

Universidade Federal de Santa Catarina

Programa de Pós-Graduação em Física

**FATOR DE FORMA TRANSVERSO PARA A RESSONÂNCIA
GIGANTE DE DIPOLO VIA ESPALHAMENTO DE ELÉTRON**

Dissertação

Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física
da Universidade Federal de Santa Catarina
para obtenção do grau de
MESTRE EM CIÊNCIAS

MAURÍCIO DOS SANTOS BARBI

UFSC

Florianópolis, março de 1994

FATOR DE FORMA TRANSVERSO PARA A RESSONÂNCIA GIGANTE DE DIPOLO VIA ESPALHAMENTO DE ELÉTRON

MAURÍCIO DOS SANTOS BARBI

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de
MESTRE EM CIÊNCIAS
especialidade Física e aprovada em sua forma final pelo Programa de
Pós-Graduação.



Prof.Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz- Orientador



Prof.Dr. Wagner Figueiredo - Coordenador do Curso

Banca Examinadora



Prof.Dr. Frederico Firmo de Souza Cruz (UFSC)- Presidente



Prof.Dr. Luis Felipe de Ulhôa Canto (UFRJ)



Prof.Dra. Marilena M. Watanabe de Moraes (UFSC)

AGRADECIMENTOS

A minha esposa Veroni Valenti Barbi, a qual dedico minha vida.

A meus pais e irmãos, partes de meu ser.

Aos agentes financiadores, CAPES e CNPQ .

Em fim, a todos que orientaram-me nesta tese.

ÍNDICE

1.. INTRODUÇÃO	1
1.1.. Ressonância Gigante de Dipolo (RGD)	1
1.2.. Modelos Macroscópicos para a RGD	1
1.3.. Modelo Microscópico para a RGD (Modelo de Camadas).....	2
2.. MÉTODO DE COORDENADAS GERADORAS	5
2.1.. Introdução	5
2.2.. Descrição do Método.....	9
3.. ESPALHAMENTO DE ELETRONS E ESTRUTURA NUCLEAR	11
3.1.. Introdução.....	11
3.2.. Histórico.....	12
3.3.. Vantagens no Uso de Eletrons.....	12
3.4.. Descrição Teórica da Interação Elétron-Núcleo	14
4.. FATOR DE FORMA TRANSVERSO	23
4.1.. Introdução.....	23
4.2.. Construção do Operador de Corrente.....	23
4.3.. Cálculo do Fator Local.....	24
4.4.. Explicitando os Cálculos para o Fator de Forma Transverso.....	29
5.. CONCLUSÃO	30
APÊNDICE A.. Regras de Seleção para a Ressonância Gigante.....	36
APÊNDICE B.. Expansão Multipolar para o Operador Longitudinal	38

APÊNDICE C..	Expansão Multipolar para o Operador Transverso	40
APÊNDICE D..	Equivalência entre a Equação de Schrödinger no Espaço Coletivo e a Equação de Griffin-Hill-Wheeler	44
APÊNDICE E..	Diagonalização da Hamiltoniana no Espaço Coletivo	46
APÊNDICE F..	Restaurando a Simetria	51
APÊNDICE G..	Cálculo do Fator de Normalização	53
BIBLIOGRAFIA		56

RESUMO

Neste trabalho, investigamos uma descrição microscópica da Ressonância Gigante de Dipolo, através das análises de espalhamento de elétrons.

A descrição microscópica, baseada no Método de Coordenadas Geradoras, dá expressões analíticas para a Hamiltoniana coletiva e para funções de onda coletiva dos núcleos com camada duplamente fechada O^{16} e Ca^{40} .

As funções de onda são, então, analisadas através dos cálculos dos fatores de forma para o espalhamento de elétrons. Particularmente, calculamos o fator de forma transversal na aproximação de Born para ondas planas.

Finalizando, nossos resultados são comparados a novos dados experimentais, bem como também a antigos dados.

ABSTRACT

In this work we investigate a microscopic description of the Giant Dipole Resonance through the electron scattering analysis.

The microscopic description, based upon the Generator Coordinate Method, give analytical expressions for the collective Hamiltonian and collective wavefunctions double closed shell nuclei O^{16} and Ca^{40} .

The wavefunctions are then analysed through the calculation of electron scattering form factors. We particularly calculate the transverse form factor in the Plane Wave Born approximation.

Our results are analysed and compared to old and new experimental data.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.

1.1...RESSONÂNCIA GIGANTE DE DIPOLO (RGD):

Em 1944, Migdal [1] previu, teoricamente, a existência de estados de ressonância nuclear com características de dipolo elétrico. De fato, em 1947 observou-se experimentalmente estados com frequência e largura grandes, característicos de ressonâncias, e com caráter de dipolo elétrico [2]. Estes estados ficaram, então, conhecidos como Ressonância Gigante de Dipolo (RGD).

Começou-se um amplo estudo sobre a RGD. Observou-se que ela era uma excitação comum a todos os núcleos com número de massa $A \geq 4$, e que possuía as seguintes características:

- 1) Largura entre 4 e 7 Mev, conforme diminuimos o número de massa;
- 2) Energia de excitação variando suavemente com A ;
- 3) Exaure grande parte da regra da soma de Thomas-Reiche-Kuhn [3]. Para núcleos pesados, a RGD exaure aproximadamente 100% da TRK, enquanto para núcleos leves, como O^{16} , ela exaure 50%, o que ainda é bastante. Este fato nos diz que a RGD tem um caráter coletivo de excitação dos nucleons.

1.2...MODELOS MACROSCÓPICOS PARA A RGD:

Os primeiros modelos para explicar a coletividade da RGD eram macroscópicos, baseados na Hidrodinâmica, e devem-se, principalmente, a Goldhaber e Teller [4]. Eles desenvolveram um modelo (G-T) onde a ressonância era explicada em termos de dois fluidos, um de prótons e outro de nêutrons, confinados cada qual em esferas incompressíveis, homogêneas e interpenetráveis. Estas esferas moviam-se fora de fase, em torno do centro de massa do sistema, onde a força restauradora do movimento era uma generalização do termo de superfície nuclear da fórmula de massa semi-empírica de Weizsacker. Nesse caso, a energia de excitação era da ordem de $A^{-\frac{1}{6}}$.

Goldhaber e Teller também mencionaram, no artigo [4], um outro modelo hidrodinâmico, onde o núcleo era composto, ainda, por fluidos de prótons e nêutrons, de densidades homogêneas, inseridos, agora, numa esfera incompressível. A RGD era explicada, então, como o movimento fora de fase (180°) entre os dois fluidos dentro da esfera, sendo a força restauradora a de se tentar retornar ao estado de densidade homogênea. Este modelo, entretanto, foi desenvolvido por Steinwedel e Jensen (S-J) [5], e previa uma energia para a RGD da ordem de $A^{-\frac{1}{3}}$.

Mais tarde comprovou-se que, na verdade, a energia da ressonância era uma combinação dos dois modelos:

$$E_{RGD} = 31.2A^{-\frac{1}{3}} + 20.6A^{-\frac{1}{6}} \quad \text{MeV}$$

onde, o modelo de S-J prevalecia para núcleos pesados e o de G-T para núcleos leves.

Os modelos coletivos de G-T e S-J previam a energia para a RGD muito bem. Porém, foi observado experimentalmente, que essas ressonâncias apresentavam uma estrutura fina que não era prevista nestes modelos.

1.3...MODELO MICROSCÓPICO PARA A RGD (MODELO DE CAMADAS):

Partiu-se, então, para uma descrição microscópica da ressonância gigante de dipolo. A princípio, a descrição microscópica da RGD, através do modelo de camadas, não levava a resultados satisfatórios [6]. Pensava-se nessa excitação como a promoção de um nucleon ou mais, de uma camada cheia para outra imediatamente acima permitida pelas regras de seleção. A energia de excitação por nucleon, no modelo de camadas, é proporcional a $\hbar\omega$, de modo que a energia total da excitação seria a soma da energia de promoção de cada nucleon. Entretanto, logo notou-se que apesar deste modelo exaurir a regra da soma de TRK, as energias previstas para a RGD não concordavam com os dados experimentais, ficando abaixo destas.

Mais tarde, porém, mostrou-se que a descrição da RGD via modelo de camadas não era descartável, desde de que fossem levados em conta as correlações entre os estados de partícula-buraco [7,8]. Visto que a energia do estado partícula-buraco tem sinal oposto a do

estado partícula-partícula, àquela será de natureza repulsiva, aumentando, assim, a energia de excitação do núcleo. Desta forma, obteve-se que a energia para a RGD era compatível com as experiências. Por outro lado, Brink [9] mostrou que o modelo coletivo poderia ser interpretado com o estado coletivo sendo uma combinação coerente das excitações de partícula-buraco que obedecem as regras de seleção para a RGD (APÊNDICE A).

A intenção neste trabalho é usarmos a descrição de G-T para a RGD nos núcleos duplamente mágicos O^{16} e Ca^{40} , porém baseando-nos num cálculo microscópico, tendo como ponto de partida uma Hamiltoniana de muitos corpos de Skyrme. A obtenção do estado fundamental e dos estados excitados é feita mediante o Método de Coordenadas Geradoras. A escolha deste método deveu-se ao fato dele se adequar muito bem à descrição de G-T, resultando em expressões analíticas para os fatores de forma dos núcleos que iremos estudar. Além do mais, Ferrel e Visscher [10] mostraram que existe uma correspondência entre este método e o modelo de camadas.

Vale citar que, se considerarmos os protons e os neutrons como estados dubletos de uma única partícula, de isospin $T = 1/2$, $T_z = \pm 1/2$ e spin $S_z = \pm 1/2$, o modelo de G-T deverá ser generalizado de forma a permitir quatro tipos de fluidos. Assim, seguindo as regras de seleção e notando que a autofunção total para a RGD deverá ser antissimétrica, ficamos com os seguintes tipos de excitações possíveis para núcleos de camada fechada com $N = Z$ (nesse caso o isospin e spin iniciais são nulos e o estado da RGD é o 1^-):

- 1) Esfera de protons movendo-se contra esfera de neutrons;
- 2) Esfera de protons com spin up e neutrons com spin down, movendo-se contra esfera de protons com spin down e neutrons com spin up;
- 3) Esfera de protons com spin up e neutrons com spin up, movendo-se contra esfera de protons com spin down e neutrons com spin down;
- 4) Os quatro fluidos movendo-se em fase.

A RGD é explicada, então, como o movimento entre dois fluidos, definidos acima, defasados de 180° . Naturalmente, o quarto modo de excitação ($\Delta S = 0, \Delta T = 0$) não nos interessa, pois trata-se de um estado espúrio, visto que o núcleo translada como um todo.

A terceira excitação caracteriza um modo em que protons e neutrons de mesmo spin, oscilam em fase, ou seja $\Delta T = 0$ e $\Delta S = 1$. Este estado é chamado de isoscalar magnético,

permitindo modos de spin-flip.

A segunda excitação corresponde ao modo em que protons e neutrons de mesmo spin oscilam fora de fase, ou seja, $\Delta T = 1$ e $\Delta S = 1$. Este modo é conhecido como isovetorial magnético, permitindo, também, modos de spin-flip.

A primeira excitação corresponde ao modo de G-T, onde $\Delta T = 1$ e $\Delta S = 0$, ou seja, é um estado isovetorial elétrico, não permitindo, assim, modos de spin-flip.

Nosso trabalho tratará do estado $\Delta T = 1, \Delta S = 0$, ou seja, não levaremos em conta estados de spin-flip. No Capítulo V, veremos que a não inclusão destes modos nos levaram a resultados que não previam um mínimo para o fator de forma transversal, tal qual observado experimentalmente.

CAPÍTULO II

MÉTODO DE COORDENADAS GERADORAS

2.1...INTRODUÇÃO.

Para uma descrição microscópica dos estados do núcleo usaremos o Método de Coordenadas Geradoras. Neste método os estados do sistema são caracterizados através de um conjunto de estados geradores, representados por determinantes de Slater, e parâmetros variacionais, ambos escolhidos fenomenologicamente. Isto irá nos permitir, mediante um tratamento adequado do espaço variacional, obter soluções analíticas para os elementos de matriz de transição para os estados de Ressonância Gigante de Dipolo (RGD).

Consideramos o seguinte ansatz de Griffin-Hill-Wheeler [11]:

$$|\psi\rangle = \int f(\alpha) |\varphi(x_1, \dots, x_A, \alpha)\rangle d\alpha \quad (2.1)$$

onde:

x_i = vetor posição da partícula "i";

α = Parâmetro variacional, ou coordenada geradora;

$|\varphi(x_1, \dots, x_A, \alpha)\rangle = |\alpha\rangle$ é o estado gerador descrito por um determinante de Slater das funções de onda de partículas independentes;

$f(\alpha)$ = função peso da configuração de onda geradora, ou função peso da configuração;

$|\psi\rangle$ = estado tentativa;

A idéia física do método é tratar os modos coletivos de forma consistente com os modos de excitação não coletivos. O sucesso do Shell Model (e de suas versões autoconsistentes) na explicação e interpretação de diversos fenômenos, indicavam a validade das hipóteses de campo médio. Assim, interpretando os modos coletivos como variações deste campo, Griffin-Hill-Wheeler introduziram o ansatz (2.1), onde o estado nuclear é dado como uma combinação linear de determinantes de Slater parametrizados convenientemente. A cada valor da coordenada geradora corresponde uma configuração diferente do campo médio.

Podemos obter $f(\alpha)$ introduzindo a função de onda tentativa (2.1) no princípio variacional:

$$\delta \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = 0 \quad (2.2)$$

Acima, o hamiltoniano de muitos corpos H é dado por:

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_A) \quad (2.3)$$

\vec{r}_i, \vec{p}_i, m = vetor posição, vetor momento e massa do nucleon "i", respectivamente.

A partir de (2.2) obtemos:

$$\int [K(\alpha, \alpha') - EI(\alpha, \alpha')] f(\alpha') d\alpha' = 0 \quad (2.4)$$

onde,

$$I(\alpha, \alpha') = \langle \alpha | \alpha' \rangle \quad (2.5)$$

$$K(\alpha, \alpha') = \langle \alpha | H | \alpha' \rangle \quad (2.6)$$

A equação (2.4) é conhecida como eq. de Griffin-Hill-Wheeler (GHW), onde, para a norma de (2.1) ser limitada, a função peso deverá ser de quadrado integrável.

O tipo de problema que estamos estudando corresponde à ressonância gigante de dipolo para os núcleos de O^{16} e Ca^{40} . Este tipo de excitação é descrita por Goldhaber-Teller [4] como um movimento coletivo dos nucleons, de forma que uma esfera de protons, de volume constante, move-se contra outra de neutrons, também de volume constante, de forma que elas podem se interpenetrar.

Feitas as considerações anteriores, ficamos com os seguintes problemas:

- 1) Considerar um estado gerador apropriado;
- 2) Descrevermos uma Hamiltoniana para o sistema.

Os estados $|\alpha\rangle$ correspondem a um determinante de Slater dos autoestados de partículas para os nucleons no potencial parametrizado que, no caso, representaremos pelo potencial de

oscilador harmônico no modelo de camadas (Shell Model). O parâmetro α é escolhido como a distância média entre os centros de massa das esferas de prótons e nêutrons.

Por outro lado, o modelo de Goldhaber-Teller é representado por um deslocamento em oposição de fase entre as esferas de prótons e nêutrons, de modo que, através do operador de translação, poderemos facilmente escrever os estados excitados $|\alpha\rangle$ em termos do autoestado de equilíbrio (fundamental) $|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = e^{-i\alpha\hat{P}}|0\rangle \quad (2.7)$$

onde, \hat{P} é o operador de momento de Goldhaber-Teller, dado por:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \hat{p}(i)\tau_3(i) \quad (2.8)$$

com,

$\hat{p}(i)$ = operador de momento de partícula;

\hat{P} = operador de momento no espaço de Hilbert de muitos corpos;

$\tau_3(i)$ = terceira componente do operador de isospin.

O operador \hat{Q} , conjugado a \hat{P} , é definido como:

$$\hat{Q} = \frac{2}{A} \sum_{i=1}^A \hat{x}(i)\tau_3(i) \quad (2.9)$$

$\hat{x}(i)$ = coordenada do nucleon i .

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$$

$$\tau_3(i) = \begin{cases} 1, & \text{para prótons;} \\ -1, & \text{para nêutrons.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Os operadores \hat{Q} e \hat{P} são tomados de forma que representam a distância relativa e o momento relativo entre os centros de massa dos prótons e nêutrons, respectivamente. Ou seja,

$$\hat{Q} = \hat{R}_P - \hat{R}_N$$

$$\hat{P} = \frac{N}{A} \hat{P}_P - \frac{Z}{A} \hat{P}_N$$

Consideraremos, a princípio, que o movimento relativo entre os protons e os neutrons se dê na direção do eixo coordenado “z”, de forma que:

$$|\alpha \rangle = e^{-i\alpha \hat{P}_z} |0 \rangle \quad (2.11)$$

Esta suposição tem o inconveniente de não levar a soluções que sejam autoestados do momento angular total e sua projeção “z”, uma vez que particulariza a direção do movimento na na direção “z”.

Numa série de trabalhos (ver [12] por exemplo) foi demonstrado que o espaço variacional gerado pelo ansatz (2.1) admite uma representação fechada e completa. Este sub- espaço fechado e completo é identificado com o subespaço coletivo, que representaremos por S_c . Colocado nestes termos, o problema pode ser resolvido de duas formas equivalentes. Num primeiro caso, resolve-se diretamente a eq. de GHW. Num segundo enfoque, projeta-se a dinâmica de muitos corpos (Hamiltoniana de muitos corpos) no subespaço coletivo e resolve-se o problema de autovalores. Usaremos este segundo enfoque, o qual foi seguido por Souza Cruz e Weiss [13,14].

É, ainda, interessante salientarmos que o ansatz de GHW gera estados não determinantes, incorporando correlações que vão além da aproximação de campo médio. Pode-se, também, mostrar que a aproximação quadrática do método leva a um tratamento equivalente ao de RPA.

Por completicidade, descreveremos agora o método empregado por Souza Cruz.

2.2...DESCRIÇÃO DO MÉTODO.

O projetor \hat{S} no espaço coletivo acha-se calculado explicitamente no Apêndice D. Ele pode ser escrito como:

$$\hat{S} = \int_{n_k \neq 0} |k\rangle \langle k| dk \quad (2.12)$$

onde, $|k\rangle$ representa a base de momento em S_c e é dado por:

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k}} \int_{n_k \neq 0} u_k(\alpha) |\alpha\rangle d\alpha \quad (2.13)$$

com

$$u_k(\alpha) = \frac{e^{ik\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.14)$$

$$n_k = \frac{b_0}{\sqrt{\pi}} e^{-b_0^2 k^2} \quad (2.15)$$

sendo o autovalor e autofunção do overlap $\langle \alpha' | \alpha \rangle$ [15],

$$\langle \alpha' | \alpha \rangle = e^{-\frac{(\alpha - \alpha')^2}{4b_0^2}} \quad (2.16)$$

obtido de (2.11) tendo $|0\rangle$, estado de referência, como o determinante de Slater formado por funções de onda de um poço de potencial de oscilador harmônico, com parâmetro de tamanho a_0 escolhido convenientemente, onde:

$b_0 = \frac{2a_0}{\sqrt{A}}$ é um parâmetro coletivo, com A sendo o número de massa do núcleo.

(2.13) obedece a seguinte relação de ortonormalização:

$$\langle k | k' \rangle = \delta(k - k') \quad (2.17)$$

Na verdade, a definição de S_c não é trivial, de forma que apresentamos apenas dados relevantes aos nossos cálculos. Uma análise mais rigorosa pode ser encontrada na referência [12].

De um modo geral, podemos avaliar o elemento de matriz de transição de um operador de muitos corpos \hat{O} , entre dois estados de muitos corpos $|f\rangle$ e $|f'\rangle$ pertencentes ao espaço gerado pelo ansatz de GHW, como segue:

$$\begin{aligned} \langle f|\hat{O}|f'\rangle &= \langle f|\hat{S}^{-1}\hat{S}\hat{O}\hat{S}^{-1}\hat{S}|f'\rangle \\ &= \langle g|\hat{S}\hat{O}\hat{S}^{-1}|g'\rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde,

$|g\rangle =$ projeção de $|f\rangle$ no subespaço coletivo S_c .

Assim, o operador \hat{O} será dado na representação coletiva da seguinte forma:

$$\tilde{O} = \hat{S}\hat{O}\hat{S}^{-1} \quad (2.19)$$

Vemos, portanto, que podemos resolver (2.4) diagonalizando a Hamiltoniana coletiva em S_c , definida de acordo com (2.19):

$$\hat{H}_c = \hat{S}\hat{H}\hat{S}^{-1} \quad (2.20)$$

onde $\hbar H$ é o hamiltoniana de muitos corpos da equação (2.3).

Assim, teremos a seguinte eq. de autovalores em S_c :

$$\hat{H}_c|g_i\rangle = E_i|g_i\rangle, \quad (2.21)$$

onde $|g_i\rangle$ é descrito em termos da base (2.13).

Souza Cruz e Weiss diagonalizaram a Hamiltoniana coletiva, partindo de uma Hamiltoniana de muitos corpos de Skyrme. No Apêndice E, damos um resumo sobre esta Hamiltoniana, bem como sobre os procedimentos adotados na diagonalização de \hat{H}_c . No mais, interessamos analisar as autofunções coletivas obtidas pelos autores acima, através do espalhamento inelástico de eletrons.

CAPÍTULO III

ESPALHAMENTO DE ELETRONS E ESTRUTURA NUCLEAR

3.1...INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o espalhamento de eletrons vem sendo muito usado no estudo de estruturas nucleares. Basicamente, o advento dos grandes aceleradores, que permitem grandes energias aos eletrons, bem como o conhecimento profundo da interação eletromagnética, regida pela Eletrodinâmica Quântica, tornam este estudo bem atraente.

A teoria de espalhamento de eletrons por núcleos acha-se bem explorada em diversos artigos na literatura ao longo dos anos, tais como Barber [16], Drell e Walecka [17], Goldemberg e Pratt [18], Hofstadter [19], e muitos outros. Este é portanto um campo altamente embasado, que nos dá um meio relativamente seguro de estudar as excitações nucleares.

Nesse capítulo, temos como objetivo a obtenção de expressões para os elementos das matrizes de transição para o espalhamento, bem como para os fatores de forma nucleares associados a esses elementos. Com esse intuito, seguimos a nomenclatura do artigo de Forest-Walecka [20].

Em nosso trabalho não levaremos em conta possíveis correntes mesônicas, ou outras formas de contribuições a estrutura nuclear. Assumiremos que existe apenas a interação entre as quadri-correntes nucleares e elétricas. Podemos justificar esta suposição se notarmos que estamos trabalhando com núcleos de camada fechada (O^{16} , Ca^{40}), de forma que desprezamos efeitos de magnetização nuclear. Além disso, interessam-nos reações onde o momento transferido entre o elétron e o núcleo seja menor que $\frac{100MeV}{c^2}$, ou seja, abaixo da energia onde esperamos observar excitações gerando correntes mesônicas, já que a massa dos píons é da ordem de $100MeV$.

3.2...HISTÓRICO

Já em 1929, Mott [21], usando as equações de Dirac, elaborou um modelo para o estudo dos núcleos atômicos via espalhamento de elétrons. Mott considerou o núcleo como uma esfera rígida, de distribuição uniforme de cargas, com spin e momento angular nulos. Assim, Mott determinou uma expressão para a seção de choque elástica de núcleos que satisfaziam a relação $Z/137 \ll 1$:

$$\sigma_M(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{2mc^2} \right)^2 \left(\frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \right) \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (3.1)$$

onde:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

θ = ângulo de espalhamento do elétron;

c = velocidade da luz.

Para núcleos leves e elétrons de baixa energia, a expressão acima mostrou-se uma boa aproximação, descrevendo bem os dados experimentais. Tendo comprimento de onda grande, os elétrons “enxergavam”, na verdade, o núcleo como sendo pontual. No entanto, a medida que Z crescia, as previsões do modelo de Mott começavam a falhar. Tentou-se correções ao modelo, sumarizadas por Fesbach-Mckinley [22] e Fesbach [23]. Porém, mostrou-se que tais correções não eram suficientes.

Assim, começou-se a usar espalhamento de hádrons, pois devido a massividade destes, necessitava-se de menos energia para a obtenção de comprimentos de onda pequenos. Experiências por espalhamento de fótons também foram se tornando mais frequentes e, pelo menos experimentalmente, reações via espalhamento de elétrons foram deixadas de lado. No entanto, pesquisas teóricas continuaram a desenvolver-se nesse campo, de forma que, nos idos dos anos 50, com o desenvolvimento de aceleradores de altas energias e, motivados por trabalhos tais como de Guth [24] e Rose [25], retornou-se a esta linha de experimento.

3.3... VANTAGENS NO USO DE ELÉTRONS.

Existem dois tipos de experimentos via espalhamento, de acordo com o número de partículas detectadas após a reação :

1- **EXPERIMENTO INCLUSIVO** - Nesse tipo de experimento apenas a partícula espalhada é detectada. Possíveis canais de decaimento do núcleo são somados. Designamos este processo por (x, x') , onde x é a partícula incidente e x' é a mesma partícula espalhada. Em nosso trabalho, levaremos em conta este tipo de experimento, com elétron não polarizado.

2- **EXPERIMENTO EXCLUSIVO** - Caracteriza-se pela detecção de uma ou mais partículas, provenientes do núcleo, em coincidência com a partícula espalhada. Designamos este experimento por (x, x', y_1, \dots, y_n) , onde n e y_n são o número e o tipo das partículas emitidas pelo núcleo, respectivamente. Naturalmente, este experimento nos trará muito mais informações que o inclusivo.

Na verdade, nas experiências de espalhamento de partículas por núcleos, muitos inconvenientes ocorrem. Contaminações nos dados obtidos, como, por exemplo, reações de “background”, tais como fons provenientes de “bremsstrahlung” induzindo reações não desejadas; distúrbios na estrutura nuclear a ser medida; etc. Desta forma, vemos que a escolha de uma partícula a ser espalhada é imprescindível na redução das contaminações dos dados a serem medidos.

Portanto, devemos procurar por uma partícula cuja interação com o núcleo seja, em princípio, conhecida. Além disso, é necessário que essa interação não altere consideravelmente a estrutura nuclear, e ainda minimize as reações não desejadas. Como colisões com elétrons são regidas apenas pela interação eletromagnética com o núcleo (desprezando a interação fraca, que é muito pequena), os modos de excitações terão um caráter mais seletivo. Por outro lado, a seção de choque decorrente de reações de “bremsstrahlung” de elétrons na matéria nuclear pode, a priori, ser calculada pela Eletrodinâmica Quântica, e seus efeitos na seção de choque de espalhamento podem ser computados.

Um fato relevante para a escolha do espalhamento de elétrons é que podemos dar um tratamento perturbativo à interação eletromagnética, usando uma 1° aproximação na constante de acoplamento, visto esta ser da ordem de $1/137$. Assim, utilizaremos a aproximação de Born de 1° ordem para a matriz S de transição [26], conhecida como PWBA (“Plane Wave Born Approximation”).

Poderíamos nos perguntar porque não utilizarmos, em nosso trabalho, espalhamento de

fotons. Porém, como os fotons não possuem massa, o momento transferido por eles (em unidades de c), para o núcleo, é exato a energia transferida. Assim, para uma mesma energia transferida ϵ , obteremos uma dependência apenas angular para a matriz de transição. Por outro lado, o elétron tem a vantagem de possuir massa, logo seu quadrimomento transferido q_μ deverá ser do tipo espaço, ou seja:

$$q_\mu^2 = \vec{q}^2 - \epsilon^2 \geq 0 \quad (3.2)$$

Assim, podemos, para uma mesma energia transferida ϵ , estudar a matriz de transição não só como função do ângulo de espalhamento, mas também do momento transferido \vec{q} . Com isto, poderemos obter mais informação sobre a estrutura nuclear.

De aqui até o Capítulo 4 adotaremos $\hbar = c = 1$.

3.4...DESCRIÇÃO TEÓRICA DA INTERAÇÃO ELÉTRON-NÚCLEO

Na aproximação PWBA, a perturbação causada pelo elétron no núcleo, é devida a interação entre a quadricorrente eletrônica e o potencial de Møller, gerado pelas quadricorrentes nucleares [20], ou seja:

$$\hat{H}(x_\mu) = -e\hat{j}_\mu(x_\mu)A_\mu^{ext}(x_\mu) \quad (3.3)$$

onde:

$x_\mu = (\vec{x}, it)$ = quadrivetor posição do elétron;

\hat{j}_μ = quadrivetor corrente do elétron;

$A_\mu^{ext}(x_\mu)$ = potencial vetor (Møller) do núcleo no ponto x_μ ;

Explicitando \hat{j}_μ :

$$\hat{j}_\mu(x_\mu) = i\varphi_e^k(x_\mu)\gamma_\mu\varphi_e^{k'}(x_\mu) \quad (3.4)$$

com $\varphi_e^k(x_\mu)$ sendo a função de onda de Dirac para um elétron livre (expressa em teoria de campos em termos dos operadores de criação e aniquilação), e γ_μ as matrizes de Dirac.

$$\varphi_e^k(x_\mu) = \frac{u(\vec{k})}{\sqrt{\Omega}} e^{ik_\mu x_\mu} = \frac{u(\vec{k})}{\sqrt{\Omega}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \epsilon t)} \quad (3.5)$$

$\sqrt{\Omega}$ = fator de normalização da função de onda do elétron;

$k_\mu = (\vec{k}, i\epsilon)$ = quadri-vetor momento do elétron;

$u(\vec{k})$ = spinor de Dirac.

O potencial $A_\mu^{ext}(x_\mu)$ satisfaz a equação:

$$\nabla^2 A_\mu^{ext}(x_\mu) - i \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_\mu^{ext}(x_\mu) = -e_p J_\mu(x_\mu) \quad (3.6)$$

$$\hat{J}_\mu(x_\mu) = \left(\hat{J}(x), i\hat{\rho}(x) \right)$$

$$J_\mu(x_\mu) = \langle \psi_n^f | \hat{J}_\mu(x_\mu) | \psi_n^i \rangle \quad (3.7)$$

$\rho(x)$ = operador de densidade de carga nuclear;

$|\psi_n \rangle$ = estado nuclear, com o “i” e “f” para o estado inicial e final, respectivamente;

e_p = carga do próton.

Definindo o operador de espalhamento \hat{S} :

$$\hat{S} = -i \int \hat{H}(x_\mu) d^4 x \quad (3.8)$$

cujo elemento de matriz de transição entre os estados inicial e final do elétron será, segundo (3.3) e (3.5):

$$\langle k_2 | \hat{S} | k_1 \rangle = \frac{-e}{\Omega} u_{\lambda_2}(\vec{k}_2) \gamma_\mu u_{\lambda_1}(\vec{k}_1) \int e^{i(k_{1\mu} - k_{2\mu}) \cdot x_\mu} A_\mu^{ext}(x_\mu) d^4 x \quad (3.9)$$

λ_i = spin do elétron.

É interessante escrevermos a expressão acima em termos do quadrimomento transferido q_μ . Para isso, tomamos a transformada de Fourier de (3.6):

$$\int \left(\nabla^2 A_\mu^{ext}(x_\mu) - i \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_\mu^{ext}(x_\mu) \right) e^{-iq_\mu \cdot x_\mu} d^4x = -e_p \int J_\mu(x_\mu) e^{-iq_\mu \cdot x_\mu} d^4x$$

$$q_\mu = (\vec{q}, i\varepsilon) = (k_2 - k_1)_\mu$$

Desenvolvendo, chegamos a:

$$\int \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} A_\mu^{ext}(x_\mu) e^{-iq_i x_i} dx_i = -q_i^2 \int e^{-iq_i x_i} A_\mu^{ext}(x_\mu) dx_i \quad (3.10)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_p \int J_\mu(x_\mu) e^{-iq_\mu \cdot x_\mu} d^4x &= - \int \sum_i^4 q_i^2 \int e^{-iq_i x_i} A_\mu^{ext}(x_\mu) dx_i \prod_{i \neq j}^4 e^{-iq_j x_j} dx_j = \\ &= -q_\mu^2 \int e^{-iq_\mu \cdot x_\mu} A_\mu^{ext}(x_\mu) d^4x \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.9):

$$\langle k_2 | \hat{S} | k_1 \rangle = \frac{-e}{\Omega} \bar{u}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) \gamma_\mu u_{\lambda_1}(\vec{k}_1) \frac{e_p}{q_\mu^2} \int e^{-iq_\mu \cdot x_\mu} J_\mu(x_\mu) d^4x \quad (3.12)$$

Repare que estamos trabalhando na representação de Heisenberg, já que, por exemplo, $\hat{J}_\mu(x_\mu) = \hat{J}_\mu(\vec{x}, it)$. Voltando a representação de Schrödinger:

$$\hat{J}_\mu(x_\mu) = e^{i\hat{H}_N t} J_\mu(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_N t}$$

onde, $e^{i\hat{H}_N t}$ é o operador de evolução temporal dos auto-estados do núcleo.

Então,

$$J_\mu(x_\mu) = \langle \psi_n^f | \hat{J}_\mu(x_\mu) | \psi_n^i \rangle = e^{iE_f t} \langle \psi_n^f | \hat{J}_\mu(\vec{x}) | \psi_n^i \rangle e^{-iE_i t}$$

$$J_\mu(x) = e^{i(E_f - E_i)t} J_\mu(\vec{x})$$

E_f, E_i = energia final e inicial do núcleo, respectivamente;

logo,

$$\langle k_2 | \hat{S} | k_1 \rangle = \frac{-ee_p}{\Omega q_\mu^2} \bar{u}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) \gamma_\mu u_{\lambda_1}(\vec{k}_1) \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} J_\mu(\vec{x}) d^3\vec{x} e^{i(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1)t} d(it)$$

Assim, temos:

$$\langle k_2 | \hat{S} | k_1 \rangle = \frac{-2\pi ee_p}{\Omega q_\mu^2} \delta(E_f + \varepsilon_2 - E_i - \varepsilon_1) \bar{u}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) \gamma_\mu u_{\lambda_1}(\vec{k}_1) J_\mu(q) \quad (3.13)$$

$$J_\mu(q) = \int e^{-i(\vec{q}\cdot\vec{x})} J_\mu(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (3.14)$$

A seção de choque diferencial de espalhamento é proporcional ao quadrado da matriz de transição [26]:

$$d\sigma \propto \frac{1}{q_\mu^4} \sum_{\lambda_2, \lambda_1} |\bar{u}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) \gamma_\mu u_{\lambda_1}(\vec{k}_1) J_\mu(q)|^2 d\vec{k}_2 \quad (3.15)$$

onde, o somatório é sobre os estados finais e iniciais e a média é sobre os estados iniciais do elétron, considerando a sua não polarização.

A expressão (3.15) é conhecida como Regra de Ouro de Fermi. Quando integrada em \vec{k}_2 , ou seja, no ângulo e energia, a expressão acima é chamada de Regra da Soma. Como o que se mede experimentalmente numa reação de espalhamento é a seção de choque, (3.15) nos dá um meio eficiente de verificarmos a validade do modelo teórico empregado nos cálculos.

Um resultado importante decorrente da equação (3.15) é a conhecida regra da soma de Thomas-Reiche-Kuhn (TRK). Ela é expressa como:

$$\sigma_{total} = \int_0^\infty \sigma(E) dE \approx 0.06 \frac{NZ}{A} \quad (3.16)$$

onde, Z e N são os números de prótons e nêutrons, respectivamente.

A expressão (3.16) representa um limite teórico para a seção de choque total da reação de fóton-absorção do tipo dipolo elétrico.

De (3.7) e (3.14), temos:

$$\vec{J}(q) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \psi_n^f | \hat{J}(x) | \psi_n^i \rangle d\vec{x} \quad (3.17)$$

$$\rho(q) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \psi_n^f | \hat{\rho}(x) | \psi_n^i \rangle d\vec{x} \quad (3.18)$$

De uma maneira geral, a seção de choque para o espalhamento de eletrons pode ser escrita como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi\sigma_{Mott}f^{-1} \left[\frac{q_\mu^4}{\vec{q}^4} |\rho(q)|^2 + \left(\frac{q_\mu^2}{\vec{q}^2} + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) |\vec{J}(q)|^2 \right] \quad (3.19)$$

onde σ_{Mott} é a seção de choque de Mott e $f = 1 + \frac{2E \sin^2 \frac{\theta}{2}}{M}$ é o fator de recuo do núcleo. Nesta expressão, E é a energia do elétron incidente, θ o seu ângulo de espalhamento e M a massa do núcleo alvo.

A quadricorrente $J_\mu(q)$ esta relacionada com o fator de forma do núcleo, que me dá informações sobre a distribuição de cargas e correntes no núcleo. Repare que nós podemos obter as transições de corrente e densidade de carga do núcleo, através das transformadas inversas de Fourier em (3.17) e (3.18). Assim, observando (3.15), teremos informações sobre a distribuição de carga e corrente nucleares, de acordo com o ângulo de espalhamento e o momento transferido.

Os principais tipos de excitações coletivas que um núcleo atômico sofre podem ser devidos a multipolos, ou combinações destes. Por outro lado, os multipolos são relacionados às distribuições de cargas e correntes. Logo, uma boa teoria deve prever a contribuição de excitação à Regra da Soma numa dada faixa de energia.

Podemos, agora, para observarmos melhor as diferenças entre as contribuições de (3.17) e (3.18) à eq. (3.15), expandir as ondas planas no espaço gerado pelos harmônicos esféricos [27].

$$e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = 4\pi \sum_{JM} (-i)^J Y_{JM}^*(\Omega_q) Y_{JM}(\Omega_x) j_J(qx) \quad (3.20)$$

J, M = momento angular do fóton virtual e sua projeção, respectivamente;

Ω_x = ângulo que dá a posição do elétron;

Ω_q = ângulo que dá a direção do momento transferido.

Concentremo-nos, primeiramente, em (3.18):

$$\rho(q) = \int 4\pi \sum_{JM} (-i)^J Y_{JM}^*(\Omega_q) Y_{JM}(\Omega_x) j_J(qx) \langle J_f M_f | \hat{\rho}(\vec{x}) | J_i M_i \rangle d\vec{x} \quad (3.21)$$

$$|J_f - J_i| \leq J \leq |J_f + J_i|$$

$j_J(qx)$ = função esférica de Bessel de ordem J;

$Y_{JM}(\Omega_x)$ = harmônico esférico.

Definindo o operador:

$$\hat{M}_{JM}(q) = \int Y_{JM}(\Omega_x) j_J(qx) \hat{\rho}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.22)$$

$$\rho(q) = 4\pi \sum_{JM} (-i)^J Y_{JM}^*(\Omega_q) \langle J_f M_f | \hat{M}_{JM}(q) | J_i M_i \rangle \quad (3.23)$$

Usando o teorema de Wigner-Eckart, obtemos, após alguns cálculos (APÊNDICE B):

$$\overline{\sum_{M_i, M_f}} |\rho(q)|^2 = \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_J \left| \langle J_f || \hat{M}_J(q) || J_i \rangle \right|^2 \quad (3.24)$$

Vemos, em (3.22), que a paridade do operador longitudinal \hat{M}_{JM} é dada pela paridade do Harmônico esférico $Y_{JM}(\Omega_q)$, que é $(-1)^J$. Notamos, também, que $\rho(\vec{x})$ nos dá informações sobre a estrutura nuclear, através de sua dependência com o vetor posição \vec{x} . Fica claro, pois, que (3.22) contém informações sobre a ordem dos multipolos de origem elétrica que contribuem para a obtenção de (3.24), onde a ordem dos multipolos é dada por 2^J , $J = 0, 1, \dots$

Tomando agora (3.17), notamos que o potencial que descreve a interação é do tipo vetor, de forma que suas componentes são descritas em termos dos eixos de referência. Assim, necessitamos escolher uma base onde possamos trabalhar a equação (3.17). Escolhemos, por conveniência, a seguinte base (APÊNDICE C):

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \\ \hat{e}_0 &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y)\end{aligned}$$

Assim:

$$\hat{e}_\lambda e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \hat{e}_\lambda \sum_l (-i)^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qx) Y_{l0}(\Omega_x) \quad (3.25)$$

$$\lambda = -1, 0, 1$$

de modo que:

$$\vec{J}(q) = \sum_{\lambda=0,\pm 1} J_\lambda(q) \hat{e}_\lambda^\dagger \quad (3.26)$$

onde:

$$\hat{J}_\lambda(q) = -(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{J \geq 1} (-i)^J (2J+1)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{T}_{J\lambda}^{ele}(q) + \lambda \hat{T}_{J\lambda}^{mag}(q) \right) \quad (3.27)$$

$$\hat{T}_{JM}^{ele}(q) = \frac{1}{q} \int \nabla \times \left(j_J(qx) \vec{Y}_{J1M}(\Omega_x) \right) \cdot \vec{J}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.28)$$

$$\hat{T}_{JM}^{mag}(q) = \int j_J(qx) \vec{Y}_{J1M}(\Omega_x) \cdot \vec{J}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.29)$$

$$\vec{Y}_{J1M}(\theta, \varphi) = \sum_{m,\lambda} Y_{lm}(\theta, \varphi) \hat{e}_\lambda \langle lm1\lambda | 11JM \rangle \quad (3.30)$$

Como definido em (3.26):

$$\vec{J}(q) = \hat{e}_1^\dagger J_1(q) + \hat{e}_{-1}^\dagger J_{-1}(q) + \hat{e}_0^\dagger J_0(q)$$

Mas, de acordo com a eq. da continuidade para a corrente nuclear, temos:

$$\vec{q} \cdot \vec{J}(q) - \omega \rho(q) = 0$$

$$J_0(q) = \frac{\omega}{q} \rho(q)$$

Logo:

$$\vec{J}(q) = \hat{e}_1^\dagger J_1(q) + \hat{e}_{-1}^\dagger J_{-1}(q) + \hat{e}_0^\dagger \frac{\omega}{q} \rho(q) \quad (3.31)$$

A expressão acima nos diz que, na direção do momento transferido \vec{q} , tenho apenas contribuição elétrica ao fator de forma nuclear. Assim, a componente em \hat{e}_0 pode ser obtida a partir de (3.24). Por outro lado, a parte transversa do operador de corrente, dada por $J_{-1}(q)$ e $J_1(q)$, é obtida através de (3.27).

Notamos ainda, em (3.28) e (3.29), que a paridade de $\hat{T}_{J\lambda}^{ele}(q)$ é dada por $(-1)^J$, enquanto a de $\hat{T}_{J\lambda}^{mag}(q)$ é dada por $(-1)^{J+1}$, pois o rotacional inverte a paridade do harmônico esférico. Assim, $\hat{\rho}(q)$ e $\hat{T}_{J\lambda}^{ele}(q)$ têm mesma paridade e $\hat{T}_{J\lambda}^{mag}(q)$ tem paridade oposta a estes (ver eq. 3.22). Este fato, aliado ao comportamento segundo a reversão temporal dos operadores acima, restringem os tipos de transições para um dado J (APÊNDICE A).

Devemos, agora, generalizar a quantização do momento angular ao longo de um eixo arbitrário, já que antes tínhamos escolhido a direção \vec{q} como a preferencial (ver eq.3.26). Para isso, tomaremos uma rotação no espaço dos estados nucleares, com respeito ao sistema de referência fixo \hat{e}_x, \hat{e}_y e $\frac{\vec{q}}{q}$, tal que a nova projeção do momento angular J seja M' .

$$|J, J_{z'} = M' \rangle = \hat{R}(\Omega) |J, J_z = M \rangle \quad (3.32)$$

onde:

$$\hat{R}(\Omega) = e^{-i\gamma \hat{J}_z} e^{-i\beta \hat{J}_y} e^{-i\alpha \hat{J}_z} \quad (3.33)$$

$\Omega = (\alpha, \beta, \gamma) =$ ângulos de Euler.

Assim, temos:

$$\langle J_f M_f | \hat{J}_\lambda | J_i M_i \rangle = -(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{JM} (-i)^J (2J+1)^{\frac{1}{2}} \langle J_f M_f | \left(\hat{T}_{JM}^{ele}(q) + \right.$$

$$+\lambda \hat{T}_{JM}^{mag}(q) \Big) |J_i M_i\rangle = D_{M\lambda}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha) \quad (3.34)$$

Onde usamos o fato de que $\hat{T}_{JM}^{mag}(q)$ é um tensor irredutível, ou seja:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{R}^*(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

$$\hat{R}(-\gamma, -\beta, -\alpha) \hat{T}_{J\lambda}^{ele}(q) \hat{R}^*(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \sum_{M'} D_{M'\lambda}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha) \hat{T}_{JM'}^{ele}(q)$$

$D_{M'\lambda}^J(\omega) = \langle JM' | \hat{R}_\Omega | J\lambda \rangle =$ função de Wigner.

Notando que $\hat{T}_{J\lambda}^{ele}$ e $\hat{T}_{J\lambda}^{mag}$ têm paridades opostas, então apenas um deles contribuirá para o elemento de matriz em (3.34). Assim, usando o teorema de Wigner-Eckart, as propriedades das funções de Wigner, bem como somando em M_i e M_f e tomando a média sobre os estados de polarizações iniciais, teremos, após quadrarmos (3.34):

$$\sum_{M_i M_f} J_\lambda(q) \cdot J_{\lambda'}(q) = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{2\pi}{2J_i + 1} \sum_{J=1}^{\infty} \left(\left| \langle J_F | \hat{T}_J^{ele}(q) | J_i \rangle \right|^2 + \left| \langle J_f | \hat{T}_J^{mag}(q) | J_i \rangle \right|^2 \right) \quad (3.35)$$

onde,

$$\sum_{M_i M_f} J_\lambda(\vec{q}) \cdot \rho(\vec{q}) = 0; \quad \lambda = \pm 1 \quad (3.36)$$

A expressão (3.35) é importante, pois mostra-nos que é possível separarmos as contribuições elétrica e magnética para o fator de forma transversal do núcleo, como fica claro se notarmos que $\hat{T}_J^{ele}(q)$ e $\hat{T}_J^{mag}(q)$ possuem dependência angular diferentes (eq. (3.28) e (3.29)).

Por outro lado, (3.19) nos diz que podemos separar a parte longitudinal da parte transversal, através do ângulo θ .

As eq. (3.35) e (3.24) permite-nos, através da regra da soma, fixar um ângulo e determinar a intensidade da contribuição de cada fator de forma, de acordo com o momento transferido, prevendo, assim, os intervalos de energia onde cada modo de interação predomina.

Outro fato importante é que no limite de ondas grandes para o elétron, quando a interação eletro-nuclear se torna muito pequena e o momento transferido “ q ” tende a zero, o fator de forma transversal elétrico comporta-se como o longitudinal, visto que, neste limite, podemos desprezar os efeitos das correntes nucleares provocadas pela passagem do elétron. Este fato é conhecido como teorema de Siegert e acha-se sumarizado na referência [20]. Através deste teorema, podemos avaliar o modelo com o qual se constroem os operadores de carga e corrente nucleares.

CAPÍTULO IV

FATOR DE FORMA TRANSVERSO

4.1...INTRODUÇÃO.

De posse das expressões (3.17) e das funções de onda coletivas obtidas por Souza Cruz e Weiss, necessitamos, agora, construir o operador de corrente nuclear, de forma a obtermos o fator de forma transverso. O problema de restauração da simetria angular acha-se resumido no Apêndice F.

4.2... CONSTRUÇÃO DO OPERADOR DE CORRENTE.

O operador de corrente é definido como:

$$\hat{J}(\vec{x}) = \frac{i}{2\hbar} \sum_i^A \left(\hat{\rho}_i(\vec{x}_i) [\hat{H}, \hat{x}_i] + [\hat{H}, \hat{x}_i] \hat{\rho}_i(\vec{x}_i) \right) \quad (4.1)$$

onde:

$\hat{\rho}_i(\vec{x}_i)$ = operador de densidade de carga para o nucleon i em \vec{x}_i .

Assumindo a definição (2.10), consideraremos os nucleons como partículas pontuais:

$$\hat{\rho}(\vec{x}) = \sum_i^A \frac{1 + \tau_3(i)}{2} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = \sum_i^A \hat{\rho}_i(\vec{x}_i) \quad (4.2)$$

O Hamiltoniano é definido em termos de (I.2), (I.3) e (I.4):

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2M} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \hat{V}_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \hat{V}_{ijk} \quad (4.3)$$

Assim:

$$\hat{J} = \frac{i}{2\hbar} \sum_i \left(\hat{\rho}_i(\vec{x}_i) \left[\sum_n \frac{\hat{p}_n^2}{2M} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \hat{V}_{nj} + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \hat{V}_{njk}, \hat{x}_i \right] + h.c. \right) \quad (4.4)$$

$h.c.$ = hermitiano conjugado.

$$[\hat{H}, \hat{x}_i] = \sum_n \left[\frac{\hat{p}_n^2}{2M}, \hat{x}_i \right] + \sum_{n,j} \frac{1}{2} [\hat{V}_{nj}, \hat{x}_i] + \sum_{n,j,k} \frac{1}{3!} [\hat{V}_{njk}, \hat{x}_i] \quad (4.5)$$

Levando em conta núcleos de camada fechada, vem que $\hat{V}_{SO}(i, j) = 0$ em (I.2).

O 3º comutador em (4.5) se anula. Por outro lado, desenvolvendo o 1º e 2º termos, teremos:

$$\vec{J}(q) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \psi_n^f | \hat{J}_c(\vec{x}) | \psi_n^i \rangle d\vec{x} + \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \langle \psi_n^f | \hat{J}_{ef}(\vec{x}) | \psi_n^i \rangle d\vec{x} \quad (4.6)$$

onde:

$$\hat{J}_c(\vec{x}) = \frac{1}{2M} \sum_i \left(\frac{1 + \tau_3(i)}{2} \delta(\hat{x} - \hat{x}_i) \hat{p}_i + \hat{p}_i \frac{1 + \tau_3(i)}{2} \delta(\hat{x} - \hat{x}_i) \right) \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{ef}(\vec{x}) = \frac{1}{8\hbar^2} (t_1 + t_2) \sum_{i,k} \left[\frac{1 + \tau_3(i)}{2} \delta(\hat{x} - \hat{x}_i) \left(\delta(\hat{x}_i - \hat{x}_k) (\hat{p}_i - \hat{p}_k) + h.c. \right) + \right. \\ \left. + \left(\delta(\hat{x}_i - \hat{x}_k) (\hat{p}_i - \hat{p}_k) + h.c. \right) \frac{1 + \tau_3(i)}{2} \delta(\hat{x} - \hat{x}_i) \right] \quad (4.7b) \end{aligned}$$

$\hat{J}_c(q)$ = operador de corrente relacionado a parte local do potencial de SKYRME;

$\hat{J}_{ef}(q)$ = operador de corrente de dois corpos, devido aos termos dependentes do momento.

Portanto:

$$\vec{J}(q) = \vec{J}_c(q) + \vec{J}_{ef}(q) \quad (4.8)$$

Sendo que o termo de dois corpos não contribuirá para o fator de forma.

4.3...CÁLCULO DO FATOR LOCAL.

Da eq. (4.6), temos

$$\vec{J}_c(q) = \langle \psi_n^f | \hat{J}_c(q) | \psi_n^i \rangle$$

onde $|\psi_n^i\rangle$ está definida na seção 3.4, e é obtida a partir da função de onda de GHW (eq. 2.1), projetando esta no espaço de bom momento angular (APÊNDICE F):

$$|\psi_n^l\rangle = \sum_{K_i} \frac{1}{(N_{M_i K_i}^{J_i})^{\frac{1}{2}}} \hat{P}_{M_i K_i}^{J_i} |\psi_l\rangle \quad (4.9)$$

onde,

$$\hat{P}_{MK}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int D_{MK}^J(\Omega) \hat{R}(\Omega) d\Omega$$

$|\psi_l\rangle =$ estado de GHW, definida em (2.1);

$\hat{R}(\Omega) =$ operador de rotação;

$D_{MK}^J(\Omega) =$ função de Wigner.

$\Omega = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) =$ âng. de Euler;

$\hat{P}_{MK}^J =$ operador de restauração de simetria, ou projetor de Peierl-Yoccoz.

$$N_{MK}^J = \langle \psi | \hat{P}_{MK}^{J*} \hat{P}_{MK}^J | \psi \rangle \quad (4.10)$$

(4.9) está somado sobre todos os valores de momentos angulares possíveis.

Então:

$$\vec{J}_c(q) = \sum_{\substack{M_i K_i J_i \\ M_f K_f J_f}} \frac{1}{(N_{M_f K_f}^{J_f})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(N_{M_i K_i}^{J_i})^{\frac{1}{2}}} \langle \psi_f | \hat{P}_{M_f K_f}^{J_f*} \hat{J}_c(q) \hat{P}_{M_i K_i}^{J_i} | \psi_i \rangle$$

Podemos usar a representação (2.19), com o operador de muitos corpos \hat{O} sendo representado por $\hat{P}_{M_f K_f}^{J_f*} \hat{J}_c(q) \hat{P}_{M_i K_i}^{J_i}$. Assim:

$$\tilde{J}(q) = \hat{S} \hat{P}_{M_f K_f}^{J_f*} \hat{J}_c(q) \hat{P}_{M_i K_i}^{J_i} \hat{S}^{-1} \quad (4.11)$$

Por outro lado, $\hat{S}|\psi_l\rangle$ é a representação coletiva de (2.1). Usando (2.12) e (2.13):

$$|g_l\rangle = \hat{S}|\psi_l\rangle = \int dk |k\rangle \int \langle \alpha | \psi_l \rangle \frac{u_k^l(\alpha)}{\sqrt{n_k}} d\alpha$$

No nosso caso, $\hat{S}|\psi_f\rangle$ e $\hat{S}|\psi_i\rangle$ são representadas pelos autoestados coletivos obtidos em [13], descritos, por simplificação, numa base de osciladores harmônicos coletivos (APÊNDICE E):

$$|g_j\rangle = \sum_n C_j^n |n\rangle$$

O autoestado $|n\rangle$ pode ser descrito em S_c usando-se a base (2.13):

$$|n\rangle = \int \mathbf{H}_n(k) |k\rangle dk \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{H}_n(k)$ é a autofunção do oscilador harmônico:

$$\mathbf{H}_n(k) = \left(\frac{b_0^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{b_0^2 k^2}{2}} H_n(b_0 k) \quad (4.13)$$

$H_n(b_0 k)$ = polinômio de Hermite de ordem n .

Assim,

$$\vec{J}_c(q) = \sum_{\substack{M_i K_i J_i \\ M_f K_f J_f}} \frac{1}{(N_{M_f K_f}^{J_f})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(N_{M_i K_i}^{J_i})^{\frac{1}{2}}} \langle g_f | \vec{J}(q) | g_i \rangle \quad (4.14)$$

Usando, em (4.14), a definição (2.12) de \hat{S} , a eq. (4.12) para a expansão de $|g_j\rangle$ em S_c , as propriedades de ortonormalização dos autovetores $|k\rangle$, bem como as expressões (2.13), (2.9) e (4.10), obteremos:

$$\begin{aligned} \left(\vec{J}_c(q)\right)_{mn} &= \sum_{\substack{M_i K_i J_i \\ M_f K_f J_f}} \frac{(2J_i + 1)(2J_f + 1)}{256\pi^6} \frac{1}{(N_{M_f K_f}^{J_f})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(N_{M_i K_i}^{J_i})^{\frac{1}{2}}} \int D_{M_f K_f}^{J_f}(\Omega')^* \times \\ &\quad \times D_{M_i K_i}^{J_i}(\Omega) O_{mn} d\Omega d\Omega' \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde,

$$O_{mn} = \int \frac{\mathbf{H}_m(k')}{\sqrt{n_{k'}}} \frac{\mathbf{H}_n(k)}{\sqrt{n_k}} e^{-ik'\alpha'} \langle 0 | e^{-i\vec{\alpha}' \cdot \vec{P}} \hat{J}_c(q) e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{P}} | 0 \rangle e^{ik\alpha} d\alpha d\alpha' dk dk' \quad (4.16)$$

e,

$$\vec{\alpha} = (\alpha \cos \beta_3 \sin \beta_2, \alpha \sin \beta_3 \sin \beta_2, \alpha \cos \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (4.17)$$

$$\vec{P} = (P_1, P_2, P_3) \quad (4.18)$$

Procedendo os cálculos acima, teremos:

$$\left(\vec{J}_c(q) \right)_{mn} = \frac{1}{2M} F_0(q) \vec{f}_{mn} \quad (4.19)$$

onde,

$$F_0(q) = \langle 0 | \sum_i \frac{1 + \tau_3(i)}{2} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}_i} | 0 \rangle \quad (4.20)$$

é o fator de forma elástico, e

$$\begin{aligned} \vec{f}_{mn} = & \sum_{\substack{M_i K_i J_i \\ M_f K_f J_f}} \frac{(2J_i + 1)(2J_f + 1)}{256\pi^6} \frac{1}{(N_{M_f K_f}^{J_f})^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(N_{M_i K_i}^{J_i})^{\frac{1}{2}}} \times \\ & \times \int \vec{\Xi}_{mn}(\Omega, \Omega') D_{M_f K_f}^{J_f*}(\Omega') D_{M_i K_i}^{J_i}(\Omega) \left(\frac{1}{2^{n+m} m! n!} \right)^{\frac{1}{2}} d\Omega d\Omega' \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\vec{\Xi}_{mn}(\Omega, \Omega') = \Xi_{mn}^{\alpha'}(\Omega, \Omega') \vec{\Omega}' - \Xi_{mn}^{\alpha}(\Omega, \Omega') \vec{\Omega} \quad (4.22)$$

com,

$$\begin{aligned} \Xi_{mn}^{\alpha'}(\Omega, \Omega') = & \frac{16\pi^2}{Ab_0} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu+1} \frac{n! m! 2^{m+\mu-1}}{(m-n+\mu-1)!(n-\mu)! \mu!} \times \\ & \times \left(\frac{b_0 q}{4} \right)^{m-n+2\mu-1} Y^{m-n+\mu-1} X^{\mu} Z^{n-\mu} \end{aligned} \quad (4.23)$$

para $m \geq 1$; $m-1 \geq n$;

$$\begin{aligned} \Xi_{mn}^{\alpha'}(\Omega, \Omega') = & \frac{16\pi^2}{Ab_0} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu+n-m} \frac{n! m! 2^{n+\mu}}{(n-m+\mu+1)!(m-\mu-1)! \mu!} \times \\ & \times \left(\frac{b_0 q}{4} \right)^{n-m+2\mu+1} X^{n-m+\mu+1} Y^{\mu} Z^{m-\mu-1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

para $m \geq 1$; $n \geq m-1$;

$$\begin{aligned} \Xi_{mn}^{\alpha}(\Omega, \Omega') &= \frac{16\pi^2}{Ab_0} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu} \frac{n!m!2^{m+\mu}}{(m-n+\mu+1)!(n-\mu-1)!\mu!} \times \\ &\times \left(\frac{b_0q}{4}\right)^{m-n+1+2\mu} Y^{m-n+\mu+1} X^{\mu} Z^{n-\mu-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

para $n \geq 1$; $m \geq n - 1$;

$$\begin{aligned} \Xi_{mn}^{\alpha}(\Omega, \Omega') &= \frac{16\pi^2}{Ab_0} \sum_{\mu=0}^m (-1)^{n-m+\mu_1} \frac{n!m!2^{n+\mu-1}}{(n-m+\mu-1)!(m-\mu)!\mu!} \times \\ &\times \left(\frac{b_0q}{4}\right)^{n-m+2\mu-1} X^{n-m+\mu-1} Y^{\mu} Z^{m-\mu} \end{aligned} \quad (4.26)$$

para $n \geq 1$; $n - 1 \geq m$;

$$Y = \frac{\vec{q} \cdot \vec{\Omega}'}{q}; \quad X = \frac{\vec{q} \cdot \vec{\Omega}}{q} \quad (4.27)$$

$$Z = \cos \beta_3 \cos \beta'_3 \sin \beta_2 \sin \beta'_2 + \sin \beta_3 \sin \beta'_3 \sin \beta_2 \sin \beta'_2 + \cos \beta_2 \cos \beta'_2 \quad (4.28)$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \quad (4.29)$$

Consideramos uma transição “dipolar” entre os estados $J_i = 0$ e $J_f = 1$. Assim, somando (4.21) nos estados possíveis:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{mn} &= \frac{3}{256\pi^6} \frac{1}{(N_0^1)^{\frac{1}{2}}(N_0^0)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2^{n+m}m!n!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin \beta'_2 e^{i\beta'_3} \cos \beta'_2 \vec{\Xi}_{mn}(\Omega, \Omega') d\Omega d\Omega' + \right. \\ &\left. + \int \cos \beta'_2 \vec{\Xi}_{mn}(\Omega, \Omega') d\Omega d\Omega' - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin \beta'_2 e^{-i\beta'_3} \vec{\Xi}_{mn}(\Omega, \Omega') d\Omega d\Omega' \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os fatores de normalização N_0^1 e N_0^0 acham-se expressos no APÊNDICE G.

4.4...EXPLICITANDO OS CÁLCULOS PARA O FATOR DE FORMA TRANSVERSO

De acordo com a seção anterior, teremos:

$$\left(\vec{J}(q) \right)_{mn} = \left(\vec{J}_c(q) \right)_{mn} \quad (4.31)$$

Mas,

$$|g_j \rangle = \sum_n C_j^n |n \rangle$$

de forma que:

$$\langle g_1 | \hat{J}(q) | g_0 \rangle = \sum_{m,n} C_1^m C_0^n \langle m | \hat{J}(q) | n \rangle \quad (4.32)$$

O fator de forma transverso é dado pela eq. (3.35), com $\lambda = \pm 1$. No nosso caso, como consideramos núcleos de camada fechada, esperamos que $\langle J_f | \hat{T}_J^{mag}(q) | J_i \rangle = 0$. Assim, para a transição considerada:

$$2\pi |T_1^{ele}(q)|^2 = 2\pi \left| \langle 1^- | \hat{T}_1^{ele}(q) | 0^+ \rangle \right|^2 = \sum_{M_i, M_f} \left(|J_1(q)|^2 + |J_{-1}(q)|^2 \right) \quad (4.33)$$

onde, de acordo com (3.31):

$$\left(J_\lambda(q) \right)_{mn} = \left(\vec{J}(q) \right)_{mn} \cdot \hat{e}_\lambda \quad (4.34)$$

A segunda integral em (4.30) nos dá uma contribuição na direção $\frac{\vec{q}}{q}$ ao fator $\left(\vec{J}(q) \right)_{mn}$, de forma que ela não somará ao produto escalar acima ($\lambda = \pm 1$).

Usando as funções de onda obtidas por Souza Cruz e Weiss (ver cap.III), podemos, por meio de (4.19), (4.30) e (4.34), avaliar (4.20), logo, obtermos $|T_1^{ele}(q)|^2$. Os cálculos são simples, em termos de integrais em senos e cossenos, podendo ser resolvidos analiticamente através de um programa em DERIVE, ou mesmo sem o uso de computador, exigindo apenas um pouco de trabalho.

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

O gráfico para o quadrado do elemento de matriz reduzida transversa elétrica para o O^{16} , $|T_1^{ele}(q)|^2$, pode ser visto na figura 4.1, em função do momento transferido q . Os dados experimentais, inclusive os mais recentes obtidos por Callarco et al. [28] no laboratório de Mainz, acham-se especificados na figura . Plotamos, também, o gráfico para a aproximação da RGD via Goldhaber-Teller, usando a expressão para $|T_1^{ele}(q)|^2$, segundo Walecka [20], porém com os valores da frequência de ressonância e da massa reduzida obtidas por Souza Cruz no MCG [14].

Na figura 4.2, plotamos $|T_1^{ele}(q)|^2$ para o Ca^{40} . No entanto, nenhum dado experimental foi encontrado na literatura para este núcleo.

Na figura 4.3, temos $|T_1^{ele}(q)|^2$ para o O^{16} , como calculado por Lewis [29], através do modelo de partícula-buraco, usando a aproximação de Tamm-Dancoff. Para este cálculo, Lewis tomou como base os estados de mais baixa energia ($J = 0^+, T = 0$) acoplados aos estados excitados ($J = 1^-, T = 1$), a saber, na notação usada por este:

$$\Phi_{J=1^-, T=1}^{(1d_{3/2})(1p_{3/2})^{-1}}; \quad E_0 \left((1d_{3/2})(1p_{3/2})^{-1} \right) = 22.76 \text{ Mev};$$

$$\Phi_{J=1^-, T=1}^{(2s_{1/2})(1p_{3/2})^{-1}}; \quad E_0 \left((2s_{1/2})(1p_{3/2})^{-1} \right) = 18.55 \text{ Mev};$$

$$\Phi_{J=1^-, T=1}^{(1d_{5/2})(1p_{3/2})^{-1}}; \quad E_0 \left((1d_{5/2})(1p_{3/2})^{-1} \right) = 17.68 \text{ Mev};$$

$$\Phi_{J=1^-, T=1}^{(1d_{1/2})(1p_{1/2})^{-1}}; \quad E_0 \left((1d_{3/2})(1p_{1/2})^{-1} \right) = 16.60 \text{ Mev};$$

$$\Phi_{J=1^-, T=1}^{(2s_{1/2})(1p_{1/2})^{-1}}; \quad E_0 \left((2s_{1/2})(1p_{1/2})^{-1} \right) = 12.39 \text{ Mev};$$

Tomando as funções de onda para o estado $J = 1^-, T = 1$ como a combinação dos estados acima, ele usou apenas as autofunções Ψ_1, Ψ_2 e Ψ_3 (ver [29]), com energias de 26.63,

23.89 e 21.01 Mev, respectivamente. O quadrado do fator de forma total foi tomado como a soma dos quadrados dos fatores de forma de cada estado anterior, prevendo um mínimo para $2\pi|T_1^{ele}(q)|^2$ em $q \approx 60 \text{ Mev}/c$, em concordância com as observações experimentais.

A explicação para a decaída no gráfico 4.3, é que os estados de partícula-buraco, usados como base, permitem inversão de spin (spin-flip). Estes estados de spin-flip predominam para os estados Ψ_1 e Ψ_3 resultando que o quadrado do fator de forma, para cada um destes estados, decresce quando implementamos o momento transferido q . Por outro lado, o estado Ψ_2 é basicamente “no-spin-flip”, resultando que o quadrado do fator de forma cresce com o incremento de q . Como o quadrado do fator de forma total é a soma das contribuições de funções crescente, com outra decrescente em q , naturalmente este fator irá passar por um valor mínimo.

Observando a figura 4.1, vemos que nossos resultados concordam com dois pontos de Mainz, apesar de não prever a decaída no gráfico. Podemos seguir Lewis, introduzindo os modos de spin-flip em nossos cálculos. Isto pode ser feito usando-se a generalização do modelo de Goldhaber-Teller, tal qual mencionado no final do capítulo 1. De fato, tal descrição da RGD, via modelo de G-T generalizado e seguindo [20], foi feito por Überall [30] para o O^{16} e C^{12} , segundo o modelo hidrodinâmico. Überall realmente conseguiu um mínimo para o quadrado do fator de forma transverso.

Notamos, também, que a curva para o modelo de G-T usual, implementado pelos valores obtidos para a massa reduzida e frequência de oscilação, via MCG (figura 4.1), deu-nos resultados consideravelmente melhores que o G-T usual, com a massa reduzida e a frequência usadas por Lewis (figura 4.3). Isto pode ser entendido como um sinal que as correlações introduzidas pelo MCG traduzem um comportamento real dos nucleons.

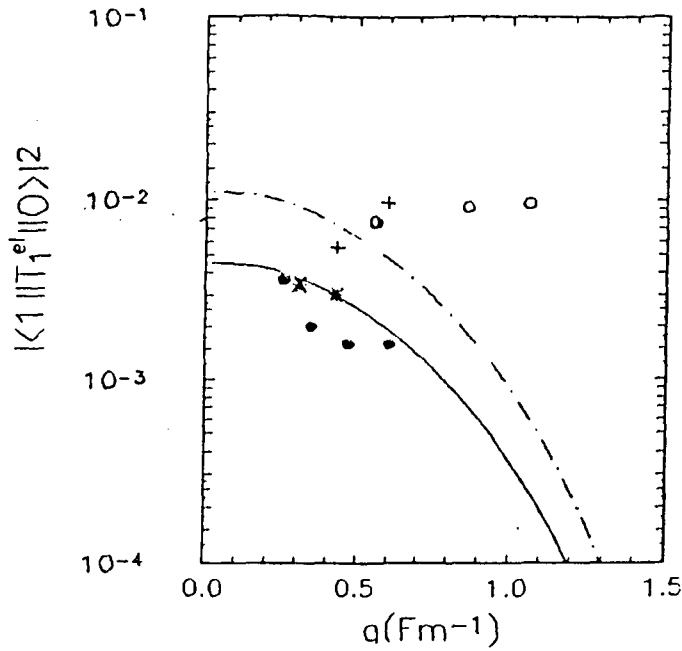
Assim, baseado em nossos resultados, que estão em boa concordância com os mais recentes dados experimentais, mas que não prevêm um mínimo para $|T_1^{ele}(q)|^2$, e também baseado nos resultados obtidos por Überall e Lewis, sugerimos que análises, baseadas em modos de spin-flip, devem ser levadas em conta em trabalhos futuros.

Por outro lado, observando os gráficos para os quadrados dos fatores de forma longitudinais dos núcleos de O^{16} e C^{40} , obtidos por Souza Cruz et al. [31] (figuras 4.4 e 4.5) usando as mesmas funções de onda deste trabalho, notamos que o teorema de Siegert é violado por um

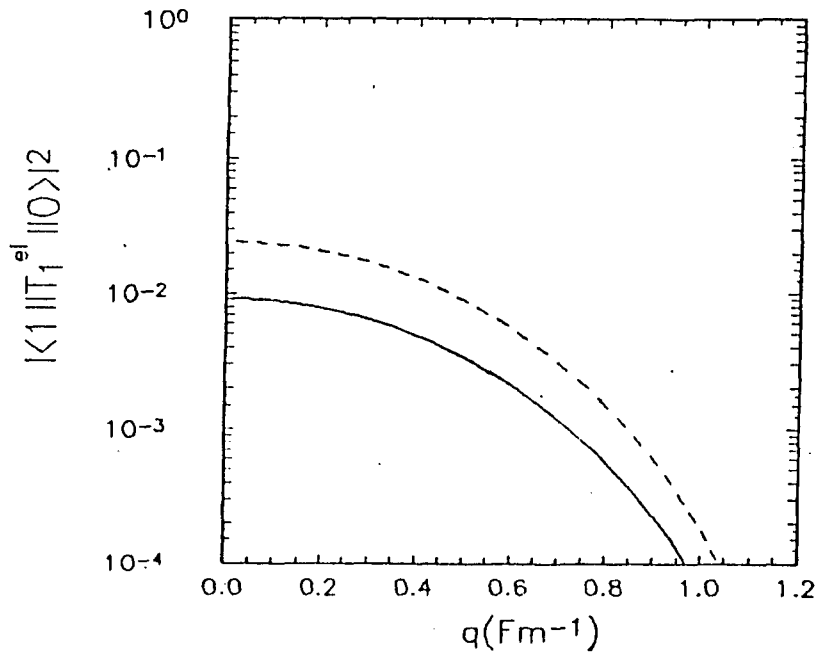
fator ≈ 2 . Este fato também apareceu no trabalho de Lewis e Walecka [32] para o C^{12} , onde os cálculos são similares aos de Lewis [29]. Eles explicaram esta discrepância afirmando que, se tomassem as autofunções exatas do Hamiltoniano, ou seja, implementassem as correlações, levando em conta estados de n partículas- n buracos, bem como computar estados excitados mais altos, então o teorema de Siegert seria obedecido. Porém, o MCG nos deu autofunções mais completas, que contém, implicitamente, excitações do tipo n partículas- n buracos, além de outros tipos de correlações, tais como entre os estados excitados e o estado fundamental. Ainda assim a discrepância se fez presente, indicando-nos que a saída deve ser diferente da proposta por Lewis e Walecka.

Identificar onde podemos modificar nossa descrição da RGD, de modo a resolvermos a violação do teorema de Siegert, não parece-nos algo tão simples, visto que várias hipóteses devem ser levantadas: Escolha de um potencial levando em conta outros tipos de interações internucleons não computadas no potencial de Skyrme; escolha de uma nova base para a expansão da função de onda coletiva; alterar o parâmetro de tamanho do oscilador coletivo; introdução dos modos de spin-flip.

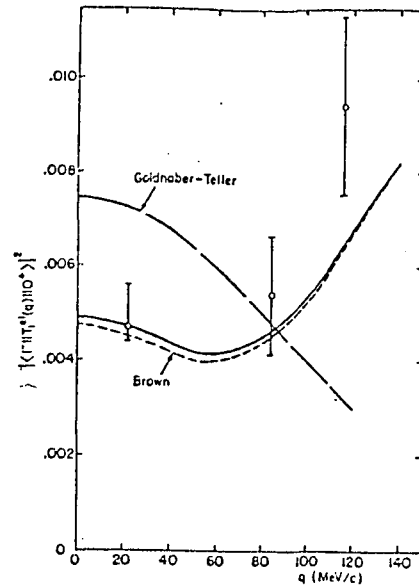
A análise das hipóteses acima fica em aberto para trabalhos futuros.



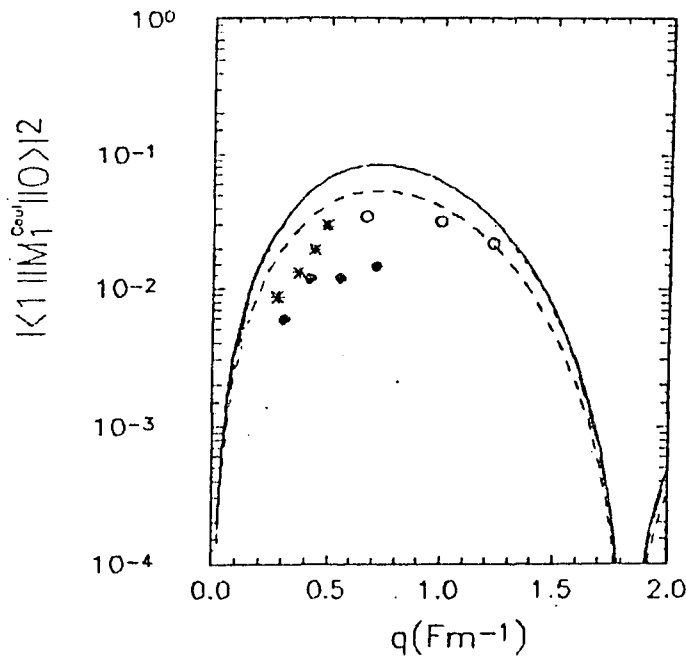
g. 4.1- Quadrado do elemento de matriz reduzida transversa elétrica para o núcleo de O^{16} em função do momento transferido. A linha tracejada representa os cálculos via G-T, enquanto a linha contínua representa os resultados via MCG. Os dados experimentais são dados por: (●)Mainz [33]; (○)Hota [38]; (+)Goldemberg [39]; (*)Goldmann [40].



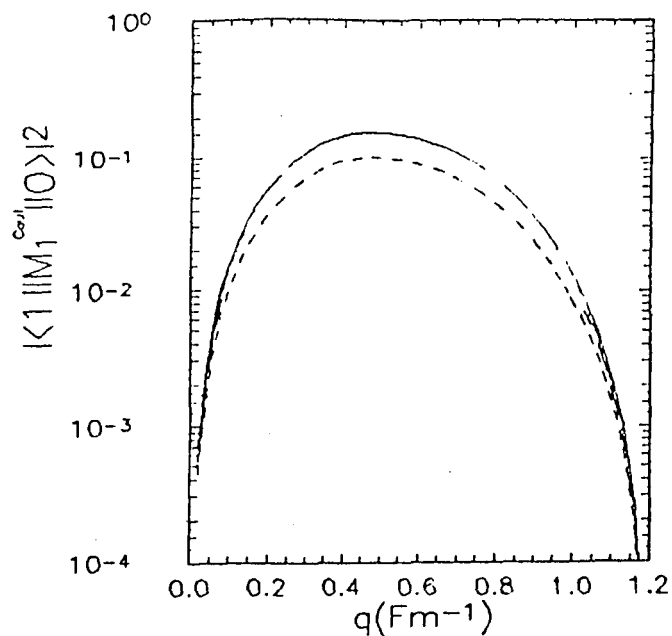
g. 4.2- Quadrado do elemento de matriz reduzida transversa elétrica para o núcleo de Ca^{40} . A linha tracejada representa os cálculos via G-T e a linha contínua representa os resultados via MCG.



4.3- Quadrado do elemento de matriz reduzida transversa elétrica para o núcleo de O^{16} , como calculada por Lewis usando o modelo de Brown (partícula-buraco) na aproximação de Tamm-Dancoff para dois tipos de potenciais. Os dados experimentais são de Goldemberg [39] e os resultados teóricos acham-se especificados no gráfico.



4.4- Quadrado do elemento de matriz reduzida longitudinal para o núcleo de O^{16} , como calculado por Souza Cruz [36]. As especificações quanto às curvas e dados experimentais seguem as mesmas definições da fig. 4.1.



3. 4.5- Quadrado do elemento de matriz reduzida longitudinal para o núcleo de Ca^{40} , segundo Souza Cruz. A convenção é a mesma da fig. 4.2.

APÊNDICE A

REGRAS DE SELEÇÃO PARA A
RESSONÂNCIA GIGANTE

As regras de seleção, derivadas das ações dos operadores de paridade e reversão temporal sobre os operadores de multipolo $\hat{M}_{JM}(q)$, $\hat{T}_{JM}^{ele}(q)$ e $\hat{T}_{JM}^{mag}(q)$, restringem os tipos de transições geradas por estes. É bem sabido que tanto a interação nuclear forte, quanto a eletromagnética, conservam a paridade numa reação. Por outro lado, vimos que $\hat{M}_{JM}(q)$ e $\hat{T}_{JM}^{ele}(q)$ possuem paridades dadas por $(-1)^J$, enquanto a de $\hat{T}_{JM}^{mag}(q)$ é dada por $(-1)^{J+1}$. Mas, estes operadores contribuem de maneira independente à regra da soma, de forma que se π_i e π_f forem as paridades dos estados inicial e final do núcleo, respectivamente, teremos as seguintes regras de seleção para os operadores de multipolo:

$$\hat{M}_{JM}(q) \text{ e } \hat{T}_{JM}^{ele}(q) \text{ permitidos} \iff \pi_i \pi_f = (-1)^J \quad (A.1)$$

$$\hat{T}_{JM}^{mag}(q) \text{ permitido} \iff \pi_i \pi_f = (-1)^{J+1} \quad (A.2)$$

As interações eletromagnética, e nuclear forte, também são invariantes segundo a aplicação do operador de reversão temporal \hat{T} , ou seja,

$$|\langle \psi_f | \hat{O} | \psi_i \rangle|^2 = |\langle \psi_f | \hat{T} \hat{O} \hat{T}^{-1} | \psi_i \rangle|^2 \quad (A.3)$$

A expressão acima nos diz que os valores, dentro dos dois módulos, diferem apenas por uma fase sem importância física, de modo que podemos definir o operador \hat{T} , tal que:

$$\hat{T} \hat{O} \hat{T}^{-1} = \hat{O}^* \quad (A.4)$$

Seguindo as convenções adotadas por Edmonds [27] para o comportamento dos harmônicos esféricos segundo a operação de \hat{T} , temos que:

$$\hat{M}_{JM}(q)^* = (-1)^{J+M} \hat{M}_{J-M}(q) \quad (A.5)$$

$$\hat{T}_{JM}^{(ele)}(q)^* = (-1)^{J+M+1} \hat{T}_{J-M}^{(ele)}(q) \quad (A.6)$$

Usando, agora, o teorema de Wigner-Eckart:

$$\langle J_f || \hat{M}_J(q) || J_i \rangle^* = (-1)^{J_i - J_f + J} \langle J_i || \hat{M}_J(q) || J_f \rangle \quad (A.7)$$

$$\langle J_f || \hat{T}_J^{(ele)}(q) || J_i \rangle^* = (-1)^{J_i - J_f + J + 1} \langle J_i || \hat{T}_J^{(ele)}(q) || J_f \rangle \quad (A.8)$$

Por outro lado, os operadores de transição de carga, corrente de carga e magnetização obedecem, respectivamente, as seguintes regras quanto à operação de \hat{T} :

$$\hat{T} \hat{\rho}_N \hat{T}^{-1} = \hat{\rho}_N \quad (A.9)$$

$$\hat{T} \hat{j}_N \hat{T}^{-1} = -\hat{j}_N \quad (A.10)$$

$$\hat{T} \hat{\mu}_N \hat{T}^{-1} = -\hat{\mu}_N \quad (A.11)$$

Assim, observando as eq. (A.1) e (A.2), bem como as eq. de (A.7) à (A.11), notamos que apenas certos tipos de transições de multipolos serão possíveis. Desta forma, estas equações definem regras de seleção para as multipolaridades dos núcleos. Um tipo mais geral de regra de seleção leva em conta que a interação nuclear deve ser invariante segundo uma operação consecutiva dos operadores de reversão temporal \hat{T} , de paridade \hat{P} e conjugação de carga \hat{C} . Esta é conhecida como a invariância CPT para a força nuclear.

APÊNDICE B

EXPANSÃO MULTIPOLAR PARA O
OPERADOR LONGITUDINAL

$$\hat{M}_{JM}(q) = \int Y_{JM}(\Omega_x) j_J(qx) \hat{\rho}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (B.1)$$

$$\rho(q) = 4\pi \sum_{JM} (-i)^J Y_{JM}^*(\Omega_q) \langle J_f M_f | \hat{M}_{JM}(q) | J_i M_i \rangle \quad (B.2)$$

Repare que \hat{M}_{JM} é descrito por $2J + 1$ tensores ortogonais que transformam no espaço como operadores esféricos, logo, \hat{M}_{JM} é um tensor irredutível, de modo que, usando o teorema de Wigner-Eckart [27], poderemos eliminar a dependência de (B.2) no número quântico magnético M . Desta forma, $\rho(q)$ ficará em termos de um coeficiente de Clebsh-Gordon vezes o elemento de matriz reduzida

$$\rho(q) = 4\pi \sum_{JM} (-i)^J Y_{JM}^*(\Omega_q) (-1)^{J_f - J_i} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle J_f || \hat{M}_J(q) || J_i \rangle \quad (B.3)$$

onde, a barra dupla e a matriz acima representam, respectivamente, o elemento de matriz reduzida e o símbolo $3 - j$ de Wigner, que é definido tal que:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} (2j_3 + 1)^{-\frac{1}{2}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3 - m_3 \rangle$$

O operador \hat{M}_{JM} é denominado longitudinal, já que a direção da interação Coulombiana é a mesma do momento transferido, carregado pelo fóton virtual.

Assim, de modo a obtermos a seção de choque longitudinal, devemos quadrar (B.3), bem como levarmos em conta os estados de polarização para o experimento (e, e') , ou seja, somarmos os estados iniciais e finais e tomarmos a média sobre os estados iniciais, de modo a levarmos em conta todos os canais de reações possíveis. Como tenho $2J_i + 1$ estados iniciais, então:

$$\begin{aligned} \overline{\sum}_{M_i, M_f} |\rho(q)|^2 &= \frac{(4\pi)^2}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \left| \sum_{JM} (-i)^J Y_{JM}^*(\Omega_q) (-1)^{J-M_f} \times \right. \\ &\quad \left. \times \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \| \hat{M}_J(q) \| J_i \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (B.4)$$

Repare que devido a ortonormalidade de Y_{JM} , como também dos coeficientes de Clebsh-Gordon, teremos $|\sum_{JM} x|^2 = \sum_{JM} |x|^2$, onde x é a expressão no módulo de (B.4).

Usando as identidades:

$$\sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3 + 1} \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3} \delta(j_1 j_2 j_3) \quad (B.5)$$

onde, $\delta(j_1 j_2 j_3) = 1$ se $j_1 j_2 j_3$ satisfizer a condição triangular;

$$\begin{aligned} m_1 &= -M_i & m_2 &= M_i & m_3 &= M & m'_3 &= M \\ j_1 &= J_i & j_2 &= J_f & j_3 &= J & j'_3 &= J \end{aligned} \quad (B.6)$$

Observando que vale :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} \quad (B.7)$$

Então, (B.4) será:

$$\begin{aligned} \overline{\sum}_{M_i, M_f} |\rho(q)|^2 &= \frac{(4\pi)^2}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \sum_{JM} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \left| \langle J_f \| \hat{M}_J(q) \| J_i \rangle \right|^2 Y_{JM}(\Omega_q) Y_{JM}^*(\Omega_q) \end{aligned}$$

Assim, usando (B.5), (B.7) e as definições (B.6), notando, ainda, que:

$$\sum_M |Y_{JM}(\Omega_q)|^2 = \frac{2J + 1}{4\pi}$$

teremos,

$$\overline{\sum}_{M_i, M_f} |\rho(q)|^2 = \frac{4\pi}{2J_i + 1} \sum_J \left| \langle J_f \| \hat{M}_J(q) \| J_i \rangle \right|^2 \quad (B.8)$$

APÊNDICE C

EXPANSÃO MULTIPOLAR PARA O
OPERADOR TRANSVERSO

Supondo, a princípio, uma rotação infinitesimal de um vetor ao redor do eixo z , escolhido como a direção do momento transferido \vec{q} , teremos, em 1° ordem [26]:

$$\vec{V}' = (1 + i\alpha\hat{J}_z)\vec{V} \quad (C.1)$$

onde, \vec{V} , \vec{V}' são os vetores antes e depois de rotacionados, respectivamente;

α = ângulo de rotação em torno do eixo z , considerado bem pequeno;

$$\hat{J}_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + i\hat{e}_z \times = \hat{L}_z + \hat{S}_z$$

onde, \hat{e}_z é o vetor unitário ao longo do eixo z .

Tomando, agora, rotações em torno dos eixos x e y , teremos expressões similares às obtidas acima, de forma que, para uma rotação genérica, poderemos definir o operador \hat{J} , tal que:

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

\hat{L} comporta-se como operador de momento angular e \hat{S} como o operador de spin. Por outro lado, seja os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{-1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y) \\ \hat{e}_0 &= \hat{e}_z \\ \hat{e}_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y) \end{aligned} \quad (C.2)$$

Simples cálculos mostram-nos que os vetores acima são autovetores de \hat{S}^2 e \hat{S}_z , escolhendo-se o eixo z como o de quantização. Assim, teremos que \hat{S}^2 e \hat{S}_z geram rotações num espaço tridimensional similar ao espaço de spin 1.

Por outro lado, os vetores (C.2) satisfazem as regras de comutações características de tensores esféricos com o operador de momento angular total \hat{J} . Desta forma, podemos definir um operador esférico em termos da combinação desses vetores.

Assim, escreveremos a corrente de transição da seguinte forma:

$$\vec{J}(q) = \sum_{\lambda=0,\pm 1} J_{\lambda}(q) \hat{e}_{\lambda}^{\dagger} \quad (C.3)$$

Expandindo a onda plana, teremos:

$$\hat{e}_{\lambda} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \hat{e}_{\lambda} \sum_l (-i)^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qx) Y_{l0}(\Omega_x) \quad (C.4)$$

$$\lambda = -1, 0, 1$$

onde devemos lembrar que escolhemos o momento transferido \vec{q} na direção do eixo z , logo $m_l = 0$, e que também a rotação nos dá o operador \hat{L} com autovalor $l(l+1)$.

Definindo, agora, o harmônico esférico vetorial:

$$\vec{Y}_{JlM}(\theta, \varphi) = \sum_{m,\lambda} Y_{lm}(\theta, \varphi) \hat{e}_{\lambda} \langle lm1\lambda | l1JM \rangle \quad (C.5)$$

tal que:

$$\hat{L} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{l(l+1)} \vec{Y}_{l1m}$$

Então,

$$\hat{e}_{\lambda} Y_{l0}(\Omega_x) = \sum_{J,M} \vec{Y}_{JlM} \langle l1JM | l01\lambda \rangle$$

onde usamos a transformação:

$$\omega(j_1, j_2, j, m) = \sum_{m_1, m_2} v(j_1, m_1, j_2, m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$$

e sua unitariedade:

$$v(j_1, m_1, j_2, m_2) = \sum_{j, m} \omega(j_1, j_2, j, m) \langle j_1 j_2 j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle$$

Assim,

$$\hat{e}_\lambda e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \sum_l \sum_J (-i)^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qx) \vec{Y}_{Jl\lambda}(\Omega_x) \langle l1\lambda\lambda | l01\lambda \rangle \quad (C.6)$$

Dado que $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$, teremos:

$$J = |l+1|, |l|, |l-1|$$

Então,

$$l = J+1, J, J-1; \quad J \geq 1$$

A restrição $J \neq 0$ decorre do fato de que o fóton virtual deve ter momento angular ± 1 na direção \vec{q} . Assim, (C.5) ficará :

$$\begin{aligned} \hat{e}_\lambda e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}} = & \sum_J \left[(-i)^{J+1} \left(4\pi(2(J+1)+1) \right)^{\frac{1}{2}} j_{J+1}(qx) \vec{Y}_{JJ+1\lambda}(\Omega_x) \times \right. \\ & \times \langle J+11J\lambda | J+101\lambda \rangle + (-i)^J \left(4\pi(2J+1) \right)^{\frac{1}{2}} j_J(qx) \vec{Y}_{JJ\lambda}(\Omega_x) \langle J1J\lambda | J01\lambda \rangle + \\ & \left. + (-i)^{J-1} \left(4\pi(2(J-1)+1) \right)^{\frac{1}{2}} j_{J-1}(qx) \vec{Y}_{JJ-1\lambda}(\Omega_x) \langle J-11J\lambda | J-101\lambda \rangle \right] \quad (C.7) \end{aligned}$$

Usando as propriedades das funções de Bessel e uma tabela de coeficientes de Clebsch-Gordon, chegaremos a:

$$\hat{e}_\lambda e^{-i\vec{x}\cdot\vec{q}} = -(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{J \geq 1} (-i)^J (2J+1)^{\frac{1}{2}} \left(j_J(qx) \vec{Y}_{JJ\lambda}(\Omega_x) + \frac{1}{q} \nabla \times \left(j_J(qx) \vec{Y}_{JJ\lambda}(\Omega_x) \right) \right) \quad (C.8)$$

Definindo os operadores:

$$\hat{T}_{JM}^{ele}(q) = \frac{1}{q} \int \nabla \times \left(j_J(qx) \vec{Y}_{JJ_1M}(\Omega_x) \right) \cdot \vec{J}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (C.9)$$

$$\hat{T}_{JM}^{mag}(q) = \int j_J(qx) \vec{Y}_{JJ_1M}(\Omega_x) \cdot \vec{J}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (C.10)$$

e observando a equação da continuidade $q_\mu J^\mu = 0$, teremos:

$$\vec{J}(q) = \hat{e}_1^\dagger J_1(q) + \hat{e}_{-1}^\dagger J_{-1}(q) + \hat{e}_0^\dagger \frac{\omega}{q} \rho(q) \quad (C.11)$$

onde:

$$\hat{J}_\lambda(q) = -(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{J \geq 1} (-i)^J (2J+1)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{T}_{J\lambda}^{ele}(q) + \lambda \hat{T}_{J\lambda}^{mag}(q) \right) \quad (C.12)$$

$$\lambda = \pm 1$$

As expressões acima nos dizem que na direção do momento transferido \vec{q} , tenho apenas contribuição elétrica ao fator de forma nuclear. Por outro lado, a parte transversa do operador de corrente é dada por $J_{-1}(q)$ e $J_1(q)$.

APÊNDICE D

EQUIVALÊNCIA ENTRE A EQUAÇÃO DE SCHRÖEDINGER NO ESPAÇO COLETIVO E A EQUAÇÃO DE GRIFFIN-HILL-WHEELER

Seja a eq. de GHW:

$$\int (K(\alpha, \alpha') - EI(\alpha, \alpha')) f(\alpha') d\alpha' = 0 \quad (D.1)$$

Suponhamos que $u_k(\alpha)$ seja uma autofunção que diagonalize $I(\alpha, \alpha')$, isto é:

$$\int I(\alpha, \alpha') u_k(\alpha') d\alpha' = n_k u_k(\alpha) \quad (D.2)$$

onde:

$$\int u_k(\alpha) u_k(\alpha') d\alpha = \delta(\alpha - \alpha') \quad (D.3)$$

$$\int u_k(\alpha) u_{k'}(\alpha) d\alpha = \delta(k - k') \quad (D.4)$$

Multiplicando (D.1) por $u_k(\alpha)$, integrando em α , usando (D.2):

$$\int K(\alpha, \alpha') u_k(\alpha) f(\alpha') d\alpha' d\alpha - E \int n_k u_k(\alpha') f(\alpha') d\alpha' = 0$$

Definindo o autovetor momento no espaço coletivo:

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k}} \int u_k(\alpha) |\alpha\rangle d\alpha \quad (D.5)$$

Então, teremos:

$$\int \langle \alpha' | \hat{H} | k \rangle f(\alpha') d\alpha' = E \int \sqrt{n_k} u_k(\alpha') f(\alpha') d\alpha'$$

Usando (D.3), poderemos reescrever a eq. acima de uma outra forma:

$$\int \langle \alpha' | \hat{H} | k \rangle f(\alpha'') u_{k'}(\alpha') u_{k'}(\alpha'') dk' d\alpha' d\alpha'' = E \int \sqrt{n_k} u_k(\alpha') f(\alpha') d\alpha'$$

ou:

$$\int \sqrt{n_{k'}} \langle k' | \hat{H} | k \rangle u_{k'}(\alpha'') f(\alpha'') dk' d\alpha'' = E \int \sqrt{n_k} u_k(\alpha') f(\alpha') d\alpha' \quad (D.6)$$

Seja:

$$g(k) = \int \sqrt{n_k} u_k(\alpha) f(\alpha) d\alpha \quad (D.7)$$

Levando (D.7) em (D.6):

$$\int \langle k' | \hat{H} | k \rangle g(k') dk' = E g(k') \quad (D.8)$$

Logo, escrevermos (D.1) numa eq. do tipo Schrödinger implicou em diagonalizarmos o operador Hamiltoniano, projetado no subespaço S_c gerado por $|k\rangle$. Definimos o projetor neste subespaço como:

$$\hat{S} = \int |k\rangle \langle k| dk \quad (D.9)$$

APÊNDICE E

DIAGONALIZAÇÃO DA HAMILTONIANA NO
ESPAÇO COLETIVO.

Souza Cruz e Weiss [13,14], construíram a Hamiltoniana de muitos corpos utilizando o potencial de Skyrme, que propõe uma interação com termos de dois e três corpos:

$$V = \frac{1}{2!} \sum_{i,j} V(i,j) + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} V(i,j,k) \quad (E.1)$$

A escolha deles deveu-se ao sucesso, mostrado por este potencial, na descrição de fenômenos coletivos segundo um tratamento microscópico. A descrição da interação nuclear via (E.1), permite-nos obter simultaneamente o raio e energia de ligação para núcleos de camada fechada [36].

$$V(i,j) = t_0(1 + x_0 \hat{P}_\sigma) \delta(\vec{x}(i) - \vec{x}(j)) + \frac{t_1}{2} \left[\delta(\vec{x}(i) - \vec{x}(j)) \vec{k}(i,j)^2 + \right. \\ \left. + \vec{k}(i,j)^2 \delta(\vec{x}(i) - \vec{x}(j)) \right] + t_2 \vec{k}(i,j) \delta(\vec{x}(i) - \vec{x}(j)) \vec{k}(i,j) + \hat{V}_{SO}(i,j) \quad (E.2)$$

$$V(i,j,k) = t_3 \delta(\vec{x}(i) - \vec{x}(j)) \delta(\vec{x}(j) - \vec{x}(k)) \quad (E.3)$$

$$\vec{k}(i,j) = \frac{1}{2\hbar} (\vec{p}(i) - \vec{p}(j)) \quad (E.4)$$

$$\hat{P}_\sigma = \frac{1 + \hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j}{2}$$

\hat{P}_σ = operador de troca de spin;

$\hat{\sigma}_i$ = matriz de Pauli para o nucleon "i";

x_0, t_0, t_1, t_2, t_3 = parâmetros ajustados aos dados experimentais da energia de ligação e raio nuclear;

O 1° termo em (E.2) descreve a contribuição local para $V(i, j)$ com termo para troca de spin, enquanto os 2° e 3° termos nos dão interações dependentes de momento, que simulam efeitos de não localidade. O 4° termo representa a interação spin-órbita para 2 corpos.

A equação (E.3) descreve uma interação de três corpos de alcance zero, ou seja, potencial local do tipo δ .

Para cada conjunto de parâmetros ajustados experimentalmente em (E.2), designamos o potencial de SKYRME I, SKYRME II, etc.

Usaremos o potencial de SKYRME III, pois é o que melhor representa os resultados experimentais. Para este potencial, temos:

$$\begin{aligned} t_0 &= -1128.75 \text{ MeV } fm^3; & t_1 &= 395.0 \text{ MeV } fm^5; \\ t_2 &= -95.0 \text{ MeV } fm^5; & t_3 &= 14000.0 \text{ MeV } fm^6; \\ \omega_0 &= 120.0 \text{ MeV } fm^5; & x_0 &= 0.45 \end{aligned}$$

No nosso caso, como trabalhamos com núcleos de camada fechada, o termo de interação spin-órbita se anula em (E.2).

No capítulo 2 adotamos o caminho de diagonalizarmos a Hamiltoniana coletiva no subespaço coletivo, de modo a obtermos os estados nucleares. Podemos obter esta Hamiltoniana na representação coletiva de momento: $\langle k|\hat{H}|k' \rangle$. Por meio de uma transformada de Fourier, podemos apresentar, também, a representação de posição : $\langle x|\hat{H}|x' \rangle$.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}|x \rangle &= -i \frac{\partial}{\partial x} |x \rangle \\ \tilde{P}|x \rangle &= x |x \rangle \end{aligned} \tag{E.5}$$

\tilde{Q} e \tilde{P} são os operadores canonicamente autoconjugados em S_c , obtidos da projeção de \hat{Q} e \hat{P} neste subespaço coletivo.

Entretanto, com o intuito de obtermos expressões explícitas para os termos de massa e potencial coletivo, é conveniente termos uma representação escrita numa forma canônica, em termos dos operadores de momento e coordenada. Para tanto, pode-se seguir a metodologia já desenvolvida nas referências [13,14], a qual resumiremos aqui.

Seja o elemento de matriz da Hamiltoniana coletiva entre dois estados definidos em S_c :

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{H}_c|n' \rangle &= \int \langle n|x \rangle \langle x|\hat{H}_c|x' \rangle \langle x'|n' \rangle dx dx' = \\ &= \int \varphi_n^*(x) \langle x|\hat{H}|x' \rangle \varphi_{n'}(x') dx dx' \end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x + x'}{2} \\ \xi &= x - x' \end{aligned} \tag{E.6}$$

Então:

$$\begin{aligned} &\int \varphi_n^*(\bar{x} + \xi) \langle \bar{x} + \frac{\xi}{2}|\hat{H}|\bar{x} - \frac{\xi}{2} \rangle \varphi_{n'}(\bar{x} - \frac{\xi}{2}) d\bar{x} d\xi = \\ &= \int \varphi_n^*(\bar{x}) \left\{ \int e^{i\xi\hat{P}} \langle \bar{x} + \frac{\xi}{2}|\hat{H}|\bar{x} - \frac{\xi}{2} \rangle d\xi \right\} \varphi_{n'}(\bar{x}) d\bar{x} \end{aligned}$$

O operador entre chaves depende de \hat{P} e \hat{Q} , como pretendíamos, e é a representação de Weyl-Wigner da Hamiltoniana coletiva. Podemos, agora, explicitar a forma desta Hamiltoniana através da expansão da expressão $\langle \bar{x} + \frac{\xi}{2}|\hat{H}|\bar{x} - \frac{\xi}{2} \rangle$ na não localidade ξ :

$$\hat{H}_c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} : \tilde{P}^{(n)} \tilde{H}^{(n)}(\tilde{Q}) : \tag{E.7}$$

$$: \tilde{P}^{(m)} \tilde{H}^{(m)}(\tilde{Q}) := \underbrace{\{ \tilde{P}, \{ \tilde{P}, \dots, \{ \tilde{P}, \tilde{H}^{(m)}(\tilde{Q}) \} \dots \} \}}_{m\text{-anticomutadores}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(m)}(x) &= \int \frac{(-i\xi)^m}{m!} \langle x + \frac{\xi}{2}|H|x - \frac{\xi}{2} \rangle d\xi = \\ &= \int \frac{(-i)^m}{m!} \langle x + \frac{\xi}{2} | [\tilde{Q}, [\tilde{Q}, \dots, [\hat{H}, \tilde{Q}], \dots]] | x - \frac{\xi}{2} \rangle d\xi \end{aligned} \tag{E.8}$$

Lembrando que o operador de projeção \hat{S} não deve mudar as regras de comutações entre \hat{P} e \hat{Q} , podemos trabalhar com estes em (E.8).

No caso do potencial de SKYRME, temos a expansão em (E.7) naturalmente truncada para termos de ordem superior ao 2º, já que, neste caso:

$$\left[\hat{Q}, \left[\hat{Q}, \left[\hat{Q}, \hat{H} \right] \right] \right] = 0 \quad (E.9)$$

Visto que a interação nuclear deve ser par por reversão temporal, e sabendo que \hat{Q} é par e \hat{P} é ímpar segundo esta reversão, segue que a série (E.7) deve ser não nula apenas para termos com $m = \text{par}$, ou seja:

$$\tilde{H}^{(m)} = 0, \quad m = \text{ímpar} \quad (E.10)$$

Levando em conta (E.10) e (E.9):

$$\hat{H}_c = \frac{1}{4} \{ \tilde{P}, \{ \tilde{P}, \hat{B}(\hat{Q}) \} \} + \hat{V}(\tilde{Q}) \quad (E.11)$$

onde:

$$\hat{B}(\tilde{Q}) = \frac{1}{\hat{M}(\tilde{Q})} = 2\tilde{H}^{(2)}(\tilde{Q}) \quad (E.12)$$

$$\hat{V}(\tilde{Q}) = \tilde{H}^{(0)}(\tilde{Q}) \quad (E.13)$$

$\hat{B}(\tilde{Q})$ é chamado de parâmetro de massa, enquanto $\hat{V}(\tilde{Q})$ de potencial coletivo. Assim, usando este formalismo, Souza Cruz e Weiss obtiveram analiticamente:

1°: O^{16}

$$\frac{1}{\hat{M}(\tilde{Q})} = \frac{1}{\mu} \left\{ 1 + \left[0.02 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^4 + 0.08 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^2 + 0.34 \right] e^{\frac{-4\tilde{Q}^2}{7a_0^2}} \right\} \quad (E.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(\tilde{Q}) = & 137.39 + \left\{ -1.10 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^6 - 21.89 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^4 - 114.22 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^2 - 447.36 \right\} e^{\frac{-4\tilde{Q}^2}{7a_0^2}} + \\ & + \left\{ 1.68 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^6 + 20.99 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^4 + 57.12 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0} \right)^2 + 158.45 \right\} e^{\frac{-4\tilde{Q}^2}{5a_0^2}} \quad (E.15) \end{aligned}$$

$$a_0 = 1.76 \text{ fm} \quad (E.16)$$

2º: $C\alpha^{40}$

$$\frac{1}{\hat{M}(\tilde{Q})} = \frac{1}{\mu} \left\{ 1 + \left[0.0003 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^8 + 0.00067 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^6 + 0.023 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^4 + 0.111 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0.03767 \right] e^{\frac{-10\tilde{Q}^2}{19a_0^2}} \right\} \quad (E.17)$$

$$\hat{V}(\tilde{Q}) = 767.99 + \left\{ -0.03 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^{10} - 0.63 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^8 - 5.26 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^6 - 71.53 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^4 - \right. \\ \left. - 386.31 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^2 - 1252.8 \right\} e^{\frac{-10\tilde{Q}^2}{19a_0^2}} + \left\{ 0.003 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^{12} + 0.092 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^{10} + 1.0 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^8 + \right. \\ \left. + 5.164 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^6 + 62.8 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^4 + 212.11 \left(\frac{\tilde{Q}}{a_0}\right)^2 + 473.86 \right\} e^{\frac{-5\tilde{Q}^2}{7a_0^2}} \quad (E.18)$$

$$a_0 = 1.96 fm \quad (E.19)$$

onde:

$$a_0 = \frac{A^{\frac{1}{2}} b_0}{2} \quad (E.20)$$

Assim, obtido \hat{H}_c , devemos escolher uma base apropriada de forma a diagonalizá-lo.

Por simplificação, tomamos como base o conjunto de autovetores $|g_j\rangle$, descritos em termos de uma base de osciladores harmônicos coletivos, com parâmetro de tamanho b_0 :

$$\hat{H}_c |g_j\rangle = E_j |g_j\rangle \quad (E.21)$$

$$|g_j\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_j^n |n\rangle \quad (E.22)$$

$|n\rangle =$ autofunção de oscilador harmônico.

APÊNDICE F

RESTAURANDO A SIMETRIA.

Seja (2.1) o autoestado de GHW, associado ao sistema com eixo “z” como a direção de excitação. A particularização deste eixo nos dá autoestados que não possuem momento angular bem definido. Por outro lado, sabemos que tanto a interação eletromagnética, quanto a nuclear, são invariantes segundo uma rotação nos ângulos.

Assim, de modo a restaurarmos a simetria angular, devemos projetar (2.1) num espaço de bom momento angular. Isto é feito através do projetor de Peierl-Yoccoz [3]:

$$\hat{P}_{MK}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int D_{MK}^J(\Omega) \hat{R}(\Omega) d\Omega \quad (F.1)$$

onde:

$\hat{R}(\Omega)$ = operador de rotação;

$D_{MK}^J(\Omega)$ = função de Wigner.

$$D_{MK}^J(\Omega) = \langle JM | \hat{R}(\Omega) | JK \rangle \quad (F.2)$$

$$\hat{R}(\Omega) = e^{-i\beta_1 J_z} e^{-i\beta_2 J_y} e^{-i\beta_3 J_z} \quad (F.3)$$

$\Omega = (\beta_3, \beta_2, \beta_1)$ = âng. de Euler;

J, M, K são o momento angular do sistema e suas projeções num eixo genérico e eixo “z”, respectivamente.

Logo, o novo autoestado no espaço de bom momento angular será:

$$|\Psi_{MK}^J\rangle = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int \frac{1}{(N_{MK}^J)^{\frac{1}{2}}} D_{MK}^J(\Omega) \hat{R}(\Omega) |\psi\rangle d\Omega \quad (F.4)$$

onde:

$$N_{MK}^J = \langle \psi | \hat{P}_{MK}^{J*} \hat{P}_{MK}^J | \psi \rangle \quad (F.5)$$

é o fator de normalização de $|\Psi_{MK}^J\rangle$

Podemos reescrever (F.4) como:

$$|\Psi_{MK}^J\rangle = \frac{1}{(N_{MK}^J)^{\frac{1}{2}}} \hat{P}_{MK}^J |\psi\rangle \quad (F.6)$$

APÊNDICE G

CÁLCULO DO FATOR DE NORMALIZAÇÃO

De (F.5), temos que:

$$N_{MK}^J = \langle \psi | \hat{P}_{MK}^{J*} \hat{P}_{MK}^J | \psi \rangle$$

Usando as propriedades do operador \hat{P}_{MK}^J [27]:

$$\left(\hat{P}_{MK}^J \right)^* = \hat{P}_{KM}^J \tag{G.1}$$

$$\hat{P}_{MK}^J \hat{P}_{M'K'}^{J'} = \delta_{JJ'} \delta_{M'K} \hat{P}_{MK}^J \tag{G.2}$$

$$\hat{P}_{MK}^{J*} \hat{P}_{MK}^J = \hat{P}_K^J \tag{G.3}$$

Procedendo conforme no capítulo 4 para o cálculo de $\left(\vec{J}_c(q) \right)_{mn}$, obtemos:

$$(N_K^J)_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{H_m(k')}{\sqrt{n_{k'}}} \frac{H_n(k)}{\sqrt{n_k}} e^{ik\alpha} e^{-ik'\alpha'} \langle \alpha' | \hat{P}_K^J | \alpha \rangle d\alpha d\alpha' dk dk' \tag{G.4}$$

Explicitando \hat{P}_K^J através de (F.1), observando que $M = 0$:

$$(N_K^J)_{mn} = \frac{2J+1}{32\pi^4} \int \frac{H_m(k')}{\sqrt{n_{k'}}} \frac{H_n(k)}{\sqrt{n_k}} e^{ik\alpha} e^{-ik'\alpha'} \times \\ \times \langle 0 | e^{-i\alpha' \hat{P}_z} \hat{R}(\Omega) e^{i\alpha \hat{P}_z} | 0 \rangle P_J(\cos \beta_2) d\alpha d\alpha' dk dk' d\Omega \tag{G.5}$$

$P_J(x)$ = polinômio de Legendre de ordem J.

Mas,

$$\hat{R}(\Omega) e^{i\alpha \hat{P}_z} = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{P}}$$

onde $\vec{\alpha}$ e \vec{P} estão definidos nas expressões (4.17) e (4.18).

Definindo, agora, os operadores:

$$\hat{A}'_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}a_0} \sum_i \alpha' \tau_3(i) \hat{b}_3(i) \quad (G.6)$$

tal que:

$$i\alpha' \hat{P}_z = \hat{A}'_3 - \hat{A}'_3{}^* \quad (G.7)$$

e

$$[\hat{A}'_3, \hat{A}'_3{}^*] = -\frac{A}{8a_0^2} \alpha'^2 \quad (G.8)$$

$$[\hat{A}'_3, \hat{A}^*] = \frac{A}{8a_0^2} \alpha' \alpha \cos \beta_2 \quad (G.9)$$

onde:

$$\hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4a_0} \sum_i \tau_3(i) \vec{\alpha} \hat{b}_i$$

Observando que:

$$[\hat{A}^*, \hat{A}'] = -\frac{A}{8a_0^2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}'$$

teremos:

$$(N_0^J)_{mn} = \frac{2J+1}{32\pi^4} \int \frac{H_m(k')}{\sqrt{n_{k'}}} \frac{H_n(k)}{\sqrt{n_k}} e^{ik\alpha} e^{-ik'\alpha'} \times \\ \times e^{-\frac{\alpha'^2}{4b_0^2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4b_0^2}} \frac{\alpha' \alpha \cos \beta_2}{2b_0^2} P_J(\cos \beta_2) d\alpha' d\alpha dk' dk d\Omega \quad (G.10)$$

A integral acima é equivalente às integrais resolvidas no capítulo 4. Assim, seguindo os mesmos passos que antes, obtemos para a transição $J = 0^+ \rightarrow J = 1^-$:

$$(N_0^1)_{mn} = \frac{3(1+(-1)^{n+1})m!2^m A_m A_n}{2(n+2)} \delta_{mn} \quad (G.11)$$

$$(N_0^0)_{mn} = \frac{(1 + (-1)^m) m! 2^m A_m A_n}{2(m+1)} \delta_{mn} \quad (G.12)$$

onde , A_j é dado por:

$$A_j = \left(\frac{1}{2^j j!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(N_0^1)_{mn} = \frac{3}{m+2} \quad (m = \textit{impar}) \quad (G.13)$$

$$(N_0^0)_{mn} = \frac{1}{m+1} \quad (m = \textit{par}) \quad (G.14)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.B. Migdal, Journal Phys. URSS **8**, 331 (1944).
- [2] G.C. Baldwin, G.S. Klaiber, Phys. Rev. **71**, 3 (1947).
- [3] P. Ring, P. Schuck, **The Nuclear Many-Body Problem** , Springer-Verlag, 1941.
- [4] M.Goldhaber and E. Teller, Phys. Rev. **74** 1046 (1948).
- [5] H. Steinwedel, J.H.D. Jensen, Z. Naturf. **5a**, 413 (1950).
- [6] D.H. Wilkinson, Physica **22**, 1039 (1956).
- [7] G.E. Brown, M.Bosterli, Phys. Rev. Lett. **3**, 472 (1959).
- [8] J.P. Elliott, B.H. Flowers, Proc. Roy. Soc. **242**, 57 (1957).
- [9] D.M. Brink, Nuclear Physics **4**, 215 (1957).
- [10] R.A. Ferrell, William M. Visscher, Phys. Rev., **102**, 450 (1956).
- [11] J. J. Griffin, J.A. Wheeler, Phys. Rev., **108**, 311 (1957).
- [12] E.J.V. de Passos, A.F.R. de Toledo Piza, Phys. Rev., **C21**, 425 (1980).
- [13] L.I. Weiss, Hamiltonianas coletivas para ressonâncias gigantes de dipolo. Tese de Mestrado. Departamento de Física UFSC, 1991. (não publicado)
- [14] F.F. de Souza Cruz, L.I. Weiss - Microscopic Description of the Giant Dipole Resonance - submetido ao Phys. Rev C.
- [15] A.F.R. de Toledo Piza, E.J.V. de Passos, D. Galetti, M.C. Nemes, M.M.

- Watanabe, Phys. Rev., C15, 1477 (1977).
- [16] W.C. Barber, Annual Reviews Nuclear Science, **21**, 1 (1962).
- [17] S.D. Drell, J.D. Walecka, Annals of Physics **28**, 18 (1964).
- [18] J. Goldemberg, R.H. Pratt, Reviews of Modern Physics **38**, 311 (1966).
- [19] R. Hofstadter, Reviews of Modern Physics, **28**, 214 (1956).
- [20] T. deForest, J.D. Walecka, Advances in Physics **15**, 1 (1966).
- [21] N.F. Mott, Proc. Roy. Soc. **A124**, 425 (1929).
- [22] W.A. Mackinley, H.Feshbach, Phys. Rev. **74**, 1759 (1948).
- [23] H. Feshbach, Phys. Rev. **88**, 295 (1952).
- [24] E.Guth, Wiener Anz. Akad. Wiss **24**, 299 (1934).
- [25] M.E. Rose, Phys. Rev. **73**, 279 (1948).
- [26] E. Merzbacher, **Quantum Mechanics** , Jonh Wiley & Sons, Inc., 1970.
- [27] A.R. Edmonds, **Angular Momentum in Quantum Mechanics** ,
Princeton, New Jersey, 1960.
- [28] J.H. Heisemberg, J.R. Callarco et al. - Proposal of the Nuclear Physics
Group of the New Hampshire University - (1991). (não publicado)
- [29] F.H. Lewis, Jr., Phys. Rev., **134**, 331 (1964).
- [30] H. Überall, Nuovo Cimento, **B41**, 25 (1966).
- [31] F.F. de Souza Cruz et al. - Electron Scattering Form Factors for the Giant

Dipole Resonance - a ser submetido ao Phys. Rev. C.

- [32] F.H.Lewis, Jr., and J.D. Walecka, Phys. Rev., **133**, B849 (1964).
- [33] A. Hotta, K.Itoh, T. Saito, Phys. Rev. Lett. **33**, 790 (1974).
- [34] J. Goldemberg, W.C. Barber, Phys. Rev. **B963**, 134 (1964).
- [35] A. Goldmann, M. Stroetzel, Z. Phys. **239**, 235 (1970).
- [36] D. Vautherin, D.M. Brink, Phys. Rev. **C5**, 626 (1972).