio submetida a tração. Por condição de simetria, analisa-se só a metade da peça utilizando a hipótese de estado plano de tensões e elementos isoparamétricos de três nós. As características do material são  $E = 1000$ ,  $\nu = 0.3$  e  $Espessura = 1.0$ . O carregamento distribuído foi de  $P = 1.0$  (Figura 2.11). Apresentam-se dois ciclos de adaptatividade a partir de uma malha inicial, sendo o erro admissível solicitado de 15% ( $\eta = 0.15$ ). Os erros percentuais obtidos são, em geral, inferiores ao solicitado devido ao limite imposto ao crescimento de alguns elementos. Resultados em figuras 2.12, 2.13, 2.14.

### Exemplo 2

O segundo exemplo trata-se de um tubo de paredes grossas, submetido a pressão interna. A hipótese de análise é estado plano de deformações sendo solicitado um erro admissível de 15% ( $\eta = 0.15$ ). As características do material e carregamento são:  $E = 1000$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $P = 1.0$  (ver figura 2.15). Resultados em figuras 2.16 e 2.17.

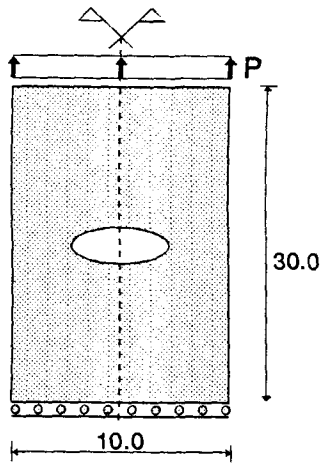


Figura 2.11 Exemplo 1

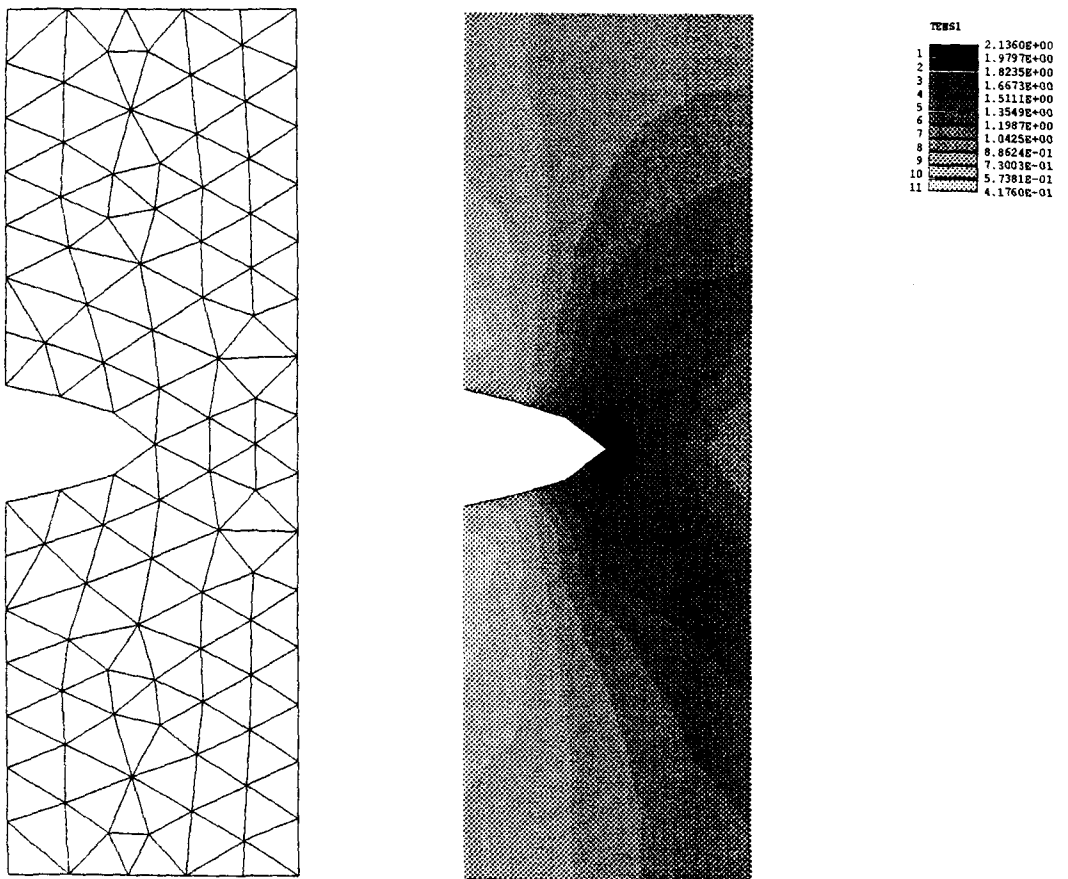


Figura 2.12 Malha Original: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.198$

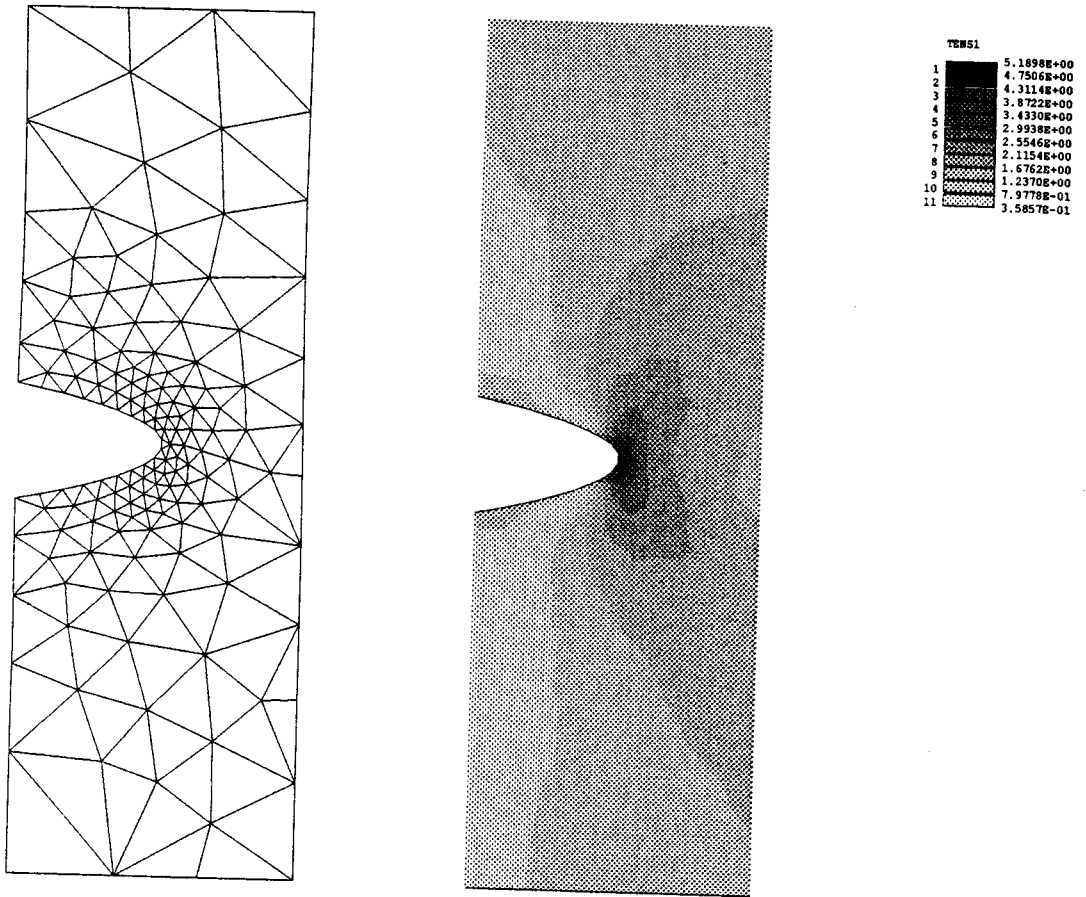


Figura 2.13 Malha 2: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.133$

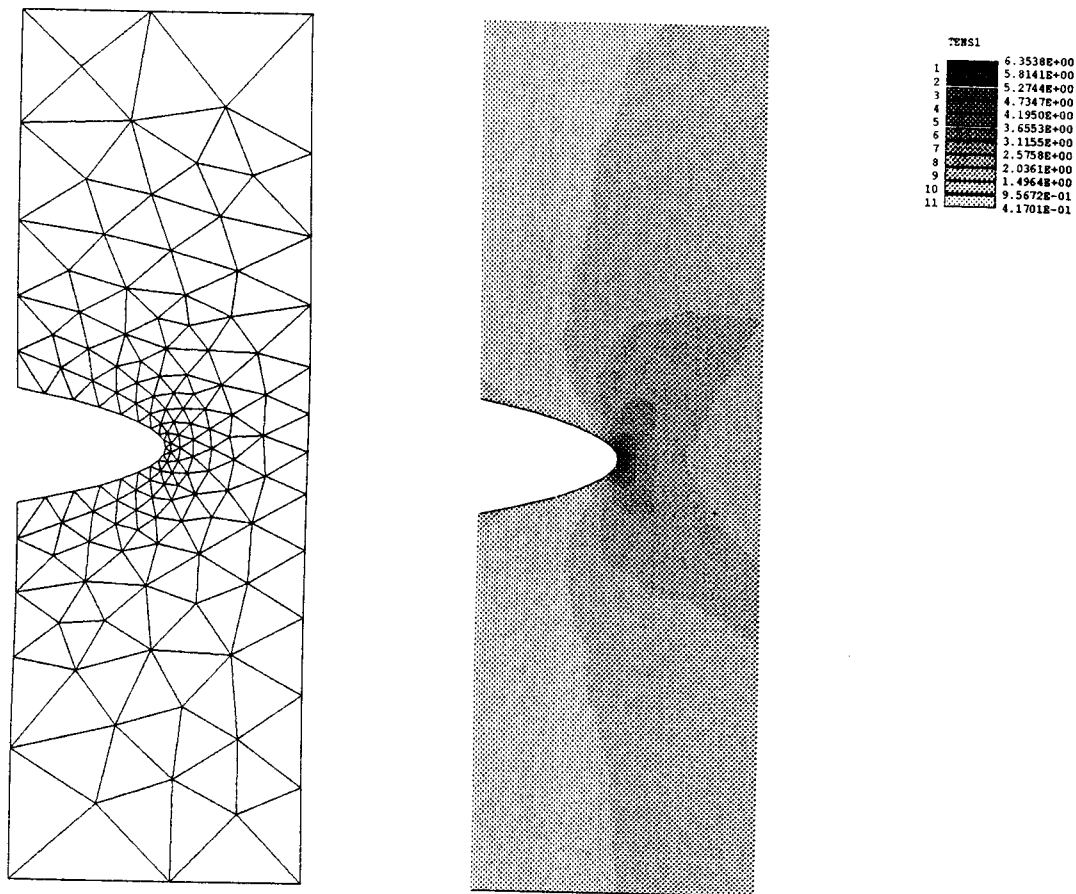


Figura 2.14 Malha 3: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.129$

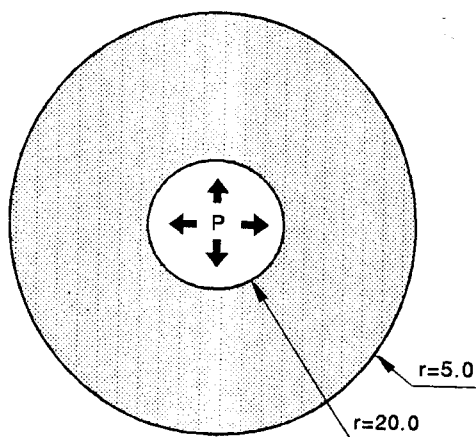


Figura 2.15 Exemplo 2

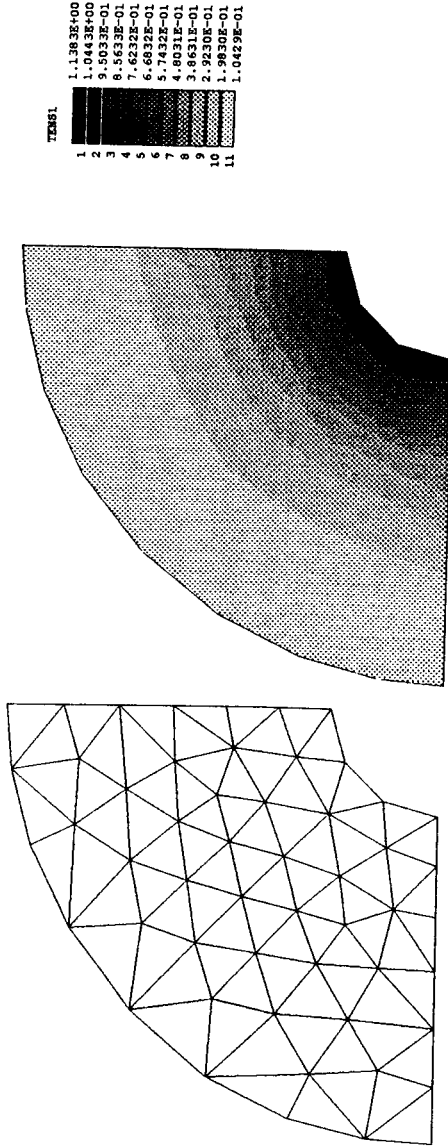


Figura 2.16 Malha Original: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.311$

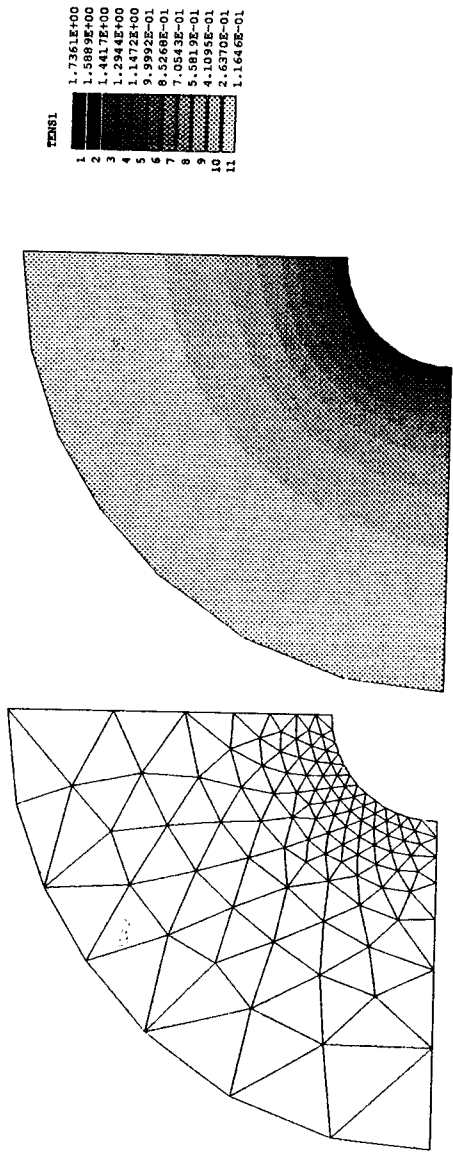


Figura 2.17 Malha Adaptada: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.125$

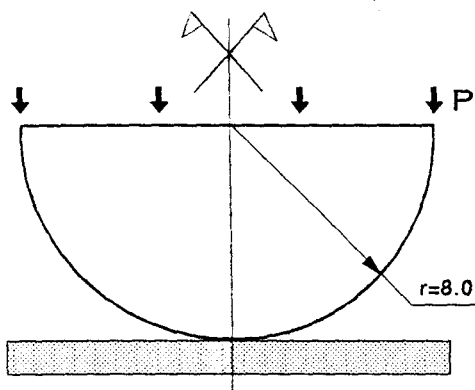


Figura 2.18 Exemplo 3

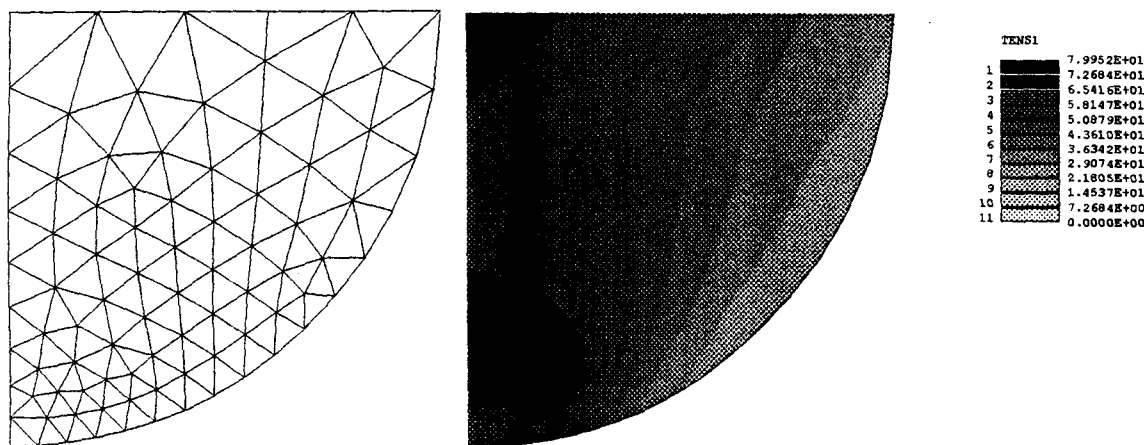


Figura 2.19 Malha Original: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.131$

### Exemplo 3

Neste terceiro exemplo apresenta-se um semi-cilindro submetido a um carregamento distribuído na sua face superior e apoiado sobre uma superfície rígida. Neste exemplo foi necessária uma análise de contato (Capítulo 1) utilizando elementos para estado plano de deformações. O erro solicitado foi de 8% ( $\eta = 0.08$ ), carregamento e propriedades  $P = 30.0$ ,  $E = 1000.0$ ,  $\nu = 0.3$  (ver figura 2.18). Resultados em figuras 2.19, 2.20.

### 2.7.2 Conclusões

O tipo de adaptatividade implementada foi a continuação e ao mesmo tempo consequência das ferramentas de geração automática desenvolvidas. Este método possui algumas vantagens e desvantagens em relação a outras técnicas adaptativas tipo “h” como a inserção

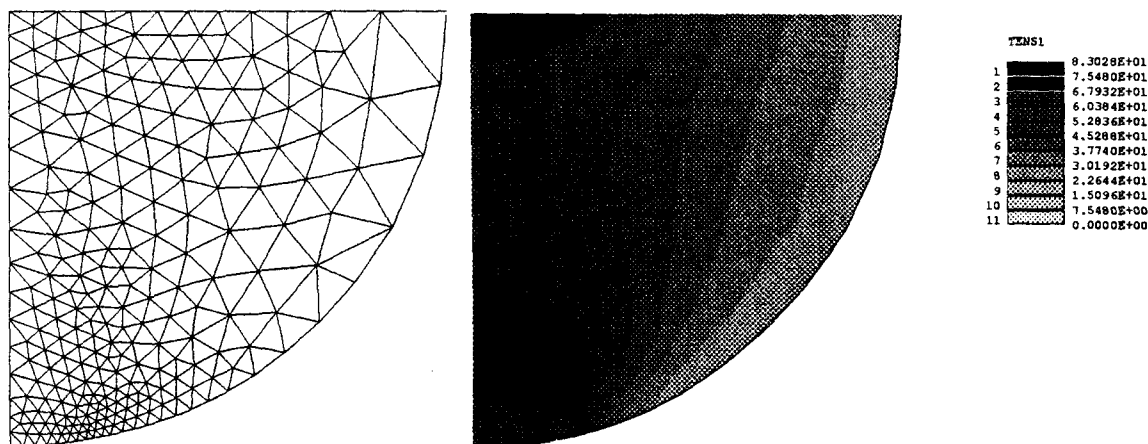


Figura 2.20 Malha Adaptada: Tensão de Von Mises -  $\eta = 0.077$

de elementos nas regiões onde o erro supera o valor solicitado [80].

Dentre as desvantagens pode ser ressaltado que o custo de uma geração completa é bem superior ao custo de densificação por “divisão” dos elementos. A divisão da malha original também facilita a utilização de técnicas “multigrid”, por não modificar a posição dos nós antigos na nova malha.

Dentre as vantagens, as duas maiores são por um lado, a possibilidade de manter relativamente constante quantidade de graus de liberdade, problema grave na outra técnica onde este número tende a crescer rapidamente. Por outro lado, a aproximação da geometria, no caso de densificação por divisão de elementos, fica sempre vinculada a primeira malha gerada, contrário ao que acontece com a utilização de geradores onde a geometria é uma entidade desvinculada da malha. Esta diferença pode ser decisória, se tomamos como exemplo qualquer um dos três problemas apresentados.

Também devemos ressaltar que o custo relativo da geração dependerá do tipo de análise realizada. A resolução de um sistema não linear como o do último exemplo mostrado justifica amplamente a geração de uma malha completa.

Problemas envolvendo não linearidade material como plasticidade, viscoplasticidade, análise limite, etc., possuem uma relação (Custo Análise / Custo Geração) suficientemente elevada como para estimular o desenvolvimento de estimadores de erro e procedimentos adaptativos segundo a direção apresentada.



## Capítulo 3

# ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Uma das perguntas responsáveis pela maior parte dos esforços de pesquisa em mecânica computacional é a seguinte: dado um corpo submetido a esforços externos; qual é seu comportamento?

Considerando corpo e ações externas como um conjunto denominado *sistema*, surge outra pergunta, não menos importante que a primeira, que tem suas origens na teoria de controle: O que acontece quando alguma (ou algumas) das características do sistema é alterada?

O objetivo que deu forte impulso a esta questão foi a necessidade de fornecer critérios válidos para a elaboração de *projetos ótimos*. O percurso desde o projeto inicial até aquele que cumpre com os requisitos impostos pelo projetista, é geralmente feito mediante o conhecimento da sensibilidade do modelo às variáveis do projeto.

Com o advento dos computadores e consequente desenvolvimento de métodos numéricos (Elementos Finitos, Diferenças Finitas, etc.) uma grande linha de pesquisa deslocou-se ao estudo de sensibilidade e projeto ótimo sobre os modelos discretos dos problemas iniciais, dada a possibilidade de aplicação quase direta às técnicas de otimização. A análise de sensibilidade nestes casos é feita por meios numéricos, (por exemplo diferenças finitas), ou por derivação analítica dos sistemas discretos que controlam o problema.

Um outro caminho foi seguido por aqueles que focalizam a sensibilidade como um problema a ser resolvido ainda no meio contínuo, onde as variáveis de projeto são funções, em geral, definidas sobre o domínio espacial  $\Omega$  do problema. Neste contexto, uma forma particular de controle consiste em tomar o próprio domínio como variável de projeto.

Esta particularização se conhece como análise de sensibilidade à mudança de forma ("Shape Sensitivity Analysis") e o estudo deste tipo de problema parece ter sua origem como área de pesquisa na escola matemática francesa no início dos anos 70. Em Iowa (USA) 1981, o congresso "Optimization of Distributed Parameters Structures" [1] reuniu grande número de trabalhos na área dentre os quais encontra-se um volumoso "review" de E.J. Haug [42], sobre os avanços na década 70-80 e um esclarecedor artigo de J. Céa [11] onde se formula o problema de otimização de forma, identificando distintas vias de caracterização e controle desta última. Em especial menciona-se a técnica de controle de forma mediante a definição de um mapeamento a partir de uma configuração inicial, citando a sequência de trabalhos que deram origem a esta técnica e desenvolveram as bases

matemáticas para sua utilização: Dentre outros, os trabalhos de Gioan, Cea, Pironneau, Mourat e Simon, Dervieux e Palmerio, Rousselet, Chenais, Glowinski, culminando com o trabalho de Zolésio [89] que apresenta resultados de existência de soluções em problemas de otimização de forma e análise de sensibilidade de funções dependentes do domínio  $\Omega$  através da mencionada técnica de mapeamento. O livro de Pironneau [68] em 1983 faz um sucinto histórico dos principais aportes à área na mesma época e aborda o problema de sensibilidade e otimização em alguns problemas elípticos. Partindo do grupo sediado na Universidade de Iowa (EUA) edita-se em 1987 o livro de Haug, Choi e Komkov [43] que versa sobre análise de sensibilidade em sistemas estruturais lineares utilizando, no caso de sensibilidade à mudança de forma, a técnica de mapeamento (também denominada “speed method”) para controlar o domínio.

Nos últimos trabalhos sobre o tema, nota-se uma crescente procura de modelos matematicamente válidos e numericamente eficientes na determinação da sensibilidade em problemas não lineares (não linearidade geométrica e/ou material) [12], [78], [79], [67], [9].

A seguir são mostrados os conceitos gerais da análise de sensibilidade aplicados a sistemas controlados por equações de estado de tipo elípticas e lineares. Posteriormente, se particulariza o caso em que a variável de projeto está constituída pelo domínio  $\Omega$  de definição do problema físico.

No capítulo 4, será focalizado o problema não linear de contato, cuja formulação já foi vista no primeiro capítulo. Neste caso, os conceitos de análise de sensibilidade serão utilizados como passo necessário para a obtenção de uma configuração ótima segundo diferentes critérios de projeto (funções objetivo).

Finalmente, no capítulo 5, a análise de sensibilidade toma o papel protagonista ao relacioná-la com mecânica da fratura e com a determinação de fatores de concentração de tensões em peças fissuradas.

### 3.1 Conceitos gerais de sensibilidade

Seja uma estrutura de barras como a da Figura 3.1, trabalhando em regime elástico linear, dependente de um conjunto  $\mathbf{h}$  de variáveis de projeto tais como seção das barras  $A_i$ , módulo de elasticidade  $E_i$ , módulo de inércia  $J_i$ , coordenadas dos nós  $X_j$ , ( $i = 1$ , Número de barras,  $j = 1$ , Número de nós), etc.. Assim, o equilíbrio da estrutura pode ser expresso pelo sistema linear

$$\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global,  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças externas e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais.

Suponha-se que é preciso determinar a variação do trabalho da força  $\mathbf{F}$  no nó 5, quando modificadas as variáveis de projeto  $\mathbf{h}$ . Para isto define-se uma função

$$\psi(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = \mathbf{u}_5(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_5 \quad (3.2)$$

dependente, evidentemente, das variáveis de projeto através da solução  $\mathbf{u}(\mathbf{h})$ .

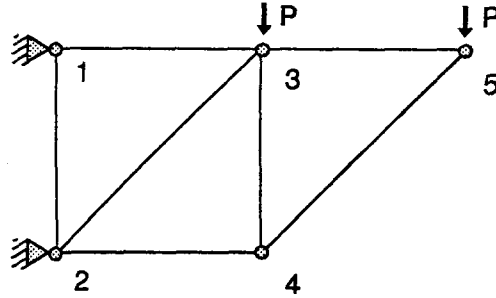


Figura 3.1

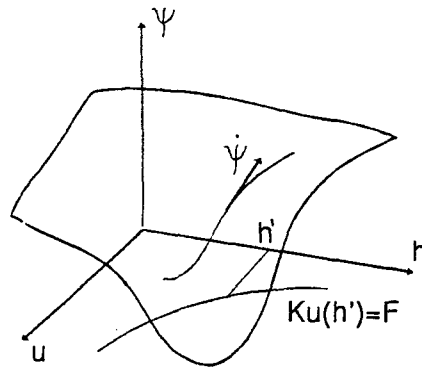


Figura 3.2

Observando este conjunto de equações do ponto de vista da teoria de otimização,  $\psi$  é a função objetivo e o sistema  $\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{u} = \mathbf{F}$  uma restrição de igualdade no domínio  $(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ . A análise de sensibilidade significa, neste caso, determinar a variação de  $\psi$  quando se caminha sobre a curva definida pela equação de estado  $\mathbf{K}(\mathbf{h})\mathbf{u} - \mathbf{F} = 0$  (3.1).

Ver figura 3.2.

Generalizando, quando o objetivo é identificar e/ou quantificar certas características de um sistema mecânico, freqüentemente são definidas funções ou funcionais dependentes de uma série de variáveis, denominadas variáveis de projeto, geralmente associadas a características do sistema: materiais, geometria, condições de contorno, etc.

Neste trabalho, o termo “análise de sensibilidade” denota o cálculo da variação das mencionadas funções ou funcionais quando são alteradas as variáveis de projeto.

Como já foi comentado, destacam-se na literatura duas grandes formas de abordar o problema de sensibilidade:

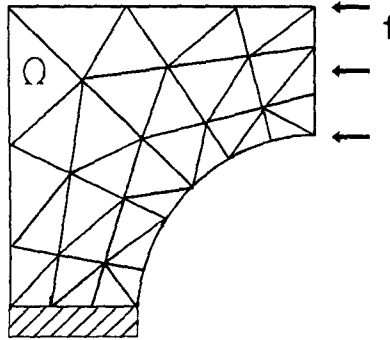


Figura 3.3

- Sensibilidade em problemas de dimensão finita.
- Sensibilidade em problemas de dimensão infinita.

O problema da treliça citado acima é um exemplo do primeiro caso. Observe-se que as variáveis que controlam o mesmo compõem um número discreto de parâmetros, isto é, um elemento em  $\mathbf{R}^N$ ,  $N$  finito.

Como outro exemplo, imagine-se uma peça mecânica modelada como um sólido elástico ocupando uma região  $\Omega$  (Figura 3.3). Após a utilização do método de elementos finitos a condição de equilíbrio resulta em um sistema de equações idêntico a (3.1). Suponha-se que é necessário determinar o valor máximo que a tensão de Von-Mises toma na peça:

$$\psi = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{\sigma_{eq}(\mathbf{u}, \mathbf{h})\} \quad (3.3)$$

A função  $\psi$  depende da solução  $\mathbf{u}$  do problema e das variáveis de projeto  $\mathbf{h}$ . Novamente, a sensibilidade de  $\psi$  implica em determinar a variação desta função quando são modificadas as variáveis  $\mathbf{h}$ , considerando que no domínio de  $(\mathbf{u}, \mathbf{h})$  reside a curva ou equação do comportamento mecânico (3.1).

Estes dois exemplos mantêm o esquema de cálculo de sensibilidade da primeira proposta mencionada, isto é, todas as variáveis em jogo pertencem a espaços discretos, diretamente aplicáveis ao tratamento numérico.

Sob as mesmas idéias básicas em relação ao conceito de sensibilidade, a segunda proposta opera num estágio anterior à discretização do problema.

No caso particular do exemplo da treliça, o modelo que simula seu comportamento é intrinsecamente discreto e, portanto, a sensibilidade calculada é exata. Pelo contrário, a formulação do sólido do segundo exemplo é contínua: as variáveis de projeto são funções definidas no domínio espacial  $\Omega$ , isto é,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  e as mudanças sobre estas variáveis são elementos  $\delta \mathbf{h}$  pertencentes aos mesmos espaços de definição de  $\mathbf{h}$ ; a equação

de estado está dada pela equação variacional

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}(\mathbf{h}) \text{ tal que} \\ a_h(\mathbf{u}(\mathbf{h}), v) = l_h(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega). \end{cases}$$

Evidentemente, o ferramental adequado para a análise de sensibilidade nestes casos consiste no cálculo variacional.

## 3.2 Derivação de Gateaux e Fréchet

Ao longo deste capítulo, um dos conceitos mais utilizados será o de derivação e diferenciação de funções definidas em espaços topológicos. Esta seção deve ser entendida como uma pausa para lembrar certas definições do cálculo variacional. Em seguida será retomado o assunto principal.

Sejam dois espaços de Banach  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{H}$  e  $A$  um operador  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ ; dado  $u, h \in \mathcal{V}$ , define-se **Diferencial no sentido de Gateaux** ou **G-Diferencial** ao elemento  $\frac{dA}{du}(u; h) \in \mathcal{H}$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{A(u + th) - A(u)}{t} - \frac{dA}{du}(u; h) \right\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (3.4)$$

Se este limite existe para todo  $h \in \mathcal{V}$  e o operador  $h \rightarrow \frac{dA}{du}(u; h)$  é linear e contínuo, então este último é denominado **Derivada no sentido de Gateaux** ou **G-Derivada** de  $A$  no ponto  $u$ , permitindo a notação

$$\begin{aligned} \frac{dA}{du}(u; h) &= \frac{dA}{du}(u) \cdot h, \\ \frac{dA}{du}(u) &\in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Esta operação, comumente utilizada na obtenção das expressões de diferenciais, carece de certas condições de regularidade necessárias nos cálculos a seguir. Esta regularidade suplementar aparece através da seguinte definição:

Sejam os espaços de Banach  $\mathcal{V}, \mathcal{H}$  e  $A$  um operador tal que  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ . Se para  $u, h \in \mathcal{V}$  existe um operador linear e contínuo de  $\mathcal{V}$  em  $\mathcal{H}$  denotado por  $h \rightarrow \frac{dA}{du}(u; h)$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|A(u + h) - A(u) - \frac{dA}{du}(u; h)\|_{\mathcal{H}}}{\|h\|_{\mathcal{V}}} = 0, \quad (3.6)$$

se diz que  $\frac{dA}{du}(u; h)$  é a **diferencial no sentido de Fréchet** ou **F-diferencial** de  $A$  no ponto  $u$ . Da própria definição pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{dA}{du}(u; h) &= \frac{dA}{du}(u) \cdot h, \\ \frac{dA}{du}(u) &\in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o operador  $\frac{dA}{du}(u)$  denota a **derivada no sentido de Fréchet** ou **F-derivada** de  $A$  no ponto  $u$ .

Destas definições obtém-se o seguinte resultado: Seja  $h$  um elemento fixo em  $\mathcal{V}$  e substitua-se  $h$  por  $th$  em (3.6):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|A(u + th) - A(u) - \frac{dA}{du}(u; th)\|_{\mathcal{H}}}{t\|h\|_{\mathcal{V}}} = 0, \quad (3.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|A(u + th) - A(u) - t\frac{dA}{du}(u; h)\|_{\mathcal{H}}}{t} = 0, \quad (3.9)$$

de onde se afirma que se a F-diferencial existe então a G-diferencial também existe e é igual à primeira. **A recíproca não é verdadeira.** A relação inversa requer mais uma condição: Se a G-derivada existe e é contínua em  $u$ , então a F-derivada existe e ambas coincidem.

Outras duas ferramentas assiduamente utilizadas nas operações a seguir são a “regra da cadeia” e a obtenção da derivada total como a soma das derivadas parciais:

- Derivadas parciais. Sejam os espaços de Banach  $\mathcal{V}, \mathcal{Z}, \mathcal{H}$  e o operador  $A$  tal que  $A : \mathcal{V} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{H}$  e defina-se as G-diferenciais parciais  $\frac{\partial A}{\partial u}(u, z; h)$  e  $\frac{\partial A}{\partial z}(u, z; \nu)$  tais que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{A(u + th, z) - A(u, z)}{t} - \frac{\partial A}{\partial u}(u, z; h) \right\|_{\mathcal{H}} = 0, \quad (3.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{A(u, z + t\nu) - A(u, z)}{t} - \frac{\partial A}{\partial z}(u, z; \nu) \right\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (3.11)$$

Se estas G-diferenciais existem e são contínuas e lineares para  $h$  e  $\nu$ , então  $A$  é F-diferenciável em  $\mathcal{V} \times \mathcal{Z}$  e

$$\frac{dA}{du \, dz}(u, z; h, \nu) = \frac{\partial A}{\partial u}(u, z; h) + \frac{\partial A}{\partial z}(u, z; \nu). \quad (3.12)$$

- Regra da Cadeia. Sejam os espaços de Banach  $\mathcal{V}, \mathcal{Z}, \mathcal{H}$  e os operadores  $A, B$  tal que  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Z}$  e  $B : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{H}$  ambos F-diferenciáveis. Então, dado  $z \in \mathcal{Z}$ , o mapeamento composto  $\Phi(z) = A(B(z))$  é também F-diferenciável:

$$\frac{d\Phi}{dz}(z; \nu) = \frac{\partial A}{\partial u} \left( B(z); \frac{\partial B}{\partial z} z; \nu \right) \quad (3.13)$$

Finalizada esta seção, será continuado o estudo do problema de sensibilidade.

## 3.3 Análise de sensibilidade em meios contínuos

### 3.3.1 Introdução

Considere-se um sistema formado por um contínuo definido num domínio  $\Omega$  e um conjunto de forças externas atuando sobre o mesmo. Suponha-se que o comportamento do sistema está controlado por uma  $n$ -upla de variáveis de projeto

$$\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{O}, \quad (3.14)$$

representando propriedades constitutivas, características geométricas, o próprio sistema de ações externas, etc. Define-se  $\mathcal{O}$  como conjunto das variáveis de projeto admissíveis.

Para exemplificar, admita-se que o modelo matemático do problema é dado pela equação de estado:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}_h \text{ tal que} \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = l_h(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \end{cases} \quad (3.15)$$

onde  $\mathcal{V}(\Omega)$  é o espaço de Hilbert dos deslocamentos cinematicamente admissíveis,  $a_h(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear simétrica com as propriedades clássicas de continuidade e coercividade e  $l_h(\cdot)$  uma forma linear contínua. Com o subíndice  $h$  deseja-se destacar a dependência em relação às variáveis de projeto<sup>1</sup>.

Define-se também um funcional  $\psi$  que depende das variáveis de projeto e da resposta do sistema  $\mathbf{u}$ :

$$\psi = \psi_h(\mathbf{u}_h). \quad (3.16)$$

Caracterizado o sistema num ponto  $\mathbf{h} \in \mathcal{O}$ , suponha-se uma perturbação do tipo

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{h} + tV, \quad (3.17)$$

$$V = \{\delta h_1, \delta h_2, \dots, \delta h_m\}, \quad (3.18)$$

e para esta perturbação a nova resposta do sistema toma a forma:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}_{h+tV} \text{ tal que} \\ a_{h+tV}(\mathbf{u}_{h+tV}, \mathbf{v}) = l_{h+tV}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \end{cases} \quad (3.19)$$

assim como o novo valor da função objetivo,

$$\psi = \psi_{h+tV}(\mathbf{u}_{h+tV}). \quad (3.20)$$

<sup>1</sup>Nota: Deve ficar claro que as formas  $a$  e  $l$  dependem tanto das variáveis  $\mathbf{h}$  como de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , isto é,

$$a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{h}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad l_h(\mathbf{v}) = l(\mathbf{h}, \mathbf{v}).$$

Porém, foi adotada a primeira notação para ressaltar a linearidade em relação a  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e manter a forma das expressões tradicionais. Por uma questão de coerência, o mesmo foi feito para o funcional:  $\psi_h(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{h}, \mathbf{u})$ .

Para simplificar a notação, escreve-se

$$\begin{aligned} a_{h+tV}(\mathbf{u}_{h+tV}, \mathbf{v}) &= a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}), & a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ l_{h+tV}(\mathbf{v}) &= l_t(\mathbf{v}), & l_h(\mathbf{v}) &= l(\mathbf{v}), \\ \psi_{h+tV}(\mathbf{u}_{h+tV}) &= \psi_t(\mathbf{u}_t), & \psi_h(\mathbf{u}_h) &= \psi(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Obviamente, a situação original se recupera para  $t = 0$ , isto é,  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$  e  $\psi_0(\mathbf{u}_0) = \psi(\mathbf{u})$ .

Denota-se “análise de sensibilidade” do funcional  $\psi$  à determinação da variação deste devido a uma perturbação nas variáveis de projeto na direção  $V$ :

$$\dot{\psi}(\mathbf{u}; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t(\mathbf{u}_t) - \psi(\mathbf{u})}{t} = \left. \frac{d}{dt} \psi_t(\mathbf{u}_t) \right|_{t=0} \quad (3.22)$$

Se este limite existe e é linear e contínuo para todo  $V$  numa vizinhança de  $t = 0$ , se diz que  $\psi_t$  é diferenciável (no sentido de Fréchet)<sup>2</sup>.

Seja  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  fixo, define-se como “derivada parcial de  $\psi$  em relação a  $\mathbf{h}$ ” à expressão:

$$\psi'(\mathbf{v}; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t(\mathbf{v}) - \psi(\mathbf{v})}{t} = \left. \frac{d}{dt} \psi_t(\mathbf{v}) \right|_{t=0}. \quad (3.23)$$

Da mesma forma,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\mathbf{u}_t) - \psi(\mathbf{u})}{t} = \left. \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{u}_t) \right|_{t=0}. \quad (3.24)$$

onde  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$  representa a variação da resposta  $u$  devido à perturbação  $V$ , definida pelo limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{u}_t - \mathbf{u}}{t} - \dot{\mathbf{u}} \right\|_{\mathcal{V}} = 0. \quad (3.25)$$

Assumindo que  $\psi'$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ , existem e são F-derivadas, Aplica-se formalmente a fórmula de derivação de uma função composta para obter

$$\dot{\psi}(\mathbf{u}; V) = \psi'(\mathbf{u}; V) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}). \quad (3.26)$$

O elemento  $\dot{\mathbf{u}}$  é calculado através da diferenciação da equação de estado. Com este intuito, definem-se as derivadas parciais

$$a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{t} = \left. \frac{d}{dt} a_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{t=0}, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \dot{\mathbf{u}}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{t} = a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}), \quad (3.28)$$

<sup>2</sup>Da seção 3.2, pode-se observar que operações tais como a regra da cadeia e a utilização da derivada parcial na obtenção de derivadas totais são válidas sempre que se admite regularidade suficiente. Assim, com exceção de casos particulares onde serão feitas adequadas ressalvas, os elementos em análise são considerados suficientemente regulares para que as derivadas obtidas nas operações a seguir sejam F-derivadas, tornando válidos os formalismos utilizados.



Assumindo que estas derivadas são lineares e contínuas com a perturbação  $V$ , utiliza-se novamente a regra da derivação parcial para escrever

$$\begin{aligned} \dot{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{t} = \left. \frac{d}{dt} a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) \right|_{t=0}, \\ &= a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) + a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Trabalhando em forma análoga com a forma linear  $l_t(\mathbf{v})$ , define-se

$$l'(\mathbf{v}; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{l_t(\mathbf{v}) - l(\mathbf{v})}{t} = \left. \frac{d}{dt} l_t(\mathbf{v}) \right|_{t=0}. \quad (3.30)$$

Considerando que a equação de estado (3.19) é satisfeita para todo  $-\delta < t < \delta$ , e tendo em vista que  $\mathbf{v}$  não depende de  $h$  (i.e.  $\dot{\mathbf{v}} = 0$ ) pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \dot{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) &= l'(\mathbf{v}; V), \\ a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) + a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= l'(\mathbf{v}; V). \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir desta equação, a incógnita  $\dot{\mathbf{u}}$  pode ser calculada. Porém, as diferentes técnicas empregadas para fazê-lo resultam, como poderá ser apreciado, em importantes diferenças em relação ao esforço de cálculo.

Duas formas de trabalhar neste sentido, são clássicas na literatura: o Método Direto e o Método Adjunto.

### 3.3.2 Método Direto

De (3.31) se obtém:

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = l'(\mathbf{v}; V) - a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{u}$  é solução da equação de estado (3.15). Admitindo que  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$  e sendo válidas as hipóteses de regularidade sobre  $a'$  e  $l'$ , esta equação é resolvida em forma análoga a (3.15).

Determinado  $\dot{\mathbf{u}}$ , este é substituído em 3.22 completando o cálculo. O inconveniente deste método reside no fato de ter-se que resolver o sistema (3.32) para cada direção de cálculo  $V$  desejada. Deve-se considerar que, em geral, o objetivo é determinar o gradiente de  $\psi$ , isto é, a derivada total para cada uma das componentes do vetor  $\mathbf{h}$ , sendo cada uma delas uma direção de cálculo.

O denominado Método Adjunto propõe uma forma alternativa de superar o problema da incógnita  $\dot{\mathbf{u}}$ .

### 3.3.3 Método Adjunto

Define-se o elemento  $\lambda \in \mathcal{V}(\Omega)$  tal que:

$$a(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \bar{\lambda}) \quad \forall \bar{\lambda} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (3.33)$$

Como se pode observar, esta equação é análoga a (3.15) e, na medida em que as condições de regularidade assumidas sobre  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}$  sejam satisfeitas, as características da forma  $a(\cdot, \cdot)$  garantem que o sistema é resolvido para um valor único  $\lambda$ , denominado variável adjunta. Sendo esta equação válida para todo  $\bar{\lambda} \in \mathcal{V}(\Omega)$ , em  $\lambda$  solução, tem-se que:

$$a(\lambda, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}). \quad (3.34)$$

Por outro lado, a equação (3.32) é válida para todo elemento de  $\mathcal{V}(\Omega)$ , em particular para  $\lambda$ :

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \lambda) = l'(\lambda; V) - a'(\mathbf{u}, \lambda; V). \quad (3.35)$$

Considerando que  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear simétrica, é possível escrever

$$a(\lambda, \dot{\mathbf{u}}) = l'(\lambda; V) - a'(\mathbf{u}, \lambda; V), \quad (3.36)$$

resultado que junto a (3.34) permite concluir que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}) = l'(\lambda; V) - a'(\mathbf{u}, \lambda; V). \quad (3.37)$$

Finalmente, esta expressão é substituída em (3.26), fornecendo uma expressão para  $\dot{\psi}$  onde não aparece a incógnita  $\dot{\mathbf{u}}$ :

$$\dot{\psi}(\mathbf{u}; V) = \psi'(\mathbf{u}; V) + l'(\lambda; V) - a'(\mathbf{u}, \lambda; V). \quad (3.38)$$

Para concluir: O Método Adjunto pressupõe a resolução de um novo sistema, denominado sistema adjunto, que permite driblar o cálculo de  $\dot{\mathbf{u}}$  na determinação de  $\dot{\psi}$ . Determinado  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega)$  por equilíbrio,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (3.39)$$

e a variável  $\lambda \in \mathcal{V}(\Omega)$  pelo sistema adjunto

$$a(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \bar{\lambda}) \quad \forall \bar{\lambda} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (3.40)$$

a derivada  $\dot{\psi}$  é dada pela expressão (3.38), podendo ser calculada para cada direção  $V$  por simples substituição.

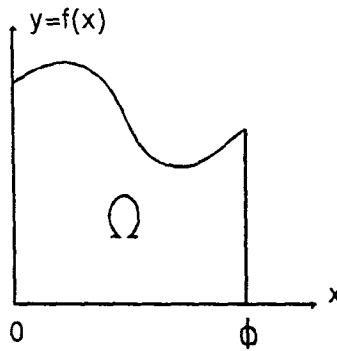


Figura 3.4

## 3.4 Sensibilidade à mudança de forma

### 3.4.1 Descrição do problema

O caso particular no qual o domínio  $\Omega$  é a variável de projeto merece atenção diferenciada tanto pelas aplicações associadas a este tipo de problema, quanto pelas características da formulação matemática do mesmo.

A grande maioria dos modelos associados a problemas mecânicos estão formulados através de expressões diferenciais válidas ponto a ponto num domínio espacial  $\Omega$  ou, generalizando estes casos, por expressões integrais sobre  $\Omega$ . Assim, modificações no domínio produzem, necessariamente, alterações tanto nos termos integrandos quanto no próprio domínio de integração. Análise de sensibilidade à mudança do domínio implica na determinação da variação de características associadas ao problema devido a alterações na configuração espacial  $\Omega$ .

Surge então a primeira pergunta: como se pode qualificar e quantificar uma variação de domínio? Mais ainda: precisa-se definir uma forma de comparar elementos pertencentes a espaços topológicos diferentes, ora definidos na configuração  $\Omega$ , ora definidos numa configuração alterada  $\Omega^*$ .

Começa-se por determinar alguma forma de controlar o domínio e as *perturbações ou variações* sobre este. Em [11] mostram-se algumas alternativas possíveis para este fim. Considere-se como exemplo o caso da figura 3.4.1, onde o domínio em  $\mathbf{R}^2$  está definido mediante uma função contínua  $y = f(x)$ . Assim, esta função efetua o controle de  $\Omega$  estabelecendo a relação  $\Omega_f = \Omega(f(x))$  através da qual podem ser definidas “distâncias” entre um e outro domínio.

Uma das técnicas mais utilizadas para caracterizar um domínio consiste em definir um mapeamento a partir da configuração inicial (figura 3.4.1).

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + tV(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

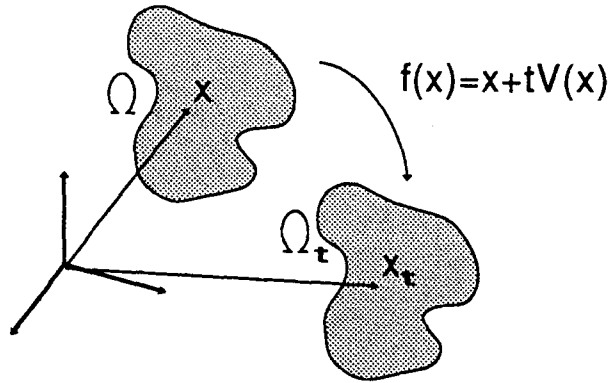


Figura 3.5

Neste mapeamento, (transformação usual na mecânica do contínuo [32]),  $\mathbf{x}$  é a coordenada do ponto material na configuração de referência  $\Omega$ , o parâmetro  $t$  caracteriza o “tempo” ou sequência de configurações e  $V$  a “direção” da perturbação.

Este mapeamento permite definir um domínio perturbado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Omega_t &= \{\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^n : \exists \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{x}_t = p_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}\} \\ \Gamma_t &= \{\mathbf{x}_t \in \mathbf{R}^n : \exists \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{x}_t = p_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}\}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Com o objetivo de escalar o procedimento formal de análise de sensibilidade, tome-se como exemplo o problema linear definido em  $\Omega$ ,

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}_\Omega \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ tal que:} \\ a_\Omega(\mathbf{u}_\Omega, \mathbf{v}) = l_\Omega(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \end{cases}\quad (3.43)$$

representando um corpo elástico, sendo

$$\begin{aligned}a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s \, d\Omega, \\ l_\Omega(\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma,\end{aligned}\quad (3.44)$$

onde

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}}, \quad \nabla(\cdot)^s = \frac{\nabla(\cdot) + \nabla(\cdot)^T}{2} = \epsilon(\cdot).\quad (3.45)$$

Define-se também a função objetivo  $\psi$ , dependente da resposta  $\mathbf{u}$  e da configuração  $\Omega$ :

$$\psi = \psi(\Omega, \mathbf{u}_\Omega) = \psi_\Omega(\mathbf{u}_\Omega) = \int_\Omega \mathcal{G}(\mathbf{u}_\Omega) \, d\Omega + \int_\Gamma \mathcal{J}(\mathbf{u}_\Omega) \, d\Gamma\quad (3.46)$$

Mediante a transformação (3.41), pode-se obter um domínio perturbado  $\Omega_t$ . Neste domínio, uma nova equação de estado determina o comportamento mecânico do corpo:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}_{\Omega_t} \in \mathcal{V}(\Omega_t) \text{ tal que:} \\ a_{\Omega_t}(\mathbf{u}_{\Omega_t}, \mathbf{v}) = l_{\Omega_t}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_t), \end{cases} \quad (3.47)$$

$$a_{\Omega_t}(\mathbf{u}_{\Omega_t}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_t} \mathbf{C}(\text{grad} \mathbf{u}_{\Omega_t})^s \cdot (\text{grad} \mathbf{v})^s d\Omega_t, \quad (3.48)$$

$$l_{\Omega_t}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_t} \mathbf{b}_{\Omega_t} \cdot \mathbf{v} d\Omega_t + \int_{\Gamma_{f_t}} \mathbf{f}_{\Omega_t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_t, \quad (3.49)$$

$$\text{grad}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}_t}, \quad (3.50)$$

Seguindo o mesmo critério, a função objetivo toma a forma

$$\psi = \psi_{\Omega_t}(\mathbf{u}_{\Omega_t}) = \int_{\Omega_t} \mathcal{G}(\mathbf{u}_{\Omega_t}) d\Omega_t + \int_{\Gamma_t} \mathcal{J}(\mathbf{u}_{\Omega_t}) d\Gamma_t. \quad (3.51)$$

Claramente, para o tempo  $t = 0$  tem-se que  $\Omega_0 = \Omega$ ,  $\mathbf{u}_{\Omega_0} = \mathbf{u}_{\Omega}$  e  $\psi_{\Omega_0}(\mathbf{u}_{\Omega_0}) = \psi_{\Omega}(\mathbf{u}_{\Omega})$ . Para simplificar a notação, os termos acima serão reescritos como se segue:

$$\begin{aligned} a_{\Omega_t}(\mathbf{u}_{\Omega_t}, \mathbf{v}) &= a^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}), & a_{\Omega}(\mathbf{u}_{\Omega}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ l_{\Omega_t}(\mathbf{v}) &= l^t(\mathbf{v}), & l_{\Omega}(\mathbf{v}) &= l(\mathbf{v}), \\ \psi_{\Omega_t}(\mathbf{u}_{\Omega_t}) &= \psi^t(\mathbf{u}^t), & \psi_{\Omega}(\mathbf{u}_{\Omega}) &= \psi(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

A partir destas definições, a sensibilidade de  $\psi$  devido a uma alteração de forma na direção  $V$  está dado pelo limite

$$\dot{\psi}(\mathbf{u}; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi^t(\mathbf{u}^t) - \psi(\mathbf{u})}{t} \quad \mathbf{u}^t \in \mathcal{V}(\Omega_t), \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega). \quad (3.53)$$

Deve-se notar que, nesta expressão, os elementos  $\mathbf{u}^t$  e  $\mathbf{u}$  pertencem a espaços topológicos diferentes.

Um procedimento padrão para efetuar o cálculo (3.53) utiliza a transformação (3.41) para transportar as expressões na configuração  $\Omega_t$  para a configuração de referência. Fazendo uso de operações clássicas na mecânica do contínuo e considerando que

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{p}_t(\mathbf{x}), \quad \nabla \mathbf{p}_t = \mathbf{F} = \mathbf{I} + t \nabla V(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x}_t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{p}_t(\mathbf{x})) = \mathbf{u}_t(\mathbf{x}), \quad \text{grad} \mathbf{u}^t = \nabla \mathbf{u}_t \mathbf{F}^{-1},$$

a equação de estado pode ser reescrita como se segue:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}_t \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ tal que:} \\ a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) = l_t(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \end{cases} \quad (3.54)$$

onde

$$a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_t \mathbf{F}^{-1})^s \cdot (\nabla \mathbf{v} \mathbf{F}^{-1})^s \det F d\Omega, \quad (3.55)$$

$$l_t(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{v} \det F \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_t \cdot \mathbf{v} \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\| \, d\Gamma. \quad (3.56)$$

Seguindo argumento idêntico, a função objetivo toma a forma

$$\psi_t(\mathbf{u}_t) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_t(\mathbf{u}_t) \det F \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathcal{J}(\mathbf{u}_t) \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\| \, d\Gamma. \quad (3.57)$$

Finalmente o limite (3.53) ganha uma nova expressão:

$$\dot{\psi}(\mathbf{u}; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t(\mathbf{u}_t) - \psi(\mathbf{u})}{t} = \left. \frac{d}{dt} \psi_t(\mathbf{u}_t) \right|_{t=0} \quad \mathbf{u}_t, \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega). \quad (3.58)$$

Se este limite existe e é linear e contínuo para toda direção  $V$  numa vizinhança de  $t = 0$ , se diz que o funcional  $\psi$  é diferenciável neste ponto.

Observe-se que, se a regularidade do problema e da própria transformação de domínio tornam válido o transporte das expressões à configuração original, o problema de sensibilidade à mudança da forma transforma-se num problema de sensibilidade com domínio fixo, onde a dependência em relação à variável de controle está nos termos integrandos e não na “integral” propriamente dita.

Para escrever em forma explícita as expressões da sensibilidade de  $\psi$  (equação (3.58)) e da equação de estado, será necessário utilizar uma série de operações formais de derivação (comuns à mecânica do contínuo), consequência do uso da técnica de mapeamento para caracterizar a variação de domínio. Estas operações são descritas no item a seguir para facilitar a leitura do texto.

### 3.4.2 Operações básicas de derivação

Seja a transformação que leva pontos do domínio de referência  $\Omega$  para um outro domínio “deformado”  $\Omega_t$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + tV(\mathbf{x})$$

A velocidade de um ponto material  $\mathbf{x}$  no tempo  $t$  está dada por  $V(\mathbf{x})$ . A derivada da transformação com respeito ao ponto material  $\mathbf{x}$  define-se por:

$$\nabla \mathbf{p} = \mathbf{F} = \mathbf{I} + t\nabla V(\mathbf{x})$$

A partir destes conceitos, apresentam-se a seguir uma série operações de diferenciação.

- $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - t\nabla V(\mathbf{x}) + 0(t)$

- $\dot{\mathbf{F}} = ?$

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} (\nabla \mathbf{p}) = \nabla \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \nabla V(\mathbf{x})$$

- $(\mathbf{F}^{-1})' = ?$

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned}\dot{F}F^{-1} + F(F^{-1})' &= 0 \\ (F^{-1})' &= -F^{-1}\dot{F}F^{-1}\end{aligned}$$

$$\bullet (F^{-1})'|_{t=0} = ?$$

$$(F^{-1})'|_{t=0} = -F^{-1}\dot{F}F^{-1}|_{t=0} = -I\dot{F}|_{t=0}I = -\nabla V$$

$$\bullet \det F = ?$$

$$\det F = \det(I + t\nabla V) = 1 + t \operatorname{tr}\nabla V + 0(t)$$

$$\bullet (\det F)' = ?$$

$$(\det F)' = \operatorname{tr}\nabla V = \operatorname{div}V$$

$$\bullet \det F^{-1} = ?$$

$$\det F^{-1} = \det(I - t\nabla V + 0(t)) = 1 - t \operatorname{tr}\nabla V + 0(t)$$

$$\bullet (\det F^{-1})' = ?$$

$$(\det F^{-1})' = -\operatorname{tr}\nabla V = -\operatorname{div}V$$

$$\bullet d\Omega \det F = d\Omega_t$$

$$\bullet \mathbf{N} = ?$$

$$\begin{aligned}dx \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall dx \perp \mathbf{n} \\ F^T F^{-T} \mathbf{n} \cdot dx &= 0 \quad \forall dx \perp \mathbf{n} \\ F^{-T} \mathbf{n} \cdot F dx &= 0 \quad \forall dx \perp \mathbf{n} \\ \mathbf{N} \cdot F dx &= 0 \quad \forall F dx \perp \mathbf{N} \\ \Rightarrow \mathbf{N} &= \frac{F^{-T} \mathbf{n}}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|}\end{aligned}$$

$$\bullet d\Gamma_t = ?$$

$$\det F d\Omega = d\Omega_t$$

$$\det F d\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = d\Gamma_t \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_t = d\Gamma_t \frac{F^{-T} \mathbf{n}}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|} \cdot F \mathbf{n}$$

$$\det F d\Gamma = \frac{F^T F^{-T}}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|} d\Gamma_t$$

$$\|F^{-T} \mathbf{n}\| \det F d\Gamma = d\Gamma_t$$

$$\bullet (\|F^{-T} \mathbf{n}\|)' \Big|_{t=0} = ?$$

$$(\|F^{-T} \mathbf{n}\|)' = ((F^{-T} \mathbf{n} \cdot F^{-T} \mathbf{n})^{1/2})' = \frac{-\nabla V^T \mathbf{n} \cdot F^{-T} \mathbf{n}}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|}$$

$$(\|F^{-T}\mathbf{n}\|)' \Big|_{t=0} = -(\nabla V)^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\nabla V \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$$

$$\bullet (\|F^{-T}\mathbf{n}\| \det F)' \Big|_{t=0} = ?$$

$$\begin{aligned} [(\|F^{-T}\mathbf{n}\|)' \det F + \|F^{-T}\mathbf{n}\|(\det F)'] \Big|_{t=0} &= \operatorname{div} V - \nabla V \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\ &= I \cdot \nabla V - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla V \\ &= (I - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \nabla V = \pi \nabla V \\ &= \operatorname{div}_\Gamma V \end{aligned}$$

$$\bullet \dot{\mathbf{N}} \Big|_{t=0} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{N} &= \frac{F^{-T} \mathbf{n}}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|} = \frac{(F^{-T} \mathbf{n})'}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|} - \frac{F^{-T} \mathbf{n} \|F^{-T} \mathbf{n}\|'}{\|F^{-T} \mathbf{n}\|^2} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{N} \Big|_{t=0} &= -\nabla V^T \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla V^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \pi(-\nabla V^T \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Na maior parte dos casos é preciso diferenciar funções dadas por integrais no domínio  $\Omega$  e na fronteira  $\Gamma$ . Mostram-se a seguir exemplos de derivação dos casos mais freqüentes.

### Caso 1

Seja o funcional  $\phi$  dado pela expressão

$$\phi = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (3.59)$$

onde  $\varphi(\mathbf{x})$  é uma função regular definida em  $\Omega$ . Através da transformação de domínio, define-se a família de funcionais dependentes do parâmetro  $t$ :

$$\phi^t = \int_{\Omega_t} \varphi^t(\mathbf{x}_t) d\Omega_t \quad (3.60)$$

A derivada de  $\phi_t$  no tempo  $t = 0$  (isto é,  $\Omega_0 = \Omega$ ), na direção  $V$ , está dada como:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi^t(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) d\Omega_t \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \varphi_t(\mathbf{x}) \det F d\Omega \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\varphi}_t(\mathbf{x}) \det F + \varphi_t(\mathbf{x})(\det F)') d\Omega \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div} V) d\Omega \end{aligned} \quad (3.61)$$



## Caso 2

Seja o funcional  $\phi$ ,

$$\phi = \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (3.62)$$

onde  $\varphi(\mathbf{x})$  é uma função regular definida em  $\Gamma$ . Seja também a família de funcionais dependentes de  $t$  através da transformação de domínio:

$$\phi^t = \int_{\Gamma_t} \varphi^t(\mathbf{x}_t) d\Gamma_t. \quad (3.63)$$

A derivada de  $\phi_t$  no tempo  $t = 0$  na direção  $V$  se escreve da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \varphi^t(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) d\Gamma_t \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma} \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t(\mathbf{x}) \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\|) d\Gamma \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma} (\dot{\varphi}_t(\mathbf{x}) \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\| + \varphi_t(\mathbf{x}) (\det F \|F^{-T} \mathbf{n}\|)') d\Gamma \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma} (\dot{\varphi} + \varphi \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.64)$$

Um resultado importante estudado em [89] é o seguinte: Asuma-se que a função  $\phi$  possui derivada em domínios de regularidade  $C^k$ . Então, em domínios suficientemente regulares, onde o gradiente da normal está bem definido ( $\Omega$  é  $C^{k+1}$ -regular,  $k \geq 1$ ), somente a componente da velocidade  $V$  na direção normal à fronteira, isto é,  $V \cdot \mathbf{n}$ , é significativa nos cálculos de sensibilidade. Este resultado se apoia na idéia que somente esta componente produz uma mudança efetiva na forma do domínio.

Assim, definindo  $V = v\mathbf{n}$ ,  $\dot{\phi}$  pode ser escrito de uma forma diferente. Sendo  $\mathbf{n}$  um vetor unitário,

$$0 = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \nabla \mathbf{n}^T \mathbf{n}. \quad (3.65)$$

Assumindo  $V = v\mathbf{n}$ ,

$$\nabla V^T \mathbf{n} = v \nabla \mathbf{n}^T \mathbf{n} + (\nabla v \otimes \mathbf{n}) \mathbf{n} = \nabla v, \quad (3.66)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n}(\nabla V^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \nabla V^T \mathbf{n} = \mathbf{n}(\nabla v \cdot \mathbf{n}) - \nabla v. \quad (3.67)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V &= \operatorname{div}(v\mathbf{n}) = \nabla v \cdot \mathbf{n} + v \operatorname{div} \mathbf{n}, \\ \nabla V^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= \nabla v \cdot \mathbf{n}, \\ \Rightarrow \operatorname{div}_{\Gamma} V &= \operatorname{div} V - \nabla v \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = v \operatorname{div} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Pode-se comprovar que  $\operatorname{div} \mathbf{n}$  representa a curvatura de  $\Gamma$  em  $\mathbf{R}^2$  e duas vezes a curvatura média em  $\mathbf{R}^3$ . Denotando  $H = \operatorname{div} \mathbf{n}$ , e substituindo em  $\dot{\phi}$ ,

$$\dot{\phi} = \int_{\Gamma} (\dot{\varphi} + \varphi H(V \cdot \mathbf{n})) d\Gamma. \quad (3.69)$$

**Caso 3**

Nesta situação,  $\phi$  corresponde a uma integral sobre o contorno do tipo:

$$\phi = \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (3.70)$$

e, para o tempo  $t$ ,

$$\phi^t = \int_{\Gamma_t} \varphi^t(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{N} \, d\Gamma_t. \quad (3.71)$$

A derivada de  $\phi$  em  $t = 0$  na direção  $V$  é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \left. \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} \varphi^t(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N} \, d\Gamma_t \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma} \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t(\mathbf{x}) \cdot F^{-T} \mathbf{n} \det F) \, d\Gamma \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma} (\dot{\varphi}_t(\mathbf{x}) \cdot F^{-T} \mathbf{n} \det F + \varphi_t(\mathbf{x}) \cdot (F^{-T} \mathbf{n} \det F)') \, d\Gamma \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Gamma} \dot{\varphi} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi \cdot \mathbf{n} \operatorname{div}_{\Gamma} V \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi \cdot \nabla V^T \mathbf{n} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.72)$$

Do mesmo modo que no segundo caso, para  $\Omega$  suficientemente regular, pode-se tomar  $V = vn$  de modo tal que

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \int_{\Omega} (\dot{\varphi} \cdot \mathbf{n} + (\varphi \cdot \mathbf{n})(v \operatorname{div} \mathbf{n} + \nabla v \cdot \mathbf{n}) - \nabla v \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\varphi} \cdot \mathbf{n} + \varphi \cdot \mathbf{n}(V \cdot \mathbf{n})H) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Finalizados estes exemplos, será continuado o estudo de sensibilidade da equação de estado e função objetivo.

**3.4.3 Sensibilidade da função objetivo e equação de estado**

Utilizando os resultados acima, a diferenciação da função objetivo (3.58) se obtém da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{u}; V) &= \left. \frac{d}{dt} \psi_t(\mathbf{u}_t) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\mathcal{G}_t(\mathbf{u}_t) \det F) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{d}{dt} (\mathcal{J}_t(\mathbf{u}_t) \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\|) \, d\Gamma \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\mathcal{G}}(\mathbf{n}) + \mathcal{G}(\mathbf{u}) \operatorname{div} V) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} (\dot{\mathcal{J}}(\mathbf{u}) + \mathcal{J}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\Gamma} V) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.74)$$

As funções  $\mathcal{G}_t(\mathbf{u}_t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{u}_t)$  e  $\mathcal{J}_t(\mathbf{u}_t) = \mathcal{J}(t, \mathbf{u}_t)$  dependem explícita e implicitamente de  $t$  através da resposta  $\mathbf{u}_t$  do sistema. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{G}}(\mathbf{u}) &= \mathcal{G}'(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}), \\ \dot{\mathcal{J}}(\mathbf{u}) &= \mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}),\end{aligned}\tag{3.75}$$

onde  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$  é a variação da resposta mecânica satisfazendo o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) - \mathbf{u}(\mathbf{x})}{t} - \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; V) \right\|_{\mathcal{H}} = 0.\tag{3.76}$$

Pode-se provar que, no exemplo aqui tratado (problema elástico linear), este elemento existe, e é uma derivada de Fréchet [43]. Substituindo em  $\dot{\psi}$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} (\mathcal{G}'(\mathbf{u}) + \mathcal{G}(\mathbf{u}) \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \mathcal{J}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}) d\Gamma \\ &= \psi'(\mathbf{u}; V) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}})\end{aligned}\tag{3.77}$$

Novamente, o cálculo de  $\dot{\psi}(\mathbf{u}; V)$  exige o conhecimento do termo  $\dot{\mathbf{u}}$ . Com este objetivo, deriva-se a equação de estado. Trabalhando com a forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ ,

$$\begin{aligned}\dot{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{t} = \left. \frac{d}{dt} a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s \cdot (\nabla \mathbf{v} F^{-1})^s \det F) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s \operatorname{div} V - \\ &\quad - \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s - \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{v} \nabla V)^s) d\Omega \\ &= a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V).\end{aligned}\tag{3.78}$$

Repetindo o procedimento com  $l(\cdot)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned}l'(\mathbf{v}; V) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{l_t(\mathbf{v}) - l(\mathbf{v})}{t} = \left. \frac{d}{dt} l_t(\mathbf{v}) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{v} \det F) d\Omega + \int_{\Gamma_f} \frac{d}{dt} (\mathbf{f}_t \cdot \mathbf{v} \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\|) d\Gamma, \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma_f} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma.\end{aligned}\tag{3.79}$$

Considerando que a equação (3.54) é satisfeita para todo tempo  $t$ , pode-se escrever:

$$a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) + a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = l'(\mathbf{v}; V) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (3.80)$$

Da mesma maneira que no caso geral, dois métodos clássicos para determinar  $\dot{\psi}$  surgem como consequência das diferentes formas de utilizar a equação acima: Método Direto e Método Adjunto.

### 3.4.4 Método Direto

Operando na equação (3.80),

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = l'(\mathbf{v}; V) - a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad (3.81)$$

sendo necessário lembrar que  $\mathbf{u}$  é solução da equação de estado (3.54) no instante  $t = 0$ .

Admitindo que  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$ , o problema acima tem solução única e sua resolução é idêntica à da equação de estado. De (3.78) e (3.79), a forma aberta do problema é:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s d\Omega &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v} \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma_f} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s - \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s \operatorname{div} V + \\ &+ \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{v} \nabla V)^s) d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Novamente, deve-se notar que este método possui a desvantagem de precisar resolver um sistema de equações para cada direção de variação  $V$ , contrário ao que acontece na alternativa mostrada no item seguinte.

### 3.4.5 Método Adjunto

Segue-se idêntica sequência de passos do caso geral já visto. Em primeiro lugar, propõe-se a determinação do único elemento  $\lambda \in \mathcal{V}(\Omega)$  tal que:

$$a(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \bar{\lambda}) \quad \forall \bar{\lambda} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (3.83)$$

Assim, esta equação é também válida para o elemento  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$ :

$$a(\lambda, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}). \quad (3.84)$$

Da mesma forma, a equação (3.81) é satisfeita para  $\mathbf{v} = \lambda$ , solução do problema (3.83). Levando em conta a simetria da forma  $a(\cdot, \cdot)$ ,

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \lambda) = l'(\lambda; V) - a'(\mathbf{u}, \lambda; V) = a(\lambda, \dot{\mathbf{u}}). \quad (3.85)$$

Combinando (3.85), (3.84), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}; \dot{\mathbf{u}}) = l'(\lambda; V) - a'(\mathbf{u}, \lambda; V), \quad (3.86)$$

expressão esta, que substituída em (3.83) fornece o valor da derivada do funcional  $\psi$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}(\mathbf{u}; V) &= \psi'(\mathbf{u}; V) + l'(\boldsymbol{\lambda}; V) - a'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; V), \\
 &= \int_{\Omega} (\mathcal{G}'(\mathbf{u}) + \mathcal{G}(\mathbf{u}) \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \mathcal{J}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda} \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma_f} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\lambda} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda}^s - \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda}^s \operatorname{div} V \\
 &\quad \quad + \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \boldsymbol{\lambda} \nabla V)^s) d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega). \tag{3.87}
 \end{aligned}$$

Pode-se observar que, resolvida a equação de estado e a equação adjunta, o valor de  $\dot{\psi}(\mathbf{u}; V)$  para cada direção  $V$  é obtido por substituição nos termos integrandos.

A seguir, se apresenta-se uma forma de obter a expressão (3.87) utilizando conceitos da teoria de otimização.

### 3.4.6 Método Lagrangeano

Considere-se o funcional  $\psi = \psi(\Omega, \mathbf{u})$  (a princípio  $\Omega$  e  $\mathbf{u}$  são independentes entre si) e a equação de estado como restrição de igualdade no domínio de  $(\Omega, \mathbf{u})$ . Com estas premissas, aplica-se a técnica Lagrangeana para incorporar a restrição ao funcional. Define-se assim o Lagrangeano<sup>3</sup>

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}), \tag{3.88}$$

e, dada uma perturbação no domínio na direção  $V$  através da transformação proposta, também a família

$$\mathcal{L}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) = \psi_t(\mathbf{u}_t) - a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + l_t(\mathbf{v}), \tag{3.89}$$

sendo evidente que para o tempo  $t = 0$ , ambas expressões coincidem, isto é,  $\mathcal{L}_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

Para  $\mathbf{u}_t$  solução da equação de estado,

$$\mathcal{L}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) = \psi_t(\mathbf{u}_t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega). \tag{3.90}$$

Se esta relação se verifica para todo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ , também vale para elementos  $\mathbf{v}_t \in \mathcal{V}(\Omega)$  dependentes do domínio  $\Omega_t$ :

$$\mathcal{L}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t) = \psi_t(\mathbf{u}_t) \tag{3.91}$$

Admitindo regularidade suficiente para se ter diferenciabilidade dos termos, a derivada de  $\mathcal{L}_t$ , aplicando a regra da cadeia, se escreve formalmente como se segue:

$$\dot{\mathcal{L}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \dot{\mathbf{u}}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \dot{\mathbf{v}}) + \mathcal{L}'(\mathbf{u}, \mathbf{v}; V). \tag{3.92}$$

<sup>3</sup>Para continuar com uma notação simplificada, a dependência em relação a  $\Omega$  não será colocada em evidência nas expressões a seguir.

Da definição do Lagrangeano (3.89), observa-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \dot{\mathbf{v}}) = -a(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{v}}) + l(\dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}(\Omega). \quad (3.93)$$

Em outras palavras, esta derivação parcial fornece a equação de estado, de valor zero quando avaliada para o elemento  $\mathbf{u}$ , solução da mesma. Por outra lado, dado  $\mathbf{u}$ , solução da equação de estado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \dot{\mathbf{u}}) = -a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}) \quad (3.94)$$

Pela simetria da forma bilinear  $a$ , pode-se escolher  $\lambda$  solução do sistema

$$a(\lambda, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{u}}(\dot{\mathbf{u}}) \quad \forall \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (3.95)$$

e assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \lambda; \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (3.96)$$

Isto permite concluir que para  $\mathbf{u}$  solução da equação de estado e para  $\lambda$  solução da equação adjunta (3.95) a derivada do Lagrangeano fornece o valor de  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(\mathbf{u}, \lambda; V) &= \mathcal{L}'(\mathbf{u}, \lambda; V) = \dot{\psi}(\mathbf{u}; V), \\ &= \int_{\Omega} (\mathcal{G}'(\mathbf{u}) + \mathcal{G}(\mathbf{u}) \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathcal{J}'(\mathbf{u}) + \mathcal{J}(\mathbf{u}) \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \lambda + \mathbf{b} \cdot \lambda \operatorname{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma_f} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \lambda + \mathbf{f} \cdot \lambda \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} (\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \lambda - \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \lambda^s \operatorname{div} V \\ &\quad \quad + \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \lambda \nabla V)^s) d\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.97)$$

## 3.5 Exemplos de sensibilidade

O propósito desta seção é apresentar expressões da sensibilidade de uma série de funções e funcionais utilizados nos capítulos 5 e 6 e, ao mesmo tempo, fornecer exemplos dos conceitos descritos ao longo do capítulo presente.

### 3.5.1 Energia de deformação

Seja o funcional  $\mathcal{W}$  dado pela equação

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega, \quad (3.98)$$

e, devido a uma variação no domínio, produto da transformação (3.41), a família de funcionais dependentes do parâmetro  $t$ :

$$\mathcal{W}^t = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \mathbf{C}(\operatorname{grad} \mathbf{u}^t)^s \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{u}^t)^s d\Omega_t, \quad (3.99)$$

A derivada de  $\mathcal{W}$  no tempo  $t = 0$  se escreve:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{W}}(\mathbf{u}; V) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{C}(\text{gradu}^t)^s \cdot (\text{gradu}^t)^s d\Omega_t \Big|_{t=0}, \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s \cdot (\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s \right) \det F d\Omega \Big|_{t=0}, \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{C}((\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s)' \cdot (\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s \det F d\Omega \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s \cdot (\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s (\det F)' d\Omega \Big|_{t=0}, \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \text{div} V d\Omega. \tag{3.100}
 \end{aligned}$$

Como se pode observar, uma das integrais incorpora o elemento  $\dot{\mathbf{u}}$ , derivada da resposta do problema em relação à variação de domínio. Assim, é necessária para sua determinação a derivação da equação de estado. De (3.78-3.79), torna-se

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{v} \nabla V)^s d\Omega \\
 - \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s \text{div} V d\Omega + \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \text{div} V) d\Omega \\
 + \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \text{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega). \tag{3.101}
 \end{aligned}$$

Tomando  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  e substituindo em  $\dot{\mathcal{W}}$ ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{W}}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \text{div} V d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \text{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \text{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \tag{3.102}
 \end{aligned}$$

Observe-se que esta função objetivo é particular na medida em que não foi necessário utilizar uma equação adjunta para obter sua derivada. Conhecida a resposta  $\mathbf{u}$  e dada a direção de mudança  $V$ , o valor de  $\dot{\mathcal{W}}$  é obtido por simples substituição.

### 3.5.2 Energia de deformação total $\Pi$

Seja o funcional  $\pi$  dado pela equação

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \tag{3.103}$$

Considerando uma perturbação no domínio dada pela transformação já conhecida, a derivada de  $\Pi_t$  no tempo  $t = 0$  é obtida operando em forma análoga ao exemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \mathbf{C}(\text{grad} \mathbf{u}^t)^s \cdot (\text{grad} \mathbf{u}^t)^s d\Omega_t - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Omega_t} \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{u}^t d\Omega_t - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}^t \cdot \mathbf{u}^t d\Gamma_t \right) \Big|_{t=0}, \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \text{div} V d\Omega - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \text{div} V) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \text{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \tag{3.104}
\end{aligned}$$

Dado que  $\mathbf{u}$  é solução do problema de equilíbrio e  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$ , este último é eliminado automaticamente da expressão acima, isto é,

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \text{div} V d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \text{div} V) d\Omega - \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \text{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\
&= -\dot{\mathcal{W}}(\mathbf{u}; V), \tag{3.105}
\end{aligned}$$

resultado totalmente esperado, se se parte do fato que  $\Pi(\mathbf{u}) = -\mathcal{W}(\mathbf{u})$ . Neste funcional, a não necessidade da equação adjunta é mais clara, dado que a variação de  $\Pi$  em relação a  $\mathbf{u}$  é zero num ponto de equilíbrio.

Será visto a seguir que, se utilizado o teorema de Green,  $\dot{\Pi}$  também pode ser também expresso por integrais definidas exclusivamente na fronteira. Como é sabido, a aplicação deste teorema está sujeita a condições de regularidade suficientes nos espaços cinemáticos  $\mathcal{V}(\Omega)$  e da fronteira  $\Gamma$ .

Partindo da equação (3.104), e utilizando as igualdades

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s, \quad W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}^s \tag{3.106}$$

$$\nabla \mathbf{u} \nabla V = \nabla (\nabla \mathbf{u} V) - (\nabla \nabla \mathbf{u}) V, \tag{3.107}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot ((\nabla \nabla \mathbf{u}) V)^s = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot (\nabla \nabla \mathbf{u}^s) V = \frac{1}{2} \nabla (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}^s) \cdot V, \tag{3.108}$$

$$\nabla (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{b})^T \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{b}, \tag{3.109}$$

o teorema de Green permite escrever

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^s - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot (\nabla (\nabla \mathbf{u} V))^s) d\Omega + \int_{\Gamma} W V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} V - \nabla \mathbf{b} V \cdot \mathbf{n}) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_f} (\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \text{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \tag{3.110}
\end{aligned}$$



Levando em conta que  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}V$  e  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{b}' + \nabla \mathbf{b}V$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}'^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}' d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_f} (\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{u}V + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Novamente, a equação de equilíbrio permite eliminar os termos contendo  $\mathbf{u}' \in \mathcal{V}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & \int_{\Omega} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_f} (\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{u}V + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.112)$$

Assumindo a particularidade de ser  $\mathbf{b}' = 0$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_f} (\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{u}V + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Este resultado mostra que com as hipóteses adotadas,  $\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V)$  independe do valor de  $V$  no interior do domínio. Como foi mostrado na seção 3.4.2, ainda é possível obter uma expressão onde somente a componente normal da velocidade na fronteira é relevante no cálculo de  $\dot{\Pi}$ . Não obstante isto representar uma aparente vantagem, é amplamente conhecido que o Método dos Elementos Finitos carece de precisão em avaliações sobre as fronteiras. Assim, as expressões de  $\dot{\Pi}$  envolvendo integrais em  $\Omega$  são preferidas quando se trabalha com aproximações numéricas usando o M.E.F. Este fato é especificamente explorado no último capítulo na obtenção de fatores de intensidade de tensão em fratura via análise de sensibilidade.

### 3.5.3 Problema de Signorini

Como foi visto anteriormente, a análise de sensibilidade em relação ao domínio, uma vez transportado a uma configuração única, transforma-se num problema de sensibilidade com domínio fixo, onde os termos sujeitos a variação fazem parte dos integrandos e não da integral propriamente dita. Esta mesma idéia repete-se no presente caso. Por este motivo analisa-se primeiramente o problema de Signorini num domínio fixo, dependendo de variáveis de projeto  $\mathbf{h}$  e sujeita a uma perturbação do tipo  $\mathbf{h}_t = \mathbf{h} + tV$ . Neste caso, contrariamente ao feito até o momento, assume-se que a matriz de elasticidade  $\mathbf{C}$  também varia com o tempo. Seguindo a notação em curso, o problema de Signorini após a perturbação se escreve:

$$\begin{cases} \text{Determinar } \mathbf{u}_t \in \mathcal{K}(\Omega) \text{ tal que:} \\ a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \geq l_t(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega), \end{cases} \quad (3.114)$$

onde

$$a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t) = \int_{\Omega} \mathbf{C}_t \boldsymbol{\epsilon}_t(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t(\mathbf{v}_t) d\Omega \quad (3.115)$$

$$l_t(\mathbf{v}_t) = \int_{\Omega} \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{v}_t d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_t \cdot \mathbf{v}_t d\Gamma \quad (3.116)$$

**Hipótese H1:** Existe uma forma bilinear  $a'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} = \sup_{\substack{\|\mathbf{u}\| \leq 1 \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \left| \frac{a_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{t} - a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right| = 0 \quad (3.117)$$

**Hipótese H2:** Existe uma forma linear  $l'(\mathbf{v})$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} = \sup_{\|\mathbf{v}\| \leq 1} \left| \frac{l_t(\mathbf{v}) - l(\mathbf{v})}{t} - l'(\mathbf{v}) \right| = 0 \quad (3.118)$$

**Teorema 6** O mapeamento  $[0, \delta) \ni t \rightarrow \mathbf{u}_t \in \mathcal{V}(\Omega)$  é direcionalmente diferenciável em  $t = 0^+$ , isto é,

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} + t\dot{\mathbf{u}} + o(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|o(t)\|}{t} = 0 \quad (3.119)$$

onde o elemento  $\dot{\mathbf{u}}$  é solução da inequação variacional

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{S}(\Omega) \\ a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \geq -a'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + l'(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}(\Omega), \end{cases} \quad (3.120)$$

sendo

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{ \mathbf{z} \in \mathcal{V}(\Omega) : \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ em } \Gamma_c^-(\mathbf{u}) \subset \Gamma_c; \ a(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = l(\mathbf{z}) \} \quad (3.121)$$

$$\Gamma_c^-(\mathbf{u}) = \{ \mathbf{x} \in \Gamma_c : g(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - s) = 0 \text{ em } \Gamma_c \} \quad (3.122)$$

A prova deste teorema encontra-se em [76],[74] e se baseia nos resultados de Mignot [62] sobre as propriedades de diferenciabilidade direcional da projeção de um espaço de Hilbert sobre um cone convexo (isto é o problema de Signorini).

O resultado acima é agora aplicado ao caso de sensibilidade à mudança de forma.

Seja a equação variacional (1.36),

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{K}(\Omega) \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq l(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega), \end{cases} \quad (3.123)$$

e perturbe-se o domínio  $\Omega$  segundo uma direção  $V$ . Isto define uma família de inequações variacionais do tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^t \in \mathcal{K}(\Omega_t) \\ a^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v} - \mathbf{u}^t) \geq l^t(\mathbf{v} - \mathbf{u}^t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega_t), \end{cases} \quad (3.124)$$

onde

$$a^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{v}^t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{C}(\text{grad} \mathbf{u}^t)^s \cdot (\text{grad} \mathbf{v}^t)^s d\Omega_t \quad (3.125)$$

$$l^t(\mathbf{v}^t) = \int_{\Omega_t} \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{v}^t d\Omega_t + \int_{\Gamma_{f_t}} \mathbf{f}^t \cdot \mathbf{v}^t d\Gamma_t \quad (3.126)$$

Do mesmo modo que no primeiro exemplo, transporta-se estas equações para o domínio de referência. Lembrando que

$$\mathbf{u}^t(\mathbf{x}_t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) = \mathbf{u}_t(\mathbf{x}),$$

as equações acima são reescritas como:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t \in \mathcal{K}(\Omega) \\ a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \geq l_t(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}(\Omega), \end{cases} \quad (3.127)$$

sendo as formas  $a$  e  $l$  agora definidas por:

$$a_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s \cdot (\nabla \mathbf{v} F^{-1})^s \det F d\Omega, \quad (3.128)$$

$$l_t(\mathbf{v}_t) = \int_{\Omega} \mathbf{b}_t \cdot \mathbf{v}_t \det F d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_t \cdot \mathbf{v}_t \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\| d\Gamma \quad (3.129)$$

Definido o problema na configuração original e dependendo do parâmetro  $t$ , pode-se aplicar o teorema acima usando a notação

$$\epsilon_t(\mathbf{u}_t) = (\nabla \mathbf{u}_t F^{-1})^s,$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C} \det F,$$

$$\mathbf{b}_t = \mathbf{b}_t \det F,$$

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_t \det F \|F^{-T} \mathbf{n}\|.$$

Falta somente determinar  $a'(\cdot, \cdot)$  e  $l'(\cdot)$ . Considerando  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  elementos fixos em  $\mathcal{V}(\Omega)$  e operando da forma já vista,

$$\begin{aligned} a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} (\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s + \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v} \nabla V)^s) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s \text{div} V d\Omega, \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$l'(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \text{div} V) d\Omega + \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \text{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \quad (3.131)$$

Aplicando o teorema, o elemento  $\dot{\mathbf{u}}$  também é solução do seguinte problema:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u} + t\dot{\mathbf{u}} + o(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|o(t)\|}{t} = 0 \quad (3.132)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{S}(\Omega) \\ a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) \geq -a'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + l'(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}(\Omega), \end{cases} \quad (3.133)$$

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{ \mathbf{z} \in \mathcal{V}(\Omega) : \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ em } \Gamma_c^-(\mathbf{u}) \subset \Gamma_c; \ a(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = l(\mathbf{z}) \} \quad (3.134)$$

Como se pode observar, a determinação desta derivada direcional implica na resolução de um problema não linear com características similares às do problema de estado. A seguir serão feitas algumas operações que permitem ter uma melhor interpretação do convexo  $\mathcal{S}(\Omega)$  e em que circunstâncias o mapeamento  $\Omega \rightarrow \mathbf{u}(\Omega)$  chega a ser diferenciável. Para isso, divide-se a fronteira  $\Gamma_c$  em tres partes diferentes,

$$\begin{aligned} \Gamma_c^{-,0}(\mathbf{u}) &= \{ \mathbf{x} \in \Gamma_c : g(\mathbf{u}(\mathbf{x})) < 0, \sigma_n(\mathbf{x}) = 0 \}, \\ \Gamma_c^{0,-}(\mathbf{u}) &= \{ \mathbf{x} \in \Gamma_c : g(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0, \sigma_n(\mathbf{x}) < 0 \}, \\ \Gamma_c^{0,0}(\mathbf{u}) &= \{ \mathbf{x} \in \Gamma_c : g(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0, \sigma_n(\mathbf{x}) = 0 \}, \\ \Gamma_c^-(\mathbf{u}) &= \Gamma_c^{0,-}(\mathbf{u}) \cup \Gamma_c^{0,0}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.135)$$

e analise-se a restrição incorporada na definição do conjunto  $\mathcal{S}(\Omega)$ :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = l(\mathbf{z}).$$

Dado  $\mathbf{u}$  solução e  $\sigma_n(\mathbf{u})$  a distribuição das tensões na fronteira  $\Gamma_c$ , a equação de equilíbrio permite escrever

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (3.136)$$

Para o elemento  $\mathbf{z} \in \mathcal{S}(\Omega)$ , tem-se que

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{S}(\Omega) \quad (3.137)$$

Assim, esta condição é automaticamente satisfeita em todo ponto pertencente a  $\Gamma_c^{-,0}$  e  $\Gamma_c^{0,0}$ . Inversamente, em  $\Gamma_c^{0,-}$ , a condição resultante é  $(\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) = 0$ . Com este resultado,  $\mathcal{S}(\Omega)$  pode ser reescrito como se segue:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{ \mathbf{z} \in \mathcal{V}(\Omega) : \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_c^{0,-}(\mathbf{u}); \ \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ em } \Gamma_c^{0,0}(\mathbf{u}); \} \quad (3.138)$$

É importante notar que, se  $\Gamma_c^{0,0}(\mathbf{u}) = \emptyset$ , o cone  $\mathcal{S}(\Omega)$  transforma-se num espaço linear  $\mathcal{S}_L$ ; neste caso, o problema de Signorini é diferenciável e  $\dot{\mathbf{u}}$  é solução do sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{S}_L(\Omega) \\ a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = -a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l'(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}_L(\Omega), \end{cases} \quad (3.139)$$

$$\mathcal{S}_L(\Omega) = \{ \mathbf{z} \in \mathcal{V}(\Omega) : \mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_c^{0,-}(\mathbf{u}); \} \quad (3.140)$$

## 3.6 Comentários finais

Ao logo do capítulo foram descritos uma série de formalismos de derivação assumindo que os operadores e variáveis envolvidas são suficientemente regulares para tornarem válidas tais operações.

Um aspecto importante consiste em determinar as hipóteses sobre o mapeamento (3.41) que tornam válida o transporte das expressões no domínio mapeado para o domínio de referência.

Resultados a este respeito foram dados por Zolésio [89]: O domínio  $\Omega$  é suposto  $C_k$ -regular (sua fronteira é fechada, limitada e pode ser representada localmente por uma função  $C^k$ -regular), com  $k \geq 1$  em problemas de segunda ordem e  $k \geq 2$  em problemas de quarta ordem.

A velocidade  $V(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$  é um vetor definido numa vizinhança  $U$  do fecho de  $\Omega$  tal que  $\bar{\Omega} \subset U$  com derivadas contínuas até a ordem  $k$ .

Assim, para  $t$  suficientemente pequeno, o mapeamento  $p_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + tV(\mathbf{x})$  é um homeomorfismo (mapeamento um-a-um com inversa contínua) de  $U$  para  $U_t = p_t(U)$  e sua inversa  $p_t^{-1}$  é  $C^k$ -regular, sendo  $\Omega_t$  é  $C^k$ -regular.

Prova-se também que se  $p_t(\mathbf{x})$  é um  $C^k$  homeomorfismo, o espaço de Sobolev  $H^m(\Omega)$  para  $m \leq k$  é preservado pela transformação, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{z_t(\mathbf{x} + tV(\mathbf{x})) : z^t(\mathbf{x}_t) \in H^m(\Omega_t)\}.$$

Hipóteses mais fracas na regularidade de  $\Omega$  são assumidas em [61] salientando que de uma forma geral, as eventuais singularidades da função de estado o função adjunta são localizadas na fronteira e com pouca influência em expressões repartidas no domínio.

Maiores detalhes sobre provas de existência das derivadas apresentadas podem ser vistas em [43],[61],[89].



# Capítulo 4

## OTIMIZAÇÃO DE FORMA NO PROBLEMA DE CONTATO

### 4.1 Introdução

Otimização estrutural é uma linha de trabalho que visa responder ao seguinte questionamento: Dado um sistema estrutural dependente de um conjunto de parâmetros de projeto; qual é a melhor escolha nos valores destes parâmetros de forma tal a maximizar o desempenho do sistema? Entenda-se “desempenho” em forma ampla: custo de fabricação, propriedades mecânicas e/ou estruturais, etc.. Assim como no caso de análise de sensibilidade, a geometria representa um tipo de variável especial dentro do espectro possível e quem trata deste caso é a denominada otimização de forma.

Existe uma grande parceria entre a área de otimização e a análise de sensibilidade. Em todo problema de otimização pretende-se passar de uma condição inicial das variáveis para uma condição denominada “ótima”. Naturalmente, precisa-se conhecer em que direção produzir as modificações de forma tal que a condição atual “melhore”, isto é, precisa-se conhecer a sensibilidade do problema. A grande maioria das técnicas numéricas de otimização requerem (no mínimo) o cálculo do gradiente da função objetivo para construir uma seqüência minimizante.

O objetivo deste Capítulo é apresentar resultados obtidos na otimização de forma em problemas com condições de contorno de contato, especificamente no problema de Signorini. Em poucas palavras, o objetivo consiste em determinar a configuração ótima que elimine concentrações de tensões e mantenha uma distribuição das mesmas quase constante sobre a superfície de contato (ver figura 4.1).

Considerando um corpo deformável apoiado sobre uma superfície rígida, dois tipos de problemas podem ser destacados:

1. as modificações de forma correspondem à superfície rígida,
2. as modificações de forma são feitas sobre o corpo deformável mantendo a superfície rígida inalterada.

No primeiro caso, somente o conjunto de deslocamentos admissíveis ( $\mathcal{K}(\Omega)$ ) altera sua

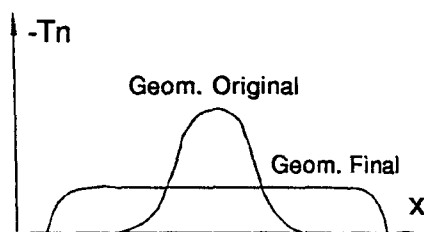


Figura 4.1 Distribuição de tensões original e ótima.

definição. No segundo, são modificados tanto o conjunto  $\mathcal{K}(\Omega)$  como as formas lineares e bilineares que definem o problema.

Um dos primeiros trabalhos relacionados a este assunto deve-se a Benedict & Taylor em [6] onde o problema do primeiro tipo é resolvido trabalhando sobre as condições de otimalidade de um Lagrangeano que envolve simultaneamente o problema de contato e a otimização de forma.

Na mesma publicação o trabalho [73] apresenta uma série de resultados relativos a análise de sensibilidade em inequações variacionais, primeiro passo para o tratamento específico da formulação de contato.

A partir de 1985 uma série de trabalhos de Haslinger et. al. ([37],[35],[39],[41],[38]) formulam o problema de otimização de forma do segundo tipo mencionado, abordando questões tais como existência e unicidade de solução, diferenciabilidade da função objetivo, etc. apresentando exemplos numéricos. Em 1988 publica-se o livro [40] resumindo os resultados mais importantes dos trabalhos anteriores. Contemporaneamente, discutem-se em [74],[75] as propriedades matemáticas da sensibilidade do problema de contato e contato com atrito conhecido (problema de Duvaut-Lions). Os mesmos aspectos são analisados em [76],[77] para o caso específico de variação de forma, utilizando a já mencionada técnica de mapeamento.

Nesta literatura, um dos aspectos particularmente destacado é a falta de diferenciabilidade da equação de estado, isto é, a relação  $\Omega \rightarrow u(\Omega)$  é contínua mas não diferenciável. Por caráter transitivo, este fato aparece também nas funções objetivo cujas derivadas envolvem a sensibilidade  $\dot{u}$  do problema de estado, complicando o tratamento numérico do problema de otimização. Assim, o problema pode ser abordado utilizando técnicas de otimização não diferenciável (*non-smooth optimization*), regularizando a equação de estado (via penalização por exemplo) ou escolhendo convenientemente as funções objetivo.

No que se refere ao tratamento numérico deste problema, pode-se observar nos citados trabalhos que as modificações sobre a geometria são feitas diretamente sobre a malha de elementos finitos, criando assim uma dependência com o tipo de discretização não muito



conveniente.

Neste trabalho pretende-se tirar vantagem da utilização da formulação contínua de sensibilidade junto a uma caracterização da geometria independente da malha de elementos finitos, visando dissociar o processo de otimização de uma discretização particular do domínio.

Os problemas estudados estão restritos a estados planos (domínio representado por um fechado em  $\mathbf{R}^2$ ). A definição do domínio é feita através das primitivas básicas do gerador de malhas: Arcos, Retas e B-Splines quadráticas. A análise do problema de contato é responsabilidade do algoritmo apresentado no Capítulo 1.

O presente Capítulo se organiza da seguinte forma: em primeiro lugar apresenta-se o problema de otimização de forma, definem-se as funções objetivo e restrições e avalia-se a sensibilidade das mesmas; em seguida descreve-se a simulação numérica proposta para resolver este problema: Aproximação via M.E.F, tratamento numérico da geometria através das curvas B-Spline, algoritmo de otimização, arquitetura de software montada e, finalmente, vários resultados numéricos.

## 4.2 Problema de geometria ótima

Em problemas de otimização de forma, o objetivo é achar uma configuração  $\Omega$  pertencente a um conjunto de configurações admissíveis  $\mathcal{O}$  que minimiza (localmente) uma função objetivo  $\Psi(\Omega)$ . Em geral, a função objetivo depende da resposta mecânica do sistema  $\mathbf{u}(\Omega)$ . Assim, denota-se

$$\psi(\Omega) = \psi(\Omega, \mathbf{u}(\Omega)) = \psi_{\Omega}(\mathbf{u}(\Omega)).$$

Um problema abstrato de otimização de forma pode ser enunciado como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } \Omega \in \mathcal{O} \text{ tal que:} \\ \psi_{\Omega}(\mathbf{u}(\Omega)) \leq \psi_{\hat{\Omega}}(\mathbf{u}(\hat{\Omega})) \quad \forall \hat{\Omega} \in \mathcal{O}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Assim colocada, a resolução deste problema requer a determinação da função objetivo, equação de estado e o conjunto admissível  $\mathcal{O}$ .

Como já foi dito na introdução, interessa aqui analisar a equação de estado correspondente ao problema de Signorini; a função objetivo deve ser tal que sua configuração ótima produza uma distribuição quase constante de tensões sobre a fronteira em questão; por último, quem determina as distintas configurações de  $\mathcal{O}$  são as variações geométricas da superfície de contato (note-se que a escolha do conjunto  $\mathcal{O}$  é decisivo na obtenção do  $\Omega$  ótimo).

Neste caso admite-se que a entidade geométrica que define a geometria da fronteira de contato está controlada por um número finito de parâmetros de controle ou variáveis de projeto

$$\chi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p\}; \quad \Omega = \Omega(\chi).$$

O conjunto de restrições que caracterizam o conjunto  $\mathcal{O}$  está dado por

$$\text{meas}(\Omega) = \alpha \quad \forall \Omega \in \mathcal{O} \quad (4.2)$$

$$\underline{\chi} \leq \chi \leq \bar{\chi} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \leq \beta \quad (4.4)$$

onde  $(\mathbf{n}, \tau)$  são os vetores normal e tangencial à fronteira de contato e  $\alpha, \beta$  constantes positivas. A primeira restrição impõe área equivalente para todo elemento do conjunto. A segunda limita o “raio” máximo e mínimo do domínio enquanto a última restrição é um limite sobre o grau de suavidade da fronteira de contato. Esta última restrição já forma parte das hipóteses assumidas no modelo de Signorini. Assim, o conjunto  $\mathcal{O}$  toma forma

$$\mathcal{O} = \{ \Omega(\chi) : \underline{\chi} \leq \chi \leq \bar{\chi}; \text{ meas}(\Omega(\chi)) = \alpha; \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \leq \beta \} \quad (4.5)$$

Dos três tipos de restrições impostas, somente as duas primeiras são utilizadas efetivamente no tratamento numérico do problema de ótimo, dado que uma escolha adequada dos limites nas variáveis de controle asseguram o cumprimento da última restrição<sup>1</sup>.

Um ponto importante a ser ressaltado é que a restrição de igualdade de área pode ser substituído no tratamento numérico por uma restrição de desigualdade. Pelas características das funções objetivo utilizadas, a direção de máxima descida é sempre uma direção de diminuição de área. Por tanto, uma restrição do tipo  $\text{meas}(\Omega(\chi)) \geq \alpha$  é suficiente, dado que o ótimo do problema é satisfeito para um ponto  $\chi$  de saturação da mesma, isto é, a condição original:  $\text{meas}(\Omega(\chi)) - \alpha = 0$ .

Para utilizar a maioria dos algoritmos de otimização com restrições precisa-se, tanto da sensibilidade da função objetivo, como das restrições do problema.

A sensibilidade da primeira restrição é simples:

$$\text{meas}(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega \Rightarrow (\text{meas}(\Omega))' = \int_{\Omega} \text{div} V d\Omega. \quad (4.6)$$

A sensibilidade da segunda restrição é, obviamente, trivial (a unidade!).

A seguir são estudadas duas funções objetivo utilizadas nas simulações numéricas deste trabalho.

### 4.2.1 Energia de deformação total $\Pi$

A utilização do potencial Energia de deformação total como função objetivo foi proposta no trabalho [6], mas resultados matemáticos sobre a validade deste funcional aparecem recentemente em [33] para o caso escalar e em [55] para o caso específico de contato.

Seja o sólido elástico considerado no Capítulo 1, respondendo à equação de estado (1.36).

Seja a função objetivo definida por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (4.7)$$

<sup>1</sup>A restrição sobre as oscilações da fronteira é colocada muitas vezes como uma forma de impedir a degradação numérica durante o processo de procura da geometria ótima. Em [61] alerta-se que este fato é produzido em geral por uma avaliação pouco precisa da sensibilidade do problema.

Admitindo uma perturbação no domínio na direção  $V$ , foi visto na seção 3.5.2 que a sensibilidade deste funcional é

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \operatorname{div} V d\Omega - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} V) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sendo  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}(\Omega)$  elemento solução (suficientemente regular) do problema unilateral (1.36) e obtida a distribuição de tensões na região de contato  $\Gamma_c$ , a seguinte equação de equilíbrio se satisfaz para todo elemento do espaço  $\mathcal{V}(\Omega)$ :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (4.9)$$

Abrindo a expressão,

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{v}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega). \quad (4.10)$$

Sendo  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}(\Omega)$  e substituindo em  $\dot{\Pi}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \operatorname{div} V d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} V) d\Omega - \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observe-se que nesta expressão persiste o elemento  $\dot{\mathbf{u}}$ . Não obstante, a determinação do mesmo em todo  $\Omega$  pode ser evitado a partir das seguintes considerações.

A última integral é relevante somente em pontos em contato efetivo com reação diferente de zero, isto é,

$$\Gamma_c^{0,-}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} \in \Gamma_c : s(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \sigma_n(\mathbf{x}) < 0\}, \quad (4.12)$$

Para estes pontos com reação diferente de zero, existe uma variação de  $\Omega$  suficientemente pequena tal que os mesmos continuam em contato efetivo, isto é,

$$\begin{aligned} \sigma_n(\mathbf{x}) < 0; (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) - s(\mathbf{x}) = 0 & \rightarrow (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) = s(\mathbf{x}) \\ \sigma_n^t(\mathbf{x}_t) < 0; (\mathbf{u}^t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x})) - s^t(\mathbf{x}) = 0 & \rightarrow (\mathbf{u}^t(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x}_t)) = s^t(\mathbf{x}_t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{u}^t(\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{n}^t(\mathbf{x}_t)) - (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))}{t} \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s^t(\mathbf{x}_t) - s(\mathbf{x})}{t} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Chegado a este ponto, se faz uso de uma simplificação já assumida no modelo. Na formulação do problema de Signorini, admite-se que as normais da superfícies em contato são praticamente colineares e que não sofrem variações significativas durante o processo de deformação. Toda configuração pertencente a  $\mathcal{O}$  deve satisfazer esta condição para que o modelo de análise proposto seja representativo. Assim, esta hipótese permite escrever

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))' = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s^t(\mathbf{x}_t) - s(\mathbf{x})}{t} = V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (4.15)$$

Substituindo em  $\dot{\Pi}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \operatorname{div} V \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{u}^s \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} V) \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(V \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Assim, este funcional possui a propriedade de ser F-diferenciável mesmo com a falta de regularidade da equação de estado utilizada. Mais ainda, sua sensibilidade para qualquer direção de perturbação  $V$ , pode ser avaliada por substituição na expressão acima. Resultados numéricos obtidos com este funcional foram apresentados em [27]. Nos anais do mesmo evento, o trabalho [34] propõe utilizar a função objetivo a seguir.

### 4.2.2 Energia Recíproca

Uma forma intuitiva de obter uma F.O. que garanta uma distribuição quase constante das reações de contato poderia ser obtida utilizando os conceitos de mínimos quadrados:

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\sigma_n(\mathbf{u}) - z_d\|_{0, \Gamma_c}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} (\sigma_n(\mathbf{u}) - z_d)^2 \, d\Gamma. \quad (4.17)$$

Alerta-se então que esta expressão pode carecer de sentido dado que num contexto geral as reações da fronteira nem sempre são elementos pertencentes a  $L^2(\Gamma_c)$ . Por outro lado a sensibilidade deste funcional precisa da determinação de  $\dot{\mathbf{u}}$ , fato pouco conveniente desde o ponto de vista numérico. Dirige-se a atenção para o fato que pode-se obter a regularidade necessária utilizando a propriedade de  $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}$  serem funcionais lineares e contínuos sobre elementos do espaço traço dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  sobre a fronteira  $\Gamma$ . Assim, define-se

$$\mathcal{V}_M(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\Omega) : \gamma \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Gamma/\overline{M}\} \quad (4.18)$$

onde  $M \subset \Gamma$  é uma parte aberta da fronteira tal que  $\Gamma_c \cap M \neq \emptyset$  e  $\Gamma_u \cap M = \emptyset$ . Tanto  $M$  como  $\mathcal{V}_M$  dependem continuamente da configuração  $\Omega$ . A este espaço associa-se a norma

$$\|\mathbf{v}\|_{M, \Omega} = \left( \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u}^s \, d\Omega \right)^2. \quad (4.19)$$

Com estes elementos, se introduz a função

$$\Psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{z}(\mathbf{u})\|^2, \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{z}(\mathbf{u})$  é solução do seguinte problema variacional:

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} (\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} - \mathbf{z}_d) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M. \quad (4.21)$$

Até o momento, tanto  $M$  como  $\mathbf{z}_d$  não estão definidos e varios critérios podem ser adotados. Uma escolha apresenta-se particularmente interessante devido a que, para esse caso, a derivada do funcional independe da determinação de  $\dot{\mathbf{u}}$ . Esta particularização consiste em tomar

$$\begin{aligned} a) \quad & \mathbf{z}_d = \mathbf{f} \text{ em } \Gamma_f \text{ e } \mathbf{z}_d = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_c \\ b) \quad & \Gamma/\overline{M} = \Gamma_u, \text{ isto é, } M = \Gamma_c \cup \Gamma_f \Rightarrow \mathcal{V}_M(\Omega) = \mathcal{V}(\Omega) \end{aligned} \quad (4.22)$$

com o qual o funcional se reescreve

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{z}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega \quad (4.23)$$

sendo  $\mathbf{z}$  a solução do problema variacional

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t \in \mathcal{V}(\Omega) \\ a_t(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \end{cases} \quad (4.24)$$

Neste caso particular de  $\Psi$ , prova-se em [36] que este funcional representa a denominada Energia de Deformação Recíproca (*Reciprocal Energy*) produto da formulação variacional homônima (ver [53], Cap. 8).

Determina-se a seguir a sensibilidade em relação a uma mudança de forma usando a mecânica de derivação já conhecida. Utilizando as relações de equilíbrio (4.10) e (4.24), reescreve-se  $\Psi$ :

$$\Psi = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{z}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma, \quad (4.25)$$

$$\Psi = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{z}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \, d\Gamma \quad (4.26)$$

Através da técnica de mapeamento, define-se uma família de funcionais  $\Psi_t(\mathbf{u}_t)$  e, aplicando os conceitos de sensibilidade,

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\mathbf{u}; V) = & - \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{z}}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{z} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{z}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, \text{div} V \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \dot{\mathbf{z}}^s \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{z} \nabla V)^s \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \, \text{div} V \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} \, \text{div} V) \, d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_f} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \, \text{div}_{\Gamma} V) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Levando em conta (4.10) e (4.24), os termos envolvendo  $\dot{\mathbf{z}}$  são eliminados. Por outra parte,

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \dot{\mathbf{u}}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^s d\Omega = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (4.28)$$

e, das considerações feitas na seção anterior,

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (4.29)$$

Substituindo,  $\dot{\Psi}$  toma a expressão final

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\mathbf{u}; V) = & \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{z} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{z}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \operatorname{div} V d\Omega \\ & + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(V \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{z} \nabla V)^s d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}^s \cdot \nabla \mathbf{z}^s \operatorname{div} V d\Omega \\ & - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} \operatorname{div} V) d\Omega - \int_{\Gamma_f} (\dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Deve-se notar que a para utilizar esta expressão, além de resolver o problema não linear de contato, precisa-se resolver um sistema linear dada pela equação adjunta (4.24).

### 4.3 Aproximação numérica

Até aqui, equação de estado, função objetivo, restrições e inclusive sensibilidade foram abordados desde um ponto de vista contínuo. A geometria, definida por expressões matemáticas, depende de uma série de variáveis de controle cuja modificação define a velocidade  $V$ , necessária para os cálculos de sensibilidade.

Esta seção está dedicada a apresentar a utilização das curvas B-Spline na determinação da velocidade de perturbação  $V$ , as expressões discretas do problema de ótimo após a utilização do método dos elementos finitos e o algoritmo de otimização utilizado.

#### 4.3.1 Controle da geometria por B-Splines

As coordenadas de um ponto numa curva B-Spline estão dadas pela expressão

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n X_i^k \Phi_i^k(\xi), \quad \Phi_i^1 = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

onde  $n$  é o número de nós de controle,  $X_i^k$  suas coordenadas,  $\varphi_i^k$  as funções de interpolação e  $\xi$  a coordenada curvilínea. Cada nó de controle tem influência somente sobre uma parcela da curva, proporcional ao grau de interpolação utilizado. No presente trabalho são utilizadas funções polinomiais de ordem 2. Observe-se que o gradiente da coordenada  $\mathbf{x}$  em relação às coordenadas dos nós  $X_i^k$  são as próprias funções de interpolação. Isto

permite definir a velocidade  $V$  na fronteira de uma forma natural. Para um ponto  $\xi$  da curva define-se a velocidade  $V$  da seguinte forma:

$$V_i^k(\mathbf{x}(\xi)) = [\nabla_{X_i^k} \mathbf{x}(\xi)] = \Phi_i^k(\xi). \quad (4.32)$$

Em muitas ocasiões, é útil definir nos nós de controle direções de movimento preferenciais. Denotando  $\eta$  ao vetor unitário indicando uma destas direções, a expressão da velocidade num ponto da fronteira toma a forma

$$V_i^\eta(\mathbf{x}(\xi)) = \sum_{k=1}^2 V_i^k(\mathbf{x}(\xi)) \eta^k. \quad (4.33)$$

Introduzindo nas equações (4.6)(4.16)(4.30), um campo vetorial  $V$  sobre o domínio  $\Omega$  tal que  $V|_{\Gamma_c} = V_i^k(\mathbf{x}(\xi))$  ou  $V|_{\Gamma_c} = V_i^\eta(\mathbf{x}(\xi))$  se obtém a sensibilidade de função objetivo e restrições em relação às coordenadas  $X_i^k$  do nó de controle ou a uma variação destas na direção  $\eta$ .

### 4.3.2 Elementos Finitos no problema de ótimo

Utilizando a aproximação por elementos finitos descrita na seção 1.6, para um elemento “e” são obtidas as relações

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^e &= \mathbf{N}\mathbf{U}^e, & V_h^e &= \mathbf{N}\mathbf{V}^e, \\ \nabla \mathbf{u}_h^e &= \nabla \mathbf{N}\mathbf{U}^e = \mathbf{G}\mathbf{U}^e, & \nabla V_h^e &= \nabla \mathbf{N}\mathbf{V}^e = \mathbf{G}\mathbf{V}^e, \\ \nabla^s \mathbf{u}_h^e &= \nabla^s \mathbf{N}\mathbf{U}^e = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, & \text{div} V_h^e &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{G}\mathbf{V}^e \\ \sigma_h^e &= \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}^e, & \text{div}_\Gamma V_h^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{G}\mathbf{V}^e \\ W_h^e &= \frac{1}{2} \nabla^s \mathbf{u}_h^e \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h^e & &= \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{B}\mathbf{U}^e \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$W_h^e = \frac{1}{2} \nabla^s \mathbf{u}_h^e \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h^e = \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{B}\mathbf{U}^e \quad (4.35)$$

Assim, as expressões discretas de (4.6), (4.16) e (4.30) estão dadas por:

#### • Energia de deformação total

Considerando  $\mathbf{u}_h$  a solução aproximada do problema de Signorini,

$$\Pi_h = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (W_h^e - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_h^e) d\Omega - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_f^e} \mathbf{f}_h^e \cdot \mathbf{u}_h^e d\Gamma, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_h &= \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (-\sigma_h^e \cdot (\nabla \mathbf{u}_h^e \nabla V_h^e)^s + W_h^e \text{div} V_h^e) d\Omega \\ &\quad - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (\dot{\mathbf{b}}_h^e \cdot \mathbf{u}_h^e + \mathbf{b}_h^e \cdot \dot{\mathbf{u}}_h^e \text{div} V_h^e) d\Omega \\ &\quad - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_f^e} (\dot{\mathbf{f}}_h^e \cdot \mathbf{u}_h^e + \mathbf{f}_h^e \cdot \dot{\mathbf{u}}_h^e \text{div}_\Gamma V_h^e) d\Gamma + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_c^e} \sigma_n(V_h^e \cdot \mathbf{n}) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.37)$$

• **Energia Recíproca**

Sendo  $\mathbf{z}_h$  solução do problema variacional aproximado

$$\begin{cases} \mathbf{z}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_h) \\ a_h(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Gamma_{ch}} \sigma_n(\mathbf{u}_h)(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_h) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_h), \end{cases} \quad (4.38)$$

e  $\mathbf{u}_h$  a solução aproximada do problema de Signorini,

$$\Psi_h = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \mathbf{C} \nabla^s \mathbf{z}_h^e \cdot \nabla^s \mathbf{z}_h^e d\Omega, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{u}; V) = & \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{z}_h^e \nabla V)^s \cdot (\nabla \mathbf{z}_h^e)^s d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{z}_h^e)^s \cdot (\nabla \mathbf{z}_h^e)^s \operatorname{div} V_h^e d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_{c^e}} \sigma_{nh}^e(\mathbf{u}_h^e)(V_h^e \cdot \mathbf{n}_h^e) d\Gamma - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_h^e \nabla V_h^e)^s \cdot (\nabla \mathbf{z}_h^e)^s d\Omega \\ & - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_h^e)^s \cdot (\nabla \mathbf{z}_h^e \nabla V_h^e)^s d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}_h^e)^s \cdot (\nabla \mathbf{z}_h^e)^s \operatorname{div} V d\Omega \\ & - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{z}_h^e + \mathbf{b} \cdot \mathbf{z}_h^z \operatorname{div} V) d\Omega - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma_f^e} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{z}_h^e + \mathbf{f} \cdot \mathbf{z}_h^z \operatorname{div}_\Gamma V_h^e) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.40)$$

• **Restrição**

$$\operatorname{meas}(\Omega_h) = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} d\Omega, \quad (4.41)$$

$$(\operatorname{meas}(\Omega_h))' = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} \operatorname{div} V_h^e d\Omega, \quad (4.42)$$

Para calcular a sensibilidade segundo as expressões acima, é preciso definir uma distribuição  $V_h$  de velocidades sobre  $\Omega_h$ . Dado  $V_i^k$ , resultado de (4.32) uma regra simples para obter  $V_h$  é a seguinte. Sendo  $I$  é o conjunto de de índices  $i, i = 1, \dots, m$  tal que  $\mathbf{x}_i$  é um ponto nodal em  $\Gamma_c$ , para cada ponto nodal  $\mathbf{x}_r$ , a velocidade  $V_h(\mathbf{x}_r)$  está dada por:

$$V_h(\mathbf{x}_r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \notin I \\ V_i^k(x_r(\xi)), & \text{se } r \in I \end{cases} \quad (4.43)$$

se as variáveis de projeto são as coordenadas  $X_i^k$ ,  $k = 1, 2$ , dos nós de controle da B-Spline ou

$$V_h(\mathbf{x}_r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \notin I \\ V_i^\eta(x_r(\xi)), & \text{se } r \in I, \end{cases} \quad (4.44)$$



caso tenham-se escolhido direções preferenciais.

A definição acima significa que a velocidade  $V_h$  é idênticamente igual a zero com exceção de uma “franja” de elementos ao longo da fronteira  $\Gamma_c$ . Esta forma de definir  $V_h$ , embora eficiente, não é a mais apropriada em termos de precisão nos resultados. A utilização de uma velocidade (não constante) cobrindo o uma região maior do domínio permite obter melhores resultados. Este aspecto é detalhadamente analisado em [61].

Finalmente, a o problema de otimização de forma na sua formulação discreta se escreve: Determinar  $\chi \in R^m$  solução de:

$$\min_{\chi \in \mathcal{O}_h} \Psi_h(\chi, u_h(\chi)), \quad (4.45)$$

$$\mathcal{O}_h = \{\chi : \underline{\chi} \leq \chi \leq \bar{\chi}; \text{meas}(\Omega_h(\chi)) = \alpha\} \quad (4.46)$$

Esta expressão tem a estrutura de um problema do típico de programação não linear com restrições. Existem numerosos métodos para resolver este tipo de problemas ([60],[31],[7], etc.), a maioria baseada na fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k + p_k d_k \quad (4.47)$$

onde  $x_{k+1}, x_k$  são as variáveis de projeto para as iterações  $k$  e  $k + 1$  respectivamente,  $d_k$  é uma direção de descida da função  $f$  e  $p_k$  o passo dado nesta direção. Esta última é calculada em função da sensibilidade da função objetivo e restrições. No seguinte item apresenta-se o algoritmo de otimização utilizado nas aplicações numéricas desenvolvidas.

## 4.4 Algoritmo de otimização

O algoritmo apresentado a seguir foi proposto por Herskovitz [47] [46]. Baseia-se na construção de uma sequência minimizante cujo ponto de acumulação satisfaz as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. Denomina-se de “ponto interior” por que, no caso de existirem somente restrições de desigualdade, os pontos da sequência minimizante pertencem sempre à região viável, isto é, satisfazem as restrições impostas. No caso de serem incluídas restrições de igualdade, estas últimas são satisfeitas somente no limite.

Como a única restrição de igualdade do problema proposto pode ser substituída, como já foi dito, por uma restrição de desigualdade, se apresentarão os princípios do algoritmo para este último caso.

Considere-se o problema de minimização com restrições de desigualdade

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{submetido a } g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $g(x) \in \mathbf{R}^m$  sendo esta restrição válida componente-a-componente ( $g_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ). As condições de otimalidade deste problema (“Karush-Kuhn-Tucker

conditions”) são:

$$\begin{aligned}\nabla f(x) + \sum_{i=0}^m \lambda_i \nabla g_i(x) &= 0 \\ \lambda_i g_i(x) &= 0 \\ g_i(x) &\leq 0 \\ \lambda_i &\geq 0\end{aligned}\tag{4.49}$$

Denominando

$$\begin{aligned}H(x, \lambda) &= \nabla^2 f(x) + \sum_{i=0}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x), \\ C(x) &= \nabla f(x), \\ A(x) &= [\partial_{x_1} g(x), \partial_{x_2} g(x), \dots, \partial_{x_n} g(x)]^T, \\ G(x) &\text{ matriz diagonal tal que } G_{ii} = g_i(x), \\ \Lambda &\text{ matriz diagonal tal que } \Lambda_{ii} = \lambda_i,\end{aligned}\tag{4.50}$$

as condições acima tem uma expressão matricial dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}C(x) + A^T(x) \lambda &= 0, \\ G(x) \lambda &= 0, \\ g(x) &\leq 0, \\ \lambda &\geq 0.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Para obter o ponto limite solução deste sistema, o método de Newton fornece um esquema iterativo dado por;

$$\begin{bmatrix} B & A^T(x) \\ \Lambda A(x) & G(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 - x \\ \lambda_0 - \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C(x) + A^T(x) \lambda \\ G(x) \lambda \end{bmatrix},\tag{4.52}$$

ou, definindo uma direção  $d_0 = x_0 - x$ ,

$$B d_0 + A^T(x) \lambda_0 = -C(x)\tag{4.53}$$

$$\Lambda A(x) d_0 + G(x) \lambda_0 = 0\tag{4.54}$$

Nestas equações,  $B$  ocupa o lugar da matriz hessiana  $H(x)$ . A utilização desta ou de outra matriz positiva definida com um esquema de atualização apropriado definirá a taxa de convergência do algoritmo.

Da equação (4.54), pode-se notar que neste esquema iterativo a direção  $d_0$  é tangente às restrições ativas:

$$\lambda_i \nabla g_i^T(x) d_0 + g_i(x) \lambda_{0i} = 0, \quad i = 1, m.\tag{4.55}$$

Assim,  $\nabla g_i^T(x) d_0 = 0$  para a restrição  $g_i$  ativa e portanto  $d_0$  é tangente à mesma. Esta propriedade, dependendo do tipo de restrição, pode gerar uma direção não viável, no

sentido de que não permite obter pontos interiores. Para evitar este problema o método propõe uma deflexão na direção original para o interior da região viável, incorporando valores negativos no termo a direita da igualdade da última equação:

$$B d + A^T(x)\bar{\lambda} = -C(x) \quad (4.56)$$

$$\Lambda A(x)d + G(x)\bar{\lambda} = -\rho\Lambda\omega \quad (4.57)$$

Neste sistema  $\rho, \omega_i, i = 1, m$  são valores positivos e  $\bar{\lambda}$  é uma nova estimativa de  $\lambda$ . Assim, a última equação equivale a dizer que  $\nabla g_i^T(x)d = -\rho\omega_i$  para as restrições  $g_i$  ativas. Porém, esta deflexão deve ser acotada para garantir que a mesma continue sendo uma direção de descida. Uma forma de limitar a mesma é

$$d^T \nabla f(x) \leq \alpha d_0^T \nabla f(x), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4.58)$$

o que implica, necessariamente que  $d^T \nabla f(x) \leq 0$ .

Para construir a direção de deflexão resolve-se o sistema

$$B d_1 + A^T(x)\lambda_1 = 0 \quad (4.59)$$

$$\Lambda A(x)d_1 + G(x)\lambda_1 = -\Lambda\omega \quad (4.60)$$

cuja segunda equação garante que a direção  $d_1$  é uma direção de descida das restrições ativas e, portanto, aponta ao interior da região viável. A partir deste novo vetor, a direção defletida pode ser escrita como

$$\begin{aligned} d &= d_0 + \rho d_1 \\ \bar{\lambda} &= \lambda_0 + \rho \lambda_1 \end{aligned} \quad (4.61)$$

que, substituída em (4.58), fornece uma nova forma de definir os limites da deflexão:

$$\rho \leq \frac{(\alpha - 1)d_0^T C(x)}{d_1^T C(x)} \quad (4.62)$$

Entretanto,  $\rho$  está também limitado pelo valor do módulo  $\|d\|^2$  (ver [46]), adotando-se um limite que respeite as duas restrições:

$$\rho := \min\{\varphi\|d_0\|^2; (\alpha - 1)d_0^T C/d_1^T C\}. \quad (4.63)$$

Finalmente, o algoritmo básico consiste nos seguintes passos:

Sejam  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\varphi \geq 0$  e  $\nu \in (0, 1)$ . Seja  $x \in \mathcal{O}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  simétrica positiva definida e  $\omega \in \mathbf{R}^m$  positivo.

**Passo 1: Cálculo de direção de busca**

1. Calcular  $(d_0, \lambda_0)$  resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} B d_0 + A^T(x)\lambda_0 &= -C(x) \\ \Lambda A(x)d_0 + G(x)\lambda_0 &= 0 \end{aligned}$$

Se  $\|d_0\| = 0$ , STOP.

2. Calcule  $(d_1, \lambda_1)$  a partir do sistema

$$\begin{aligned} B d_1 + A^T(x)\lambda_1 &= 0 \\ \Lambda A(x)d_1 + G(x)\lambda_1 &= -\Lambda\omega \end{aligned}$$

3. Se  $d_1^T C > 0$ ,

$$\begin{aligned} \rho &:= \min\{\varphi\|d_0\|^2; (\alpha - 1)d_0^T C/d_1^T C\}, \text{ ou} \\ \rho &:= \varphi\|d_0\|^2, \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

4. Calcule a direção de busca

$$\begin{aligned} d &:= d_0 + \rho d_1 \\ \bar{\lambda} &:= \lambda_0 + \rho \lambda_1 \end{aligned}$$

### Passo 2: Busca linear

Calcule  $t$ , o menor número da sequência

$$\begin{aligned} \{1, \nu, \nu^2, \nu^3, \dots\} \text{ satisfazendo:} \\ f(x + td) &\leq f(x) + t\nu C^T d \text{ e} \\ g_i(x + td) &< 0 \text{ se } \bar{\lambda}_i \geq 0, \text{ ou} \\ g_i(x + td) &\leq g_i(x) \text{ caso contrário} \end{aligned}$$

### Passo 3: Atualização de variáveis

1. Atualize

$$\begin{aligned} x &: x + td, \text{ e defina novos valores para} \\ \omega &> 0 \\ \lambda &> 0 \text{ e} \\ B &\text{ simétrica positiva definida.} \end{aligned} \tag{4.64}$$

2. GOTO Passo 1.

As diferentes formas de realizar a atualização do passo 3 fornecem uma família de algoritmos possíveis. As restrições para estas variáveis garantir convergência a um ponto de KKT estão descritas em [47] e [46].

A implementação utilizada deve-se ao trabalho [48], onde a matriz  $B$  está atualizada pela técnica BFGS (Quasi-Newton) comentada no Capítulo 1. O otimizador funciona em forma interativa com os programas que fornecem os valores da função objetivo, restrições e derivadas. Todos eles estão comandados por um programa “batch” externo; de acordo a um “flag”, o otimizador efetua as perações correspondentes à procura linear, para o qual precisa dos valores de função objetivo e restrições do problema para cada ponto, ou o cálculo da direção de procura  $d$ , sendo necessário neste caso os procedimentos de análise de sensibilidade.

Além do **Otimizador** que realiza os passos acima descritos (um ou outro dependendo do “flag” ativo), o conjunto de programas empregados podem ser sumarizados na seguinte lista:

**Aranha:** Gera malha para um valor dado das variáveis de controle de geometria.

**Ara2sdp:** A partir da malha gera condições de contorno e carregamentos.

**Conel:** Analiza o problema de contato elástico, fornecendo campo de deslocamentos e distribuição de tensões.

**Sensor:** Dependendo do “flag” ativo, determina valor da função objetivo, restrições e suas respectivas derivadas.

**Sen2Ara:** Gera definição geométrica (entrada de dados para o gerador) a partir de um novo valor das variáveis de projeto.

A próxima seção será dedicada a mostrar os resultados numéricos obtidos com esta técnica.

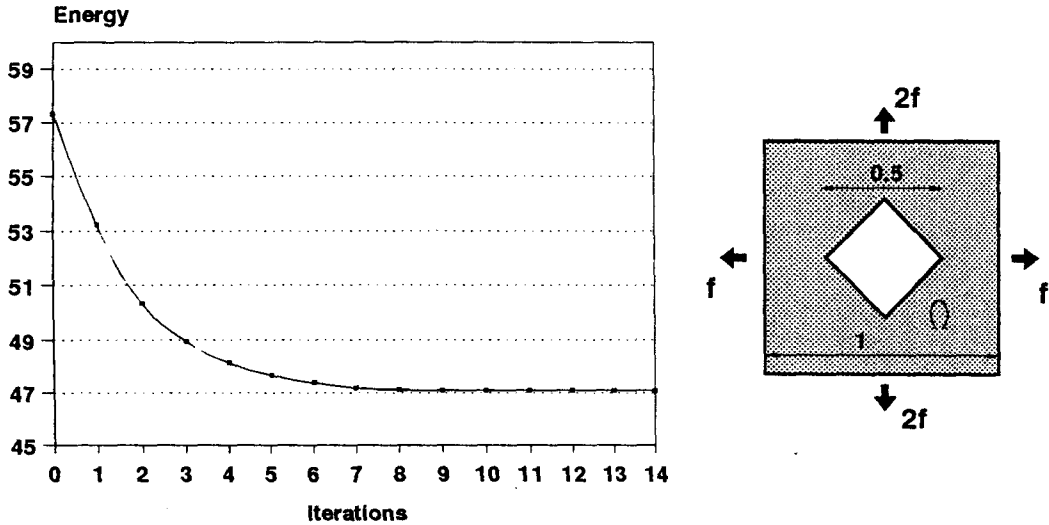


Figura 4.2 Exemplo 1. Diagrama do problema e seqüência de otimização

## 4.5 Exemplos numéricos

Com o objetivo de testar o comportamento numérico da teoria apresentada, foram rodados uma série de exemplos cujos resultados são apresentados a seguir. Seis destes problemas estão referidos a otimização da superfície de contato, quatro deles mostrando as diferenças numéricas obtidas pela utilização de diferentes funções objetivo. Alguns destes resultados foram apresentados em [22, 21], [27],[25].

O primeiro exemplo trata da otimização de forma de um problema elástico linear, tentando por em evidência a potencialidade do método para grandes variações de geometria.

Em todos os exemplos relativos ao problema de contato apresenta-se as malhas da configuração inicial e final e um gráfico com a distribuição de tensões correspondente a cada geometria.

Todos os exemplos foram rodados assumindo estado plano de deformações.

### Exemplo 1

Neste exemplo o domínio  $\Omega$  é uma quadrado com um furo no meio como indica a figura 4.2, submetido a esforços  $F_1 = 15$  and  $F_2 = 2F = 30$ . Devido à simetria do problema analisa-se somente um quadrante da região e controla-se a forma de  $\Omega$  pela geometria do furo interior. O objetivo é minimizar a energia de deformação  $\mathcal{W}$  (na configuração de equilíbrio  $\mathcal{W} = -\Pi$ ). As constantes de material são  $E = 3000$ ,  $\nu = 0.3$ .

Os resultados são vistos nas figuras 4.3, 4.4.

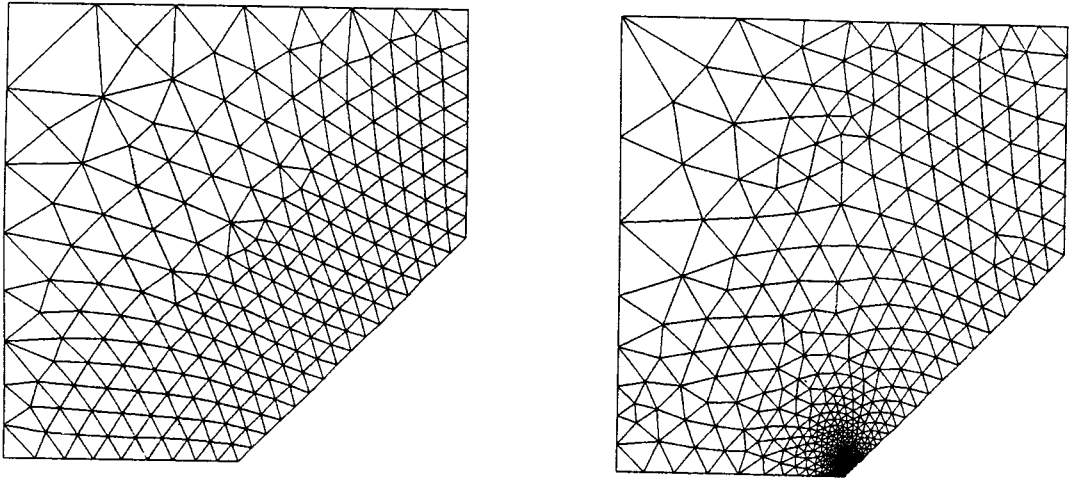


Figura 4.3 Exemplo 1. Configuração original e config. original adaptada

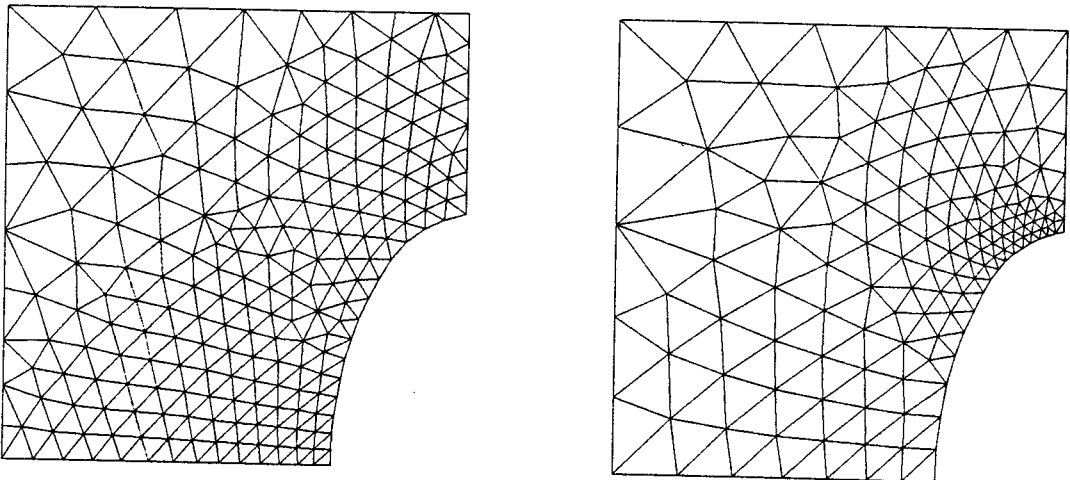


Figura 4.4 Exemplo 1. Configuração final e config. final adaptada

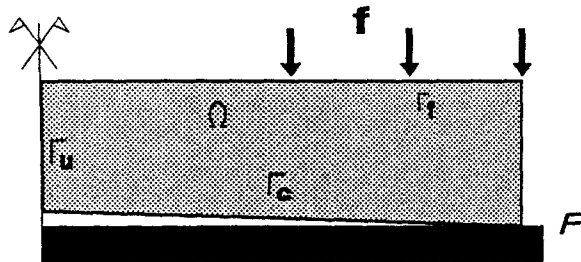


Figura 4.5 Exemplo 2.

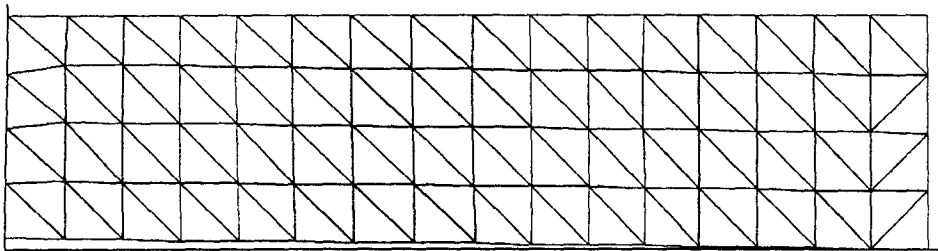


Figura 4.6 Exemplo 2. Configuração original

### Exemplo 2

A geometria original deste caso pode ser vista na figura 4.5 e corresponde à seguinte definição:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 4, \alpha(x) < y < 1\}, \quad \alpha(x) = -0.0125x + 0.05$$

A fundação rígida é dada por  $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < 0\}$ .

As constantes de material são  $E = 2150$ ,  $\nu = 0.29$  e a força distribuída  $f = (0.0, -5.78)$ ,  $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 < x < 4, y = 1\}$ .

Os resultados aparecem nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8.



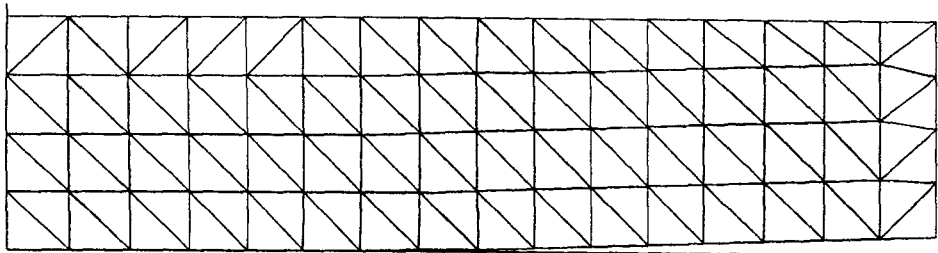


Figura 4.7 Exemplo 2. Configuração final

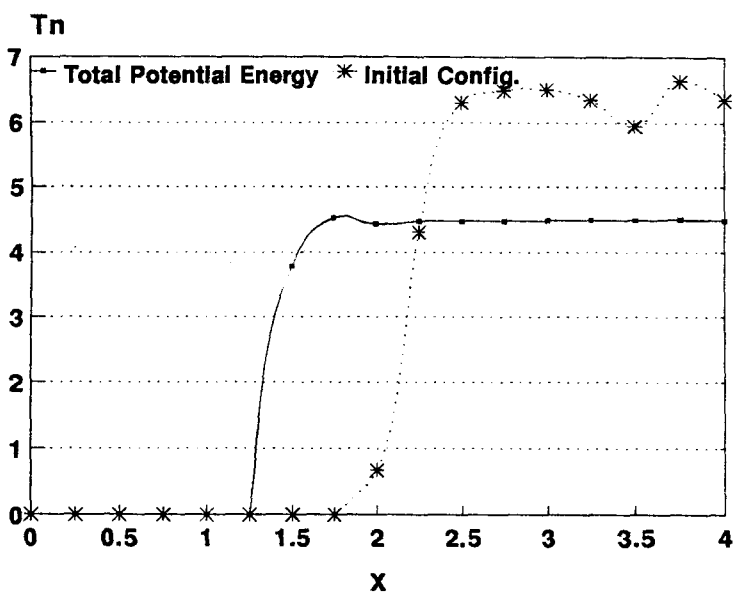


Figura 4.8 Exemplo 2. Tensões de contato

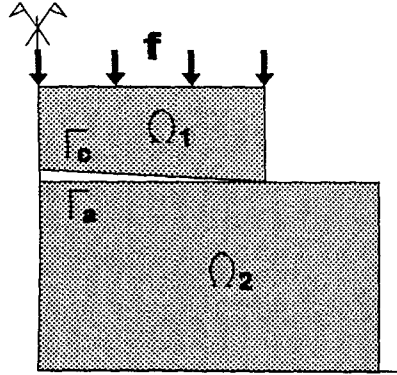


Figura 4.9 Exemplo 3.

### Exemplo 3

Neste exemplo testa-se o comportamento quando os dois corpos em contato são deformáveis. ( $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ ). A modificação na geometria é efetuada no corpo superior, mantendo o outro inalterado (figura 4.9). As geometrias podem ser definidas como segue:

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 4, \alpha(x) < y < 6\},$$

$$\alpha(x) = -0.05x + 4.2,$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 6, 0 < y < 4\}.$$

As propriedades de material são  $E_1 = 2150.0$ ,  $E_2 = 500.0$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.29$  e a força distribuida  $f = (0.0, -5.78)$ ,  $\Gamma_f = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 4, y = 6\}$ . As figuras 4.10 e 4.11 apresentam os resultados correspondentes.

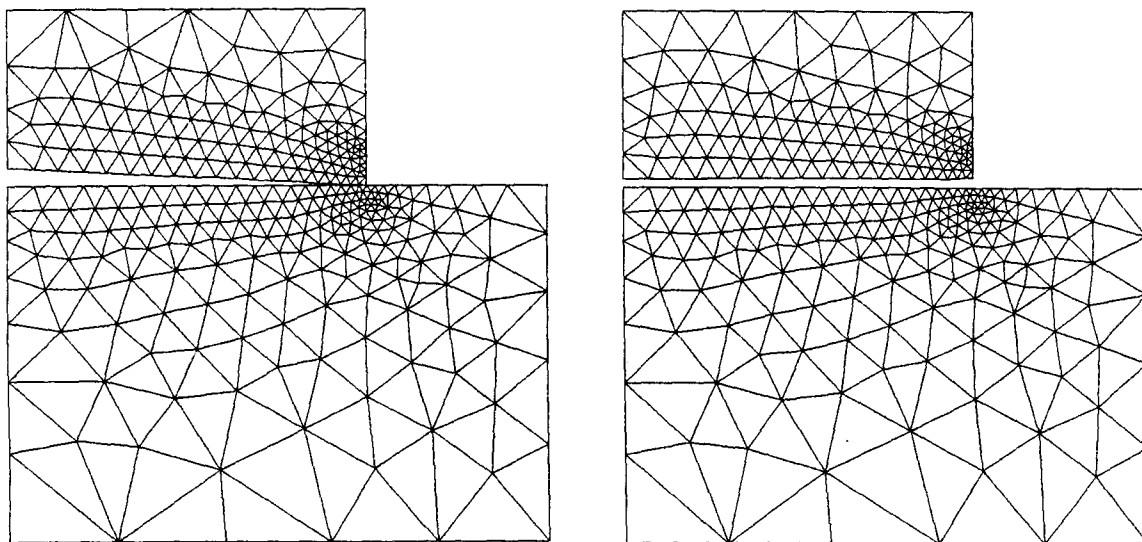


Figura 4.10 Exemplo 3. Configuração original e final

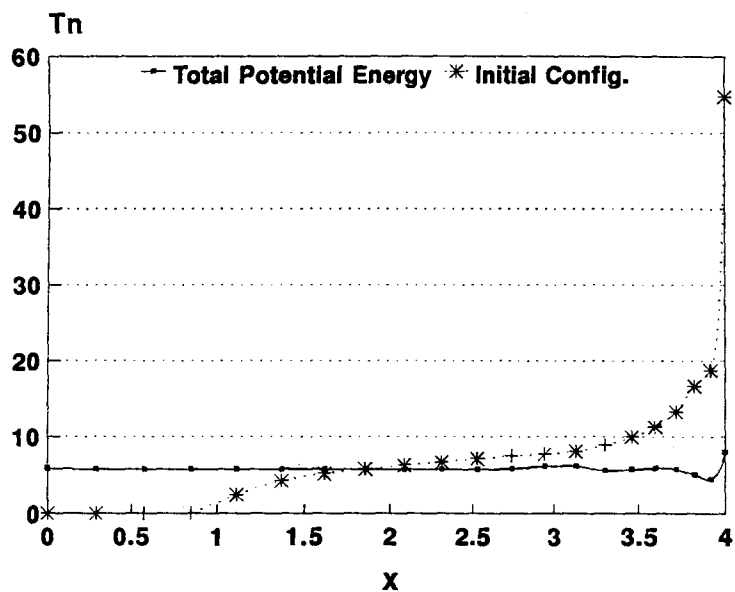


Figura 4.11 Exemplo 3. Tensões de contato

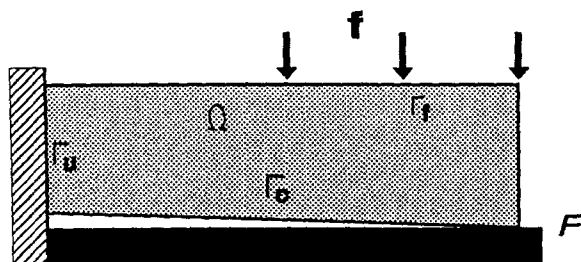


Figura 4.12 Exemplo 4.

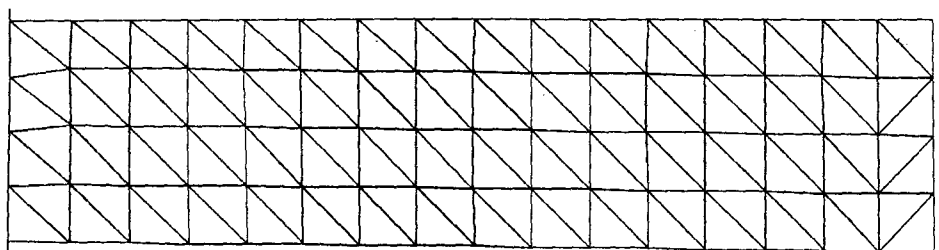


Figura 4.13 Exemplo 4. Configuração original

#### Exemplo 4

Neste caso, geometria, forças aplicadas e constantes de material são as mesmas do problema 2. A diferença reside no tipo de vínculo utilizado. Aqui o problema é estritamente coercivo (a viga está engastada) ao contrário do problema 2, onde o problema é semi-coercivo (condição de simetria). Foram testadas as duas funções objetivo estudadas para este tipo de problemas: Energia de Deformação Total e Energia Recíproca. Resultados nas figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16.

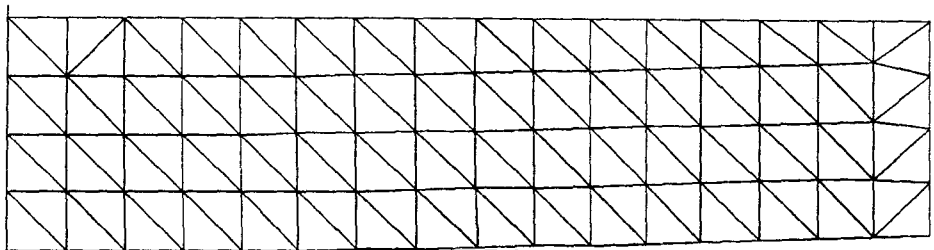


Figura 4.14 Exemplo 4. Configuração final (II).

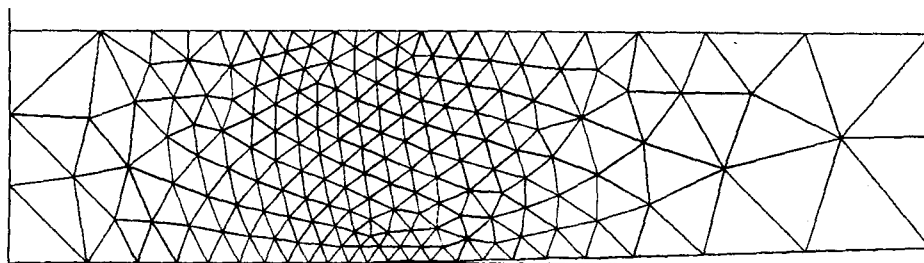


Figura 4.15 Exemplo 4. Configuração final (Energia Recíproca)

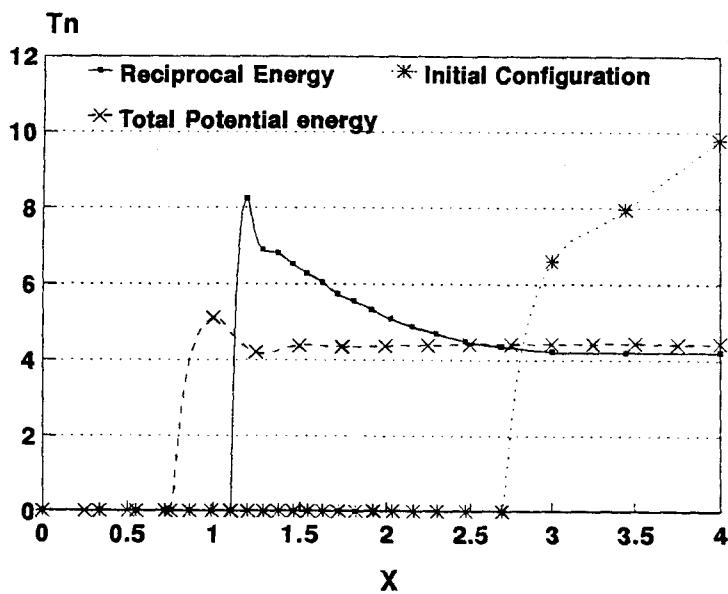


Figura 4.16 Exemplo 4. Tensões de contato

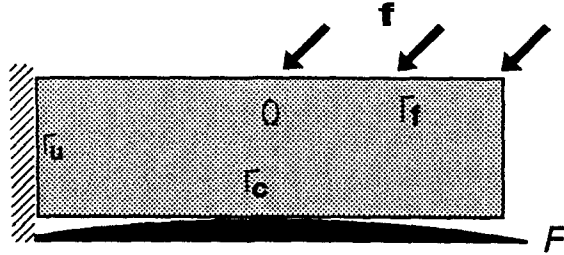


Figura 4.17 Exemplo 5.

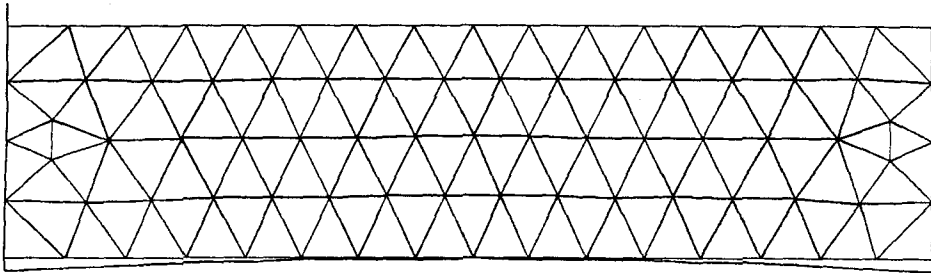


Figura 4.18 Exemplo 5. Configuração original

**Exemplo 5**

A geometria original  $\Omega$  e a fundação rígida  $\mathcal{F}$  estão agora dados por:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4, 0 < y < 1\},$$

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y + r)^2 + (x - 2)^2 < r^2\}, r = 40.025 .$$

As constantes de material são  $E = 2150$ ,  $\nu = 0.29$  e as forças distribuídas

$$f = (-5.78, -5.78), \quad \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x < 4, y = 1\} .$$

Resultados para as duas funções objetivo são apresentados nas figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21.

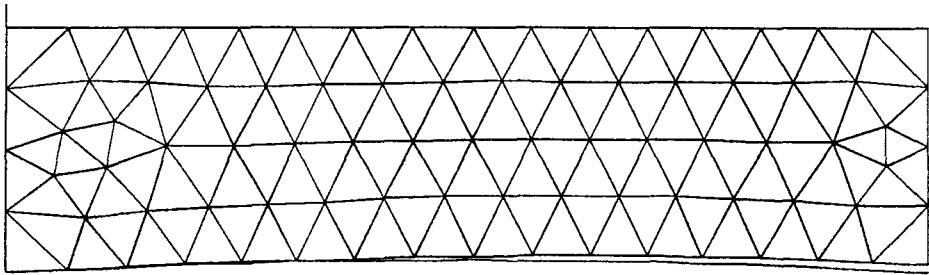


Figura 4.19 Exemplo 5. Configuração final (II).

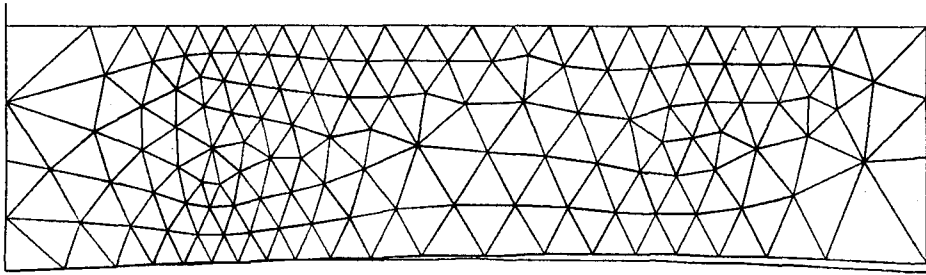


Figura 4.20 Exemplo 5. Configuração final (Energia Recíproca)

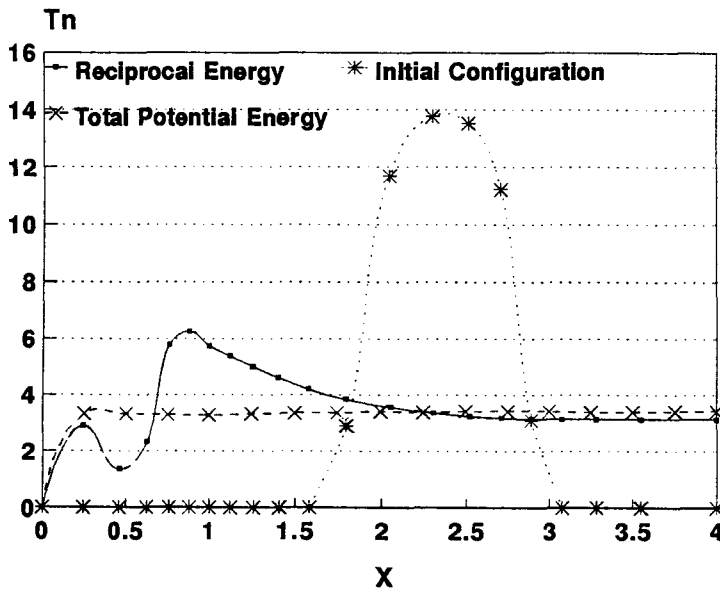


Figura 4.21 Exemplo 5. Tensões de contato

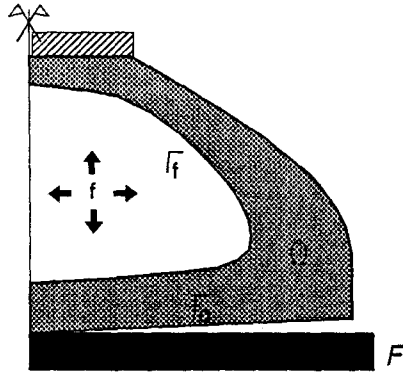


Figura 4.22 Exemplo 6.

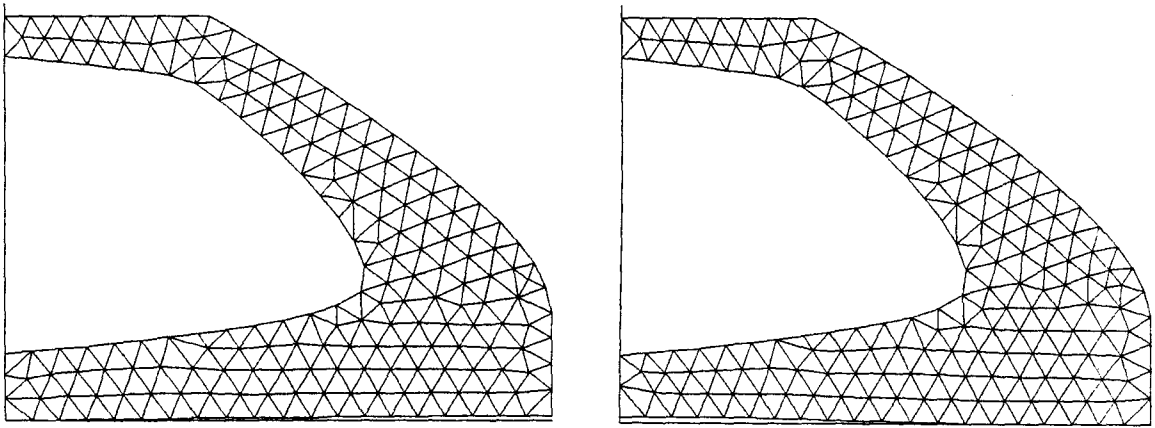


Figura 4.23 Exemplo 6. Configuração original e final

### Exemplo 6

A configuração original  $\Omega$  está mostrada na figura 4.22. A fronteira  $\Gamma_c$  e fundação rígida  $\mathcal{F}$  são definidas por:

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 4, y = -0.01x + 0.04\}; \quad \mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

$$E = 3000, \nu = 0.3$$

$$f = (0.0, -5.0), \quad \Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1.5, y = 3\}.$$

Resultados para as duas funções objetivo são apresentados nas figuras 4.23 e 4.24.

### Exemplo 7

Na figura 4.25 encontra-se a definição geométrica deste exemplo. Constantes de material  $E = 2150$ ,  $\nu = 0.29$  e forças de superfície  $f = (0.0, -5.0)$ . Resultados para as duas funções objetivo são apresentados nas figuras 4.26 e 4.27.



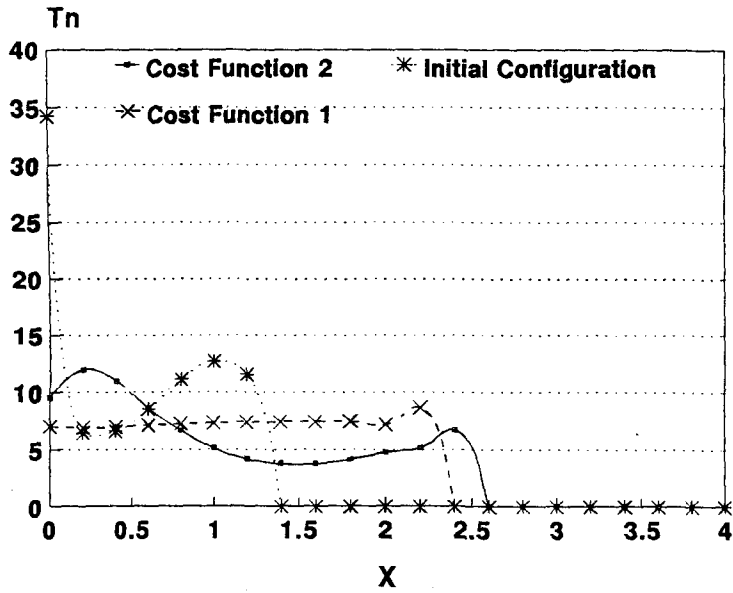


Figura 4.24 Exemplo 6. Tensões de contato

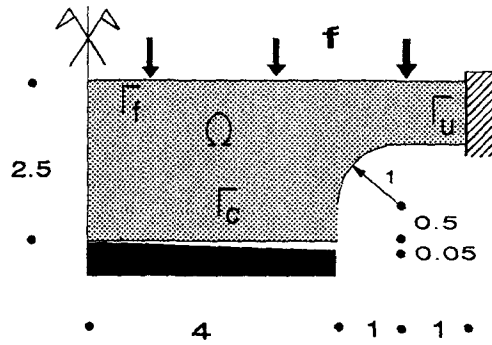


Figura 4.25 Exemplo 7.

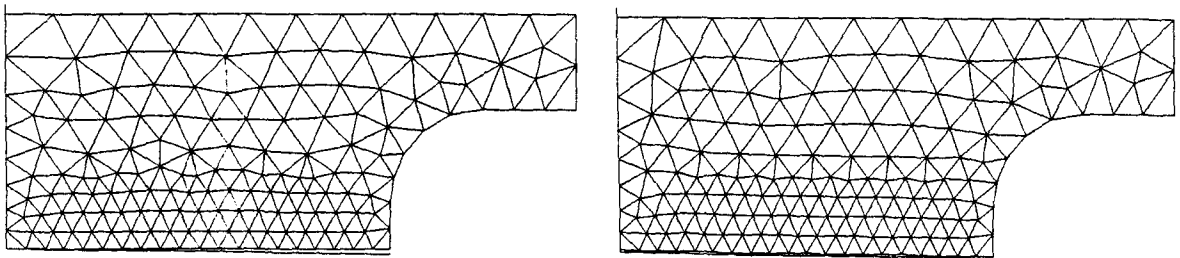


Figura 4.26 Exemplo 7. Configuração original e final

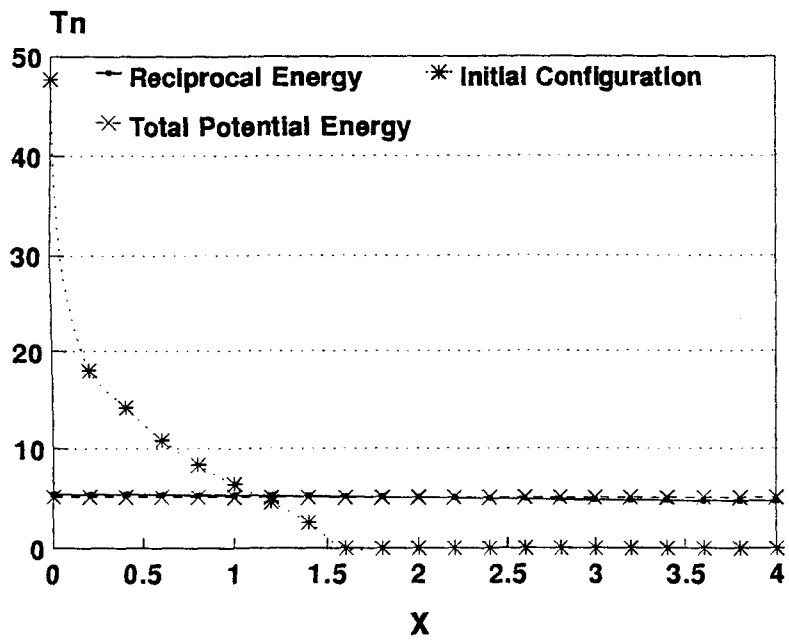


Figura 4.27 Exemplo 7. Tensões de contato

## 4.6 Conclusões

Como pode-se observar, a utilização de entidades geométricas na caracterização da geometria oferece grande versatilidade no controle da mesma. Por outro lado, esta forma de abordar o problema permite vincular em forma natural a formulação contínua de análise de sensibilidade e sua aproximação numérica: dada uma configuração e uma direção de mudança de geometria, a velocidade  $V$  fica completamente definida e independente da discretização por elementos finitos. Sua versão discreta  $V_h$  é somente uma consequência de uma malha particular.

Em termos de implementação numérica, a principal vantagem consiste no fato que cada módulo do processo (definição geométrica, geração de malha, análise, adaptatividade, análise de sensibilidade e algoritmo de otimização) pode ser tratado, atualizado e melhorado com total independência do resto do sistema.

Em relação aos resultados numéricos obtidos, pode-se apreciar que a primeira função custo produz, de fato, uma distribuição uniforme das reações de contato, porém, a segunda função objetivo possui algumas restrições. A primeira aparece na impossibilidade de utilizá-la em problemas semi-coercivos (exemplos 2 e 3), dado que o problema adjunto não pode ser resolvido (corpo submetido às reações de contato). A segunda restrição é a seguinte: sob as hipóteses (4.22), a segunda função objetivo representa o trabalho das reações de contato considerando o corpo livre de outros carregamentos. Assim, a distribuição de tensões obtida resulta ponderada pelos deslocamentos que esta mesma distribuição produz ao longo da fronteira de contato. Isto resulta evidente nos exemplos 4 e 5 onde as reações são maiores na parte da viga com deslocamentos menores. Já no problema 7, as características geométricas do exemplo produzem um deslocamento quase constante da fronteira  $\Gamma_c$  permitindo obter os resultados esperados [25].

Uma possível alternativa para driblar estes inconvenientes, seria adotar um espaço adjunto  $V_M$  mais geral, diferente de  $V$ . Desafortunadamente, com esta atitude a diferenciabilidade da função custo é perdida sendo necessária a utilização de técnicas de otimização não-diferenciável.



# Capítulo 5

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NA MECÂNICA DA FRATURA

### 5.1 Introdução

Freqüentemente utilizado como passo necessário em problemas de otimização, a análise de sensibilidade fornece informação relevante sobre o modelo em estudo. Este capítulo constitui um exemplo da variedade de aplicações possíveis, ao relacionar análise de sensibilidade à mecânica da fratura.

Seja um corpo fissurado tal que, devido a um carregamento externo, sofre uma abertura da trinca já existente. A ruptura das ligações mecânicas produz uma dissipação que pode ser medida pela variação da energia de deformação acumulada antes e depois da abertura da trinca. Visualizando o processo desde o ponto de vista da análise de sensibilidade, houve uma variação numa propriedade do corpo, produto de uma modificação na geometria deste. Assim, a formulação vista pode ser aplicada para avaliar esta variação de energia considerando a longitude da trinca como variável de controle.

Nas seções a seguir, será mostrado que a aplicação análise de sensibilidade de  $\Pi$  para três tipos de variação de domínio resulta num conjunto de conhecidas leis de conservação (ver [56]) dadas na forma de integrais independentes do caminho, uma das quais dá origem à famosa integral de Rice.

Esta forma de derivar tais integrais, além de permitir uma interpretação conceitualmente clara das mesmas, fornece uma expressão alternativa via integrais de domínio numericamente mais eficiente que a integração de fronteira quando é utilizado o método de elementos finitos.

Assim, utilizando ligeiras modificações num software direcionado à análise de sensibilidade (como o utilizado no capítulo anterior), podem ser obtidos resultados altamente precisos como os apresentados no final do capítulo.

## 5.2 Apresentação do problema. Notação

Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $R^n$  com fronteira  $\Gamma$  ocupado por um corpo  $\mathcal{B}$  submetido a forças de superfície  $\mathbf{f}$  sobre  $\Gamma$  e forças de corpo  $\mathbf{b}$  sobre  $\Omega$ .

Define-se

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{w} \in H(\Omega)/Ker\},$$

$$Ker = \{\mathbf{w} \in H(\Omega) : \nabla \mathbf{w}^s = 0\},$$

o espaço cociente dos movimentos admissíveis excluindo os deslocamentos de corpo rígido.  $H$  é um espaço de Hilbert apropriado e  $\sigma$  é o tensor de tensões obtido da derivação de um funcional de energia  $W$  em relação ao gradiente simétrico dos deslocamentos:

$$\sigma(\nabla \mathbf{u}^s) = \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}^s}. \quad (5.1)$$

Define-se também a forma linear  $l_\Omega(\cdot)$

$$l_\Omega(w) = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad (5.2)$$

onde as forças  $\mathbf{b} \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{f} \in L^2(\Gamma; \mathbf{R}^n)$  são dadas e satisfazem a condição de serem autoequilibradas, isto é,

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in Ker. \quad (5.3)$$

A solução do equilíbrio do corpo pode ser obtida pela resolução da equação variacional:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \\ \int_\Omega \sigma(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}^s \, d\Omega = l_\Omega(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Seja  $\Omega$  um elemento de um conjunto compacto  $\mathcal{O}$  de configurações admissíveis, i.e.,  $\Omega \in \mathcal{O}$  e assumase que as forças de superfície  $\mathbf{f}$  e de corpo  $\mathbf{b}$  estão bem definidas para cada elemento de  $\mathcal{O}$  e que o mapeamento  $\Omega \rightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{f})_\Omega$  é regular.

Observe-se que as diferenças em relação aos casos já vistos são mínimas: A princípio, trabalha-se com  $R^n$  e não se assume uma relação constitutiva linear, e o espaço de deslocamentos admissíveis não possui restrições de vínculo.

Tome-se então o funcional de energia de deformação total  $\Pi$ :

$$\Pi = \int_\Omega (W(\mathbf{u}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (5.5)$$

A variação de  $\Pi$  para uma variação no domínio  $\Omega$  numa direção de perturbação  $V$  está dada, como já visto na seção 3.5.2, por:

$$\dot{\Pi} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} W^t(\mathbf{u}^t) \, d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \mathbf{b}^t \cdot \mathbf{u}^t \, d\Omega_t - \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}^t \cdot \mathbf{u}^t \, d\Gamma_t \right) \Big|_{t=0}. \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^s d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s d\Omega + \int_{\Omega} W \operatorname{div} V d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} V d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Gamma} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V d\Gamma.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Sendo  $\dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$  solução da equação de equilíbrio,

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u} \nabla V)^s d\Omega + \int_{\Omega} W \operatorname{div} V d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} V d\Omega - \int_{\Gamma} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V d\Gamma.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A partir deste momento, particulariza-se um conjunto de velocidades  $V$ , para as quais o potencial  $\Pi$  permanece invariante.

## 5.3 Direções de invariância de $\Pi$

### 5.3.1 Translação rígida

Uma translação rígida está caracterizada por um campo de velocidades da forma

$$V = \text{constante sobre } \Omega \Rightarrow \nabla V = 0, \quad \operatorname{div} V = 0. \tag{5.9}$$

Se as forças externas para cada ponto material  $\mathbf{x}$  é mantida constante,

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^t(\mathbf{x}_t) \quad \forall t & \Rightarrow \dot{\mathbf{b}} = 0, \\
\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_t) \quad \forall t & \Rightarrow \dot{\mathbf{f}} = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Aplicando estas hipóteses, cada termo de (5.8) é identicamente igual a zero e, portanto,  $\dot{\Pi}$  é nulo para todo campo de velocidade  $V$  e forças  $(\mathbf{b}, \mathbf{f})$  satisfazendo (5.9) e (5.10).

### 5.3.2 Rotação Rígida

Uma rotação rígida está definida por uma velocidade  $V$  tal que:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} = A\mathbf{x} \quad A \in \text{Skew}, \quad \nabla V = A, \tag{5.11}$$

onde  $\mathbf{w}$  é o vetor axial do tensor antissimétrico (constante)  $A$ . É bem conhecido o fato de que se  $A \in \text{Skew}$ ,

$$A \cdot S = 0 \quad \forall S \in \text{Sym}, \tag{5.12}$$

$$\operatorname{div} V = \mathbf{I} \cdot A = 0, \quad \operatorname{div}_{\Gamma} V = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot A = 0. \tag{5.13}$$

onde  $(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  é o operador de projeção sobre um hiperplano com normal externa  $\mathbf{n}$ . Assume-se também que as forças de corpo sofrem rotação junto com o corpo, isto é,

$$\dot{\mathbf{b}} = A\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{f}} = A\mathbf{f}. \quad (5.14)$$

Aplicando estes resultados em (5.8), e a partir das propriedades dos tensores antisimétricos,

$$\dot{\Pi} = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u} A)^s d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot A\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot A\mathbf{u} d\Gamma. \quad (5.15)$$

Considerando a condição de equilíbrio e  $\nabla V = A$  (constante), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla(A\mathbf{u}))^s d\Omega &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (A\nabla\mathbf{u})^s d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot A\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot A\mathbf{u} d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Assim,

$$\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = \int_{\Omega} (-\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla\mathbf{u}A)^s + \boldsymbol{\sigma} \cdot (A\nabla\mathbf{u})^s) d\Omega = \int_{\Omega} 2(\boldsymbol{\sigma} \cdot (A\nabla\mathbf{u}^s)) d\Omega. \quad (5.17)$$

Deve-se notar que, não obstante a mudança de domínio esteja simulada por um “movimento do corpo”, cada ponto material nas equações apresentadas mantém seu sistema local de referência inalterado, isto é, as propriedades do material em cada ponto não têm sua orientação modificada. Isto implica em que será necessário assumir um comportamento isotrópico para evitar modificações no valor de  $\Pi$ . Incluindo esta hipótese, pode-se usar o Primeiro Teorema da Representação para Funções Tensoriais Isotrópicas [32]:

**Teorema 7** *Uma função*

$$G : \mathcal{S} \rightarrow \text{Sym} \quad (\mathcal{S} \subset \text{Sym}) \quad (5.18)$$

*é isotrópica se e somente se existem funções escalares  $\phi_0, \phi_1, \phi_2 : \mathbf{I}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{R}$  tal que*

$$G(S) = \phi_0(\mathbf{I}_S)\mathbf{I} + \phi_1(\mathbf{I}_S)S + \phi_2(\mathbf{I}_S)S^2 \quad (5.19)$$

*para todo  $S \in \mathcal{S}$ .*

Aplicando este teorema e denotando  $\mathbf{I}_{\nabla\mathbf{u}^s}$  o conjunto dos invariantes principais do tensor simétrico  $\nabla\mathbf{u}^s$  e  $\phi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  escrevem-se as correspondentes funções escalares,

$$\boldsymbol{\sigma}(\nabla\mathbf{u}^s) = \phi_0(\mathbf{I}_{\nabla\mathbf{u}^s})\mathbf{I} + \phi_1(\mathbf{I}_{\nabla\mathbf{u}^s})\nabla\mathbf{u}^s + \phi_2(\mathbf{I}_{\nabla\mathbf{u}^s})\nabla\mathbf{u}^s\nabla\mathbf{u}^s. \quad (5.20)$$

Assim, devido às propriedades dos tensores simétricos e antissimétricos,

$$\mathbf{I} \cdot A\nabla\mathbf{u}^s = \nabla\mathbf{u}^s \cdot A = 0, \quad (5.21)$$

$$\nabla\mathbf{u}^s \cdot A\nabla\mathbf{u}^s = \nabla\mathbf{u}^s\nabla\mathbf{u}^s \cdot A = 0, \quad (5.22)$$

$$\nabla\mathbf{u}^s\nabla\mathbf{u}^s \cdot A\nabla\mathbf{u}^s = \nabla\mathbf{u}^s\nabla\mathbf{u}^s\nabla\mathbf{u}^s \cdot A = 0. \quad (5.23)$$

Aplicando estes resultados em (5.17), obtém-se finalmente  $\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = 0$ .



### 5.3.3 Mudança de escala

Este é outro tipo de variação de domínio que, sob um conjunto específico de esforços externos e relação constitutiva, não modifica o valor de  $\Pi$ . As hipóteses são:

$$V = \alpha \mathbf{x} \Rightarrow \nabla V = \alpha \mathbf{I}, \quad \operatorname{div} V = D\alpha, \quad \operatorname{div}_{\Gamma} V = (D-1)\alpha, \quad (5.24)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = C_b \alpha \mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{f}} = C_f \alpha \mathbf{f}, \quad (5.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = C \nabla \mathbf{u}^s \quad (\text{equação constitutiva elástica linear}) \quad (5.26)$$

onde  $D$  é a dimensão espacial do problema:  $D = 1, 2$ , ou  $3$ .  $C_f$  e  $C_b$  dependem de  $D$  e  $\alpha$  é uma constante arbitrária. Aplicando estas condições em (5.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = & (-1 + \frac{1}{2}D)\alpha \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - (D + C_b)\alpha \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & - (D - 1 + C_f)\alpha \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.27)$$

de onde é possível deduzir os coeficientes  $C_b, C_f$  tal que os termos entre parêntesis são iguais a um único coeficiente  $-C_u$  dependente da dimensão  $D$ . Estas condições são:

$$-1 + \frac{1}{2}D = -C_u, \quad D + C_b = -C_u, \quad D - 1 + C_f = -C_u. \quad (5.28)$$

Sustituindo estes valores para cada dimensão,

$$D = 1 \Rightarrow C_u = \frac{1}{2} \quad ; \quad C_b = -\frac{3}{2} \quad ; \quad C_f = -\frac{1}{2}, \quad (5.29)$$

$$D = 2 \Rightarrow C_u = 0 \quad ; \quad C_b = -2 \quad ; \quad C_f = -1, \quad (5.30)$$

$$D = 3 \Rightarrow C_u = -\frac{1}{2} \quad ; \quad C_b = -\frac{5}{2} \quad ; \quad C_f = -\frac{3}{2}. \quad (5.31)$$

Desta forma, a expressão (5.27) pode se reescrita como:

$$\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = -C_u \left\{ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \right\}. \quad (5.32)$$

Finalmente, a condição de equilíbrio faz esta última equação igual a zero.

Concluindo, foram obtidos, desde o ponto de vista da análise de sensibilidade, três direções de variação de domínio para as quais o funcional  $\Pi$  permanece inalterado. Os próximos passos, estão dirigidos a reescrever  $\dot{\Pi}$  para estes movimentos na forma de integrais de fronteira.

## 5.4 Sensibilidade de $\Pi$ em termos de integrais de fronteira

Foi visto na seção 3.4.2 que, assumindo regularidade suficiente no espaço do deslocamentos admissíveis e na geometria do domínio  $\Omega$ , o teorema de Green pode ser aplicado para obter expressões de sensibilidade dadas por integrais de superfície. Este resultado mostra inclusive a independência de  $\dot{\Pi}$  do valor da velocidade no interior de  $\Omega$  e que somente o traço de  $V$  em  $\Gamma$  é significativo.

Levando em conta a equação (5.7), as igualdades

$$\nabla \mathbf{u} \nabla V = \nabla (\nabla \mathbf{u} V) - (\nabla \nabla \mathbf{u}) V, \quad (5.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot ((\nabla \nabla \mathbf{u}) V)^s = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \nabla \mathbf{u}^s) V = (\nabla W) \cdot V, \quad (5.34)$$

$$\nabla (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{b})^T \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{b}, \quad (5.35)$$

junto ao teorema de Green, permitem obter uma nova expressão de (5.7):

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}^s - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla (\nabla \mathbf{u} V))^s) d\Omega + \int_{\Gamma} W V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} V - \nabla \mathbf{b} V \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.36)$$

Sustituindo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u} V$  em (5.36),

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}'^s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}' d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{b} V - \dot{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{u} V + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dado que o equilíbrio é satisfeito e  $\mathbf{u}' \in \mathcal{V}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{b} V - \dot{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} V + \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_{\Gamma} V) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 5.4.1 Translação rígida

A partir das hipóteses (5.9-5.10), a expressão (3.112) toma a forma

$$\dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{b} V \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} V d\Gamma = 0. \quad (5.39)$$

Com o objetivo de eliminar as integrais de domínio, faz-se necessário assumir também a condição  $\nabla \mathbf{b} = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} V d\Gamma = 0 \\ &= \int_{\Gamma} [(W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n} d\Gamma \cdot V = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Como esta derivada é identicamente nula para toda velocidade representando uma translação rígida, escreve-se que

$$J = \int_{\Gamma} [(W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}] \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (5.41)$$

Esta expressão é comumente conhecida na Mecânica da Fratura como integral J. Na mesma, a influência de um campo de forças de corpo  $\mathbf{b}$  (constante no domínio), é incluído.

### 5.4.2 Rotação rígida

Da equação (3.112) e considerando as condições (5.11), (5.14) e (5.20), escreve-se

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{b} V - \nabla V \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla V \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} V) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Para evitar integrais de domínio, impõe-se que  $\nabla \mathbf{b} V = \nabla V \mathbf{b}$ . Logicamente, se as forças de corpo são nulas esta última restrição é automaticamente satisfeita.

Aplicando a condição acima, a equação (5.42) adota a forma

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Gamma} ((W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} \cdot V d\Gamma + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla V \mathbf{u} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} (((W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}) d\Gamma \cdot \mathbf{w} = 0, \end{aligned} \quad (5.43)$$

Esta expressão é também igual a zero para todo vetor axial  $\mathbf{w}$ . Assim,

$$L = \int_{\Gamma} [((W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{n} \wedge \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \wedge \mathbf{u}] d\Gamma = 0, \quad (5.44)$$

e, na Mecânica da Fratura, é conhecida como integral L.

### 5.4.3 Mudança de escala

Esta é a terceira das direções de perturbação pesquisadas. Utilizando as condições (5.24), (5.25), (5.26) e substituindo em (3.112), o resultado é:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= - \int_{\Omega} C_b \alpha \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{b} V \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ &- \int_{\Gamma} C_f \alpha \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} V d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) V \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} (D - 1) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Mais uma vez deve-se impor uma condição adicional para evitar integrais no domínio:  $C_b \alpha \mathbf{b} = \nabla \mathbf{b} V$ . É evidente que um problema onde não se consideram forças de corpo, isto é,  $b = 0$ , satisfaz a última condição. Incluindo esta restrição em (5.45), obtém-se que

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}(\mathbf{u}; V) &= \int_{\Gamma} \left[ (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \right] \mathbf{n} \cdot V \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} (C_f + (D - 1)) \alpha \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left[ \left( (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{n} \cdot V + C_u \alpha \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \right] d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} \left[ \left( (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + C_u \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \right] d\Gamma \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Esta equação é nula para todo valor da constante  $\alpha$  e, portanto, a seguinte expressão é válida:

$$M = \int_{\Gamma} \left[ \left( (W - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + C_u \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \right] d\Gamma = 0, \quad (5.47)$$

a qual é comumente conhecida como integral  $M$ .

Deve-se notar que todo resultado aqui obtido pode ser aplicado a qualquer parte arbitrária do corpo original, considerado agora como um novo corpo com seu domínio particular, fronteira e forças externas. O campo de deslocamentos  $u_{\Omega_p} = u|_{\Omega_p}$  é equilibrado com as forças de corpo  $b_{\Omega_p} = b|_{\Omega_p}$  e forças de superfície  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  sobre  $\partial\Omega_p$ , i.e.,

$$a_{\Omega_p}(\mathbf{u}_{\Omega_p}, \mathbf{u}_{\Omega_p}) = \int_{\Omega_p} \mathbf{b}_{\Omega_p} \cdot \mathbf{u}_{\Omega_p} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_p} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{\Omega_p} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{u}_{\Omega_p} \in \mathcal{V}. \quad (5.48)$$

Assim, todas as propriedades de  $\Pi$  agora avaliado sobre qualquer parte arbitrária  $\Omega_p$ , ainda são válidas.

Em outras palavras, dado um corpo com um campo de deslocamentos verificando o equilíbrio e qualquer contorno fechado suficientemente regular,  $\partial\Omega_p$  em  $\Omega$ , cada uma das integrais de superfície deduzidas pode ser entendida como a variação de  $\Pi|_{\Omega_p}$  devido às correspondentes direções de variação de  $V$ . Mais ainda, estas integrais de fronteira são iguais a zero.

Deve-se notar que as mencionadas integrais são integrais de linha em  $\mathbf{R}^2$ . Assim, como elas são zero para todo contorno fechado, são integrais independentes do caminho.

## 5.5 Integral de Rice

Dos resultados acima, pode ser deduzida a expressão clássica da integral de Rice sobre um corpo fraturado.

Seja um corpo ocupando um domínio  $\Omega \in \mathbf{R}^2$  com fronteira  $\Gamma$ . Considere uma trinca dada pela fronteira  $\Gamma_k = \Gamma_2 \cup \Gamma_2^0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_3^0$  de  $\Gamma$  orientada segundo a direção do vetor unitário  $\mathbf{e}_1$  (Figura 5.1).

Forças equilibradas de superfície são definidas em  $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_k$  e, seguindo as hipóteses de Rice, considere-se forças de corpo nulas. A solução  $\mathbf{u}$  neste caso é univocamente determinada a menos de um movimento rígido.

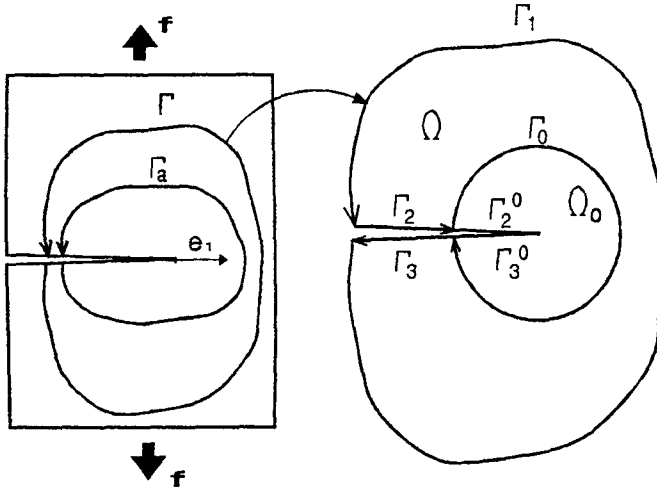


Figura 5.1

Como objetivo de simular um movimento rígido na direção  $e_1$ , assume-se dois campos de velocidade  $V$  suficientemente regulares.

O primeiro, definido por

$$V_1(x, y) = v_1(x, y)e_1 \quad (5.49)$$

$$v_1(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega_0}, \quad (5.50)$$

$$v_1(x, y) = -1 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1, \quad (5.51)$$

onde  $\Omega_0$  é uma parte de  $\Omega$  ao redor da cabeça da fratura (figura 5.1). Em outras palavras, esta velocidade é equivalente a “mover” o corpo à esquerda, mantendo a região  $\Omega_0$  fixa.

Substituindo na expressão (5.8) e considerando que as forças de fronteira permanecem constantes ( $\dot{f} = 0$ ), tem-se que

$$\nabla V_1 = 0 \text{ em } \Omega_0, \quad \text{div}_\Gamma V_1 = 0 \text{ em } \Gamma_1 \quad (5.52)$$

$$\dot{\Pi} = - \int_{\Omega - \Omega_0} \sigma \cdot (\nabla u \nabla V_1)^s d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_0} W \text{div} V_1 d\Omega \quad (5.53)$$

Neste domínio regular, aplica-se o teorema de Green junto às condições de equilíbrio para obter uma nova versão da equação (3.112):

$$\dot{\Pi} = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_r} W V_1 \cdot n d\Gamma - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_r} \sigma n \cdot \nabla u V_1 d\Gamma. \quad (5.54)$$

onde  $\Gamma_r = \Gamma_2 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_3$ .

As integrais sobre  $\Gamma_r$  são nulas devido às condições:

$$V_1 \cdot n = 0 \text{ em } \Gamma_2, \Gamma_3, \quad (5.55)$$

$$\sigma \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2, \Gamma_3, \quad (5.56)$$

$$V_1 \equiv 0 \quad \text{em } \Gamma_0. \quad (5.57)$$

Assim, a integral (5.53) é equivalente a

$$-\dot{\Pi} = \int_{\Gamma_1} (W \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \sigma) \mathbf{n} d\Gamma \cdot \mathbf{e}_1 = J_R. \quad (5.58)$$

Uma outra possibilidade para simular um crescimento na longitude da fratura consiste em mover rigidamente  $\Omega_0$  à direita:

$$V_2(x, y) = v_2(x, y) \mathbf{e}_1 \quad (5.59)$$

$$v_2(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega_0}, \quad (5.60)$$

$$v_2(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1. \quad (5.61)$$

$$\nabla V_2 = 0 \quad \text{em } \Omega_0, \quad (5.62)$$

$$\text{div}_\Gamma V_2 = 0 \quad \text{em } \Gamma_0 \quad (5.63)$$

A partir destas hipóteses,  $\dot{\Pi}$  se escreve

$$\dot{\Pi} = - \int_{\Omega - \Omega_0} \sigma \cdot (\nabla \mathbf{u} \nabla V_2)^s d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_0} W \text{div} V_2 d\Omega \quad (5.64)$$

Mais uma vez, aplicando o teorema de Green e as condições de equilíbrio,

$$\dot{\Pi} = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_q} W V_2 \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_q} \sigma \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} V_2 d\Gamma. \quad (5.65)$$

onde  $\Gamma_q = \Gamma_3 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

As integrais em  $\Gamma_q$  são iguais a zero:

$$V_2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2, \Gamma_3, \quad (5.66)$$

$$\sigma \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2, \Gamma_3, \quad (5.67)$$

$$V_2 \equiv 0 \quad \text{em } \Gamma_1. \quad (5.68)$$

Assim, para este caso,  $\dot{\Pi}$  toma a forma

$$-\dot{\Pi} = \int_{-\Gamma_0} (W \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \sigma) \mathbf{n} d\Gamma \cdot \mathbf{e}_1 = J_R. \quad (5.69)$$

As equações (5.58) e (5.69) são equivalentes à conhecida integral de Rice para corpos fraturados. Dos resultados anteriores (ver (5.41)), esta integral é independente do caminho; portanto, partindo das condições (5.55, 5.56), as integrais (5.58, 5.69) e qualquer outra calculada sobre um caminho arbitrário tal como  $\Gamma_a$  (figura 5.1), adotam o mesmo valor.

## 5.6 Aproximação numérica

Até este ponto, não foi feita nenhuma aproximação de ordem numérica. Embora numa formulação contínua às integrais (5.53, 5.64) e (5.58, 5.69) são equivalentes, na aproximação por elementos finitos estas expressões fornecem resultados numéricos significativamente diferentes. Este aspecto já foi comentado no capítulo anterior (ver [61]); resultados de integração de domínio em elementos finitos são apreciavelmente mais precisos que avaliações na fronteira do mesmo. No caso particular do problema em discussão, as tensões são descontínuas entre elementos. Uma integral de linha seguindo, por exemplo, as fronteiras entre os elementos, precisa da utilização de critérios para determinar qual é a tensão a ser utilizada. Se, pelo contrário, utiliza-se uma integração de domínio, as tensões correspondem aos respectivos elementos integrados sem necessidade de critérios adicionais.

A seguir, serão mostrados resultados numéricos de  $\dot{\Pi}$  obtidos mediante a integral convencional de Rice (5.58, 5.69) e integração de domínio (5.53, 5.64).

### 5.6.1 Aproximação por elementos finitos

Dada uma triangularização associada a um parâmetro  $h$  e utilizando a formulação clássica de elementos finitos escreve-se para um elemento  $e$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_h^e &= \mathbf{N}\mathbf{U}^e, & V_h^e &= \mathbf{N}\mathbf{V}^e, \\
 \nabla \mathbf{u}_h^e &= \nabla \mathbf{N}\mathbf{U}^e = \mathbf{G}\mathbf{U}^e, & \nabla V_h^e &= \nabla \mathbf{N}\mathbf{V}^e = \mathbf{G}\mathbf{V}^e, \\
 \nabla^s \mathbf{u}_h^e &= \nabla^s \mathbf{N}\mathbf{U}^e = \mathbf{B}\mathbf{U}^e, & \operatorname{div} V_h^e &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{G}\mathbf{V}^e \\
 \boldsymbol{\sigma}_h^e &= \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}^e, & \operatorname{div}_\Gamma V_h^e &= (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{G}\mathbf{V}^e \\
 W_h^e &= \frac{1}{2} \nabla^s \mathbf{u}_h^e \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h^e & &= \frac{1}{2} \mathbf{B}\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{B}\mathbf{U}^e
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz de interpolação. Substituindo, a versão discreta de (5.53) e (5.58) tomam a forma:

$$\dot{\Pi}_h = - \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e - \Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_h^e \cdot (\nabla \mathbf{u}_h^e \nabla V_h^e)^s d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e - \Omega_0} W_h^e \operatorname{div} V_h^e d\Omega \tag{5.71}$$

$$\dot{\Pi}_h = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Gamma^e \cap \Gamma_1} (W_h^e \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u}_h^e)^T \boldsymbol{\sigma}_h^e) \mathbf{n} d\Gamma \cdot \mathbf{V} \tag{5.72}$$

Para calcular a integral (5.71) é necessário definir  $V_h$  em  $\Omega_h$ . Para isto, procede-se de foma análoga ao feito para o problema de otimização de forma:

$$V_h(\mathbf{x}^r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \notin \Gamma_1 \\ -1 & \text{se } r \in \Gamma_1 \end{cases} \tag{5.73}$$

onde  $\mathbf{x}^r$ ,  $r = 1, \dots, n$  é um ponto nodal da malha.

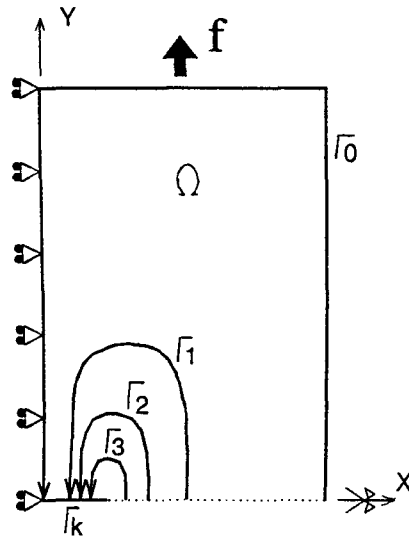


Figura 5.2

A expressão acima significa que a velocidade  $V$  é idênticamente zero com exceção de uma “franja” de elementos ao longo da fronteira  $\Gamma_1$ . Em outras palavras,  $\Omega - \Omega_0$  está dada por esta franja. Esta é uma forma numericamente simples e eficiente de construir  $V_h$  mas, como já foi apontado, não é precisamente a que fornece resultados mais precisos. Neste último caso, aconselha-se a utilização de regiões maiores contendo gradiente de velocidade não nulo. Apesar desta ressalva, poderá ser visto que para os casos aqui apresentados, o primeiro critério fornece valores suficientemente correctos em relação aos teóricos.

### 5.6.2 Resultados numéricos

Seja uma placa plana (teoria de estado plano de tensões) ocupando uma região  $\Omega$  definida por (ver figura 5.2):

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 120, 0 < y < 240\}, \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

$$\Gamma_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 10, y = 0\},$$

Suponha-se uma trinca  $\Gamma_k$  situada ao longo do eixo  $X$  e considere-se a metade do domínio por condições de simetria. Neste teste numérico são utilizados elementos triangulares isoparamétricos lineares e quadráticos. As constantes de material são:  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ , e espessura  $h = 1 \text{ mm}$ . As forças distribuídas  $\mathbf{f} = 100 \text{ N/mm}^2$ .

Com o objetivo de testar a “independência de caminho” e precisão dos resultados no cálculo de  $\dot{\Pi}$ , mediante (5.53), foram consideradas três sub-regiões  $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \Omega$  ao redor da ponta da trinca, com fronteiras  $\Gamma_i \cup \Gamma_{ki} = \partial\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  respectivamente (fig. 5.2).

Dois casos são testados:

1. O crescimento da trinca é simulado por uma translação rígida de  $\overline{\Omega - \Omega_i}$  à esquerda, mantendo uma sub-região interior a  $\Omega_i$  fixa:



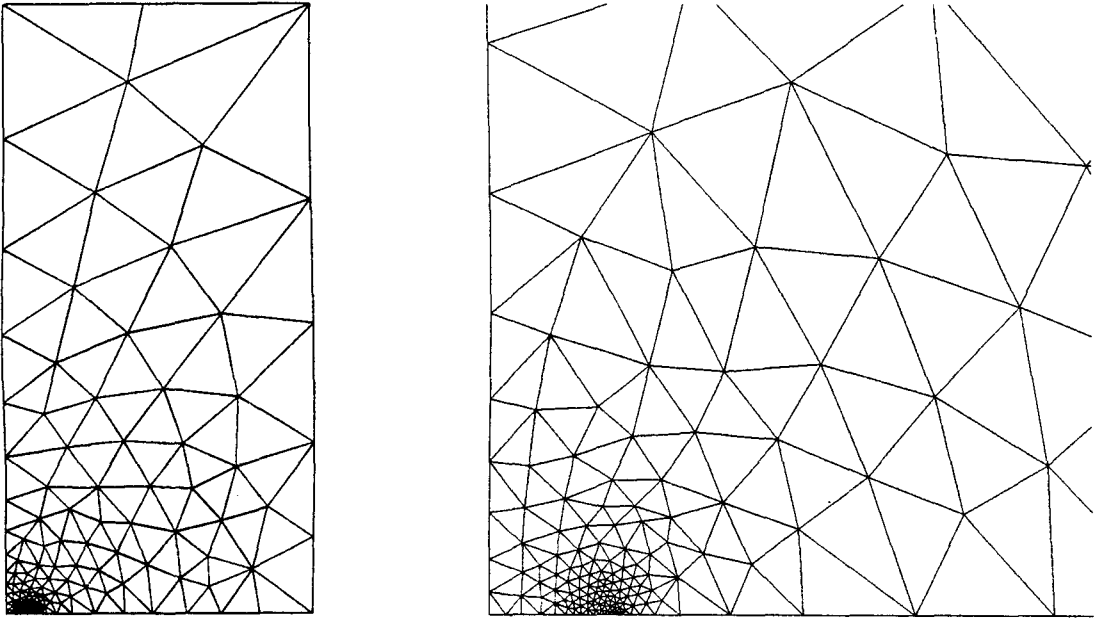


Figura 5.3 Malha

$$V_h(\mathbf{x}^r) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x}^r \in \Omega_i \\ -1 & \text{se } \mathbf{x}^r \in \overline{\Omega} - \Omega_i \end{cases} \quad (5.74)$$

Assim, somente uma franja *interior* com um elemento de espessura ao longo de  $\Gamma_i$  tem  $\nabla V \neq 0$ , determinando o domínio de integração na equação (5.71). Deve-se notar que este caso também foi analisado para uma franja sobre o contorno  $\Gamma_0$  e seus resultados mostrados em  $i = 0$  nas tabelas.

2. O crescimento da trinca é simulado mediante uma translação rígida de  $\overline{\Omega}_i$  à direita:

$$V_h(\mathbf{x}^r) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{x}^r \in \overline{\Omega} - \overline{\Omega}_i \\ -1 & \text{se } \mathbf{x}^r \in \overline{\Omega}_i \end{cases} \quad (5.75)$$

Neste caso, somente uma franja *exterior* de elementos ao longo de  $\Gamma_i$  tem  $\nabla V \neq 0$ , formando a região de integração de (5.71).

A malha do exemplo 1 (elementos lineares, figura 5.3) é o resultado de um processo adaptativo, como mostrado no capítulo correspondente. Resultados com esta malha são apresentados na tabela 5.1.

A malha do exemplo 2 (quadrática), foi obtida mediante simples inclusão de nós nos lados da malha linear. A tabela 5.2 mostra os resultados deste caso.

No terceiro exemplo foi utilizada a malha do exemplo 2 e modificados os elementos vinculados ao vértice da trinca mediante a aplicação da técnica conhecida como “quarter-point” [85], capaz de capturar parte da singularidade nesse ponto. Os resultados obtidos estão na tabela 5.3.

Case	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
a)	-1.42388	-1.42624	-1.43098	-1.43309
b)	-	-1.42431	-1.42781	-1.43973
Rice	-	-1.45200	-1.40741	-1.46171

Tabela 5.1  $\dot{\Pi}$  para elementos lineares

Case	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
a)	-1.50265	-1.50307	-1.50276	-1.50188
b)	-	-1.50244	-1.50203	-1.50317
Rice	-	-1.41208	-1.49344	-1.49895

Tabela 5.2  $\dot{\Pi}$  para elementos quadráticos

Para todos esses casos, compara-se os valores com os obtidos com integração convencional de Rice nos caminhos  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Finalmente, o valor teórico para este problema é dado por Hellan [45] e seu valor é:  $\dot{\Pi} = 1.50616$ .

Estes resultados numéricos são apresentados no trabalho [26].

## 5.7 Conclusões

Este capítulo teve a intenção de estabelecer uma ligação não somente teórica senão também numérica entre análise de sensibilidade e mecânica da fratura.

Pôde-se observar que a introdução da análise de sensibilidade nos meios contínuos permitiu visualizar de uma forma clara, a origem de conhecidas integrais tais como integral de Rice e como calculá-las com vantagens numéricas.

Pode-se apreciar que os resultados obtidos com integração de domínio apresentam um comportamento mais “confiável” (precisão e estabilidade) que seus correspondentes via integral clássica de Rice.

Uma outra consequência desta relação é que todo desenvolvimento de software dire-

Case	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
a)	-1.50709	-1.50629	-1.50720	-1.50752
b)	-	-1.50764	-1.50648	-1.50690

Tabela 5.3  $\dot{\Pi}$ . Elementos “Singulares”

cionado à determinação de análise de sensibilidade à mudança de forma pode ser facilmente adaptados para cálculos relativos à fratura, como apresentado.

Devemos ainda mencionar que a qualidade dos valores obtidos ressaltam a importância da utilização de estimação de erro e adaptatividade durante as análises.



# CONCLUSÕES

Como foi dito na introdução desta monografia, cada capítulo configura uma unidade praticamente autocontida. Porém, estas linhas tem o objetivo de fazer uma valoração global do trabalho ressaltando as conclusões obtidas e aqueles aspectos em que se acredita ter feito aportes nas áreas estudadas.

O primeiro capítulo trata-se principalmente de uma introdução a um tema importante dentro do contexto do trabalho e, fora a formalização ordenada da formulação, destaca-se a experiência numérica feita com a técnica de Lagrangeano aumentado que, como pode ser apreciado na bibliografia [2], é alvo atual de atenção pelas suas características.

Em relação ao segundo capítulo, geração adaptativa de malhas, acredita-se ter feito as seguintes contribuições. Em primeiro lugar, deve ser observado que o desenvolvimento de um gerador adaptativo foi elemento imprescindível no modelado numérico de problemas de otimização segundo o enfoque dado nesta tese. Em segundo lugar, foi prechida uma “lacuna tecnológica” na medida em que este software não somente permitiu este trabalho mas foi ponto fundamental para o desenvolvimento de vários trabalhos de pesquisa, testes de mestrado e doutorado na área de adaptatividade [57], [72], [3]. Em terceiro lugar, julgando o aporte intrínseco desta parte, destacam-se os excelentes resultados obtidos na utilização da programação orientada a objetos e as técnicas de gerenciamento e classificação de dados, permitindo a qualidade e comportamento observado nas figuras apresentadas.

O terceiro capítulo, análise de sensibilidade, deve ser julgado como uma revisão e apresentação numa notação unificada de vários conceitos sobre o assunto. É enfatizada a utilização sistemática da mecânica do contínuo na obtenção de expressões de sensibilidade úteis, em particular, a este trabalho e, em geral, a todo trabalho relacionado à mudança de forma e são salientados aspectos importantes tais como a similitude entre um problema de sensibilidade geral e sensibilidade a mudança de forma, difíceis de serem encontradas em outras referências.

No capítulo quatro encontra-se um dos principais temas objetivo desta monografia: determinação da geometria ótima de superfícies em contato de forma a se obter uma distribuição quase constante das tensões sobre as mesmas. Foi estudada uma filosofia de trabalho onde acentua-se a independência entre a formulação e domínio geométrico do problema da forma particular em que o mesmo é discretizado para sua resolução numérica. Observe-se a necessidade do conhecimento dos temas relativos aos três capítulos anteriores para atingir este objetivo. Não se conhece na literatura tratamento similar para o problema proposto. Dentro deste contexto foram re-analisados problemas já resolvidos

por outros métodos. Em base aos resultados obtidos, e a informação recolhida em [2], uma segunda função objetivo foi testada, sendo obtidos uma série de resultados e conclusões relativas a tal função também inéditos (ver [25]).

O quinto capítulo representa o segundo núcleo desta tese. Neste, utiliza-se a metodologia empregada na análise de sensibilidade à mudança de forma para derivar três expressões conhecidas no âmbito da mecânica da fratura como integrais  $J$ ,  $L$  e  $M$ . É interessante observar que esta abordagem permite estabelecer em forma clara o domínio de aplicabilidade destas expressões. Não se conhece na literatura a formalização de tais expressões desde este ponto de vista. Por outro lado, esta abordagem dá lugar a uma vantagem numérica apreciável ao evidenciar que estas integrais de fronteira podem ser substituídas por integrais de domínio, mais precisas quando utilizado o método dos elementos finitos.

Como em todo trabalho, a experiência adquirida ao transitar por certas áreas permite observar os pontos onde se julga preciso reforçar o desenvolvimento.

Assim como a elaboração de um gerador 2D eficiente tanto na complexidade das geometrias possíveis de geração como na facilidade de acoplá-lo a processos adaptativos significou a criação de uma passagem para toda uma linha de pesquisa, a falta de geradores 3D com as mesmas características é uma barreira para um sem-número de aplicações numéricas. Isto pode configurar um trabalho de pesquisa “local” quando se considera que tal tecnologia já é disponível em outras latitudes mas, a critério do autor, isto não diminui o esforço necessário para obtê-la.

Em relação ao problema de otimização de forma em contato, muitas são as perguntas ainda por fazer: A inclusão do atrito faz o problema dependente da história do carregamento e sua análise de sensibilidade deve ser estudada. Grandes são também as incógnitas nas extensões a problemas 3D, tanto no seus aspectos teóricos como de implementação numérica.

As mesmas limitações aparecem no problema de fratura quando o tratamento numérico da abertura de uma fissura, direção e forma desta num caso tridimensional pode ser auxiliada com as ferramentas fornecidas pela análise de sensibilidade.

# Bibliografia

- [1] *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, USA, 1981. Sijthoff and Noordhoff.
- [2] *Contact Mechanics, International Symposium*, Lausanne, Switzerland, October 1992. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [3] R.C. Almeida, A.C. Galeão, and Silva R.S. An adaptive cau method for the compressible euler and navier stokes equations. In *VIII International Conference on Finite Elements in Fluids - New Trends and Applications*, Barcelona, September 20-24, 1993.
- [4] J.C. Anido, Herskovitz J., R.A. Feijóo, and E. Taroco. Otimização de forma de corpos elásticos planos para redução de concentração de tensões. In *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.
- [5] T.J. Baker. Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using a constrained delaunay triangulation. *Engineering with Computers*, 5:161-175, 1989.
- [6] R.L. Benedict and J.E. Taylor. Optimal design for elastic bodies in contact. In *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, USA, 1981. Sijthoff and Noordhoff.
- [7] D.P. Bersekas. *Constrained optimization and Lagrange multipliers methods*. Academic Press, 1982.
- [8] E.K. Buratynski. A fully automatic three-dimensional mesh generator for complex geometries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:931-952, 1990.
- [9] J.B. Cardoso and J.S. Arora. Design sensitivity analysis of nonlinear dynamic response of structural and mechanical systems. *Structural Optimization*, 4:37-46, 1992.
- [10] J C ea. *Optimisation théorie et algorithmes*. Dunod, Paris, 1971.
- [11] J. C ea. Problems of shape optimal design. In *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, USA, 1981. Sijthoff and Noordhoff.

- [12] K.K. Choi and J.L.T. Santos. Design sensitivity analysis of nonlinear structural systems part 1: Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2039–2055, 1987.
- [13] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [14] J.E.Jr. Dennis and J.J. Moré. Quasi-newton methods, motivation and theory. *Siam Review*, 19(1):46, 1977.
- [15] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [16] B. Eckel. *Using C++*. Osborne McGraw Hill, 1989.
- [17] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems*. North-Holland, Amsterdam and American Elsevier, N.Y., 1976.
- [18] G. Esping, P. Clarin, and O. Rommel. Octopus - a tool for distributed optimization of multi-disciplinary objects. In *NATO/DFG ASI Optimization of Large Structural Systems*, Berchtegaden, Germany, Sept.23 - Oct.4 1991.
- [19] E.A. Fancello. Formulação variacional do problema de contato com atrito; resolução via regularização. Master's thesis, COPPE, Universidade Federal de Rio de Janeiro, 1989.
- [20] E.A. Fancello and R.A. Feijóo. Adapte: estimador de erro para problemas planos em elasticidade linear. Technical Report 19-92/ISSN 0101-6113, LNCC/CNPq, 1992.
- [21] E.A. Fancello and R.A. Feijóo. Shape optimization in frictionless contact problems. Technical Report 38-92/ISSN 0101-6113, LNCC/CNPq, 1992.
- [22] E.A. Fancello and R.A. Feijóo. Shape optimization in frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993. to appear.
- [23] E.A. Fancello, A.S.G. Guimarães, and R.A. Feijóo. Aranha: Gerador de malhas 2d para elementos finitos triangulares de 3 e 6 nós. In *XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.
- [24] E.A. Fancello, A.C. Guimaraes, R.A. Feijóo, and M. Venere. Geração automática de malhas em programação orientada a objetos. In *XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, São Paulo, Brasil, Dezembro 1991.
- [25] E.A. Fancello, J. Haslinger, and R.A. Feijóo. Some numerical results in contact shape optimization. In *Structural Optimization - The world Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, Brasil, Agosto 1993.



- [26] E.A. Fancello, E.O. Taroco, and R.A. Feijóo. Shape sensitivity analysis in fracture mechanics. In *Structural Optimization - The world Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, Brasil, Agosto 1993.
- [27] R.A. Feijóo and E.A. Fancello. A finite element approach for an optimal shape design in contact problems. In *Contact Mechanics. International Symposium*, EPFL, Lausanne, Switzerland, Outubro 1992.
- [28] R.A. Feijóo and E.A. Fancello. An incremental kinematical formulation for the elastic-plastic contact problem with friction. In *Third international Conference on Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, Barcelona, Spain, April 1992.
- [29] R.A. Feijóo, A.S.G. Guimarães, and E.A. Fancello. Algunas experiencias en la programación orientada por objetos y su aplicación en el método de elementos finitos. In *MECOM'91*, Paraná, Argentina, Setembro 1991.
- [30] G. Fichera. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: Il problema di signorini con ambigue condizioni al contorno. *Mem. Accad. Naz. Lincei*, VIII(7):91-140, 1964.
- [31] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer-Verlag, 1984.
- [32] Morton E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [33] J. Haslinger. Shape optimization in unilateral boundary value problems. *Int. Series of Num. Mathematics*, 101:51-55, 1991.
- [34] J. Haslinger. Contact shape optimization. the mathematical theory. In *Contact Mechanics. International Symposium*, EPFL, Lausanne, Switzerland, Outubro 1992.
- [35] J. Haslinger, V. Horák, and P. Neittaanmaki. Shape optimization in contact problems with friction. *Numerical Functional An. and Optimization.*, 8:557-587, 1986.
- [36] J. Haslinger and A. Klarbring. Shape optimization in unilateral contact problems using generalized reciprocal energy as objective function. to appear.
- [37] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. On the existence of optimal shapes in contact problems. *Num. Functional An. and Optimization*, 7:107-124, 1985.
- [38] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. On the existence of optimal shapes in contact problems - perfect plastic bodies. *Computational Mechanics*, 1:293-299, 1986.
- [39] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. Shape optimization in contact problems. approximation and numerical realization. *Mathematical Modelling and Numerical An.*, 21(2):269-291, 1987.
- [40] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. *Finite element approximation for optimal shape design: Theory and applications*. John Wiley & sons, G.B., 1988.

- [41] J. Haslinger, P. Neittaanmaki, and T. Tiihonen. Shape optimization in contact problems based on penalization of the state inequality. *Aplikace Matematiky*, 31(1):54-77, 1986.
- [42] E.J. Haug. A review of distributed parameters structural optimization literature. In *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, USA, 1981. Sijthoff and Noordhoff.
- [43] E.J. Haug, K.K. Choi, and V. Komkov. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, 1986.
- [44] M.B. Hecke. *Potenciais generalizados e otimização na análise elastoplástica*. PhD thesis, PUC/RJ, janeiro 1991.
- [45] K. Hellan. *Introduction to continuum mechanics*. Mc-Graw Hill, 1985.
- [46] J. Herskovitz. A general approach for interior points algorithms in nonlinear programming. Technical report, COPPE/UFRJ - Mechanical Engineering Program, 1991.
- [47] J. Herskovitz. Interior point algorithms for nonlinear constrained optimization. In *Optimization of Large Structural Systems - NATO/DFG ASI*, Essen University, Germany, 1991.
- [48] A.G. Hevsukoff. Sobre a introdução de um algoritmo de ponto interior no ambiente de projeto de engenharia. Master's thesis, COPPE/UFRJ, 1991.
- [49] I Hlaváček, J. Haslinger, Necas J., and J. Lovísek. *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, volume 66 of *Applied mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1980.
- [50] K. Ho-Le. Finite element mesh generation methods: a review and classification. *Computer Aided Design*, 20(1):27-38, 1987.
- [51] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, 1987.
- [52] C. Johnson and P. Hansbo. Adaptive finite element methods for conservation laws based on a posteriori error estimates. Technical Report 1992-31/ISSN 0347-2809, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, University of Goteborg, 1992.
- [53] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, 1988.
- [54] D. Kinderlehrer and G Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. Academic Press N.Y., 1980.
- [55] A. Klarbring and J. Haslinger. On almost contact stress distribution by shape optimization. to appear.

- [56] J.K. Knowles and E. Sternberg. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Arch. Rational Mechanics Analysis*, 44:187–211, 1972.
- [57] A.C.C Lemonge. Uma estrategia adaptativa para problemas de contato em elasticidade. Master's thesis, COPPE, Universidade Federal de Rio de Janeiro, 1992.
- [58] J.T. Lions and Stampacchia. Variational inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, (20):493–519, 1967.
- [59] S.B. Lippman. *C++ Primer*. Addison Wesley,, 1988.
- [60] D.G. Luemberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Stanford University, USA, 1973.
- [61] M. Masmoudi. *Outils pour la conception optimale de formes*. PhD thesis, Nice University, 1987.
- [62] F. Mignot. Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques. *J. Funct. Analysis*, (22):25–39, 1976.
- [63] J.T. Oden. *Applied functional Analysis*. Prentice Hall, 1979.
- [64] P.D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*. Birkhauser, 1985.
- [65] J. Peraire, J. Peiro, L. Formaggia, and K. Morgan. Finite element euler computations in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:2135–2159, 1988.
- [66] J. Peraire, J. Peiro, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal on Computational Physics*, (72):449–466, 1987.
- [67] D.G. Phelan, C. Vidal, and R.B. Harber. An adjoint variable method for sensitivity analysis of non-linear elastic systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:1649–1667, 1991.
- [68] O. Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer Verlag, 1984.
- [69] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [70] M.S. Shephard. Approaches to automatic generation and control of finite element meshes. *Applied Mechanical Reviews*, 41(4):169–185, 1988.
- [71] W.J. Schroeder and M.S. Sheppard. A combined octree/delaunay method for fully automatic 3-d mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:37–55, 1990.

- [72] R.S. Silva and A.C. Galeão. Formulação adaptiva e sua aplicação a problemas de condução-difusão. In *XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Brasília, Brasil, Dezembro 1993.
- [73] J. Sokolowski. Sensitivity analysis for a class of variational inequalities. In *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, USA, 1981. Sijthoff and Noordhoff.
- [74] J. Sokolowski. Sensitivity analysis of the signorini variational inequality. *Partial Differential Equations, Banach Center Publications*, 19:287–299, 1987.
- [75] J. Sokolowski. Sensitivity analysis of contact problems with prescribed friction. *Applied mathematics and optimization*, 18:99–117, 1988.
- [76] J. Sokolowski and J.P. Zolesio. Shape sensitivity analysis of unilateral problems. *SIAM Journal of Mathematical An.*, 18:1416–1437, 1987.
- [77] J. Sokolowski and J.P. Zolesio. Shape sensitivity analysis of contact problems with prescribed friction. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and applications*, 12:1399–1411, 1988.
- [78] J.J. Tsay and J.S. Arora. Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. part 1: General theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng*, 81:183–208, 1990.
- [79] J.J. Tsay and J.S. Arora. Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. part 2: Analytical examples. *Computer Methods in Applied Mechanics & Eng*, 81:209–228, 1990.
- [80] M. J. Venere. Técnicas adaptivas en cálculo numérico para problemas en 2 y 3 dimensiones. In *Anais do Segundo Congresso Franco Chileno e Latinoamericano de Matemáticas Aplicadas*, Chile, 1989.
- [81] K. Weeber and R.H. Hoole. A structural mapping technique for geometric parametrization in the optimization of magnetic devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:2115–2179, 1992.
- [82] R.S. Weiner. *An introduction to Object-Oriented Programming and C++*. Addison Wesley, USA, 1988.
- [83] O. C. Zienkiewicz, G.C. Huang, and Y.C. Liu. Adaptive fem computation of forming process-application to porous and non porous materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1527–1553, 1990.
- [84] O. C. Zienkiewicz, Y.C. Liu, and G.C. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25:23–42, 1988.

- [85] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume Volume 1. McGraw Hill, fourth edition, 1989.
- [86] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume Volume 2. McGraw Hill, fourth edition, 1989.
- [87] O. C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–359, 1987.
- [88] O. C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. Adaptivity and mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:783–810, 1991.
- [89] J.P. Zolésio. The material derivative (or speed) method for shape optimization. In *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Iowa, USA, 1981. Sijthoff and Noordhoff.