

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**ESTUDO VARIACIONAL DO MODELO  
DE MOSZKOWSKI  $q$ -DEFORMADO**

**Dissertação**

Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Federal de Santa Catarina  
para obtenção do grau de  
**MESTRE EM CIÊNCIAS**

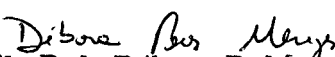
**FRANK WILSON FÁVERO**

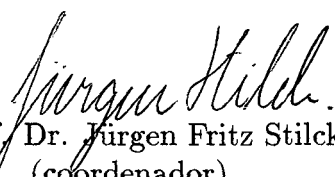
UFSC  
Florianópolis, agosto de 1994

**ESTUDO VARIACIONAL DO MODELO  
DE MOSZKOWSKI  $q$ -DEFORMADO**


Frank Wilson Fávero


Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do grau de Mestre em Ciências - Especialidade Física, e aprovada em sua forma final pelo orientador e demais membros da banca examinadora.

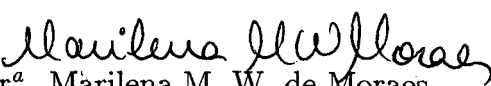
  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Débora P. Menezes  
(orientadora)

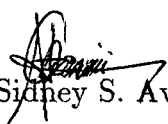
  
Prof. Dr. Jürgen Fritz Stilck  
(coordenador)

Banca Examinadora:

  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Débora P. Menezes

  
Prof. Dr. Frederico F. de Souza Cruz

  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marilena M. W. de Moraes

  
Prof. Dr. Sidney S. Avancini (Suplente)

## **Agradecimentos**

A Débora P. Menezes pela orientação.

A meus pais, Wilson A. e Almeri T. P. Fávero.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação.

Aos colegas de Pós-Graduação.

## RESUMO

A validade da utilização do método variacional via estados coerentes  $q$ -deformados é aqui testada, no contexto das álgebras quânticas, para dois diferentes tipos de modelos, o de Lipkin e o de Moszkowski. O comportamento da transição de fase sob o efeito da deformação é também observado nos dois modelos acima.

Há várias maneiras diferentes de se deformar quanticamente um sistema. Nessa dissertação duas dessas maneiras são estudadas em detalhe, e suas diferenças são apontadas.

## ABSTRACT

The validity of the variational method, via  $q$ -deformed coherent states, is tested in the quantum algebra context for the Lipkin and the Moszkowski models. The effects of  $q$ -deformation on the phase transition, which occurs in the above mentioned models are investigated.

There are various ways of quantum deforming a system. In this dissertation two of them are studied in detail and their differences are outlined.

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	1
2. O Princípio Variacional	2
3. Estados Coerentes	4
4. Álgebras Quânticas	5
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>MODELO DE LIPKIN</b>	
1. O Modelo	7
2. Solução Exata	8
3. O Modelo $q$ - Deformado	9
4. Solução Variacional	9
5. Resultados	15
<b>CAPÍTULO III</b>	
<b>MODELO DE MOSZKOWSKI</b>	
1. O Modelo, sua Versão Deformada e a Solução Exata	18
2. Solução Variacional	20
3. Resultados	25

## **CAPÍTULO IV**

### **DEFORMAÇÃO SIMÉTRICA**

1. A Deformação	29
2. Solução Exata e Variacional	32
3. Resultados	33

<b>CONCLUSÃO</b>	<b>36</b>
------------------	-----------

<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>38</b>
--------------------	-----------

## INTRODUÇÃO

O estudo das álgebras quânticas vem atraindo, ultimamente, a atenção de muitos físicos e matemáticos<sup>(1),(2),(3)</sup>, e aplicações dessas álgebras na solução de sistemas físicos têm sido investigadas em várias áreas da física. Após a introdução do oscilador harmônico  $q$ -deformado<sup>(3)</sup> surgiram aplicações em outras áreas, como, por exemplo, em física nuclear<sup>(4)</sup>, molecular<sup>(5)</sup> e ótica quântica<sup>(2)</sup>. Um exemplo onde se pode ver a vantagem da utilização de uma álgebra quântica, ao invés da álgebra de Lie usual, é melhor discutida no fim desta seção.

A primeira etapa deste trabalho, desenvolvida no Cap.II, consiste no entendimento do modelo de Lipkin<sup>(6)</sup>, que satisfaz uma álgebra de Lie do tipo  $su(2)$ . Logo a seguir, estuda-se o modelo de Lipkin quando o sistema por ele descrito passa a obedecer a álgebra quântica  $su_q(2)$ . Nesse segundo caso, o modelo de Lipkin  $q$ -deformado é estudado por meio de soluções exatas<sup>(7)</sup> e também variacionais<sup>(8)</sup>.

No Cap.III é feita a exposição da segunda etapa do trabalho, que consiste em repetir no modelo de Moszkowski<sup>(9)</sup> os mesmos passos utilizados no estudo do modelo de Lipkin. O modelo de Moszkowski é mais complexo e, portanto, mais rico em interpretações físicas e a álgebra que ele satisfaz é do tipo  $su(2) \otimes su(2)$ . Alguns estudos sobre o modelo de Moszkowski  $q$ -deformado já foram desenvolvidos<sup>(10)</sup>, mas nenhum deles envolveu a solução por meio de um método variacional e sua comparação com a solução exata.

Há mais de uma forma de se introduzir deformações em sistemas físicos. Na parte final deste trabalho, o Cap.IV, é apresentada uma outra deformação, dentre as várias formas



possíveis. O comportamento do sistema é, assim, analisado também sob essa nova forma de deformação .

Discutiremos a seguir, alguns tópicos que julgamos relevantes e que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

## 2. O Princípio Variacional

A existência de sistemas e modelos muito complexos, onde a solução exata é impossível ou mesmo muito difícil, fez com que fossem desenvolvidos métodos aproximados de cálculos, dentre eles o método variacional. Quando um sistema é descrito no contexto das álgebras quânticas, muitas vezes a dificuldade de realizarmos cálculos exatos cresce. Por isso há a necessidade de que seja testada a validade da utilização do método variacional no estudo desses sistemas.

Uma das aplicações do método variacional é o cálculo de autovalores<sup>(11)</sup>. Neste caso, tem-se que a equação de autovalores de Schrödinger

$$H | \Psi \rangle = E | \Psi \rangle \quad (1.1)$$

é equivalente a equação variacional

$$\delta E [\Psi] = 0 , \quad (1.2)$$

onde

$$E[\Psi] = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} . \quad (1.3)$$

A aproximação do método é decorrente do fato de  $| \Psi \rangle$  ser geralmente um conjunto de funções tentativas. Dessa forma, quanto mais próximas as autofunções exatas estiverem

das funções tentativas, menor será o erro. Outro fato importante é que para qualquer função de onda  $|\Psi\rangle$ , pode-se mostrar que

$$E[\Psi] \geq E_0 \quad (1.4)$$

isto é, qualquer que seja a função tentativa, a energia calculada do estado fundamental, sempre será maior ou igual ao valor exato do estado fundamental e corresponderá a um extremo. A igualdade na eq.(1.4) dar-se-á somente se uma das funções tentativas  $|\Psi\rangle$  for proporcional a autofunção do estado fundamental  $|\Psi_0\rangle$ . O método variacional pode ser usado para calcular, também, as energias dos estados excitados. Depois de encontrado o estado fundamental, podemos fazer o cálculo do primeiro estado excitado. Para isso deve-se pegar um conjunto de funções tentativas que seja perpendicular a  $|\Psi_0\rangle$  e com a condição de que  $\langle \Psi_1 | \Psi_0 \rangle = 0$ . Para o segundo estado, deve-se encontrar outro conjunto que seja perpendicular a  $|\Psi_1\rangle$  e  $|\Psi_0\rangle$ , com as seguintes condições :

$$\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle = 0; \text{ e } \langle \Psi_2 | \Psi_0 \rangle = 0.$$

Deve-se ter em mente que partimos de um estado fundamental aproximado e os outros estados calculados carregarão essa aproximação . Além do que, em geral, a dificuldade cresce rapidamente para estados mais excitados. Dentro do aqui exposto, vemos que o método variacional é uma boa alternativa para a determinação do estado fundamental do sistema, mas, para termos uma boa precisão nos resultados, precisaremos encontrar um adequado conjunto de funções tentativas.

### 3. Estados Coerentes

Como funções tentativas usaremos em nosso trabalho, os estados coerentes<sup>(12)</sup>. Entre suas propriedades, podemos citar que eles não são ortogonais entre si, e formam um conjunto super completo de estados, i.e., uma base maior que a necessária para se trabalhar. Foram usados inicialmente por Schrödinger na descrição do limite semiclássico do oscilador harmônico, na mecânica quântica<sup>(13)</sup>. No entanto, suas propriedades foram formalizadas por Schwinger e foi Glauber quem introduziu o conceito de estados coerentes para o campo eletromagnético. Uma aplicação em que ele se mostra muito útil é no estudo de transições de fase, pois o parâmetro de ordem pode ser facilmente identificado.

Esses estados são caracterizados por um número complexo  $z$ . Para o Grupo  $SU(2)$ , que é de nosso interesse, os estados, na Álgebra de Lie, são definidos da seguinte maneira<sup>(12)</sup>:

$$| z \rangle = e^{\bar{z}J_+} | j - j \rangle \quad (1.5)$$

onde

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} \quad (1.6)$$

Pelo fato dos estados coerentes serem formados por uma combinação de estados acessíveis ao sistema, como visto acima, ele é útil nas descrições de fenômenos relativos a coletividade das partículas.

#### 4. Álgebras Quânticas

As álgebras quânticas são generalizações das álgebras de Lie usuais, onde é introduzido um novo parâmetro  $q$  e que possuem a propriedade de que no limite  $q \rightarrow 1$  elas voltam a ter o comportamento usual.

Como exemplo, veremos como fica a álgebra de Heisenberg-Weyl unidimensional, quando é introduzido o novo parâmetro. Inicialmente, os geradores obedecem as relações de comutação bem conhecidas:

$$[I, a^\dagger] = [I, a] = 0, \quad [a, a^\dagger] = I. \quad (1.7)$$

Temos também o operador do número de bósons, definido por  $N = a^\dagger a$ , que satisfaz as relações

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a. \quad (1.8)$$

Para a generalização da álgebra, temos que definir o  $q$ -comutador

$$[A, B]_q = AB - qBA, \quad (1.9)$$

e também,

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad (1.10)$$

Note que o parâmetro  $q$  não é um parâmetro livre, mas está relacionado com a definição acima. Fazendo  $q = e^{i\gamma}$ , encontramos que

$$[x] = \frac{\text{sen}\gamma x}{\text{sen}\gamma}. \quad (1.11)$$

A álgebra de Heisenberg-Weyl  $q$ -deformada é definida então da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [a, a^\dagger]_q &= aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N} \\
 a^\dagger a &= \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} = [N]
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

onde  $q$  é chamado de parâmetro de deformação da álgebra.

A partir das definições acima é fácil chegarmos as seguintes relações :

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a, \tag{1.13}$$

$$[N, a^\dagger a] = [N, aa^\dagger] = 0, \quad aa^\dagger = [N + 1] \tag{1.14}$$

dentre outras.

A atuação dos operadores nos autovetores é dada por:

$$\begin{aligned}
 a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle \\
 a |n\rangle &= \sqrt{[n]} |n-1\rangle \\
 N |n\rangle &= n |n\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

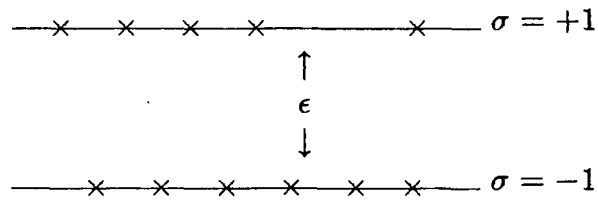
Com essas definições, podemos, por exemplo, encontrar o espectro de energia do oscilador harmônico  $q$ -deformado. O trabalho de Bonatsos<sup>(5)</sup>, mostra que obtemos resultados teóricos mais próximos dos experimentais com o uso das álgebras quânticas, do que quando são usadas as álgebras de Lie usuais. Isso acontece porque o espaçamento entre os níveis de energia são modificados naturalmente no cálculo deformado.

## CAPÍTULO II

### MODELO DE LIPKIN

#### 1. O Modelo

O modelo de Lipkin-Meshkov-Glick<sup>(6)</sup> consiste de N-férmions, que se distribuem em dois níveis N-vezes degenerados, separados por uma energia  $\epsilon$ . Os estados são descritos pelos números quânticos  $\sigma = \pm 1$ , onde +1 indica o nível de cima e -1 o de baixo, e  $p$ , que especifica a degenerescência. Uma representação do modelo pode ser vista abaixo.



Definindo  $a_{p\sigma}^\dagger$  ( $a_{p\sigma}$ ) como os operadores de criação (aniquilação) para uma partícula do estado  $p$  no nível  $\sigma$ , temos a Hamiltoniana do sistema dada por:

$$H = \frac{1}{2}\epsilon \sum_{p\sigma} \sigma a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} + \frac{1}{2}V \sum_{pp'\sigma} a_{p\sigma}^\dagger a_{p'\sigma}^\dagger a_{p'-\sigma} a_{p-\sigma}, \quad (2.1)$$

onde  $V$  é a intensidade de interação entre as partículas do sistema.

Partindo das seguintes definições de operadores de quase-spin:

$$J_+ = \sum_p a_{p+1}^\dagger a_{p-1}, \quad J_- = \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p+1}, \quad J_z = \frac{1}{2} \sum_{p\sigma} \sigma a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} \quad (2.2)$$

e observando as relações de comutação

$$[J_+, J_-] = 2J_z \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad (2.3)$$

vemos que esses operadores satisfazem a álgebra de Lie  $su(2)$ , e portanto, podemos reescrever a eq. (2.1) em termos desses operadores. Assim:

$$H = \epsilon J_z + \frac{1}{2}V(J_+^2 + J_-^2) \quad (2.4)$$

O operador  $J_z$  dá a metade da diferença do número de partículas entre os dois níveis. Dessa forma o valor máximo que  $J_z$  pode assumir é  $\frac{1}{2}N$ .

## 2. Solução Exata

O número de estados acessíveis desse sistema de dois níveis  $N$ -vezes degenerados é igual a  $2^N$ . Devido ao fato da Hamiltoniana comutar com o operador  $J^2$  ela pode ser representada por submatrizes de dimensão  $2j+1$  ou  $N+1$ , que é a dimensão da base de autovetores de  $J^2$ .

Os elementos de matriz dos operadores de quase-spin na base  $|jm\rangle$  são dados por:

$$\begin{aligned} J_z |jm\rangle &= m |jm\rangle, \\ J_\pm |jm\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |jm \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os elementos de matriz da Hamiltoniana, nessa mesma base, são :

$$H_{m'm} = \langle jm' | H | jm \rangle. \quad (2.6)$$

Os valores das energias dos estados, são facilmente encontrados através da diagonalização da matriz que representa a Hamiltoniana do modelo. Esses valores vão depender do número de partículas  $N$  e da interação  $V$  e serão simétricos em torno da energia 0.

### 3. O Modelo $q$ -Deformado<sup>(7,8)</sup>

Uma deformação pode ser introduzida no modelo se considerarmos agora as seguintes relações de comutação da álgebra de quase-spin deformada  $su_q(2)$  <sup>(3)</sup>:

$$[J_+, J_-] = [2J_z], \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad (2.7)$$

onde  $[x]$  está definido na eq. (1.10).

Os elementos de matriz dessa álgebra na base  $|jm\rangle$  são dados por:

$$\begin{aligned} J_z |jm\rangle &= m |jm\rangle, \\ J_{\pm} |jm\rangle &= \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]} |jm \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Quando  $q \rightarrow 1$  vemos que as eqs. (2.3) e (2.5) são recuperadas.

O cálculo exato da energia do estado fundamental com deformação é, também, facilmente realizado de forma análoga ao cálculo sem deformação.



#### 4. Solução Variacional

O método variacional é usado aqui para o cálculo do estado fundamental do modelo de Lipkin, no contexto da álgebra quântica  $su_q(2)$ . Para isso, necessitamos dos operadores de pseudo-spin no espaço de Bargmann<sup>(14)</sup> que são :

$$\langle z | J_z | \psi \rangle = (z \frac{\partial}{\partial z} - j) \langle z | \psi \rangle \quad (2.9)$$

$$\langle z | J_+ | \psi \rangle = (-q^{-2j} z^2 D_z + [2j]_q z L_{q^{-1}}) \langle z | \psi \rangle \quad (2.10)$$

$$\langle z | J_- | \psi \rangle = D_z \langle z | \psi \rangle \quad (2.11)$$

onde  $|\psi\rangle$  é um estado arbitrário,

$$D_z f(z) = \frac{f(qz) - f(q^{-1}z)}{(q - q^{-1})z} \quad (2.12)$$

é a  $q$ -derivada e

$$L_{q^{-1}} f(z) = f(q^{-1}z). \quad (2.13)$$

A energia do estado fundamental é encontrada a partir da resolução da seguinte expressão :

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{z \in \mathbb{C}} \left( \frac{\langle z | H/\epsilon | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right) = \min_{z \in \mathbb{C}} \left( \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{1}{2} \frac{\chi}{[N]} \frac{\langle z | J_+^2 + J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right) \quad (2.14)$$

onde

$$\chi \equiv \frac{V[N]}{\epsilon}. \quad (2.15)$$

Os estados coerentes q-deformados são definidos por<sup>(14)</sup>:

$$| z \rangle = e_q^{\bar{z}J_+} | j - j \rangle \quad (2.16)$$

onde

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}, \quad (2.17)$$

com  $[n]! = [n][n-1]\dots[2][1]$ .

Assim:

$$| z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n J_+^n}{[n]!} | j - j \rangle, \quad (2.18)$$

que após simples manipulações algébricas, realizadas com a ajuda da eq. (2.8), torna-se:

$$| z \rangle = \sum_{m=-j}^j \left[ \begin{matrix} 2j \\ j+m \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{z}^{j+m} | jm \rangle \quad (2.19)$$

onde o coeficiente q-binomial é definido como:

$$\left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[n-m]![m]!}. \quad (2.20)$$

Pode-se agora calcular o módulo quadrático de  $| z \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle z | z \rangle &= \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j}^j \left[ \begin{matrix} 2j \\ j+m' \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \begin{matrix} 2j \\ j+m \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}} z^{j+m'} \bar{z}^{j+m} \langle jm' | jm \rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \left[ \begin{matrix} 2j \\ j+m \end{matrix} \right] (z\bar{z})^{j+m}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Usando-se a definição de q-binomial

$$[a(+)b]^n \equiv \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k b^{n-k}, \quad (2.22)$$

a norma do estado coerente fica igual a:

$$\langle z | z \rangle = [1(+)z\bar{z}]^{2j} = \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1}z\bar{z}). \quad (2.23)$$

A partir das eqs. (2.9), (2.10), (2.11) e (2.23) e usando a seguinte propriedade da q-derivada

$$D_y[a(+)by]^n = b[n][a(+)by]^{n-1}, \quad (2.24)$$

podemos reescrever a eq. (2.14). Iniciamos com:

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{z \frac{\partial}{\partial z} \langle z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} - j \\ &= \frac{z \frac{\partial}{\partial z} \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1}z\bar{z})}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1}z\bar{z})} - j \\ &= \frac{z\bar{z} \sum_{\ell=0}^{2j-1} q^{2\ell-2j+1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \ell}}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1}z\bar{z})}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1}z\bar{z})} - j \\ &= \sum_{\ell=0}^{2j-1} \frac{q^{2\ell-2j+1}z\bar{z}}{(1 + q^{2\ell-2j+1}z\bar{z})} - j \end{aligned}$$

e chegamos a seguinte expressão

$$\frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \sum_{\ell=0}^{2j-1} \frac{z\bar{z}}{(q^{2j-2\ell-1} + z\bar{z})} - j. \quad (2.25)$$

Como já foi dito antes  $z \in C$  então, por conveniência de cálculo, podemos parametrizá-lo da seguinte maneira:

$$z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \text{ onde } \theta \in [0, \pi] \text{ e } \phi \in [0, 2\pi]. \quad (2.26)$$

Lembrando que  $j = \frac{N}{2}$  a eq. (2.25) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{\tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\left( q^{N-2\ell-1} + \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)} - \frac{N}{2} \\ &= \text{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) q^{N-2\ell-1} + \text{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)} - \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Vamos calcular agora a atuação do operador  $J_-^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{D_z D_z [1(+) z \bar{z}]^{2j}}{[1(+) z \bar{z}]^{2j}} \\ &= \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1] [1(+) z \bar{z}]^{2j-2}}{[1(+) z \bar{z}]^{2j}} \\ &= \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1] \prod_{k=0}^{2j-3} (1 + q^{2k-2j+3} z \bar{z})}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z})} \\ &= \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1] (1 + q^{-2j+3} z \bar{z}) (1 + q^{-2j+5} z \bar{z}) \dots (1 + q^{2j-5} z \bar{z}) (1 + q^{2j-3} z \bar{z})}{(1 + q^{-2j+1} z \bar{z}) (1 + q^{-2j+3} z \bar{z}) \dots (1 + q^{2j-5} z \bar{z}) (1 + q^{2j-3} z \bar{z}) (1 + q^{2j-1} z \bar{z})}. \end{aligned}$$

Vemos que vários termos se cancelam, restando apenas o primeiro e último termo do divisor. A expressão fica então :

$$\frac{\langle z | J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1]}{(1 + q^{-2j+1} z \bar{z}) (1 + q^{2j-1} z \bar{z})}. \quad (2.28)$$

Para o cálculo de  $\langle z | J_+^2 | z \rangle$ , basta lembrar que:

$$\langle z | J_+ | z \rangle = (\langle z | J_- | z \rangle)^*.$$

Dessa forma

$$\frac{\langle z | J_+^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{z^2 [2j][2j-1]}{(1 + q^{-2j+1} z \bar{z})(1 + q^{2j-1} z \bar{z})}. \quad (2.29)$$

Parametrizando e somando as eqs. (2.28) e (2.29), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_+^2 + J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (e^{i2\phi} + e^{-i2\phi}) [N][N-1]}{\left(1 + q^{-N+1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(1 + q^{N-1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\text{sen}^2 \theta \cos 2\phi [N][N-1]}{2 \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{-N+1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{N-1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A equação (2.14) fica então reescrita nessa nova forma:

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{\theta, \phi} \left( \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) B_N(\theta) - \frac{N}{2} + \frac{\chi}{4} \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi C_N(\theta) \right) \quad (2.31)$$

onde

$$B_N(\theta) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) q^{N-2\ell-1} + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \quad (2.32)$$

e

$$C_N(\theta) = \frac{[N-1]}{\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{-N+1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{N-1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}. \quad (2.33)$$

O mínimo da eq. (2.31) em função de  $\phi$  é facilmente encontrado, pois sabemos que um valor é mínimo se:

$$\frac{\partial \left(\frac{E_0}{\epsilon}\right)}{\partial \phi} = -\frac{\chi}{2} \text{sen}^2 \theta \text{sen} 2\phi C_N(\theta) = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \left( \frac{E_0}{\epsilon} \right)}{\partial \phi^2} = -\chi \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi C_N(\theta) > 0$$

o que implica que

$$\text{sen} 2\phi = 0, \text{ i.e., } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

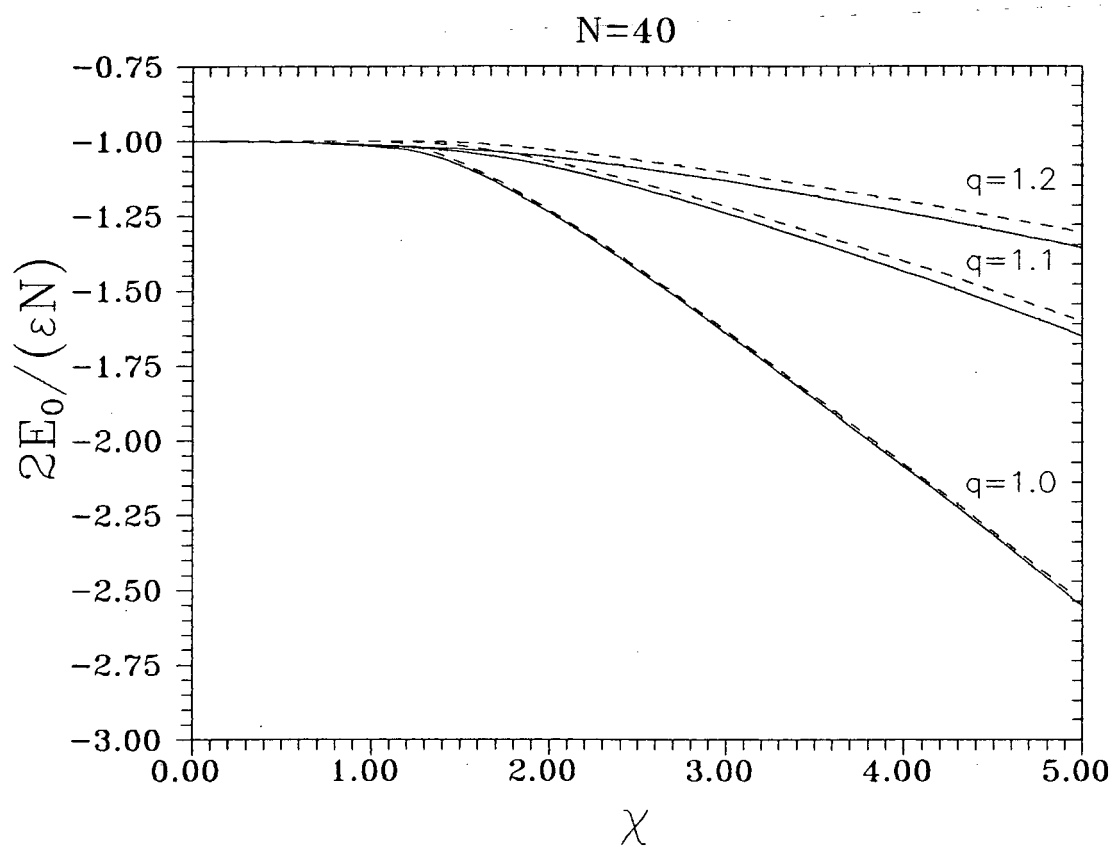
Para a variável  $\theta$  o mínimo é calculado numericamente.

## 5. Resultados

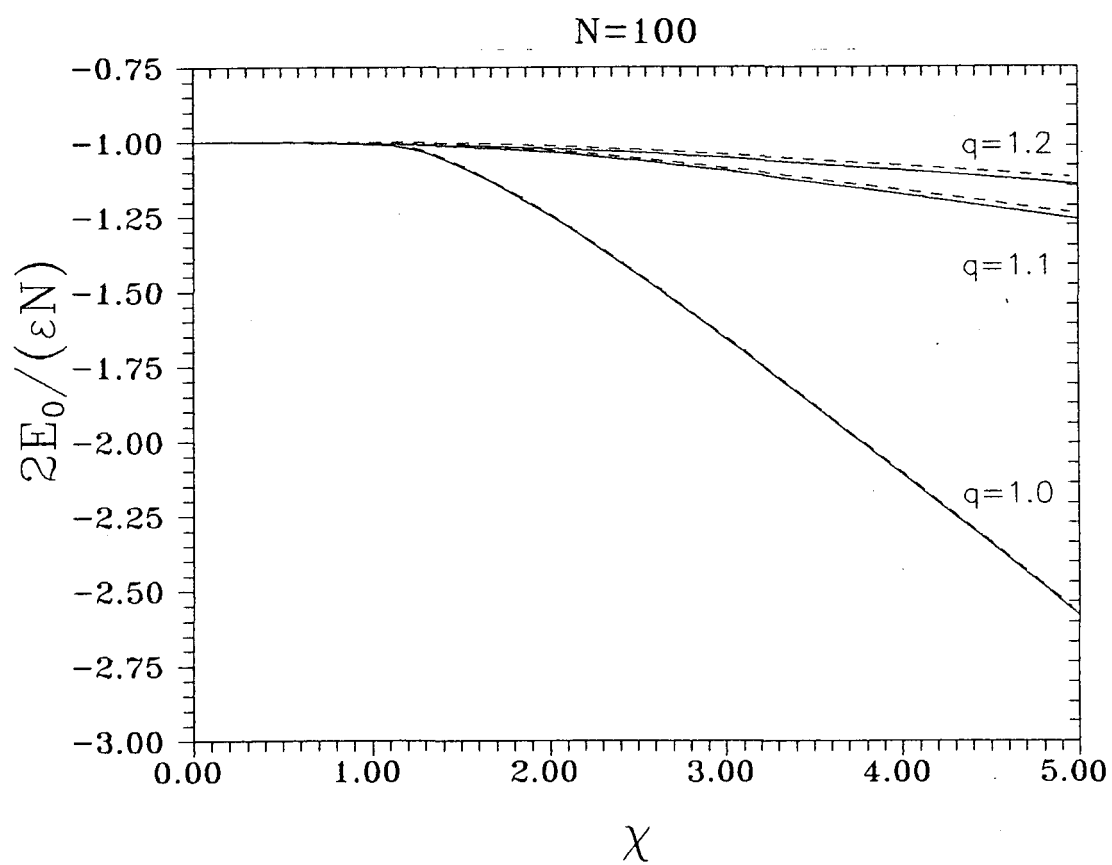
As figuras 1 e 2 a seguir mostram os resultados exatos e variacionais do estado fundamental do modelo de Lipkin para  $N=40$  e  $N=100$  e  $q = 1.0, 1.1, 1.2$  em função da variação de  $\chi$ .

Podemos observar que o método variacional com o uso dos estados coerentes, é mais preciso quando se aumenta o número de partículas do sistema e perde precisão quando se aumenta a deformação.

O modelo de Lipkin  $su(2)$  exibe uma transição de fase relacionada com a passagem de um estado cuja energia potencial possui apenas um mínimo para um outro estado cujo potencial apresenta dois mínimos<sup>(20)</sup>. Esses dois estados costumam ser identificados com estados vibracionais e rotacionais de um núcleo. Vemos que com o aumento da deformação essa transição de fase vai sendo gradativamente suprimida. Isso será melhor discutido no Cap.III.



**Fig. 1.** Modelo de Lipkin para  $N=40$ . As linhas cheias dão os valores obtidos a partir do cálculo exato e as tracejadas, os valores obtidos no cálculo variacional.



**Fig. 2.** Modelo de Lipkin para  $N=100$ . As linhas cheias dão os valores obtidos a partir do cálculo exato e as tracejadas, os valores obtidos no cálculo variacional.

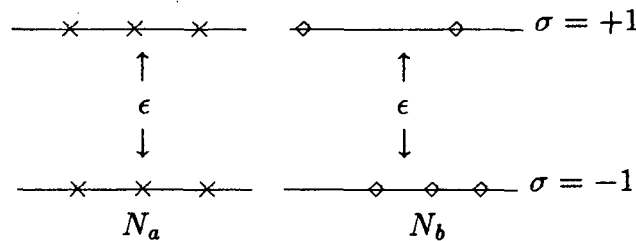


## CAPÍTULO III

### MODELO DE MOSZKOWSKI

#### 1. O Modelo, sua Versão Deformada e a Solução Exata

O modelo de Moszkowski<sup>(9)</sup> representa um sistema de dois tipos de partículas distribuídas em dois níveis  $N$ -vezes degenerados, ou seja,  $N_a$  partículas do tipo  $a$  distribuídas em dois níveis e  $N_b$  partículas do tipo  $b$  distribuídas em outros dois níveis, como mostrado abaixo.



A Hamiltoniana do modelo pode ser escrita, em termos dos operadores da álgebra  $su(2) \otimes su(2)$ , como:

$$H = \epsilon \left( J_z(a) - J_z(b) \right) + V \left( J_x^2 + J_y^2 \right) \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon$  é a diferença de energia entre os níveis e  $V$  é a intensidade de interação entre as partículas e

$$J_i = J_i(a) + J_i(b), \quad J^2 = \sum_i J_i^2 \quad i = x, y, z. \quad (3.2)$$

Definindo os operadores de pseudo-spin como:

$$J_{\pm}(\alpha) = J_x(\alpha) \pm iJ_y(\alpha) \quad (3.3)$$

onde

$$J_+(\alpha) = \sum_p \alpha_{p,+1}^\dagger \alpha_{p,-1}, \quad J_-(\alpha) = \sum_p \alpha_{p,-1}^\dagger \alpha_{p,+1}, \quad J_z(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{p\sigma} \sigma \alpha_{p,\sigma}^\dagger \alpha_{p,\sigma} \quad (3.4)$$

e que obedecem as seguintes relações de comutação

$$[J_+(\alpha), J_-(\beta)] = 2J_z(\alpha)\delta_{\alpha\beta}, \quad [J_z(\alpha), J_{\pm}(\beta)] = \pm J_{\pm}(\alpha)\delta_{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

onde  $\alpha, \beta = a$  ou  $b$ , podemos reescrever a Hamiltoniana em termos destes operadores:

$$H = \epsilon \left( J_z(a) - J_z(b) \right) + \frac{1}{2} V \left( J_+(a)J_-(a) + J_-(a)J_+(a) + J_+(b)J_-(b) + J_-(b)J_+(b) + 2J_+(a)J_-(b) + 2J_+(b)J_-(a) \right). \quad (3.6)$$

Uma deformação quântica<sup>(10)</sup> pode ser introduzida se considerarmos que os operadores  $J_+(\alpha), J_-(\alpha)$  e  $J_z(\alpha)$  satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[J_+(\alpha), J_-(\beta)] = [2J_z(\alpha)]\delta_{\alpha\beta}, \quad [J_z(\alpha), J_{\pm}(\beta)] = \pm J_{\pm}(\alpha)\delta_{\alpha\beta}. \quad (3.7)$$

Obtemos assim uma Hamiltoniana que obedece a álgebra  $su_q(2) \otimes su_q(2)$ . Quando  $q \rightarrow 1$  retornamos a Hamiltoniana que satisfaz a álgebra  $su(2) \otimes su(2)$  usual.

A solução exata é encontrada pela diagonalização da Hamiltoniana do modelo, dada na eq. (3.6). Seus elementos de matriz são calculados na base  $| j_a m_a \rangle | j_b m_b \rangle$  usando as relações dadas na eq. (2.8). Eles são representados da seguinte forma:

$$H_{m_a' m_a m_b' m_b} = \langle j_a' m_a' | \langle j_b' m_b' | H | j_b m_b \rangle | j_a m_a \rangle. \quad (3.8)$$

Do mesmo modo que no modelo de Lipkin, o valor máximo de  $j_a$  é  $\frac{N_a}{2}$  e de  $j_b$  é  $\frac{N_b}{2}$ .

## 2. Solução Variacional

O análogo deformado dos estados coerentes da álgebra  $su(2) \otimes su(2)$  é

$$|z\rangle = |z_a\rangle \otimes |z_b\rangle = |z_a z_b\rangle = e_q^{\bar{z}_a J_+(a)} e_q^{\bar{z}_b J_+(b)} |j_a - j_a\rangle |j_b - j_b\rangle \quad (3.9)$$

onde a q-exponencial é dada pela eq. (2.17)

Normalizando o estado coerente  $|z\rangle$  obtemos

$$\langle z | z \rangle = \langle z_a | z_a \rangle \langle z_b | z_b \rangle \quad (3.10)$$

onde  $\langle z_\alpha | z_\alpha \rangle$  aparece calculado na seção 4 do Cap.II e é dado por:

$$\langle z_\alpha | z_\alpha \rangle = [1(+)] z_\alpha \bar{z}_\alpha]^{2j_\alpha} = \prod_{k=0}^{2j_\alpha-1} (1 + q^{2k-2j_\alpha+1} z_\alpha \bar{z}_\alpha) \quad (3.11)$$

com o q-binomial definido na eq. (2.22).

O estado de mínima energia ( $E_0$ ) pode ser obtido através da expressão:

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{z \in C} \left( \frac{\langle z | H/\epsilon | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right) \quad (3.12)$$

Começamos o cálculo de  $\frac{\langle z | H/\epsilon | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  pelos operadores  $J_z(a)$  e  $J_z(b)$ . A atuação dos operadores, que formam a Hamiltoniana, no espaço de Bargmann são também dados na seção 4 do Cap.II. Em analogia com a expressão (2.25), obtemos:

$$\frac{\langle z | J_z(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\langle z_b | z_b \rangle \langle z_a | J_z(a) | z_a \rangle}{\langle z_b | z_b \rangle \langle z_a | z_a \rangle}$$

$$\frac{\langle z | J_z(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \sum_{k=0}^{2j_a-1} \frac{z_a \bar{z}_a}{(q^{2j_a-2k-1} + z_a \bar{z}_a)} - j_a. \quad (3.13)$$

Para a equação que dá o valor esperado do operador  $J_z(b)$  basta trocar  $a$  por  $b$  na expressão acima.

Como no Cap.II, por conveniência de cálculo, parametrizamos  $z_a$  e  $z_b$  da seguinte forma:

$$z_a = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}, \quad z_b = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)e^{i\beta}$$

onde  $\theta, \gamma \in [0, \pi]$  e  $\phi, \beta \in [0, 2\pi]$ .

Assim,

$$\frac{\langle z | J_z(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = A(\theta) = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k=0}^{N_a-1} \frac{1}{\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) q^{N_a-1-2k} + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} - \frac{N_a}{2}. \quad (3.14)$$

Continuando os cálculos, passamos ao próximo termo da Hamiltoniana. A partir de (2.10) e (2.11), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{(-q^{-2j_a} z_a^2 D_{z_a} + [2j_a] z_a L_{q^{-1}}) D_{z_a} [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a}}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a}} \\ &= \frac{-q^{-2j_a} z_a^2 \bar{z}_a^2 [2j_a][2j_a-1][1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a-2} + [2j_a]^2 z_a \bar{z}_a [1(+)_z q^{-1} z_a \bar{z}_a]^{2j_a-1}}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Partindo da definição da eq. (3.11) observamos que:

$$i) \quad [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a} = (1 + q^{-2j_a+1} z_a \bar{z}_a)(1 + q^{2j_a-1} z_a \bar{z}_a)[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a-2} \quad (3.16)$$

e também

$$ii) \quad [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j_a} = (1 + q^{2j_a-1} z_a \bar{z}_a)[1(+)_z q^{-1} z_a \bar{z}_a]^{2j_a-1} \quad (3.17)$$

e como  $2j_a = N_a$  e  $2j_b = N_b$ , reescrevemos a eq. (3.15) da seguinte maneira:

$$\frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{[N_a]^2 z_a \bar{z}_a}{(1 + q^{N_a-1} z_a \bar{z}_a)} - \frac{q^{-N_a} [N_a] [N_a - 1] z_a^2 \bar{z}_a^2}{(1 + q^{-N_a+1} z_a \bar{z}_a)(1 + q^{N_a-1} z_a \bar{z}_a)}, \quad (3.18)$$

que após ser parametrizada torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = B(\theta) &= \frac{[N_a]^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{N_a-1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \\ &- \frac{q^{-N_a} [N_a] [N_a - 1] \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{N_a-1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + q^{-N_a+1} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para o cálculo da parcela  $J_-(a)J_+(a)$ , usamos a relação da eq. (3.7) e assim temos que:

$$\frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} - \frac{\langle z | [2J_z(a)] | z \rangle}{\langle z | z \rangle}. \quad (3.20)$$

Falta, portanto, calcular apenas a última parcela da equação acima. Através da eq. (2.9) e (1.10), obtemos que:

$$\frac{\langle z | [2J_z(a)] | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \left\{ \frac{q^{-2j_a} q^{2z_a \frac{\theta}{\delta z_a}} [1(+)] z_a \bar{z}_a]^{2j_a} - q^{2j_a} q^{-2z_a \frac{\theta}{\delta z_a}} [1(+)] z_a \bar{z}_a]^{2j_a}}{(q - q^{-1}) [1(+)] z_a \bar{z}_a]^{2j_a}} \right\}. \quad (3.21)$$

Fazemos uso aqui da seguinte propriedade:

$$q^{az \frac{\theta}{\delta z}} f(z) = f(q^a z) \quad (3.22)$$

onde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{2j} a_n z^n, \quad ,$$

para calcular

$$\begin{aligned}
\frac{\langle z | [2J_z(a)] | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{1}{(q - q^{-1})} \left\{ \frac{q^{-2j_a} [1(+)q^2 z_a \bar{z}_a]^{2j_a} - q^{2j_a} [1(+)q^{-2} z_a \bar{z}_a]^{2j_a}}{[1(+)z_a \bar{z}_a]^{2j_a}} \right\} \\
&= \frac{1}{(q - q^{-1})} \left\{ q^{-2j_a} \frac{(1 + q^{2j_a+1} z_a \bar{z}_a)}{(1 + q^{-2j_a+1} z_a \bar{z}_a)} - q^{2j_a} \frac{(1 + q^{-2j_a-1} z_a \bar{z}_a)}{(1 + q^{2j_a-1} z_a \bar{z}_a)} \right\} \\
\frac{\langle z | [2J_z(a)] | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{[N_a](z_a^2 \bar{z}_a^2 - 1)}{(1 + q^{-N_a+1} z_a \bar{z}_a)(1 + q^{N_a-1} z_a \bar{z}_a)} \quad (3.23)
\end{aligned}$$

A equação acima, depois de parametrizada, fica da seguinte forma:

$$\frac{\langle z | [2J_z(a)] | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = C(\theta) = \frac{[N_a] \left( \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)}{\left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + q^{-N_a+1} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + q^{N_a-1} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)} \quad (3.24)$$

Das eq. (3.19), (3.20) e (3.24), chegamos que:

$$\frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = B(\theta) - C(\theta) \quad (3.25)$$

Em todos os cálculos anteriores, lembramos que substituindo  $a$  por  $b$  e/ou  $\theta$  por  $\gamma$  temos as equações para as partículas do tipo  $b$ .

Por fim, temos que calcular os termos "cruzados". Observando que:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{\langle z_a | J_-(a) | z_a \rangle^* \langle z_b | J_-(b) | z_b \rangle}{\langle z_a | z_a \rangle \langle z_b | z_b \rangle} \\
\frac{\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{\langle z_b | J_-(b) | z_b \rangle^* \langle z_a | J_-(a) | z_a \rangle}{\langle z_a | z_a \rangle \langle z_b | z_b \rangle} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

chegamos que a última parcela da Hamiltoniana tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \\ & = \frac{[N_a][N_b](z_a \bar{z}_b + z_b \bar{z}_a)[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{N_a-1}[1(+)_z z_b \bar{z}_b]^{N_b-1}}{[1(+)_z z_b \bar{z}_b]^{N_b}[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{N_a}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

As q-binomiais acima, não podem ser simplificadas. Depois de feita a parametrização, temos que

$$\frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = D(\theta, \phi, \gamma, \beta),$$

onde

$$\begin{aligned} D(\theta, \phi, \gamma, \beta) &= \frac{[N_a][N_b]}{2} \cos(\phi - \beta) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma * \\ & \frac{\prod_{k=0}^{N_a-2} \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + q^{2k-N_a+2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \prod_{k=0}^{N_b-2} \left( \cos^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) + q^{2k-N_b+2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right)}{\prod_{k=0}^{N_a-1} \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + q^{2k-N_a+1} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \prod_{k=0}^{N_b-1} \left( \cos^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) + q^{2k-N_b+1} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A eq. (3.12) fica, então, reescrita da seguinte forma:

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{\theta, \phi, \gamma, \beta} \left\{ A(\theta) - A(\gamma) + \frac{V}{2\epsilon} \left\{ 2B(\theta) + 2B(\gamma) - C(\theta) - C(\gamma) + 2D(\theta, \phi, \gamma, \beta) \right\} \right\},$$

onde  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$ ,  $C(\theta)$ , e  $D(\theta, \phi, \gamma, \beta)$ , são dadas nas eqs. (3.14), (3.19), (3.24) e (3.28) respectivamente.

Os cálculos dos mínimos, foram realizados considerando  $N_a = N_b = N$ . Para a variável  $(\phi - \beta)$  o mínimo é facilmente encontrado, pois:

$$\frac{\partial E_0}{\partial(\phi - \beta)} = -K \sin(\phi - \beta) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 E_0}{\partial(\phi - \beta)^2} = -K \cos(\phi - \beta) > 0$$

então  $\cos(\phi - \beta) = -1$ , onde

$$K = \frac{[N_a][N_b]}{2} \text{sen}\theta \text{sen}\gamma^*$$

$$* \frac{\prod_{k=0}^{N_a-2} \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + q^{2k-N_a+2} \text{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \prod_{k=0}^{N_b-2} \left( \cos^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) + q^{2k-N_b+2} \text{sen}^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right)}{\prod_{k=0}^{N_a-1} \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + q^{2k-N_a+1} \text{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \prod_{k=0}^{N_b-1} \left( \cos^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) + q^{2k-N_b+1} \text{sen}^2 \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right)}$$

Assim, basta minimizar uma equação de duas variáveis,  $\theta$  e  $\gamma$ , para encontrarmos os estados de mínima energia. Essa minimização foi feita numericamente.

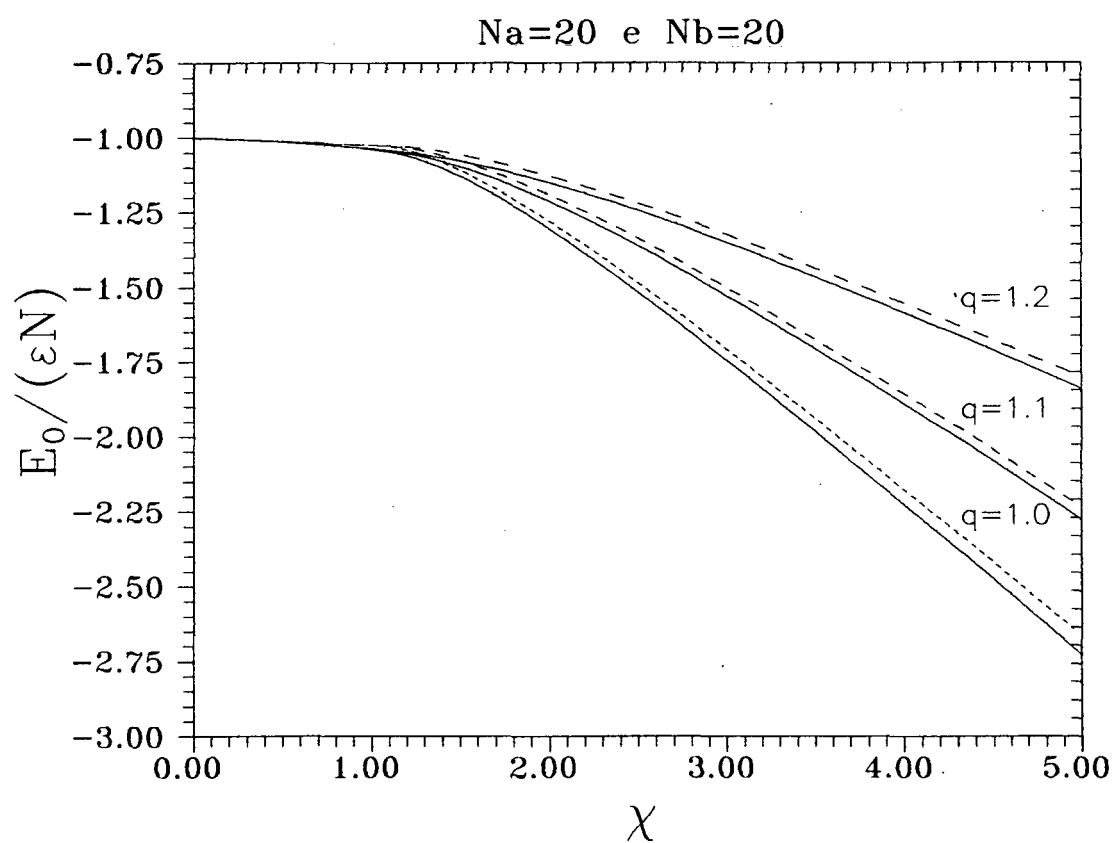
### 3. Resultados

Através das figuras 3 e 4 a seguir, pode-se notar que os resultados obtidos com o método variacional aproximam-se dos resultados exatos. Essa aproximação melhora com o aumento do número de partículas.

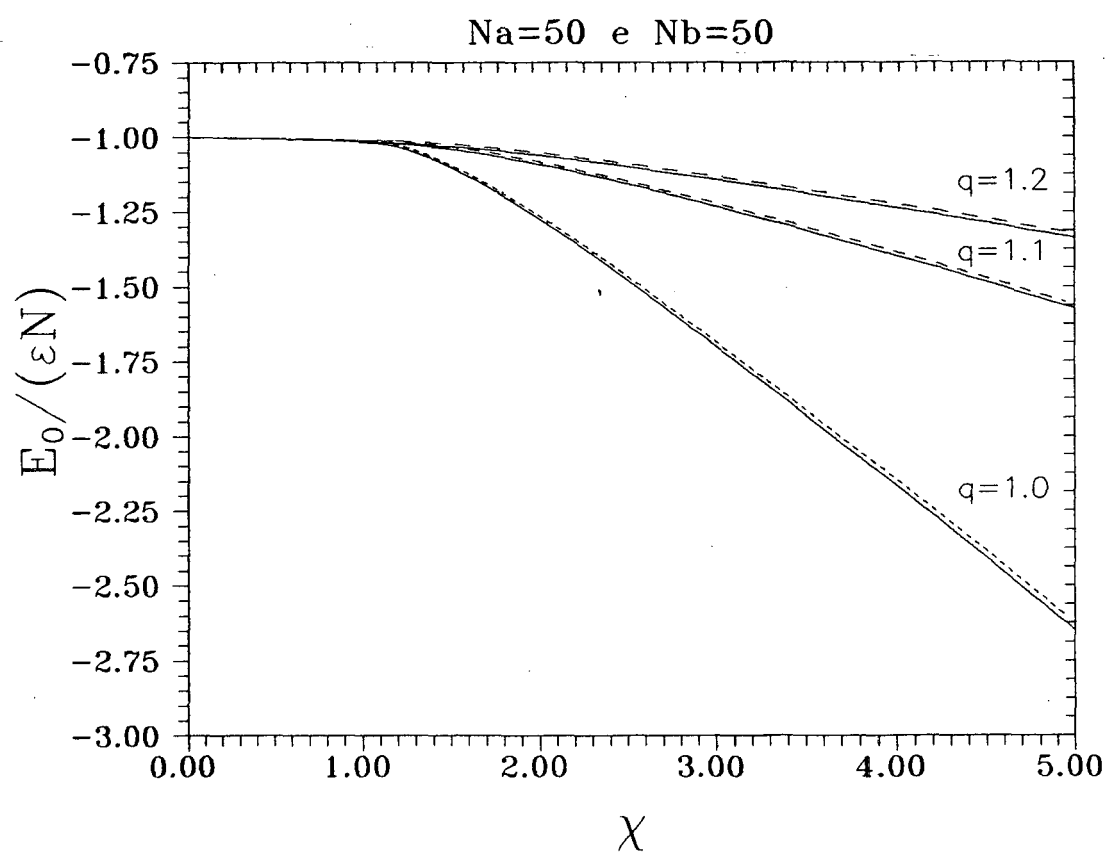
Em analogia com o modelo de Lipkin, também o modelo de Moszkowski apresenta uma transição de fase, de um modo vibracional para um rotacional.

Na figura 5 foram traçados os resultados numéricos do parâmetro de ordem  $\pi - \gamma$  calculados variacionalmente como função de  $\chi$  para  $N = N_a = N_b = 20$  e  $q = 1, 1.2$ . O parâmetro de ordem  $\pi - \theta$  é simétrico e por isso não o representaremos. Observamos, a partir das figs. 3 e 4, que a transição de fase é suprimida gradativamente com o aumento do valor do parâmetro de deformação. Os resultados assemelham-se, em parte, aos obtidos para o modelo de Lipkin deformado<sup>(8)</sup>, que obedece uma álgebra  $su_q(2)$ .

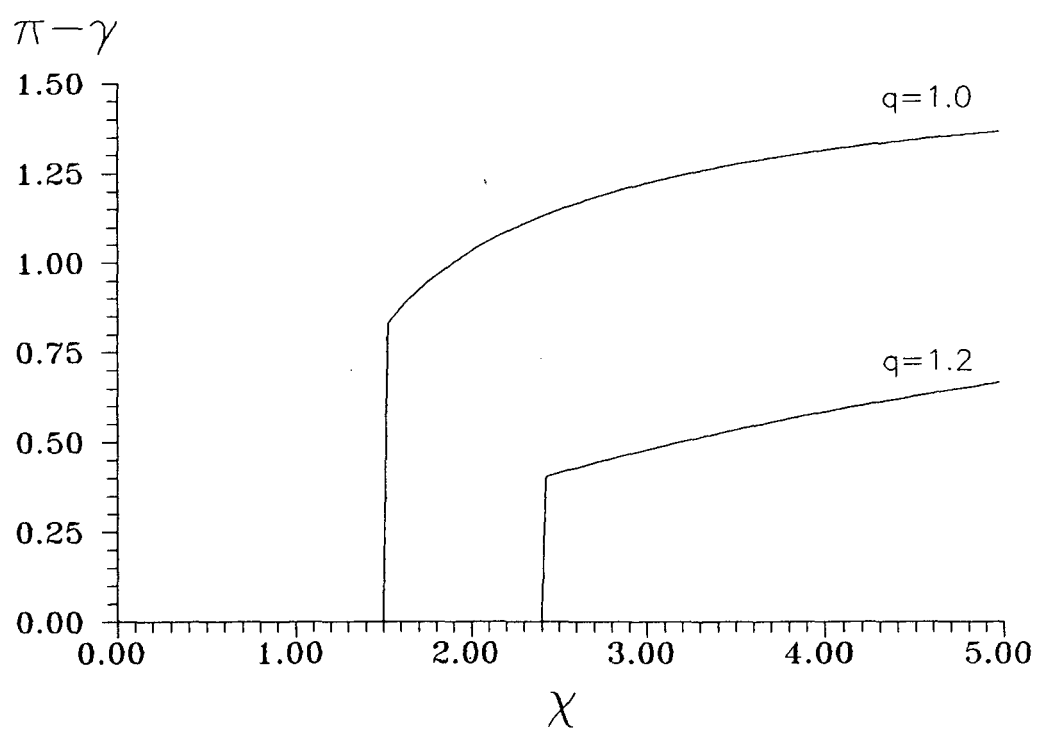




**Fig. 3.** Modelo de Moszkowski para  $N=Na=Nb=20$ . As linhas cheias dão os valores obtidos a partir do cálculo exato e as tracejadas, os valores obtidos no cálculo variacional.



**Fig. 4.** Modelo de Moszkowski para  $N=N_a=N_b=50$ . As linhas cheias dão os valores obtidos a partir do cálculo exato e as tracejadas, os valores obtidos no cálculo variacional.



**Fig. 5.** O parâmetro de ordem  $\pi - \gamma$  obtido no cálculo variacional como função de  $\chi$ , para  $N = N_a = N_b = 20$  e  $q = 1, 1.2$ .

## CAPÍTULO IV

### DEFORMAÇÃO SIMÉTRICA

#### 1. A Deformação

A deformação vista no Cap.III é a mais natural de ser feita e por isso mesmo vamos chamá-la de deformação simples ou trivial. Mas, além desta, existem várias outras formas de se deformar quanticamente um sistema. Dentre elas, algumas deformações que conservam um tipo de simetria que o sistema teria antes de ser deformado. Uma discussão dessa propriedade e o desenvolvimento de uma deformação que conserva esse tipo de simetria, pode ser encontrada no trabalho de Floratos sobre osciladores harmônicos<sup>(16)</sup>. Já foram desenvolvidos outros trabalhos, inclusive para férmions, usando-se a mesma receita dada por Floratos. Podemos citar, as refs.<sup>(17),(18)</sup> onde a álgebra  $su(2)$  é utilizada e a ref.<sup>(19)</sup> onde é utilizada a álgebra  $su(2) \otimes su(2)$ . A deformação realizada a seguir é uma adaptação para o nosso modelo, do processo utilizado por Chen<sup>(18)</sup>.

A Hamiltoniana da eq.(3.1), pode ser separada em duas partes. Dessa forma temos que

$$H = H_0 + H_1 , \tag{4.1}$$

onde

$$H_0 = \epsilon(J_z(a) - J_z(b)) \tag{4.2}$$

inclui apenas operadores de um corpo.

$H_0$  possui uma simetria  $u(2j_a + 1) \otimes u(2j_b + 1)$ , pois  $J_z(a)$  e  $J_z(b)$  comutam com todos os geradores da álgebra  $u(2j_a + 1) \otimes u(2j_b + 1)$ .

No contexto das álgebras quânticas, vemos que a Hamiltonia do modelo com a  $q$ -deformação normal tem a sua simetria  $u(2j_a + 1) \otimes u(2j_b + 1)$  quebrada. Observamos também que essa simetria, ao contrário do que poderíamos supor, não é transformada em uma simetria  $u_q(2j_a + 1) \otimes u_q(2j_b + 1)$ . A pergunta que nos vem, então, é se existe um meio de manter esse tipo de simetria mesmo com a introdução da deformação.

Sabemos que para férmions,

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad (4.3)$$

e a álgebra quântica, com o parâmetro de deformação real dado por  $q \equiv e^\lambda$ , é definida como:

$$\begin{aligned} a_{i\sigma} a_{i\sigma}^\dagger + q a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} &= q^{N_{i\sigma}} \\ a_{i\sigma} a_{i\sigma}^\dagger + q^{-1} a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} &= q^{-N_{i\sigma}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} &= [N_{i\sigma}] \\ a_{i\sigma} a_{i\sigma}^\dagger &= [1 - N_{i\sigma}], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$J_z(\alpha)$ , definido na eq. (3.4), pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J_z(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{2} \left( \alpha_{p1}^\dagger \alpha_{p1} - \alpha_{p1} \alpha_{p1}^\dagger \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{2} \left( \alpha_{p-1}^\dagger \alpha_{p-1} - \alpha_{p-1} \alpha_{p-1}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ou seja,

$$J_z(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{2} ([N_{p1}^\alpha] - [1 - N_{p1}^\alpha] - [N_{p-1}^\alpha] + [1 - N_{p-1}^\alpha]) . \quad (4.7)$$

Com a ajuda da eq. (1.10), definindo  $h_{p\sigma}^\alpha = N_{p\sigma}^\alpha - \frac{1}{2}$  e com  $\sigma = \pm 1$ , após algumas manipulações algébricas, chegamos que:

$$2J_z(\alpha) = \sum_\sigma \sum_p H_{\alpha\sigma} , \quad (4.8)$$

onde

$$H_{\alpha\sigma} = \frac{\sigma \left( q^{h_{p\sigma}^\alpha} - q^{-h_{p\sigma}^\alpha} \right)}{2 \left( q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}} \right)} . \quad (4.9)$$

Em analogia com a construção da ref.<sup>(18)</sup>, citada acima, propomos a seguinte versão q-deformada da Hamiltoniana da eq. (4.2):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 = & \frac{\epsilon}{2} \left( \sum_p q^{\sum_{j < p} (h_{p1}^a - h_{p-1}^a)} \left( H_{a1} q^{-h_{p-1}^a} - q^{-h_{p1}^a} H_{a-1} \right) q^{-\sum_{j > p} (h_{p1}^a - h_{p-1}^a)} \right) \\ & - \frac{\epsilon}{2} \left( \sum_p q^{\sum_{j < p} (h_{p1}^b - h_{p-1}^b)} \left( H_{b1} q^{-h_{p-1}^b} - q^{-h_{p1}^b} H_{b-1} \right) q^{-\sum_{j > p} (h_{p1}^b - h_{p-1}^b)} \right) , \end{aligned} \quad (4.10)$$

que resulta em:

$$\tilde{H}_0 = \frac{\epsilon}{2} \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \left( \frac{\sinh\left(\lambda \sum_p (h_{p1}^a - h_{p-1}^a)\right)}{\sinh \lambda} - \frac{\sinh\left(\lambda \sum_p (h_{p1}^b - h_{p-1}^b)\right)}{\sinh \lambda} \right) , \quad (4.11)$$

onde  $\lambda = \ln q$ . A Hamiltoniana acima pode ser, finalmente, reescrita como:

$$\tilde{H}_0 = \frac{\epsilon}{2} \cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right) \left( [2J_z(a)] - [2J_z(b)] \right) . \quad (4.12)$$

Observamos que quando  $\lambda \rightarrow 0$ , ( $q \rightarrow 1$ ), a eq. (4.12) tem o mesmo comportamento descrito pela eq. (4.2) e também que ela possui agora uma simetria  $u_q(2j_a + 1) \otimes u_q(2j_b + 1)$  já que comuta com os geradores da álgebra q-deformada.

## 2. Solução Exata e Variacional

O cálculo exato é realizado facilmente pela diagonalização da matriz

$$\langle j_b' m_b' | \langle j_a' m_a' | H' | j_a m_a \rangle | j_b m_b \rangle ,$$

onde:

$$H' = \tilde{H}_0 + H_1 , \quad (4.13)$$

conforme realizado no Cap.III.

Para o cálculo variacional, nessa nova deformação, temos que minimizar uma expressão análoga à eq. (3.12) para encontrarmos os valores da energia do estado fundamental, de forma semelhante ao feito no Cap.III. A expressão que obtemos a partir do cálculo variacional para a Hamiltoniana dada em (4.13) é

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{\theta, \phi, \gamma, \beta} \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{2} \left( C(\theta) - C(\gamma) \right) + \frac{V}{2\epsilon} \left( 2B(\theta) + 2B(\gamma) + \right. \right. \\ \left. \left. - C(\theta) - C(\gamma) + 2D(\theta, \phi, \gamma, \beta) \right) \right\} . \quad (4.14)$$

onde  $B(\theta)$ ,  $C(\theta)$ , e  $D(\theta, \phi, \gamma, \beta)$ , são dadas nas eqs. (3.19), (3.24) e (3.28) respectivamente.

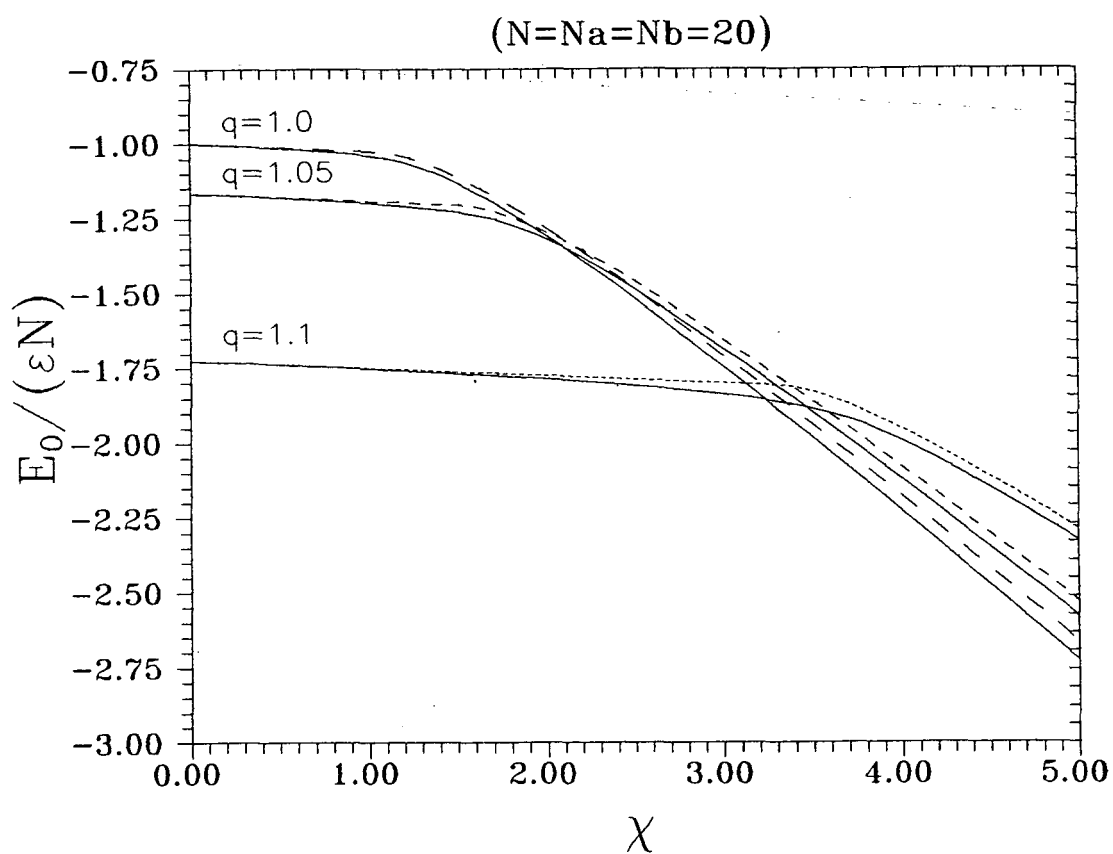
### 3. Resultados

Podemos observar, nos gráficos mostrados nas figs. 6 e 7 a seguir, que os resultados obtidos por intermédio do cálculo variacional (*linha tracejada no gráfico*) aproximam-se dos resultados exatos (*linha cheia no gráfico*). Notamos também, que os resultados variacionais são melhores para baixos valores da intensidade de interação. Os gráficos foram traçados para valores de  $q$  bem menores que os usados nas fig. 3 e 4 do Cap.III.

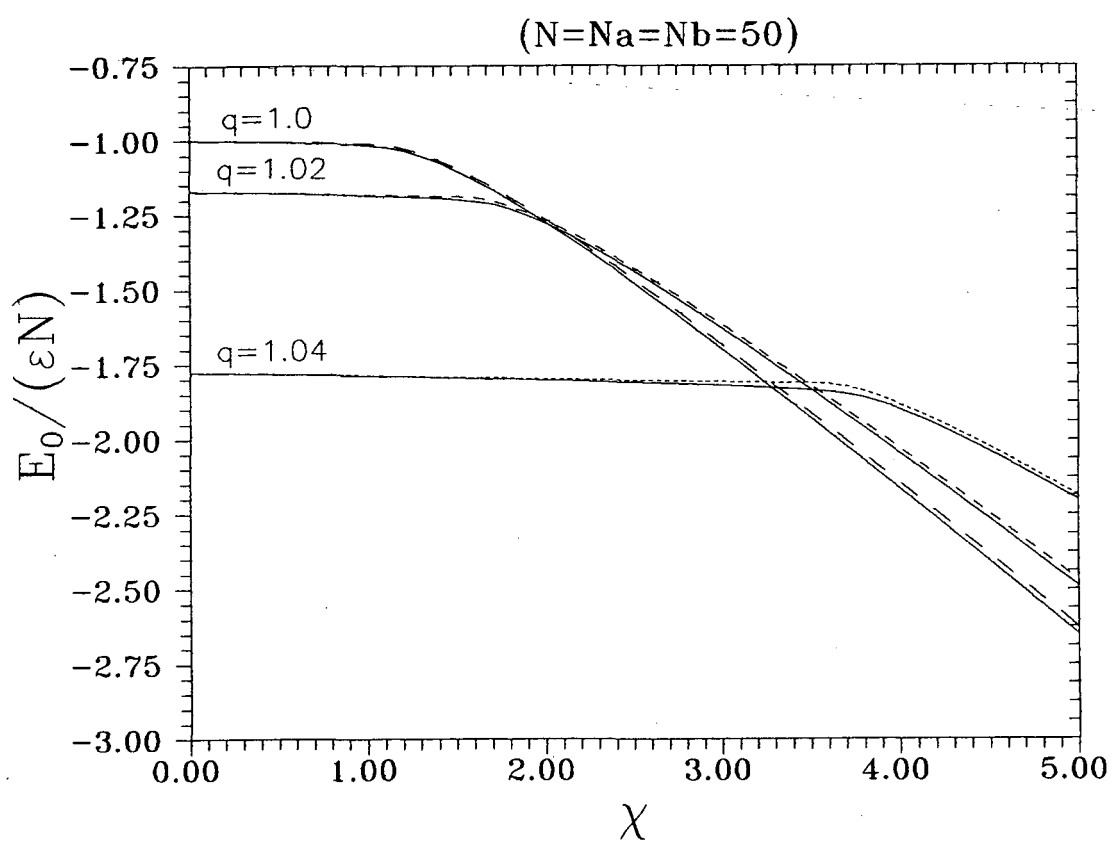
Outra observação importante é que, para a deformação simétrica, o valor da energia do estado fundamental sem interação, varia com o parâmetro de deformação, i é, o valor do campo médio não se conserva mais, o que não ocorria na deformação trivial. A deformação tem um efeito que ajuda os operadores de campo médio a contrabalançarem o valor da intensidade de interação.

O método variacional continua válido na deformação simétrica.





**Fig. 6.** O mesmo que a Fig.3, mas para a deformação simétrica. As linhas cheias dão os valores obtidos a partir do cálculo exato e as tracejadas, os valores obtidos no cálculo variacional.



**Fig. 7.** O mesmo que a Fig.4, mas para a deformação simétrica. As linhas cheias dão os valores obtidos a partir do cálculo exato e as tracejadas, os valores obtidos no cálculo variacional.

## CONCLUSÃO

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de fornecer ferramentas para que a descrição de sistemas físicos, no contexto das álgebras quânticas seja uma tarefa simples. Um dos objetivos dessa dissertação era testar a validade da aplicação do método variacional, na determinação do valor da energia do estado fundamental de sistemas físicos, usando como funções tentativas os estados coerentes. Além disso, foi utilizada uma outra forma de se introduzir deformações, de modo que o sistema deformado mantivesse a simetria análoga à existente no sistema original, i é, um sistema que possui uma simetria  $su(2)$ , quando deformado, deve possuir uma simetria do tipo  $su_q(2)$ .

No Cap.II, foram reproduzidos os estudos do modelo de Lipkin, quando ele obedece a álgebra quântica  $su_q(2)$ . Através desse estudo, foram adquiridos os conhecimentos necessários para o estudo do modelo de Moszkowski, que é mais complexo e obedece uma álgebra  $su_q(2) \otimes su_q(2)$  após deformado, conforme foi descrito no Cap.III.

O Método Variacional, via estados coerentes, mostrou-se eficaz para o cálculo da energia do estado fundamental, tanto no modelo de Lipkin, quanto no modelo de Moszkowski. A precisão dos resultados é maior quando o sistema possui um número grande de partículas. Isso é muito favorável, já que em sistemas com muitas partículas a solução exata nem sempre é possível.

Mostrou-se eficaz também, o método variacional, na deformação simétrica, como visto no Cap.IV. Também foi constatado que o valor de campo médio do modelo depende agora do parâmetro de deformação da álgebra. A deformação simétrica, como foi dito antes,

tem um efeito que ajuda os operadores de campo médio a contrabalançarem o valor da intensidade de interação.

Nos gráficos da energia do estado fundamental como função de  $\chi$ , apresentados nesse trabalho, observou-se a existência de uma região onde existe uma transição de fase. O comportamento dessa região de transição de fase foi também observado sob a influência da deformação. Em todos os casos estudados vimos que, com o aumento do valor do parâmetro de deformação, a transição vai sendo gradativamente suprimida. Esse comportamento pode ser melhor visualizado na fig. 5, onde um dos parâmetro de ordem do modelo de Moszkowski foi traçado como função de  $\chi$ . Para cada valor do parâmetro  $q$ , o parâmetro de ordem passa de um valor constante para valores mutáveis a partir de diferentes intensidades de interação. Ainda, com o aumento do parâmetro de deformação da álgebra esse salto do parâmetro de ordem fica cada vez mais reduzido.

Usamos em nossos estudos um parâmetro de deformação real. Observamos, nos gráficos mostrados, que o aumento do valor desse parâmetro produz uma interação residual repulsiva nos modelos, pois produz estados menos ligados.

## REFERÊNCIAS

- (1) - V. G. Drinfeld, in: Proc. Int. Congress for Mathematicians, (Berkeley, 1986), ed. A. M. Gleason (AMS, Providence, RI, 1986) p.798; M. Jimbo, Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63.
- (2) - M. Chaichian, D. Ellinas e P. Kulish, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 980.
- (3) - L. C. Biedenharn, J. Phys. A 22 (1989) L873; A. J. Macfarlane, J. Phys. A 22 (1989) 4581.
- (4) - D. Bonatsos, E. N. Argyres, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev e Y. F. Smirnov, Phys. Lett B 251 (1990) 477.
- (5) - D. Bonatsos e C. Daskaloyannis, Chem Phys. Lett. 203 (1993) 150.
- (6) - H. J. Lipkin, N. Meshkov e A. J. Glick, Nucl. Phys. 62 (1965) 188.
- (7) - D. Galetti e B. M. Pimentel, aceito para publicação nos "Anais da Academia Brasileira de Ciências".
- (8) - S. S. Avancini e J. C. Brunelli, Phys. Lett. A 174 (1993) 358.
- (9) - S. A. Moszkowski, Phys. Rev. 110 (1958) 403.

- (10) - D. P. Menezes, S. S. Avancini e C. Providência, *J. Phys. A* 25 (1992) 6317; D. Bonatsos, L. Brito, D. P. Menezes, C. Providência e J. Providência, *J. Phys. A* 26 (1993) 895.
- (11) - Ring, Peter and Schuch, Peter. *The Nuclear Many-body Problem*. Ed Springer-Verlag, New York. 1980.
- (12) - A. M. Perelomov, *Sov. Phys. Usp.* 20 (1977) 9 ; A. M. Perelomov, *Commun Math. Phys.* 26 (1972) 222.
- (13) - R. Gilmore, *Revista Mexicana de Física* 23 (1974) 143. E. Schrödinger, *Naturwiss* 14(1927) 644.
- (14) - C. Quesne, *Phys. Lett. A* 153 (1991) 303
- (15) - Jimbo M. *Lett. Math. Phys.* 10 (1985) 63; *Lett. Math. Phys.* 11 (1986) 247
- (16) - E.G.Floratos, *J. Phys A Math. Gen.* 24(1991) 4739.
- (17) - D. Bonatsos, D. P. Menezes, S. S. Avancini e C. Providência, aceito para publicação na *Phys. Lett. A*.
- (18) - Wei-Yeu Chen e Choon-Lin Ho, *J. Phys. A* 26 (1993) 4827.
- (19) - S. S. Avancini e D. P. Menezes, *J. Phys. A* 26 (1993) 6261.
- (20) - R. Gilmore e D. H. Feng, *Phys. Lett. B* 76 (1978) 26. R. D. Willian e S. E. Koonin, *Nucl. Phys. A* 391 (1982) 72.