UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DOIS EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DE DUHAMEL E O MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

JOÃO ROBERTO LAZZARIN

MAIO - 1994

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

" **MESTRE EM CIÊNCIAS** "

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Etzel Ritter von Stockert

Prof. Dr. Etzel R. von Stockert
Coordenador

Banca Examinadora :

P. C. Otterson

Prof. Ph.D. Paul James Otterson
Orientador

Arbieto C.

Prof. Dr. Eduardo Arbieto Alarcon

Ruy Coimbra Charão

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Jardel Morais Pereira

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Jan, a Nani, a Rita, ao Brettas, ao João Artur, aos professores Lara, Eduardo, Rui e Jardel e a todos os professores do departamento de matemática da UFMT-ROO. Não esquecendo do contribuinte, que as muitas vezes deixa de comer para pagar impostos, impostos estes, que financiam a educação deste país.

Em especial quero agradecer, a meu amigo prof. Paul, que sem dúvida alguma foi a grande fonte de inspiração e labuta. Também em especial, agradeço a minha Esposa Kátia por ter sido muitas vezes pai, enquanto eu era apenas um estudante.

Dedicado a meu filho,
Mauricio.

RESUMO

O estudo de leis de conservação no cálculo de variações, nos leva a uma idealização dada pela EDP não linear

$$u_t + [f \circ u]_x = 0 \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty))$$

cuja solução pode ser tomada como sendo o limite quando $\lambda \longrightarrow 0$, da seqüência de soluções de EDP's do tipo

$$u_t + [f \circ u]_x = \lambda u_{xx}$$

Motivados por isso, além de estabelecermos uma solução global para esta última equação utilizando o principio de Duhamel e o método das aproximações sucessivas, faremos um estudo das propriedades que esta solução pode refletir, ou das condições iniciais ou da solução fundamental do calor. Por fim, a título de comparação estudaremos a equação,

$$u_{tt} + [f \circ u]_x = \lambda u_{xx}$$

utilizando o mesmo método, destacando as possíveis diferenças entre as duas soluções.

ABSTRACT

The partial differential equation

$$u_t + [f\circ u]_x = \lambda u_{xx} \qquad (\lambda \geq 0, (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty))$$

is studied, motivated as parabolic regularization of an idealised conservation law ($\lambda = 0$). The principle of Duhamel and a method of successive aproximations are applied to establish global solutions for the Cauchy problem and their properties as consequences of properties of the fundamental solution of the heat equation or of hypotheses imposed on the initial condition.

For purposes of comparison, the same methods are applied to the non linear hyperbolic equation

$$u_{tt} + [f\circ u]_x = \lambda u_{xx}$$

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

As leis de conservação surgem no cálculo de variações como equações diferenciais parciais (EDP) da forma

(1) $$\text{divergência} (\vec{F}) = 0$$

para campos vetoriais $\vec{F}$ restringidos por fortes dependências (em geral não lineares) entre suas componentes. Numa idealização desta situação recentemente foram estudadas ([9],[12]) EDP da forma

(2) $$u_t + [f \circ u]_x = 0$$

Para EDP de primeira ordem existe uma bem desenvolvida teoria clássica (por exemplo:[3],[7]), que alerta para o fato de que algumas EDP deste tipo apresentam fortes singularidades e que portanto possuem solução, apenas em intervalos finitos de tempo.

Independente desta origem no cálculo de variações as EDP da forma apresentada em (2), são importantes em várias áreas de matemática aplicada incluindo, hidrodinâmica, elasticidade, fluxo de trânsito, etc. Em tais aplicações o aparecimento de fortes singularidades é indesejável e interpretado como resultado de negligência de termos de ordem superior, ou seja, em tais aplicações as soluções relevantes são limites de seqüências de soluções de EDP de ordem maior, menos sujeitas a singularidades.

Então, por exemplo a EDP (2) seria considerada uma idealização da EDP

(3_λ) $$u_t + [f \circ u]_x = \lambda u_{xx}$$

onde $\lambda > 0$ é o coeficiente de viscosidade, e as soluções relevantes de (2) seriam limites (para $\lambda \longrightarrow 0$) da seqüência de soluções $(u_\lambda)_{\lambda>0}$, onde u_λ é a solução de (3_λ) respectivamente .

Na equação (3_λ), chamada de regularização parabólica de

(2) (ver [6]), para efetivamente calcularmos o limite $\lambda \longrightarrow 0$, faz-se necessário termos uma teoria bem desenvolvida para as EDP do tipo (3_λ). Tal teoria encontramos nas notas do prof.Dr. Paulo Zingano([15]), " Leis de conservação com viscosidade: uma introdução " que estuda (3_λ) para o caso $\lambda = 1$, sem perder a generalidade, devido ao fato de que por uma simples mudança de variáveis, retornamos ao caso geral.

A presente dissertação representa um estudo do trabalho do prof. Zingano, com as seguintes ressalvas :

O espaço métrico completo construido aqui é diferente do proposto inicialmente por Zingano, sendo um espaço de funções mensuráveis limitadas, não necessáriamente contínuas, de forma a aproveitar a norma do supremo desde o princípio.

Cada conclusão sobre as propriedades do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = u_{xx} \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases}$$

decorre das propriedades correspondentes ou da condição inicial ou da solução fundamental

$$E(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$$

para $t > 0$, da EDP do calor.

Para entender melhor tal correspondência, estudamos paralelamente o problema não linear hiperbólico

$$u_{tt} + [f(u)]_x = u_{xx}$$

pelo mesmo método do princípio de Duhamel e o teorema do ponto fixo para contrações utilizados por Zingano.

Este problema com parte não linear $[f \circ u]_x$ escolhida por sua proximidade ao problema de Zingano, fez ligação de nosso trabalho com outra área de ativa pesquisa atual, a de EDP hiperbólicas não lineares (ver por exemplo [13]) .

No texto aparecem importantes diferenças entre o problema hiperbólico e o problema parabólico de Zingano, que refletem bem as diferenças entre as EDP da onda e do calor , respectivamente.

CAPÍTULO I

I.1 PRELIMINARES

Inicialmente descreveremos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer do capítulo I, bem como nos demais capítulos. Existe uma farta literatura que enuncia e demonstra estes resultados , no entanto a cada resultado citaremos referências que se enquadram no nosso contexto. Fica também estabelecido que as integrais sem limites de integração são consideradas integrais sobre toda a reta, e a notação D_x^n ,servirá para indicar a n-ésima derivada em relação a variável x.

Definição (os espaços L^p).

Sejam p real, $p \geq 1$ e $\varphi : I \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ mensurável, diremos que $\varphi \in L^p(I)$ se :

$$\| \varphi \|_{L^p} \equiv \left\{ \int_I | \varphi |^p dx \right\}^{1/p} < \infty$$

onde a norma acima definida é chamada L^p-norma. Diremos que $\varphi \in L^\infty(I)$ se :

$$\| \varphi \|_{L^\infty} \equiv \sup_{x \in I} \text{ess} \, | \varphi | < \infty$$

onde a norma acima definida é conhecida como a norma do supremo essencial .

Definição.

Diremos que $\varphi : I \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence a $\mathbb{B}(I)$ se φ for limitada, i.é,

$$\| \varphi \|_{sup} \equiv \sup_{x \in I} | \varphi | < \infty$$

Observação. Quando I = $\mathbb{R}$ diremos que $\varphi \in L^p$ ou que $\varphi \in \mathbb{B}$ ao invés de $L^p(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, respectivamente. Também devemos ressaltar que as normas $\|\cdot\|_{sup}$ e $\|\cdot\|_{L^\infty}$ são idênticas, em se tratando de funções contínuas.

1.1.1 Proposição. Suponha $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p$, definindo para todo $t \in \mathbb{R}$, fixado, a função $f_t(x) = f(x+t)$. Então,

$$\lim_{t \to 0} \| f_t - f \|_{L^p} = 0$$

Dem.(ver por exemplo [3]).

Definição (O espaço de Schwartz).

Seja φ $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ função C^∞, diremos que φ pertence ao espaço de Schwartz ,se :

$$\| \varphi \|_{m,n} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m D^n \varphi(x)| < \infty$$

para todo $(m,n) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\mathbb{N}$.

O espaço de Schwartz, será denotado por $S(\mathbb{R})$, ou simplesmente S.

A topologia de S é induzida pela métrica :

$$d(\varphi,\beta) = \sum_{m,n} \frac{1}{2^{m+n}} \frac{\| \varphi - \beta \|_{m,n}}{1 + \| \varphi - \beta \|_{m,}} \qquad (\varphi,\beta \in S)$$

Definição (Distribuições temperadas).

Uma distribuição temperada é um funcional linear $T:S \to \mathbb{C}$ contínuo. Denotaremos por $S'(\mathbb{R})$ ou simplesmente S' o espaço vetorial de todas as distribuições temperadas.

Observação. Existe uma classe mais abrangente de distribuições onde as distribuições temperadas aparecem como um caso particular. No presente texto utilizaremos a palavra distribuição para designar as distribuições temperadas.

1.1.2 Proposição. Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L^1$

(i) Então f define um elemento $T_f \in S'$ através da fórmula :

$$T_f(\varphi) = \int f \varphi \, dx \qquad (\varphi \in S)$$

(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, f define outro elemento de S',denotado por $D_x^n T_f$, através da fórmula :

$$D_x^n T_f \equiv T((-1)^n D_x^n(\varphi)) = \int f(x)(-1)^n D_x^n(\varphi(x))dx \qquad (\varphi \in S)$$

Caso $f \in C^n$, mediante integração por partes teremos :

$$D_x^n T_f = T_{D_x^n f}$$

Dem.(ver por exemplo [3] ou [5]).

Definição.

Seja f uma função contínua tal que para todo $\varphi \in S$ tenhamos $f\varphi \in S$. Definimos o produto de f por $T \in S'$ como sendo a distribuição temperada dada por :

$$(fT)(\varphi) \equiv T(f\varphi).$$

1.1.3 Exemplo. (a " função " delta)

Seja $b \in \mathbb{R}$. Definimos δ_b como sendo o funcional :

$$\delta_b(\varphi) = \varphi(b) \qquad (\varphi \in S)$$

para o caso em que $b = 0$ denotaremos δ_0 simplesmente por δ. Gostaríamos de encontrar uma função g integrável tal que :

$$\delta_b(\varphi) = \int g(x)\varphi(x)dx \qquad (\varphi \in S)$$

de fato não existe uma função com esta propriedade, mas a proposição 1.1.2 nos leva a denotar

$$\delta_b(\varphi) \equiv \int \varphi(x)\delta(x-b)dx$$

o que formalmente nos leva a :

$$\int \delta(x-b)dx = 1 \quad \text{e} \quad \delta_b(x) = 0 \text{ para } x \neq b .$$

Definição (Derivada de uma distribuição).

Seja $T \in S'$ e $n \in \mathbb{N}$, a distribuição denotada por $D^n T$ e definida através da fórmula

$$D^n T(\varphi) \equiv T((-1)^n D_x^n \varphi)$$

é a derivada fraca de T ou a derivada no sentido das distribuições como é mais conhecida.

1.1.4 Exemplo. (a função rampa)

$$\text{Seja} \quad r(x) \equiv \begin{cases} x & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

r é contínua, mas não é derivável, no entanto podemos calcular sua derivada no sentido das distribuições. Seja

$$T_r \equiv T_r(\varphi) = \int \varphi \, r \, dx = \int_0^\infty x\varphi(x)dx \qquad (\varphi \in S)$$

é fácil ver que T_r está bem definida, assim

$$D \, T_r(\varphi) \equiv T_r(-D_x\varphi(x)) = - \int_0^\infty xD_x\varphi(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x) \, dx = \int \theta(x)\varphi(x)dx \equiv T_\theta(\varphi)$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside, definida por

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

que também não é derivável no sentido clássico, mas podemos calcular sua derivada fraca. Seja

$$T_\theta(\varphi) = \int \theta(x)\varphi(x)dx \qquad (\varphi \in S)$$

assim

$$DT_\theta(\varphi) = -\int_0^\infty D_x\varphi(x)dx = \varphi(0) = \delta(\varphi) \qquad (\varphi \in S)$$

ié, a derivada fraca da função de Heaviside é a distribuição δ.

Definição (o produto de convolução).

Sejam $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ duas funções, definimos como produto de convolução entre f e g e denotamos por $f*g$ a integral

$$f*g(x) = \int f(x-y)g(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

observemos que $f*g$ define uma nova função em $\mathbb{R}$.

1.1.5 Proposição. A fórmula do produto de convolução entre $f,g:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ está bem definida se :

(i) $\qquad f \in L^1$ e $g \in L^\infty$

(ii) $\qquad f \in L^1$ e $g \in L^1$

(em (ii) $f*g$ está bem definida em quase toda parte).

Dem. (ver por exemplo [14]).

1.1.6 Proposição. Se $\alpha,\beta \in S$ então $\alpha*\beta \in S$

Dem. (ver por exemplo [2]).

Definição.

Sejam T uma distribuição e $\alpha \in S$ definimos o produto de convolução entre T e α pela fórmula

$$T*\alpha(\varphi) = T(\alpha*\varphi) \qquad (\varphi \in S)$$

observemos que $T*\alpha$ é uma distribuição e esta definição é consistente com a definição caso T venha a ser uma função, (ver por exemplo [3]).

1.1.7 Exemplo (convolução com a "função" δ).

Considere a "função" δ definida no exemplo 2 e $f \in L^1 \cap L^\infty$. É óbvio que para toda $\varphi \in S$ teremos $\delta * \varphi \in S$ então considerando f como uma distribuição podemos estabelecer

$$\delta * f(\varphi) = f(\delta * \varphi) = f(\varphi) \qquad (\ \varphi \in S\ )$$

de certo modo estamos tratando de um caso particular de convolução entre duas distribuições, o que possível para o caso de uma das distribuições ter suporte compacto (ver por exemplo [3]).

1.1.8 Proposição (propriedades da convolução).

Seja f, g funções ou distribuições temperadas cujo produto de convolução está bem definido, então valem as seguintes propriedades :

(i) $$f * g = g * f$$

se $f \in C^n$ e $g \in C^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $f * g \in C^n$ e,

(ii) $$D^n_x(\ f * g\ ) = D^n_x f * g = f * D^n_x g$$

na verdade basta que apenas f ou g seja C^n para que $f * g \in C^n$

Dem.(por exemplo [2] e [3]).

Definição (convergência em S').

Seja $(\ T_n\ )_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de distribuições. Diremos que $(\ T_n\ )$ converge a $T \in S'$ e escreveremos

$$T_n \xrightarrow{S'} T$$

se e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} T_n(\ \varphi\ ) = T(\ \varphi\ )$$

para toda $\varphi \in S$.

1.1.9 Exemplo.

(i) $$\delta_{1/n} \xrightarrow{S'} \delta \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty$$

(ii) $$\delta'_{1/n} \xrightarrow{S'} \delta' \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty$$

(iii) $$\| f_n - f \|_{L^1} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{S'} f \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

(iv) Para toda $f \in L^1$, $T_n \xrightarrow{S'} T$ quando $n \longrightarrow \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow (T_n * f) \xrightarrow{S'} T*f \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty$$

com efeito, para toda $\varphi \in S$ teremos

(i) $\int \delta_{1/n}(x)\varphi(x)dx = \varphi(1/n) \longrightarrow \varphi(0) = \int \delta(x)\varphi(x)dx$ ao $n \longrightarrow \infty$

(ii) $\delta'_{1/n}(\varphi) = \delta_{1/n}(\varphi')$, o resto segue por (i).

(iii) Pelo teorema da convergência dominada tem-se

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \int f(x)\varphi(x)dx$$

donde segue (iii) e finalmente,

(iv) $(T_n * f)(\varphi) \equiv T_n(f*\varphi) \longrightarrow T(f*\varphi) \equiv T*f(\varphi)$.

Definição (a transformada de Fourier).

Seja $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos a transformada de Fourier de f, denotada por $f^\wedge$, por

$$f^\wedge(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-i\xi x}dx$$

se a integral convergir.

1.1.10 Proposição. Uma condição suficiente para que f tenha transformada de Fourier é $f \in L^1$.

Dem.(ver por exemplo [14]).

Como naturalmente $S \subset L^1$, temos que a transformada de Fourier está bem definida em S, isto nos dá margem para definir a transformada de Fourier para distribuições, antes porém veremos alguns resultados .

1.1.11 Teorema. Seja $f \in S$, então $f^\wedge \in S$ e valem

(i) $\quad F: S \to S$, $\varphi \mapsto \varphi^\wedge$ é uma bijeção linear contínua

(ii) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f^\wedge(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Dem.(ver por exemplo [2]).

Definição. (a transformada inversa de Fourier)

Aproveitando a fórmula do teorema 1.1.11, e denotando por $f^\vee$, definimos a transformada inversa de Fourier de f, por

$$f^\vee(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

1.1.12 Proposição. Sejam $f \in S$ e $n \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes fórmulas

(i) $$(f^\wedge)^\vee = f = (f^\vee)^\wedge$$

(ii) $$f^\vee(\xi) = f^\wedge(-\xi) = \overline{(\bar{f})^\wedge}$$

onde a barra denota conjugação complexa.

Dem. (ver por exemplo [2]).

1.1.13 Proposição. Sejam $f,g \in L^1 \cap L^\infty$. Valem as seguintes fórmulas :

(i) $$(f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi}\, f^\wedge g^\wedge$$

(ii) $$(f * g)^\vee = \sqrt{2\pi}\, f^\vee g^\vee$$

(iii) $$\sqrt{2\pi}\, (fg)^\wedge = f^\wedge * g^\wedge$$

Dem. (ver por exemplo [2],[14]).

1.1.14 Proposição. Sejam $f \in S$ e $n \in \mathbb{N}$. Então valem

(i) $$(D_x^n f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^n f^\wedge(\xi)$$

(ii) $$D_\xi^n f^\wedge(\xi) = [(-ix)^n f]^\wedge$$

Dem. (ver por exemplo [2], [14]).

1.1.15 Teorema (Teorema de Parseval).

Sejam $f, g \in S$. Vale

$$\langle f, g \rangle = \langle f^\wedge, g^\wedge \rangle$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno

$$\langle u, v \rangle \equiv \int \overline{u(x)} v(x) dx$$

Dem.(ver por exemplo [2]).

Para $f \in S$ podemos definir a distribuição T_f em S' por

$$T_f(\varphi) \equiv \int f(x)\varphi(x)dx = \langle \bar{f}, \varphi \rangle \qquad (\varphi \in S)$$

e portanto por (ii) da proposição 1.1.12 e o teorema 1.1.15, obtemos

$$T_{f^\wedge}(\varphi) = \langle \overline{f^\wedge}, \varphi \rangle = \langle (\overline{f^\wedge})^\wedge, \varphi^\wedge \rangle = \langle \bar{f}, \varphi^\wedge \rangle = T_f(\varphi^\wedge)$$

O teorema 1.1.11 em conjunto com o proposição 1.1.12 garante que a transformada de Fourier é uma bijeção contínua de S em S, portanto a expressão acima nos leva a definir a transformada de Fourier para uma distribuição. 1.1.1

Definição (A transformada de Fourier para distribuições).

Definimos a transformada de Fourier para uma distribuição T , denotada naturalmente por $T^\wedge$, pela fórmula

$$T^\wedge(\varphi) \equiv T(\varphi^\wedge) \qquad (\varphi \in S)$$

1.1.16 Exemplo. (A transformada da "função" delta)

$$\delta^{\wedge}(\varphi) = \delta(\varphi^{\wedge}) = \varphi^{\wedge}(0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x)dx \equiv T_{[\sqrt{2\pi}]}$$

isto mostra que a transformada da "função" delta é a função constante $1/\sqrt{2\pi}$.

Definição (a transformada inversa de Fourier para distribuições).

Analogamente ao que usamos para denotar a transformada inversa de funções, denotaremos a transformada inversa de Fourier de uma distribuição T, por $T^{\vee}$, definida por

$$T^{\vee}(\ \varphi\ ) = T(\ \varphi^{\vee}\ ) \qquad (\ \varphi \in S\ )$$

1.1.17 Teorema. Se $T \in S'$, então $T^{\wedge} \in S'$ e valem

(i) $\quad \begin{array}{l} F:S' \to S' \text{ é um isomorfismo linear} \\ T \mapsto T^{\wedge} \end{array}$

(ii) $\quad (\ T^{\wedge}\ )^{\vee} = T = (\ T^{\vee}\ )^{\wedge} \qquad (\ T \in S')$

(iii) $\quad (\ D^{n}T\ )^{\wedge} = (i\xi)^{n}T^{\wedge} \qquad (\ T \in S',\ n \in \mathbb{N}\ )$

(iv) $\quad D^{n}(\ T^{\wedge}\ ) = (-i)^{n}(\ x^{n}T\ )^{\wedge} \qquad (\ T \in S',\ n \in \mathbb{N}\ )$

onde o produto $x^{n}T$ está bem definido .

Dem.(ver por exemplo [5]).

Seguiremos como uma lista de resultados que iremos utilizar nos capítulos seguintes:

1.1.18 Teorema (teorema do ponto fixo para contrações). Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f:M \longrightarrow M$, possui um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_o \in M$, a seqüência $f(x_o), f^{2}(x_o), \ldots, f^{n}(x_o)\ldots$ converge para o ponto fixo de f.

Dem. (ver por exemplo [10]).

1.1.19 Teorema (teorema de Ascoli-Arzelá). Seja $M = \bigcup K_i$, espaço métrico formado por uma reunião enumerável de compactos, com $K_i \subseteq \text{int}(K_{i+1})$ para cada i ,então toda sequência eqüicontínua e pontualmente limitada de aplicações $f_r:M \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma subsequência que converge uniformemente em cada parte compacta de M.

Dem.(ver por exemplo [10]).

1.1.20 Teorema (Lema de Fatou). Sejam $I \subseteq \mathbb{R}^n$, um intervalo qualquer.(consideramos um intervalo em $\mathbb{R}^n$ como sendo o produto cartesiano de intervalos da reta), e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções não-negativas e integráveis em I. Se para (quase) todo $x \in I$

$$f(x) = \liminf_{n \longrightarrow \infty} f_n(x)$$

então

$$\int_I f(x)dx \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_I f_n(x)dx$$

Dem.(ver por exemplo [14]).

1.1.21 Teorema (teorema da convergência dominada). Sejam $I \subseteq \mathbb{R}^n$,um intervalo qualquer e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis em I, tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

se existir uma função $g \in L^1(I)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para (quase) todo $x \in I$. Então

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Dem. (ver por exemplo [14]).

I.2 O PRINCÍPIO DE DUHAMEL

Vamos usar a transformada de Fourier para resolver dois problemas de valor inicial, o do calor e o da onda, respectivamente.

I.2.1 A EQUAÇÃO DO CALOR

Consideremos o seguinte problema de valor inicial, (PVI) conhecido como o PVI unidimensional do calor para barra infinita (ver por exemplo [1]):

(1.2.1)
$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + g(x,t) & \text{(A)} \\ U(x,0) = u_o(x) & \text{(B)} \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $U(x,t)$ é um escalar real e $g:\mathbb{R}x\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é $L^1(\mathbb{R})$ e representa a não homogeneidade da equação. A condição inicial deverá ter um comportamento "razoável", como por exemplo :

(1.2.2)
$$u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$$

i.é, u_o é absolutamento integrável e limitada e a condição (1.2.1).B é interpretada no sentido de

(1.2.3)
$$\|U(.,t) - u_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

Sejam $U^\wedge$, $u_o^\wedge$ e $g^\wedge$ as transformadas de Fourier de U, u_o e g respectivamente. Aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{cases} (U^\wedge)_t = - \xi^2 U + g^\wedge \\ U^\wedge(\xi,0) = u_o^\wedge(\xi) \end{cases}$$

que nada mais é que uma EDO de primeira ordem em relação a variável t, cuja solução é dada por :

$$\text{(1.2.4)} \qquad U^{\wedge}(\xi,t) = u_o^{\wedge}(\xi)e^{-\xi^2 t} + \int_0^t e^{-\xi^2(t-s)} g^{\wedge}(\xi,s)ds$$

1.2.1 Lema.

(i) $$\int e^{-\xi^2 t} d\xi = \sqrt{\pi/t} \qquad (t > 0)$$

(ii) $$\int e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \sqrt{\pi/t}\; e^{-x^2/4t} \qquad (t > 0,\ x \in \mathbb{R})$$

Dem.

(i) Definindo $I(t) \equiv \int e^{-\xi^2 t} d\xi$, teremos

$$I^2(t) = \int e^{-\xi^2 t} d\xi \int e^{-\mu^2 t} d\mu = \int d\xi \int e^{-(\xi^2+\mu^2)t} d\mu$$

que em coordenadas polares torna-se

$$I^2(t) = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2 t} d\theta = \pi/t$$

donde conclui-se o desejado.

(ii) Seja $I(x)$ a integral a ser calculada, assim

$$I'(x) = \int e^{-\xi t}(i\xi)e^{i\xi x} d\xi = i\int (\xi e^{-i\xi^2 t})e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= (i/-2t)\int (-2\xi t e^{-\xi^2 t})e^{i\xi x} d\xi = (i/-2t)\int D_\xi (e^{-\xi^2 t})e^{i\xi x} d\xi$$

que integrando por partes nos fornece o PVI

$$\begin{cases} I'(x) = \dfrac{-x}{2t}\, I(x) \\ I(0) = \sqrt{\pi/t} \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$I(x) = \sqrt{\pi/t}\; e^{-x^2/4t}$$

como queriamos.

##

Por (ii) do lema 1.2.1 podemos concluir que se

$$\phi(x,t) = \sqrt{2t}\; e^{-x^2/4t}$$

então

$$\phi^\wedge(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}$$

assim a expressão (1.2.4) torna-se

$$U^\wedge(\xi,t) = \phi^\wedge(\xi,t)u_o^\wedge(\xi) + \int_o^t \phi^\wedge(\xi,t-s)g^\wedge(\xi,s)ds$$

que aplicando a fórmula (i) da Proposição 1.1.13, obtemos

(1.2.5) $$U^\wedge(\xi,t) = \sqrt{2\pi}\;[\;\phi(.,t)*u_o\;]^\wedge + \sqrt{2\pi}\int_o^t [\;\phi(.,t-s)*g(.,s)\;]^\wedge ds$$

aplicando a transformada inversa em (1.2.5) e mudando a ordem de integração no segundo termo que aparecerá a direita, obtemos o chamado principio de Duhamel para a equação do calor.

(1.2.6) $$U(x,t) = \varphi(.,t)*u_o + \int_o^t \varphi(.,t-s)*g(.,s)ds$$

onde

(1.2.7) $$\varphi(\mu,\tau) = (4\pi\tau)^{-1/2}e^{-\mu/4\tau}$$

A solução apresentada em (1.2.6) satisfaz a equação (1.2.1).A no sentido das distribuições e a condição inicial é satisfeita no sentido dado em (1.2.3). Os detalhes podem ser encontrados em, por exemplo [3].

1.2.2 Exemplo. Para o caso em que $g \equiv 0$, podemos estabelecer um resultado bastante interessante e que usaremos posteriormente. Neste caso teremos que se U satisfaz o PVI do calor então sua transformada de Fourier é dada por

$$\hat{U}(\xi,t) = e^{-t\xi^2}\hat{U}_o = [\varphi(.,t)*U_o]^{\wedge}$$

onde φ está definida em (7). Fazendo $t \longrightarrow 0$ obtemos

$$\hat{U}_o(\xi) = \lim_{t\to o^+} [\varphi(.,t)*U_o]^{\wedge}$$

o item (ii) do teorema 1.1.17, juntamente com o exemplo 1.1.3, nos leva a concluir que

$$\lim_{t\to o^+} \varphi(x,t) = \delta(x)$$

onde δ é a " função" delta.

I.2.2 A EQUAÇÃO DA ONDA

Consideremos agora, o PVI unidimensional da onda (ver por exemplo [2]), definido por

$$(1.2.8)\qquad \begin{cases} U_{tt} = U_{xx} + g(x,t) & (A) \\ U(x,0) = u_o(x) \quad \text{e} \quad U_t(x,0) = v_o(x) & (B) \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $U(x,t)$ é um escalar, a não homogeneidade g é uma função L^1, e as condições iniciais serão do tipo

$$u_o, v_o \in L^1 \cap \mathbb{B} \tag{1.2.9}$$

Resolveremos o PVI usando a transformada de Fourier. Sejam $U^\wedge, u_o^\wedge, v_o^\wedge$ e $g^\wedge$ as transformadas de Fourier de U, u_o, v_o e g respectivamente.

Aplicando a transformada em (1.2.8) obtemos

$$\begin{cases} (U^\wedge)_{tt} = -\xi^2 U^\wedge + g^\wedge(\xi,t) & (A) \\ U^\wedge(\xi,0) = u_o^\wedge(\xi) \text{ e } U_t^\wedge(\xi,0) = v_o^\wedge(\xi) & (B) \end{cases} \tag{1.2.10}$$

que nada mais é que um PVI formado por uma EDO de segunda ordem não homogênea, que para simplificar sua resolução separaremos em dois outros PVI :

$$\begin{cases} V_{tt} + \xi^2 V = g^\wedge(\xi,t) \\ V(\xi,0) = 0 = V_t(\xi,t) \end{cases} \tag{1.2.11}$$

e

$$\begin{cases} W_{tt} + \xi^2 W = 0 \\ W(\xi,0) = u_o^\wedge(\xi) \quad \text{e} \quad W_t(\xi,t) = v_o^\wedge(\xi) \end{cases} \tag{1.2.12}$$

o PVI (1.2.11) equivale ao sistema de equações

$$\begin{cases} (D_t - i\xi)h(\xi,t) = g^\wedge(\xi,t) \\ (D_t + i\xi)V(\xi,t) = h(\xi,t) \end{cases}$$

resolvendo, para h obtemos

$$h(\xi,t) = \int_0^t e^{i\xi(t-s)} g^\wedge(\xi,s)ds$$

e para V :

$$V(\xi,t) = \int_0^t e^{-i\xi(t-r)} h(\xi,r)dr$$

substituindo h na expressão de V, obtemos

$$V(\xi,t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\xi(t-s)}{\xi}\, g^\wedge(\xi,s)ds \qquad (\ \xi \neq 0\ )$$

o PVI (1.1.12) tem solução mais imediata

$$W(\xi,t) = u_o^\wedge(\xi)\cos\xi t + v_o^\wedge(\xi)\frac{\operatorname{sen}\xi t}{\xi} \qquad (\ \xi \neq 0\ )$$

somando V e W, obtemos a solução de (1.2.10),

$$(1.2.13) \qquad U^\wedge(\xi,t) = u_o^\wedge(\xi)\cos\xi t + v_o^\wedge(\xi)\frac{\operatorname{sen}\xi t}{\xi} + \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\xi(t-s)}{\xi}\, g^\wedge(\xi,s)ds$$

válida para $\xi \neq 0$.

Para encontrar a solução de (1.2.8) deveremos aplicar a transformada inversa em ambos os lados da expressão (1.2.13), mas vamos fazer isso passo a passo calculando a transformada inversa de cada termo separadamente, com o auxílio do seguinte resultado :

1.2.3 Lema. Se $\alpha^\wedge(\xi,t) = \cos\xi t$ e $\beta^\wedge(\xi,t) = \dfrac{\operatorname{sen}\xi t}{\xi}$, então

$$\alpha(x,t) = \sqrt{\pi/2}\ [\delta(x+t) + \delta(x-t)]$$

onde δ é a "função" delta e

$$\beta(x,t) = \sqrt{\pi/2} \begin{cases} 1 & \text{para } |\ x\ | \leq t \\ 0 & \text{para } |\ x\ | > t \end{cases} \qquad (\ t > 0\ )$$

Dem.

Inicialmente mostraremos que

$$\int e^{i\xi x}d\xi = 2\pi\delta(x)$$

com efeito, pelo exemplo 1.1.16 temos que

$$\delta^{\wedge}(\xi) = 1/\sqrt{2\pi}$$

no sentido das distribuições e portanto usando a fórmula da transformada inversa obtemos

$$\sqrt{2\pi} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi x} d\xi = \delta(x)$$

que implica no desejado. Se

$$\alpha(\xi, t) = \cos\xi t$$

então

$$\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} \cos\xi t \, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} [e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int e^{i\xi(x+t)} d\xi + \int e^{i\xi(x-t)} d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[2\pi \, [\, \delta(x + t) + \delta(x - t) \,] \right] =$$

$$= 1/\sqrt{\pi/2} \, [\, \delta(x + t) + \delta(x - t) \,]$$

agora,

$$\beta^{\wedge}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \beta(x,t) e^{-i\xi t} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi/2} \int_{-t}^{t} e^{-i\xi x} d\xi = \frac{-1}{2i\xi} \int_{-t}^{t} D_x (e^{-i\xi x}) dx =$$

$$= 1/\xi \left[\frac{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}}{2i} \right] = \frac{\operatorname{sen}\xi t}{\xi} \quad (\, \xi \neq 0 \,)$$

##

Portanto, podemos concluir que,

(1.2.14)
$$[\,u_o^{\wedge}\cos\xi t\,]^{\vee} = (1/\sqrt{2\pi})[u_o * \alpha] =$$

$$= (1/2)\int u_o(y)\Big[\delta(x+t-y) + \delta(x-t-y)\Big]dy =$$

$$= (1/2)\Big[u_o(x+t) + u_o(x-t)\Big]$$

e

(1.2.15)
$$\left[\,v_o^{\wedge}\frac{\operatorname{sen}\xi t}{\xi}\,\right]^{\vee} = (1/\sqrt{2\pi})[\,v_o * \beta\,] =$$

$$= (1/\sqrt{2\pi})\int v_o(x-y)\beta(y,t)dy = (1/2)\int v_o(y)dy$$

Para a parte não homogênea, obtemos $V(\xi,t)$, i.é, o último termo da direita que aparece em (1.2.13), mudando a ordem de integração

$$V^{\vee}(x,t) = \int_o^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{i\xi x}\frac{\operatorname{sen}\xi(t-s)}{\xi}\,g^{\wedge}(\xi,t)dxds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_o^t\Big[\beta(.,t-s) * g(.,s)\Big]ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_o^t\int\beta(x-y,t-s)g(y,s)dyds$$

isto é,

(1.2.16)
$$V^{\vee}(x,t) = (1/2)\int_o^t\int_{x-|t-s|}^{x+|t-s|} g(y,s)dyds$$

por (1.2.13), (1.2.14), (1.2.15) e (1.2.16) obtemos o princípio de Duhamel para a equação da onda :

$$U(x,t) = (1/2)[\, u_o(x+t) + u_o(x-t) \,] + (1/2)\int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy + \tag{1.2.17}$$

$$+ (1/2)\int_0^t \int_{x-|t-s|}^{x+|t-s|} g(y,s)dyds$$

Esta fórmula apesar de ser mais compacta, não é a mais adequada a nossos propósitos, modificaremos um pouco sua expressão utilizando o seguinte lema :

1.2.4 Lema. Se para cada $t \geq 0$, definirmos

$$G(\xi,\tau) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } |\, \xi \,| < \tau \\ 0 & \text{para } |\, \xi \,| \geq \tau \end{cases}$$

Então

$$D_\tau G(\xi,\tau) = \delta(\xi+\tau) + \delta(\xi-\tau)$$

e

$$D_\xi G(\xi,\tau) = \delta(\xi+\tau) - \delta(\xi-\tau)$$

onde δ é a "função" delta.

Dem.

É fácil ver que

$$G(\xi,\tau) = \theta(\xi+\tau)\theta(\tau-\xi)$$

onde θ é a função de Heaviside definida no Exemplo 1.1.4 , tal exemplo nos fornece

$$D_\tau[\theta(\xi+\tau)\theta(\tau-\xi)] = [D_\tau\theta(\xi+\tau)]\theta(\tau-\xi) + \theta(\xi+\tau)[D_\tau\theta(\tau-\xi)] =$$

$$= \delta(\xi+\tau)\theta(\tau-\xi) + \theta(\xi+\tau)\delta(\tau-\xi) = \delta(\xi+\tau) + \delta(\tau-\xi) = \delta(\xi+\tau) + \delta(\xi-\tau)$$

analogamente

$$D_\xi[\theta(\xi+\tau)\theta(\tau-\xi)] = [-D_\xi\theta(\tau-\xi)]\theta(\xi+\tau) + [D_\xi\theta(\xi+\tau)]\theta(\tau-\xi) =$$

$$= \delta(\xi+\tau) - \delta(\xi-\tau)$$

##

Assim, a nova expressão para (1.2.17) é :

(1.2.18) $$U(x,t) = (1/2)[u_o * D_t G(.,t)] + (1/2)[v_o * G(.,t)] + + (1/2)\int_o^t G(.,t-s)*g(.,s)ds$$

onde

(1.2.19) $$G(\xi,\tau) = \begin{cases} 1 \text{ para } |\xi| \leq \tau \\ 0 \text{ para } |\xi| > \tau \end{cases} \qquad (\tau \geq 0)$$

De fato (1.2.18) satisfaz as condições iniciais impostas em (1.2.8), no sentido de que

$$\| U(.,t) - u_o \|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

e

$$U_t(.,t) \xrightarrow{S'} v_o \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

pois U só tem derivada no sentido das distribuições.

CAPÍTULO II

II.1 O EXEMPLO PARABÓLICO

Neste capítulo estaremos interessados em estabelecer uma solução definida em $R\times[0,\infty)$, para um problema de valor inicial definido por uma equação parabólica semi-linear, cuja parte linear é a equação do calor, mais precisamente estabeleceremos uma solução para

$$(2.1.1)\quad \begin{cases} u_t + [\, f(\, u \,)\,]_x = u_{xx} & (\ A\ ) \\ u(x.0) = u_o(x) & (\ B\ ) \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $u(x,t)$ é um escalar e $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

2.1.1 Proposição. Sem perda de generalidade podemos considerar f dada em (2.1.1).A, tal que

$$f(0) = f'(0) = 0\ .$$

Dem.

Caso $f(0) \neq 0$, considerando

$$g(x) = f(x) - f(0),$$

obtemos:

$$u_t + [\, g(\, u\,)\,]_x = u_{xx},$$

com $g(0) = 0$. Agora fazendo a mudança de variável $s = t$ e $y = x - f'(\,0\,)t$ obtemos :

$$u_s + [\, g(\, u\,)\,]_y = u_{yy}$$

onde

$$g(u) = f(u) - f'(0)u$$

satisfaz

$$g(0) = g'(0) = 0 \ .$$

##

Portanto, iremos daqui em diante considerar

(2.1.2) $$f(0) = f'(0) = 0$$

Nosso objetivo é estabelecer a existência e unicidade de soluções para (2.1.1), tomando condições iniciais tais que

(2.1.3) $$u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$$

ou seja, u_o absolutamente integrável e limitada em $\mathbb{R}$. Portanto é conveniente interpretarmos(2.1.1).B, por :

(2.1.4) $$\| u(.,t) - u_o \|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

II.2 A SOLUÇÃO LOCAL

Inicialmente , vamos obter uma solução local para (2.1.1) restringindo a variação de t a um intervalo do tipo [0,T], onde T é convenientemente pequeno , em seguida estenderemos esta solução a todo $t \in \mathbb{R}_+$, estabelecendo com isso , uma solução global única.

A expressão (1.2.6) apresenta uma solução para o PVI do calor não homogêneo , se na equação (2.1.1)A acima considerarmos por um momento, $[\ f(u)\ ]_x$ como uma espécie de não homogêneidade da equação do calor obteremos

$$u(x,t) = \int \varphi(x-y,t)u_o(y)dy - \int_0^t \int \varphi(x-y,t-s)[f(u)]_y dyds$$

observando que

$$\int \varphi(x-y,t-s)[f(u)]_y dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int e^{-(x-y)^2/4(t-s)}[f(u(y,s))]_y dy$$

como estaremos em busca de soluções limitadas, segue via integração por partes que

$$\int e^{-(x-y)^2/4(t-s)}[f(u(y,s))]_y dy = -\int \frac{x-y}{2(t-s)} e^{-(x-y)^2/4(t-s)} f(u(y,s))dy$$

e portanto, podemos reescrever :

$$u(x,t) = \int \varphi(x-y,t)u_o(y)dy + \int_o^t \int \phi(x-y,t-s)f(u(y,s))dyds \tag{2.2.1}$$

onde

$$\varphi(\mu,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\mu^2/4\tau} \tag{2.2.2}$$

$$\phi(\mu,\tau) = \frac{\mu}{2\tau\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\mu^2/4\tau} \tag{2.2.3}$$

A expressão (2.2.1) nos leva a definir o operador integral :

Definição. Seja $\omega : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ uma função, definimos o operador integral sobre ω, denotado por $\mathbb{P}$, pela seguinte fórmula :

$$(\mathbb{P}\omega)(x,t) \equiv \varphi(.,t) * u_o + \int_o^t \phi(.,t-s) * f(\omega(.,s))ds \tag{2.2.4}$$

Portanto as possíveis soluções do PVI (2.1.1) nada mais são que pontos fixos deste operador, o que nos incentiva a criar um espaço de funções, e estabelecer condições para que $\mathbb{P}$ seja uma contração onde este espaço seja invariante, de forma que possamos aplicar o teorema do ponto fixo para contrações. Para tanto consideraremos inicialmente t variando em $[0,T]$, onde $T > 0$, será estimado futuramente .

Definição. Considerando $\omega:\mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{C}$,tal que $\omega(.,t)$ é integrável para cada $t \in [0,T]$, definimos :

$$(2.2.5) \qquad \| \omega \|_1 \equiv \sup_{t \in [0,T]} \int |\omega(x,t)| dx$$

$$(2.2.6) \qquad \| \omega \|_{sup} \equiv \sup \left\{ |\omega(x,t)| \,/\, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \right\}$$

Definição. Consideremos o espaço

$$(2.2.7) \qquad W \equiv \left\{ \omega : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{C}, \text{mensurável} \,/\, \| \omega \|_1 + \| \omega \|_{sup} < \infty \right\}$$

munido com a seguinte norma

$$(2.2.8) \qquad \| \omega \|_W \equiv \text{máx} \left\{ \| \omega \|_1, \| \omega \|_{sup} \right\}$$

2.2.1 Proposição. W munido com a métrica induzida pela norma $\| \ \|_W$ é um espaço métrico completo.

Dem.

Seja $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de cauchy de elementos de W. Como, para cada $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ fixado, a seqüência $(\omega_n(x,t))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de cauchy em $\mathbb{C}$, e portanto, convergente, definamos a função mensurável e limitada ω_∞ como sendo

$$\omega_\infty(x,t) \equiv \lim_{n\to\infty} \omega_n(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$$

Provaremos que $\omega_\infty \in W$, com efeito, seja $(\omega_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência de $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\|\omega_{n(k)} - \omega_{n(k+1)}\|_W < 1/2^k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

e definindo, para todo m natural :

$$g_m(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{m} |\omega_{n(k)}(x,t) - \omega_{n(k+1)}(x,t)| \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T])$$

e, ainda

$$g_\infty(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_{n(k)}(x,t) - \omega_{n(k+1)}(x,t)| \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T])$$

segue que para todo $m \in \mathbb{N}$ valerá :

$$\left| \int g_m(x,t)dx \right| \leq 1 \qquad (t \in [0,T])$$

e aplicando o lema de Fatou (teorema 1.1.20) :

$$0 \leq \int g_\infty(x,t) \leq 1 \qquad (t \in [0,T])$$

Sendo que

$$\omega_{n(m)} = \omega_{n(1)} + \sum_{k=1}^{m-1} (\omega_{n(k+1)} - \omega_{n(k)})$$

e,

$$\omega_\infty(x,t) = \lim_{m\to\infty} \omega_{n(m)}$$

segue, pelo teorema da convergência dominada que,

$$\int |\omega_\infty(x,t)| \; dx \;\; \leq \|\omega_{n(1)}\|_W + 1 \qquad (t \in [0,T])$$

donde se conclui que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int |\omega_\infty(x,t)| dx \;\; \leq \|\omega_{n(1)}\|_W + 1 < \infty$$

ou seja $\omega_\infty \in W$

A seqüência $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sendo de cauchy e possuindo uma subseqüência $(\omega_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente para ω_∞, também convergirá para $\omega_\infty \in W$, como desejamos .

##

2.2.2 Proposição. A função definida em $\mathbb{R}\times[0,T]$ por

$$\omega(.,t) = \varphi(.,t) * u_o$$

é um elemento de W.

Dem.

Se $\omega(.,t) = \varphi(.,t) * u_o$ então, via teorema de Fubini obtemos

$$\| \omega \|_1 \leq \sup_{t\in[0,T]} \iint \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} | u_o | dydx =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} \int | u_o | dy \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-(x-y)^2/4t}$$

pelo Lema 1.2.1 obtemos

(2.2.9) $$\| \omega \|_1 \leq \| u_o \|_{L^1}$$

ainda, considerando o sup para $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ temos

$$\| \omega \|_{sup} \leq \sup \int \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} |u_o(y)| dy$$

que pelo mesmo Lema citado acima obtemos

(2.2.10) $$\| \omega \|_{sup} \leq \| u_o \|_{sup}$$

o fato de que $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$ garante que $\omega \in W$.

##

Outro fato relevante é que, $\omega \in W$ implica que para cada $t \in [0,T]$ fixado, a função $\omega \in L^1 \cap \mathbb{B}$ na variável x, i.é,

(2.2.11) $$\begin{cases} \| \omega(.,t) \|_{L^1} \leq \| \omega \|_1 \\ \| \omega(.,t) \|_{sup} \leq \| \omega \|_{sup} \end{cases} \quad (t \in [0,T])$$

Usaremos o teorema do ponto fixo para contrações ou mais precisamente o teorema 1.1.18, exibindo um subconjunto fechado de W, invariante sob a ação do operador $\mathbb{P}$, no qual $\mathbb{P}$ é uma contração.
A expressão (2.2.4) sugere que para t próximo de zero, $u(.,t)$ e $\varphi(.,t) * u_o$ devem "ser próximos", o que nos leva a

Definição. Seja

$$W_{*} \equiv \left\{ \omega \in W \ / \ P_1 \ e \ P_2 \text{ abaixo valem} \right\} \tag{2.2.12}$$

(P_1) $$\| \omega - \varphi(.,t)*u_o \|_1 \leq \| u_o \|_{L^1}$$

(P_2) $$\| \omega - \varphi(.,t)*u_o \|_{sup} \leq \| u_o \|_{sup}$$

Temos por (2.2.9) e (2.2.10) que $0 \in W_*$ e naturalmente,

$$\omega(x,t) = \varphi(.,t)*u_o \in W_*$$

e mais ainda :

2.2.3 Proposição. Seja W_* definido em (2.2.12). Se $\omega \in W_*$, então

$$\| \omega \|_1 \leq 2\|u_o\|_{L^1} \tag{2.2.13}$$

$$\| \omega \|_{sup} \leq 2\| u_o\|_{sup} \tag{2.2.14}$$

Dem.

Seja $\omega \in W_*$,então

$$\| \omega \|_1 = \|\omega - \varphi(.,t)*u_o + \varphi(.,t)*u_o\|_1 \leq$$

$$\leq \|\omega - \varphi(.,t)*u_o\|_1 + \|\varphi(.,t)*u_o\|_1$$

donde por (2.2.9) e por P_1 obtemos (2.2.13). Analogamente se prova (2.2.14).

##

2.2.4 Proposição. W_* definido em (2.2.13) é um subconjunto fechado de W.

Dem.

Seja $\omega_\infty \in W$ o limite de uma seqüência (ω_n) de elementos de W_* , então valem para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$

(i) $$\|\omega_n-\varphi(.,t)*u_o\|_1 \leq \|u_o\|_{L^1}$$

(ii) $$\|\omega_n-\varphi(.,t)*u_o\|_{sup} \leq \|u_o\|_{sup}$$

Inicialmente mostraremos que

$$(iii) \qquad |\omega_n - \varphi(.,t)*u_o| \longrightarrow |\omega_\infty - \varphi(.,t)*u_o| \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty$$

uniformemente em $\mathbb{R}\times[0,T]$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tomando n_o tal que

$$n \geq n_o \quad \text{implica que} \quad \| \omega_n - \omega_\infty \|_W < \varepsilon$$

Para este n_o, obtemos que para todo $n \geq n_o$

$$\Big| \, |\omega_n - \varphi(.,t)*u_o| - | \omega_\infty - \varphi(.,t)*u_o| \, \Big| \leq |\omega_n - \omega_\infty| \leq$$

$$\leq \| \omega_n - \omega_\infty \|_{sup} \leq \| \omega_n - \omega_\infty \|_W \leq \varepsilon$$

Para mostrar que $\omega_\infty \in W_*$ devemos mostrar que valem

$$(iv) \qquad \|\omega_\infty - \varphi(.,t)*u_o\|_1 \leq \|u_o\|_{L^1}$$

$$(v) \qquad \|\omega_\infty - \varphi(.,t)*u_o\|_{sup} \leq \|u_o\|_{sup}$$

com efeito, observemos inicialmente que para todo $t \in [0,T]$ fixado porém arbitrário, teremos $(|\omega_n - \varphi(.,t)*u_o|)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência não negativa de funções integráveis em $\mathbb{R}$, ademais por (i) teremos

$$\int |\omega_n - \varphi(.,t)*u_o| \, dx \leq \sup_{t\in[0,T]} \int |\omega_n - \varphi(.,t)*u_o| dx =$$

$$= \|\omega_n - \varphi(.,t)*u_o\|_1 \leq \|u_o\|_{L^1}$$

segue do Lema de Fatou ou mais precisamente Teorema 1.1.20, que

$$\int |\omega_\infty - \varphi(.,t)*u_o| dx \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int |\omega_n - \varphi(.,t)*u_o| dx \leq \|u_o\|_{L^1}$$

donde se conclui (iv). Ainda, por (ii) e (iii) teremos

$$|\omega_\infty - \varphi(.,t)*u_o| \leq \|u_o\|_{sup}$$

donde finalmente, pode-se concluir (v).

##

Definição.

$$M_1 \equiv \sup\left\{ |f'(\eta)| \ / \ |\eta| \le 2\|u_0\|_{sup} \right\} \tag{2.2.15}$$

M_1 está bem definido, pois $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e o conjunto dos reais η tais que $|\eta| \le 2\|u_0\|_{sup}$ é compacto. O índice é conveniente pois trata-se da derivada primeira de f.

2.2.5 Proposição. Seja M_1 como definido em (2.2.15), então para todo $\omega \in W_*$ e todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ vale

$$|f(\omega(x,t))| \le M_1 |\omega(x,t)| \tag{2.2.16}$$

Dem.

Basta aplicar o teorema do valor médio no segmento que une a origem ao ponto $\omega(x,t)$ e observar que $f(0) = 0$.

##

2.2.6 Proposição. W_* é invariante sob a ação de $\mathbb{P}$ desde que $T \le 1/16M_1^2$, M_1 dado em (2.2.15).

Dem.

Inicialmente mostraremos que $\mathbb{P}(W_*) \subseteq W_*$,ié, se $\omega \in W_*$ então $\mathbb{P}(\omega) \in W_*$,com efeito, observando a definição por (7), pelo Lema 1.2.1 e pelo fato de que para $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$\alpha e^{-\alpha^2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\alpha^2/2} \tag{2.2.17}$$

obtem-se

$$\|\mathbb{P}(\omega) - \varphi(.,t)*u_0\|_1 = \left\|\int_0^t \phi(.,t-s)*f(\omega(.,s))ds\right\|_1 \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,T]} \int \int_0^t \int |\phi(x-y,t-s)|\,|f(\omega(y,s))|dydsdx$$

mas

$$\int\int_0^t\int|\phi(x-y,t-s)||\ f(\omega(y,s))|dydsdx \le$$

$$\le M_1\int\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\ \frac{1}{\sqrt{t-s}}\int\frac{|x-y|}{\sqrt{t-s}}\ e^{-(x-y)^2/4(t-s)}|\omega(y,s)|dxdyds \le$$

$$\le \frac{M_1}{\sqrt{2}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\ \frac{1}{\sqrt{t-s}}\ ds\int e^{(x-y)^2/8(t-s)}dx\int|\omega(y,s)|dy \le$$

$$\le M_1\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}\ \|\omega\|_1\ ds \le 4M_1\sqrt{t}\,\|u_o\|_{L^1}$$

portanto,

(2.2.18) $$\|\mathbb{P}(\omega) - \varphi(.,t)*u_o\|_1 \le 4M_1\sqrt{T}\,\|u_o\|_{L^1}$$

analogamente se prova que

(2.2.19) $$\|\mathbb{P}(\omega) - \varphi(.,t)*u_o\|_{sup} \le 4M_1\sqrt{T}\,\|u_o\|_{sup}$$

portanto para que

$$\mathbb{P}(\omega) \in W_*$$

deveremos ter,

$$4M_1\sqrt{T} \le 1$$

isto é,

$$T \le 1/16M_1^2$$

##

Daqui em diante consideraremos

(2.2.20) $$T = 1/16M_1^2$$

o que é suficiente para que W_* seja invariante sob $\mathbb{P}$. O próximo resultado estabelecerá a propriedade de $\mathbb{P}$ ser uma contração em W_*, com constante de contração $c = 1/2$.

2.2.7 Proposição. O operador integral definido em (2.2.4) é uma contração em W_* .

Dem.

Dados $\omega_1,\omega_2 \in W_*$, por (2.2.3), (2.2.4), (2.2.17) e (2.2.20) obtemos

$$|\mathbb{P}(\omega) - \mathbb{P}(\omega)| \le \int_0^t |\phi(x-y,t-s)|\,|f(\omega_1) - f(\omega_2)|dyds \le$$

$$\le \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int \frac{|x-y|}{2\sqrt{t-s}} e^{-(x-y)^2/4(t-s)} |f(\omega_1)-f(w_2)|dyds \le$$

$$\le \frac{M_1}{\sqrt{2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int e^{-(x-y)^2/8(t-s)} |\omega_1-\omega_2|dyds \le$$

$$\le M_1 \|\omega_1 - \omega_2\|_{sup} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \le 2M_1\sqrt{T}\, \|\omega_1 - \omega_2\|_{sup} =$$

$$= (1/2)\|\omega_1 - \omega_2\|_{sup}$$

portanto

$$\|\mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2)\|_{sup} \le (1/2)\|\omega_1 - \omega_2\|_{sup}$$

analogamente obtemos

$$\|\mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2)\|_1 \le (1/2)\|\omega_1 - \omega_2\|_1$$

o que nos garante

$$\|\mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2)\|_W \le (1/2)\|\omega_1 - \omega_2\|_W \tag{2.2.21}$$

para quaisquer $\omega_1,\ \omega_2 \in W_*$

##

Agora podemos usar o teorema do ponto fixo para contrações , ou mais propriamente, o teorema 1.1.18, obtendo assim um único ponto fixo para $\mathbb{P}$ em W_* . Na verdade não existe outro ~~ponto fixo de~~ $\mathbb{P}$ em todo W , pois se $\omega_1,\omega_2 \in W$ são pontos fixos de $\mathbb{P}$, raciocinando como acima podemos obter para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$:

$$| \ \omega_1(x,t) - \omega_2(x,t) \ | \le \int_0^t \left|\phi(.,t-s)*\Big[f(\omega_1(.,s))-f(\omega_2(.,s)\Big]\right|ds$$

definindo,

$$K \equiv \sup \left\{ \ |f'(\alpha)| \ / \ |\alpha| \le \text{máx} \ (\ \|\omega_1\|_{sup},\|\omega_2\|_{sup} \ ) \right\}$$

segue pelo lema 1.2.1(i) e (2.2.17) que

$$|\omega_1(x,t)-\omega_1(x,t)| \le 2K \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \ \|\omega_1(.,s) \ -\omega_2(.,s)\|_{sup}ds$$

tomando T_* suficientemente pequeno tal que $2K\sqrt{T_*} = a < 1$, segue por (2.2.17) e pelo lema 1.2.1(i) que para $0 \le t \le T_1 \equiv \text{mín}(\ T,T_* \ )$ vale

$$|\omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)| \le a \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T_1]} |\omega_1 - \omega_2|$$

portanto $\omega_1 = \omega_2$ em $\mathbb{R}\times[0,T_1]$. Se $T_1 = T$ nada mais temos a demonstrar, no entanto se $T_1 < T$, seja $T_2 = \text{mín}(\ T,2T_1 \ )$, teremos para $T_1 \le t \le T_2$, que

$$|\omega_1(x,t)-\omega_2(x,t)| \le \int_0^t |\phi(.,t-s)*[f(\omega_1(.,s))-f(\omega_2(.,s))|ds$$

desde que $\omega_1(.,s)= \omega_2(.,s)$ em $0 \le t \le T_1$, segue que

$$|\omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)| \le 2K\int_{T_1}^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \ \|\omega_1(.,s) - \omega_2(.,s)\|_{sup}ds =$$

$$= 2K\int_0^{t-T_1} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \ \|\omega_1(.,T_1+s) - \omega_2(.,T_1+s)\|_{sup} \ ds$$

como para $T_1 \le t \le T_2$ tem-se $2K\sqrt{t-T_1} \le a < 1$, segue que

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[T_1,T_2]} |\omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)| \le 0$$

e portanto, $\omega_1 = \omega_2$ em $[0,T_2]$. Se $T_2 = T$, nada mais temos a demonstrar, do contrário, considerando que $[0,T]$ é compacto podemos utilizar o mesmo raciocínio para cobrir o intervalo $[0,T]$, em um número finito de passos.

Finalmente podemos dizer que a equação integral (2.2.1) possui uma única solução em W, que chamaremos de solução fraca do PVI 2.1.1 ou simplesmente solução fraca. Para que efetivamente possamos dizer que u acima estabelecida, é solução clássica do PVI 2.1.1, devemos verificar que u é diferenciável, é o faremos no próximo parágrafo.

II.3 PROPRIEDADES DA SOLUÇÃO LOCAL

Veremos neste parágrafo algumas propriedades importantes sobre a solução fraca . A primeira a ser estabelecida é a sua dependência contínua em relação a condição inicial :

2.3.1 Proposição. (dependência contínua)

Sejam $u_o, v_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, condições iniciais para o PVI (2.1.1) e u,v suas respectivas soluções fracas correspondentes, i.é,

$$u(x,t) = \varphi(.,t)*u_o + \int_0^t \phi(.,t-s)*f(u(.,s))ds \tag{2.3.1}$$

$$v(x,t) = \varphi(.,t)*v_o + \int_0^t \phi(.,t-s)*f(v(.,s))ds \tag{2.3.2}$$

então valem

$$\|u - v\|_{sup} \le 2\|u_o - v_o\|_{sup} \tag{2.3.3}$$

(2.3.4) $$\|u - v\|_1 \le 2\|u_o - v_o\|_{L^1}$$

e ainda para cada $0 < a < T$, fixado, teremos para $t \in [a,T]$, que

(2.3.5) $$\|u - v\|_{sup} \le \frac{2}{\sqrt{4\pi a}} \|u_o - v_o\|_{L^1}$$

Dem.

Pelo Lema 1.2.1 , (2.2.15), (2.2.17), (2.2.20), (2.3.1) e (2.3.2) obtemos as seguintes desigualdades :

$$|u - v| \le |\varphi(.,t)*(u_o - v_o)| + \int_0^t |\phi(.,t-s)*[f(u(.,s)) - f(v(.,s))]|ds \le$$

$$\le \int \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} |u_o - v_o| dy +$$

$$+ \int_0^t \int |\phi(x-y,t-s)| |f(u(.,s)) - f(v(.,s))| dyds \le \|u_o - v_o\|_{sup} +$$

$$+ M_1 \int_0^t \int \frac{1}{t-s} \frac{|x-y|}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-(x-y)^2/4(t-s)} |u(y,s) - v(y,s)| dyds \le$$

$$\le \|u_o - v_o\|_{sup} + 2M_1\sqrt{T}\|u - v\|_{sup} =$$

$$= \|u_o - v_o\|_{sup} + 1/2\|u - v\|_{sup}$$

portanto

$$\|u - v\|_{sup} \le \|u_o - v_o\|_{sup} + 1/2\|u - v\|_{sup}$$

donde se conclui (2.3.3).

Temos ainda que

$$\int |u - v| dx \le \iint \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} |u_o - v_o| dydx \quad +$$

$$+ \int \int_0^t \int |\phi(x-y,t-s)|\,|f(u(y,s)) - f(v(y,s))|\,dydsdx \le$$

$$\le \|u_o - v_o\|_{L^1} + \sqrt{2}\,M_1 \|u - v\|_1 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\,ds \le$$

$$\le \|u_o - v_o\|_{L^1} + 2\|u - v\|_1$$

donde se conclui (2.3.4). Finalmente, observando que

$$|\varphi(.,t)*(u_o - v_o)| \le |\varphi(x,t)|\,\|u_o - v_o\|_{L^1} \le \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \|u_o - v_o\|_{L^1}$$

desde que t varie em $[a,T]$, para $0 < a < T$, fixo porém arbitrário. Como para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$,

$$|u(x,t) - v(x,t)| \le |\varphi(.,t)*(u_o - v_o)| + (1/2)\|u - v\|_{sup}$$

segue que (2.3.5) vale.

##

A proposição acima indica que quanto " mais próximas " estiverem as condições iniciais em L^1, " mais próximas " estarão as soluções fracas correspondentes em W.

2.3.2 Proposição. Seja $u \in W_*$ a solução fraca correspondente a condição inicial $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, então para todo $t \in]0,T]$.

(2.3.6) $$u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

sendo o limite uniforme em $[a,T]$, $0 < a < T$, fixo, porém arbitrário.

Dem.

Usaremos o teorema da convergência dominada. Com efeito, sendo $u_o \in L^1$ e

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x-y)^2/4t} \in S ,$$

segue que para todo $t \in [a,T]$, $a > 0$ a função

$$f_x(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x-y)^2/4t} u_o(y)$$

é tal que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_x(y) = 0 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}$$

e ainda

$$|f_x(y)| \leq \frac{|u_o(y)|}{\sqrt{4\pi a}}$$

portanto,

(i) $$\lim_{x \to \pm\infty} \int |f_x(y)|dy = 0$$

agora considere, para cada $y \in \mathbb{R}$ e cada $t \in [0,T]$, fixados :

$$g_x(y,s) \equiv \frac{x - y}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\, \frac{1}{2(t-s)}\, e^{-(x-y)^2/4(t-s)}\, f(u(y,s))$$

por (2.2.16) e (2.2.17) é fácil concluir que

(ii) $$|g_x(y,s)| \leq \frac{M_1}{2\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{t-s}\, e^{-(x-y)^2/8(t-s)} |u(y,s)|$$

donde, por (2.2.14), obtemos que para todo $y \in \mathbb{R}$ e $0 \leq s < t$, vale

(iii) $$g_x(y,s) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

ainda, para cada s fixado, $0 < s < t$

(iv) $$\int g_x(y,s)dy \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

com efeito, novamente (2.2.16) e (2.2.17) permite efetuar as seguintes desigualdades :

$$|g_x(y,s)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\, \frac{|x-y|}{2(t-s)}\, e^{-(x-y)^2/4(t-s)} |f(u(y,s))| \leq$$

$$\leq \quad M_1 \frac{1}{\sqrt{8\pi(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} e^{-(x-y)^2/8(t-s)} |u(y,s)| \leq M_1 \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{|u(y,s)|}{t-s}$$

mas, por (2.2.11) podemos afirmar que

$$M_1 \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{|u(\,.\,,s)|}{t-s} \in L^1(\mathbb{R})$$

para cada s fixo, $0 \leq s < t$. Portanto, pelo teorema da convergência dominada, juntamente com (iii) teremos (iv).
Agora mostraremos que

$$(\text{ v }) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \int_0^t \left[\int g_x(y,s)dy\right]ds = \int_0^t \left[\lim_{x\to\pm\infty} \int g_x(y,s)dy\right]ds = 0$$

com efeito, novamente por (2.2.16) e (2.2.17) obtemos

$$\left|\int g_x(y,s)dy\right| \leq M_1 \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int \frac{|x-y|}{2\sqrt{t-s}} e^{-(x-y)^2/8(t-s)} |u(y,s)|dy$$

$$\leq \qquad M_1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{8\pi(t-s)}} \int e^{-(x-y)^2/4(t-s)} |u(y,s)|dy$$

o lema 1.2.1, juntamente com (2.2.14) permite concluir que

$$\left| \int g_x(y,s)dy \right| \leq 2M_1 \|u_0\|_{sup} \frac{1}{\sqrt{t-s}}$$

é fácil ver que a função definida em $0 \leq s < t$, que aparece no lado direito da última desigualdade é $L^1([0,t])$, para todo $t \in [a,T]$, portanto o teorema da convergência dominada garantirá (v).

O teorema de fubini (ver por exemplo [14]), permite concluir que

$$(\text{ vi }) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \int_0^t \int g_x(y,s)dsdy = 0$$

Por (2.3.1), (i) e (vi) obtemos o desejado.

##

No que segue, mostraremos que bem mais é verdadeiro, para $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, tem-se,

(2.3.7) $$u \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times]0,T])$$

e para cada $m,n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, fixados,o que é suficiente para que u seja solução, no sentido clássico, do PVI (2.1.1), e ainda

(2.3.8) $$D_t^n D_x^m u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

o limite sendo uniforme em $[a,T]$, para $0 < a < T$, fixo.

Para obter (2.3.7) e (2.3.8), consideremos inicialmente o caso de a condição inicial $v_o \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$, isto é, v_o é infinitamente diferenciável e de suporte compacto, vale notar que $C_o^{\infty}(\mathbb{R})$ é subespaço do espaço de schwartz (ver por exemplo [5]). Sendo v a solução fraca correspondente de v_o, dada em (2.3.2), podemos inicialmente observar que para

(2.3.9) $$v_1(x,t) = \varphi(.,t)*v_o$$

i.é,

$$v_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int e^{-(x-y)^2/4t}v_o(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\xi^2} v_o(x + 2\sqrt{t}\,\xi)d\xi$$

teremos,

$$|D_x^j v_1(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\xi^2} |D_x^j v_o(x + 2\sqrt{t}\,\xi)|d\xi \leq$$

$$\leq \quad \|D_x^j v_o(x + 2\sqrt{t}\,\xi)\|_{sup}$$

sendo $v_o \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$, obtermos, para cada j natural e $t \in [0,T]$,

(2.3.10) $$\|D_x^j v_1\|_{sup} \leq \overline{K}_j$$

onde $\overline{K}_j$ é uma constante real positiva, que dependerá de v_o e suas derivadas.

Considere agora a seqüência $v_1, v_2, v_3, \ldots$ onde v_1 é dado em (2.3.9) e

(2.3.11) $$v_{r+1} = \mathbb{P}(v_r) \qquad (r = 1,2,3,\ldots)$$

como $v_r \in W_*$ para todo r, segue por (2.2.14) :

(2.3.12) $$\|v_r\|_{sup} \leq K_0$$

para todo r natural, onde K_0 é uma constante que depende apenas de $\|v_0\|_{sup}$. Por (2.3.11) obtemos :

(2.3.13) $$v_{r+1}(x,t) = v_1(x,t) + \int_0^t \int \phi(y,t-s)f(v_r(x-y,s))dyds$$

que derivando em relação a x,

$$D_x v_{r+1}(x,t) = D_x v_1(x,t) + \int_0^t \int \phi(y,t-s)f'(v_r(x-y,s))D_x v_r(x-y,s)dyds$$

i.é,

(2.3.14) $$D_x v_{r+1}(x,t) = D_x v_1(x,t) +$$

$$+ \int_0^t \int \phi(x-y,t-s)f'(v_r(y,s))D_x v_r(y,s)dyds$$

Considerando como hipótese de indução que :

(2.3.15) $$\|D_x v_r\|_{sup} \leq K_1$$

para $K_1 \geq 2\overline{K}_1$, segue por (2.3.14) que

$$|D_x v_{r+1}(x,t)| \leq |D_x v_1(x,t)| +$$

$$+ \int_0^t \int |\phi(x-y,t-s)|\,|f'(v_r(y,s))|\,|D_x v_r(y,s)|dyds$$

e por (2.2.15),(2.2.17) e (2.3.15),

$$|D_x v_{r+1}(x,t)| \leq (1/2)K_1 + 2M_1\sqrt{T}\,K_1$$

como $T \leq 1/2M_1^2$ obtemos, para todo k natural

$$\|D_x v_{r+1}(x,t)\|_{sup} \leq K_1$$

donde se conclui que (2.3.15) vale para todo k natural.

De modo análogo, para cada j natural, podemos encontrar $K_j > 0$ tal que

$$\|D_x^j v_r\|_{sup} \leq K_j \tag{2.3.16}$$

O próximo resultado nos dá uma alternativa de como limitar as derivadas de v_r em relação a variável t, escrevendo-as em função de derivadas em x.

2.3.3 Proposição. Seja $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ definida em (2.3.11). Então

$$D_t v_1 = D_x^2 v_1 \tag{2.3.17}$$

e ainda, para r = 1,2,3,..., vale :

$$D_t v_{r+1}(x,t) = D_x^2 v_{r+1}(x,t) - D_x[f(v_r(x.,t))] \tag{2.3.18}$$

Dem.

Observemos que para

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$$

vale

$$D_t\,\varphi(x,t) = D_x^2\varphi(x,t) \tag{i}$$

e portanto,

$$D_t[\varphi(.,t)*v_o] = D_t\,\varphi(.,t)*v_o = D_x^2\varphi(.,t)*v_o = D_x^2[\varphi(.,t)*v_o]$$

do qual podemos concluir (2.3.17). Para mostrar (2.3.18) devemos derivar (2.3.13) em relação a t, obtendo:

$$(\,ii\,)\qquad D_t v_{r+1}(x,t) = D_t v_1 + \int_0^t D_t[\phi(.,t-s)*f(v_r(.,s))]ds \; +$$
$$+ \lim_{\lambda\to o^+} [\phi(.,\lambda)*f(v_r(.,t))]$$

agora, observando que

$$(\,iii\,)\qquad \phi(x,t) = - D_x\varphi(x,t)$$

de modo que ,

$$(\,iv\,)\qquad \lim_{\lambda\to o^+}[\phi(.,\lambda)*f(v_r(.,t))] = - \lim_{\lambda\to o^+}[\varphi(.,\lambda)* D_x f(v_r(.,t)] =$$
$$= - D_x f(v_r(.,t))$$

onde está última igualdade provém do exemplo 1.2.2, ainda por (iii) podemos obter

$$(\,v\,)\qquad \int_0^t D_t[\phi(.,t-s)*f(v_r(.,s))]ds = - \int_0^t D_t[\varphi(.,t-s)*D_x f(v_r(.,s)]ds$$
$$= - \int_0^t D_x^2\varphi(.,t-s)*D_x f(v_r(.,s)ds = - D_x^2\left[\int_0^t \varphi(.,t-s)*D_x f(v_r(.,s)ds\right] =$$
$$= D_x^2\left[v_{r+1}(x,t) - v_1(x,t)\right]$$

portanto substituindo (iv) e (v) em (ii) e levando em conta (2.3.17) obtemos (2.3.18).

##

Por (2.3.10) e (2.3.17) segue imediato que para cada m,n $\in$ $\mathbb{N}$, existem constantes $\overline{K}_{m,n}$ não-negativas, tais que,

$$(2.3.19)\qquad \|D_t^n D_x^m v_1\|_{sup} \le K_{m,n}$$

Como $f \in C^\infty$, usando indução sobre j, é fácil constatar que existem constantes não-negativas C_j, tais que

(2.3.20) $$\|D_x^j f(v_r)\|_{sup} \le C_j \qquad (j,r \in \mathbb{N})$$

e portanto por (2.3.16), (2.3.18) e (2.3.20), existem constantes não-negativas $K_{m,n}$ tais que

(2.3.21) $$\|D_t^n D_x^m v_r\| \le K_{m,n} \qquad (m,n \in \mathbb{N})$$

Vamos utilizar o teorema de Ascoli-Arzelá ou mais precisamente o teorema 1.1.19 para provar que $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência cujas as derivadas formam seqüências que convergem uniformemente para as derivadas de v, v solução fraca correspondente a condição inicial $v_o \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$, ganhando com isto, que $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times[0,T])$.

2.3.4 Proposição. Para cada n natural fixado a seqüência $(D_x^n v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ onde v_r está definida em (2.3.11) é eqüicontinua e pontualmente limitada.

Dem.

Desde que $f \in C^{\infty}$, decorre do teorema do valor médio para derivadas , que para cada par de naturais n,r fixados existe um elemento $c_{n,r} \in \mathbb{R}\times[0,T]$ tal que

$$|D_x^n v_r(x,t) - D_x^n v_r(\xi,\tau)| \le |D_x^{n+1} v_r(c_{n,r})(x-\xi) + D_t D_x^n v_r(c_{n,r})(t-\tau)|$$

daí, por (2.3.16), (2.3.19) e (2.3.21) segue que

$$|v_r(x,t) - v_r(\xi,\tau)| \le J_n \|(x,t)-(\xi,\tau)\|$$

onde J_n depende da magnitudes de $\|D_x^{n+1} v_r\|_{sup}$ e $\|D_t D_x^n v_r\|_{sup}$ e norma da última desigualdade é a norma usual induzida do $\mathbb{R}^2$. Com a desigualdade acima fica fácil estabelecer a eqüicontinuidade de $(D_x^n v_r)$. Para ver que para cada $n \in \mathbb{N}$, fixo , $(D_x^n v_r)$ é pontualmente limitada basta observar (2.3.16). (na verdade, (2.3.16) afirma que $(D_x^n v_r)$ é uniformemente limitada).

##

A Proposição 2.3.4, permite o uso do Teorema de Ascoli-arzelá no que implica na existência de uma subsequência de (v_r) que converge uniformemente para v. Simplificando a notação, denotaremos por $(v^1_r)_{r\in\mathbb{N}}$ esta subseqüência.

Novamente pela proposição 2.3.4 , podemos aplicar o teorema de ascoli-arzelá para a seqüência $(D_x v^1_r)_{r\in\mathbb{N}}$ obtendo uma subseqüência que converge uniformemente para $D_x v$, denotaremos por $(D_x v^2_r)_{r\in\mathbb{N}}$ esta nova seqüência. A expressão em (2.3.16) nos permite continuar com o mesmo raciocínio, obtendo desta forma, no j-éssimo passo, uma subseqüência $(D^j_x v^{j+1}_r)_r$ que converge para $D^j_x v$.

Lançando mão da técnica da diagonal de Cantor

$$
\begin{array}{ccccccc}
v^1_1, & v^1_2, & v^1_3, & v^1_4, & v^1_5, & v^1, & \ldots \\
D_x v^2_1, & D_x v^2_2, & D_x v^2_3, & D_x v^2_4, & D_x v^2_5, & D_x v^2_6, & \ldots \\
D^2_x v^3_1, & D^2_x v^3_2, & D^2_x v^3_3, & D^2_x v^3_4, & D^2_x v^3_5, & D^2_x v^3_6, & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots, D^j_x v^{j+1}_{j-2}, & D^j_x v^{j+1}_{j-1}, & D^j_x v^{j+1}_{j}, & D^j_x v^{j+1}_{j+1}, & D^j_x v^{j+1}_{j+2}, & \ldots &
\end{array}
$$

A subseqüência $(v^r_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ é tal que

(2.3.22) $$D^j_x v^r_r \longrightarrow D^j_x v \quad \text{ao } r \longrightarrow \infty$$

em cada parte compacta de $\mathbb{R}\times]0,T]$, para todo j natural, logo para $v_o \in C^\infty_o(\mathbb{R})$, vale

(2.3.23) $$v \in C^\infty(\mathbb{R}\times]0,T])$$

Observemos ainda que de (2.3.21) podemos obter,

$$-K_{m,n} \le D^n_t D^m_x v^r_r \le K_{m,n}$$

para todo r natural, fazendo $r \longrightarrow \infty$,obtemos

$$-K_{m,n} \le D^n_t D^m_x v \le K_{m,n}$$

i.é,

(2.3.24) $$|D^n_t D^m_x v(x,t)| \le K_{m,n}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$. temos ainda que, v satisfaz

$$(2.3.25)\quad \begin{cases} v_t + [f(v)]_x = v_{xx} & \text{(A)} \\ v(x,0) = v_o(x) & \text{(B)} \end{cases}$$

com efeito, como

$$v(x,t) = \varphi(.,t)*v_o + \int_0^t \phi(.,t-s)*f(v(.,s))ds$$

e

$$\varphi(.,t)*v_o$$

é solução da equação homogenea do calor, resta provar que,

$$K(x,t) = \int_0^t \phi(.,t-s)*f(v(.,s))ds$$

satisfaz,

$$K_t - K_{xx} = - D_x[f(v)]$$

mas, observando que

$$D_t\phi(\xi,\tau) = D_x^2\phi(\xi,\tau)$$

e que,

$$\phi(\xi,\tau) = - D_x\varphi(\xi,\tau)$$

segue que,

$$K_t(x,t) = \int_0^t D_t\phi(.,t-s)*f(v(.,s))ds + \lim_{s\to t^-} \phi(.,t-s)*f(v(.,t)) =$$

$$K_{xx}(x,t) - \lim_{s\to t^-}\varphi(.,t-s)*D_x[f(v(x,t))]$$

segue pelo exemplo 1.2.2, que

$$K_t = K_{xx} - D_x[f(v)]$$

Para verificar (2.3.25).B, i.é,

$$\|v(.,t) - v_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad t \longrightarrow 0$$

basta verificar que,

$$\|K(.,t)\|_{L^1} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } t \longrightarrow 0$$

mas por (2.2.13),(2.2.16), (2.2.17), tem-se, para todo $t \in]0,T]$ que,

$$\int |K(x,t)|\,dx \le 4M_1 \|v_o\|_{L^1}\sqrt{t}$$

donde se conclui o desejado. Com isto acabamos de demonstrar :

2.3.5 Proposição. Sejam $v_o \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ e v a solução fraca do PVI,

$$\begin{cases} v_t + D_x[f(v)] = v_{xx} \\ v(x,0) = v_o(x) \end{cases}$$

onde $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, para $T = 1/16M_1^2$. Então

(2.3.26) $$v \in C^\infty(\mathbb{R}\times]0,T])$$

ainda, existem constantes $K_{n,m} \ge 0$, tais que

(2.3.27) $$|D_t^n D_x^m v(x,t)| \le K_{n,m}$$

e portanto v é solução de (2.3.25) no sentido clássico do problema .

##

2.3.6 Proposição. Seja v a solução de (2.3.25) correspondente a condição inicial $v_o \in C_o^\infty$. Então para todo $n,m \in \mathbb{N}$

(2.3.28) $$D_t^n D_x^m v(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente em $[a,T]$, $0 < a < T$, fixado.

Dem.

Sendo

$$v(x,t) = v_1(x,t) + \int_0^t \phi(.,t-s) * f(v(x,t))\,ds$$

e desde que $v_o \in C_o^\infty$, é fácil ver que para v_1, definido em (2.3.9), vale :

(2.3.29) $$D_t^n D_x^m v_1(x,t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente, para todo $n,m \in \mathbb{N}$ e $t \in [a,T]$, $0 < a < T$.

Agora, por $f \in C^\infty$, $f(0) = 0$,(2.2.11), (2.2.13) e (2.3.27), podemos afirmar que :

(i) Para todo $j \in \mathbb{N}$, existe constante $C_j \geq 0$, tal que

(2.3.30) $$|D_x^j f(v(x,t))| \leq C_j \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T])$$

(ii) Para cada j natural, e cada $t \in [0,T]$, $0 < a < T$,

(2.3.31) $$D_x^j f(v(.,t)) \in L^1(\mathbb{R})$$

Ainda, definindo para cada $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$f_{m,x}(y,t) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,\frac{x-y}{2t}\, e^{-(x-y)^2/4t} D_x^m f(v(y,t-s))$$

assim, por (2.2.17) e (2.3.30) teremos

$$|\, f_{x,m}(y,t)\, | \leq \frac{C_m}{\sqrt{8\pi}}\,\frac{1}{t}\, e^{-(x-y)^2/8t}$$

donde

$$f_{x,m}(y,t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente para todo $m \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}$ e $t \in [a,T]$, $0 < a < T$.

Como

$$|\, f_{x,m}(y,t)\, | \leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}\ t}\, |\, D_x^m f(v(.,t))|$$

então por (2.3.30) , e pelo teorema da convergência dominada segue que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int f_{x,m}(y,t)dy = 0$$

Agora pelo lema 1.2.1, (2.2.17) e (2.3.30) decorre que

$$|\int f_{x,m}(y,t)dy\,| \leq \frac{C_m}{\sqrt{t}} \in L^1([a,T])$$

para todo $0 < a < T$. Assim novamente pelo teorema da convergência dominada, teremos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^t \int f_{x,m}(y,s)dyds = 0 \tag{2.3.32}$$

por (2.3.29) e (2.3.32) teremos que

$$D_x^m v(x,t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

Expressando as derivadas de v em relação a t, via (2.3.26).A, em derivadas de x, podemos concluir (2.3.28).

##

Para a condição inicial $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, a idéia é tomar uma seqüência de condições iniciais $v_o^{(k)} \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\| v_o^{(k)} - u_o \|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty \tag{2.3.33}$$

$$\| v_o^{(k)} \|_{sup} \le \| u_o \|_{sup} \tag{2.3.34}$$

2.3.7 Proposição. C_o^∞ é denso em L^1. E ainda, é possível escolher para cada $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, uma seqüência $(v_o^{(k)})$ em C_o^∞ que satisfaça (2.3.33) e (2.3.34).

Dem.

Escolha $h \in C_o^\infty$ tal que $h(x) \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\int h(x)dx = 1$ e defina para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$h_k(x) \equiv kh(kx) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Agora observemos que para cada $\varepsilon > 0$ dado , sendo $u_o \in L^1$, pelo teorema da convergência dominada não é difícil mostrar que existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| \chi_{[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]}u_o - u_o \|_{L^1} < \varepsilon/2$$

onde,

$$\chi_{[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]}(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-n_\varepsilon, n_\varepsilon] \\ 1 & \text{se } x \notin [-n_\varepsilon, n_\varepsilon] \end{cases}$$

Como o conjunto de todas as funções de suporte compacto de L^1 formam um conjunto compacto em L^1 (ver por exemplo [3]), segue que para este n_ε fixado, existe um $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|h_{m_\varepsilon} * \chi_{[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]}u_o - u_o\|_{L^1} < \varepsilon/2$$

daí,

$$\|h_{m_\varepsilon} * \chi_{[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]}u_o - u_o\|_{L^1} < \varepsilon$$

Assim para cada natural $k \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon = 1/k$ teremos que

$$v_o^{(k)} \equiv h_{m_\varepsilon} * \chi_{[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]}u_o$$

pertence a C_o^∞ e satisfaz (2.3.33) ,e ainda como

$$|v_o^{(k)}(x)| \le \|u_o\|_{sup}\int |h_{m_\varepsilon}(x)|dx = \|u_o\|_{sup}$$

segue (2.3.34).

##

Verificaremos (2.3.7) a partir de estimativas como (2.3.24) para cada $v^{(k)}$, $v^{(k)}$ solução correspondente á condição inicial $v_o^{(k)}$, observemos que para cada k natural, encontramos uma solução $v^{(k)}$ definida em $\mathbb{R}\times[0,T^{(k)}]$, como $T^{(k)}$ é inversamente proporcional a magnitude de $\|v_o^{(k)}\|_{sup}$ (observem (2.2.15) e (2.2.20)) segue por (2.3.34) que para todo k natural, $0 < T \le T^{(k)}$, e sendo assim todas as soluções $v^{(k)}$ estão definidas em $\mathbb{R}\times[0,T]$ pelo menos. Entretanto as constantes K_j e $K_{m,n}$ estimadas em (2.3.16) e (2.3.21) respectivamente não dependem apenas de $\|v_o\|_{sup}$ mas também da magnitude das derivadas de v_o , e portanto não podemos garantir que $K_{m,n}$ definida em (2.3.21) seja a mesma para todas as $v^{(k)}$, contudo, para cada a, $0 < a < T$, fixado, é possível mostrar que

(2.3.35) $$\left| D_t^n D_x^m v^{(k)}(x,t) \right| \leq L_{m,n}(a)$$

para todo k,m,n natural e todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, onde as constantes $L_{m,n}(a)$ dependem somente de m,n, $a > 0$ e $\|v_o^{(k)}\|_{sup}$ e conseqüentemente por (2.3.35), teremos $(D_t^n D_x^m v^{(k)}(x,t))_{k\in\mathbb{N}}$ uniformemente limitada para cada m,n e $a > 0$ fixados.

A proposição 2.3.9 juntamente com a desigualdade de Sobolev elementar apresentados a seguir serão suficientes para justificar (2.3.35) , antes porém demonstraremos um lema auxiliar :

2.3.8 Lema Seja $w:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \in L^1 \cap \mathbb{B}$, então vale

$$\| w \|_{L^2}^2 \leq \| w \|_{sup} \| w \|_{L^1}$$

Dem.

com efeito,

$$\| w \|_{L^2}^2 = \int |w(x)|^2 dx \leq \| w \|_{sup} \int |w(x)| dx = \| w \|_{sup} \| w \|_{L^1}.$$

##

2.3.9. Proposição. Seja $v_o \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ e v a solução de (2.3.25). Então para cada $t \in [0,T]$ e cada $j \in \mathbb{N}$ fixados, valem :

(2.3.36) $$t^j \|D_t^j v(.,t)\|_{L^2}^2 \leq \bar{L}_j$$

(2.3.37) $$\int_0^t \tau^j \|D_\tau^{j+1} v(.,\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau \leq \bar{L}_j$$

onde $\bar{L}_j$ é uma constante que depende somente de j, $\|v_o\|_{L^1}$ e $\|v_o\|_{sup}$

Dem.

Consideremos o produto interno definido no espaço L^2, i.é,

$$\langle,\rangle : L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int \omega_1(x)\bar{\omega}_2(x) \, dx$$

Para cada $t \in [0,T]$ fixado, temos

$$\langle v, D_x[D_x v - f(v)]\rangle = \int v(x,t) D_x[D_x v(x,t) - f(v(x,t))]dx$$

$$= v(.,t)[D_x v(.,t) - f(v(.,t))]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \langle D_x v - f(v), D_x v\rangle$$

como $f \in C^\infty$, $f(0) = 0$, então por (2.3.28) teremos

$$\langle v, D_x[D_x v - f(v)]\rangle = - \langle D_x v, D_x v\rangle + \langle D_x v, f(v)\rangle$$

mas

$$\langle D_x v, f(v)\rangle = \int f(v(x,t)) D_x v(x,t) dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_{v(b,t)}^{v(a,t)} f(\xi)d\xi = 0$$

daí, podemos concluir que

$$\langle v, D_x[D_x v - f(v)]\rangle = - \langle D_x v, D_x v\rangle$$

assim de (2.3.25).A teremos :

$$D_t\Big[\langle v(.,t), v(.,t)\rangle\Big] = 2\langle v, v_t\rangle =$$

$$= 2\langle v, D_x[D_x v - f(v)]\rangle = = - 2\langle D_x v, D_x v\rangle,$$

i.é,

$$D_t\Big[\|v(.,t)\|^2_{L^2}\Big] = - 2\|D_x v(x,t)\|^2_{L^2}$$

que integrando de 0 à t, e observando (2.3.25).B obtemos

$$\| v(.,t) \|^2_{L^2} + 2 \int_0^t \|D_x v(.,\tau)\|^2_{L^2} d\tau = \|v_o\|^2_{L^2}$$

em particular,

(2.3.38)
$$\|v(.,t)\|^2_{L^2} \le \|v_o\|^2_{L^2}$$

(2.3.39)
$$\int_0^t \|D_x v(.,\tau)\|^2_{L^2} d\tau \le \|v_o\|^2_{L^2}$$

analogamente, usando (2.3.25).A :

$$D_t\Big[t\langle D_x v, D_x v\rangle\Big] = \langle D_x v, D_x v\rangle + 2t\langle D_x v, D_t D_x v\rangle = \langle D_x v, D_x v\rangle +$$

$$+ 2t\langle D_x v, D_x D_t v\rangle = \langle D_x v, D_x v\rangle + 2t\langle D_x v, D_x\Big[D^2_x v - f'(v) D_x v\Big]\rangle$$

como, por integração por partes e (2.3.28) tem-se

$$\langle D_x v, D_x\left[D_x^2 v - f'(v)D_x v\right]\rangle = -\langle D_x^2 v, D_x^2 v\rangle + \langle D_x^2 v, f'(v)D_x v\rangle$$

segue que

$$D_t[t\langle D_x v, D_x v\rangle] = -2t\langle D_x^2 v, D_x^2 v\rangle + \langle D_x v, D_x v\rangle +$$

$$+ 2t\langle D_x^2 v, f'(v)D_x v\rangle \le -t\langle D_x^2 v, D_x^2 v\rangle + (1+TM_1^2)\langle D_x v, D_x v\rangle$$

sendo $T = 1/16M_1^2$, segue que

$$D_t[t\langle D_x v, D_x v\rangle] \le -t\langle D_x^2 v, D_x^2 v\rangle + (1+TM_1^2)\langle D_x v, D_x v\rangle$$

integrando de 0 a t, obtemos

$$t\|D_x v(.,t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \tau\|D_x^2 v(.,t)\|_{L^2}^2\, d\tau \le (1+TM_1^2)\int_0^t \|D_x v(.,\tau)\|_{L^2}^2\, d\tau$$

segue de (2.3.39) e do fato de que $T = 1/16M_1^2$ que para cada $t \in$ $\in [0,T]$, vale

$$t\|D_x v(.,t)\|_{L^2}^2 \le (1+TM_1^2)\int_0^t \|D_x v(.,\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \le (17/16)\|v_0\|_{L^2}^2$$

e

$$\int_0^t \tau\|D_x^2 v(.,t)\|_{L^2}^2\, d\tau \le (17/16)\|v_0\|_{L^2}^2$$

e, pelo lema 2.3.8, podemos concluir que

$$t\|D_x v(.,t)\|_{L^2}^2 \le \bar{L}_1 \tag{2.3.40}$$

$$\int_0^t \tau\|D_x v(.,t)\|_{L^2}^2 \le \bar{L}_1 \tag{2.3.41}$$

onde $\bar{L}_1$ é uma constante que depende somente das magnitudes de $\|v_0\|_{L^1}$ e $\|v_0\|_{sup}$. Usando indução, obtemos sem muita dificuldade, (2.3.36) e (2.3.37).

##

O Lema a seguir servirá para majorar a magnitude de $\|D_x^j v(.,t)\|_{sup}$ por constantes que independem do $t \in [a,T]$, mas somente de cada $a > 0$ fixado, cada j natural e das magnitudes de $\|v_o\|_{L^1}$ e $\|v_o\|_{sup}$.

2.3.10 Lema (Desigualdade de Sobolev elementar). Seja $w:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que w e $w' \in L^2 \cap \mathbb{B}$, então vale

$$\| \; w \; \|^2_{sup} \leq 2\|w\|_{L^2}\|w'\|_{L^2}$$

Dem.

Definindo, para cada $x \in \mathbb{R}$

$$w_x(\xi) = \begin{cases} w(\xi) & \text{se } -\infty \leq \xi \leq x \\ 0 & \text{se } \xi > x \end{cases}$$

e utilizando novamente o produto interno de $L^2(\mathbb{R})$,obtemos

$$[w(x)]^2 \leq \int_{-\infty}^{x} D_\xi([w(\xi)]^2)d\xi = 2\int_{-\infty}^{x} w(\xi)w'(\xi)d\xi = 2\langle w_x(\xi), D_\xi w_x(\xi)\rangle$$

segue pela desigualdade de cauchy-schwartz que

$$[w(x)]^2 \leq 2 \; \|w\|_{L^2} \; \|w'\|_{L^2}$$

donde se conclui o desejado.

##

Combinando a desigualdade de sobolev elementar e (2.3.40) para cada $0 < a < T$, fixado, teremos

$$\|D_x^j v(.,t)\|^2_{sup} \leq 2\|D_x^j v(.,t)\|_{L^2} \; \|D_x^{j+1} v(.,t)\|_{L^2} \leq 2\frac{\overline{L}_j}{t^j}\,\frac{\overline{L}_{j+1}}{t^{j+1}}$$

para todo $t \in [a,t]$, donde se conclui que

$$\|D_x^j v(.,t)\|_{sup} \le \left(2\frac{\bar{L}_j L_{j+1}}{a^{2j+1}}\right)^{1/2} \equiv L_j(a).$$

observemos que $L_j(a)$ assim definido depende somente de j, $\|v_o\|_{L^1}$, $\|v_o\|_{sup}$ e $a > 0$ fixado.

Agora por (2.3.25).A podemos expressar as derivadas de v em relação a variável t, em termos de derivadas de x e concluir (2.3.35) .

Assim, se tomarmos uma seqüência de condições iniciais $v_o^{(k)} \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$ e sendo $v^{(k)}$ as soluções correspondentes tem-se por (2.3.35) que

$$\|D_t^n D_x^m v^{(k)}\|_{sup} \le L_{m,n}(a) \tag{2.3.42}$$

para todo k natural e $a > 0$ fixo porém arbitrário.

2.3.11 Proposição. Sejam u solução fraca correspondente a condição inicial $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$ e $(v^{(k)})$ uma seqüência formada por soluções correspondentes as condições iniciais $(v_o^{(k)})$, $v_o^{(k)} \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$ satisfazendo (2.3.33) e (2.3.34) . Então, para cada $m,n \in \mathbb{N}$, fixados,

(i) $$D_t^n D_x^m v^{(k)}(x,t) \longrightarrow D_t^n D_x^m u(x,t) \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty$$

uniformemente em cada parte compacta de $\mathbb{R}\times[0,T]$. Consequentemente,

(ii) $$u \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times]0,T])$$

ainda, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, fixados.

(iii) $$\|D_t^n D_x^m u\|_{sup} \le L_{m,n}(a)$$

onde t varia em $[a,T]$, $0 < a < T$ fixado. Logo u é solução no sentido clássico do PVI (2.1.1).

Dem.

Pelo teorema da dependência contínua, i.é, proposição 2.3.1 teremos

$$\|v^{(k)} - u\|_1 \le 2\|v_o^{(k)} - u_o\|_{L^1}$$

e

$$\|v^{(k)} - u\|_{sup} \leq \frac{2}{\sqrt{4\pi a}} \|v_o^{(k)} - u_o\|_{L^1}$$

donde por (2.3.33) obtemos

$$\|v^{(k)} - u\|_1 \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty$$

$$\|v^{(k)} - u\|_{sup} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty$$

portanto,

$$\|v^{(k)} - u\|_W \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty$$

Por (2.3.42) não é difícil constatar que para n, m naturais fixados a seqüência $(D_t^n D_x^m v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ é eqüicontínua e pontualmente limitada, portanto aplicando em $(v^{(k)})$ o mesmo raciocínio aplicado na demonstração da proposição 11, podemos concluir (*i*) e (*ii*).

Para ver que $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$, satisfazendo,

$$u(x,t) = \mathbb{P}(u)(x,t)$$

i.é,

$$u(x,t) = \varphi(.,t)*u_o + \int_0^t \phi(.,t-s)*f(u(.,s))ds$$

é solução do PVI (2.1.1), no sentido clássico, basta proceder como na proposição 2.3.5, observando que as únicas propriedades exigidas para que

$$K(.,t) \equiv \int_0^t \phi(.,t-s)*f(u(.,s)ds$$

satisfaça,

$$K_t - K_{xx} = - D_x[\ f(K)\ ]$$

é $u \in C^2(\mathbb{R}\times]0,T])$.

Portanto u é solução clássica do PVI (2.1.1). Além disso, (2.3.42) , fornece para cada par de naturais m,n e $(x,t) \in \mathbb{R}\times[a,T]$, $0 < a < T$,fixado que

$$- L_{m,n}(a) \leq D_t^n D_x^m v^{(k)}(x,t) \leq L_{m,n}(a)$$

fazendo $k \longrightarrow \infty$, obtemos

$$- L_{m,n}(a) \leq D_t^n D_x^m u(x,t) \leq L_{m,n}(a)$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[a,T]$, $a > 0$ e m,n naturais, logo (*iii*) vale.

##

Ainda temos que provar (2.3.8) ,isto é , devemos mostrar que todas as derivadas da solução de (2.1.1) tendem uniformemente para zero quando x tende para $\pm\infty$,para todo $t \in [a,T]$, $a > 0$, o que expressa uma boa regularidade de nossa solução.

2.3.12 Proposição. Seja u a solução de (2.1.1),correspondente a condição inicial $u_0 \in L^1 \cap \mathbb{B}$. Então, para todo $m,n \in \mathbb{N}$, vale :

(2.3.43) $$D_t^n D_x^m u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente em $[a,T]$, onde $0 < a < T$, é arbitráriamente fixado.

Dem.

A proposição 2.3.2 garante

$$u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente para todo $t \in [a,T]$,$0 < a < T$, fixado. Agora observando que

$$u(x,t) = v_1 + \int_0^t \phi(.,t-s)*f(u(.,s))ds$$

onde

$$v_1 = \varphi(.,t)*u_0$$

que quando derivado em relação a variável x ,fornece

$$D^j_x v_1(x,t) = [\, D^j_x \varphi(.,t) * u_o \,](x) = \int \frac{(-1)^j (x-y)^j}{\sqrt{4\pi t}\ (2t)^j}\, e^{-(x-y)^2/4t} u_o(y)dy$$

como,

$$\left| \frac{(-1)^j (x-y)^j}{\sqrt{4\pi t}\ (2t)^j}\, e^{-(x-y)^2/4t} u_o(y) \right| \le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|u_o\|_{sup} \left(\frac{x-y}{2t}\right)^j e^{-\left(\frac{x-y}{2t}\right)^2}$$

e $e^{-\xi^2} \in S(\mathbb{R})$, podemos facilmente aplicar o teorema da convergência dominada e concluir que

(2.3.44) $$D^j_x v_1(x,t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [a,T]$, $0 < a < T$, fixado.

Como

$$D_t v_1 = D^2_x v_1$$

segue que

(2.3.45) $$D^n_t D^m_x v_1(x,t) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

Por outro lado,

$$D^m_x \int_0^t \phi(.\,,t-s) * f(u(.\,,s)ds = \int D^m_x \phi(.,t-s) * f(u(.,s)ds$$

onde

$$D^m_x \phi(x,t) = \frac{(-1)^m\, x^m}{\sqrt{4\pi t}\ (2t)^m}\, e^{-x^2/4t}$$

como $e^{-\xi^2} \in S(\mathbb{R})$, segue que

$$D^m_x \phi(x-y,t-s) f(u(y,s) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

ainda, pelo mesmo fato, podemos concluir que:

$$|D^m_x \phi(x-y,t-s) f(u(y,s)| \le \frac{C}{\sqrt{4\pi t}\ \ t^{m/2}} |u(.,t)| \in L^1(\mathbb{R})$$ 2

onde C é uma constante não negativa. Estes fatos permitem a aplicação do teorema da convergência dominada, que garantirá que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int D_x^m \phi(x-y,t-s) f(u(y,s))dy = 0$$

Agora, por $f \in C^\infty$, (2.2.14) e (iii) da proposição 2.3.11 ,podemos encontrar constantes C_j não-negativas tais que

(2.3.46) $$\|D_x^j f(u)\|_{sup} \leq C_j$$

donde, pelo lema 1.2.1,(2.2.17) e (2.3.46),

$$|D_x^m \phi(.,t-s) * f(u(.,s)| \leq \int |\phi(x-y,t-s) D_x^m f(u(y,s))|dy \leq C_m \frac{1}{\sqrt{t}}$$

novamente podemos aplicar o teorema da convergência dominada concluindo assim que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} D_x^m \int_0^t \phi(.,t-s) * f(u(.,s))ds = 0$$

donde, juntamente com (2.3.44), podemos concluir que para cada $m \in \mathbb{N}$, vale :

(2.3.47) $$D_x^m u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente para todo $t \in [a,T]$, $0 < a < T$.

Ainda, podemos expressar as derivadas de u em relação a variável t em função de derivadas de u em relação a variável x , bastando para isto utilizar (2.1.1).A, logo é imediato concluir (2.3.43) para todo m,n naturais.

##

II.4 A SOLUÇÃO GLOBAL

2.4.1 Proposição. Seja $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$ e u a solução de (2.1.1) correspondente a condição inicial u_o. Então para cada $\tau \in [0,T]$ fixado, $u(.,\tau)$ é uniformemente limitada e vale:

$$\|u(.,\tau)\|_{sup} \leq \|u_o\|_{sup} \tag{2.4.1}$$

Dem.

Para mostrar este resultado, basta mostrar que (2.4.1) é válido, para tanto observemos que para todo $p > 1$ e $t \in [0,T]$,

$$\int |u(x,t)|^p dx \leq \|u(.,t)\|_{sup}^{p-1} \int |u(x,t)| dx$$

e portanto pela proposição 2.2.2, tem-se que $u \in L^p$ para todo $p \geq 1$
Agora considere um número ímpar natural $p \geq 1$, multiplicando (2.1.1).A por u^p, (ié, $[u(x,t)]^p$), obtemos

$$u^p u_t + u^p f(u)_x = u^p u_{xx} \tag{i}$$

ainda, para cada $a > 0$, arbitrariamemte pequeno, porém fixado, e para todo τ, $a \leq \tau \leq T$, segue que

$$\int_a^\tau u^p u_t \, dt = u^{p+1}\Big|_a^\tau - p\int_a^\tau u^p u_t dt$$

donde se conclui que

$$\int_a^\tau u^p u_t \, dt = \frac{1}{p+1} [u^{p+1}(.,\tau) - u^{p+1}(.,a)] \tag{ii}$$

Agora considere $A > 0$ real arbitrário. Temos via integração por partes, que

$$\int_{-A}^{A} [f(u)]_x u^p \, dx = u^p f(u)\Big|_{-A}^{A} - p\int_{-A}^{A} f(u) u^{p-1} u_x dx \tag{iii}$$

(iv) $$\int_{-A}^{A} u^p u_{xx}\,dx = u^p u_x\Big|_{-A}^{A} - p\int_{-A}^{A} u^{p-1}u_x^2\,dx$$

Portanto ao integrarmos (i) em $[-A,A]\times[a,\tau]$, por (ii), (iii) e (iv) obtemos

$$\frac{1}{p+1}\int_{-A}^{A}\Big[\,u^{p+1}(x,\tau) - u^{p+1}(x,a)\Big]dx + \int_{a}^{\tau}\Big[u^p f(u)\Big|_{-A}^{A} - p\int_{-A}^{A} f(u)u^{p-1}u_x\,dx\Big]dt =$$

$$= \int_{a}^{\tau}\Big[\,u^p u_x\Big|_{-A}^{A} - p\int_{-A}^{A} u^{p-1}u_x\,dx\,\Big]dt$$

dai,

$$\frac{1}{p+1}\int_{-A}^{A} u^{p+1}(x,\tau)dx + p\int_{a}^{\tau}\int_{-A}^{A} u^{p-1}\,u_x^2\,dxdt = \frac{1}{p+1}\int_{-A}^{A} u^{p+1}(x,a)dx +$$

$$+\int_{a}^{\tau}\Big\{\,pD_xF_p(u) + u^p\Big[u_x - f(u)\Big]\,\Big\}\Big|_{-A}^{A}\,dt$$

onde,

$$F_p(u) \equiv \int_{0}^{u}\lambda^{p-1}f(\lambda)d\lambda$$

fazendo $A \longrightarrow \infty$ na penúltima expressão, por $u_0 \in L^1\cap \mathbb{B}$, (2.3.6) e o fato de $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, obtemos

$$\frac{1}{p+1}\int u^{p+1}(x,\tau)dx + p\int_{a}^{\tau}\int u^{p-1}u_x^2\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{p+1}\int u^{p+1}(x,a)dx + p\int_{a}^{\tau} D_xF_p(u)\Big|_{-\infty}^{\infty}dt$$

como,

$$D_xF_p(u) = u^{p-1}f(u)u_x$$

segue por $u_0 \in L^1\cap \mathbb{B}$, (2.4.1) e pela proposição 2.3.12 que

$$D_x F_p(u) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm \infty$$

para todo $t \geq 0$, portanto

$$\int u^{p+1}(x,\tau)dx + p\int_a^\tau \int u^{p-1}u_x^2 \, dxdt = \frac{1}{p+1}\int u^{p+1}(x,a)dx$$

sendo p ímpar teremos p-1 par e portanto a segunda integral da expressão acima é sempre maior ou igual a zero, donde podemos concluir que

$$\int u^{p+1}(x,\tau)dx \leq \int u^{p+1}(x,a)dx$$

ainda, por (2.2.14) e (2.1.4)

$$\lim_{a\to 0} \int u^{p+1}(x,a)dx = \int u_o^{p+1}(x)dx$$

com efeito,desde que, $u^{p+1} - u_o^{p+1} = (u - u_o)(u^p + u^{p-1}u_o + \ldots + u_o)$ teremos,

$$\lim_{a\to 0} \int |u^{p+1}(x,a) - u_o^{p+1}(x)|dx \leq \|u^p + \ldots + u_o^p\|_{sup} \lim_{a\to 0} \|u(.,a) - u_o\|_{L^1} = 0$$

donde se conclui que , para todo $\tau \in [0,T]$, vale

$$\|u(.,\tau)\|_{L^{p+1}} \leq \|u_o\|_{L^{p+1}}$$

como para todo $p \geq 1$, $u(.,\tau) \in L^p$, segue que (ver por exemplo [11]),

$$\lim_{p\to\infty} \|u(.,\tau)\|_{L^p} = \|u(.,\tau)\|_{L^\infty} \qquad (t \in [0,T])$$

sendo $u(.,t)$ contínua, $\|u(.,\tau)\|_{L^\infty} = \|u(.,\tau)\|_{sup}$, logo

$$\|u(.,\tau)\|_{sup} \leq \|u_o\|_{sup}$$

para todo $t \in [0,T]$.

##

Em particular temos, para $\tau = T$, $T = 1/16M_1^2$ que

(2.4.2) $$\|u(.,T)\|_{sup} \leq \|u_o\|_{sup}$$

Agora consideremos o PVI(2.1.1) com condição inicial dada por $u(x,T)$, $T = 1/16M_1^2$:

$$(2.4.3) \qquad \begin{cases} v_t + [f(v)]_x = v_{xx} \\ v(x,0) = u(x,T) \end{cases}$$

onde $u(x,T) \in L^1 \cap \mathbb{B}$, é a solução de (2.1.1) correspondente a condição inicial u_0, fixada no ponto $t = T$. Portanto toda a construção feita para estabelecermos uma solução para (2.1.1) em $\mathbb{R}\times[0,T]$ pode ser repetida , para estabelecermos uma solução para (2.4.3) em $\mathbb{R}\times[T,2T]$, e por conseguinte para (2.1.1) em $\mathbb{R}\times[0,2T]$. Naturalmente podemos definir um novo PVI, tomando condição inicial $u(x,2T)$ e encontrar solução para (2.1.1), pelo mesmo raciocinio em $\mathbb{R}\times[0,3T]$. Indutivamente, sempre com o auxílio de (2.4.2) de forma que a magnitude dos novos " T " calculados por (2.2.20) não diminua, estabelecemos uma solução para(2.1.1) em $\mathbb{R}\times[0,\infty[$, onde esta solução possui todas as regularidades acima estabelecidas.

Mostraremos agora que para a solução acima estabelecida vale ainda que,

$$(2.4.4) \qquad \|u(.,t)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}$$

para todo $t \geq 0$.

Observemos que a diferença entre (2.2.13) e (2.4.4) é bastante notável no sentido que (2.2.13) garante majoração da magnitude de $\| u \|_1$, onde a variação de t era condicionada ao intervalo $[0,T]$, com T estabelecido em (28), aqui tratamos de provar que $u \in L^1(\mathbb{R})$, quando vista como função da variável x, para todo $t \geq 0$, fixado, ainda mais, com (2.4.4) poderiamos definir T, inversamente proporcional a magnitude de $\|u_0\|_{L^1}$ ao invés de $\|u_0\|_{sup}$ como fizemos, e mesmo assim poderiamos,pelo mesmo raciocínio acima obter uma solução global para o nosso problema.

Para mostrarmos (2.4.4) deveremos lançar mão de uma ferramenta, conhecida como as funções sinal regularizadoras.

Definição. Chamaremos de função característica de um intervalo I $\subset \mathbb{R}$, e denotaremos por χ_I a seguinte função definida em $\mathbb{R}$:

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in I \\ 0 & \text{se} \quad x \notin I \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Definição. Chamaremos de função sinal, e denotaremos por sgn(x) a seguinte função :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} \tag{2.4.6}$$

Definição. Seja $s \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ uma função crescente tal que

$$\begin{cases} s(x) = -1 & \text{para} \quad x \leq -1 \\ s(x) = \ \ 0 & \text{para} \quad x = \ \ 0 \\ s(x) = \ \ 1 & \text{para} \quad x \geq \ \ 1 \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Toda s que satisfaz estas condições é chamada de função sinal regularizadora

Definição. Seja s uma função sinal regularizadora. Então para cada $\varepsilon > 0$ dado , definimos a função s_ε por

$$s_\varepsilon(x) = s(x\setminus\varepsilon) \tag{2.4.8}$$

e a função L_ε ,como sendo a solução do PVI :

$$\begin{cases} L'_\varepsilon(x) = s_\varepsilon(x) \\ L_\varepsilon(0) = 0 \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Antes de efetivamente provarmos (2.4.4), vamos provar dois resultados auxiliares :

2.4.2 Lema. As funções definidas por (2.4.8) e (2.4.9) são $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e valem

$$L_\varepsilon(\, x\,) = \varepsilon \int_0^{x\setminus\varepsilon} s(\xi)d\xi \tag{2.4.10}$$

$$s_\varepsilon(x) \longrightarrow \operatorname{sgn}(x) \quad \text{quando} \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \qquad (\, x \in \mathbb{R}\,) \tag{2.4.11}$$

(2.4.12) $$L_\varepsilon(x) \longrightarrow |x| \quad \text{quando} \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(2.4.13) $$L''_\varepsilon(x) = (1/\varepsilon)\theta(x)\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \geq 0$$

onde,

$$\theta(x) = s'(x/\varepsilon) \qquad (x \in [-\varepsilon,\varepsilon])$$

Dem.

Obviamente s_ε, $L_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$,pois $s \in C^\infty(\mathbb{R})$ e basta aplicar o teorema fundamental do cálculo para encontrarmos (2.4.10), como solução de (2.4.9).

Agora,considere $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ arbitrário,tomando $0 < \varepsilon < |x|$ teremos

(i) se $x > 0$ então $x/\varepsilon > 1$ e portanto $s_\varepsilon(x) = s(x/\varepsilon) = 1$

(ii) se $x < 0$ então $x/\varepsilon < -1$ e portanto $s_\varepsilon(x) = s(x/\varepsilon) = -1$

para o caso $x = 0$ para qualquer $\varepsilon > 0$ tomado, teremos $s_\varepsilon(0) = 0$ sendo s_ε contínua segue (2.4.11).

Para mostrar que (2.4.12) é válida, basta observar que para cada $\varepsilon > 0$ fixado :

$$\int_0^{x/\varepsilon} s(\xi)d\xi = \begin{cases} -x/\varepsilon & \text{se } x < -\varepsilon \\ 0 & \text{se } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ x/\varepsilon & \text{se } x > \varepsilon \end{cases}$$

portanto dado $x \neq 0$ tomando $0 < \varepsilon < |x|$, teremos

$$L_\varepsilon(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

para o caso $x = 0$, temos que $L_\varepsilon(0) = 0$. Assim usando o fato de que L_ε é contínua, obtemos (2.4.12).

Por (2.4.9) obtemos que

$$L''_\varepsilon(x) = [s(x\backslash\varepsilon)]' = (1\backslash\varepsilon)s'(x\backslash\varepsilon)$$

como $s(x\backslash\varepsilon)$ é constante para $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$,segue que

$$s'(x\backslash\varepsilon) = 0 \text{ para } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

aplicando (2.4.5) para $I = [-\varepsilon,\varepsilon]$, obtemos (2.4.13).

##

2.4.3 Lema. Sejam u, solução de (2.1.1), correspondente a condição inicial $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, $A > 0$, $\tau > 0$, $0 < a < \tau$, arbitráriamente fixados e $\varepsilon > 0$. Então

(2.4.14) $$\int_a^{\tau}\int_{-A}^{A} L''_{\varepsilon}(u(x,t))f(u(x,t))u_x(x,t)dxdt \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

onde L_{ε} é definida por (2.4.9).

Dem.

por (2.2.16), (iii) da proposição 2.3.11 e (2.4.13) teremos

$$|L''_{\varepsilon}(u)f(u)u_x| \le L''_{\varepsilon}(u)|f(u)|L_{1,0}(a) \le L''(u)M_1\|u\|_{sup}L_{1,0}(a)$$

que com ajuda de (2.2.14), garante a existência de uma constante $\lambda > 0$ tal que

$$|L''_{\varepsilon}(u)f(u)u_x| \le \lambda L''_{\varepsilon}(u)$$

ainda, é fácil constatar que a função θ que aparece em (2.4.13) é limitada em $[-\varepsilon,\varepsilon]$ para qualquer $\varepsilon > 0$, portanto podemos concluir que

$$L''_{\varepsilon}(u) \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad \varepsilon \longrightarrow 0$$

logo,

$$L''_{\varepsilon}(u)f(u)u_x \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

pelo teorema da convergência dominada segue (2.4.14).

2.4.4. Proposição. Seja u a solução de (2.1.1) correspondente a condição inicial u_o, então

(2.4.15) $$\|u(.,t)\|_{L^1} \le \|u_o\|_{L^1}$$

para cada $t \ge 0$, fixado.

Dem.

Seja $\tau > 0$ fixado, $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < \tau$ e $\varepsilon > 0$, multiplicando (2.1.1).A por $L'_\varepsilon(u(x,t))$ obtemos

$$L'_\varepsilon(u(x,t))u_t(x,t) + L'_\varepsilon(u(x,t))[f(u(x,t))]_x = L'_\varepsilon(u(x,t))u_{xx}(x,t)$$

ou simplificando,

$$(\ i\ ) \qquad L'_\varepsilon(u)u_t + L'_\varepsilon(u)[f(u)]_x = L'_\varepsilon(u)u_{xx}$$

é fácil notar que :

$$(\ ii\ ) \qquad \int_0^\tau L'_\varepsilon(u)u_t\,dt = L_\varepsilon(u(x,\tau)) - L_\varepsilon(u(x,a))$$

e que dado $A > 0$, fixado , usando integração por partes teremos:

$$(\ iii\ ) \qquad \int_{-A}^{A} L'_\varepsilon(u)[f(u)]dx = L'_\varepsilon(u)f(u)\Big|_{x=-A}^{x=\ A} - \int_{A}^{-A} f(u)L''_\varepsilon(u)dx$$

e ainda

$$(\ iv\ ) \qquad \int_{-A}^{A} L'_\varepsilon(u)u_{xx}dx = L'_\varepsilon(u)u_x\Big|_{x=-A}^{x=\ A} - \int_{-A}^{A} L''_\varepsilon(u)u_x^2dx$$

portanto dado $\tau > 0$, $A > 0$ fixados e tomando a arbitrário de forma que $0 < a < \tau$, integrando (i) em $[-A,A\ ]\times[a,\tau]$ e utilizando os resultados de (ii),(iii) e (iv) teremos

$$\int_{-A}^{A} L_\varepsilon(u(x,\tau))dx - \int_0^\tau\int_{-A}^{A} f(u)L_\varepsilon''(u)u_x\,dx\ dt + \int_0^\tau\int_{-A}^{A} L_\varepsilon''(u)u_x^2dx =$$

$$= \int_{-A}^{A} L_\varepsilon(u(x,a))dx + \int_0^\tau \left\{ L'_\varepsilon(u)[u_x - f(u)]\right\}\Big|_{x=-A}^{x=\ A}dt$$

como $L''_\varepsilon \geq 0$, segue que

$$\int_{-A}^{A} L_{\varepsilon}(u)dx - \int_{0}^{\tau}\int_{-A}^{A} L''_{\varepsilon}(u)f(u)u_x\,dxdt \le$$

$$\le \int_{-A}^{A} L_{\varepsilon}(u(x,a)dx + \int_{0}^{\tau}\left\{ L'_{\varepsilon}(u)[u_x - f(u)]\Big|_{x=-A}^{x=A} \right\} dt$$

fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, pelos Lemas 2.4.2 e 2.4.3, obtemos

$$\int_{-A}^{A} |u(x,\tau)|dx \le \int_{-A}^{A} |u(x,a)|dx + \int_{a}^{\tau}\left\{sgn(u)[u_x - f(u)]\right\}\Big|_{-A}^{A} dt$$

fazendo $A \longrightarrow \infty$, obtemos pela proposição 2.3.6, (2.3.44) e $f \in C^{\infty}$ que,

$$\int |u(x,\tau)|dx \le \int |u(x,a)|dx$$

finalmente, tomando $a \longrightarrow 0$, obtemos

$$\|u(.,t)\|_{L^1} \le \|u_o\|_{L^1}$$

##

2.4.5 **Proposição.** Sejam u_o, $v_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$ e u, v soluções correspondentes do PVI (1). Então para todo $t \ge 0$, vale:

$$\|u(.,t) - v(.,t)\|_{L^1} \le \|u_o - v_o\|_{L^1}.$$

Dem.

Observando que se u,v são soluções de (2.1.1) então,

$$(u-v)_t + [f(u) - f(v)]_x = (u-v)_{xx}$$

que multiplicando por $L'_{\varepsilon}(u-v)$, integrando em $[0,t]\times[-A,A]$ e procedendo com analogia a demonstração da proposição 2.4.4, para ao final ,obter o desejado.

##

II.5 RESUMO DO CAPÍTULO

Podemos finalmente resumir este capítulo num só resultado:

2.5.1 Teorema Seja $u_o \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{B}(\mathbb{R})$, i.é, u_o absolutamente integrável e limitada. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = u_{xx} \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R} ,t \in [0,\infty [ )$$

onde $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, possui uma única solução $u \in W$, para W definido por

$$W \equiv \left\{ \omega:\mathbb{R}\times[0,\infty [\longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável } / \ \| \omega \|_1 + \| \omega \|_{sup} < \infty \right\}, \text{ onde}$$

$$\| \omega \|_1 \equiv \sup_{t\in[0,\infty[} \int |\omega(x,t)|dx \text{ e}$$

$$\| \omega \|_{sup} \equiv \sup\left\{ |\omega(x,t)| \ / \ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty [\right\}.$$

tal que

(i) $\qquad u \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times]0,\infty [)$

(ii) $\qquad D_t^n D_x^m u(x,t) \longrightarrow 0 \qquad$ quando $\qquad x \longrightarrow \pm \infty$

uniformemente para $t \in [a, \infty [,a > 0$, e finalmente para cada $a > 0$ arbitráriamente pequeno, porém fixado, existem constantes não-negativas $K_{m,n}(a)$ tais que

(iii) $\qquad \sup_{t\geq a} \|D_t^n D_x^m u(.,t)\|_{sup} \leq K_{m,n}(a)$

##

Observação. O que justifica a afirmação (iii) do teorema acima é o fato de que as constantes " $K_{m,n}(a)$ " que aparecem na proposição 2.3.11, dependem diretamente e somente da magnitude das condições iniciais. Como para p = 1,∞

$$(\|u(.,t)\|_{L^p})_{t\geq o}$$

forma uma seqüência não-crescente , então as "$K_{m,n}(a)$" obtidas para condição inicial u_o, serão as maiores possíveis dentre as "$K_{m,n}$" obtidas na busca de solução nos intervalos [0,T], [T,2T], [2T,3T],... .

CAPÍTULO III

III.1 O EXEMPLO HIPERBÓLICO

Enquanto no capitulo II, buscavamos propriedades para o PVI parabólico lá estudado basiando-se naturalmente nas propriedades da solução fundamental do calor, aqui, a título de comparação, trataremos de estabelecer uma solução global para um PVI não linear do tipo hiperbólico basiando-se na solução fundamental da equação da onda, isto é, iremos estabelecer uma solução para :

$$(3.1.1)\qquad \begin{cases} u_{tt} + [f(u)]_x = u_{xx} & (\text{ A }) \\ u(x,0) = u_o(x) & (\text{ B }) \\ u_t(x,0) = v_o(x) & (\text{ C }) \end{cases}$$

onde $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+$ e $u(x,t)$ é um escalar.

Sem perder a generalidade podemos considerar $f(0) = 0$:

3.1.1 Proposição. Sem perda de generalidade no PVI (3.1.1), podemos considerar $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$.

Dem.

Com efeito, se $f(0) \neq 0$, tomando-se $g(u) = f(u) - f(0)$ teremos

$$[g(u)]_x = [f(u)]_x \quad \text{e} \quad g(0) = 0$$

assim podemos tomar (1A) como

$$u_{tt} + [g(u)]_x = u_{xx}$$

onde $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ é tal que $g(0) = 0$.

##

Daqui em diante consideraremos $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que

(3.1.2) $$f(0) = 0$$

Queremos estabelecer uma solução para (3.1.1) considerando inicialmente condições iniciais u_o e v_o tais que :

(3.1.3) $$u_o,\ v_o \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

ié, u_o e v_o absolutamente integráveis e limitadas em $\mathbb{R}$, a condição (3.1.1).B deve ser interpretada no seguinte sentido :

(3.1.4) $$\|u(.,t) - u_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

enquanto que (3.1.1).C deve ser vista como

(3.1.5) $$u_t(.,t) \xrightarrow{S'} v_o \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

III.2 A SOLUÇÃO LOCAL

Lembrando que as integrais indefinidas que aparecem ao longo do texto representam integração em $\mathbb{R}$ e que D_ξ denota derivação na variável ξ, similarmente ao que fizemos no capitulo II, consideraremos inicialmente o PVI da onda unidimensional não homogêneo , definido em $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, por

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + h(x,t) \\ u(x,0) = u_o(x) \\ u_t(x,0) = v_o(x) \end{cases}$$

onde u_o e v_o são do tipo estabelecido em (3.1.3).

No capitulo I, o princípio de Duhamel apresentava como solução do PVI acima, o seguinte resultado :

(3.2.1)
$$u(x,t) = (1/2)\int D_t G(x-y,t)u_o(y)dy +$$
$$+ (1/2)\int G(x-y,t)v_o(y)dy + (1/2)\int_o^t\int G(x-y,t-s)h(y,s)dyds$$

onde para cada $\tau \geq 0$,

(3.2.2)
$$G(\xi,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |\ \xi\ | \leq \tau \\ 0 & \text{se} \quad |\ \xi\ | > \tau \end{cases}$$

ainda, no capítulo I, ficou estabelecido pelo lema 1.2.4 que para cada $\tau \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, vale :

(3.2.3)
$$D_\tau G(\xi,t) = \delta(\xi+\tau) + \delta(\xi-\tau)$$

onde δ representa a "função" delta, e a derivada é entendida no sentido das distribuições.

Considerando por um momento $[f(u)]_x$ em (3.1.1).A como uma não homogeneidade da equação, obtemos uma equação integral :

$$u(x,t) = (1/2)\int D_t G(x-y,t)u_o(y)dy + (1/2)\int G(x-y,t)v_o(y)dy -$$
$$-(1/2)\int_o^t\int G(x-y,t-s)[f(u(y,s)]_y dyds$$

mas observando que

(3.2.4)
$$\int G(x-y,t-s)[f(u(y,s)]_y dyds =$$
$$= G(x-y,t-s)f(u(y,s))\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} - \int D_y G(x-y,t-s)f(u(y,s))ds$$

e se denotarmos por

(3.2.5)
$$H(\xi,\tau) = - D_\xi G(\xi,\tau)$$

teremos pelo lema 1.2.4 que,

(3.2.6)
$$H(\xi,\tau) = \delta(\xi-\tau) - \delta(\xi+\tau)$$

onde δ representa a " função " delta e a derivada é no sentido das distribuições. Observando (3.2.2), é fácil concluir que

(3.2.7) $$G(x-y,t-s)f(u(y,s)) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad y \longrightarrow \pm\infty$$

portanto por (3.2.4), (3.2.5) e (3.2.7), obtemos

(3.2.8) $$u(x,t) = (1/2)D_t G(.,t)*u_o + (1/2)G(.,t)*v_o + + (1/2)\int_o^t H(.,t-s)*f(u(.,s))ds$$

onde G e H são dadas em (3.2.2) e (3.2.6) respectivamente.

A fórmula (3.2.8) sugere que o candidato a solução do PVI (3.1.1) seja um ponto fixo do operador integral que aparece em seu lado direito . Para garantirmos a existência de tal ponto fixo, iremos proceder como no capítulo II, deveremos como lá , construir um espaço de funções tal que o operador integral acima citado seja uma contração. O espaço métrico aqui utilizado provem do mesmo espaço deBanach, a saber :

Definição. Para $T > 0$, fixado, considere

(3.2.9) $$\| \omega \|_1 \equiv \sup_{t\in[o,T]} \int |\omega(x,t)|dx$$

(3.2.10) $$\| \omega \|_{sup} \equiv \sup \left\{ |\omega(x,t)| \ / \ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T] \right\}$$

com isto podemos definir o espaço normado completo :

(3.2.11) $$W \equiv \left\{ \omega:\mathbb{R}\times[0,T] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ mensurável } / \ \| \omega \| + \| \omega \|_{sup} < \infty \right\}$$

3.2.1 Proposição. Considere W definido em (3.2.11). Então,

(3.2.12) $$\| \omega \|_W \equiv \max \left\{ \|\omega\|_1 , \ \|\omega\|_{sup} \right\}$$

define uma norma em W.

Dem.

Dado $\omega \in W$, é fácil ver que

(i) $$\| \omega \|_W \geq 0$$

(ii) $$\|\lambda\omega\|_W = |\lambda|\,\|\omega\|_W$$

ainda, se $\|\omega\|_W = 0$ então $\sup\left\{ |\omega(x,t)| \ / \ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T] \right\} = 0$ no que implica $\omega(x,t) = 0$. É claro que se $\omega \equiv 0$, $\|\omega\|_W = 0$, portanto

(iii) $$\|\omega\|_W = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \omega \equiv 0.$$

agora, como

$$\sup_{t\in[0,T]} \int |\omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)|dx \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \int |\omega_1(x,t)|dx + \sup_{t\in[0,T]} \int |\omega_2(x,t)|dx$$

e,

$$\sup\left\{ |\omega_1(x,t)-\omega_2(x,t)| \ / \ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T] \right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{|\omega_1(x,t)|/(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]\right\} + \sup\left\{|\omega_2(x,t)|/(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]\right\}$$

para todo $\omega_1, \omega_2 \in W$, segue, respectivamente que

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_1 \leq \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_1$$

e

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{sup} \leq \|\omega_1\|_{sup} + \|\omega_2\|_{sup}$$

assim,

$$\text{máx}\left\{ \|\omega_1 - \omega_2\|_1, \|\omega_1 - \omega_2\|_{sup} \right\} \leq$$

$$\leq \text{máx}\left\{ \|\omega_1\|_1 + \|\omega_2\|_1, \|\omega_1\|_{sup} + \|\omega_2\|_{sup} \right\} \leq$$

$$\leq \text{máx}\left\{ \|\omega_1\|_1, \|\omega_1\|_{sup} \right\} + \text{máx}\left\{ \|\omega_2\|_1, \|\omega_2\|_{sup} \right\}$$

portanto, dados ω_1, $\omega_2 \in W$, vale

(iv) $$\|\omega_1 - \omega_2\|_W \leq \|\omega_1\|_W + \|\omega_2\|_W$$

no que conclui a demonstração.

##

3.2.2 Proposição. Sejam W definido em (3.2.11) e $u_o, v_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$. Se

$$\omega(x,t) \equiv (1/2)D_t G(.,t)*u_o + (1/2)G(.,t)*v_o$$

então $\omega \in W$.

Dem.

Lembrando que

$$D_t G(.,t)*u_o = u_o(x+t) + u_o(x-t)$$

e,

$$G(.,t)*v_o = \int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy$$

então, é fácil ver que

$$\left|D_t G(.,t)*u_o\right| \leq 2\|u_o\|_{sup} \tag{3.2.13}$$

$$\left|G(.,t)*v_o\right| \leq 2T\|v_o\|_{sup} \tag{3.2.14}$$

como

$$|\omega(x,t)| \leq (1/2)\left|D_t G(.,t)*u_o\right| + (1/2)\left|G(.,t)*v_o\right|$$

segue por (3.2.13) e (3.2.14) que

$$\|\omega\|_{sup} \leq (1/2)[\,2\|u_o\|_{sup}\,] + (1/2)[\,2T\|u_o\|_{sup}\,]$$

ié,

$$\|\ \omega\ \|_{sup} \leq (1+T)\text{máx}\left\{\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}\right\} \tag{3.2.15}$$

Para mostrar que

$$\| \omega \|_1 < \infty$$

observemos que, para todo t fixado,

$$\|D_t G(.,t)*u_o\|_{L^1} \leq 2\|u_o\|_{L^1} \tag{3.2.16}$$

e,

$$\|G(.,t)*v_o\|_{L^1} \leq 2t\|v_o\|_{L^1} \tag{3.2.17}$$

portanto,

$$\| \omega \|_1 \leq (1+T)\text{máx}\left\{\|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1}\right\} \tag{3.2.18}$$

logo (3.2.15) e (3.2.18) garantem que $\omega \in W$.

##

Definição. Seja $\omega \in W$, definimos o operador $\mathbb{P}$ sobre W, como sendo :

$$\mathbb{P}(\omega)(x,t) \equiv (1/2)D_t G(.,t)*u_o + (1/2)G(.,t)*v_o + \tag{3.2.19}$$

$$+ (1/2)\int_o^t H(.,t-s)*f(\omega(.,s))ds$$

onde G e H estão definidos em (3.2.2) e (3.2.6), respectivamente.

O candidato a solução do problema (3.1.1) aparece como um ponto fixo deste operador . Para estabelecer tal solução, desejamos como foi feito no capítulo II, utilizar o teorema do ponto fixo para contrações, aplicado em algum subespaço fechado de W, que seja invariante sob a ação de $\mathbb{P}$.

Considerando $0 < T \leq 1$, teremos por (3.2.15) e (3.2.18) que para $\omega \in W$, definido por

$$\omega(x,t) = (1/2)D_t G(., t)*u_o + (1/2)G(.,t)*v_o$$

valem

$$\| \omega \|_1 \leq 2\text{máx} \left\{ \|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1} \right\} \tag{3.2.20}$$

$$\| \omega \|_{sup} \leq 2\text{máx}\left\{\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}\right\} \tag{3.2.21}$$

isto nos leva a seguinte definição :

Definição. Definimos W_* como sendo o subconjunto de W, tal que se $\omega \in W_*$, então

(3.2.22) $$\left\|\omega - (1/2)D_t G(.,t) * u_o - (1/2)G(.,t) * v_o\right\|_1 \leq$$
$$\leq 2\text{máx}\left\{\|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1}\right\}$$

e

(3.2.23) $$\left\|\omega - (1/2)D_t G(.,t) * u_o - (1/2)G(.,t) * v_o\right\|_{sup} \leq$$
$$\leq 2\text{máx}\left\{\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}\right\}$$

isto é,

(3.2.24) $$W_* \equiv \left\{ \omega \in W \;/\; \omega \text{ satisfaz } (3.2.22) \text{ e } (3.2.23) \right\}$$

3.2.3 Proposição. W_* definido em (3.2.24) é não vazio, e ainda, para todo $\omega \in W_*$, valem :

(3.2.25) $$\|\ \omega\ \|_1 \leq 4\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1} \right\}$$

(3.2.26) $$\|\ \omega\ \|_{sup} \leq 4\text{máx}\left\{\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}\right\}$$

Dem.

É fácil ver por (3.2.20) e (3.2.21) que $0 \in W_*$ e que obviamente

$$\omega(x,t) = (1/2)D_t G(.,t) * v_o + (1/2)G(.,t) * v_o$$

também pertence a W_*, agora seja ω um elemento qualquer de W_*, neste caso teremos:

$$\|\ \omega\ \|_1 \leq \left\|\omega - (1/2)D_t G * u_o - (1/2)G * v_o + (1/2)D_t G * u_o + (1/2)G * v_o\right\|_1 \leq$$
$$\leq \left\|\omega - (1/2)D_t G * u_o - (1/2)G * v_o\right\|_1 + \left\|(1/2)D_t G * u_o + (1/2)G * v_o\right\|_1$$

daí, por (3.2.20) e (3.2.21) segue (3.2.25). Analogamente se prova

(3.2.26).

##

3.2.4 Proposição. W_* definido em (3.2.24) é um subconjunto fechado de W.

Dem.

Verificaremos que W_* é fechado,mostrando que W_* possui todos seus pontos de acumulação, com efeito, seja (ω_n) uma seqüência em W_*, que converge para $\omega_\infty \in W$. Então vale :

(i) $$|\omega_n-(1/2)D_tG(.,t)*u_o-(1/2)G(.,t)*v_o| \longrightarrow$$
$$\longrightarrow |\omega_\infty-(1/2)D_tG(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o|$$

uniformenente e todo $\mathbb{R}\times[0,T]$. De fato, $\omega_n \longrightarrow \omega_\infty$ em W, significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o\in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{máx}\left\{ \| \omega_n- \omega_\infty\|_1,\| \omega_n- \omega_\infty\|_{sup} \right\} < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq n_o$$

portanto para este mesmo n_o, teremos para todo $t \in [0,T]$,fixado,

$$\Big| |\omega_n-(1/2)[D_tG(.,t)*u_o- G(.,t)*v_o]| -$$
$$- |\omega_\infty-(1/2)D_tG(.,t)*u_o- - (1/2)G(.,t)*v_o| \Big| \leq |\omega_n- \omega_\infty| \leq$$
$$\leq \|\omega_n- \omega_\infty\|_{sup} < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_o$.

Observemos que para cada $t \in [0,T]$ fixado,

$$(|\omega - (1/2)D_tG(.,t)*u_o-(1/2)G(.,t)*v_o|)_{n\in\mathbb{N}}$$

é uma seqüência de funções não-negativas e integráveis em $\mathbb{R}$, ademais para todo $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n \in W_*$ assim por (3.2.22) teremos

$$\int|\omega_n(x,t) - (1/2)D_tG(.,t)*u_o- (1/2)G(.,t)*v_o|dx \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \int|\omega_n - (1/2)D_tG(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o|dx =$$

$$= \left\| \omega_n - (1/2)D_t G(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o \right\|_1 \leq 2\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1} \right\}$$

segue pelo lema de Fatou que para todo $t \in [0,T]$, fixado

$$\int \left| \omega_\infty(x,t) - (1/2)D_t G(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o \right| dx \leq$$

$$\leq \liminf_{n \to \infty} \int \left| \omega_n(x,t) - (1/2)D_t G(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o \right| dx \leq$$

$$\leq 2\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1} \right\}$$

assim,

$$(\ ii\ ) \qquad \left\| \omega_\infty - (1/2)[D_t G(.,t)*u_o - G(.,t)*v_o] \right\|_1 \leq 2\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1} \right\}$$

Agora por (3.2.23) e (i) temos para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$

$$\left| \omega_\infty(x,t) - (1/2)D_t G(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o \right| \leq 2\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup} \right\}$$

donde se conclui que

$$(\ iii\ ) \qquad \left\| \omega_\infty - (1/2)D_t G(.,t)*u_o - (1/2)G(.,t)*v_o \right\|_{sup} \leq$$

$$\leq 2\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup} \right\}$$

logo por (ii) e (iii) temos que $\omega_\infty \in W_*$.

##

Definição. Considerando (3.2.26) e o fato de $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, definimos para todo j natural,

$$(3.2.27) \qquad M_j \equiv \sup \left\{ \left| f^{(j)}(\alpha) \right| \ / \ |\alpha| \leq 4\text{máx}(\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}) \right\}$$

Observemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, M_j está bem definido pois o conjunto dos reais α tais que $|\alpha| \leq 4\text{máx}\left\{ \|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup} \right\}$ é compacto. Para $j = 1$, temos a seguinte propriedade :

3.2.5 Proposição. Para todo $\omega \in W_*$ vale

(3.2.28) $$|f(\omega(x,t))| \leq M_1 |\omega(x,t)|$$

onde $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ e M_1 definido em (3.2.27)

Dem.

Pelo teorema do valor médio para derivadas aplicado no segmento que une a origem ao ponto $\omega(x,t)$, para cada $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ fixado, porém arbitrário, e observando $f(0) = 0$ e (3.2.27) obtemos facilmente (3.2.28).

##

Usaremos este fato para provar que W_* é invariante sob o operador definido em (3.2.19) :

3.2.6 Proposição. Sejam W_* definido em (3.2.24) e $\mathbb{P}$ o operador definido em (3.2.19). W_* é invariante sob a ação de $\mathbb{P}$, isto é,

$$\mathbb{P}(W_*) \subseteq W_*$$

desde que $T \leq 1/2M_1$.

Dem.

Seja $\omega \in W_*$, deveremos mostrar que $\mathbb{P}(\omega)$ expresso em (3.2.19) satisfaz (3.2.22) (3.2.25), para tanto Lembremos de (3.2.6) que

$$H(x-y,t-s) = \delta(x-y-t+s) - \delta(x-y+t-s)$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac, assim,

$$H(.,t-s)*f(\omega(.,t) = \int \delta(x-t+s-y)f(\omega(y,s)dy - \int \delta(x+t-s-y)f(\omega(y,s)dy$$

pelo exemplo 1.1.7, podemos concluir que

(z.3.29) $$H(.,t-s)*f(\omega(.,s) = f(\omega(x-t+s,s)) - f(\omega(x+t-s,s))$$

portanto, por (3.2.26), (3.2.28) e (3.2.29), teremos

$$\left| \int_0^t H(.,t-s)*f(\omega(.,s))ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t |f(\omega(x-t+s,s))|ds + \int_0^t |f(\omega(x+t-s,s))|ds \leq$$

$$\leq M_1\int_0^t |\omega(x-t+s,s)|ds + M_1\int_0^t |\omega(x+t-s,s)|ds \leq$$

$$\leq 2M_1\|\omega\|_{sup}\int_0^t ds \leq 8t\text{máx}\left\{\|u_0\|_{sup},\|v_0\|_{sup}\right\}$$

portanto,

$$\|\mathbb{P}(\omega) - (1/2)D_tG(.,t)*u_0-(1/2)G(.,t)*v_0\|_{sup} \leq$$

$$\leq \quad (1/2)\sup_{t\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\int_0^t H(.,t-s)*f(\omega(.,s))ds\right| \leq$$

$$\leq 4M_1T\text{máx}\left\{\|u_0\|_{sup},\|v_0\|_{sup}\right\}$$

i.é,

(3.2.30) $$\|\mathbb{P}(\omega) - (1/2)D_tG(.,t)*u_0-(1/2)G(.,t)*v_0\|_{sup} \leq$$
$$\leq 4M_1T\text{máx}\left\{\|u_0\|_{sup},\|v_0\|_{sup}\right\}$$

agora, por (3.2.25), (3.2.28), (3.2.29) e pelo teorema de Fubini, teremos para cada $t \in [0,T]$

$$\int\left|\int_0^t\int H(x-y,t-s)f(\omega(y,s))dyds\right|dx \leq$$

$$\leq M_1\int\int_0^t f(\omega(x-t+s,s))|dsdx + \int\int_0^t |f(\omega(x+t-s,s)|dsdx$$

$$\leq 2tM_1\|\omega\|_1 \leq 8tM_1\text{máx}\left\{\|u_0\|_{L^1},\|v_0\|_{L^1}\right\}$$

portanto,

(3.2.31) $$\|\mathbb{P}(\omega) - (1/2)D_t G(.,t)*u_0 - (1/2)G(.,t)*v_0\|_1 \leq$$

$$\leq 4M_1 T\text{máx}\left\{\|u_0\|_{L^1}, \|v_0\|_{L^1}\right\}$$

Logo, para $T \leq 1/2M_1$, segue por (3.2.30) e (3.2.31) que $\mathbb{P}(\omega) \in W_*$.

##

Para obtermos as fórmulas (3.2.28) e (3.2.29) precisemos naquele momento que $0 < T \leq 1$, portanto de agora em diante consideraremos

(3.2.32) $$T \equiv \text{mínimo}\left\{1, 1/2M_1\right\}$$

3.2.7 Proposição. Sejam T como em (3.2.32), $\mathbb{P}$ o operador definido em ((3.2.19) e $\omega_1, \omega_2 \in W_*$. Então

$$\|\mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2)\|_W \leq (1/2)\|\omega_1 - \omega_2\|_W$$

em outras palavras, $\mathbb{P}$ é uma contração em W_* , cuja constante de contração é 1/2 .

Dem.

Com efeito, Por (3.2.28) e (3.2.29) temos que

$$\left|\int_0^t H(.,s)*[f(\omega_1(.,s)) - f(\omega_2(.,s))]ds\right| \leq$$

$$\leq \int_0^t \int \left|f(\omega_1(x+t-s,s)) - f(\omega(x-t+s,s))\right| ds \leq$$

$$\leq M_1 \int_0^t \left|\omega_1(x-t+s,s) - \omega_2(x-t+s,s)\right| ds + M_1 \int \left|\omega_1(x+t-s,s) - \omega_2(x+t-s,s)\right| ds$$

$$\leq 2tM_1\|\omega_1 - \omega_2\|_{sup}$$

como $t \leq T \leq 1/2M_1$ segue que

(i) $$\|\mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2)\|_{sup} \leq (1/2)\|\omega_1 - \omega_2\|_{sup}$$

novamente por (3.2.28) e (3.2.29) :

$$\int \left| \mathbb{P}(\omega_1(x,t)) - \mathbb{P}(\omega_2(x,t)) \right| dx \le$$

$$\frac{M_1}{2}\iint_0^t \left|[\omega_1-\omega_2](x-t+s,s)\right| ds dx + \frac{M_1}{2}\int_0^t \left|[\omega_1-\omega_2](x+t-s,s)\right| ds dx$$

$$\le M_1\int_0^t \left\|[\omega_1-\omega_2](.,s)\right\|_{L^1} ds \le M_1 t \left\|\omega_1 - \omega_2\right\|_1$$

portanto,

(ii) $$\left\|\mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2)\right\|_1 \le (1/2)\left\|\omega_1 - \omega_2\right\|_1.$$

logo por (3.2.12), (i) e (ii), segue o desejado.

##

Com esta proposição podemos garantir a existência e unicidade de uma solução em W_*, para a equação integral . Na verdade se u e v são pontos fixos de $\mathbb{P}$ em W, tomando,

$$K = \sup \left\{ |f'(\alpha)| \;/\; |\,\alpha\,| \le \text{máx}(\ \|u\|_{sup}\ \|v\|_{sup}\ ) \right\}$$

então, para todo $t \in [0,T]$, vale

$$\|u(.,t) - v(.,t)\|_{sup} \le K\int_0^t \|u(.,s) - v(.,s)\|_{sup} ds$$

que permite reutilizar o raciocínio empregado ainda no caso parabólico, quando buscavamos justificar a unicidade de solução em W, e concluir que existe um único ponto fixo de $\mathbb{P}$ em todo W. Podemos conferir que nossa solução fraca satisfaz as condições iniciais no sentido impostos em (3.1.4) e (3.1.5),com efeito, , para u dada em (3.2.8), teremos por (3.2.29) que

(3. 2. 33) $$u(x,t) = (1/2)\left[u_0(x+t)+u_0(x-t)\right] + (1/2)\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)dy +$$

$$+ (1/2)\int_0^t \left[f(u(x-t+s,s))-f(u(x+t-s,s))\right]ds$$

mas, pela proposição 1.1.1, segue que

$$\|(1/2)[u_o(x+t)+u_o(x-t)] - u_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

ainda,

$$\int\left|\int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy\right|dx \le 2t\|v_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

e

$$\int\left|\int_{0}^{t} f(u(x-t+s,s) - f(u(x+t-s,s)ds\right|dx \le 2tM_1\|u\|_{sup} \longrightarrow 0$$

$$\text{quando } t \longrightarrow 0$$

portanto,

$$\|u(.,t) - u_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

ou seja (3.1.4) é verdadeiro. Para provar que (3.1.5) vale, devemos observar que

$$u_t(x,t) = (1/2)G_{tt}(.,t)*u_o + (1/2)G_t(.,t)*v_o +$$

$$+ \quad (1/2)\int H_t(.,t-s)*f(u(.,s))ds + H(.,0)*f(u(.,t)$$

ora, derivando (3.2.6) em relação a t,obteremos

$$G_{tt}(.,t)*u_o = [\delta'_{-t}-\delta'_t]*u_o$$

portanto pelos itens (ii) e (iv) do exemplo 1.1.9, segue que

$$G_{tt}(.,t)*u_o \xrightarrow{S'} 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

agora, observando que

$$G_t(.,t)*v_o = v_o(x+t) + v_o(x-t)$$

então pela proposição 1.1.1 , segue que

$$\|G_t(.,t)*v_o - v_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } t \longrightarrow 0$$

e portanto, pelo item (iii) do exemplo acima citado segue que

$$(1/2)G_t(.,t)*v_o \xrightarrow{S'} v_o \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

além disto, temos que para H definido em (3.2.6),

$$H(0,t) = 0$$

Resta,portanto mostrar que

$$\int_0^t H_t(.,t-s)*f(u(.,s)ds \xrightarrow{S'} 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

para tanto,observemos que

$$H(\xi,\tau) = - D_\xi G(\xi,\tau)$$

e portanto,

$$H_t(.,t-s,s)*f(u(.,s)) = - G_t(.,t-s)*D_x[f(u(.,s))]$$

como

$$G_t(x,t-s) = \delta(x+t-s) + \delta(x-t+s)$$

segue que

$$G_t(.,t-s)*D_x[f(u(.,s))] = D_x\Big[f(u(x-t+s,s)) + f(u(x+t-s,s))\Big]$$

onde a derivada é no sentido das distribuições, íé , denotando por

$$D_x\Big[(f\circ u)_{\pm(t-s)}\Big] \equiv D_x\Big[f(u(x\pm(t-s),s))\Big]$$

teremos para todo $\varphi \in S$ que

$$D_x\Big[(f\circ u)_{\pm(t-s)}\Big](\varphi) = (f\circ u)_{\pm(t-s)}(\varphi')$$

desde que $(f\circ u)_{\pm(t-s)}$ é limitada, segue o desejado. Logo podemos concluir que

$$u_t(.,t) \xrightarrow{S'} v_o \qquad \text{quando} \qquad t \longrightarrow 0$$

isto é, (3.1.5) vale.

Quanto a dependência das soluções em relação as condições iniciais podemos enunciar o seguinte resultado :

3.2.8 Proposição. (dependência continua) As soluções fracas de (3.1.1),estabelecidas pela expressão (3.2.8),dependem continuamente das condições iniciais correspondentes.

Dem.

Sejam (u_0,v_0) e (u_1,v_1), condições iniciais em $L^1 \cap \mathbb{B}$, e u, v suas respectivas soluções fracas correspondentes, ou seja,

$$u(x,t) = (1/2)D_t G(.,t)*u_0 + (1/2)G(.,t)*v_0 + \\ + (1/2)\int_0^t H(.,t-s)*f(u(.,s))ds \tag{3.2.34}$$

$$v(x,t) = (1/2)D_t G(.,t)*u_1 + (1/2)G(.,t)*v_1 + \\ + (1/2)\int_0^t H(.,t-s)*f(v(.,s))ds \tag{3.2.35}$$

ambas definidas em $\mathbb{R}\times[0,T]$, $T = \text{mínimo}\left\{1,1/2M_1\right\}$. Subtraindo (3.2.35) de (3.2.34) obtemos

$$u(x,t) - v(x,t) = (1/2)D_t G(.,t)*[u_0 - u_1] + (1/2)G(.,t)*[v_0 - v_1] + \\ + (1/2)\int_0^t H(.,t-s)*\left[f(u(.,s))-f(v(.,s))\right]ds$$

considerando que

$$\left|D_t G(.,t)*[u_0 - u_1]\right| \leq 2\|u_0 - u_1\|_{sup}$$

e,

$$\left|G(.,t)*[v_0 - v_1]\right| \leq 2\|v_0 - v_1\|_{sup}$$

e ainda que por (3.2.28), (3.2.29) e o fato de que $T \leq 1/2M_1$, tem-se

$$\left| \int_0^t H(.t-s)*[f(u(.,s)-f(v(.,s)ds \right| \leq \|u - v\|_{sup}$$

segue que

$$\|u - v\|_{sup} \leq \|u_0 - u_1\|_{sup} + \|v_0 - v_1\|_{sup} + (1/2)\|u - v\|_{sup}$$

donde se conclui que

$$\|u - v\|_{sup} \le 2\text{máx}\left\{\|u_o - u_1\|_{sup}, \|v_o - v_1\|_{sup}\right\} \tag{2.3.36}$$

por sua vez,

$$\int |D_t G(x-y,t)*[u_o - u_1]|dx \le 2\|u_o - u_1\|_{L^1}$$

e,

$$\int |G(.,t)*[v_o - v_1]|dx \le \iint_{x-t}^{x+t} |[v_o - v_1](y)|dydx \le$$

$$\le \int_{-t}^{t}\int |[v_o - v_1](y-x)|dxdy \le 2\|v_o - v_1\|_{L^1}$$

ainda, novamente por (3.2.28), (3.2.29) e $T \le 1/2M_1$ que

$$\int \left|\int_o^t H(.,t-s)*[f(u(.,s) - f(v(.,s))ds\right|dx \le \|u - v\|_1$$

portanto,

$$\|u - v\|_1 \le \|u_o - u_1\|_1 + (K_2/2)\|v_o - v_1\|_1 + (1/2)\|u - v\|_1$$

donde se conclui,

$$\|u - v\|_1 \le 2\text{máx}\left\{\|u_o - u_1\|_{L^1}, \|v_o - v_1\|_{L^1}\right\} \tag{3.2.37}$$

Ainda , com base nos cálculos acima feitos, e observando que

$$|G(.,t)*(u_o - u_1)| \le (1/2)\|G(.,t)\|_{sup}\int |[u_o - u_1](x)|dx$$

podemos também, concluir que

$$\|u - v\|_{sup} \le 2\text{máx}\left\{\|u_o - u_1\|_{sup}, \|v_o - v_1\|_{L^1}\right\} \tag{3.2.38}$$

##

III.3 A SOLUÇÃO GLOBAL

A técnica para se obter uma solução global para o PVI (2.1.1) do capítulo II consistia em, depois que obtida a solução parcial para $t \in [0,T]$, tomando por base que para o valor de T dependia exclusivamente do inverso da magnitude de $\|u_o\|_{sup}$, e que

$$\|u(.,T)\|_{sup} \leq \|u_o\|_{sup} \tag{3.3.1}$$

assim poderiamos restabelecer o PVI tomando como condição inicial $u(.,T)$, encontrando uma solução num intervalo $[T,T_1]$, mas tendo em vista (3.3.1) acima, podiamos lá, confirmar a existência de uma solução num intervalo padrão $[T,2T]$, e assim por indução obter a solução global.

Agora aqui ,apesar de todas as regularidades apresentadas em (3.2.36),(3.2.37) e (3.2.38), a técnica aplicada no capítulo II, para obtenção de uma solução global para o PVI parabólico, não pode ser imediatamente aplicada , devido ao fato de que quando tomadas por condições iniciais a solução parcial encontrada, com $t = T$,nem sempre a magnitude das novas condições iniciais serão menores que as magnitudes as antigas , ié, nem sempre será verdade que

$$\text{máx}\left\{\|u(.,T)\|_{sup}, \|u_t(.,T)\|_{sup}\right\} \leq \text{máx}\left\{\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}\right\}$$

nem mesmo vale

$$\text{máx}\left\{\|u(.,T)\|_{L^1}, \|u_t(.,T)\|_{L^1}\right\} \leq \text{máx}\left\{\|u_o\|_{L^1}, \|v_o\|_{L^1}\right\}$$

que seria uma alternativa, como foi sugerido ainda no caso parabólico pela proposição 2.4.4 . Para ilustrar estas afirmações vejamos os exemplos que seguem :

3.3.1 Exemplo. Seja $T > 0$,e $k \geq 2$, arbitrários, porém fixados . Defina

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |\ x\ | > kT \\ -(1/kT)x + 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le kT \\ (1/kT)x + 1 & \text{se} \quad -kT \le x < 0 \end{cases}$$

Por D'Alembert, podemos afirmar que

$$u(x,t) = g_k(x+t-T) + g_k(x-t+T)$$

é solução da equação homogênea unidimensional da onda, temos ainda que

$$u_t(x,t) = g_k'(x+t-T) - g_k'(x-t+T)$$

em quase toda parte de $R\times[0,\infty)$. Um simples cálculo nos leva a : $\|u(x,0)\|_{sup} = 2 - (2/k)$, $\|u_t(x,0)\|_{sup} = 2/kT$, $\|u(x,T)\|_{sup} = 2$ e $\|u_t(x,T)\|_{sup} = 0$.

Logo basta que $k > 1/T$, para que se tenha

$$\text{máx}\left\{\|u(x,T)\|_{sup}, \|u_t(x,T)\|_{sup}\right\} > \text{máx}\left\{\|u(x,0)\|_{sup}, \|u_t(x,0)\|_{sup}\right\}$$

##

3.3.2 Exemplo. Seja $\alpha > 0$ real fixado , considerando o PVI dado por

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = v_o(x) \end{cases}$$

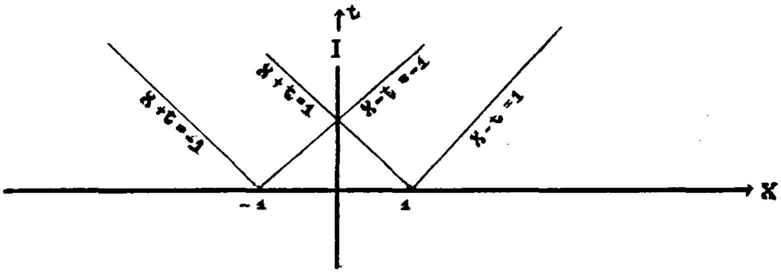
onde,

$$v_o(x) \equiv \begin{cases} \alpha/2 & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}-[-1,1] \end{cases}$$

é obvio que $v_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$. A solução do PVI acima é :

$$u(x,t) = (1/2)\int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy$$

considerando o seguinte gráfico :



podemos perceber que na região I , $u(x,t) = \alpha/2$ (mesmo para outras condições iniciais, teriamos $u(x,t)$ = constante dentro da região I, este fato é conhecido por REVIBRAÇÃO e um estudo detalhado deste fato pode ser encontrado em por exemplo [1] ou [8]). Sendo assim,

$$\|u(.,t)\|_{L^1} \equiv \int |u(y,t)|dy \geq \int_{x-t}^{x+t} |u(y,t)|dy = \alpha t.$$

isto informa que ($\|u(.,t)\|_{L^1}$ $)_{t\geq 0}$ forma uma seqüência crescente.

##

Espelhando-se no teorema sobre extensão de soluções para EDO (ver por exemplo [4])) , podemos estabelecer uma solução fraca global para o PVI (3.1.1) basiando-se no fato de que $u(.,t)$ e $u(.,t)$ pode ser usadas como condições iniciais, para cada t fixado e ainda para γ = sup ou $\gamma = L^1$ existem constantes $K_{\gamma(i)}$ para $1 \leq i \leq 4$ tais que

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \|u(.,t)\|_{\gamma} \leq K_{\gamma(1)} + K_{\gamma(2)} t & (A) \\ \|u_t(.,t)\|_{\gamma} \leq K_{\gamma(3)} + K_{\gamma(4)} t & (B) \end{cases}$$

que encontramos para [0,T], uma solução em $[t,T_t]$ e que portanto não teremos o inconveniente de só haver solução em algum intervalo limitado do tipo [0,b], onde $b = T + \sum T_n$, T_n é o valor encontrado pela fórmula (3.2.32),na n-éssima reaplicação do método na busca de uma solução em $[T_{n-1},T_n]$; pois caso $b < \infty$, as expressões em (3.3.1) nos daria argumentos suficientes para refazermos todos os passos do paragráfo III.2, para ao final encontrar uma solução num intervalo maior que [0,b].

Para provar (3.3.1).A observemos que as expressões (3.2.15),(3.2.18),(3.2.30) e (3.2.31), independentemente de qual seja o valor de T, fornecem para $\gamma = L^1$ ou $\gamma =$ sup

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(.,t)\|_\gamma \le \left[1+T(1+4M_1)\right]\text{máx}\left\{\|u_0\|_\gamma,\|v_0\|_\gamma\right\}$$

em particular para todo $T > 0$, $\gamma = L^1$ ou $\gamma =$ sup , vale

$$\|u(.,T)\|_\gamma \le [1+T(1+4M_1)]\text{máx}\left\{\|u_0\|_\gamma ,\|v_0\|_\gamma\right\}$$

o que suficiente para justificar (3.3.2).A .

Para justificar (3.3.2).B, é suficiente que condições iniciais sejam tais que

$$(3.3.2)\qquad \begin{cases} D^j_x u_0 \in L^1\cap \mathbb{B} & (\ j = 0,1,2\ ) \\ D^j_x v_0 \in L^1\cap \mathbb{B} & (\ j = 0,1\ ) \end{cases}$$

assim sendo,

$$u(x,t) = v_1(x,t) + (1/2)\int_0^t H(.,t-s)*f(u(.,s))ds$$

onde

$$v_1 = (1/2)G_t(.,t)*u_0 + (1/2)G(.,t)*v_0$$

pode ser reescrita por,

$$u(x,t) = v_1(x,t) + (1/2)\int_0^t \left[f(u(x-t+s,s) - f(u(x+t-s,s)\right]ds$$

onde

$$v_1 = (1/2)\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + (1/2)\int_{x-t}^{x-t} v_0(y)dy$$

portanto,

$$(3.3.3)\qquad u_t(x,t) = D_t v_1 - \int_0^t D_x\left[f(u(x-t+s,s)) + f(u(x+t-s,s))\right]ds$$

desde que u seja derivável.

Deixaremos para o próximo parágrafo a demonstração de que com condições iniciais como em (3.3.2), u é derivável e além disso, para todo $t \in [0,T]$ vale :

$$\|D_x u(.,t)\|_{sup} + \|D_x u(.,t)\|_{L^1} < \infty$$

sendo assim,por (3.3.3) teremos que

$$\|u_t(.,t)\|_{sup} \leq \|D_t v_1\|_{sup} + M_1 t \|D_x u\|_{sup}$$

e,

$$\|u_t(.,t)\|_{L^1} \leq \|D_t v_1\|_{L^1} + 2M_1 t \|D_x u\|_1$$

o que é suficiente para provar (3.3.3).B.

Observação. Para obtermos

$$\|D_x u\|_1 = \sup_{t \in [0,T]} \|D_x u(.,t)\|_{L^1} < \infty$$

devemos utilizar o método das aproximações sucessivas tomando v_1 como acima e

$$v_{r+1} = v_1 + (1/2)\int_0^t [f(v_r(x-t+s,s)) - f(v_r(x+t-s,s))]ds$$

para $r \geq 1$, natural. Como v_1 é tal que

$$\|D_x v_1\|_1 < \infty$$

segue-se, utilizando o princípio de indução que

$$\|D_x v_r\|_1 < \infty \qquad (r \in \mathbb{N})$$

como v_r possui subseqüência que converge uniformemente para u, segue-se que

$$\|D_x u\|_1 < \infty$$

III.4 CONDIÇÕES INICIAIS EM $S(\mathbb{R})$

Para estabecermos propriedades relevantes a nossa solução devemos fortalecer nossas condições iniciais, haja visto que mesmo no caso em que $f \equiv 0$, para obtermos diferenciabilidade para nossa solução teremos que ter no mínimo diferenciabilidade das condições iniciais. Tomaremos então

$$u_o \,,\; v_o \in S(\mathbb{R}) \tag{3.4.1}$$

onde $S(\mathbb{R})$ é o espaço de schwartz definido no capítulo I. Inicialmente trabalharemos com a solução local, para no final extendermos os possíveis resultados para a solução global.

Seja v a solução de (3.1.1), corespondente as condições iniciais estabelecidas em (3.4.1), i.é, v é tal que

$$v(x,t) = (1/2)D_t G(.,t)*u_o + (1/2)G(.,t)*v_o + \\ + (1/2)\int_0^t H(.,t-s)*f(u(.,s))ds \tag{3.4.2}$$

A exemplo de fizemos no parágrafo II.3, definiremos uma seqüência diferenciável de funções de W, com o objetivo de encontrar uma subseqüência, tal que a seqüências formadas por suas derivadas sejam todas uniformente convergentes ás derivadas de v,ganhando assim a diferenciabilidade de nossa solução. Assim, consideremos :

$$v_1(x,t) = (1/2)D_t G(.,t)*u_o + (1/2)G(.,t)*v_o$$

ou seja,

$$v_1(x,t) = (1/2)[u_o(x+t)+u_o(x-t)] + (1/2)\int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy \tag{3.4.3}$$

definida em $\mathbb{R}\times[0,T]$, T dado em (3.2.32).

3.4.1 Proposição. Seja v_1 definida como em (3.4.3). Então v_1 tem derivada de todas as ordens e para cada j natural dado, existe uma constante positiva $\overline{K}_j$ tal que,

$$\|D_x^j v_1\|_{sup} \le \overline{K}_j \tag{3.4.4}$$

e para cada m,n naturais, existe uma constante $\overline{K}_{m,n}$ tal que :

$$\|D_t^n D_x^m v_1\|_{sup} \le \overline{K}_{m,n} \tag{3.4.5}$$

Dem.

Como $u_o, v_o \in S$, é imediato que v_1 tem todas as suas derivadas e ainda para cada j natural

$$D_x^j v_1(x,t) = (1/2)[D_x^j u_o(x+t) + D_x^j u_o(x-t)] +$$

$$+ \; (1/2)[D_x^{j-1} v_o(x+t) - D_x^{j-1} v_o(x-t)]$$

daí,

$$\|D_x^j v_1\|_{sup} \le \|D_x^j u_o\|_{sup} + \|D_x^{j-1} v_o\|_{sup}$$

portanto definindo

$$\overline{K}_j \equiv \|D_x^j u_o\|_{sup} + \|D_x^{j-1} v_o\|_{sup}$$

teremos (3.4.4). Ainda, é fácil ver que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$(3.4.6) \qquad \begin{cases} D_x^j u_o(x+t) = D_t^j u_o(x+t) \\ D_x^j u_o(x-t) = (-1)^j D_t^j u_o(x-t) \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} D_x^j v_o(x+t) = D_t^j v_o(x+t) \\ D_x^j v_o(x-t) = (-1)^j D_t^j v_o(x-t) \end{cases}$$

logo (3.4.5) é decorrência imediata de (3.4.4).

##

Consideremos agora, a seqüência $(v_r)_{r \in \mathbb{N}}$, onde v_1 é dado em (3.4.3) e

$$(3.4.8) \qquad v_{r+1} = \mathbb{P}(v_r) \qquad (r \in \mathbb{N})$$

Trata-se de uma seqüência do espaço W_*, definido em (3.2.24), pois a Proposição 3.2.6 garante que W_* é invariante sob a ação de $\mathbb{P}$ e obviamente $v_1 \in W_*$. Portanto por (3.2.26) teremos

$$\|v_r\|_{sup} \le K_o \qquad (r \in \mathbb{N})$$

onde K_o é uma constante positiva que depende da magnitude de $\|u_o\|_{sup}$

e de $\|v_0\|_{sup}$.

De (3.4.8),tem-se para todo natural $r \geq 1$, que

(3.4.9) $$v_{r+1}(x,t) = v_1(x,t) + (1/2)\int_0^t\int H(y,t-s)f(v_r(x-y,s))dyds$$

Com isto, podemos enunciar o seguinte resultado :

3.4.2 Proposição. Seja $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ a seqüência definida em (3.4.8). Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe uma constante $K_j \geq 0$, tal que

(3.4.10) $$\|D_x^j v_r\|_{sup} \leq K_j$$

Dem.

Derivando (3.4.9) em relação a x, obtemos

$$D_x v_{r+1}(x,t) = D_x v_1(x,t)+(1/2)\int_0^t\int H(y,t-s)f'(v_r(x-y,s))D_x v_r(x-y,s)dyds$$

ou, via pertmutação da convolução,

(3.4.11) $$D_x v_{r+1}(x,t) = D_x v_1(x,t) +$$

$$+ \quad (1/2)\int_0^t\int H(x-y,t-s)f'(v_r(y,s))D_x v_r(y,s)dyds$$

Assim, para $j=1$, tomando $K_1 \geq 2\overline{K}_1$ ($\overline{K}_1$ definido em (3.4.4)) segue que

$$\|D_x v_1\|_{sup} \leq \overline{K}_1 \leq (1/2)K_1 < K_1$$

se, considerarmos por hipótese que

$$\|D_x v_r\|_{sup} \leq K_1$$

é válida então por (3.2.28) e (3.4.10) teremos

$$|D_x v_{r+1}(x,t)| \leq |D_x v_1(x,t)| \quad +$$

$$+ (1/2)\int_0^t \left|D_x\left[f(v_r(x-t+s,s)) - f(v_r(x+t-s,s))\right]ds\right. \le$$

$$\le (1/2)K_1 + (1/2)M_1\|D_x v_r\|_{sup}\int_0^t ds \le (1/2)K_1 + tM_1\|D_x v_r\|_{sup} \le K_1$$

o que permite concluir

$$\|D_x v_r\|_{sup} \le K_1 \qquad (r \in \mathbb{N}) \tag{3.4.12}$$

Agora considere K_2 escalar positivo tal que

$$K_2 \ge 2(\overline{K}_2 + M_2TK_1^2)$$

onde $\overline{K}_2$, está definida em (3.4.4) e M_2 em (3.2.27) derivando novamente (3.4.11) obtemos,

$$D_x^2v_{r+1}(x,t) = D_x^2v_1(x,t) +$$

$$+(1/2)\int_0^t H(.,t-s)*\left\{f''(v_r(.,s))\left[D_xv_r(.,s)\right]^2 + f'(v_r(.,s))D_x^2v_r(.,s)\right\}dyds$$

daí, por (3.2.28) e (3.4.4)) teremos

$$|\ D_x^2v_{r+1}(x,t)| \le \overline{K}_2 + M_2\int_0^t \left[D_xv_r(x-t+s,s)\right]^2ds +$$

$$+ M_1\int_0^t |D_x^2v_r(x+t-s,s)|dyds \le \overline{K}_2 + M_2K_1^2T + M_1TK_2 \le K_2$$

donde se pode concluir que

$$\|D_x^2v_r\|_{sup} \le K_2 \qquad (r \in \mathbb{N})$$

Seguindo este raciocínio, podemos para cada j natural encontrar uma constante positiva K_j, tal que

$$\|D_x^jv_r\|_{sup} \le K_j \qquad (r \in \mathbb{N}) \tag{3.4.13}$$

##

3.4.3 Proposição. Para $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ definida em (3.4.8), vale

(3.4.14) $$D_t^2 v_{r+1} = D_x^2 v_{r+1} - D_x f(v_r)$$

Dem.

Derivando a expressão (3.4.9) e observando (3.2.5) teremos

$$D_t v_{r+1}(x,t) = D_t v_1(x,t) - (1/2)\int_0^t G_t(.,t-s)*D_x f(v_r(.,s))ds$$

derivando novamente em relação a t, obtemos

$$D_t^2 v_{r+1}(x,t) = D_t^2 v_1(x,t) - (1/2)\int_0^t D_t^2 G(.,t-s)*D_x f(v_r(.,s))ds -$$

$$- (1/2)D_t G(.,0)*D_x f(v_r(.,t))$$

mas,

$$D_t^2 G(x,t) = D_x^2 G(x,t) \quad \text{e} \quad D_t G(x,0) = 2\delta(x)$$

onde δ é a "função" delta, ainda um simples cálculo mostra que

$$D_t^2 v_1 = D_x^2 v_1$$

então reutilizando (3.2.5) teremos

$$D_t^2 v_{r+1}(x,t) = D_x^2 v_1(x,t) + D_x^2\left[(1/2)\int_0^t H(.,t-s)*f(v_r(.,s))ds\right] -$$

$$- D_x f(v_r(x,t))$$

por (3.4.9) segue o desejado.

##

3.4.4 Proposição. Seja $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ a seqüência definida em (3.4.8). Para cada $j \in \mathbb{N}$, existem constantes não-negativas, R_j e C_j tais que

(3.4.15) $$\|D_x^j f(v_r)\|_{sup} \le R_j$$

(3.4.16) $$\|D_x^j D_t v_r\|_{sup} \le C_j$$

Dem.

A expressão (3.4.15) é simples decorrência de (3.2.27) e (3.4.13). Para provar (3.4.16) observemos que por (3.2.5) e (3.4.9) teremos

$$v_{r+1}(x,t) = v_1 - (1/2)\int_0^t G(.,t-s)*D_x f(v_r(.,s))ds$$

que quando derivado em relação a t, fornece

$$D_t v_{r+1}(x,t) = D_t v_1(x,t) - (1/2)\int_0^t G_t(.,t-s)*D_x f(v_r(x,s))ds$$

portanto, lembrando que

$$D_t G(\xi,\tau) = \delta(\xi+\tau) + \delta(\xi+\tau)$$

segue que,

$$D_t v_{r+1}(x,t) = D_t v_1(x,t) - (1/2)\int_0^t \Big[D_x f(v_r(x+t+s,s) + D_x f(v_r(x-t+s,s)\Big]ds$$

assim derivando j vezes $D_t v_{r+1}$, em relação a variável x, obtemos

$$D_x^j D_t v_{r+1}(x,t) = D_t D_x^j v_1(x,t) - (1/2)\int_0^t \Big[D_x^{j+1} f(v_r(x+t-s,s) +$$

$$+ D_x^{j+1} f(v_r(x-t+s,s)\Big]ds$$

portanto levando em conta (3.4.5) e (3.4.15), teremos

$$|D_x^j D_t v_{r+1}| \leq \overline{K}_{j,1} + 2TR_{j+1}$$

definindo $C_j \equiv \overline{K}_{j,1} + 2TR_{j+1}$, podemos concluir (3.4.16).

##

As proposições 3.4.3 e 3.4.4 juntamente com (3.4.14), garantem a existência, para cada par (m ,n) de naturais , de constantes $K_{m,n} \geq 0$ tal que

(3.4.17) $$\|D_t^n D_x^m v_r\|_{sup} \leq K_{m,n}$$

Para aplicarmos o teorema de ascoli-árzela às seqüências $(D_t^n D_x^m v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ devemos mostrar que para cada m,n fixados, estas seqüências são eqüicontinuas e simplesmente limitadas

3.4.5 Proposição. Para cada n natural fixado a seqüências, $(D_x^n v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ e $(D_x^n D_t v_r)_{r\in\mathbb{N}}$, onde v_r está definida em (3.4.8) são eqüicontínuas e pontualmente limitadas em $\mathbb{R}\times[0,T]$.

Dem.

Para fixar idéia, faremos a demonstração para $(D_x^n D_t v_r)_{r\in\mathbb{N}}$. Que $(D_x^n D_t v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ é simplesmente limitada é decorrência imediata de (3.4.16). Agora sejam $(x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, é fácil ver que o segmento que une (x,t) a (ξ,τ) tem seu gráfico em $\mathbb{R}\times[0,T]$, portanto podemos aplicar o teorema do valor médio em $D_x^n D_t v_r$, para obter um ponto $c_{r,n}$ deste segmento tal que,

$$|D_x^n D_t v_r(x,t) - D_x^n D_t v_r(\xi,\tau)| \leq$$

$$\leq \left| \left[D_x^{n+1} D_t v_r(c_{r,n})\right](x-\xi) + \left[D_x^n D_t^2 v_r(c_{r,n})\right](t-\tau)\right|$$

considere as constantes $K_{n+1,1}$ e $K_{2,n}$ prevenientes de (3.4.17) tomando $m = n+1$, $n = 1$ e $m = 2, n = n$ respectivamente, ao definirmos $\lambda_n = \text{máx}\left\{K_{n+1,1}, K_{2,n}\right\}$ teremos

$$|D_x^n D_t v_r(x,t) - D_x^n D_t v_r(\xi,\tau)| \leq \lambda_n \|(x,t)-(\xi,\tau)\|$$

onde $\|.\|$ é a norma usual induzida do $\mathbb{R}^2$. Observando que λ_n independe de r, o que suficiente para que para cada $n \in \mathbb{N}$, fixado $(D_x^n D_t v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ seja eqüicontínua.

##

Esta proposição, juntamente com o teorema do ponto fixo para contrações , garantem à $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência que converge uniformente para v nas partes compactas de $\mathbb{R}\times[0,T]$. Para simplificar a notação, denotaremos tal subseqüência por $(v_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$.

A proposição 3.4.5 garante ainda que seqüência $(D_x D_t v_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ é eqüicontínua e simplesmente limitada e que por sua vez,possui uma subseqüência, que denotaremos por $(D_x D_t v_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$, que converge uniformemente para $D_x D_t v$. Podemos repetir o raciocínio obtendo na j-éssima vez a subseqüência $(D_x^j D_t v_k^{j+1})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para $D_x^j v$. Utilizando a técnicada diagonal de Cantor, como no paragráfo II.3, teremos que a subseqüência $(v_k^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ será tal que

$$D_x^j D_t v_k^k \longrightarrow D_x^j D_t v \qquad (\, j \in \mathbb{N} \,) \tag{3.4.18}$$

uniformemente nas partes compactas de $\mathbb{R}\times[0,T]$.

Para derivadas apenas em x, podemos raciocinar do mesmo modo e por (3.4.14) e (3.4.18) concluir que para $(\, v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ existe uma subseqüência $(v_{r(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n,\ m \in \mathbb{N}$, fixados

$$D_t^n D_x^m v_{r(s)} \longrightarrow D_t^n D_x^m v \quad \text{quando} \quad s \longrightarrow \infty \tag{3.4.19}$$

uniformemente em cada parte compacta de $\mathbb{R}\times[0,T]$, i.é,

$$v \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times[0,T]) \tag{3.4.20}$$

sendo assim, v é solução no sentido clássico do PVI (3.1.1). Na verdade, basta que $v \in C^2(\mathbb{R}\times[0,T])$ para que

$$v(x,t) = v_1 + + (1/2)\int_0^t \Big[f(v(x-t+s,s) - f(v(x+t-s,s) \Big] ds$$

onde v_1 está definido em (3.4.3), satisfaça,

$$\begin{cases} v_{tt} + D_x[f(v)] = v_{xx} \\ v(x,0) = v_o(x) \text{ e } v_t(x,0) = u_o(x) \end{cases}$$

coisa que ganhamos ao supor, por exemplo : u_o, v_o tais que

$$D_x^j u_o \in L^1 \cap \mathbb{B} \quad (\, j = 1,2,3 \,) \qquad \text{e} \qquad D_x^j v_o \in L^1 \cap \mathbb{B}(\, j = 1,2 \,)$$

Nestes termos, desde que v_1 é solução (de D'Alembert) da equação homogênea da onda, basta mostrar que

$$K(x,t) \equiv (1/2)\int_0^t \Big[f(v(x-t+s,s)) - f(v(x+t-s,s))\Big]ds$$

é tal que,

$$K_{tt} = K_{xx} - D_x[f(v)]$$

mas, como

$$K_t(x,t) = -(1/2)\int_0^t D_x\Big[f(v(x-t+s,s)) + f(v(x+t-s,s))\Big]ds$$

e portanto,

$$K_{tt}(x,t) = -(1/2)\int_0^t D_tD_x\Big[f(v(x-t+s,s)) + f(v(x-t+s,s))\Big]ds -$$

$$- (1/2)\Big[D_xf(v(x-t+s,s)) + D_xf(v(x+t-s,s))\Big]\Bigg|_{s=t} =$$

$$= K_{xx}(x,t) - D_x[f(v(x,t))]$$

Ainda, logo após a demonstração da proposição 3.2.7, encontramos a verificação de que

$$\|v(.,t) - u_o\|_{L^1} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad t \longrightarrow 0$$

e que,

$$v_t(x,t) \overset{S'}{\longrightarrow} v_o \qquad \text{quando} \qquad t \longrightarrow 0.$$

3.4.6 Proposição. Seja v a solução do PVI (3.1.1) correspondente as condições iniciais $u_o, v_o \in S(\mathbb{R})$. Então valem :

$$\|D_t^nD_x^mv\|_{sup} \leq K_{m,n} \qquad (m,n \in \mathbb{N})$$

onde $K_{m,n} \geq 0$ estão definidas em (3.4.17).

Dem.

Por (3.4.17) temos que

$$\|D_t^n D_x^m v_{r(s)}\|_{sup} \leq K_{m,n}$$

onde ($v_{r(s)}$) está definida em (3.4.19), portanto

$$- K_{m,n} \leq D_t^n D_x^m v_{r(s)}(x,t) \leq K_{m,n}$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$, por (3.4.19), fazendo $s \longrightarrow \infty$, teremos o desejado.

##

Nosso próximo objetivo é verificar o decaimento de nossa solução, bem como o de todas as suas derivadas, quando a variável espacial tende para infinito em módulo e a variável temporal permanece fixada ,para tanto apresentaremos um lema que permite afirmar $S(\mathbb{R})$ é invariante sob " certas operações ".

3.4.7 Lema. Sejam $h \in S(\mathbb{R})$, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ e $r,s:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções quaisquer. Então valem as seguintes afirmações :

(i) Para cada $t \in \mathbb{R}$, fixado, as funções

$$h_t(x) \equiv h(x+t) \qquad \text{e} \qquad I(x) \equiv \int_{s(t)}^{r(t)} h(x+y)dy$$

são funções de $S(\mathbb{R})$.

(ii) $$f o h \in S(\mathbb{R})$$

Dem.

Para ver que $h_t \in S(\mathbb{R})$, basta observar que para todo $n,m \in \mathbb{N}$, fazendo $\xi = x+t$, teremos

$$x^n D_x^m h_t(x) = (\xi - t)^n D_\xi^m h(\xi)$$

portanto aplicando a fórmula do binômio de Newton é fácil concluir o desejado. Agora para ver que $I \in S(\mathbb{R})$ devemos observar que $h \in S(\mathbb{R})$ e que portanto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma constante $C_n \geq 0$ tal que

$$h(\xi) \leq C_n \xi^{-(n+2)}$$

assim para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$|x^n I(x)| \leq \left|C_n x^n \int_{s(t)}^{r(t)} (x+y)^{-(n+2)} dy\right| = C_n \left|\frac{x}{x+y}\right|^n \frac{1}{|x+y|}\Bigg|_{y=s(t)}^{y=r(t)}$$

o que permite afirmar que

$$|x^n I(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

quanto ao comportamento das derivadas de I não teremos problemas pois o teorema fundamental do cálculo fornece que

$$D_x I(x) = h(x+r(t)) - h(x+s(t))$$

que nada mais é que uma combinação linear de translações de h.

Para provar (ii), basta aplicar o teorema do valor médio para derivadas no seguimento que une a origem ao ponto fixado h(x), e teremos

$$|foh(x)| \leq |f'(\tau_x)|\,|h(x)|$$

como $h \in S(\mathbb{R})$, então o conjunto em τ_x variará é uniformente limitado em $\mathbb{R}$ e portanto $f'(\tau_x)$ pode ser substituida por uma constante positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, no que conclui a demonstração.

##

3.4.8 Proposição. Seja $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ a seqüência definida em (3.4.8). Então para cada $t \in [0,T], n, r \in \mathbb{N}$, fixados vale

$$D_t^n v_r(.,t) \in S(\mathbb{R}) \tag{3.4.22}$$

Dem.

Lembrando que

$$v_{r+1}(x,t) = v_1 + (1/2)\int_0^t H(.,t-s)*f(v_r(.,s))ds$$

onde

$$v_1(x,t) = (1/2)\Big[u_0(x+t)+u_0(x-t)\Big] + (1/2)\int_{x-t}^{x+t} v_0(y)dy$$

Pelo fato de que

$$\int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy = \int_{-t}^{+t} v_o(x+y)dy$$

teremos pelo item (i) do lema acima , desde que u_o, $v_o \in S(\mathbb{R})$ e $t \in [0,T]$ seja fixado, que :

$$v_1(.,t) \in S(\mathbb{R}) \tag{3.4.23}$$

Lembrando que

$$\int H(x-y,t-s)f(v_r(y,s))dy = f(v_r(x-t+s,s)) - f(v_r(x+t-s,s))$$

pelo lema acima teremos,

$$\omega(x,t) \equiv \int_0^t \int H(x-y,t-s)f(v_r(y,s))dyds \tag{3.4.24}$$

pertence ao espaço de schwartz na variável x, para cada t fixado, desde que $v_r(.,t) \in S$.

Portanto por (3.4.23), (3.4.24) e o princípio de indução, teremos que,

$$v_r(.,t) \in S(\mathbb{R}) \qquad (t \in [0,T]) \tag{3.4.25}$$

Para n = 1,2,3,... podemos observar que

$$D_t v_1(x,t) = (1/2)\left[u_o'(x+t) - u_o'(x-t)\right] + (1/2)\left[v_o(x+t) - v_o(x-t)\right]$$

e que

$$D_t^2 v_1 = D_x^2 v_1$$

portanto é imediato que

$$D_t^n v_1(.,t) \in S \tag{3.4.26}$$

ainda,

$$D_t v_{r+1}(x,t) = D_t v_1(x,t) + (1/2)\int_0^t D_t\left[f(v_r(x-t+s,s)\right] - D_t\left[f(v_r(x+t-s,s)\right]ds$$

mas para todo $j \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{cases} D_t^j[f(v_r(x+t-s,s))] = D_x^j[f(v_r(x+t-s,s))] \\ D_t^j[f(v_r(x-t+s,s))] = (-1)^j D_x^j[f(v_r(x-t-s,s))] \end{cases}$$

portanto,

$$D_t v_{r+1}(x,t) = D_t v_1(x,t) +$$

$$+ (1/2)\int_0^t \left[(-1)D_x f(v_r(x-t+s,s)) - D_x f(v_r(x+t-s,s))\right]ds$$

Desde que $v_r(.,t) \in S$ (como mostra (3.4.25)), segue pelo lema acima que $f(v_r(.,t)) \in S(\mathbb{R})$ portanto $D_t v_r(.,t) \in S$ e com a ajuda de (3.4.5) e (3.4.26) podemos, sem dificuldades verificar que (3.4.22) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0,T]$, fixado.

##

3.4.9 Proposição. Se v é a solução do PVI (3.1.1), cujas condições iniciais $u_o, v_o \in S$, então para cada $t \in [0,T], n, m \in \mathbb{N}$, fixados vale

(3.4.27) $$D_t^n D_x^m v(x,t) \longrightarrow 0 \text{ quando } x \longrightarrow \pm\infty$$

uniformemente $[0,T]$.

Dem.

Por (3.4.19), $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência $(v_{r(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $m,n \in \mathbb{N}$, fixados

$$\lim_{s\to\infty} D_t^n D_x^m v_{r(s)}(x,t) = D_t^n D_x^m v(x,t)$$

em cada parte compacta de $\mathbb{R}\times[0,T]$, e por sua vez, a proposição 3.4.8 permite afirmar que para cada t fixo,

$$\lim_{x\to o} D_t^n D_x^m v_{r(s)}(x,t) = 0 \qquad (s \in \mathbb{N})$$

uniformemente em $[0,T]$, logo para cada $m,n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$, fixados

$$\lim_{x\to\infty} D_t^n D_x^m v(x,t) = \lim_{x\to\infty}\lim_{s\to\infty} D_t^n D_x^m v_{r(s)} = \lim_{s\to\infty}\lim_{x\to\infty} D_t^n D_x^m v_{r(s)} = 0$$

uniformemente em $[0,T]$.

##

Podemos transmitir a nossa solução global, a exemplo do parágrafo II.3, todas estas propriedades acima citadas e ainda mais podemos dar uma interpretação mais forte quanto ao fato de nossa solução satisfazer as condições iniciais, i.é, para o caso de condições iniciais em S, se v é a solução global do PVI (3.1.1), então

$$\|u(.,t)-u_o\|_{sup} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

e,

$$\|u_t(.,t)-v_o\|_{sup} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

com efeito, desde que

$$u(x,t) = (1/2)[u_o(x+t)+u_o(x-t)] + (1/2)\int_{x-t}^{x+t} v_o(y)dy +$$

$$+ (1/2)\int_o^t \Big[f(v(x-t+s,s)) - f(v(x+t-s,s))\Big]ds$$

não é difícil ver que, para $0 < t < T$,

$$|u(x,t)-u_o| \le (1/2)|[u_o(x+t)+u_o(x-t)]-u_o(x)| + (1/2)\int_{-t}^{t} |v_o(x+y)|dy +$$

$$+ 4tM_1 \text{máx}\Big\{\|u_o\|_{sup}, \|v_o\|_{sup}\Big\}$$

e,

$$|u_t(x,t)-v_o| \le (1/2)|[u_o'(x+t)-u_o'(x-t)| +$$

$$+ (1/2)|[v_o(x+t)-v_o(x-t)]-v_o(x)| + tM_1\|D_t v\|_{sup}$$

e sendo $u_o, v_o \in S$, tem-se imediatamente o desejado.

3.5 RESUMO DO CAPÍTULO

Reformulando o capítulo III em um só resultado podemos enunciar o seguinte teorema :

3.5.1 Teorema. O problema de valor inicial, definido em $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, por

$$\begin{cases} u_t + [f(u)]_x = u_{xx} \\ u(x,0) = u_o(x) \quad e \quad u_t(x,0) = v_o(x) \end{cases}$$

onde $f \in C^\infty$, possui uma única solução $u \in W$, W é definido por

$$W \equiv \left\{ \omega:\mathbb{R}\times[0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \text{mensurável} \ / \ \|\omega\|_1 + \|\omega\|_{sup} < \infty \right\}$$

onde,

$$\|\ \omega\ \|_1 \equiv \sup_{t\geq o} \int |\omega(x,t)|dx$$

$$\|\ \omega\ \|_{sup} \equiv \sup\ (\ |\omega(x,t)|\ /\ (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty[\ )$$

desde que u_o tenha derivada até ordem 3 e

$$D_x^n u_o \in L^1(\mathbb{R})\cap \mathbb{B}(\mathbb{R}) \qquad (\ n = 0,1,2,3\ )$$

e v_o derivável até ordem 2, tal que

$$D_x^n v_o \in L^1(\mathbb{R})\cap \mathbb{B}(\mathbb{R}) \qquad (\ n = 0,1,2\ )$$

Além disso, se u_o, $v_o \in S(\mathbb{R})$. Então

(i) $$u \in C^\infty(\ \mathbb{R}\times[0,\infty[\ )$$

para cada $t \in [0,\infty)$,$n,m \in \mathbb{N}$,fixados

(ii) $$D_t^n D_x^m u(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \pm\ \infty$$

uniformemente em cada cada parte compacta de $[0,\infty)$.

##

Observação. No exemplo parabólico, tinhamos garantido para a solução global que para cada a > 0, arbitráriamente pequeno e $m,n \in \mathbb{N}$, fixados, existiam constantes $K_{m,n}(a) \geq 0$ tais que

$$\sup_{t \geq a} \|D_t^n D_x^m u(.,t)\|_{sup} \leq K_{m,n}(a)$$

No entanto o mesmo não podemos afirmar para a solução global do caso hiperbólico devido ao fato de que as constantes $K_{m,n}$ definidas na proposição 3.4.6 dependem, como também ocorria no caso parabólico, da magnitude das condições iniciais, no entanto aqui, como se pode ver no exemplo 3.3.1, não temos o fato de que as constantes, digamos $K_{m,n}(T)$, encontradas quando reaplicamos o método do paragrafo III.4 nas condições iniciais $u(x,T)$ e $u_t(x,T)$, possam ser majoradas pelas $K_{m,n}$ encontradas quando u_o e v_o são as condições iniciais.

CAPÍTULO IV

Neste capítulo estabeleceremos algumas propriedades a mais para as soluções dos problemas levantados nos capítulos anteriores.

IV.1 OUTROS RESULTADOS PARA O EXEMPLO PARABÓLICO

Seja $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ a solução do PVI

$$(4.1.1) \qquad \begin{cases} u_t + [f(u)]_x = u_{xx} & (A) \\ u(x,0) = u_o(x) & (B) \end{cases}$$

onde $u_o \in L^1(\mathbb{R})\cap \mathbb{B}(\mathbb{R})$ e $f \in C^{\infty}$, estabelecida pelo teorema 2.5.1.

Para esta solução valem as seguintes propriedades :

4.1.1 Proposição. Seja $t \geq 0$. Definindo $\mathbb{T}(t)$ como sendo o operador não linear , que age sobre $L^1\cap \mathbb{B}$,por

$$\mathbb{T}(t)[u_o] \equiv u(.,t)$$

onde u é a solução de (4.1.1) correspondente a condição inicial u_o. Então $\mathbb{T}$ é uma contração em $L^1(\mathbb{R})$.

Dem.

Sejam $u_o,v_o\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathbb{B}(\mathbb{R})$ e u, v soluções de (4.1.1) correspondentes as condições iniciais u_o e v_o respectivamente, então para cada $t \geq 0$, fixado teremos

$$\|\mathbb{T}(t)[u_o] - \mathbb{T}(t)[v_o]\|_{L^1} = \| u(.,t)-v(.,t)\|_{L^1}$$

pela proposição 2.4.5, segue imediato que para cada $t \geq 0$, fixado vale

$$\|\mathbb{T}(t)[u_o] - \mathbb{T}(t)[v_o]\|_{L^1} \le \|u_o - v_o\|_{L^1}.$$

##

4.1.2 Proposição (conservação da energia total).

Definindo para todo $t \ge 0$

$$M(t) = \int u(x,t)dx$$

teremos para todo $t \ge 0$, que

$$M(t) = M(0)$$

Dem.

Sejam $T > 0$,fixado e $0 < a < T$ e $A > 0$ dados. Como,

(i) $$\int_a^T u_t(x,t)dt = u(x,T) - u(x,a)$$

(ii) $$\int_{-A}^{A} [f(u(x,t))])_x dx = f(u)\Big|_{x=-A}^{x=A}$$

(iii) $$\int_{-A}^{A} u_{xx}(x,t)dx = u_x(x,t)\Big|_{x=-A}^{x=A}$$

assim,integrando-se (4.1.1), em $[-A,A]\times[a,T]$,por (i),(ii) e (iii) teremos

$$\int_{-A}^{A} u(x,T)dx = \int_{-A}^{A} u(x,a)dx + \int_a^T [u_x - f(u)]\Big|_{x=-A}^{x=A} dt$$

fazendo $A \longrightarrow \infty$ e em seguida $a \longrightarrow 0$,lembrando que $f(0) = 0$ e lançando mão das propriedades de u dadas em (iii) do teorema 2.5.1, segue que

$$M(T) = \int u(x,T)dx = \int u_o(x)dx = M(0).$$

##

4.1.3 Proposição (princípio de ordenação).

Sejam $u_o, v_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, satisfazendo

$$u_o(x) \leq v_o(x) \qquad (\text{ em quase toda parte de } \mathbb{R})$$

então, se u,v as soluções de (4.1.1) correspondentes as condições iniciais u_o e v_o respectivamente, teremos para cada $t > 0$

$$u(x,t) \leq v(x,t) \qquad (\text{ para todo } x \in \mathbb{R})$$

Dem.

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ e defina

$$\theta_- \equiv \frac{|\theta|-\theta}{2} \tag{4.1.2}$$

é fácil ver que

$$\theta_- = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta \geq 0 \\ -\theta & \text{se } \theta < 0 \end{cases}$$

Seja $t \geq 0$, fixo, porém arbitrário, a proposição 4.1.1 garante que

$$\|v(x,t)-u(x,t)\|_{L^1} \leq \|v_o-u_o\|_{L^1}$$

enquanto que a proposição 4.1.2 , permite afirmar que

$$\int \Big[v(x,t)-u(x,t)\Big]dx = \int \Big[v_o(x)-u_o(x)\Big]dx = \|v_o-u_o\|_{L^1}$$

assim, desde que $v_o(x) - u_o(x) \geq 0$ (q.t.p.), segue que por (4.1.2) que

$$2\int \Big[v(x,t)-u(x,t)\Big]_- dx = \int |v(x,t)-u(x,t)|dx - \int \Big[v(x,t)-u(x,t)\Big]dx \leq 0$$

ou seja,

$$\int\Big[v(x,t)-u(x,t)\Big]_{-}dx \le 0$$

sendo o integrando,contínuo e não-negativo,resulta fácil que

$$\Big[v(x,t)-u(x,t)\Big]_{-} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde se conclui que

$$v(x,t) - u(x,t) \ge 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

##

A próxima propriedade diz respeito ao comportamento assintótico da solução de (4.1.1), ao $t \longrightarrow \infty$. No caso mais simples , i.é, para a equação linear unidimensional da calor,

$$\text{(4.1.3)} \qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = u_o(x) \end{cases} \qquad (\ x \in \mathbb{R}, t \ge 0\ )$$

cuja solução é explicitada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-(x-y)^2/4t} u_o(y)dy$$

podemos ver imediatamente que

$$\|u(.,t)\|_{sup} \le \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \|u_o\|_{L^1}\ t^{-1/2}$$

isto significa que $\|u(.,t)\|_{sup}$ decai tão rapidamente quanto o inverso de $\sqrt{t}$, ao $t \longrightarrow 0$, o que mostra que a difusão no caso linear é um processo lento.

Por sua vez, mesmo no caso linear, $\|u(.,t)\|_{L^1}$ não pode decair a zero para $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$, a não ser que $M(0) = 0$, pois da proposição 4.1.2, obtemos para todo $t \ge 0$:

$$\|u(.,t)\|_{L^1} \ge |M(0)|$$

contudo,para o nosso exemplo parabólico ainda podemos garantir que existe uma constante não-negativa K tal que

$$\|u(.,t)\|_{sup} \leq K\ t^{-1/2}$$

antes pórem provaremos um lema auxiliar :

4.1.4 Lema. Seja $\omega:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável tal que $\omega,\omega' \in L^1 \cap \mathbb{B}$. Então

$$\|\ \omega\ \|^3_{L^2} \leq 2\ \|\ \omega\ \|^2_{L^1} \|\omega'\|_{L^2}$$

Dem.

Pelo lema 2.3.8 temos que

$$\|\ \omega\ \|^4_{L^2} \leq \|\ \omega\ \|^2_{L^1} \|\ \omega\ \|^2_{sup}$$

mas por sua vez, o lema 2.3.10 afirma que

$$\|\ \omega\ \|^2_{sup} \leq 2\|\ \omega\ \|_{L^2} \|\ \omega'\|_{L^2}$$

logo majorando a desigualdade anterior com esta , segue o desejado.

##

Definição. Definimos O(1) como sendo a classe das funções $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f é limitada por uma constante positiva numa vizinhança do ∞ . Denotaremos por O(1) a toda e qualquer função $f \in O(1)$.

4.1.5 Proposição (decaimento por difusão).

Seja u a solução do PVI (4.1.1) correspondente a condição inicial $u_o \in L^1 \cap \mathbb{B}$. Então existe uma constante $K \geq 0$ tal que

$$\|u(.,t)\|_{sup} \leq Kt^{-1/2}$$

numa vizinhança de $t = \infty$

Dem.

Seja $T \geq 0$, $A > 0$ e $0 < a < T$ dados. Multiplicando (4.1.1).A por $(1+t)u$ teremos

$$(1+t)uu_t + (1+t)u[f(u)]_x = (1+t)uu_{xx}$$

que integrando em $[-A,A]\times[a,T]$, nos fornece

$$\frac{(1+T)}{2}\int_{-A}^{A} u^2(x,T)dx + \int_{a}^{T}(1+t)\left\{ \left[u(.,t)f(u(.,t))\right]\Big|_{A}^{-A} - \right.$$

$$\left. - \int_{-A}^{A} u_x(.,t)f(u(.,t))\right\}dt = \frac{(1+a)}{2}\int_{-A}^{A} u^2(x,a)dx + \frac{1}{2}\int_{a}^{T}\int_{-A}^{A} u^2(x,t)dxdt$$

$$+ \int_{a}^{T}(1+t)\left\{u(.,t)u_x(.,t)\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} u_x^2(x,t)dx\right\} dt$$

fazendo $A \longrightarrow \infty$,por (iii) do teorema 2.5.1, teremos

$$(1+T)\|u(.,T)\|_{L^2}^2 = (1+a)\|u(.,a)\|_{L^2}^2 -$$

$$- 2\int_{a}^{T} (1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2 dt + \int_{a}^{T} \|u(.,t)\|_{L^2}^2 dt$$

finalmente fazendo $a \longrightarrow 0$,

(4.1.4) $$(1+T)\|u(.,T)\|_{L^2}^2 + 2\int_{0}^{T} (1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2 dt =$$

$$= \|u_o\|_{L^2}^2 + \int_{0}^{T} \|u(.,t)\|_{L^2}^2\, dt$$

agora aplicando o lema 4.1.4 em $u(.,t)$, obtemos

$$\|u(.,t)\|_{L^2} \leq 2^{1/3}\|u_o\|_{L^1}^{2/3}\|u_x(.,t)\|_{L^2}^{1/3}$$

portanto,

$$(1+T)\|u(.,t)\|_{L^2}^2 + \int_{0}^{T}(1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2 dt \leq$$

$$\leq \quad \|u_o\|^2_{L^2} + 4^{1/3}\|u_o\|^{4/3}_{L^1}\int_0^T \|u_x(.,t)\|^{2/3}_{L^2}dt$$

mas usando a desigualdade de Hölder (ver por exemplo [12],pág 65) podemos demonstrar facilmente que

$$\int_0^T \|u_x(.,t)\|^{2/3}_{L^2}\,dt = \int_0^T (1+t)^{-1/3}\Big[(1+t)\|u_x(.,t)\|^2_{L^2}\Big]^{1/3}dt \leq$$

$$\leq (1+T)^{1/3}\Big[\int_0^T (1+t)\|u_x(.,t)\|^2_{L^2}dt\Big]^{1/3}$$

portanto,

(4.1.5) $$(1+T)\|u(.,t)\|_{L^2} + \int_0^T (1+t)\|u_x(.,t)\|^2_{L^2}dt \leq$$

$$\leq O(1)\Big\{ 1 + (1+T)^{1/3}\Big[\int_0^T (1+t)\|u_x(.,t)\|^2_{L^2}dt\Big]^{1/3}\Big\}$$

para simplificar podemos denotar,

(4.1.6) $$\mu(t) \equiv (1+t)\|u(.,t)\|^2_{L^2} + \int_0^t (1+\tau)\|u_x(.,\tau)\|^2_{L^2}d\tau$$

assim, por (4.1.5) é imediato ver que,

(4.1.7) $$\mu(T) \leq O(1)\Big\{ 1 + (1+T)^{1/3}\mu(T)^{1/3}\Big\}$$

observando (4.1.6), (desde que $u \not\equiv 0$), obtemos facilmente que,

$$\mu(t) \longrightarrow \infty \qquad \text{quando} \qquad t \longrightarrow \infty$$

portanto multiplicando (4.1.7) por $\mu(t)^{-1/3}$, podemos obter facilmente que

$$\mu(T) \leq O(1)(1+T)^{1/2}$$

retornando a (4.1.6), obtemos,

$$\|u(.,t)\|_{L^2} = K_1(1+T)^{-1/4} \tag{4.1.8}$$

e,

$$\int_0^T (1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2 dt = K_1(1+T)^{1/2} \tag{4.1.9}$$

em particular, por (4.1.9) podemos encontrar $t_o > 0$ sufientemente pequeno tal que

$$\|u_x(.,t_o)\|_{L^2} < \infty \tag{4.1.10}$$

Agora derivando a equação (4.1.1).A em relação a variável x e multiplicando o resultado por $(1+t)^2 u_x$, obtemos,

$$(1+t)^2 u_x u_{tx} + (1+t)^2 u_x [f(u)]_{xx} = (1+t)^2 u_x u_{xxx} \tag{4.1.11}$$

como, por (iii) do teorema 2.5.1, podemos tirar que

(i) $$\iint_{t_o}^{T} (1+t)^2 u_x u_{tx} dtdx = (1/2)\Big[(1+T)^2 \|u_x(.,T)\|_{L^2}^2 - (1+t_o)^2 \|u_x(.,t_o)\|_{L^2}^2 \Big] - \int_{t_o}^{T} (1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2 dt$$

(ii) $$\iint_{t_o}^{T} (1+t)^2 u_x [f(u)]_{xx} dtdx = - \int_{t_o}^{T} (1+t)^2 f'(u) u_x u_{xx} dt$$

(iii) $$\iint_{t_o}^{T} (1+t)^2 u_x u_{xxx} dtdx = - \int_{t_o}^{T} (1+t)^2 \|u_{xx}(.,t)\|_{L^2}^2 dt$$

então integrando (4.1.11) em $[-A.A]\times[t_o,T]$, e em seguida fazendo $A \longrightarrow \infty$, obteremos

$$(4.1.12) \qquad (1+T)^2\|u_x(.,T)\|^2_{L^2} + \int_{t_o}^{T}(1+t)^2\|u_{xx}(.,t)\|^2_{L^2}dt \le$$

$$\le O(1)\left\{\|u_x(.,t_o)\|^2_{L^2} + \int_{t_o}^{T}(1+t)\|u_x(.,t)\|^2_{L^2}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_o}^{T}(1+t)^2\int|f'(u(x,t))u_x(x,t)u_{xx}(x,t)|dxdt \right\}$$

usando o fato de que para A, B $\ge$ 0 e C > 0, vale,

$$(1/C)A^2 + CB^2 \ge AB$$

segue imediato que

$$|f'(u(x,t)u_x(x,t)u_{xx}(x,t)| \le (1/C)u^2_{xx}(x,t) + CM^2_2u^2(x,t)u^2_x(x,t)$$

onde C é qualquer constante positiva e

$$M_2 \equiv \sup\left\{ \; | \; f''(\alpha)| \; / \; | \; \alpha \; | \le 2\|u_o\|_{sup} \right\}$$

Tomando C suficientemente grande, obtemos via (4.1.12) que

$$(4.1.13) \qquad (1+T)^2\|u_x(.,T)\|^2_{L^2} + \int_{t_o}^{T}(1+t)^2\|u_{xx}(.,t)\|^2_{L^2}dt \le$$

$$\le O(1)\left\{ \|u_x(.,t_o)\|^2_{L^2}+ \int_{t_o}^{T}(1+T)\|u_x(.,t)\|^2_{L^2}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_o}^{T}(1+t)^2\int u^2(x,t)u^2_x(x,t)dxdt \right\}$$

mas pelo lema 2.3.10 e (4.1.8) acima, teremos

$$\int_{t_o}^{T}(1+t)^2\int u^2(x,t)u^2_x(x,t)dxdt \qquad \le \qquad O(1)\int_{t_o}^{T}(1+t)^2\|u_x(.,t)\|^2_{sup}\|u(.,t)\|^2_{L^2}dt$$

$$\leq \quad O(1)\int_{t}^{T}(1+t)^{3/2}\|u_x(.,t)\|_{L^2}\|u_{xx}(.,t)\|_{L^2}dt \;\leq$$

$$\leq \quad O(1)\left\{(1/C)\int_{t_o}^{T}(1+t)^2\|u_{xx}(.,t)\|_{L^2}^2dt \;+\; C\int_{t_o}^{T}(1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2dt\right\}$$

para $C > 0$ constante. Ao tomarmos C convenientemente grande, podemos concluir de (4.1.13) que

$$(1+T)^2\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2 + \int_{t_o}^{T}(1+t)^2\|u_{xx}(.,t)\|_{L^2}^2dt \;\leq$$

$$\leq O(1)\left\{\;\|u_x(.,t_o)\|_{L^2}^2 \;+\; \int_{t_o}^{T}(1+t)\|u_x(.,t)\|_{L^2}^2dt\right\}$$

donde,por (4.1.9) obtemos

$$\|u_x(.,T)\|_{L^2} \leq O(1)(1+T)^{-3/4}$$

pelo lema 2.3.10, concluimos que

$$\|u(.,t)\|_{sup} \leq O(1)(1+t)^{-1/2}$$

o que é suficiente para estabelecer o desejado.

##

IV.2 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA TOTAL PARA O EXEMPLO HIPERBÓLICO

Com relação a solução do PVI estudado no capítulo III,ou seja,

$$(4.2.1)\qquad \begin{cases} u_{tt} + [f(u)]_x = u_{xx} & \text{(A)}\\ u(x,0) = u_o \;,u_t(x,0) = v_o & \text{(B)}\end{cases}$$

onde $u_o,v_o \in S(\mathbb{R})$ e $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, podemos garantir que :

4.2.1 Proposição (Conservação da energia total).

Sejam $u_o, v_o S(\mathbb{R})$ e, u a solução correspondente de (4.2.1). Se para $\tau \geq 0$ definirmos

$$E(\tau) \equiv \int u_t(x,\tau)dx$$

então,

$$E(\tau) = \int v_o(x)dx = E(0)$$

Dem.

Rescrevendo (4.2.1).A para

(4.2.1) $$u_{tt} + [f(u) - u_x]_x = 0$$

é fácil ver que a expressão à esquerda de (4.2.1) denota a divergência do campo vetorial dado por

$$\vec{F} \equiv (u_t, f(u)-u_x)$$

portanto (4.2.1) pode ser reescrita por

$$\text{div } \vec{F} = 0$$

Dados $\tau > 0$ e $A > 0$, denotando por

$$\partial I \equiv \text{fronteira}([-A,A]\times[0,\tau])$$

$$\vec{n} \equiv \text{normal}(\partial I)$$

aplicando o teorema da divergência, teremos

$$0 = \int_{\partial I} \vec{F}.\vec{n}\ ds = \int_{-A}^{A} u_t(x,\tau)dx - \int_{-A}^{A} u_t(x,0)dx +$$

$$+ \int_0^{\tau} \Big[u_x(A,t) + f(u(A,t)\Big]dt - \int_0^{\tau} \Big[u_x(-A,t) - f(u(-A,t)\Big]dt$$

fazendo $A \longrightarrow \infty$ e levando em conta (ii) do teorema 3.5.1, podemos concluir que

$$\int u_t(x,\tau)dx = \int u_t(x,0)dx = \int v_o(x)dx$$

##

REFERÊNCIAS

[1] Courant, R e D. Hilbert.Methods of mathematical Phisics.Vol II Interscience.Wiley-NY.Pág. 209.1962.

[2] Figueiredo, Djairo G. de. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. CNPq. Projeto Euclides. 1977.

[3] Folland, Geraldo B. Introduction to Partial Differential Equations. Princeton University Press. 1976.

[4] Hirsch, M e S. Smale. Differential Equations,Dinamical Systens and Linear Algebra. Academic Press. 1974.

[5] Iório, Rafael e Valéria Iório. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. CNPq. Projeto Euclides. 1988.

[6] Iório, Rafael e Wagner Vieira L. Nunes 18° Colóquio Brasileiro de Matemática; IMPA.

[7] Iório, Valéria. EDP, Um Curso de Graduação. Impa. CNPq. 1991.

[8] John, Fritz Partial Differential Equations. 2nd.ed. Appl. Math. Sci.1. Springer Verlag. 1975.

[9] Lax, P.D. " Weak Solutions of Nonlinear Hiperbolic equations and their Numerical Computation ". Communs. Pure and Appl. Math. vol. 9. no. 4. Pág 159-193. 1956.

[10] Lima, E. Lages. Espaços Métricos. Projeto Euclides. 1977.

[11] Okikiolu, G.O. Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L^p-Spaces. Academic Press Inc. .London.1971.

[12] Oleinik, O. A. " On the Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations ". Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.. Vol. 109. Pág. 1098. 1956.

[13] Reed, Michael. Abstract Nonlinear Waves. Lectures in Math 507. Springer Verlag. 1976.

[14] Rudim, Walter. Real and Complex Analysis. Mcgraw-Will. Kagakusha, Ltd. 1976.

[15] Zingano, Paulo R.. " Leis de Conservação com Viscosidade : Uma Introdução ". VI Reunião Regional Sul da SBM. UFSC. 1991.