IVANILDA BASSO ASEKA

APROXIMAÇÕES MULTIRESOLUÇÃO E BASES ORTONORMAIS WAVELET DE $L^2(R)$

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências Física e Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Etzel Ritter von Stockert

Florianópolis

1995

APROXIMAÇÕES MULTIRESOLUÇÃO E BASES ORTONORMAIS WAVELET DE $L^2(R)$

por

IVANILDA BASSO ASEKA

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do título de mestre no Curso de Pós - Graduação em Matemática, pela comissão formada por:

Orientador: ______________________________

Prof. Dr. Etzel Ritter von Stockert

____

Prof. Dr. Marco Antônio Raupp

____

Prof. Dr. Paul James Otterson

Florianópolis, 01 de junho de 1995.

Aos meus pais, Guilhermina e Felisbino Basso.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Etzel Ritter von Stockert pela orientação, ao Prof. Waldir Quandt pelos conhecimentos transmitidos.

Em especial agradeço ao Prof. Paul James Otterson pelos ensinamentos, auxílio e estímulo durante todo o curso.

Sumário

Resumo

Neste trabalho estudamos caracterização e propriedades de uma "aproximação multiresolução", que é uma seqüência $(V_j)_{j\in Z}$ de subespaços fechados usados para aproximação de funções pertencentes a $L^2(R)$.

Inicialmente, provamos que existe uma função $\phi \in L^2(R)$ tal que, para todo $j \in Z$ fixo, $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\phi(2^j x - k)$, $k \in Z$, é uma base ortonormal de V_j.

Estudamos as propriedades da aproximação multiresolução e mostramos que esta é caracterizada por uma função 2π -periódica. Descrevemos propriedades desta função 2π -periódica e provamos que sob certas condições satisfeitas por ela, obtemos uma aproximação multiresolução.

Finalmente, mostramos que a partir da aproximação multiresolução podemos construir uma função ψ tal que $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)$, $k \in Z$, é base ortonormal de $L^2(R)$. Chamamos esta função ψ de *wavelet* e a base gerada por ela de *base ortonormal wavelet.*

Abstract

In this work, we study the characterization and properties of a "multiresolution aproximation", that is, a sequence of vector spaces $(V_j)_{j\in Z}$ for approximating $L^2(R)$ functions.

We prove that there exist a function $\phi \in L^2(R)$ such that, for any $j \in Z$, $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\phi(2^j x - k)$, $k \in Z$, is a orthonormal bases of V_j.

In other hand we also study the properties of a multiresolution aproximation, and we show that it is characterized by a 2π -periodic and we prove that under certain conditions that are satisfies for her, we obtain a multiresolution aproximation.

Finally, use show that from any multiresolution aproximation we can build a function ψ such that $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)$, $k \in Z$, is an orthonormal bases of $L^2(R)$. We called this function ψ *wavelet* and the bases generated by ψ *wavelet* orthonormal bases.

Introdução

A Análise de Wavelets é um recente e estimulante desenvolvimento da Matemática que tem encontrado importantes aplicações em um amplo campo da Ciência e Engenharia. Assim como a Análise de Fourier a Análise de wavelets trata de expansão linear de funções, mas em lugar de funções trigonométricas as funções básicas em expansão wavelets, chamadas wavelets, são obtidas a partir de uma única função ψ. "Wavelets" foram introduzidas por A. Grossmann e J. Morlet, [5], como famílias de funções

$$h_{a,b}(x) = a^{-1/2}\, h\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad a, b \in R,\ a \neq 0,$$

geradas por uma única função h por operações de dilatação e translação. A. Grossmann e J. Morlet usaram estas famílias para obter expansão não necessariamente ortogonais para funções pertencentes a $L^2(R)$.

Dependendo do tipo de aplicação diferentes famílias de wavelets podem ser escolhidas. Nós nos restringiremos a escolha $a = 2^{-j}$ e $b = k2^{-j}$, para o qual os $h_{a,b}$ constituem uma base ortonormal, neste caso,

$$h_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, h(2^j x - k).$$

Um exemplo de uma base ortonormal wavelet para $L^2(R)$ é dado quando fazemos a escolha

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le x < 1, \\ 0 & \text{outros valores de x.} \end{cases}$$

(esta base é chamada de *base de Haar*).

No ano de 1986, S. Mallat e Y.Meyer [11], [8], perceberam que as diferentes construções de uma base wavelet podem ser realizadas através de uma aproximação multiresolução. Esta é uma estrutura na qual as funções f em $L^2(R)$ podem ser consideradas como um limite de sucessivas aproximações ou projeções, $P_j f$, $j \in Z$ nestes subespaços, ou seja,

$$f = \lim_{j \to \infty} P_j f,$$

onde as diferentes aproximações $P_j f$ correspondem a versões de " suavidade 2^{-j} " da função f.

Nesta dissertação definimos aproximação multiresolução de $L^2(R)$ estudamos suas propriedades e, a partir de sua definição construimos uma função ψ, que chamamos de wavelet, tal que

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, \psi(2^j x - k),$$

$k \in Z$, é uma base ortonormal (wavelet) de $L^2(R)$.

Organizamos isto da seguinte forma:

No capítulo 1 enumeramos alguns resultados e definições que são utilizados posteriormente e definimos aproximação multiresolução de $L^2(R)$.

No capítulo 2, supondo que a seqüência $(V_j)_{j \in Z}$ é uma aproximação multiresolução de $L^2(R)$, provamos que existe uma função $\phi \in L^2(R)$ tal que, para todo $j \in Z$ fixo e $k \in Z$, a família

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, \phi(2^j x - k) \tag{1}$$

constitue uma base ortonormal de V_j. Chamamos esta função ϕ de *função scaling*.

No capítulo 3, mostramos algumas propriedades da função 2π -periódica H_ϕ que caracteriza a transformada de Fourier de ϕ. E respondemos a principal questão do capítulo, isto é, se V_j é o espaço gerado por uma família $\{\phi_{j,k}\}$ (como definida em (1)), em que condições a seqüência $(V_j)_{j\in Z}$ é uma aproximação multiresolução.

No capítulo 4, partimos do fato da seqüência de subespaços fechados $(V_j)_{j\in Z}$ ser uma aproximação multiresolução para podermos escrever, para toda $f \in L^2(R)$,

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{O_j} f$$

onde O_j denota o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1}, e também escrever

$$L^2(R) = \bigoplus_{j\in Z} O_j .$$

Construimos uma função ψ tal que suas dilatações e translações geram uma base wavelet ortonormal de $L^2(R)$, ou seja, tal que

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\ \psi(2^j x - k), \qquad k \in Z,$$

é uma base de $L^2(R)$.

Capítulo 1

Preliminares e Aproximação Multiresolução

1.1 Preliminares

Nesta primeira seção descreveremos algumas definições e resultados fundamentais que serão utilizados posteriormente. As demonstrações aqui omitidas podem ser encontrados nos livros citados nas referências (indicamos após cada resultado um dos livros). Denotaremos por R o conjunto dos números reais e por Z o conjunto dos inteiros.

Começaremos com os espaços $L^p(R)$.

Definição. Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Representaremos por $L^p(R)$ a classe de todas as funções mensuráveis f, definidas em R tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Observação: Aqui estamos identificando as funções que diferem entre si nos pontos de um conjunto de medida nula.

Em $L^p(R)$ podemos definir uma *norma*, associando a cada $f \in L^p(R)$ o número real

$$\| f \|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Se duas funções f e g são integráveis não podemos afirmar que o produto f.g seja uma função integrável. Entretanto, temos o seguinte resultado.

1.1.1 Proposição. (Desigualdade de Schwarz). Se $f \in L^2(R)$ e $g \in L^2(R)$ então $f.g \in L^1(R)$ e tem-se a desigualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)|\, dx \leq \| f \|_2 \| g \|_2,$$

Dem.: veja [10].

1.1.2 Proposição. (Desigualdade de Minkowski). Se $f, g \in L^p(R)$ então

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p,$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Dem.: veja [10].

Observação:

(i) No espaço vetorial $L^2(R)$ definimos o produto interno como

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx,$$

onde $f, g \in L^2(R)$ e a barra denota a conjugada complexa. Em particular, $\langle f, f \rangle = \| f \|_2^2$.

Definição. Definiremos $L^p(0, 2\pi)$, para $1 \le p < \infty$, como sendo a classe de todas as funções mensuraveis f definidas sobre o intervalo $(0, 2\pi)$ tal que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Assumiremos que funções em $L^p(0, 2\pi)$ são estendidas periodicamente para todo R, a saber, $f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo x. Consequentemente, para $p = 2$, $L^2(0, 2\pi)$ é o espaço das funções 2π – periódicas de quadrado integrável.

Em $L^p(0, 2\pi)$, definimos a norma

$$\| f \|_{L^p(0,2\pi)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

para $f \in L^p(0, 2\pi)$.

As desigualdades de Schwarz e Minkowski são também válidas para funções em $L^p(0, 2\pi)$. Em particular, para $p = 2$ podemos definir o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx,$$

$f, g \in L^2(0, 2\pi)$.

Usaremos posteriormente a desigualdade de Minkowski generalizada

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y, x) dy \right|^2 dx \right\}^{1/2} \le \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(y, x)|^2 dx \right\}^{1/2} dy.$$

Definição. Definimos $\ell^p(Z)$, $1 \le p < \infty$, como o espaço das seqüências $\{\alpha_k\}_{k \in Z}$ que satisfazem

$$\left(\sum_{k \in Z} |\alpha_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Em $\ell^p(Z)$ definimos a norma $\left\|\{\alpha_k\}\right\|_{\ell^p(Z)} := \left(\sum_{k \in Z} |\alpha_k|^p \right)^{1/p}$, $(1 \le p < \infty)$.

Analogamente aos espaços de Hilbert $L^2(R)$ e $L^2(0, 2\pi)$, o espaço $\ell^2(Z)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno

$$\left\langle \{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \right\rangle_{\ell^2(Z)} = \sum_{k \in Z} \alpha_k \overline{\beta_k}.$$

Para toda $f \in L^1(0, 2\pi)$, definimos os *coeficientes de Fourier* da f pela fórmula

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \tag{1.1.1}$$

onde $k \in Z$.

Assim, associamos para cada $f \in L^1(0, 2\pi)$ a função $\hat{f}$ sobre Z, que para cada k associa o correspondente coeficiente de Fourier, $\hat{f}(k)$.

A *série de Fourier* de f é definida por

$$\sum_{k \in Z} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Como $L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$, [2], (1.1.1) pode ser aplicado para toda $f \in L^2(0, 2\pi)$.

O teorema de Riesz-Fischer afirma que se $\{c_k\}_{k \in Z}$ é uma seqüência tal que $\sum_{k \in Z} |c_k|^2 < \infty$ então, existe alguma $f \in L^2(0, 2\pi)$ tal que

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx. \qquad (k \in Z)$$

O teorema de Parseval afirma que

$$\sum_{k \in Z} \hat{f}(k)\, \overline{\hat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

onde $f \in L^2(0, 2\pi)$ e $g \in L^2(0, 2\pi)$.

Podemos sumarizar estes dois teoremas no que segue:

1.1.3 Teorema. A aplicação $F: f \to \hat{f}$ é um isomorfismo de $L^2(0, 2\pi)$ sobre $\ell^2(Z)$. Em outras palavras, F aplica $L^2(0, 2\pi)$ injetivamente sobre $\ell^2(Z)$ tal que vale a identidade de Parseval

$$\sum_{k \in Z} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \qquad (f \in L^2(0, 2\pi))$$

onde $c_k = \hat{f}(k)$ é o k-ésimo coeficiente de Fourier de f.

Dem.: veja [2].

Observação: Usaremos o símbolo de Kronecker δ com o significado usual,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Definição. Seja $f \in L^1(R)$, a *transformada de Fourier* de f, denotada por $\hat{f}$, é definida por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

1.1.4 Teorema. Seja $f \in L^1(R)$ e α um número real

(i) Se $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, então $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \alpha)$;

(ii) Se $g(x) = f(x - \alpha)$, então $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-i\alpha\omega}$.

Como $L^2(R)$ não é um subconjunto de $L^1(R)$ a definição de transformada de Fourier não se aplica diretamente para todas funçoes em $L^2(R)$. Veremos agora o *teorema de Plancherel* que estende a definição de transformada de Fourier para estas funções.

1.1.5 Teorema. Podemos associar para cada $f \in L^2(R)$ uma função $\hat{f} \in L^2(R)$ tal que valem as seguintes propriedades:

(i) Se $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$, então $\hat{f}$ é a transformada de Fourier de f previamente definida;

(ii) Para toda $f \in L^2(R)$, $\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\left\| \hat{f} \right\|_2$; (identidade de Parseval).

(iii) A aplicação $f \mapsto \hat{f}$ é um isomorfismo de $L^2(R)$ sobre $L^2(R)$;

(iv) As seguintes relações simétricas existem entre f e $\hat{f}$:

$$\text{se} \quad \varphi_A(\omega) := \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\omega}\,dx \quad \text{e} \quad \psi_A(x) := \int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega,$$

$$\text{então,} \quad \left\| \varphi_A - \hat{f} \right\|_2 \to 0 \quad \text{e} \quad \|\psi_A - f\|_2 \to 0 \ \text{quando } A \to \infty.$$

Dem.. veja [13].

Observações:

(i) Para funções em $L^2(R)$ definimos: $\hat{f}(\omega) = \lim\limits_{A \to \infty} \varphi_A(\omega)$.

(ii) O teorema 1.1.4 vale também para funções em $L^2(R)$ devido ao teorema acima.

Definição. A *convolução* de duas funções f e g em $L^1(0, 2\pi)$ é definida por

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,dy, \qquad x \in R.$$

Definição. Uma *identidade aproximada* é uma seqüência $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ de funções 2π – periódicas tal que,

(i) $\varphi_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in R, \ \forall n \in Z^+ := \{1,2,\ldots\}$

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)dx = 1, \quad \forall\ n \in Z^+;$

(iii) para todo $\delta \in (0, \pi)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(x)dx + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(x)dx\right] = 0.$

1.1.6 Proposição. Os núcleos de Féjer $\{K_N\}$ definidos por

$$K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N}\left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)e^{ikx}$$

formam uma identidade aproximada.

Dem.: veja [6].

1.1.7 Teorema. Sejam $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ uma identidade aproximada e $f \in L^p(R)$ com $1 \leq p < \infty$. Então $\varphi_n * f \to f$ em $L^p(R)$.

Dem.: veja [1].

1.1.8 Teorema. (Lema de Fatou). Seja $(f_n)_{n\in N}$ uma seqüência de funções integráveis e não negativas que converge em quase toda parte para uma função f. Se $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ é finito, então f é integrável e tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Dem.: veja [10].

1.1.9 Teorema. (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma seqüência de funções integráveis que converge em quase toda parte para uma função f. Se $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para todo n e $g \in L^1(R)$, então f é integrável e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Dem.: veja [10].

1.1.10 Lema. Seja $f \in L^1(R)$. Então a série $\sum_{k\in Z} f(x+2k\pi)$ converge em quase toda parte para uma função 2π – periódica F. Além disto, a convergência em quase toda parte é absoluta e $F \in L^1(0, 2\pi)$.

Dem.: A convergência em quase toda parte é estabelecida uma vez que

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \sum_{k\in Z} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |f(x)|dx = \sum_{k\in Z} \int_0^{2\pi} |f(y+2k\pi)|dy,$$

Além disto,
$$\int_0^{2\pi} \left|\sum_{k\in Z} f(x+2k\pi)\, dx\right| \le \int_0^{2\pi} \sum_{k\in Z} |f(x+2k\pi)|dx$$
$$= \sum_{k\in Z} \int_0^{2\pi} |f(x+2k\pi)|dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty. \qquad \square$$

Agora observe que para $g \in L^2(R)$ a série $\sum_{k\in Z} \left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2$ é convergente. Com efeito, como $g \in L^2(R)$ temos $\hat{g} \in L^2(R)$. Consequentemente, $\left|\hat{g}(\omega)\right|^2 \in L^1(R)$. Portanto, pelo lema 1.1.10, a série $\sum_{k\in Z} \left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2$ converge em quase toda parte para uma função G, $G \in L^1(0, 2\pi)$.

1.1.11 Lema. Se $\int_0^{2\pi} \sum_{n\in Z} |f_n(x)|^2 dx < \infty$ então,

$$\sum_{n\in Z} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n\in Z} |f_n(x)|^2 dx.$$

Dem.. Seja $G(x) = \sum_{n \in Z} |f_n(x)|^2 < \infty$ em quase toda parte. Então $\sum_{n \leq N} |f_n(x)|^2 \leq G(x) \in L^1(0,2\pi)$. Logo pelo teorema 1.1.9,

$$\sum_{n \in Z} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{n < N} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \lim_{N \to \infty} \sum_{n \leq N} |f_n(x)|^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n \in Z} |f_n(x)|^2 dx. \qquad \square$$

Definição. Dizemos que a seqüência de operadores $\{T_n\}$ em $L^2(R)$ *converge fortemente* para T se para toda função f em $L^2(R)$ vale $\lim_{n \to \infty} \|T_n f - Tf\|_2 = 0$.

1.2 Aproximação Multiresolução

Definição. Uma *aproximação multiresolução de $L^2(R)$* é uma seqüência $(V_j)_{j \in Z}$ de subespaços fechados de $L^2(R)$ tal que valem as seguintes propriedades

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in Z, \tag{1.2.1}$$

$$\bigcup_{j \in Z} V_j \text{ é densa em } L^2(R) \quad \text{e} \quad \bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}, \tag{1.2.2}$$

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \quad \forall j \in Z, \tag{1.2.3}$$

$$f(x) \in V_j \Rightarrow f(x - 2^{-j}k) \in V_j \quad \forall k \in Z, \tag{1.2.4}$$

Existe um isomorfismo T de V_0 sobre $\ell^2(Z)$ que comuta com a açõo de Z. (1.2.5)

Na propriedade (1.2.5), a ação de Z sobre V_0 é a translação de funções por inteiros enquanto que a ação de Z sobre $\ell^2(Z)$ é a translação usual. Para melhor entendimento da frase "T comuta com a ação de Z", observe o seguinte esquema,

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} V_0 \\ g_0 = g(x) \end{array} \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "Z"'] \arrow[dr] & \begin{array}{c} \ell^2(Z) \\ \varepsilon(n) \end{array} \arrow[d, "Z"'] \\
\begin{array}{c} V_0 \\ g_k = g(x-k) \end{array} \arrow[r, "T"'] & \begin{array}{c} \ell^2(Z) \\ \varepsilon(n-k) \end{array}
\end{tikzcd}$$

A aproximação de uma função $f \in L^2(R)$ por funções em V_j, chamada de aproximação na resolução 2^j, é definida como a projeção ortogonal de f sobre V_j. Para calcular esta projeção ortogonal mostraremos, no capítulo 2, que existe uma função $\phi \in L^2(R)$ tal que, para qualquer $j \in Z$ fixo,

$$\left(2^{j/2}\,\phi(2^j x - k)\right)_{k \in Z}$$

é uma base ortonormal de V_j.

A informação adicional que se obtém na aproximação da resolução 2^{j+1} quando comparada com a resolução 2^j, é dada por uma projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1}.

Seja O_j este complemento ortogonal de V_j em V_{j+1}. No capítulo 4, construimos uma função ψ tal que

$$\left(2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)\right)_{k \in Z}$$

é uma base ortonormal de O_j.

Um exemplo de espaços V_j satisfazendo (1.2.1) - (1.2.5) é

$$V_j = \left\{ f \in L^2(R); \quad \forall\, k \in Z: \quad f \text{ é constante em } \left(2^{-j}k\,,\, 2^{-j}(k+1)\right) \right\}.$$

Mostraremos que estes espaços, de fato, formam uma aproximação multiresolução. Comecemos por (1.2.1).

Se $f \in V_j$ então, f é constante em $\left(k2^{-j}\,,\,(k+1)2^{-j}\right)$, isto é, f é constante em $\left(\frac{m}{2}2^{-j}\,,\,\frac{m+2}{2}2^{-j}\right)$, onde $k = \frac{m}{2}$, $m \in Z$; ou ainda, f é constante em $\left(m2^{-(j+1)}\,,\,(m+2)2^{-(j+1)}\right)$.

Logo, f é constante em $\left(m2^{-(j+1)}\,,\,(m+1)2^{-(j+1)}\right)$, pois $(m+1)2^{-(j+1)}$ é o ponto médio do último intervalo acima. Disto segue que $f \in V_{j+1}$ para todo $j \in Z$. Portanto $V_j \subset V_{j+1}$ $\forall j \in Z$.

Vejamos agora a primeira parte da propriedade (1.2.2).

Seja a seqüência $f_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, f\left(2^j x - k\right)$ onde

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{se } 0 \le x \le 1/2, \\ -c & \text{se } 1/2 < x \le 1, \\ 0 & \text{para outros valores.} \end{cases}$$

com c constante positiva. Neste caso temos $f_{j,k} \in \bigcup_{j \in Z} V_j$, (tome $j = 0$ e $k = 0$).

Nosso objetivo é mostrar que a $\bigcup_{j \in Z} V_j$ é densa em $L^2(R)$, mostramos então que toda função $g \in L^2(R)$ pode ser aproximada por uma combinação linear finita da família das $f_{j,k}$, (observe que $f_{j,k} \in \bigcup_{j \in Z} V_j$ para todo k). Este fato é provado no apêndice 1 para a função de Haar. Com isto construimos uma seqüência na $\bigcup_{j \in Z} V_j$ que aproxima a função g pertencente a $L^2(R)$, ou seja, a união dos subespaços V_j é densa em $L^2(R)$.

Para provar que $\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$, mostraremos que se existe uma função nesta intersecção então esta função é nula.

Seja então $f \in \bigcap_{j\in Z} V_j$.

Então $f \in V_{j+1}$, assim, por definição, f é constante no intervalo $\left(k2^{-(j+1)}\ ,\ (k+1)2^{-(j+1)}\right)$, $k \in Z$. Em particular, f é constante em $\left(-2^{-(j+1)}\ ,\ 0\right)$ e $\left(0\ ,\ 2^{-(j+1)}\right)$, ou ainda, podemos dizer que f é constante em $\left(0\ ,\ 2^{-(j+1)}\right) = \left(0\ ,\ \frac{1}{2}2^{-j}\right)$.

Como $f \in \bigcap_{j\in Z} V_j$, $f \in V_j$ e assim f é constante em $\left(k2^{-j}\ ,\ (k+1)2^{-j}\right)$. Em particular, f é constante p.p. em $\left(0\ ,\ 2^{-j}\right)$.

Como f é constante em $\left(0\ ,\ 2^{-j}\right)$ segue que f também o é em $\left(\frac{1}{2}2^{-j}\ ,\ 2^{-j}\right)$.

Suponhamos agora que $f \in V_{j-1}$, (isto é verdade pois f está na intersecção dos subespaços V_j), então segue que f é constante no intervalo $\left(k2^{-(j-1)},\ (k+1)2^{-(j-1)}\right)$. Em particular f é constante em $\left(0,\ 2^{-(j-1)}\right) = \left(0,\ 2.2^{-j}\right)$.

Como $f \in \bigcap_{j\in Z} V_j$, f pertence a V_{j-n} e, neste caso, f é constante em $\left(k2^{-(j-n)}\ ,\ (k+1)2^{-(j-n)}\right)$. Em particular, f é constante em $\left(0\ ,\ 2^{-(j-n)}\right) = \left(0\ ,\ 2^n 2^{-j}\right)$.

Note que a medida que tomamos a função f pertencente a subespaços menores, ou seja, aumentando o valor de n, f é constante em intervalos cada vez maiores (para todo j). Portanto, quando n tende a infinito concluimos que f é constante em $(0,\ \infty)$.

De modo análogo analisamos o comportamento de f no intervalo $(-\infty,\ 0)$, então podemos afirmar que f é constante neste intervalo. Ou seja, f(x) é constante para todo $x \in R$. Mas notemos que, sendo assim, a função f deve ser nula pois, caso contrário, f não seria de quadrado integrável e assim não pertenceria a nenhum subespaço V_j.

Portanto, se $f \in \bigcap_{j\in Z} V_j$ então $f \equiv 0$. E (1.2.2) está provado.

Verifiquemos que (1.2.3) e (1.2.4) valem. Consideramos para os dois casos $f \in V_j$, que por definição é equivalente a dizer que f(x) é constante para $k2^{-j} < x < (k+1)2^{-j}$. Ou ainda,

$$f(x) = \text{constante para } k2^{-j} < x < (k+1)2^{-j}$$

$$\Leftrightarrow f(2x) = \text{constante para } k2^{-j} < 2x < (k+1)2^{-j}$$

$$\Leftrightarrow f(2x) = \text{constante para } k2^{-(j+1)} < x < (k+1)2^{-(j+1)},$$

o que significa que $f(2x) \in V_{j+1}$ para todo $j \in Z$, e (1.2.3) vale.

Por outro lado,

$$f(x) = \text{constante para } k2^{-j} < x < (k+1)2^{-j}$$

$$\Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k) = \text{constante para } k2^{-j} < x - 2^{-j}k < (k+1)2^{-j}$$

$$\Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k) = \text{constante para } 2k2^{-j} < x < (2k-1)2^{-j}$$

$$\Leftrightarrow f(x - 2^{-j}k) = \text{constante para } m2^{-j} < x < (m+1)2^{-j}, \quad (m = 2k)$$

Portanto, $f(x - 2^{-j}k)$ está em V_j para todo $k \in Z$. Com isto (1.2.4) está provado.

Finalmente, a propriedade (1.2.5). Definimos o operador $T : V_0 \rightarrow \ell^2(Z)$ que associa a cada $f \in V_0$ a seqüência $\{\alpha_k\}_{k \in Z}$, onde α_k é o valor da função f no intervalo (k , k+1).

A imagem de $f \in V_0$ pelo operador T está em $\ell^2(Z)$, pois

$$\infty > \int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in Z} \int_k^{k+1} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in Z} \int_k^{k+1} |\alpha_k|^2 dx$$

$$= \sum_{k \in Z} |\alpha_k|^2.$$

Capítulo 2

Base ortonormal da aproximação multiresolução

Seja $(V_j)_{j\in Z}$ uma aproximação multiresolução de $L^2(R)$.

Provaremos que existe uma função $\phi \in L^2(R)$ tal que, para todo $j \in Z$ fixo, $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, \phi(2^j x - k)$, $k \in Z$, é uma base ortonormal de V_j. Faremos isto para $j = 0$, ou seja, mostraremos que existe uma função $\phi \in L^2(R)$ tal que $\phi(x-k)$ é base de V_0, $k \in Z$.

A propriedade (1.2.3) da aproximação multiresolução nos permite estender este resultado para todo $j \in Z$.

Como $(V_j)_{j\in Z}$ é uma aproximação multiresolução, pela propriedade (1.2.5), existe um isomorfismo T de V_0 sobre $\ell^2(Z)$. Consequentemente, existe uma função $g \in V_0$, tal que,

$$T(g) = \{e_n\}_{n\in Z},$$

onde $e_n = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 0, \\ 0 & \text{se} \quad n \neq 0, \end{cases}$ ou seja, $\{e_n\} = (\ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, 1,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots)$.

Sabemos que T comuta com translação de inteiros, assim para $k \in Z$,

$$(Tg)(x-k) = T(g(x-k)) = \{e_{n-k}\}_{n\in Z}.$$

A seqüência $\{e_{n-k}\}_{n\in Z}$ é base de $\ell^2(Z)$. Logo $(g(x-k))_{k\in Z}$ é uma base de V_0. Portanto, existe uma função $g \in L^2(R)$ tal que $(g(x-k))_{k\in Z}$ é base de V_0.

2.1 Proposição. Se $f \in V_0$ é tal que $(Tf)(x) = \{\alpha_k\}_{k\in Z}$, então f pode ser decomposta como $f(x) = \sum_{k\in Z} \alpha_k g(x-k)$, onde $(g(x-k))_{k\in Z}$ é base de V_0.

Dem.. Sejam $\{\alpha_k\}_{k\in Z} \in \ell^2(Z)$ imagem de $f \in V_0$ pelo isomorfismo T, (da propriedade 1.2.5), e $(g(x-k))_{k\in Z}$ base de V_0. Então, para esta função f

$$\{\alpha_k\}_{k\in Z} = (Tf)(x) = T\left(\sum_{k\in Z} \beta_k g(x-k)\right) = \sum_{k\in Z} \beta_k T(g(x-k))$$

$$= \sum_{k\in Z} \beta_k \, e_{n-k}$$

$$= \sum_{k\in Z} \beta_k \,(\ldots,0,1,0,\ldots) = \sum_{k\in Z} (\ldots,0,\beta_k,0,\ldots) = \{\beta_k\}_{k\in Z}.$$

Portanto $f(x) = \sum_{k\in Z} \alpha_k g(x-k)$. □

Vejamos agora como pode ser escrita a transformada de Fourier de funções que estão no subespaço V_0. O lema a seguir nos diz que as transformadas de Fourier destas funções são escritas como o produto de funções H_f, 2π-periódicas, pela transformada de Fourier da função g.

2.2 Lema. Se $(g(x-k))_{k\in Z}$ gera V_0 então, para toda $f \in V_0$, existe $H_f \in L^2(0, 2\pi)$ tal que

$$\hat{f}(\omega) = H_f(\omega)\,\hat{g}(\omega).$$

Dem.. Seja $f \in V_0 \subset L^2(R)$. Como $(g(x-k))_{k\in Z}$ é base de V_0 temos, $f(x) = \sum_{k\in Z} \alpha_k g(x-k)$, onde $\{\alpha_k\}_{k\in Z} \in \ell^2(Z)$. Então,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k \in Z} \alpha_k g(x-k) \right] e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k \in Z} \alpha_k g(y)\, e^{-i\omega y}\, e^{-i\omega k} \right) dy, \text{ fazendo } x = y + k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k \in Z} \alpha_k e^{-i\omega k} \right) g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy = \sum_{k \in Z} \alpha_k e^{-i\omega k} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y}\, dy$$

$$= \sum_{k \in Z} \alpha_k e^{-ik\omega}\, \hat{g}(\omega).$$

Definindo $H_f(\omega) := \sum_{k \in Z} \alpha_k e^{-ik\omega}$, como símbolo associado a seqüência $\{\alpha_k\}$ temos, para todo $\omega \in R$, $\hat{f}(\omega) = H_f(\omega)\hat{g}(\omega)$.

De fato temos que $H_f \in L^2(0, 2\pi)$, pois pela identidade de Parseval $\int_0^{2\pi} |H_f(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \sum_{k \in Z} |\alpha_k|^2 < \infty$. □

2.3 Teorema. Seja $(V_j)_{j \in Z}$ uma aproximação multiresolução de $L^2(R)$. Para toda função $g \in V_0$ onde $(g(x-k))_{k \in Z}$ gera V_0 no sentido que para $f \in V_0$ $f(x) = \sum \beta_k g(x-k)$ existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que,

$$c_1 \leq \sum_{k \in z} \left| \hat{g}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \leq c_2,$$

em quase toda parte.

Dem.. Por hipótese, existe um isomorfomismo T de V_0 sobre $\ell^2(Z)$ tal que

$$T : V_0 \longrightarrow \ell^2(Z)$$
$$f \longmapsto \{\alpha_k\}$$

Definamos em V_0 as normas $\| \,.\, \|_a$ e $\| \,.\, \|_b$:

$$\begin{cases} \| f \|_a := \| f \|_2 \\ \| f \|_b := \| Tf \|_{\ell^2} \ , \ f \in V_0 \end{cases}.$$

Pelo fato de $T^{-1}: \ell^2(Z) \to V_0$ ser contínuo, existe uma constante $c' > 0$ tal que,

$$\| f \|_a = \left\| T^{-1}(\{\alpha_k\}) \right\|_{\ell^2} \le c' \left\| \{\alpha_k\} \right\|_{\ell^2}$$

para toda $\{\alpha_k\}_{k \in Z} \in \ell^2(Z)$, ou seja, $\| f \|_2 \le c' \left\| \{\alpha_k\} \right\|_{\ell^2}$.

Por outro lado, o fato de T ser contínua implica que existe uma constante $c > 0$ tal que,

$$\| Tf \|_{\ell^2} \le \frac{1}{c} \| f \|_2 \qquad \text{para toda } f \in V_0,$$

isto é, $c \| Tf \|_{\ell^2} \le \| f \|_2$, para toda $f \in V_0$, ou ainda, $c \left\| \{\alpha_k\} \right\|_{\ell^2} \le \| f \|_2$ onde $Tf = \{\alpha_k\}_{k \in Z} \in \ell^2(Z)$.

Logo, existe constantes positivas c e c' tais que, para toda $f \in V_0$ vale

$$c \left\| \{\alpha_k\} \right\|_{\ell^2} \le \| f \|_2 \le c' \left\| \{\alpha_k\} \right\|_{\ell^2} \tag{2.1}$$

onde $Tf = \{\alpha_k\}_{k \in Z}$.

Agora, note que,

$$\| f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \left\| \hat{f} \right\|_2^2 \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_f(\omega) \hat{g}(\omega) \right|^2 d\omega, \qquad \text{pelo lema 2.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in Z} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left| H_f(\omega) \right|^2 \left| \hat{g}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in z} \int_0^{2\pi} \left| H_f(x) \right|^2 \left| \hat{g}(x + 2k\pi) \right|^2 dx \qquad (\ \omega = x + 2k\pi\ )$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| H_f(x) \right|^2 \sum_{k \in Z} \left| \hat{g}(x + 2k\pi) \right|^2 dx. \qquad (\text{ lema } 1.1.11\ )$$

Além disto, observe que como $H_f(\omega) = \sum_{k \in Z} \alpha_k e^{ik\omega}$, onde $\{\alpha_k\} \in \ell^2(Z)$ (lema 2.2), podemos, pelo isomorfismo entre os espaços $L^2(0, 2\pi)$ e $\ell^2(Z)$, escrever

$$\| \alpha_k \|_{\ell^2}^2 = \sum_{k \in Z} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_f(\omega)|^2 d\omega = \| H_f \|_{L^2(0,2\pi)}^2 . \tag{2.3}$$

Assim a partir de (2.2) a desigualdade dupla (2.1) pode ser formulada como:

$$c^2 \| H_f \|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_f(x)|^2 \sum_{k \in Z} \left| \hat{g}(x + 2k\pi) \right|^2 dx \leq c'^2 \| H_f \|_2^2 ,$$

ou ainda,

$$c^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|H_f(x)|^2}{\| H_f \|_2^2} \sum_{k \in Z} \left| \hat{g}(x + 2k\pi) \right|^2 dx \leq c'^2 .$$

Agora tomamos uma seqüência de funções (f_N) tais que as correspondentes

razões $\dfrac{|H_{f_N}|^2}{\|H_{f_N}\|_2^2}$ formem uma identidade aproximada.

Sejam K_N o núcleo de Féjer: $K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}$, e

$f_N = (F \circ T)^{-1}\left(\sqrt{K_N}\right)$, sendo F o isomorfismo do teorema 1.1.3 . Então $H_f(x) = H_{f_N}(x_0 - x)$, ($0 < x_0 < 2\pi$) onde $H_{f_N}(x) = \sqrt{K_N(x)}$, obtemos

$$\frac{|H_{f_N}|^2}{\|H_{f_N}\|_2^2} = K_N ,$$

pois

$$\| H_f \|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_{f_N}(x_0 - x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x_0 - x)\, dx = 1, \qquad \text{(proposição 1.1.6).}$$

Portanto,

$$c^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x_0 - x)\, \Phi(x)\, dx \leq c'^2 ,$$

onde definimos $\Phi(x) := \sum_{k\in Z} \left|\hat{g}(x+2k\pi)\right|^2$.

Usando a definição de convolução (o fato de $\Phi \in L^1(R)$ garante que a convolução está bem definida) obtemos da desigualdade acima

$$c^2 \leq (K_N * \Phi)(x_0) \leq c'^2,$$

e, pelo teorema 1.1.7,

$$K_N * \Phi \to \Phi,$$

em quase toda parte.

Portanto, existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que,

$$c_1 \leq \sum_{k\in Z} \left|\hat{g}(x+2k\pi)\right|^2 \leq c_2,$$

em quase toda parte. □

Ou ainda, com este teorema, podemos afirmar que existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que,

$$A \leq \left(\sum_{k\in Z} \left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2\right)^{1/2} \leq B, \tag{2.4}$$

em quase toda parte.

A pergunta que se põe agora é se existe uma $\phi \in V_0$ tal que $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ seja base ortonormal de V_0. Poderiamos tentar a partir de $(g(x-k))_{k\in Z}$ obter uma base ortogonal usando o processo de Gram-Schmidt. A questão é se esta nova base, h_k, provém de uma função h que satisfaz $h_k(x) := h(x-k)$, $k \in Z$.

Seja então $h_0 := g_0$, onde $g_k(x) := g(x-k)$, $k \in Z$. Assim,

$$h_1 := g_1 - \frac{\langle g_1, h_0\rangle}{\|h_0\|_2^2} h_0 ;$$

$$h_{-1} := g_{-1} - \frac{\langle g_{-1}, h_0 \rangle}{\| h_0 \|_2^2} h_0 - \frac{\langle g_{-1}, h_1 \rangle}{\| h_1 \|_2^2} h_1 ;$$

.

.

ou seja, $$h_n = \begin{cases} \dfrac{g_0}{\|g_0\|_2^2} & \text{se } n = 0, \\ g_n - \sum\limits_{|j|<n} \left\langle g_n, h_j \right\rangle \dfrac{h_j}{\| h_j \|_2^2} & \text{se } n > 0, \\ g_n - \sum\limits_{|j|<n} \left\langle g_n, h_j \right\rangle \dfrac{h_j}{\| h_j \|_2^2} - \left\langle g_n, h_{-n} \right\rangle \dfrac{h_{-n}}{\|h_{-n}\|_2^2} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Agora observe o seguinte: ($k = 1$)

$$h_1(x) = g_1(x) - \frac{\langle g_1(x), h_0(x) \rangle}{\| h_0 \|_2^2} h_0(x)$$

$$= g(x-1) - \left\langle g(x-1) \,,\, \frac{g(x)}{\| g \|_2} \right\rangle \frac{g(x)}{\| g \|_2}, \quad \text{pois } h_0(x) = g_0(x) = g(x).$$

Note que $\left\langle g(x-1) \,,\, \dfrac{g(x)}{\| g \|_2} \right\rangle = 0$ se, e somente se, g_1 e g_0 são ortogonais; neste caso não necessitamos da ortogonalização, e temos $h_1(x) = g(x-1)$.

Por outro lado, se g_1 e g_0 não são ortogonais a nova base apesar de ortogonal perdeu a propriedade $h_1(x) = h(x-1)$ que é uma propriedade importante da aproximação multiresolução; devido a isto não podemos usar o processo de Gram-Schmidt.

Vamos então ortogonalizar a base $(g(x-k))_{k \in Z}$ baseados na transformada de Fourier.

Antes, porém, vejamos um teorema que garante podermos expressar a ortonormalidade da família $(\phi(x-k))_{k \in Z}$ como $\sum\limits_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(x + 2k\pi)\right|^2 = 1$.

2.4 Teorema. Para qualquer função $\phi \in L^2(R)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\{\phi(x-k)\ ;\ k \in Z\}$ é uma família ortonormal no sentido que

$$\langle \phi(x-k)\,,\, \phi(x-\ell) \rangle = \delta_{k,\ell}, \qquad k,\, \ell \in Z.$$

(ii) A transformada de Fourier $\hat{\phi}$ de ϕ satisfaz

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\phi}(x)\right|^2 e^{-ijx}\, dx = \delta_{j,0}, \qquad j \in Z.$$

(iii) A identidade

$$\sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(x+2k\pi)\right|^2 = 1$$

vale para quase todo x.

Dem.. Como $\left|\hat{\phi}(x)\right|^2$ está em $L^1(R)$ segue, do lema 1.1.10, que a série infinita

$$G(x) := \sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(x+2k\pi)\right|^2,$$

que define a função G, converge em quase toda parte para G e, que $G \in L^1(0, 2\pi)$. Agora, para cada $j \in Z$, o j-ésimo coeficiente de Fourier de G é

$$c_j(G) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ijx} G(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in Z} \int_0^{2\pi} e^{-ijx}\left|\hat{\phi}(x+2k\pi)\right|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in Z} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-ijy}\left|\hat{\phi}(y)\right|^2 dy, \qquad (\ y = x + 2k\pi\ )$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijy}\left|\hat{\phi}(y)\right|^2 dy$$

$$= \delta_{j,0}\,, \qquad j \in Z.$$

Portanto, $G(x) = \sum_{j\in Z} c_j(G)\, e^{-ijx} = \sum_{j\in Z} \delta_{j,0}\, e^{-ijx} = 1$ o que prova (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Falta provar a equivalência entre (i) e (ii).

$$\delta_{k,\ell} = \langle \phi(x-k)\,,\, \phi(x-\ell) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k)\, \overline{\phi(x-\ell)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y-j)\, \overline{\phi(y)}\, dy \qquad (\, k = j+\ell \ \text{ e } \ y = x-\ell \,)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(y-j)\, \overline{\hat{\phi}(y)}\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(y)\, e^{-ijy}\, \overline{\hat{\phi}(y)}\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijy} \left|\hat{\phi}(y)\right|^2 dy$$

$$= \delta_{j,0}\,, \qquad j \in Z. \qquad \square$$

Sendo assim, a função ϕ que procuramos tal que $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ seja base ortonormal de V_0 deve ter transformada de Fourier satisfazendo:

$$\sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1 \tag{2.5}$$

e pelo fato de ϕ estar em V_0 temos, pelo lema 2.2, que sua transformada de Fourier se escreve como:

$$\hat{\phi}(\omega) = H_\phi(\omega)\, \hat{g}(\omega), \tag{2.6}$$

onde $H_\phi(\omega) = \sum_{k\in Z} \alpha_k e^{-ik\omega}$.

Suponhamos que (2.5) e (2.6) sejam satisfeitas.

Então observe que $\hat{\phi}(\omega + 2k\pi) = H_\phi(\omega)\, \hat{g}(\omega + 2k\pi)$. Logo,

$$\left|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = \left|H_\phi(\omega)\right|^2 \left|\hat{g}(\omega + 2k\pi)\right|^2,$$

ou ainda,

$$\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\right|^2 = \left|H_\phi(\omega)\right|^2\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2 .$$

Mas, por (2.5),

$$1 = \left|H_\phi(\omega)\right|^2\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2 .$$

E disto segue que

$$H_\phi(\omega) = \left(\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2\right)^{-1/2}, \qquad (2.7)$$

que faz sentido pois, $A \le \left(\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2\right)^{1/2} \le B,\quad 0 < A,\ B < \infty$ em quase toda parte.

A equação (2.4) prova que (2.7) define uma função $H_\phi \in L^2(0,2\pi)$. Com efeito,

$$\int_0^{2\pi}\left|H_\phi(\omega)\right|^2 d\omega = \int_0^{2\pi}\left|\left(\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2\right)^{-1/2}\right|^2 d\omega$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2}\,d\omega \le \int_0^{2\pi}\frac{1}{A^2}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{A^2}2\pi < \infty.$$

Podemos portanto, definir $\phi \in L^2(R)$ por

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\sum_{k\in Z}\left|\hat{g}(\omega+2k\pi)\right|^2\right)^{-1/2}\hat{g}(\omega). \qquad (2.8)$$

Por construção $\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\right|^2 = 1$ o que implica que $(\phi(\cdot - k))_{k\in Z}$ são ortonormais.

Por outro lado, seja V_0^* o espaço gerado pelas funções $\phi(\cdot - k)$, isto é,

$$V_0^* = \left\{ f \,/\, f(x) = \sum_{k\in Z} \gamma_k \phi(x-k), \quad \{\gamma_k\} \in \ell^2(Z) \right\}.$$

Analogamente ao que foi feito no lema 2.2 obtemos que a transformada de Fourier, $\hat{f}$, de f em V_0^*, é escrita como $\hat{f}(\omega) = H_f(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ onde $H_f(\omega) := \sum_{k\in Z} \gamma_k e^{-ik\omega}$, assim

$$V_0^* = \left\{ f \,/\, \hat{f}(\omega) = H_f(\omega)\hat{\phi}(\omega), \ H_f \in L^2(0, 2\pi) \right\},$$

usando agora (2.8) e definindo $G(\omega) := H_f(\omega) H_\phi(\omega)$, temos

$$V_0^* = \left\{ f \,/\, \hat{f}(\omega) = G(\omega)\hat{g}(\omega), \ G(\omega) \in L^2(0, 2\pi) \right\}$$

$$= \left\{ f \,/\, \hat{f}(x) = \sum_{k\in Z} \beta_k e^{-ik\omega} \hat{g}(\omega), \quad \{\beta_k\} \in \ell^2(Z) \right\}$$

$$= \left\{ f \,/\, f(x) = \sum_{k\in Z} \beta_k g(x-k), \quad \{\beta_k\} \in \ell^2(Z) \right\}$$

$$= V_0 \qquad (\text{ pois } g(\cdot - k) \text{ é base de } V_0 \text{ }),$$

isto é, o espaço gerado pelas $\phi(\cdot - k)$ é idêntico ao espaço gerado por $g(\cdot - k)$. Como $\phi(\cdot - k)$ são ortonormais temos que $(\phi(\cdot - k))_{k\in Z}$ é base ortonormal de V_0.

Observe que para termos a ortonormalidade da família $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ precisamos definir $\hat{\phi}$ como

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\sum_{k\in Z} \left| \hat{g}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right)^{-1/2} \hat{g}(\omega),$$

onde $\{(g(\cdot - k)); \ k \in Z\}$ é base de V_0. Chamamos este processo de *truque da ortogonalização*.

Capítulo 3

Propriedades de uma função ϕ para obtermos uma aproximação multiresolução

Neste capítulo veremos condições que tem que ser satisfeitas por uma função ϕ para obtermos uma aproximação multiresolução, isto é, se ϕ gera uma família ortonormal

$$\phi_{j,k}(x) = \left(2^{j/2}\phi(2^j x - k)\right)_{k \in Z},$$

para cada j, podemos considerar os espaços V_j gerados por estas $\phi_{j,k}$. A pergunta é se estes $\left(V_j\right)_{j \in Z}$ formam uma aproximação multiresolução, na realidade, uma aproximação multiresolução regular. A resposta vai ser dada em função de H_ϕ, que caracteriza a transformada de Fourier de ϕ (veja lema 2.2).

Inicialmente vamos impor uma condição de regularidade sobre a aproximação multiresolução de $L^2(R)$.

Definição. Dizemos que uma função $f \in L^2(R)$ é *regular* se, e somente se, é continuamente diferenciável e satisfaz: $\exists\ c > 0$, tal que, $\forall\ x \in R$

$$|f(x)| \le \frac{c}{(1+|x|)^2} \qquad \text{e} \qquad |f'(x)| \le \frac{c}{(1+|x|)^2}.$$

Uma aproximação multiresolução $\left(V_j\right)_{j\in Z}$ é dita *regular* se, e somente se, ϕ é regular.

Mostramos, no capítulo 2, que as transformadas de Fourier das funções em V_0 são caracterizadas por funções H_f 2π – periódica, em particular isto vale para a função ϕ que gera a base ortonormal de V_0. Vamos agora descrever as propriedades das funções H_f. Para isto assumiremos a regularidade da aproximação multiresolução.

Observe que $\left(2^{-2/2}\,\phi\left(2^{-2}x-k\right)\right)_{k\in Z}$ é base ortonormal de V_{-2}, logo $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2^2}\right) \in V_{-2}$. A propriedade (1.2.3) da aproximação multiresolução nos diz que $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$, então $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1}$. Mas como V_{-1} é subconjunto de V_0 segue que

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0.$$

A função $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{2}\right)$ pode assim ser decomposta na base ortonormal $\left(\phi(x-k)\right)_{k\in Z}$ de V_0:

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k\in Z} h_k\phi(x-k),$$

onde $h_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\phi(x-k)}\,dx$. Equivalentemente,

$$\phi(x) = \sum_{k\in Z} h_k 2\phi(2x-k), \tag{3.1}$$

onde $h_k = 2\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\overline{\phi(2x-k)}\,dx$.

Observe que se $(V_j)_{j\in Z}$ é regular, segue que o decaimento assintótico de h_k satisfaz

$$|h_k| = O\left[(1+k^2)^{-1}\right].$$

De fato, a regularidade da aproximação multiresolução $(V_j)_{j\in Z}$ garante a existência de uma constante $c > 0$ tal que $|\phi(x)| \le \dfrac{c}{(1+|x|)^2}$ para todo $x \in R$.

Então,

$$|h_k| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} 2\phi(x)\,\overline{\phi(2x-k)}\,dx\right| \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|\,\left|\overline{\phi(2x-k)}\right|\,dx$$

$$\le 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{(1+|x|)^2}\cdot\frac{c'}{(1+|2x-k|)^2}\,dx$$

$$\le 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{(1+x^2)}\cdot\frac{c'}{\left[1+(x+k)^2\right]}\,dx,\ \text{pois } (1+|x|)^2 \ge 1+x \text{ e } |2x+k| > |x+k|;$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\,c'}{\left[1+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2\right]}\,dx,\ \text{fazendo } x = y-\frac{k}{2};$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cc'}{2\left(1+y^2+\frac{k^2}{4}\right)}\left[\frac{1}{1+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2}\right]dy$$

$$\le c\,c'\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{k^2}{4}}\left[\frac{1}{1+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2}\right]dy,\qquad \text{pois}$$

$1+y^2+\dfrac{k^2}{4} > 1+\dfrac{k^2}{4}$. Com isto,

$$|h_k| < 4cc'\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}\left[\frac{1}{1+\left(y-\frac{k}{2}\right)}+\frac{1}{1+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2}\right]dy,\ \text{pois } 4+k^2 > 1+k^2$$

$$= \frac{4cc'}{1+k^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2}dy + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2}dy\right]$$

$$= \frac{4cc'}{1+k^2}\left|\frac{2\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}\right| = \frac{8cc'\pi}{1+k^2}.$$

Chamando $C = 8cc'\pi$ obtemos o resultado desejado, ou seja, $|h_k| < \frac{C}{1+k^2}$.

Agora observe que (3.1) tem a transformada de Fourier:

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k\in Z} h_k 2\phi(2x-k)\right]e^{-i\xi x}\,dx, \qquad \text{fazendo } y = 2x-k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k\in Z} h_k e^{-i\xi k/2}\right)\phi(y)e^{-i\xi y/2}\,dy$$

$$= \sum_{k\in Z} h_k e^{-ik\xi/2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\,e^{-iy\xi/2}\,dy.$$

Definindo $H_\phi\left(\xi/2\right) := \sum_{k\in Z} h_k e^{-ik\xi/2}$ obtemos

$$\hat{\phi}(\xi) = H_\phi\left(\xi/2\right)\,\hat{\phi}\left(\xi/2\right), \tag{3.2}$$

Fazendo $\omega = \frac{\xi}{2}$, obtemos $\hat{\phi}(2\omega) = H_\phi(\omega)\cdot\hat{\phi}(\omega)$. (3.3)

A seguir veremos um teorema que dá condições necessárias sobre a função H_ϕ. Antes, porém, demonstraremos dois lemas.

3.1 Lema. Seja V_j uma aproximação multiresolução regular e P_{V_j} a projeção sobre V_j então para toda $f \in L^2(R)$,

$$\left(P_{V_j}f\right)(x) = 2^j\int_{-\infty}^{\infty} K\left(2^j x, 2^j y\right) f(y)dy$$

onde

$$K(x,y) = \sum_{k\in Z}\phi(x-k)\overline{\phi(y-k)}, \tag{3.4}$$

esta série e a integral convergem absolutamente.

Dem.. A série (3.4) de fato converge absolutamente,

$$\sum_{k\in Z} |\phi(x-k)|\left|\overline{\phi(y-k)}\right| \le \sum_{k\in Z} \frac{c^2}{(1+|x-k|)^2(1+|y-k|)^2}\ , \quad \text{pois } \phi \text{ é regular}$$

$$\le \sum_{k\in Z} \frac{c^2}{(1+|x|-|k|)^2(1+|y|-|k|)^2}$$

$$< \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \frac{c^2}{(-|k|)^2\cdot(-|k|)^2} = \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \frac{c^2}{k^4}$$

$$= 2c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ converge, pelo critério da comparação, a série (3.4) converge absolutamente.

Note agora que para $f \in L^2(R)$ e $j \in Z$,

$$P_{V_j} f = \sum_{k\in Z} \langle \phi_{j,k},\ f \rangle \phi_{j,k},$$

ou seja,

$$\left(P_{V_j} f\right)(x) = \sum_{k\in Z} \langle \phi_{j,k},\ f \rangle \phi_{j,k}(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} \langle \phi_{j,k},\ f \rangle \phi_{j,k}(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi_{j,k}(y)}\, f(y)dy\ \ \phi_{j,k}(x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(x)\ \overline{\phi_{j,k}(y)}\, f(y)dy$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} \int_{-\infty}^{\infty} 2^j \phi(2^j x - k)\ \overline{\phi(2^j y - k)}\, f(y)dy.$$

Observe que vale a desigualdade

$$\left|2^j \sum_{k\in Z} \phi(2^j x - k)\, \overline{\phi(2^j y - k)}\, f(y)\right| \leq \frac{c}{\left(1 + 2^j|x - y|\right)^2}\, |f(y)|. \tag{3.5}$$

Com efeito,

$$\left|2^j \sum_{k\in Z} \phi(2^j x - k)\, \overline{\phi(2^j y - k)}\, f(y)\, \left(1 + |2^j x - 2^j y|\right)^2\right| \leq$$

$$\leq 2^j \sum_{k\in Z} \frac{c_0}{\left(1 + |2^j x - k|\right)^2} \cdot \frac{c_1}{\left(1 + |2^j y - k|\right)^2}\, |f(y)|\, \left(1 + 2^j|x - y|\right)^2$$

Mas, $1+|2^j x - 2^j y| \leq 1 + |2^j x - k| + |2^j y - k|$ que por sua vez é menor ou igual à $1+|2^j x - k| + |2^j y - k| + |2^j x - k||2^j y - k|$ o que implica

$$1 + |2^j x - 2^j y| \leq 1 + |2^j x - k| + |2^j y - k|\left(1 + |2^j x - k|\right)$$

$$= \left(1 + |2^j x - k|\right)\left(1 + |2^j y - k|\right),$$

e elevando ao quadrado obtemos esta última igualdade obtemos $\left(1+|2^j x - 2^j y|\right)^2 \leq \left(1+|2^j x - k|\right)^2\left(1+|2^j y - k|\right)^2$. Logo,

$$\left|2^j \sum_{k\in Z} \phi(2^j x - k)\, \overline{\phi(2^j y - k)}\, f(y)\, \left(1 + 2^j|x - y|\right)^2\right| \leq$$

$$\leq 2^j \sum_{k\in Z} \frac{c_0 c_1\, |f(y)|\, \left(1 + |2^j x - k|\right)^2 \left(1 + |2^j y - k|\right)^2}{\left(1 + |2^j x - k|\right)^2\left(1 + |2^j y - k|\right)^2}$$

$$= c|f(y)|, \qquad \text{onde } c = 2^j c_0 c_1.$$

Definimos agora para $j \in Z$, $G(y) := \dfrac{|f(y)|}{\left(1 + 2^j|x - y|\right)^2}$. Esta função G pertence a $L^1(R)$, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{\left(1 + 2^j|x - y|\right)^2}|f(y)|dy \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{c}{\left(1 + 2^j|x - y|\right)^2}\right|dy\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2 dy\right)^{1/2} < \infty,$$

pela desigualdade de Schwarz.

Com isto podemos usar o teorema da convergência dominada sobre a série (3.5) para obter:

$$\left(P_{V_j} f\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} 2^j \phi(2^j x - k)\, \overline{\phi(2^j y - k)}\, f(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in Z} 2^j \phi(2^j x - k)\, \overline{\phi(2^j y - k)}\, f(y)dy$$

$$= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} K(2^j x\,,\, 2^j y)\, f(y)dy. \qquad \square$$

Chamaremos de *núcleo* da projeção ortogonal P_{V_j} a $2^j K(2^j x\,,\, 2^j y)$, onde $K(x,y) = \sum_{k\in Z} \phi(x-k)\, \overline{\phi(y-k)}$.

O próximo lema mostra que o núcleo $K(x,y)$ satisfaz $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)dy = 1$.

3.2 Lema. Seja g uma função regular e $A(x,y) = \sum_{k\in Z} g(x-k)\, \overline{g(y-k)}$. São equivalentes:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)dy = 1$, para quase todo x

(ii) A seqüência de operadores $\left(T_j\right)_{j\in Z}$,

$$\left(T_j f\right)(x) = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} A(2^j x\,,\, 2^j y)\, f(y)\, dy, \quad f \in L^2,$$ tende para a identidade I, no sentido da convergência forte para operadores.

Dem.. Primeiro demonstraremos (i) $\Rightarrow$ (ii).

Como g é regular, num raciocínio análogo ao feito para provar (3.5) obtemos: que existe $c' > 0$ tal que,

$$|A(x,y)| \le \frac{c'}{\left(1 + |x-y|\right)^2}.$$

Por hipótese, $\int_{-\infty}^{\infty} A(u,\omega)d\omega = 1$ ou $2^j\int_{-\infty}^{\infty} A(2^j x\,,\,2^j y)dy = 1$. Então,

$$\left\| T_j f - f \right\|_2 = \left\| 2^j \int_{-\infty}^{\infty} A(2^j\cdot\,,\,2^j y) f(y) dy \;-\; f(\cdot)\, 2^j \int_{-\infty}^{\infty} A(2^j\cdot\,,\,2^j y) dy \right\|_2$$

$$= \left\| 2^j \int_{-\infty}^{\infty} A(2^j\cdot\,,\,2^j y)\,[f(y) - f(\cdot)]dy \right\|_2$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} A(2^j\cdot\,,\,t)\,[f(2^{-j}t) - f(\cdot)]dt \right\|_2 \text{, fazendo a subst. } t = 2^j y$$

$$\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c'}{(1 + |2^j\cdot - t|)^2}\, |f(2^{-j}t) - f(\cdot)|\, dt \right\|_2 \text{, e fazendo a mudança de variável}$$

$\omega = 2^j x - t \;\Rightarrow\; 2^{-j}t = x - 2^{-j}\omega,\;\; d\omega = -dt$ segue

$$= c' \left\| -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\omega|)^2}\, |f(\cdot - 2^{-j}\omega) - f(\cdot)|\, d\omega \right\|_2$$

$$\leq c' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\omega|)^2}\, \|f(\cdot - 2^{-j}\omega) - f(\cdot)\|_2\, d\omega,$$ pela desigualdade de Minkowski

generalizada. Portanto,

$$\left\| T_j f - f \right\|_2 \leq c' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + |\omega|^2}\, \left\| f(\cdot - 2^{-j}\omega - f(\cdot)\,)\right\|_2 d\omega.$$

A prova deste lema segue dividindo a integral acima em duas partes. Primeiro, para cada $\varepsilon > 0$, escolhemos $M > 0$ tão grande que

$$\int_{|\omega| \geq M} \frac{1}{1 + |\omega|^2}\, d\omega < \varepsilon.$$

Como $f \in L^2(R)$ para $|\omega| \leq M$,

$$\left\| f(\cdot - 2^{-j}\omega) - f(\cdot) \right\|_2 \to 0$$

uniformemente, quando $j \to \infty$.

Portanto, $\lim_{j\to\infty} \left\| T_j f - f \right\| = 0$ para todo $j \in Z$, ou seja, a seqüência de operadores $\left(T_j\right)_{j\in Z}$ converge fortemente para a identidade.

Demostraremos agora que $(ii) \Rightarrow (i)$, ou seja, se $\lim_{j\to\infty} \left\| T_j f - f \right\| = 0$ então $\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)dy = 1$ para quase todo x.

Definimos $\alpha(x) := \int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)dy$. Esta função $\alpha(x)$ tem período 1. De fato,

$$\alpha(x+1) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x+1,\ y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in Z} g(x+1-k)\, g(y-k)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m\in Z} g(x-m)\, g(y-m-1)\, dy, \quad \text{fizemos a mudança } m = k-1;$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m\in Z} g(x-m)\, g(u-m)\, du, \quad \text{com a variável } u = y-1.$$

$$= \alpha(x).$$

O fato de $\left|A(x,y)\right| \le \dfrac{c'}{\left(1+|x-y|\right)^2}$ implica que

$$|\alpha(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c'}{\left(1+|x-y|\right)^2} dy \le c' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+(x+y)^2} = c\pi < \infty,$$

ou seja, $\alpha \in L^\infty(R)$.

Para provar que $\alpha(x) = 1$, é suficiente considerar f como sendo a função indicadora do intervalo [-1, 1], ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{se } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Tomemos $0 < r < 1$, $x \in [-r, r]$. Para esta função f temos:

$$\left(T_j f\right)(x) = \int_{-1}^{1} 2^j A\left(2^j x, 2^j y\right) dy.$$

Podemos escrever esta integral como:

$$\left(T_j f\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^j A(2^j x, 2^j y)dy - \int_{-\infty}^{-1} 2^j A(2^j x, 2^j y)dy - \int_{1}^{\infty} 2^j A(2^j x, 2^j y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A(2^j x, \omega)d\omega - 2^j \left[\int_{-\infty}^{-1} A(2^j x, 2^j y)dy + \int_{1}^{\infty} A(2^j x, 2^j y)dy\right],$$

o que implica

$$\left(T_j f\right)(x) = \alpha(2^j x) - O(2^{-j}), \tag{3.6}$$

pois

$$\left| 2^j \left[\int_{-\infty}^{-1} A(2^j x, 2^j y)dy + \int_{1}^{\infty} A(2^j x, 2^j y)dy\right] 2^j \right| \leq$$

$$\leq 4^j \int_{-\infty}^{-1} \left|A(2^j x, 2^j y)\right| dy + 4^j \int_{1}^{\infty} \left|A(2^j x, 2^j y)\right| dy$$

$$\leq 4^j \int_{-\infty}^{-1} \frac{c}{\left(1+2^j|x-y|\right)^2} dy + 4^j \int_{1}^{\infty} \frac{c}{\left(1+2^j|x-y|\right)^2} dy$$

$$< 4^j \int_{-\infty}^{-1} \frac{c}{4^j|x-y|^2} dy + 4^j \int_{1}^{\infty} \frac{c}{4^j(x-y)^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{c}{(x-y)^2} dy + \int_{1}^{\infty} \frac{c}{(x-y)^2} dy$$

$$= -\left.\frac{1}{(x-y)}\right]_{-\infty}^{-1} - \left.\frac{1}{(x-y)}\right]_{1}^{\infty} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{2}{x^2-1} < L > 0, \quad \text{pois } x \in [-r, r] \;, \; 0 < r < 1.$$

Ou seja, $\quad 2^j \left[\int_{-\infty}^{-1} A(2^j x, 2^j y)dy + \int_{1}^{\infty} A(2^j x, 2^j y)dy\right] = O(2^{-j}).$

Como $\alpha\left(2^j(x+2^{-j})\right) = \alpha(2^j x+1) = \alpha(2^j x)$, temos que $\alpha(2^j x)$ é 2^{-j}-periódica e converge fortemente para 1 em $L^2([-r, r])$. Com efeito, por (3.6),

$$\left\| \alpha(2^j \cdot) - 1 \right\|_{L^2([-r,r])} = \left\| \left(T_j f\right)(\cdot) + O(2^{-j}) - 1 \right\|$$

$$\leq \left\| \left(T_j f\right)(\cdot) - f(\cdot) \right\| + \left\| O(2^{-j}) - 1 + f(\cdot) \right\|$$

$$\leq \left\| \left(T_j f\right)(\cdot) - f(\cdot) \right\| + \left\| O(2^{-j}) \right\| + \left\| f(\cdot) - 1 \right\|.$$

Note que, quando $j \to \infty$, por hipótese $\left\| \left(T_j f\right)(\cdot) - f(\cdot) \right\| \to 0$, e também $\left\| O(2^{-j}) \right\| \to 0$. Como, $x \in [-r, r]$, $0 < r < 1$, $f(x) = 1$, já que f é a função indicadora do intervalo $[-1,\ 1]$.

Logo $\left\| f(\cdot) - 1 \right\| = 0$.

Portanto α é 1. □

O teorema a seguir da condições necessárias sobre a função 2π-periódica H_ϕ que surgiu quando calculamos a transformada de Fourier da função ϕ que gera a aproximação multiresolução (observe que estamos pressupondo a regularidade da aproximação multiresolução).

3.3 Teorema. A função $H_\phi(\omega) = \sum_{k \in Z} h_k e^{-ik\omega}$ satisfaz:

(i) $$\left|H_\phi(\omega)\right|^2 + \left|H_\phi(\omega + \pi)\right|^2 = 1 \tag{3.7}$$

(ii) $$\left|H_\phi(0)\right| = 1 \tag{3.8}$$

Dem..

(i) Sabemos, pelo ítem (iii) do teorema 2.4, que a transformada de Fourier $\hat{\phi}$ satisfaz

$$\sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(x + 2k\pi)\right|^2 = 1$$ então obviamente temos para $x = 2\omega$,

$$\sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(2\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1.$$

Por (3.3), $\hat{\phi}(2\omega) = H_\phi(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ assim podemos reescrever a soma acima como

$$\sum_{k\in Z} \left|H_\phi(\omega + k\pi)\right|^2 \left|\hat{\phi}(\omega + k\pi)\right|^2 = 1,$$

pelos fatos de H_ϕ ser 2π-periódica e $\sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1$ obtemos

$$\left(\sum_{k\ par} |\phi(\omega + k\pi)|^2\right) \left|H_\phi(\omega)\right|^2 + \left(\sum_{k\ impar} \left|\hat{\phi}(\omega + k\pi)\right|^2\right) \left|H_\phi(\omega + \pi)\right|^2 = 1.$$

Logo $\left|H_\phi(\omega)\right|^2 + \left|H_\phi(\omega + \pi)\right|^2 = 1$ e, (i) está provado.

(ii) Para provar que $\left|H_\phi(0)\right| = 1$, mostraremos inicialmente que $\left|\hat{\phi}(0)\right| = 1$.

Pela propriedade (1.2.2) da aproximação multiresolução $\bigcup_{j\in Z} V_j$ é denso em $L^2(R)$ e isto implica que a seqüência das projeções ortogonais sobre V_j, $\left(P_{V_j}\right)_{j\in Z}$, tende para a identidade I. Usando então o lema 3.2 temos, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)dy = 1$. Consequentemente, pela definição de K

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in Z} \phi(x-k)\, \overline{\phi(y-k)}\, dy$$

e fazendo a mudança de variável $\omega = y - k$, obtemos,

$$1 = \sum_{k\in Z} \phi(x-k) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega)} d\omega,$$

ou ainda,
$$1 = \sum_{k\in Z} \phi(x-k)\, \overline{\hat{\phi}(0)}. \tag{3.9}$$

Agora integrando (3.9) em relação a x, no intervalo [0,1], obtemos

$$1 = \overline{\hat{\phi}(0)} \sum_{k\in Z} \int_0^1 \phi(x-k)dx$$

$$= \overline{\hat{\phi}(0)} \sum_{k\in Z} \int_{-k}^{1-k} \phi(\xi)d\xi \ , \quad \text{pois } \xi = x - k$$

$$= \overline{\hat{\phi}(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)d\xi$$

$$= \overline{\hat{\phi}(0)}\ \hat{\phi}(0).$$

Consequentemente temos $1 = \left|\hat{\phi}(0)\right|^2$ ou $\left|\hat{\phi}(0)\right| = 1$. Mas por (3.3), $\hat{\phi}(2\omega) = H_\phi(\omega)\hat{\phi}(\omega)$ logo $\left|\hat{\phi}(0)\right| = \left|H_\phi(0)\right| \left|\hat{\phi}(0)\right|$. Portanto $\left|H_\phi(0)\right| = 1$. □

O próximo teorema da condições suficientes que tem que ser satisfeitas pela função H_ϕ para que a função ϕ gere uma aproximação multiresolução regular (note que H_ϕ é a função 2π –periódica que caracteriza a transformada de Fourier de ϕ).

3.4 Teorema. Seja $H_\phi(\omega) = \sum_{k\in Z} h_k e^{-ik\omega}$ tal que

$$\left|h_k\right| = O\left[\left(1 + k^2\right)^{-1}\right], \tag{3.10}$$

$$\left|H_\phi(0)\right| = 1, \tag{3.11}$$

$$\left|H_\phi(\omega)\right|^2 + \left|H_\phi(\omega + \pi)\right|^2 = 1, \tag{3.12}$$

$$H_\phi(\omega) \neq 0 \ \text{ sobre } \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]. \tag{3.13}$$

Se $\hat{\phi}$ é definida por

$$\hat{\phi}(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} H_\phi\left(2^{-k}\omega\right), \tag{3.14}$$

a função $\hat{\phi}(\omega)$ é a transformada de Fourier de uma função ϕ tal que $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ é uma família ortonormal.

Seja V_j o subespaço de $L^2(R)$ gerado por $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\phi(2^j x - k)$, $k \in Z$.

Se ϕ é regular, então a seqüência de subespaços vetoriais $(V_j)_{j\in Z}$ é uma aproximação multiresolução regular de $L^2(R)$.

Dem.. Demonstraremos este teorema em duas partes,

(a) mostramos que $\hat{\phi} \in L^2(R)$ e $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ é uma família ortonormal;

(b) se V_j é o espaço gerado pela família $\left(2^{j/2}\phi(2^j x-k)\right)_{k\in Z}$, mostramos que a seqüência $(V_j)_{j\in Z}$ é uma aproximação multiresolução de $L^2(R)$.

(a) Primeiro vamos provar que $\hat{\phi} \in L^2(R)$.

Para simplificar a notação denotaremos $M(\omega) = |H_\phi(\omega)|^2$, para todo ω e, por $M_\ell(\omega)$ $(\ell \geq 1)$ a função contínua definida por:

$$M_\ell(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\omega| > 2^\ell\pi, \\ M(\frac{\omega}{2})M(\frac{\omega}{4}) \ldots M\left(\frac{\omega}{2^\ell}\right) & \text{se } |\omega| \leq 2^\ell\pi. \end{cases}$$

Usaremos o seguinte lema na demonstração.

3.5 Lema. Para todo $\ell \in N$, $\ell \neq 0$,

$$I_\ell^n = \int_{-\infty}^{\infty} M_\ell(\omega)\, e^{in\omega}\, d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Dem. (do lema). Vamos dividir a integral I_ℓ^n em duas partes:

$$I_\ell^n = \int_{-2^\ell\pi}^{0} M_\ell(\omega)e^{in\omega}d\omega + \int_{0}^{2^\ell\pi} M_\ell(\omega)e^{in\omega}d\omega. \tag{3.15}$$

Como
$$M\left(2^{-j}\omega + 2^{\ell-j}\pi\right) = \left|H_\phi\left(2^{-j}\omega + 2^{j-\ell}\pi\right)\right|^2$$

$$= \left|\sum_{k\in Z} h_k e^{-ik\left(2^{-j}\omega + 2^{\ell-j}\pi\right)}\right|^2$$

$$= \left|\sum_{k\in Z} h_k e^{-ik2^{-j}\omega}\, e^{-ik2^{\ell-j}\pi}\right|^2$$

$$= \left|\sum_{k\in Z} h_k e^{-jk2^{-j}\omega}\right|^2 = \left|H_\phi\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2$$

$$= M\left(2^{-j}\omega\right) \qquad \text{para } 0 \le j < \ell,$$

ou seja, $M\left(2^{-j}\omega + 2^{j-\ell}\pi\right) = M\left(2^{-j}\omega\right)$, $0 \le j < \ell$ e, $M\left(2^{-\ell}\omega\right) + M\left(2^{-\ell}\omega + \pi\right) = 1$, (por (3.7)), fazendo a mudança de variável $\omega = \xi + 2^\ell\pi$ na segunda integral em (3.15), obtemos

$$I_\ell^n = \int_{-2^\ell\pi}^{0} M_\ell(\xi)\, e^{in\xi} d\xi + \int_{-2^\ell\pi}^{0} M_\ell\left(\xi + 2^\ell\pi\right) e^{in\left(\xi + 2^\ell\pi\right)} d\xi;$$

$$= \int_{-2^\ell\pi}^{0} M_\ell\left(\xi + 2^\ell\pi\right) e^{in\xi}\, e^{i2^\ell\pi n} d\xi + \int_{-2^\ell\pi}^{0} M_\ell(\xi)\, e^{in\xi} d\xi$$

$$= \int_{-2^\ell\pi}^{0} \left[M_\ell\left(\xi + 2^\ell\pi\right) + M_\ell(\xi)\right] e^{in\xi} d\xi$$

$$= \int_{-2^\ell\pi}^{0} \left[M\left(\tfrac{\xi+2^\ell\pi}{2}\right) \ldots M\left(\tfrac{\xi+2^\ell\pi}{2^\ell}\right) + M\left(\tfrac{\xi}{2}\right) \ldots M\left(\tfrac{\xi}{2^\ell}\right)\right] e^{in\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{-2^\ell\pi}^{0} \left[M\left(2^{-1}\xi\right) \ldots M\left(2^{-\ell}\xi + \pi\right) + M\left(2^{-1}\xi\right) \ldots M\left(2^{-\ell}\xi\right)\right] e^{in\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{-2^\ell\pi}^{0} M\left(\tfrac{\xi}{2}\right) \ldots M\left(\tfrac{\xi}{2^{\ell-1}}\right) e^{in\xi}\, d\xi.$$

E como M é 2π-periódica, esta última igualdade implica que

$$I_\ell^n = \int_{-2^\ell\pi}^{0} M\left(\tfrac{\xi}{2}\right) \ldots M\left(\tfrac{\xi}{2^{\ell-1}}\right) e^{in\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{-2^{\ell-1}\pi}^{2^{\ell-1}\pi} M\left(\tfrac{\omega}{2}\right) \ldots M\left(\tfrac{\omega}{2^{\ell-1}}\right) e^{in\omega}\, d\omega = I_{\ell-1}^{n}.$$

Consequentemente,

$$I_{\ell}^{n} = I_{\ell-1}^{n} = \ldots = I_{1}^{n} = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

A última igualdade segue do seguinte fato

$$I_1^n = \int_{-2\pi}^{0} M\left(\tfrac{\omega}{2}\right) e^{in\omega}\, d\omega + \int_{0}^{2\pi} M\left(\tfrac{\omega}{2}\right) e^{in\omega}\, d\omega$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} M\left(\tfrac{\xi}{2}\right) e^{in\xi}\, d\xi + \int_{-2\pi}^{0} M\left(\tfrac{\xi+2\pi}{2}\right) e^{in(\xi+2\pi)} d\xi$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} \left[M\left(2^{-1}\xi\right) + M\left(2^{-1}\xi + \pi\right)\right] e^{in\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} e^{in\xi}\, d\xi = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

E está provado o lema. □

Continuemos a prova do teorema considerando o produto infinito

$$M_{\infty}(\omega) = \lim_{\ell \to \infty} M_{\ell}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} M\left(2^{-j}\omega\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \left|H_{\phi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2 = \left|\prod_{j=1}^{\infty} H_{\phi}\left(2^{-j}\omega\right)\right|^2.$$

Como $0 \leq M(\omega) \leq 1$, este produto converge. Por (3.14), vale a igualdade,

$$M_{\infty}(\omega) = \left|\hat{\phi}(\omega)\right|^2 , \tag{3.16}$$

podemos escrever então

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_{\infty}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\ell \to \infty} M_{\ell}(\omega) d\omega.$$

Pelo lema de Fatou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\ell \to \infty} M_\ell(\omega)d\omega \;\le\; \lim_{\ell \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_\ell(\omega)d\omega.$$

Do lema 3.5, para $n = 0$, temos finalmente que

$$\lim_{\ell \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_\ell(\omega)d\omega = 2\pi \qquad \text{ou que} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} M_\infty(\omega)d\omega \le 2\pi. \tag{3.17}$$

Sendo assim, $\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H_\phi(2^{-j}\omega)$ define uma função $\hat{\phi}$ que está em $L^2(R)$.

O que prova a primeira parte do ítem (a).

Provaremos agora a segunda parte.

Devemos mostrar que $(\phi(x-k))_{k \in Z}$ é uma família ortonormal. Para este propósito usaremos o lema 3.5 e aplicaremos o teorema da convergência dominada sobre a seqüência de funções $(M_\ell(\omega)e^{in\omega})_{\ell \in Z}$.

Seja ϕ a transformada de Fourier inversa de $\hat{\phi}$.

A função M_∞ pode ser reescrita como

$$M_\infty(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} M(2^{-j}\omega) = e^{\log\left(\prod_{j=1}^{\infty} M(2^{-j}\omega)\right)} = e^{\sum_{j=1}^{\infty} \log(M(2^{-j}\omega))}.$$

Como H_ϕ satifaz (3.10) e (3.11) segue que $\log(M(\omega)) = O(\omega)$ na vizinhança do zero. Portanto,

$$\lim_{\omega \to 0} M_\infty(\omega) = M_\infty(0) = 1. \tag{3.18}$$

Já que $H_\phi(\omega) = \sum_{k \in Z} h_k e^{-ik\omega}$ e $|h_k| = O\left[(1+k^2)^{-1}\right]$ segue que H_ϕ é uma função contínua.

A partír da propriedade (3.13) junto com (3.18) nos podemos garantir que existe $c > 0$ tal que, para todo $\omega \in [-\pi, \pi]$

$$M_\infty(\omega) \ge c \tag{3.19}$$

Observe agora o seguinte:

para $|\omega| \le 2^{\ell}\pi$, temos

$$M_\infty(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} M\left(\tfrac{\omega}{2^j}\right)$$

$$= M\left(\tfrac{\omega}{2}\right)M\left(\tfrac{\omega}{2^2}\right) \ldots M\left(\tfrac{\omega}{2^\ell}\right)M\left(\tfrac{\omega}{2^{\ell+1}}\right) \ldots M\left(\tfrac{\omega}{2^{\ell+n}}\right) \ldots$$

$$= M_\ell(\omega) \prod_{j=1}^{\infty} M\left(\tfrac{\omega}{2^{\ell+j}}\right)$$

$$= M_\ell(\omega) \prod_{j=1}^{\infty} M\left(2^{-j}\tfrac{\omega}{2^\ell}\right)$$

$$= M_\ell(\omega) M_\infty\left(\tfrac{\omega}{2^\ell}\right); \qquad \text{para } 0 \le j < \ell.$$

Consequentemente, $\quad M_\ell(\omega) = \dfrac{M_\infty(\omega)}{M_\infty\left(\frac{\omega}{2^\ell}\right)} \ge 0.$

Por outro lado,

$$\frac{M_\infty(\omega)}{M_\infty\left(\frac{\omega}{2^\ell}\right)} = \frac{1}{M_\infty\left(\frac{\omega}{2^\ell}\right)} M_\infty(\omega) \;\le\; \frac{1}{c} M_\infty(\omega).$$

Portanto,

$$0 \;\le\; M_\ell(\omega) \;\le\; \frac{1}{c} M_\infty(\omega). \tag{3.20}$$

para $|\omega| > 2^{\ell}\pi$, $\qquad M_\ell(\omega) = 0$.

Logo a inequação (3.20) vale para todo $\omega \in R$.

Provamos em (3.17) que $M_\infty \in L^1(R)$, com isto podemos aplicar o teorema da convergência dominada sobre a sequência de funções $\left(M_\ell(\omega)e^{in\omega}\right)_{\ell \in Z}$ para obtermos

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_\infty(\omega)e^{in\omega}\, d\omega = \lim_{\ell \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_\ell(\omega)e^{in\omega}\, d\omega.$$

Logo do lema 3.5, tiramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_{\infty}(\omega)e^{in\omega}\, d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Agora aplicando a identidade de Parseval ao produto interno $\langle \phi(\cdot),\ \phi(\cdot - k) \rangle$, teremos:

$$\langle \phi(x),\ \phi(x-k) \rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{\phi}(x),\ \hat{\phi}(x)e^{-ikx} \right\rangle \quad \text{usamos o teorema 1.1.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(x)\ \overline{\hat{\phi}(x)\, e^{ikx}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\phi}(x)\right|^2 e^{ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M_{\infty}(x)e^{ikx}\, dx$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Com isso concluímos que $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ é uma família ortonormal. E assim está completa a prova de (a).

Comecemos a prova do ítem (b).

(b) Chamaremos de V_0 o espaço vetorial gerado por esta família ortonormal. E supomos que a função ϕ é regular.

Seja V_j o espaço vetorial gerado por $\phi_{j,k}$, e $\left(2^{j/2}\ \phi(2^j x - k)\right)_{k\in Z}$ uma base ortonormal de V_j para qualquer $j \in Z$.

Devemos provar que $\left(V_j\right)_{j\in Z}$ é uma aproximação multiresolução de $L^2(R)$. (note que a propriedade (1.2.3) é satisfeita).

Para provar (1.2.1) é suficiente mostrar que $V_{-1} \subset V_0$.

A transformada de Fourier das funções que pertencem aos espaços vetoriais V_0 e V_{-1} são, respectivamente, denotadas por $\mathcal{F}V_0$ e $\mathcal{F}V_{-1}$. Assim,

$$\mathcal{F}\, V_0 = \left\{ M(\omega)\hat{\phi}(\omega); \quad M \in L^2(0, 2\pi) \right\}$$

e

$$\mathcal{F}\, V_{-1} = \left\{ M(2\omega)\hat{\phi}(2\omega); \quad M \in L^2(0, 2\pi) \right\}.$$

Como $\hat{\phi}$ é definida por $\hat{\phi}(\omega) := \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\omega)$; $\hat{\phi}$ satisfaz

$$\hat{\phi}(2\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k+1}\omega) = H(\omega) \prod_{k=1}^{\infty} H(2^{-k}\omega) = H(\omega)\,\hat{\phi}(\omega),$$

com $|H(\omega)| \le 1$.

Assim, $\quad M(2\omega)\,\hat{\phi}(2\omega) = M(2\omega)H(\omega)\,\hat{\phi}(\omega)$.

Observe que a função $M(2\omega)H(\omega)$ é 2π-periódica e,

$$\int_0^{2\pi} |M(2\omega)H(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} |M(2\omega)|^2 |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$< \int_0^{2\pi} |M(2\omega)|^2 d\omega < \infty,$$

isto é, $M(2\omega)H(2\omega)$ pertence a $L^2(0, 2\pi)$.

Logo,

$$M(2\omega)\hat{\phi}(2\omega) = L(\omega)\hat{\phi}(\omega),$$

onde $L(\omega) = M(2\omega)H(\omega) \in L^2(0, 2\pi)$. Com isto $L(\omega)\,\hat{\phi}(\omega) \in \mathcal{F}\, V_0$.

Portanto, $\mathcal{F}\, V_{-1} \subset \mathcal{F}\, V_0$, o que implica $V_{-1} \subset V_0$.

Para provar (1.2.2) devemos verificar que

$$\lim_{j\to\infty} P_{V_j} = Id \quad \text{e} \quad \lim_{j\to-\infty} P_{V_j} = 0.$$

Seja então P_{V_j} o operador projeção ortogonal sobre V_j.

Já que $\left(2^{j/2}\phi(2^j x - k)\right)_{k\in Z}$ é base ortonormal de V_j, o núcleo da P_{V_j}, como vimos, é dado por

$$2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k)\, \overline{\phi(2^j y - k)} = 2^j K(2^j x,\ 2^j y).$$

Como $(\phi(x-k))_{k\in Z}$ é uma família ortogonal, temos

$$\sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1.$$

Sabemos que

$$\lim_{\omega\to 0} M_\infty(\omega) = M_\infty(0) = \left|\hat{\phi}(\omega)\right|^2 = 1,$$

assim para $k \neq 0$ a equação $\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\right|^2 = 1$ implica que

$$\hat{\phi}(2k\pi) = 0,$$

pois, $$\sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(0 + 2k\pi)\right|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k\neq 0} \left|\hat{\phi}(2k\pi)\right|^2 + \sum_{k=0} \left|\hat{\phi}(0)\right|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \left|\hat{\phi}(2k\pi)\right|^2 + 1 = 1.$$

Logo $\sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \left|\hat{\phi}(2k\pi)\right|^2 = 0$ e finalmente $\hat{\phi}(2k\pi) = 0$.

Usando agora a fórmula de Poisson temos:

$$\sum_{k\in Z} \phi(x - k) = \sum_{k\in Z} \hat{\phi}(2k\pi)e^{i2k\pi x} =$$

$$= \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \hat{\phi}(2k\pi)e^{i2\pi kx} + \hat{\phi}(0)$$

$$= 0 + \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)du,$$

ou seja, $\sum_{k\in Z} \phi(x-k) = \hat{\phi}(0)$.

Portanto, para quase todo x,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in Z} \phi(x-k)\,\overline{\phi(y-k)}\,dy\,, \qquad (\omega = y-k)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in Z} \phi(x-k)\,\overline{\phi(\omega)}\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(0)\,\overline{\phi(\omega)}\,d\omega = \hat{\phi}(0)\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega)}\,d\omega = \hat{\phi}(0)\,\overline{\hat{\phi}(0)}$$

$$= \hat{\phi}(0)\,\overline{\hat{\phi}(-0)} = \left|\hat{\phi}(0)\right|^2 = 1.$$

E pelo lema 3.2, $\lim_{j\to\infty} P_{V_j} = Id$. Com isso está provado que $\bigcup_{j\in Z} V_j$ é denso em $L^2(R)$.

Como ϕ é regular, analogamente a (3.5) temos

$$\left|2^j K(2^j x,\ 2^j y)\right| \le \frac{2^j L}{\left(1+2^j|x-y|\right)^2}.$$

E desta inequação segue que $\lim_{j\to-\infty} P_{V_j} = 0$. Com efeito, pelo lema 3.1,

$P_{V_j} f = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} K(2^j x,\ 2^j y)\, f(y)dy$, fazendo $j \to -\infty$, $K \to 0$. Com isso vale $\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$.

A propriedade (1.2.4) segue do seguinte:

Seja $f(x) \in V_0$, pelo lema 2.2, $\hat{f}(\omega) = H_f(\omega)\,\hat{\phi}(\omega)$, multiplicando por e^{-ikw},

$\hat{f}(\omega)e^{-ik\omega} = H_f(\omega)e^{-ik\omega}\,\hat{\phi}(\omega)$

Agora definindo $g(x) := f(x-k)$, obtemos, usando o teorema 1.1.4 (ii),

$$\hat{g}(\omega) = H_f(\omega)e^{-ik\omega}\,\hat{\phi}(\omega).$$

Definindo $G(\omega) := H(\omega)e^{-ik\omega}$, $G \in L^2(0, 2\pi)$ segue que $\hat{g}(\omega) = G(\omega)\,\hat{\phi}(\omega)$ o que implica que $g(x) = \sum_{k \in Z} g_k \phi(x-k)$, ou seja, $f(x-k) \in V_0$.

Com isso, $f(x) \in V_j \Rightarrow f(x - 2^j k) \in V_j \quad , \forall k \in Z.$

Finalmente a propriedade (1.2.5).

Sabemos que $\{\phi(x-k);\ k \in Z\}$ é base ortonormal de V_0. Neste caso, para toda $f \in V_0$

$$f = \sum_{k \in Z} \beta_k \phi(\cdot - k) \qquad \text{onde} \qquad \{\beta_k\} \in \ell^2(Z),\ \beta_k = \langle f, \phi(\cdot - k) \rangle$$

Logo, a aplicação $f \mapsto \{\alpha_k\}$ é um isomorfismo T de V_0 sobre $\ell^2(Z)$.

Com isto concluímos a prova do teorema. □

Observação:

A condição necessária imposta sobre H no teorema 3.2 não é suficiente para definir uma função ϕ tal que $(\phi(x-k))_{k \in Z}$ seja uma família ortonormal. Um contra-exemplo é dado por $H(\omega) = \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)$. Verifiquemos que a função H assim definida satisfaz as hipóteses do teorema 3.2:

(i) $$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = \left|\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)\right|^2 + \left|\cos\left(\frac{3\omega}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)\right|^2$$

$$= \cos^2\left(\frac{3\omega}{2}\right) + \left|\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2$$

$$= \cos^2\left(\frac{3\omega}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

$$= 1.$$

(ii) $|H(0)| = |\cos(0)| = 1$.

Definimos então, pelo teorema 3.4, $\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)$. Assim,

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(2^{-k}\,\frac{3\omega}{2}\right).$$

Para calcular a função ϕ, cuja transformada de Fourier é dada acima, usaremos a igualdade

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(2^{-k}\,\frac{3\omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(3\omega/2\right)}{3\omega/2},$$

e a transformada de Fourier inversa. Com isto obtemos

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{se} \quad x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right], \\ 0 & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

Mas a família das translações por inteiros desta função não é ortonormal.

Capítulo 4

Base ortonormal wavelet

A aproximação de uma função na resolução 2^j é a sua projeção ortogonal sobre V_j. A precisão adicional que obtemos na aproximação quando a resolução cresce de 2^j para 2^{j+1} é dada pela projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1}. Denotaremos estes complementos ortogonais de O_j.

Para calcular a projeção ortogonal de uma função f sobre O_j, encontraremos uma base ortonormal de O_j. Veremos agora um dos pontos importantes da aproximação multiresolução, é que se a coleção $\left(V_j\right)_{j\in Z}$ de subespaços fechados de $L^2(R)$ é uma aproximação multiresolução então podemos escrever $f \in L^2(R)$ como

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{O_j} f$$

ja que O_j é complemento ortogonal de V_j em V_{j+1}. A notação para este complemento é: $O_j = V_j^{\perp_{V_{j+1}}}$, observe que esta notação é muito carregada por isto usaremos a seguinte: $O_j = V_j^{\perp_{j+1}}$.

Para calcular a projeção de f sobre O_j, $P_{O_j} f$, encontraremos uma base ortonormal de O_j,

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k), \qquad k \in Z.$$

Com isto podemos escrever

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + \sum_{k \in Z} \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle \psi_{j,k}. \tag{4.1}$$

Observe que, para todo ℓ e $j \in Z$,

$$V_{j+1} = V_j \oplus O_j$$

e que

$$O_j \perp O_\ell \quad \text{se } j \neq \ell.$$

Assim, para $j > \ell$,

$$V_j = V_\ell \oplus \bigoplus_{k=0}^{j-\ell-1} O_{\ell+k},$$

onde todos estes subespaços são ortogonais.

Como $\overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R)$ e $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$ temos que

$$L^2(R) = \bigoplus_{j \in Z} O_j, \tag{4.1}$$

ou seja, $L^2(R)$ pode ser decomposto em subespaços O_j mutuamente ortogonais.

Além disso, os espaços O_j herdam a propriedade (1.2.3) da aproximação multi-resolução:

$$f(x) \in O_j \Leftrightarrow f(2x) \in O_{j+1}. \tag{4.2}$$

De fato, $f(x) \in O_j \Leftrightarrow f(x) \in V_{j+1}$ e $f \in V_j^{\perp_{j+1}}$

$$\Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+2} \text{ e } f(2x) \in V_j^{\perp_{j+1}}$$

$$\Leftrightarrow f(2x) \in O_{j+1}.$$

Devido a (4.1) e a propriedade (1.2.2), segue que a coleção $\{\psi_{j,k};\ j, k \in Z\}$ é uma base ortonormal de $L^2(R)$ que denominaremos de *base ortonormal wavelet* $\{\psi_{j,k};\ j, k \in Z\}$ de $L^2(R)$, onde $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)$, (a wavelet ψ pode ser construída explicitamente, como veremos). Por outro lado, (4.2) assegura que se

$\{\psi_{0,k};\ k \in Z\}$ é uma base ortonormal de O_o então, $\{\psi_{j,k};\ j,\ k \in Z\}$ é base ortonormal para O_j, para todo $j \in Z$. Assim nossa tarefa reduz-se a encontrar $\psi \in O_0$ tal que $\psi(x-k)$ constitua uma base ortonormal de O_o.

Para construir esta função ψ, vamos observar algumas propriedades de O_0.

Caracterizemos O_o: $f \in O_0$ é equivalente a $f \in V_1$ e $f \in V_0^{\perp}$, pois $V_1 = V_0 \oplus O_0$.

Como $f \in V_1$, temos

$$f(x) = \sum_{k\in Z} f_k \sqrt{2}\,\phi(2x-k),$$

pois $\sqrt{2}\phi(2x-k)$ é base de V_1, onde $f_k = \langle f,\ \phi_{1,k}\rangle$. Isto implica que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in Z} f_k e^{-ik\xi/2}\ \hat{\phi}\left(\xi/2\right).$$

Definindo $G_f(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in Z} f_k e^{-ik\xi}$, G em $L^2(0,\ 2\pi)$, obtemos

$$\hat{f}(\xi) = G_f\left(\xi/2\right)\hat{\phi}\left(\xi/2\right). \tag{4.3}$$

O fato de $f \perp V_0$ implica que $f \perp \phi_{0,k}$ para todo k, isto é,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \overline{\phi(x-k)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\ \overline{\hat{\phi}(\omega)}\,e^{ik\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell\in Z}\int_{2\ell\pi}^{2(\ell+1)\pi} \hat{f}(\omega)\ \overline{\hat{\phi}(\omega)}\,e^{ik\omega}\,d\omega.$$

Fazendo a mudança de variável, $\omega = \xi + 2\ell\pi$, teremos

$$0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell\in Z}\int_0^{2\pi} \hat{f}(\xi+2\ell\pi)\ \overline{\hat{\phi}(\xi+2\ell\pi)}\,e^{ik\xi}\,d\xi, \qquad \text{ou ainda,}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\xi}\sum_{\ell\in Z} \hat{f}(\xi+2\ell\pi)\ \overline{\hat{\phi}(\xi+2\ell\pi)}\,d\xi = 0.$$

Consequentemente,

$$\sum_{\ell\in Z} \hat{f}(\xi + 2\ell\pi)\, \overline{\hat{\phi}(\xi + 2\ell\pi)} = 0 \tag{4.4}$$

Agora usando as transformadas de Fourier (3.2), (4.3) e fazendo $\omega = \xi/2$ em (4.4) temos:

$$\sum_{\ell\in Z} G_f(\omega + \ell\pi)\, \overline{H_\phi(\omega + \ell\pi)} \left|\hat{\phi}(\omega + \ell\pi)\right|^2 = 0, \quad \text{que implica,}$$

$$\sum_{\ell\in 2Z} G_f(\omega)\, \overline{H(\omega)} \left|\hat{\phi}(\omega + \ell\pi)\right|^2 + \sum_{\ell\in 2Z+1} G_f(\omega + \pi)\, \overline{H(\omega + \pi)} \left|\hat{\phi}(\omega + \ell\pi)\right|^2 = 0,$$

pois G_f e H_ϕ são funções 2π - periódicas. Como $\sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1$ segue que

$$G_f(\omega)\, \overline{H_\phi(\omega)} + G_f(\omega + \pi)\, \overline{H_\phi(\omega + \pi)} = 0.$$

Sabemos, pelo teorema 3.3, que a função H_ϕ satisfaz $\left|H_\phi(\omega)\right|^2 + \left|H_\phi(\omega + \pi)\right|^2 = 1$, logo $\overline{H_\phi(\omega)}$ e $\overline{H_\phi(\omega + \pi)}$ não se anulam ao mesmo tempo, isto implica que existe uma função 2π - periódica λ tal que,

$$G_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{H_\phi(\omega + \pi)} \tag{4.5}$$

e

$$\lambda(\omega) + \lambda(\omega + \pi) = 0. \tag{4.6}$$

Definimos agora a função $\upsilon(2\omega) := \lambda(\omega)e^{-i\omega}$ para todo ω. Note que υ é uma função 2π - periódica, pois

$$\begin{aligned} \upsilon(\omega + 2\pi) &= \lambda(\omega/2)e^{i\omega/2}e^{i\pi} \\ &= -\lambda(\omega/2)e^{i\omega/2}(-1) = \upsilon(\omega), \end{aligned}$$

e, além disso, $\lambda(\omega) = \upsilon(2\omega)e^{i\omega}$ satisfaz (4.6).

Com isso podemos escrever (4.5) como:

$$G_f(\omega) = \upsilon(2\omega)\, e^{i\omega}\, \overline{H_\phi(\omega + \pi)},$$

e substituindo esta equação em (4.3) obtemos

$$\hat{f}(\xi) = \upsilon(\xi)\, \overline{H_\phi(\xi/2 + \pi)}\, e^{i\xi/2}\, \hat{\phi}(\xi/2) \tag{4.7}$$

onde υ é 2π - periódica.

A forma geral (4.7) da transformada de Fourier de $f \in O_0$ sugere que tomemos

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} H_\phi(\xi/2 + \pi)\, \hat{\phi}(\xi/2) \tag{4.8}$$

como candidata para transformada de Fourier da Wavelet procurada. Logo,

$$\hat{f}(\xi) = \upsilon(\xi)\, \hat{\psi}(\xi) \tag{4.9}$$

Desconsiderando a questão da convergência, (4.7) pode ser escrita como

$$\hat{f}(\xi) = \left(\sum_{k \in Z} \upsilon_k e^{-ik\xi} \right) \hat{\psi}(\xi) \qquad \text{ou} \qquad f = \sum_{k \in Z} \upsilon_k \psi(\cdot - k),$$

assim $\psi(\cdot - k)$ é um bom candidato para base de O_0.

Precisamos ainda verificar que $\psi_{0,k} = \psi(\cdot - k)$ é, de fato, uma base ortonormal de O_0.

Primeiro notemos que as propriedades de H_ϕ e $\hat{\phi}$ asseguram que a função $\hat{\psi}$ definida em (4.8) realmente e uma função de $L^2(R)$ e que $\hat{\psi} \in V_1$ e $\hat{\psi} \in V_0^{\perp}$ (pela análise feita acima), assim $\psi \in O_0$.

Verifiquemos então a ortonormalidade de $\psi_{0,k}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, \overline{\psi(x-k)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\zeta)\, \overline{\hat{\psi}(\zeta)}\, \overline{e^{-ik\zeta}}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in Z} \int_{2\ell\pi}^{2(\ell+1)\pi} \left| \hat{\psi}(\zeta) \right|^2 e^{ik\zeta}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{\ell \in Z} \left| \hat{\psi}(\xi + 2\ell\pi) \right|^2 d\xi.$$

Mas, por (4.8),

$$\sum_{\ell\in Z}\left|\hat{\psi}(\xi+2\ell\pi)\right|^2=\sum_{\ell\in Z}\left|H_\phi(\xi/2+\pi\ell+\pi)\right|^2\left|\hat{\phi}(\xi/2+\pi\ell)\right|^2$$

$$=\left|H_\phi(\xi/2+\pi)\right|^2\sum_{n\in Z}\left|\hat{\phi}(\xi/2+\pi n)\right|^2+\left|H_\phi(\xi/2)\right|^2\sum_{n\in Z}\left|\hat{\phi}(\xi/2+\pi+2n\pi)\right|^2$$

$$=\left[\left|H_\phi(\xi/2+\pi)\right|^2+\left|H_\phi(\xi/2)\right|^2\right].1$$

$=1$, pelo teorema 3.3.

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\overline{\psi(x-k)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\xi}\,d\xi=\delta_{k,0}.$$

Para verificar que $\psi_{0,k}$ é base para O_0 é suficiente checar que toda função $f\in O_0$ pode ser escrita como:

$$f=\sum_{k\in Z}\gamma_k\psi(\cdot-k)\quad\text{com}\quad\sum_{k\in Z}\left|\gamma_k\right|^2<\infty.$$

equivalentemente $\hat{f}(\xi)=\gamma(\xi)\hat{\psi}(\xi)$ (4.10)

com γ 2π - periódica em $L^2(0,2\pi)$.

Voltemos a (4.9).

Temos $\hat{f}(\xi)=\upsilon(\xi)\hat{\psi}(\xi)$ com $\int_0^{2\pi}|\upsilon(\xi)|^2d\xi=2\int_0^{\pi}|\lambda(\omega)|^2d\omega$.

Como $G_f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in Z}f_ke^{-ik\xi}$, temos

$$\int_0^{2\pi}|G_f(\xi)|^2d\xi=\pi\sum_{k\in Z}|f_k|^2=\pi\|f\|_2^2<\infty.$$

A primeira igualdade segue da identidade de Parseval e a segunda vem do seguinte:

$$\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|G_f(\xi/2)\right|^2\left|\hat{\phi}(\xi/2)\right|^2d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in Z} \left|G_f(y+2k\pi)\right|^2 \left|\hat{\phi}(y+2k\pi)\right|^2 dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|G_f(y)\right|^2 \sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(y+2k\pi)\right|^2 dy, \text{ pois } G \text{ é } 2\pi \text{ - periódica;}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|G_f(y)\right|^2 dy.$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \left|G_f(y)\right|^2 dy = \pi \, \| f \|_2^2.$$

Por outro lado, por (4.5), $G_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{H_\phi(\omega+\pi)}$,

$$\int_0^{2\pi} \left|G_f(\xi)\right|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 \left|H_\phi(\xi+\pi)\right|^2 d\xi$$

$$= \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 \left|H_\phi(\xi+\pi)\right|^2 d\xi + \int_\pi^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 \left|H_\phi(\xi+\pi)\right|^2 d\xi$$

$$= \int_0^{\pi} |\lambda(\omega)|^2 \left|H_\phi(\omega+\pi)\right|^2 d\omega + \int_0^{\pi} |\lambda(\omega+\pi)|^2 \left|H_\phi(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$= \int_0^{\pi} |\lambda(\omega)|^2 \left[\left|H_\phi(\omega+\pi)\right|^2 + \left|H_\phi(\omega)\right|^2\right] d\omega, \text{ onde usamos } \lambda(\omega) = -\lambda(\omega+\pi)$$

$$= \int_0^{\pi} |\lambda(\omega)|^2 d\omega, \text{ pelo teorema 3.3.}$$

Como $\lambda(\omega) = \upsilon(2\omega)e^{i\omega}$ segue

$$\int_0^{\pi} |\lambda(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\pi} |\upsilon(2\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\upsilon(\xi)|^2 d\xi.$$

Logo, $\int_0^{2\pi} |\upsilon(\xi)|^2 d\xi = 2\int_0^{2\pi} \left|G_f(\xi)\right|^2 d\xi = 2\pi \, \| f \|_2^2 < \infty$, e assim f é da forma (4.10) com γ 2π - periódica de quadrado integrável.

Com isto provamos o seguinte teorema:

4.1 Teorema. Se os subespaços $(V_j)_{j\in Z}$ em $L^2(R)$ formam uma aproximação multiresolução então existe uma base ortonormal wavelet $\{\psi_{j,k};\ j,\ k \in Z\}$ de $L^2(R)$ onde $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, tal que,

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{O_j} f,$$

ou

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + \sum_{k\in Z} \langle f,\ \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \tag{4.11}$$

E, além disto, uma possibilidade para a wavelet ψ é

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\ \overline{H_\phi(\xi/2 + \pi)}\ \hat{\phi}(\xi/2),$$

ou calculando a transformada de Fourier inversa,

$$\psi(x) = \sum_{k\in Z} (-1)^{k-1} h_{-k-1} \sqrt{2}\ \phi(2x + k),$$

$$\psi = \sum_{k\in Z} (-1)^{k-1} h_{-k-1}\ \phi_{1,k} \tag{4.12}$$

Note que ψ não é determinada unicamente pela análise multiresolução e exigimos (4.11): se ψ satisfaz (4.11), então qualquer $\psi^{\#}$ do tipo

$$\hat{\psi}^{\#}(\xi) = \rho(\xi)\hat{\psi}(\xi),$$

com ρ 2π-periódica e $|\rho(\xi)| = 1$, em quase toda parte, também satisfaz (4.11), (veja lema demonstrado no apêndice 2). Podemos escolher $\rho(\xi) = \rho_0 e^{imp}$ com $m\in Z$ e $|\rho_0| = 1$. Nós usaremos esta liberdade para definir, em vez de (4.12),

$$\psi = \sum_{k\in Z} g_k \phi_{1,k} \quad \text{com} \quad g_k = (-1)^k h_{-k+1}.$$

Apesar de podermos obter uma base ortonormal wavelet de $L^2(R)$ a partir da aproximação multiresolução, veremos agora que é possível construir uma função ψ

"patológica", tal que $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi(2^j x - k)$ seja uma base ortonormal para $L^2(R)$ que não é derivável de uma aproximação multiresolução. Isto é o que mostra um exemplo que veremos a seguir, antes ,porém, precisamos de uma nova definição e uma proposição.

Definição. Uma família de funções $(\varphi_j)_{j\in J}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é chamada uma *frame* se existem $A > 0$, $B < \infty$ tal que, para toda função f em $\mathcal{H}$,

$$A\|f\|^2 \le \sum_{j\in J}\left|\langle f, \varphi_j\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2.$$

Chamamos A e B de *frame bound*.

Se as duas frame bound são iguais, isto e, A = B, chamaremos a frame de *frame tight*.

Para a frame tight temos, para toda função f em $\mathcal{H}$,

$$\sum_{j\in J}\left|\langle f, \varphi_j\rangle\right|^2 = A\|f\|^2.$$

4.2 Proposição. Se $(\varphi_j)_{j\in J}$ é um frame tight, com bound A = 1, e se $\|\varphi_j\| = 1$ para todo $j \in J$, então φ_j constitui uma base ortonormal.

Dem.. Primeiro provaremos a ortonormalidade da família $(\varphi_j)_{j\in J}$. Temos, para qualquer $j \in J$,

$$\|\varphi_j\|^2 = \sum_{j'\in J}\left|\langle \varphi_j, \varphi_{j'}\rangle\right|^2 = \|\varphi_j\|^4 + \sum_{\substack{j'\neq j\\ j'\in J}}\left|\langle \varphi_j, \varphi_{j'}\rangle\right|^2,$$

já que $\|\varphi_j\| = 1$, temos $\langle\varphi_j, \varphi_{j'}\rangle = 0$ para todo $j' \neq j$.

Agora seja $f \in \mathcal{H}$. supomos que $\langle f, \varphi_j\rangle = 0$ para todo $j \in J$ usando novamente o fato de $(\varphi_j)_{j\in J}$ ser frame tight segue que $f \equiv 0$ e que φ_j gera todo $\mathcal{H}$. □

Veremos agora o exemplo comentado anteriormente.

Defina $\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{4\pi}{7} \leq |\omega| \leq \pi \text{ ou } 4\pi \leq |\omega| \leq \frac{32\pi}{7}, \\ 0 & \text{para outros valores de } \omega. \end{cases}$

Temos então, $\| \psi_{j,k} \|_2 = \| \psi \|_2 = 1$. De fato,

$$\| \psi \|^2 = \frac{1}{2\pi} \left\| \hat{\psi} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\frac{32\pi}{7}}^{-4\pi} d\omega + \int_{-\pi}^{-\frac{4\pi}{7}} d\omega + \int_{\frac{4\pi}{7}}^{\pi} d\omega + \int_{4\pi}^{\frac{32\pi}{7}} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} 2\pi$$

$$= 1.$$

Além disso, $\sum_{j \in Z} \left| \hat{\psi}(2^j \omega) \right|^2 = 1$ em quase toda parte. Ainda observe que suport $\hat{\psi} \bigcap \left[\text{sup ort } \hat{\psi} + (2k + 1)2\pi 2^{\ell} \right]$ tem medida zero para todo $\ell \geq 0$, $k \in Z$ assim,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^{\ell}\xi) \overline{\hat{\psi}(2^{\ell}(\xi + 2\pi(k + 1)))} = 0$$

em quase toda parte.

Então usando o critério de Tchamitchian ([4], p.73), concluímos que $\psi_{j,k}$ constitui um frame tight com constante igual a 1. Logo, pela proposição 4.2, $\psi_{j,k}$ e base ortonormal para $L^2(R)$.

Suponhamos (por absurdo), que ψ (cuja transformada de Fourier foi definida acima) esteja associada com a aproximação multiresolução, então $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} H_{\phi}(\xi/2 + \pi) \hat{\phi}(\xi/2)$ e $\hat{\phi}(\xi) = H_{\phi}(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2)$ valeriam para a função escala correspondente ϕ.

Segue de (3.7) que $\dfrac{\left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2}{\left|\hat{\phi}(\xi/2)\right|^2} + \dfrac{\left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2}{\left|\hat{\phi}(\xi/2)\right|^2} = 1,$ ou ainda,

$\left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2 + \left|\hat{\psi}(\xi)\right|^2 = \left|\hat{\phi}(\xi/2)\right|^2$ que implica, para $\xi \neq 0$,

$$\left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\hat{\psi}(2^j\xi)\right|^2 .$$

Podemos checar a partir da definição de $\hat{\psi}$ que esta última igualdade implica

$$\left|\hat{\phi}(\xi)\right| = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le |\xi| \le \frac{4\pi}{7}, \\ & \text{ou } \pi \le |\xi| \le \frac{8\pi}{7}, \\ & \text{ou } 2\pi \le |\xi| \le \frac{16\pi}{7}, \\ 0 & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Neste caso, para a função H_ϕ $2\pi-$periodica valeria $\hat{\phi}(\xi) = H_\phi(\xi/2)\,\hat{\phi}(\xi/2)$ (para esta ϕ), então teríamos $\left|H_\phi(\xi)\right| = 1$ para $0 \le |\xi| \le \frac{4\pi}{7}$.

A periodicidade de H_ϕ implicaria que $\left|H_\phi(\xi)\right| = 1$ também em $2\pi \le \xi \le \frac{18\pi}{7}$. Consequentemente, $\left|H_\phi(\xi)\right|\left|\hat{\phi}(\xi)\right| = 1$ para $2\pi \le |\xi| \le \frac{16\pi}{7}$, sendo assim, ou $\left|\hat{\phi}(2\xi)\right| = 0$, ou vale este intervalo.

Esta contradição prova que esta base ortonormal wavelet não é derivável de uma aproximação multiresolução.

Exemplos.

Vejamos o que nos dá o teorema 4.1 para a aproximação multiresolução de Haar. Neste caso,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{outros valores.} \end{cases}$$

Usaremos $\psi = \sum_{k \in Z} g_k \phi_{1,k}$, onde $g_k = (-1)^k h_{-k+1}$. Então,

$$h_k = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \overline{\phi(2x-k)}\, dx = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{se } k = 0,1, \\ 0 & \text{outros valores de k.} \end{cases}$$

Consequentemente, $\psi = \sum_{k=0}^{1} g_k \phi_{1,k} = g_0\phi_{1,0} + g_1\phi_{1,1}$

$= 1\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0} - 1\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}$ ou

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ 0 & \text{outros valores de x.} \end{cases}$$

Esta é a base de Haar, (veja apêndice 1).

O próximo exemplo é da família de funções de Battle-Lemarié.

As wavelets Battle-Lemarié estão associadas com a aproximação multiresolução consistindo do espaço de funções spline; em cada caso tomamos um B-spline com nós no conjunto dos inteiros para a função scaling original.

Se escolhermos ϕ como spline constante por partes,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{outros valores,} \end{cases}$$

então encontraremos a base de Haar vista acima.

O próximo exemplo é o spline linear por partes,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{se } 0 \le |x| \le 1, \\ 0 & \text{outros valores,} \end{cases}$$

desenhado na figura 4.1a. Esta função ϕ satisfaz

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x+1) + \phi(2x) + \frac{1}{2}\phi(2x-1);$$

ver Figura 4.1b.

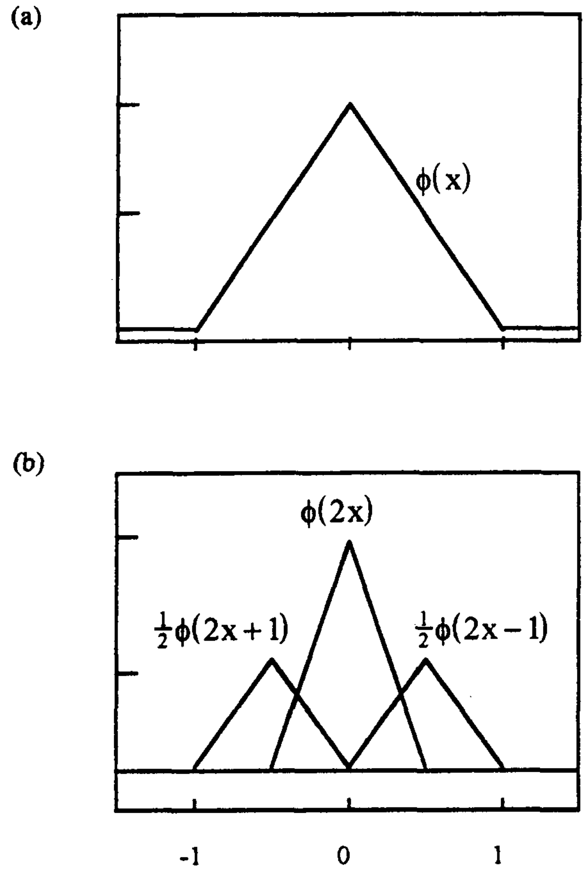

FIG. 4.1 O spline ϕ; satisfaz $\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x+1) + \phi(2x) + \frac{1}{2}\phi(2x-1)$.

Sua transformada de Fourier é

$$\hat{\phi}(\xi) = \left(\frac{\operatorname{sen} \xi/2}{\xi/2}\right)^2,$$

e, $$2\pi \sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)\right|^2 = \sum_{k=-1}^{1} \hat{c}_k\, e^{-ik\xi} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos\xi = \tfrac{1}{3}\left(1 + 2\cos^2 \xi/2\right).$$

Calculamos os coeficientes de Fourier de $\sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)\right|^2$ como segue:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{\ell\in Z} \left|\hat{\phi}(\xi + 2\ell\pi)\right|^2 e^{-ik\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\phi}(\xi)\right|^2 e^{-ik\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \overline{\phi(x-k)}\, dx.$$

Para esta função ϕ estes coeficientes não são difíceis de calcular, (para uma fórmula explícita ver [2]).

Como $\phi(x) = \sum_{k\in Z} c_k\phi(2x-k)$, onde $\sum_{k\in Z} |c_k|^2 < \infty$, $H(\xi) = \cos^2 \xi/2$ e

$0 < c \leq \sum_{k\in Z} \left|\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)\right|^2 \leq c' < \infty$, os subespaços V_j constituem uma aproximação multiresolução.

Note que, para as translações, ϕ não é ortogonal então precisamos aplicar o truque da ortogonalização (2.8)

$$\hat{\phi}^{\#}(\xi) = \frac{1}{\left[\frac{1}{3}\left(1 + 2\cos^2 \xi/2\right)\right]^{1/2}} \left(\frac{\operatorname{sen} \xi/2}{\xi/2}\right)^2$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 \xi/2}{\xi^2\left[1 + 2\cos^2 \xi/2\right]^{1/2}}.$$

(o gráfico da função $\phi^{\#}$ está desenhado na Figura 4.2a).

Para termos $\phi^{\#}$, o procedimento é calcular (numericamente) os coeficientes de Fourier de $\left[1+2\cos\xi/2\right]^{-1/2}$,

$$\left[1+2\cos\xi/2\right]^{-1/2} = \sum_{k\in Z} c_k e^{-ik\xi},$$

e escrever $\phi^{\#}(x) = \frac{3}{2}\sum_{k\in Z} c_k\phi(x-k)$.

A correspondente $H^{\#}_{\phi}$ é

$$H^{\#}_{\phi}(\xi) = \cos^2(\xi/2)\left[\frac{1 + 2\cos^2 \xi/2}{1 + 2\cos^2 \xi}\right]^{1/2},$$

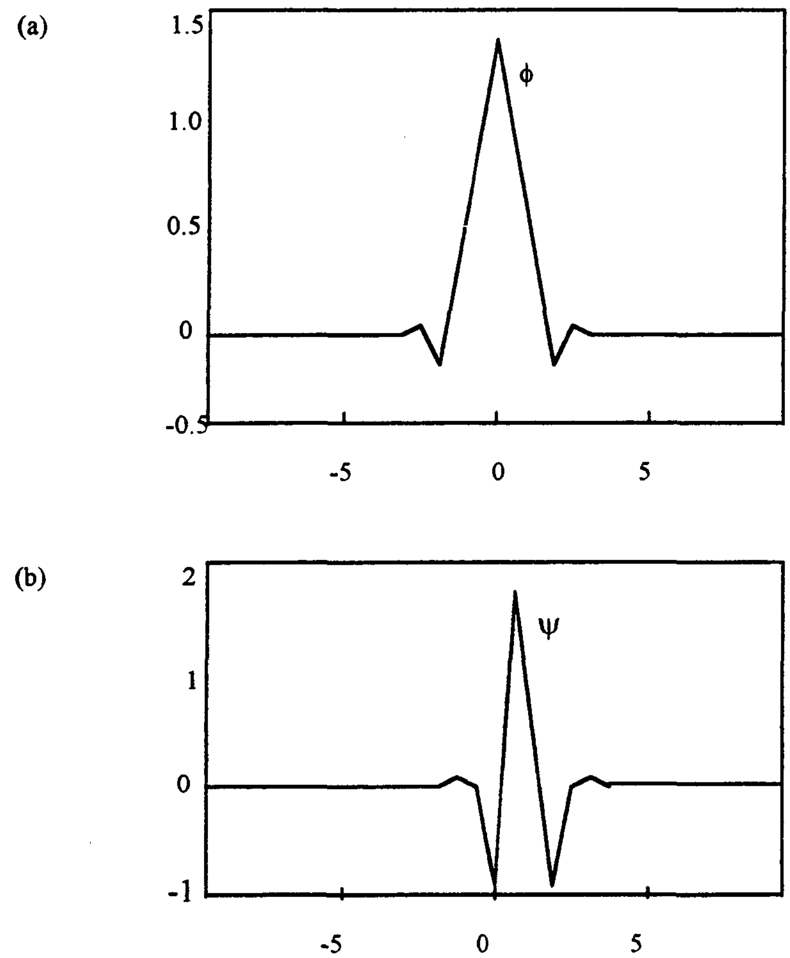

FIG. 4.2. A função scaling ϕ e a wavelet ψ obtidas do spline Battle-Lemarié.

e $\hat{\psi}$ é dada por

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\, \overline{H_\phi\left(\xi/2 + \pi\right)}\, \hat{\phi}\left(\xi/2\right)$$

$$= e^{i\xi/2} \cos^2\left(\tfrac{\xi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\right) \left[\frac{1 + 2\cos^2\left(\xi/4 + \pi/2\right)}{1 + 2\cos^2\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \right]^{1/2} \hat{\phi}^{\#}\left(\xi/2\right)$$

$$= e^{i\xi/2} \operatorname{sen}^2\left(\xi/4\right) \left[\frac{1 + 2\operatorname{sen}^2 \xi/4}{1 + 2\cos^2 \xi/2} \right]^{1/2} \hat{\phi}^{\#}\left(\xi/2\right)$$

$$= \sqrt{3}\, e^{i\xi/2} \operatorname{sen}^2\left(\xi/4\right) \left[\frac{1 + 2\operatorname{sen}^2 \xi/4}{\left(2 + \cos^2 \xi/2\right)\left(1 + 2\cos^2 \xi/4\right)} \right]^{1/2} \hat{\phi}\left(\xi/2\right).$$

Podemos ainda calcular os coeficientes de Fourier d_k de

$\left[\left(1+2\operatorname{sen}^2 \xi/4\right)\left(1+2\cos^2 \xi/2\right)^{-1}\left(1+2\cos^2 \xi/4\right)-1\right]^{1/2}$, e escrever

$$\psi(x) = 2\sqrt{3} \sum_{k \in Z} \left(d_{k+1} - 2d_k + d_{k-1}\right) \phi(2x - k).$$

Esta função está desenhada na Figura 4.2b.

Isso tudo que vimos sugere a seguinte estratégia para construção de novas bases ortonormais wavelets:

- Escolha ϕ tal que (i) ϕ tenha decaímento razoável,

  (ii) (3.1) e as hipóteses do teorema 3.4 sejam satisfeitas

  (assim os V_j constituem uma aproximação multiresolução);

- Se necessário, usar o "truque da ortogonalização"

$$\hat{\phi}^{\#}(\xi) = \left[\sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)\right|^2\right]^{-1/2} \hat{\phi}(\xi);$$

- Finalmente, $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\, H_\phi^{\#}(\xi/2 + \pi)\, \hat{\phi}^{\#}(\xi/2)$

com $$H_\phi^{\#}(\xi) = H_\phi(\xi)\, \frac{\left[\sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(\xi + 2k\pi)\right|^2\right]^{1/2}}{\left[\sum_{k \in Z} \left|\hat{\phi}(2\xi + 2k\pi)\right|^2\right]^{1/2}}.$$

Apêndice 1 - Base de Haar

Provaremos agora que a família $\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2}\,\psi(2^m x - n)$ constitui uma base ortonormal de $L^2(R)$ onde a função ψ é definida abaixo,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{se} \quad \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ 0 & \text{para outros valores de x.} \end{cases}$$

(esta é a função de Haar). Esta base é chamada *base de Haar*.

Para provar que $\psi_{m,n}$ constitui uma base ortonormal, precisamos estabelecer que:

1) $\psi_{m,n}$ são ortogonais;

2) qualquer função f de $L^2(R)$ pode ser aproximada por uma combinação linear finita dos $\psi_{m,n}$.

Estabelecemos (1). Como o suporte de $\psi_{m,n}$ é o intervalo $[2^{-m}n\ ,\ 2^{-m}(n+1)]$, segue que duas wavelets de Haar da mesma escala (mesmo valor de m) nunca se "sobrepõe" assim $\langle\, \psi_{m,n},\ \psi_{m,n'} \,\rangle = \delta_{n,n'}$.

Sobrepor suportes é possível se duas wavelets têm diferentes tamanhos como na figura 1.1 abaixo.

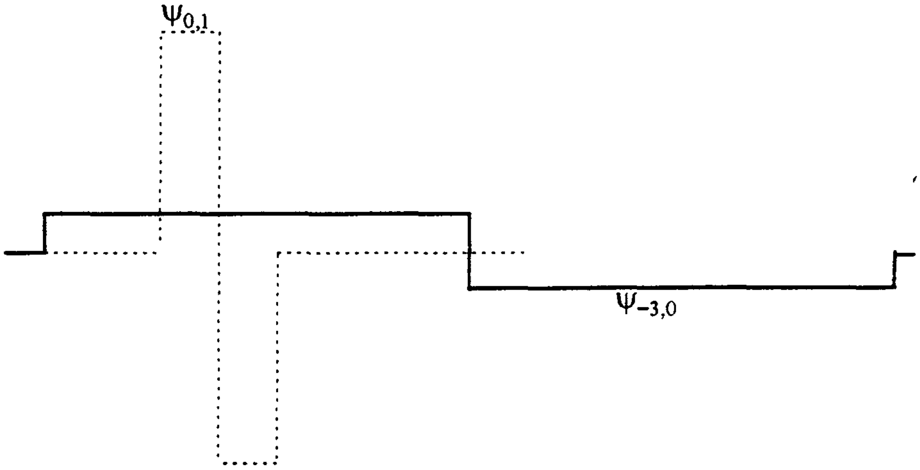

FIG. 1.1. Duas wavelets de Haar; o suporte da wavelet "estreita" está completamente contida no intervalo onde a wavelt "larga" é constante.

Não é difícil, portanto, ver que se $m > m'$, o suporte de $\psi_{m,n}$ repousa totalmente dentro da região onde $\psi_{m',n'}$ é constante (veja figura 1.1). Logo o produto interno de $\psi_{m,n}$ e $\psi_{m',n'}$ é proporcional a integral de ψ que é zero.
Com isto provamos que $\psi_{m,n}$ são ortonormais.

Agora veremos como uma função arbitrária f pode ser aproximada por uma combinação linear de wavelets de Haar.

Qualquer função f pertencente a $L^2(R)$ pode ser arbitrariamente aproximada por uma função com suporte compacto que seja constante por partes sobre os intervalos $[\ell 2^{-j}, (\ell+1)2^{-j}]$ basta observar o tamanho do suporte e o valor de j. Podemos, portanto nos restringir a tais funções: assumimos que f tem suporte $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$, e é parcialmente constante sobre $[\ell 2^{-J_0}, (\ell+1)2^{-J_0})$ onde J_1 e J_0 podem ser arbitrariamente grandes (veja figura 1.2).

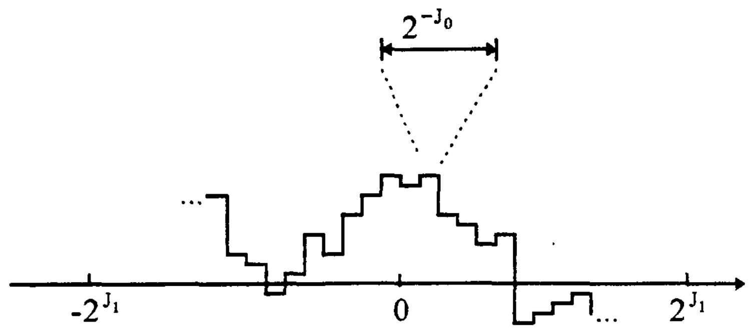

FIG. 1.2. Uma função f com suporte $[-2^{J_1}, 2^{J_1}]$, parcialmente constante sobre $[k2^{-J_0}, (k+1)2^{-J_0})$.

Denotaremos o valor constante de $f^0 = f$ sobre $[\ell 2^{-J_0}, (\ell+1)2^{-J_0})$ por f^0_ℓ. Representamos agora f^0 como a soma de duas partes $f^0 = f^1 + \delta^1$, onde f^1 é uma aproximação para f^0 que é parcialmente constante sobre intervalos duas vezes maior do que o original, isto é,

$$f^1\Big|_{[k.2.2^{-J_0}\, ,\, (k+1)2.2^{-J_0})} = f^1\Big|_{[k.2^{-J_0+1}\, ,\, (k+1)2^{-J_0+1})} \equiv \text{constante} := f^1_k .$$

Os valores f_k^1 são dados pela média de dois valores constantes correspondentes para f^0,

$$f_k^1 = \frac{1}{2}\left(f_{2k}^0 + f_{2k+1}^0 \right) \qquad \text{(veja figura 1.3).}$$

A função δ^1 é parcialmente constante com o mesmo "stepwidth" de f^0; imediatamente temos:

$$f_{2\ell}^0 = f_\ell^1 + \delta_{2\ell}^1, \quad \text{ou ainda,} \quad \delta_{2\ell}^1 = f_{2\ell}^0 - f_\ell^1 \quad \text{que implica}$$

$$\delta_{2\ell}^1 = \frac{1}{2}\left(f_{2\ell}^0 - f_{2\ell+1}^0 \right).$$

Por outro lado, $f_{2\ell+1}^0 = f_\ell^1 + \delta_{2\ell+1}^1$, ou ainda, $\delta_{2\ell+1}^1 = f_{2\ell+1}^0 - f_\ell^1$ assim

$$\delta_{2\ell+1}^1 = \frac{1}{2}\left(f_{2\ell+1}^0 - f_{2\ell}^0 \right).$$

Logo $\delta_{2\ell}^1 = - \delta_{2\ell+1}^1$.

Segue que δ^1 é uma combinação linear de funções de Haar dilatadas e transladadas,

$$\delta^1 = \sum_{\ell=-2^{J_1+J_0-1}+1}^{2^{J_1+J_0-1}} \delta_{2\ell}^1 \, \psi\!\left(2^{J_0-1}x - \ell\right).$$

Portanto podemos escrever f como

$$f = f^0 = f^1 + \sum_\ell c_{J_0-1} \, \psi_{J_0-1,\ell} \, ,$$

onde f^1 é do mesmo tipo de f^0, mas com "stepwidth" duas vezes maior.

Podemos aplicar o mesmo truque para f^1, assim

$$f^1 = f^2 + \sum_\ell c_{J_0-2} \, \psi_{J_0-2,\ell},$$

com f^2 ainda suportada sobre $\left[-2^{J_1}, \, 2^{J_1}\right]$, mas parcialmente constante sobre os intervalos igualmente grandes $\left[k2^{-J_0+2} \, , \, (k+1)2^{-J_0+2}\right)$.

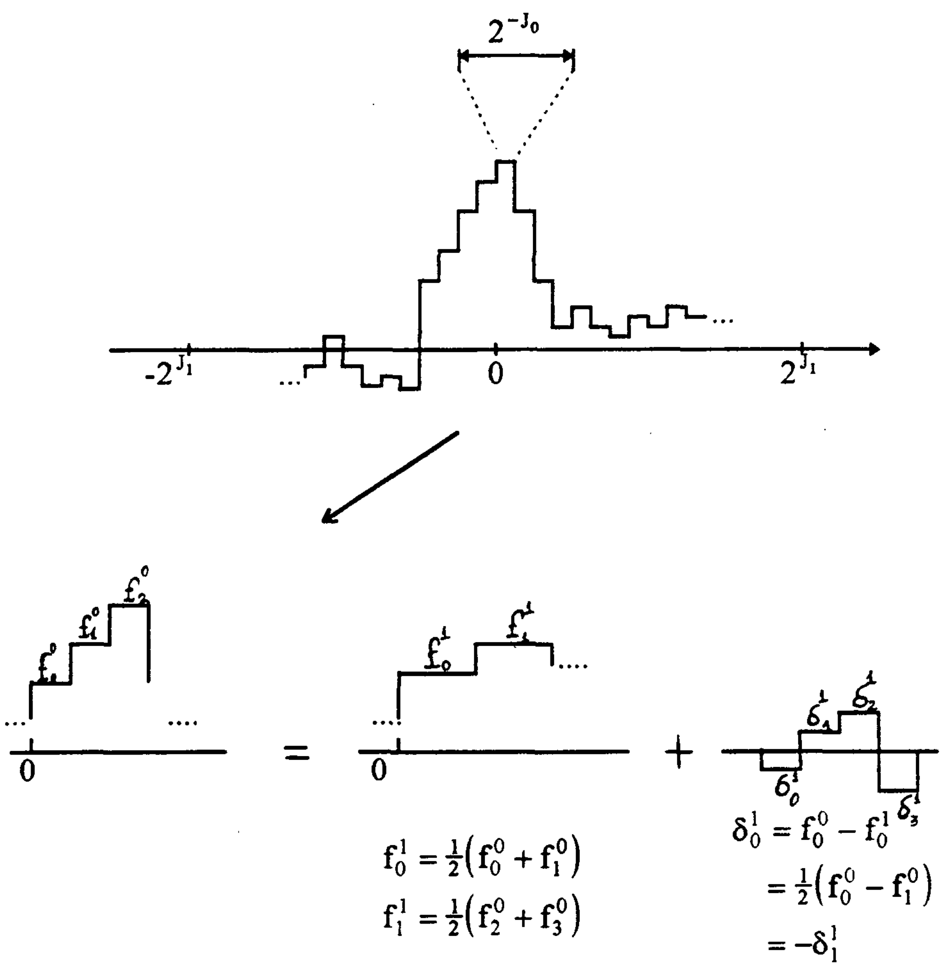

FIG. 1.3. Uma ampliação de uma "porção da f". Sobre cada par de intervalos, f é substituída pela média; a diferença entre f e f^1 é δ^1.

Podemos continuar fazendo asim, até termos

$$f = f^{J_0+J_1} + \sum_{m=J_0-1}^{-J_1} \sum_{\ell} c_{m,\ell}\, \psi_{m,\ell}\,.$$

Aqui $f^{J_0+J_1}$ consiste de duas partes constantes (veja figura 1.4), com $f^{J_0+J_1}\big|_{[0\,,\,2^{J_1})} \equiv f_0^{J_0+J_1}$ igual a média de f sobre $[0\,,\,2^{J_1})$, e $f^{J_0+J_1}\big|_{[-2^{J_1}\,,\,0)} \equiv f_{-1}^{J_0+J_1}$ a média de f sobre $[-2^{J_1}\,,\;0)$.

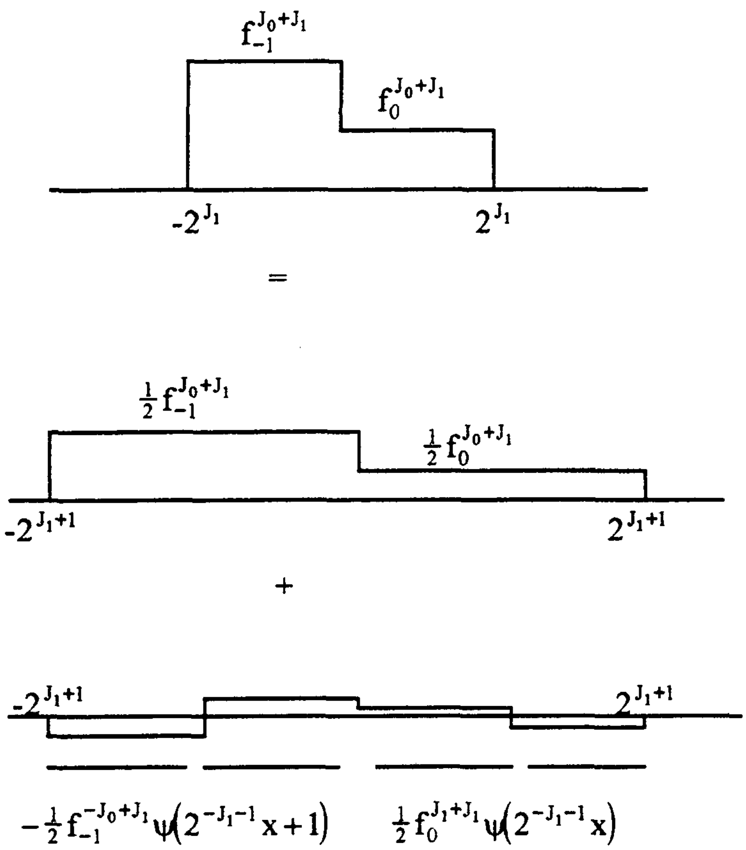

FIG. 1.4. A média de f sobre $[0,\ 2^{J_1}]$ e $[-2^{J_1},\ 0]$.

Apesar de termos "preenchido" todo o suporte de f, podemos continuar com o truque da média: nada nos impede de aumentar nosso horizonte de 2^{J_1} para 2^{J_1+1} e escrevendo

$$f^{J_1+J_2} = f^{J_1+J_2+1} + \delta^{J_1+J_2+1},$$

onde $f^{J_1+J_2+1}\Big|_{[0\,,\,2^{J_1+1})} \equiv \frac{1}{2}f_0^{J_1+J_2}$, $f^{J_1+J_2+1}\Big|_{[-2^{J_1+1}\,,\,0)} \equiv \frac{1}{2}f_{-1}^{J_1+J_2}$ e,

$$\delta^{J_1+J_2} = \frac{1}{2}f_0^{J_1+J_2}\,\psi(2^{-J_1-1}x) - \frac{1}{2}f_{-1}^{J_1+J_2}\,\psi(2^{-J_0-1}x+1) \quad \text{(veja figura 1.4).}$$

Isto pode ser repetido, conduzindo para

$$f = f^{J_0+J_1+k} + \sum_{m=J_0-1}^{-J_1-k} \sum_{\ell} c_{m,\ell}\, \Psi_{m,\ell},$$

onde o suporte de $\left(f^{J_0+J_1+k}\right) = \left[-2^{J_1+k},\ 2^{J_1+k}\right]$, e $f^{J_0+J_1+k}\Big|_{[0\,,\ 2^{J_1+k})} = 2^{-k}\, f_0^{J_0+J_1}$,

$f^{J_0+J_1+k}\Big|_{[-2^{J_1+k},\ 0)} = 2^{-k}\, f_{-1}^{J_0+J_1}$.

Segue imediatamente que

$$\left\| f - \sum_{m=J_0+1}^{-J_1-k} \sum_{\ell} c_{m,\ell}\, \Psi_{m,\ell} \right\|_2^2 = \left\| f^{J_0+J_1+k} \right\|_2^2$$

$$= 2^{-k}.2^{J_1} \left(\left|f_0^{J_0+J_1}\right|^2 + \left|f_{-1}^{J_0+J_1}\right|^2 \right),$$

que é arbitrariamente pequeno sempre que tomarmos k grande.

Portanto, f pode ser aproximada com precisão arbitrária por uma combinação linear finita de wavelets de Haar. □

Observe que no argumento visto acima usamos implicitamente a aproximação multiresolução.

Apêndice 2

Lema. Se $f_k(x) = f(x-k)$ e $g_k(x) = g(x-k)$, $k \in Z$ constituem bases ortonormais do mesmo subespaço E, de $L^2(R)$, então existe uma função 2π-periódica $\alpha(\xi)$, com $|\alpha(\xi)| = 1$ tal que $\hat{g}(\xi) = \alpha(\xi)\hat{f}(\xi)$.

Dem.. Como f_k é base ortonormal para E e $g \in E$, podemos escrever

$$g = \sum_{k \in Z} \alpha_k f_k$$

com $\sum_{k \in Z} |\alpha_k|^2 = \| g \|^2 = 1$.

Consequentemente, $\hat{g}(\xi) = \alpha(\xi)\hat{f}(\xi)$ com $\alpha(\xi) = \sum_{k \in Z} \alpha_k e^{-ik\xi}$.

Sabemos que a ortonormalidade de $f(\cdot - k)$ é equivalente a $\sum_{k \in Z} \left|\hat{f}(\xi - 2k\pi)\right|^2 = 1$ em quase toda parte. Analogamente, $\sum_{n \in Z} \left|\hat{g}(\xi - 2n\pi)\right|^2 = 1$. Disto segue que $|\alpha(\xi)| = 1$. □

Referências

[1] BREZIS, H., *Análisis Funcional Teoria y Aplicaciones.* Madrid: Alianza Editorial S. A., 1984.

[2] CHUI, C.K., *An Introduction to Wavelets.* New York: Academic Press, 1992.

[3] COHEN, A., *Analyse Multiresolutions et Filtres Miroirs en Quadrature.* Preprint, France: CEREMADE, Université Paris Dauphine.

[4] DAUBECHIES, I., *Ten Lectures on Wavelets.* Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[5] GROSSMANN, A. e MORLET, J., *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape.* SIAM, J. Math. 15, p. 723-736, 1984.

[6] IÓRIO JÚNIOR, R. e MAGALHÃES IÓRIO, V., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.* Rio de Janeiro: IMPA, 1988.

[7] LEMARIÉ, P. G., *La propriété de suport minimal dans les analyses multirésolution.* Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris, 312, p. 773-776.

[8] MALLAT, S., *Multiresolution Aproximations and Wavelet Ortonormal Bases of* $L^2(R)$. Trans. Amer. Math. Soc., 315, p. 69-87, September, 1989.

[9] MALLAT, S., *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation.* IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.II, nº :7, July, 1989.

[10] MEDEIROS, A. C. e MELLO, E. A. de, *A Integral de Lebesgue;* Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, UFRJ, 1989.

[11] MEYER, Y., *Ondelettes et function splines.* Séminaire EDP, Paris: Ecole Polytec. December, 1986.

[12] REED, S. e SIMON, B., *Methods of Modern Mathematical Physics.* vol. I: Functional Analysis. New York: Academic Press, 1974.

[13] RUDIN, W., *Real & Complex Analysis.* 2 ed. New York: McGraw - Hill, 1974.