

JANICE RACHELLI

FRAMES DE WAVELETS

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre.

Curso de Pós-Graduação em Matemática,
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Dr. Etzel Ritter von Stockert.

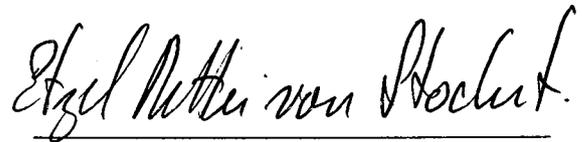
FLORIANÓPOLIS

1995

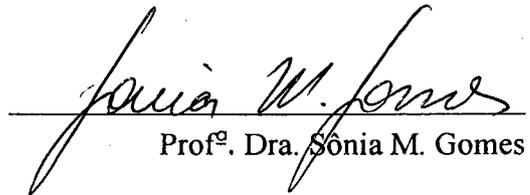
JANICE RACHELLI

FRAMES DE WAVELETS

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Ciências”, especialidade Matemática, no curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, pela comissão formada pelo professores:



Prof. Dr. Etzel Ritter von Stockert
Orientador



Prof^ª. Dra. Sônia M. Gomes



Prof. Ph.D. Paul James Otterson

Florianópolis, 18 de maio de 1995.

Aos meus pais: Elvira e Waldemar

Agradecimentos

Ao Prof. Etzel pela orientação, pelo apoio e compreensão durante a elaboração deste trabalho.

Ao Prof. Paul pela ajuda e amizade demonstradas ao longo do curso.

À Prof^ª. Sônia e ao Prof. Lício, pelas valiosas e oportunas sugestões ao texto.

À amiga e colega Nany, pelo incentivo, apoio e amizade demonstradas em todos os anos de convivência.

Ao meu amigo Flávio, pela digitação deste trabalho.

À minha família por sempre acreditar em mim.

À todos aqueles que contribuíram das mais diversas formas para melhor realização desta tarefa.

Aos órgãos financiadores CAPES e CNPq.

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1 - Preliminares	4
1.1 Os Espaços L^p	4
1.2 A Transformada de Fourier.....	9
1.3 Transformações Lineares.....	13
Capítulo 2 - Generalidades sobre Frames	17
2.1 Definições e Propriedades.....	17
2.2 Operador Frame.....	21
2.3 Frames Quase-tight.....	35
Capítulo 3 - Frames de Wavelets	42
3.1 Condição de Admissibilidade.....	46
3.2 A Transformada Wavelet.....	53
3.3 Frames de Wavelets.....	61
3.3.1 Frames e Frames Tight de Wavelets.....	63
3.3.2 Exemplos.....	70
3.3.3 Condições Gerais.....	77
3.4 Conclusões e Comentários Finais.....	94
Referências	99

Resumo

Neste trabalho, discutimos a expansão de funções no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ através da família $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ com

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

onde $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ e $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ é uma wavelet, ou seja, expansões a partir de funções $\psi_{m,n}$, não necessariamente ortogonais, geradas por uma única função ψ , através de operações de translações e dilatações. Mostramos que se o conjunto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ gera uma frame, então, para todo f em $L^2(\mathbb{R})$, existe uma expansão da forma

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n}, \quad f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

com $\tilde{\psi}_{m,n} = (T^*T)^{-1} \psi_{m,n}$, onde T é um operador de \mathcal{H} em $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ dado por

$Tf = \left(\langle f, \psi_{m,n} \rangle \right)_{m,n}$. São determinadas condições sobre a função ψ e sobre as constantes a_0 e b_0

tais que $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitui uma frame de wavelets em $L^2(\mathbb{R})$.

Abstract

In this work, we discuss expansions of functions in the Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ in terms of the family $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ with

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

with $a_0 > 1$, $b_0 > 0$ and $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ is a wavelet, in other words, expansions from on functions $\psi_{m,n}$, are not necessarily orthogonal, generated from on function ψ , by translations and dilations. We show that if the set $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitute a frame, then, for all f in $L^2(\mathbb{R})$, there is a expansion of the way.

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n}, \quad f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

with $\tilde{\psi}_{m,n} = (T^*T)^{-1}\psi_{m,n}$, where T is the operator from \mathcal{H} to $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ defined by $Tf = \left(\langle f, \psi_{m,n} \rangle \right)_{m,n}$. There are determined conditions about a function ψ and the constants a_0 and b_0 such that $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitute a frame of wavelets in $L^2(\mathbb{R})$.

Introdução

Recentemente, famílias de funções $\psi_{a,b}$

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (1)$$

geradas a partir de uma única função ψ , através de operações de translação e dilatação, têm se tornado bastante útil em muitos campos da Matemática pura e aplicada. Seguindo Grossmann e Morlet ([8]), chamamos tais famílias de “wavelets”. Na literatura, muitas vezes, encontramos a denominação wavelet para a função ψ ([2] e [5]). Técnicas baseadas no uso de translações e dilatações certamente não são novas. Podem ser encontradas no trabalho de A. Calderón, em Mecânica Estatística e Teoria Quântica, no estudo de operadores integrais singulares ([3]). Independente dessas disciplinas, a introdução de famílias especiais de wavelets tem levado a novos e interessantes resultados. Além disso, wavelets são usadas em muitas outras aplicações, como por exemplo, na análise e reconstrução de sinais ([6]).

Dependendo do tipo de aplicação, diferentes famílias de wavelets podem ser escolhidas. Podemos tomar $\psi_{a,b}$, com parâmetros a e b variando continuamente em $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$). A partir da família $\{\psi_{a,b}\}$, podemos definir uma aplicação

$$W: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, a^{-2} da db)$$

chamada Transformada Wavelet, da seguinte forma

$$(Wf)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx. \quad (2)$$

Se ψ satisfaz a condição de admissibilidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (3)$$

onde $\hat{\psi}$ é a transformada de Fourier de ψ , então W é uma isometria (a menos de uma constante).

Em outras aplicações, podemos restringir os valores de a e b , a valores discretos. Neste caso, fixamos uma dilatação $a_0 > 1$ e uma translação $b_0 > 0$ e consideramos a seguinte família de wavelets:

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

Isto corresponde à escolha de $a = a_0^m$ e $b = nb_0 a_0^m$, $m, n \in \mathbb{Z}$ em (1). A “Transformada Wavelet Discreta” está associada com as wavelets $\psi_{m,n}$ e leva $L^2(\mathbb{R})$ em seqüências indexadas em $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$Wf = \left(\left\langle f, \psi_{m,n} \right\rangle \right)_{m,n \in \mathbb{Z}} \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (5)$$

O principal objetivo desta dissertação é discutir a expansão de funções em $L^2(\mathbb{R})$, em relação a família de wavelets $\{ \psi_{m,n} \}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ (em geral, não ortogonal), com $\psi_{m,n}$ definida em (4). Isto será feito seguindo as linhas das referências [4] e [5].

Esta dissertação, dividida em 3 capítulos, está organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, enunciamos alguns conceitos e resultados sobre espaços L^p , transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$, e transformações lineares que serão utilizados no decorrer deste texto e que possibilitam uma melhor compreensão deste trabalho. A maior parte desses resultados se encontram nas referências [1], [10] e [13].

No capítulo 2, apresentamos resultados sobre o estudo das frames em espaços de Hilbert \mathcal{H} em geral, onde discutimos vários aspectos da expansão não ortogonal. O problema é representar qualquer $f \in \mathcal{H}$ por uma soma do tipo

$$f = \sum_j \left\langle f, \varphi_j \right\rangle \varphi_j$$

onde os $\varphi_j \in \mathcal{H}$, $\forall j$. Esta representação é obviamente verdadeira se os φ_j formam uma base ortonormal em \mathcal{H} . No entanto, também pode valer em situações onde os φ_j não são mutuamente ortogonais, mas constituem uma frame em \mathcal{H} . Mostramos, que se o conjunto $\{ \varphi_j \}_{j \in \mathbb{J}}$ em \mathcal{H} ,

(J enumerável), constitui uma frame, isto é, se existem constantes $A > 0$ e $B < \infty$ tais que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} \left| \langle f, \varphi_j \rangle \right|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H} \quad (6)$$

então, existe uma expansão para qualquer $f \in \mathcal{H}$, da forma

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j, \quad f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j \quad (7)$$

com

$\tilde{\varphi}_j = (T^* T)^{-1} \varphi_j$, onde T é o operador de \mathcal{H} em $\ell^2(J)$, definido por $Tf = \left(\langle f, \varphi_j \rangle \right)_j$, $j \in J$.

Para algumas frames especiais (frames tight), obtemos uma expansão mais simplificada

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad f \in \mathcal{H}, \quad (8)$$

expansão esta muito semelhante à ortonormal, só que, em geral, as φ_j , $j \in J$, formam um conjunto não ortogonal.

No capítulo 3, partimos de uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição de admissibilidade (3) e determinamos condições sobre a função ψ e sobre as constantes a_0 e b_0 tais que o conjunto $\{ \psi_{m,n} \}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ com

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

onde $a_0 > 1$ e $b_0 \neq 0$, constitui uma frame em $L^2(\mathbb{R})$. Também construímos exemplos explícitos de frames (frames tight). Inicialmente trabalhamos com funções ψ , cuja transformada de Fourier, $\hat{\psi}$, tem suporte compacto e depois determinamos condições mais gerais sobre ψ que leva à uma frame de wavelets. Os resultados obtidos nos capítulos 2 e 3 se baseiam principalmente nas referências [4], [5] e [6].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais que possibilitam a compreensão deste trabalho. As demonstrações foram omitidas, porém, indicamos após cada resultado a referência onde podem ser encontradas. A maior parte dos resultados sobre espaços L^p , transformada de Fourier e transformações lineares se encontram, respectivamente, nas referências [10], [13] e [1].

1.1 Os Espaços L^p

Definição. Seja p um número real, tal que $1 \leq p < \infty$. Representamos por $L^p(a, b)$, a classe de todas as funções $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, mensuráveis tais que

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty,$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Observação. Se em lugar do intervalo aberto (a, b) , tivermos um conjunto mensurável X , de medida não nula (podendo ser um conjunto não limitado), a definição de espaços $L^p(X)$ é feita de maneira inteiramente análoga a que fazemos no caso $L^p(a, b)$. Assim, quando não houver necessidade de se fazer referências ao conjunto X , onde as funções estão definidas, escreveremos simplesmente L^p em lugar de $L^p(X)$.

Identifiquemos funções $f, g \in L^p(X)$ tais que $\int_X |f(x) - g(x)|^p dx = 0$ ($f = g$ em quase toda parte).

Em $L^p(X)$ podemos definir uma norma, associando a cada $f \in L^p(X)$, o número real,

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

A norma acima é chamada de **L^p -norma**.

Definição. Se p e q são números reais positivos tal que $p + q = pq$ ou, equivalentemente

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

então p e q são chamados expoentes conjugados. Um caso importante ocorre quando $p = q = 2$.

1.1.1 Proposição. (Desigualdade de Hölder). Se p e q são expoentes conjugados, $1 < p < \infty$ e se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $fg \in L^1$ e tem-se a desigualdade

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (1.1.1)$$

Demonstração: (Ver por exemplo [10])

Sendo L^p um espaço vetorial normado podemos introduzir em L^p uma métrica, definindo a distância entre duas funções f e g de L^p por $\|f - g\|_p$. Com isso L^p torna-se um espaço métrico e, deste modo, tem sentido falar em convergência de uma seqüência (f_k) de funções de L^p . Explicitamente, uma seqüência (f_k) de funções de L^p **converge** para uma função $f \in L^p$ se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_p = 0$$

Este tipo de convergência é conhecido como **convergência na L^p -norma** ou **convergência forte** em L^p .

Se (f_k) é uma seqüência de funções em $L^p(X)$ que converge fortemente para uma função $f \in L^p(X)$, onde $1 \leq p < \infty$, então (f_k) satisfaz as seguintes condições:

i) Para toda função $g \in L^q(X)$ tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k(x) \overline{g(x)} dx = \int_X f(x) \overline{g(x)} dx$$

ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_p = \|f\|_p$

Definição: Dizemos que a seqüência (f_k) **converge fracamente** para $f \in L^p$ se (f_k) satisfaz a condição (i) acima.

1.1.2 Teorema. (Riesz-Fischer) Se (f_k) é uma seqüência de Cauchy em L^p , então f_k é convergente em L^p .

Demonstração: (Ver por exemplo [10])

Um espaço métrico é dito **completo** quando toda seqüência de Cauchy nesse espaço for convergente. Um espaço vetorial normado que é completo relativamente à métrica induzida pela norma, chama-se **espaço de Banach**. Portanto, o teorema 1.1.2 nos diz que L^p é um espaço de Banach.

Num espaço vetorial V , com produto interno, pode-se definir uma norma mediante a fórmula

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad (1.1.2)$$

Um espaço vetorial normado V , denomina-se **espaço de Hilbert** se V é um espaço de Banach e está definido em V um produto interno tal que a norma de V é obtida mediante a fórmula (1.1.2).

Uma desigualdade canônica num espaço de Hilbert \mathcal{H} é a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

Uma conseqüência disto é que

$$\|f\| = \sup_{\|g\| \leq 1} |\langle f, g \rangle| = \sup_{\|g\|=1} |\langle f, g \rangle| \quad f, g \in \mathcal{H}$$

Dizemos que \mathcal{H} é um espaço separável se ele contém um subconjunto denso e numerável. No que segue, estamos considerando \mathcal{H} como sendo um espaço separável.

Observação. Os espaços $L^2(\mathbb{R})$ são espaços de Hilbert, pois em $L^2(\mathbb{R})$ podemos definir um produto interno por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

Portanto em $L^2(\mathbb{R})$ pode ser usada toda a teoria concernente aos espaços de Hilbert.

Em $L^2(\mathbb{R})$ a desigualdade de Hölder (1.1.1) é conhecida como **desigualdade de Schwarz** e é dada por

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.1.3)$$

O espaço de todas as seqüências de quadrado somável indexadas em Z , $\ell^2(Z)$, também é um espaço de Hilbert. Neste caso, para $c = (c_n)_{n \in Z}$ e $d = (d_n)_{n \in Z} \in \ell^2(Z)$,

$$\langle c, d \rangle = \sum_n c_n \overline{d_n}$$

Num espaço de Hilbert \mathcal{H} , um conjunto de vetores $\{\varphi_j\}_{j \in J}$, (J enumerável ou finito) é dito um **conjunto ortonormal** se

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Dizemos que $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é um **conjunto ortonormal completo (base ortonormal)** se a condição (1.1.4) é satisfeita e se

$$\langle f, \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall j \in J \Rightarrow f = 0 \quad (1.1.5)$$

Se $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é um conjunto ortonormal completo em \mathcal{H} , então para qualquer $f \in \mathcal{H}$, temos

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad (1.1.6)$$

e

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2. \quad (1.1.7)$$

A série (1.1.6) e o coeficiente $\langle f, \varphi_j \rangle$ são chamados, respectivamente, série de Fourier e coeficiente de Fourier de f . A equação (1.1.7) é chamada **identidade de Parseval**.

O conjunto $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ constitui um conjunto ortonormal completo em $L^2(0, 2\pi)$. Neste

caso, a equação (1.1.7) torna-se

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_n \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx \right|^2, \quad f \in L^2(0, 2\pi).$$

Dizemos que $\{\varphi_j\}$ e $\{\phi_j\}$ de elementos de um espaço de Hilbert \mathcal{H} , formam um **conjunto biortogonal normalizado**, se

$$\langle \varphi_j, \phi_k \rangle = 0 \quad j \neq k \quad \text{e} \quad \langle \varphi_j, \phi_j \rangle = 1.$$

Este conjunto biortogonal é dito completo se cada um dos conjuntos $\{\varphi_j\}$ e $\{\phi_j\}$ é completo em \mathcal{H} . Então, para qualquer f em \mathcal{H} , temos a expansão biortogonal

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \phi_j, \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle \varphi_j$$

válido quando a série no segundo membro converge.

1.1.3 Teorema. (Teorema da Convergência Dominada) Suponhamos que (f_n) é uma seqüência de funções complexas mensuráveis em X tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in X$. Se existe uma função $g \in L^1(X)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

então $f \in L^1(X)$,

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx$$

Demonstração: (Ver por exemplo [13])

1.1.4 Teorema. Seja (f_n) uma seqüência de funções complexas mensuráveis definidas em X tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n(x)| dx < \infty.$$

Então a série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para quase todo $x \in X$, $f \in L^1(X)$ e

$$\int_X f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) dx$$

Demonstração: (Ver por exemplo [13])

1.2 A Transformada de Fourier

Definição. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. A transformada de Fourier \hat{f} é definida por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (1.2.1)$$

1.2.1 Teorema. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Então a transformada de Fourier \hat{f} satisfaz:

(i) \hat{f} é uniformemente contínua em \mathbb{R} ;

(ii) $|\hat{f}(\xi)| \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$.

Demonstração: (Ver por exemplo [11])

Definição. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. A **convolução** de f e g , $f * g$, definida em quase toda parte é dada por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Note que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, já que

$$\|f * g\|_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dy |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

1.2.2 Teorema. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$$

Demonstração: (Ver por exemplo [13])

Seja

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0 \tag{1.2.2}$$

a família das funções gaussianas.

Temos o seguinte resultado.

1.2.3 Teorema. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Então

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (f * g_\alpha)(x) = f(x)$$

em todos os pontos onde f é contínua.

Demonstração: (Ver por exemplo [2])

1.2.4 Teorema da Inversão. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ e se

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.2.3)$$

então $g \in C_0$ – espaço das funções contínuas – $f(x) = g(x)$ em quase toda parte.

Demonstração: (Ver por exemplo [13])

Como $L^2(\mathbb{R})$ não é um subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$, a definição de transformada de Fourier dada pela fórmula (1.2.1) não é diretamente aplicável a toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. A definição aplica-se, porém, se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

O seguinte resultado estende a noção de transformada de Fourier para funções em $L^2(\mathbb{R})$.

1.2.5 Teorema. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (1.2.4)$$

Demonstração: (Ver por exemplo [11])

Como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$ a isometria de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ dada em (1.2.4) estende à uma isometria de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ e esta extensão define a transformada de Fourier (às vezes chamada de transformada de Plancherel) para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

1.2.6 Teorema. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, podemos associar uma função $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ tal que as seguintes propriedades valem:

(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, então \hat{f} é a transformada de Fourier de f .

(ii) Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (Identidade de Parseval)

(iii) A aplicação $f \rightarrow \hat{f}$ é um isomorfismo do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$.

(iv) As seguintes relações simétricas existem entre f e \hat{f} : Se

$$\varphi_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{-i\xi x} f(x) dx \quad \text{e} \quad \psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

então

$$\|\varphi_A - \hat{f}\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|\psi_A - f\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad A \rightarrow \infty.$$

Demonstração: (Ver por exemplo [13])

Observação: Como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, as propriedades (i) e (ii) determinam a aplicação $f \rightarrow \hat{f}$ unicamente. A propriedade (iv) pode ser chamada de Teorema da Inversão.

1.2.7 Teorema. Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Então

(i) $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$; (Fórmula de Parseval)

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx$$

Demonstração: (Ver por exemplo [11])

1.2.8 Teorema. Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se $f^-(x) = f(-x)$, então

$$(i) \quad \widehat{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{\widehat{f^-}}(\xi);$$

$$(ii) \quad \widehat{\widehat{f^-}}(\xi) = \widehat{\widehat{f}}^-(\xi)$$

Demonstração: (Ver por exemplo [2])

1.2.9 Teorema. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

em quase toda a parte.

Demonstração: (Ver por exemplo [13])

1.3 Transformações Lineares.

Definição: Sejam X e Y espaços lineares normados e $A: X \rightarrow Y$ uma transformação linear. Dizemos que A é uma transformação linear **limitada** se existe uma constante positiva K tal que

$$\|Ax\| \leq K \|x\| \quad , \quad \forall x \in X.$$

Não estamos distinguindo os símbolos entre a norma em X e em Y .

Definição: Seja $A: X \rightarrow Y$ uma transformação linear limitada. Definimos a **norma** de A por

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

1.3.1 Teorema: Seja $A: X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços lineares normados, A uma transformação linear. São equivalentes:

- i) A é contínua em $x_0 \in X$
- ii) A é contínua em todo $x \in X$
- iii) A é limitada.

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

1.3.2 Teorema. Seja $A: X \rightarrow Y$ uma transformação linear. A transformação linear inversa de A , A^{-1} existe e é limitada na imagem de A , $A(X)$ se e somente se, existe algum $K > 0$ tal que

$$K \|x\| \leq \|Ax\|, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

1.3.3 Teorema. Sejam X um espaço de Hilbert e $A: X \rightarrow X$ limitada tal que $\|A\| \leq 1$. Então $(I - A)$ é inversível e seu inverso é dado pela série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

onde a convergência vale na norma de X . Além disso

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$$

Definição: Sejam X e Y espaços de Hilbert e A uma transformação linear limitada tal que

$$A: X \rightarrow Y$$

O adjunto de A ,

$$A^*: Y \rightarrow X$$

é definido por

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Aqui, também, não estamos distinguindo o produto interno em X e em Y .

O seguinte resultado garante a existência de A^* .

1.3.4 Teorema. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A: X \rightarrow Y$ uma transformação linear limitada. Então, o adjunto de A , A^* , existe e é uma transformação linear limitada, definido em todo Y . Além disso $\|A^*\| = \|A\|$.

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

1.3.5 Teorema. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A, B: X \rightarrow Y$ transformações lineares limitadas. Então:

$$i) (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$ii) (AB)^* = B^* A^*$$

$$iii) \|A^* A\| = \|A\|^2$$

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

1.3.6 Teorema. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A: X \rightarrow Y$ uma transformação linear limitada. Suponhamos que A^{-1} existe. Então

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

1.3.7. Teorema. Sejam X e Y espaços de Hilbert e $A: X \rightarrow Y$ uma transformação linear limitada. Então:

$$i) \text{Im}(A)^\perp = N(A^*)$$

$$ii) \overline{\text{Im}(A)} = N(A^*)^\perp$$

$$iii) \text{Im}(A^*)^\perp = N(A)$$

$$iv) \overline{\text{Im}(A^*)} = N(A)^\perp$$

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

Definição. Sejam X um espaço de Hilbert e $A: X \rightarrow Y$ um operador linear limitado.

Então A é dito **auto-adjunto** se $A = A^*$.

Definição. Seja X um espaço de Hilbert. Um operador linear A em X é chamado **positivo** se

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X$$

Escrevemos $A \geq 0$ se A é positivo e $B \leq A$ se $A - B \geq 0$, ou seja $A - B$ é positivo. Aqui, também, B é um operador linear em X .

1.3.8 Teorema. Seja X um espaço de Hilbert e A um operador linear limitado em X . Se A é auto-adjunto, isto é, $A = A^*$, então

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

1.3.9. Teorema de Projeção. Seja X um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de X . Então, todo $x \in X$, pode ser escrito de forma única como $x = z + w$, onde $z \in M$ e $w \in M^\perp$, isto é, temos uma decomposição em soma direta de X , $X = M \oplus M^\perp$.

Demonstração: (Ver por exemplo [1])

Definição. Seja X um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de X . Seja $z \in X$, $z = x + y$, onde $x \in M$ e $y \in M^\perp$. A aplicação $P: X \rightarrow Y$, definida por

$$Pz = x$$

é chamada **projeção ortogonal** em M .

Definição. Um operador linear $A: X \rightarrow X$, onde X é um espaço de Hilbert é um operador **classe-traço** se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ae_k, e_k \rangle| < \infty$$

para toda base ortonormal $\{e_k\}$ em X . Para tal operador classe-traço, a soma $\sum_k \langle Ae_k, e_k \rangle$ é independente da base ortonormal escolhida. Chamamos esta soma de **traço de A** ,

$$\text{traço } A = \sum_k \langle Ae_k, e_k \rangle$$

Se A é positivo, é suficiente checar quando $\sum_k \langle Ae_k, e_k \rangle$ é finito para somente uma base ortonormal. Se for, então A é classe-traço.

Capítulo 2

Generalidades sobre Frames

2.1 Definições e Propriedades

Frames foram introduzidas por Duffin e Schaeffer (1952), no contexto de séries de Fourier não harmônica (isto é, expansão de funções em $L^2([0,1])$ em exponenciais complexas $e^{i\lambda_n x}$, onde $\lambda_n \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$); foram também revistas por Young (1980). Revisaremos aqui suas definições e propriedades básicas.

Definição. Uma família de funções $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ (J enumerável), no espaço de Hilbert \mathcal{H} é uma **frame**, se existem constantes $A > 0$ e $B < \infty$, tais que, para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.1.1)$$

As constantes A e B são chamadas de **limites frame**

Se os dois limites frame são iguais, isto é, $A = B$, então, dizemos que a frame $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é uma **frame tight**. Neste caso, para toda $f \in \mathcal{H}$, temos que

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = A \|f\|^2 \quad (2.1.2)$$

É claro que uma frame é um conjunto completo, já que a relação $\langle f, \varphi_j \rangle = 0, j \in J$, implica por (2.1.1) que $\|f\| = 0$, logo $f = 0$.

2.1.1 Teorema. Sejam $f, g \in \mathcal{H}$. Se $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ constitui uma frame tight em \mathcal{H} com limite frame A , então

$$A \langle f, g \rangle = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle \quad (2.1.3)$$

Além disso

$$f = A^{-1} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (2.1.4)$$

para qualquer $f \in \mathcal{H}$, pelo menos no sentido fraco.

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathcal{H}$. Pela identidade de polarização, temos que

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \left[\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i \|f + ig\|^2 - i \|f - ig\|^2 \right].$$

Usando o fato que

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = A \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} A^{-1} \left[\sum_{j \in J} |\langle f + g, \varphi_j \rangle|^2 - \sum_{j \in J} |\langle f - g, \varphi_j \rangle|^2 + \right. \\ &\quad \left. i \sum_{j \in J} |\langle f + ig, \varphi_j \rangle|^2 - i \sum_{j \in J} |\langle f - ig, \varphi_j \rangle|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} A^{-1} \left[\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle + \langle g, \varphi_j \rangle|^2 - \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle - \langle g, \varphi_j \rangle|^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle + i \langle g, \varphi_j \rangle|^2 - i \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle - i \langle g, \varphi_j \rangle|^2 \\
& = \frac{1}{4} A^{-1} \left[2 \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle + 2 \sum_{j \in J} \langle g, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, f \rangle \right. \\
& \quad - i^2 \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle g, \varphi_j \rangle + i^2 \sum_{j \in J} \langle g, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, f \rangle \\
& \quad \left. - i^2 \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle + i^2 \sum_{j \in J} \langle g, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, f \rangle \right] \\
& = \frac{1}{4} A^{-1} \left[4 \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle \right] \\
& = A^{-1} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle
\end{aligned}$$

Isto demonstra (2.1.3). Vejamos agora a igualdade (2.1.4).

Seja $g \in \mathcal{H}$. Consideremos o produto interno

$$\langle f - A^{-1} \sum_{j=-n}^n \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, g \rangle = \langle f, g \rangle - A^{-1} \sum_{j=-n}^n \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos por (2.1.3) que o lado direito vai a zero e com isso, obtemos

$$f - A^{-1} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j = 0$$

O que implica

$$f = A^{-1} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

com convergência no sentido fraco. ■

Observe que a fórmula (2.1.4) é muito semelhante com a expansão de f com relação a uma base ortonormal em \mathcal{H} , porém, é importante notar, que frames, mesmo frames tight, não são necessariamente bases ortonormais. Ilustramos isso através do seguinte exemplo.

Exemplo. Sejam $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ e $\phi_1 = (0, 1)$, $\phi_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$ e $\phi_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

Para qualquer $v \in \mathcal{H}$, $v = (v_1, v_2)$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\langle v, \phi_j \rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2} \left[|v_1|^2 + |v_2|^2 \right] \\ &= \frac{3}{2} \|v\|^2 \end{aligned}$$

Segue que $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ é uma frame tight em \mathbb{R}^2 , mas não é uma base ortonormal, já que os vetores ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 são linearmente dependentes.

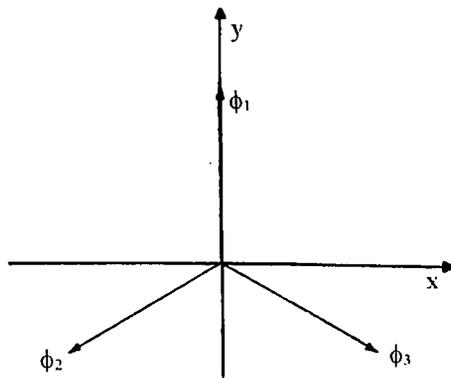


Figura 2.1 Estes três vetores em \mathbb{R}^2 constituem uma frame tight.

2.1.2 Proposição. Se $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é uma frame tight em \mathcal{H} , com limite frame $A=1$ e se $\|\varphi_j\| = 1$,

$\forall j \in J$, então $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ constitui uma base ortonormal em \mathcal{H} .

Demonstração: Vamos mostrar que $\{\varphi_j\}$ forma um conjunto ortonormal completo. Para qualquer $j \in J$, $\varphi_j \in \mathcal{H}$. Como $\{\varphi_j\}$ é uma frame tight com $A=1$, temos por (2.1.2) que

$$\|\varphi_j\|^2 = \sum_{k \in J} \left| \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \right|^2 = \|\varphi_j\|^4 + \sum_{k \neq j} \left| \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \right|^2$$

Como $\|\varphi_j\|^2 = 1$, isto implica que

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0 \quad \text{para todo } k \neq j,$$

ou seja, $\{\varphi_j\}$ constitui um conjunto ortonormal.

Vamos mostrar agora, que $\{\varphi_j\}$ é completo.

Seja $f \in \mathcal{H}$. Se $\langle f, \varphi_j \rangle = 0, \forall j \in J$, então usando novamente o fato que $\{\varphi_j\}$ é frame tight com $A=1$, obtemos

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in J} \left| \langle f, \varphi_j \rangle \right|^2 = 0,$$

logo $\|f\| = 0$, o que implica $f = 0$. Portanto $\{\varphi_j\}$ é um conjunto ortonormal completo, ou seja, uma base ortonormal em \mathcal{H} . ■

Note que a fórmula (2.1.4) fornece um modo trivial de expandir qualquer f em \mathcal{H} usando os coeficientes $\langle f, \varphi_j \rangle$, se a frame $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é tight. Retornemos à frames em geral e veremos como estudar este caso. Primeiro introduziremos o **operador frame**.

2.2. Operador Frame

Definição. Se $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é uma frame em \mathcal{H} , definimos o **operador frame** $T: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J)$, por

$$Tf = (\langle f, \varphi_j \rangle)_j, \quad f \in \mathcal{H}, \quad (2.2.1)$$

$$\text{onde } \ell^2(J) = \left\{ c = (c_j)_{j \in J} / \|c\|^2 = \sum_{j \in J} |c_j|^2 < \infty \right\},$$

Temos, então, que a norma da imagem de T em $\ell^2(J)$ é dada por

$$\|Tf\| = \left\| \left(\langle f, \varphi_j \rangle \right)_j \right\| = \left\{ \sum_{j \in J} \left| \langle f, \varphi_j \rangle \right|^2 \right\}^{1/2}, \quad f \in \mathcal{H}$$

Como estamos trabalhando com os φ_j sendo frame, vale a desigualdade (2.1.1) e com isso podemos estimar o lado direito da igualdade acima por

$$\left\{ \sum_{j \in J} \left| \langle f, \varphi_j \rangle \right|^2 \right\}^{1/2} \leq B^{1/2} \|f\|.$$

Logo, $\|Tf\| \leq B^{1/2} \|f\|$, ou seja T é um operador limitado. Além disso, a norma do operador T é estimada por

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| \leq \sup_{\|f\|=1} B^{1/2} \|f\| = B^{1/2} \quad (2.2.2)$$

Usando o lado esquerdo da desigualdade (2.1.1), obtemos de forma análoga, a estimativa

$$A \|f\|^2 \leq \|Tf\|^2, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (2.2.3)$$

2.2.1 Proposição: Seja $T: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J)$, o operador frame. Então

$$\text{Im}(T) = \{c \in \ell^2(J) \mid c = Tf, \text{ para algum } f \in \mathcal{H}\} \text{ é um subespaço fechado de } \ell^2(J).$$

Demonstração. A demonstração segue do seguinte lema.

2.2.2 Lema: Seja $T: \mathcal{H} \rightarrow S$, onde \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e S é um espaço vetorial normado,

tal que existe $0 < A \leq B < \infty$, tal que $\forall f \in \mathcal{H}$, $A^{1/2} \|f\| \leq \|Tf\| \leq B^{1/2} \|f\|$. Então $\text{Im}(T)$ é fechada em S .

Demonstração. Para mostrar que $\text{Im}(T)$ é um subespaço fechado em S , vamos mostrar que toda seqüência de Cauchy na $\text{Im}(T)$ converge para um elemento pertencente a $\text{Im}(T)$. Seja c_n

$\in \text{Im}(T)$ uma seqüência de Cauchy, isto é,

$$\|c_n - c_m\| \rightarrow 0$$

quando $m, n \rightarrow \infty$.

Então, existe $f_n \in \mathcal{H}$ tal que $c_n = T f_n$. Usando o fato que $\|T\| \leq B^{1/2}$ e $A\|f\|^2 \leq \|Tf\|^2$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos estimar

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|^2 &\leq A^{-1} \|T(f_n - f_m)\|^2 \\ &= A^{-1} \|T(f_n - f_m)\| \|T(f_n - f_m)\| \\ &\leq A^{-1} \|T\| \|f_n - f_m\| \|T(f_n - f_m)\| \\ &\leq A^{-1} B^{1/2} \|f_n - f_m\| \|Tf_n - Tf_m\| \\ &= A^{-1} B^{1/2} \|f_n - f_m\| \|c_n - c_m\| \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\|f_n - f_m\| \leq A^{-1} B^{1/2} \|c_n - c_m\|$$

Tomando o limite quando $m, n \rightarrow \infty$, temos que o lado direito vai a zero, logo

$$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0,$$

ou seja, f_n constitui uma seqüência de Cauchy em \mathcal{H} . Esta seqüência necessariamente tem um

limite f em \mathcal{H} , e com isto $Tf \in \text{Im}(T)$. Como T é contínua (pois T é limitada), temos

$$Tf = T(\lim_n f_n) = \lim_n Tf_n = \lim_n c_n$$

Logo

$$\lim_n c_n \in \text{Im}(T)$$

Isto demonstra o lema. ■

Podemos definir o **operador adjunto** de T , $T^* : \ell^2(J) \rightarrow \mathcal{H}$, por

$$T^*c = \sum_{j \in J} c_j \phi_j \tag{2.2.4}$$

onde $c = (c_j)_j \in \ell^2(J)$, pois, para qualquer $f \in \mathcal{H}$, temos que a igualdade de definição de operador adjunto $\langle T^*c, f \rangle = \langle c, Tf \rangle$, é satisfeita já que

$$\begin{aligned} \langle T^*c, f \rangle &= \left\langle \sum_{j \in J} c_j \varphi_j, f \right\rangle = \sum_{j \in J} \langle c_j \varphi_j, f \rangle \\ &= \sum_{j \in J} c_j \overline{\langle f, \varphi_j \rangle} \\ &= \langle (c_j)_j, (\langle f, \varphi_j \rangle)_j \rangle \\ &= \langle c, Tf \rangle \end{aligned}$$

onde $c = (c_j)_j \in \ell^2(J)$.

2.2.3 Proposição. Seja $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ uma frame em \mathcal{H} . Se $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é qualquer seqüência crescente de subconjuntos finitos de J (isto é, $J_n \subset J_m$ se $n \leq m$), que tende a J quando $n \rightarrow \infty$, ou seja $\bigcup_n J_n = J$, então

$$\|T^*c - \sum_{j \in J_n} c_j \varphi_j\| \longrightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde $c \in \ell^2(J)$, $c = (c_j)_j$. Isto significa que a série em (2.2.4), também converge na norma.

Demonstração: Para provar isto, mostraremos que a seqüência

$$g_n = \sum_{j \in J_n} c_j \varphi_j$$

é de Cauchy, convergente para um limite $g \in \mathcal{H}$ e que $g = T^*c$.

Se $m \geq n \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in J_m} c_j \varphi_j - \sum_{j \in J_n} c_j \varphi_j \right\| &= \left\| \sum_{j \in J_m \setminus J_n} c_j \varphi_j \right\| \\ &= \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle \sum_{j \in J_m \setminus J_n} c_j \varphi_j, f \right\rangle \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|f\|=1} \left| \sum_{j \in J_m \cup J_n} c_j \langle \varphi_j, f \rangle \right| \\
&= \sup_{\|f\|=1} \left| \sum_{j \in J_m \cup J_n} c_j \overline{\langle f, \varphi_j \rangle} \right| \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} \left(\sum_{j \in J_m \cup J_n} |c_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in J_m \cup J_n} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} \left(\sum_{j \in J_m \cup J_{n_0}} |c_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} B^{1/2} \|f\| \left(\sum_{j \in J \cup J_{n_0}} |c_j|^2 \right)^{1/2} \\
&= B^{1/2} \left(\sum_{j \in J \cup J_{n_0}} |c_j|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando n_0 tende a ∞ , temos que o lado direito vai a zero, assim a seqüência

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitui uma seqüência de Cauchy, convergente para $g \in \mathcal{H}$. Temos ainda que mostrar

que $g = T^* c$. Para qualquer $f \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle g, f \rangle &= \langle \lim_n g_n, f \rangle = \lim_n \langle g_n, f \rangle \\
&= \lim_n \left\langle \sum_{j \in J_n} c_j \varphi_j, f \right\rangle \\
&= \lim_n \sum_{j \in J_n} c_j \langle \varphi_j, f \rangle \\
&= \sum_{j \in J} c_j \overline{\langle f, \varphi_j \rangle}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle c, Tf \rangle \\
&= \langle T^*c, f \rangle
\end{aligned}$$

Portanto $g = T^*c$. ■

Como $T: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(J)$, é um operador limitado, temos, pelo teorema 1.3.4, que o adjunto $T^*: \ell^2(J) \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador limitado e, além disso, $\|T^*\| = \|T\|$. Podemos, então, escrever para $c \in \ell^2(J)$, $\|T^*c\| \leq \|T^*\| \|c\| = \|T\| \|c\| \leq B^{1/2} \|c\|$, ou seja, T^* também é limitado por $B^{1/2}$.

Usando os operadores T e T^* , obtemos, para qualquer $f \in \mathcal{H}$, que

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 &= \|Tf\|^2 \\
&= \langle Tf, Tf \rangle \\
&= \langle T^*Tf, f \rangle
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a condição frame dada em (2.1.1), pode ser escrita por

$$A \text{Id} \leq T^*T \leq B \text{Id} \tag{2.2.5}$$

onde Id representa o operador identidade em \mathcal{H} e a desigualdade entre os operadores $A \text{Id}$, T^*T e

$B \text{Id}$, significa que $T^*T - A \text{Id}$ e $B \text{Id} - T^*T$ são positivos, ou seja

$$\begin{aligned}
&T^*T - A \text{Id} \geq 0 \quad \text{e} \quad B \text{Id} - T^*T \geq 0, \quad \text{ou} \\
&\langle (T^*T - A \text{Id}) f, f \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle (B \text{Id} - T^*T) f, f \rangle \geq 0, \quad \text{ou} \\
&\langle T^*Tf, f \rangle - A \langle \text{Id} f, f \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad B \langle \text{Id} f, f \rangle - \langle T^*Tf, f \rangle \geq 0, \quad \text{ou seja} \\
&A \langle f, f \rangle \leq \langle T^*Tf, f \rangle \leq B \langle f, f \rangle, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

Observe que o operador $T^*T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$T^*Tf = T^*(Tf) = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad f \in \mathcal{H}$$

2.2.4 Proposição i) T^*T é positivo e auto-adjunto

$$\text{ii) Para qualquer } f \in \mathcal{H}, \quad A\|f\| \leq \|T^*Tf\|.$$

Demonstração: i) Para $f \in \mathcal{H}$, temos

$$\langle T^*Tf, f \rangle = \langle Tf, Tf \rangle = \|Tf\|^2 \geq 0$$

logo T^*T é positivo. Temos ainda que

$$(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T,$$

logo T^*T é auto-adjunto.

ii) Como $\|Tf\|^2 \geq 0$, $f \in \mathcal{H}$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\|Tf\|^2 = \langle T^*Tf, f \rangle \leq \|T^*Tf\| \|f\|$$

Segue que

$$A\|f\|^2 \leq \|T^*Tf\| \|f\|,$$

ou seja

$$A\|f\| \leq \|T^*Tf\|, \quad f \in \mathcal{H}. \quad \blacksquare$$

Como $T^*T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é tal que $A\|f\| \leq \|T^*Tf\|$, $f \in \mathcal{H}$, temos pelo teorema 1.3.2, que T^*T é inversível. Além disso, $(T^*T)^{-1}$ é um operador limitado por A^{-1} , já que, para qualquer $f \in \mathcal{H}$, podemos escrever (para algum $g \in \mathcal{H}$)

$$f = (T^*T)^{-1}g.$$

Assim

$$A\|(T^*T)^{-1}g\| \leq \|(T^*T)(T^*T)^{-1}g\| = \|g\|,$$

ou seja,

$$\|(T^*T)^{-1}g\| \leq A^{-1}\|g\|.$$

Assim, temos demonstrado o seguinte resultado.

2.2.5 Teorema. O operador linear T^*T em \mathcal{H} é inversível, com inversa $(T^*T)^{-1}$ limitada por A^{-1}

Observe que a inversa $(T^*T)^{-1}$ satisfaz a desigualdade

$$B^{-1} \text{Id} \leq (T^*T)^{-1} \leq A^{-1} \text{Id} \quad (2.2.7)$$

De fato, multiplicando (2.2.5) por (T^*T) obtemos

$$A(T^*T)^{-1} \leq \text{Id} \leq B(T^*T)^{-1},$$

logo

$$B^{-1} \text{Id} \leq (T^*T)^{-1} \leq A^{-1} \text{Id}.$$

Observe também, que $(T^*T)^{-1}$ é um operador auto-adjunto, já que

$$[(T^*T)^{-1}]^* = [(T^*T)^*]^{-1} = [T^*(T^*)^*]^{-1} = (T^*T)^{-1}.$$

Seja $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ uma frame. Aplicando à φ_j ; $j \in J$, o operador $(T^*T)^{-1}$, obtemos uma nova família em \mathcal{H} , a qual denotamos por $\left\{ \tilde{\varphi}_j \right\}_{j \in J}$

onde

$$\tilde{\varphi}_j = (T^*T)^{-1}\varphi_j, \quad j \in J \quad (2.2.8)$$

Definimos, agora, o operador $\tilde{T}: \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(J)$ por $\tilde{T} = T(T^*T)^{-1}$

Observe que

$$\tilde{T}f = (\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle)_j, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad j \in J.$$

De fato,

$$\tilde{T}f = (T(T^*T)^{-1}f)_j = (T((T^*T)^{-1}f))_j = (\langle (T^*T)^{-1}f, \varphi_j \rangle)_j$$

$$\begin{aligned}
&= (\langle f, [(T^*T)^{-1}]^* \varphi_j \rangle)_j = (\langle f, (T^*T)^{-1} \varphi_j \rangle)_j \\
&= (\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle)_j
\end{aligned}$$

2.2.6 Proposição. $\text{Im}(T) = \text{Im}(\tilde{T})$.

Demonstração: Seja $c \in \text{Im}(\tilde{T})$, ou seja, $c = \tilde{T}f$, para algum $f \in \mathcal{H}$. Como $\tilde{T} = T(T^*T)^{-1}$,

temos que $c = T(T^*T)^{-1}f = T((T^*T)^{-1}f) \in \text{Im}(T)$. Portanto $\text{Im}(\tilde{T}) \subset \text{Im}(T)$.

De modo análogo, mostra-se que $\text{Im}(T) \subset \text{Im}(\tilde{T})$; basta observar que $T = \tilde{T}(T^*T)$.

Daí, segue que

$$\text{Im}(T) = \text{Im}(\tilde{T}). \quad \blacksquare$$

2.2.7 Proposição. O conjunto $\left\{ \tilde{\varphi}_j \right\}_{j \in J}$ constitui uma frame com limites frame B^{-1} e A^{-1} ,

isto é

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}$$

Demonstração: Para qualquer $f \in \mathcal{H}$, temos que

$$\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle = \langle f, (T^*T)^{-1} \varphi_j \rangle = \langle (T^*T)^{-1} f, \varphi_j \rangle,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j \in J} |\langle (T^*T)^{-1} f, \varphi_j \rangle|^2 = \|(T^*T)^{-1} f\|^2 \\
&= \langle T (T^*T)^{-1} f, T (T^*T)^{-1} f \rangle = \langle (T^*T)^{-1} f, T^*T (T^*T)^{-1} f \rangle \\
&= \langle (T^*T)^{-1} f, f \rangle
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Pela desigualdade (2.2.7), temos

$$B^{-1} \text{Id} \leq (T^*T)^{-1} \leq A^{-1} \text{Id}$$

o que implica, usando os mesmos argumentos que usamos para obter (2.2.6), que

$$B^{-1} \langle f, f \rangle \leq \langle (T^*T)^{-1} f, f \rangle \leq A^{-1} \langle f, f \rangle.$$

Usando (2.2.9) na expressão anterior, obtemos

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2, \quad A > 0, \quad B < \infty$$

ou seja $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$ constitui uma frame em \mathcal{H} . ■

Observe que o operador \tilde{T} é o operador frame associado a frame $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in J}$ e que o operador adjunto $\tilde{T}^*: \ell^2(J) \longrightarrow \mathcal{H}$ é definido por

$$\tilde{T}^*d = \sum_{j \in J} d_j \tilde{\varphi}_j \quad \text{onde } d = (d_j)_j \in \ell^2(J).$$

2.2.8 Proposição. i) $\tilde{T}^*\tilde{T} = (T^*T)^{-1}$

ii) $\tilde{T}^*T = \text{Id} = T^*\tilde{T}$

iii) $\tilde{T}T^* = T\tilde{T}^*$ é o operador projeção ortogonal em $\ell^2(J)$ sobre $\text{Im}(T) = \text{Im}(\tilde{T})$.

Demonstração: i) Como $\tilde{T} = T(T^*T)^{-1}$, temos

$$\tilde{T}^*\tilde{T} = [T(T^*T)^{-1}]^* T(T^*T)^{-1} = [(T^*T)^{-1}]^* T^*T(T^*T)^{-1} = (T^*T)^{-1}$$

ii) Temos

$$\tilde{T}^*T = [T(T^*T)^{-1}]^* T = [(T^*T)^{-1}]^* T^*T = (T^*T)^{-1}T^*T = \text{Id}$$

$$\text{e } T^*\tilde{T} = T^*T(T^*T)^{-1} = \text{Id}$$

iii) Como $\text{Im}(T)$ é um subespaço fechado de $\ell^2(J)$, usando o teorema da Projeção, temos

$$\ell^2(J) = \text{Im}(T) \oplus (\text{Im}(T))^\perp$$

Se $c \in \ell^2(J)$, então, $c = Tf + b$, para algum $f \in \mathcal{H}$ e algum $b \in (\text{Im}(T))^\perp$

Segue que

$$\begin{aligned}\tilde{T}T^*c &= \tilde{T}T^*(Tf+b) = \tilde{T}T^*(Tf) + \tilde{T}T^*b \\ &= T(T^*T)^{-1}T^*Tf + \tilde{T}T^*b \\ &= Tf + \tilde{T}T^*b\end{aligned}$$

Como $b \in (\text{Im}(T))^\perp$, $\langle b, Tf \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}$, o que implica que

$$\langle T^*b, f \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

logo $T^*b = 0$.

Isto implica que

$$\begin{aligned}\tilde{T}T^*c &= Tf + \tilde{T}0 \\ &= Tf\end{aligned}$$

Logo $\tilde{T}T^*$ é o operador projeção ortogonal sobre a imagem de T .

De forma análoga, prova-se que $T\tilde{T}^*$ é a projeção ortogonal sobre $\text{Im}(\tilde{T})$. ■

2.2.9 Teorema. Seja $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ uma frame em \mathcal{H} . Então

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j, \quad f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j, \quad f \in \mathcal{H}. \quad (2.2.10)$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}$. Usando a proposição 2.2.8 ii) e a definição de T^* e \tilde{T}^* , obtemos

$$\begin{aligned}f &= \text{Id}f = T^*\tilde{T}f = T^*(\tilde{T}f) = T^*(\langle \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \rangle_j) \\ &= \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}f &= \text{Id}f = \tilde{T}^*Tf = \tilde{T}^*(\langle \langle f, \varphi_j \rangle \rangle_j) \\ &= \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j.\end{aligned}$$

Observação: 1) Em particular, se a frame é tight ($A = B$), a expressão (2.2.5) nos diz que $T^*T = A\text{Id}$, $A > 0$, então $\tilde{\varphi}_j = A^{-1}\varphi_j$ e a fórmula (2.2.10) torna-se

$$f = A^{-1} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad f \in \mathcal{H} \quad (2.2.11)$$

fórmula esta, já obtida em (2.1.4).

2) O teorema 2.2.9 nos garante que

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Tomando $c(f) = (c_j(f))_j = \left(\left\langle f, \tilde{\varphi}_j \right\rangle \right)_j$, $j \in J$, podemos escrever a função f por

$$f = \sum_{j \in J} c_j(f) \varphi_j \quad (2.2.12)$$

3) A expressão (2.2.10) é muito semelhante com a expansão biortogonal, só que frames, mesmo frames tight, não são necessariamente bases ortonormais, já que, geralmente os φ_j não são ortogonais e podem formar um conjunto “mais que completo”. Isto implica que, para uma função f em \mathcal{H} , existem diferentes “superposições”, cuja soma é f . A fórmula (2.2.10) não é a única maneira de escrever f em função dos φ_j .

Exemplo: Consideremos o exemplo dado anteriormente. Neste caso a transformação T é dada por

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longrightarrow (\langle v, \phi_1 \rangle, \langle v, \phi_2 \rangle, \langle v, \phi_3 \rangle) \end{aligned}$$

A matriz associada a T é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como a matriz do adjunto T^* é a transposta conjugada da matriz T , temos,

$$T^*T = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$,

$$T^*Tv = \frac{3}{2} \text{Id}v,$$

Segue que $(T^*T)^{-1}v = \frac{2}{3}\text{Id}v$, $v \in \mathbb{R}^2$;

logo

$$\tilde{\phi}_j = \frac{2}{3}\phi_j, \quad j=1,2,3$$

Assim, usando a expressão (2.2.11), obtemos

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \quad v \in \mathbb{R}^2$$

Porém, esta não é a única forma de escrever qualquer $v \in \mathbb{R}^2$ em função da frame $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

Se $c \in \mathbb{R}^3$ então $c = a + b$, onde $a \in \text{Im}(T)$ e $b \in (\text{Im}(T))^\perp$. Desta forma, $a = Tv$, para algum $v \in \mathbb{R}^2$ e $b = \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como o vetor $(1, 1, 1) \in (\text{Im } \tilde{T})^\perp = N(\tilde{T}^*)$, segue que

$$\tilde{T}^*c = \tilde{T}^*(Tv + \lambda(1,1,1)) = \tilde{T}^*Tv + \lambda\tilde{T}^*(1,1,1) = \tilde{T}^*Tv = \text{Id}v = v$$

Assim,

$$v = \tilde{T}^*c = \tilde{T}^*(Tv + \lambda(1,1,1)) = \sum_{j=1}^3 [\langle v, \phi_j \rangle + \lambda] \tilde{\phi}_j$$

Como $\tilde{\phi}_j = \frac{2}{3}\phi_j$, segue que

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 [\langle v, \phi_j \rangle + \lambda] \phi_j$$

Obtemos assim, duas fórmulas de escrever qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$,

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \tag{2.2.13}$$

ou

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^3 [\langle v, \phi_j \rangle + \lambda] \phi_j, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.2.14}$$

De alguma forma, a expressão (2.2.13) parece “mais econômica” que (2.2.14) se $\lambda \neq 0$. Esta idéia intuitiva pode ser vista mais precisamente do seguinte modo:

$$\sum_{j=1}^3 |\langle v, \phi_j \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|v\|^2$$

enquanto

$$\sum_{j=1}^3 |\langle v, \phi_j \rangle + \lambda|^2 = \frac{3}{2} \|v\|^2 + |\lambda|^2 \geq \frac{3}{2} \|v\|^2$$

Em geral, a seqüência $(c_j(f))_{j \in J} = (\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle)_{j \in J}$, não é a única seqüência satisfazendo (2.2.12), para uma dada $f \in \mathcal{H}$. Porém, de todas as seqüências $(c_j)_{j \in J}$, satisfazendo (2.2.12), a seqüência $(c_j(f))_{j \in J}$, $f \in \mathcal{H}$, é a que tem norma mínima, como podemos ver pelo seguinte resultado.

2.2.10 Proposição. Seja $f \in \mathcal{H}$. Se $\sum_{|j| \leq n} c_j \phi_j$ converge para f para algum $c = (c_j)_{j \in J} \in \ell^2(J)$ e

se nem todo c_j é igual a $\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle$, então

$$\sum_{j \in J} |c_j|^2 > \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\phi}_j \rangle|^2.$$

Demonstração. Seja $c \in \ell^2(J)$, $c = (c_j)_{j \in J}$. Então $c = a + b$, com $a \in \text{Im } \tilde{T}$ e $b \in (\text{Im } \tilde{T})^\perp$. Em particular $a \perp b$, logo $\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

Sendo $a \in \text{Im } \tilde{T}$, $a = \tilde{T}g$ para algum $g \in \mathcal{H}$, assim $c = \tilde{T}g + b$.

Como $\sum_{|j| \leq n} c_j \phi_j$ converge para f , $f = T^*c$.

Temos que

$$f = T^*c = T^*(\tilde{T}g + b) = T^*\tilde{T}g + T^*b$$

Como $T^*\tilde{T} = \text{Id}$ e $T^*b = 0$, pois $b \perp \text{Im } T$, segue que $f = g$, logo $c = \tilde{T}f + b$.

Segue que

$\sum_{j \in J} |c_j|^2 = \|c\|^2 = \|\tilde{T}f\|^2 + \|b\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 + \|b\|^2$, o qual é estritamente maior que $\sum_{j \in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2$, a menos que $b = 0$. ■

2.3 Frames Quase-Tight

Dada $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ e conhecendo $\tilde{\varphi}_j = (T^*T)^{-1} \varphi_j$, a expressão (2.2.10):

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j, \quad f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j$$

nos dizem como escrever f em função dos coeficientes $\langle f, \varphi_j \rangle$ ou $\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle$. Porém, precisamos calcular $\tilde{\varphi}_j$, o que envolve a inversão do operador T^*T . Gostaríamos de evitar a inversão do operador T^*T . Para isso consideremos o seguinte.

Somando $-\frac{A+B}{2}\text{Id}$ à expressão (2.2.5): $A\text{Id} \leq T^*T \leq B\text{Id}$, obtemos

$$-\frac{(B-A)}{2}\text{Id} \leq T^*T - \frac{A+B}{2}\text{Id} \leq \frac{B-A}{2}\text{Id}$$

Esta desigualdade implica que

$$-\frac{(B-A)}{2} \|f\|^2 \leq \left\langle T^*Tf - \frac{A+B}{2}f, f \right\rangle \leq \frac{B-A}{2} \|f\|^2,$$

ou seja

$$\left| \left\langle T^*Tf - \frac{A+B}{2}f, f \right\rangle \right| \leq \frac{B-A}{2} \|f\|^2. \quad (2.3.1)$$

Sendo $T^*T - \frac{A+B}{2}\text{Id}$ um operador auto-adjunto, sua norma é dada por

$$\left\| T^*T - \frac{A+B}{2}\text{Id} \right\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \left\langle T^*Tf - \frac{A+B}{2}f, f \right\rangle \right|$$

Segue por (2.3.1) que

$$\left\| T^*T - \frac{A+B}{2} \text{Id} \right\| \leq \sup_{\|f\|=1} \frac{B-A}{2} \|f\|^2 = \frac{B-A}{2}$$

e, portanto, T^*T está “próximo” de $\frac{A+B}{2} \text{Id}$ e, então, $(T^*T)^{-1}$ estaria “próximo” de $\frac{2}{A+B} \text{Id}$, desde que $\frac{B-A}{2}$ seja pequeno.

Se os limites frame A e B estão próximos, dizemos que a frame $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é quase-tight. Como veremos a seguir, se a frame $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é quase-tight, obtemos uma boa aproximação para a função f em função das φ_j .

Para qualquer $f \in \mathcal{H}$, podemos escrever

$$f = \frac{2}{A+B} T^*Tf + \left(\text{Id} - \frac{2}{A+B} T^*T\right)f$$

ou seja,

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j + Rf \quad (2.3.2)$$

onde R é o operador em \mathcal{H} , dado por

$$R = \text{Id} - \frac{2}{A+B} T^*T. \quad (2.3.3)$$

Vamos, agora, estimar a norma do operador R

Multiplicando a desigualdade (2.2.5) por $-\frac{2}{A+B}$ e depois, somando o operador Id , obtemos

$$-\frac{(B-A)}{B+A} \text{Id} \leq \text{Id} - \frac{2}{A+B} T^*T \leq \frac{B-A}{B+A} \text{Id}$$

ou seja

$$-\frac{(B-A)}{B+A} \text{Id} \leq R \leq \frac{B-A}{B+A} \text{Id}$$

Isto significa que

$$-\frac{(B-A)}{B+A} \|f\|^2 \leq \langle Rf, f \rangle \leq \frac{B-A}{B+A} \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.$$

ou ainda

$$|\langle Rf, f \rangle| \leq \frac{B-A}{B+A} \|f\|^2 \quad (2.3.4)$$

Como o operador R é auto-adjunto, segue, usando (2.3.4) que

$$\|R\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Rf, f \rangle| \leq \sup_{\|f\|=1} \frac{B-A}{B+A} \|f\|^2 = \frac{B-A}{B+A}$$

Seja $r = \frac{B}{A} - 1$. Segue que $\|R\| \leq \frac{r}{2+r} < 1$. Se r for muito pequeno, $\|R\|$ está próximo de zero e então podemos cortar o termo Rf em (2.3.2) e obtemos para qualquer $f \in \mathcal{H}$, a fórmula

$$f \cong \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (2.3.5)$$

com erro na norma em \mathcal{H} de $\frac{r}{2+r} \|f\|$, já que

$$\|f - \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j\| = \|Rf\| \leq \|R\| \|f\| \leq \frac{r}{2+r} \|f\|.$$

Observe que se $A \cong B$, a expressão (2.3.5) é aproximadamente igual a expressão de f , em função da frame tight $\{\varphi_j\}$,

$$f = A^{-1} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Mesmo que r não seja pequeno, podemos escrever um algoritmo para a expansão de f . Usando a definição de R , dada em (2.3.3), obtemos

$$T^*T = \frac{A+B}{2}(\text{Id} - R).$$

Como $\|R\| \leq \frac{r}{2+r} < 1$, temos, pelo teorema 1.3.3 que $\text{Id} - R$ é inversível e seu inverso é dado pela série de Neumann

$$(\text{Id} - R)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R^k$$

logo

$$(T^*T)^{-1} = \frac{2}{A+B}(\text{Id} - R)^{-1} = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} R^k$$

Segue que

$$\tilde{\varphi}_j = (T^*T)^{-1} \varphi_j = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_j. \quad (2.3.6)$$

e f pode ser escrita como

$$f = \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j = \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \left(\frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \varphi_j \right)$$

Observe que considerando apenas o termo $k = 0$ em (2.3.6), $\tilde{\varphi}_j \cong \frac{2}{A+B} \varphi_j$ e daí obtemos

$$f \cong \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \left(\frac{2}{A+B} \varphi_j \right) = \frac{2}{A+B} \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

que é a expressão (2.3.5).

Podemos obter uma aproximação para f em \mathcal{H} , usando uma aproximação $\tilde{\varphi}_j^N$ de $\tilde{\varphi}_j$ truncando a série (2.3.6) no N -ésimo termo, ou seja, considerando

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N R^k \varphi_j \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.7)$$

2.3.1 Teorema. Sejam $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ uma frame em \mathcal{H} e $\tilde{\varphi}_j^N$ como em (2.3.7). Então, para qualquer $f \in \mathcal{H}$, temos

$$\| f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N \| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Como

$$\sum_{k=0}^N R^k = (\text{Id} - R^{N+1}) (\text{Id} - R)^{-1}$$

segue que

$$\tilde{\varphi}_j^N = (\text{Id} - R^{N+1}) \left(\frac{2}{A+B} (\text{Id} - R)^{-1} \varphi_j \right) = (\text{Id} - R^{N+1}) ((T^* T)^{-1} \varphi_j) = (\text{Id} - R^{N+1}) \tilde{\varphi}_j,$$

daí,

$$\tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_j^N = R^{N+1} \tilde{\varphi}_j \quad (2.3.8)$$

Usando o teorema 2.2.9, a expressão (2.3.7), a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato que $\|R\| \leq \frac{r}{2+r}$, obtemos para qualquer $f \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \| f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N \| &= \sup_{\|g\|=1} | \langle f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle | \\ &= \sup_{\|g\|=1} | \langle \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle | \\ &= \sup_{\|g\|=1} | \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle | \\ &= \sup_{\|g\|=1} | \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle R^{N+1} \tilde{\varphi}_j, g \rangle | \\ &= \sup_{\|g\|=1} | \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \tilde{\varphi}_j, (R^{N+1})^* g \rangle | \\ &= \sup_{\|g\|=1} \left| \left\langle \sum_j \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j, R^{N+1} g \right\rangle \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\|g\|=1} | \langle f, R^{N+1}g \rangle | \\
&\leq \sup_{\|g\|=1} \|f\| \|R^{N+1}g\| \\
&\leq \|R^{N+1}\| \|f\| \\
&\leq \|R\|^{N+1} \|f\| \\
&\leq \left(\frac{r}{2+r}\right)^{N+1} \|f\|
\end{aligned}$$

o qual torna-se arbitrariamente pequeno quando $N \rightarrow \infty$, pois $\frac{r}{2+r} < 1$. Logo,

$$\|f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

e portanto a série

$$\sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N$$

converge para f , quando $N \rightarrow \infty$. ■

Em particular, $\tilde{\varphi}_j^N$ pode ser calculado através de um algoritmo iterativo. De fato, usando (2.3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^N R^k \varphi_j &= \varphi_j + \sum_{k=1}^N R^k \varphi_j \\
&= \varphi_j + \sum_{k=1}^N R(R^{k-1}) \varphi_j \\
&= \varphi_j + R \left(\sum_{k=0}^{N-1} R^k \varphi_j \right) \\
&= \varphi_j + \frac{(A+B)}{2} R \tilde{\varphi}_j^{N-1}.
\end{aligned}$$

Como

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N R^k \varphi_j \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

podemos escrever

$$\tilde{\varphi}_j^0 = \frac{2}{A+B} \varphi_j$$

e

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \varphi_j + R \tilde{\varphi}_j^{N-1} \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.9)$$

O mesmo processo iterativo pode ser usado diretamente para f .

Para qualquer $f \in \mathcal{H}$, temos, pelo teorema 2.3.1 que

$$\|f - \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N\| \longrightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty$$

Assim, tomando

$$f_N = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

temos $f = \lim_N f_N$,

Como $\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N R^k \varphi_j$, $N = 0, 1, 2, \dots$,

segue que

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \left(\sum_{k=0}^N R^k \varphi_j \right) \\ &= \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \sum_{k=0}^N R^k \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \quad N = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Temos

$$f_0 = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

e, para $N = 1, 2, 3, \dots$, usamos a definição de T^*T , e as expressões (2.3.3), (2.3.6), (2.3.7), e (2.3.9), para obter

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N R^k \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \\ &= \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N R^k (T^*T)f \\ &= \frac{2}{A+B} (T^*T)f + \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{N-1} R^{k+1} (T^*T)f \\ &= \frac{2}{A+B} (T^*T)f + \frac{2}{A+B} R \left(\sum_{k=0}^{N-1} R^k (T^*T)f \right) \\ &= \frac{2}{A+B} (T^*T)f + R \sum_{k=0}^{N-1} R^k \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{A+B}(T^*T)f + R \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \sum_{k=0}^{N-1} R^k \varphi_j \\
&= \frac{2}{A+B}(T^*T)f + R \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^{N-1} \\
&= \frac{2}{A+B}(T^*T)f + Rf_{N-1} \\
&= \frac{2}{A+B}(T^*T)f + (\text{Id} - \frac{2}{A+B}T^*T)f_{N-1} \\
&= \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j + f_{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} \langle f_{N-1}, \varphi_j \rangle \varphi_j \\
&= f_{N-1} + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} [\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f_{N-1}, \varphi_j \rangle] \varphi_j
\end{aligned}$$

Ou seja

$$f_N = f_{N-1} + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in J} [\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f_{N-1}, \varphi_j \rangle] \varphi_j \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Capítulo 3

Frames de Wavelets

Neste capítulo, estamos interessados, particularmente, no estudo das frames de wavelets em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja, no estudo da família de funções

$$\psi_{mn}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

geradas a partir de uma wavelet ψ , que gera uma frame em L^2 . Isto será feito seguindo a linha das referências [4] e [5].

Seguindo a linha de raciocínio de querer representar qualquer f pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, por uma soma do tipo

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j, \quad f = \sum_{j \in J} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j$$

onde $\tilde{\varphi}_j = (T^*T)^{-1} \varphi_j$ e $T^*Tf = \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$,

com T e T^* definidos em (2.2.1) e (2.2.4), respectivamente, chegamos a pergunta de quais famílias $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ formam uma frame (frame tight) em $L^2(\mathbb{R})$. Ou seja, como devem ser as φ_j para termos uma frame.

I. Daubechies, A. Grossmann e Y. Meyer em [4], descrevem duas classes de exemplos, onde as φ_j são geradas a partir de uma única função φ . Nestes dois casos estas famílias discretas são obtidas a partir de um subconjunto discreto de uma família contínua. A obtenção desta família contínua pode ser vista como uma consequência da teoria de representação de grupos (ver [4] e

[7]). Não entraremos em detalhes sobre esta teoria, apenas citaremos como tais famílias foram obtidas.

Em linhas gerais é considerado o seguinte:

- i) $U(\cdot)$ é uma representação unitária irredutível em \mathcal{H} sobre um grupo localmente compacto G ;
- ii) $d_\mu(y)$ é a medida esquerda invariante em G ;
- iii) φ é um vetor admissível em \mathcal{H} para U , isto é, um vetor não nulo em \mathcal{H} tal que

$$c_\varphi = \|\varphi\|^{-2} \int_G |\langle \varphi, U(y)\varphi \rangle|^2 d_\mu(y) < \infty \quad (3.1)$$

Se existe um vetor admissível $\varphi \in \mathcal{H}$, então a representação $U(y)$ é chamada quadrado integrável e vale

$$f = \frac{1}{c_\varphi} \int_G \langle f, U(y)\varphi \rangle U(y)\varphi d_\mu(y) \quad (3.2)$$

Para obter possíveis conjuntos $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ que geram uma frame em \mathcal{H} , escolhemos $\varphi \in \mathcal{H}$, admissível e um conjunto discreto $y_j \in G$. Os vetores φ_j são então definidos como

$$\varphi_j = U(y_j)\varphi.$$

Impondo-se restrições apropriadas à φ e à J , obtem-se frames (frames tight) $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ em \mathcal{H} .

Nos casos em que estamos interessados é quando \mathcal{H} é o espaço $L^2(\mathbb{R})$ e o grupo G é o grupo das translações e dilatações (grupo “ $ax + b$ ”), $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) com a operação no grupo definida por

$$(a, b)(a', b') = (aa', b + ab').$$

Neste grupo, a medida esquerda invariante é dada por $\frac{dad b}{a^2}$ (ver [9]).

A representação unitária irredutível deste grupo sobre $L^2(\mathbb{R})$

$$U(a, b) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$\psi \rightarrow U(a, b)\psi$$

a ser considerada é

$$[U(a, b)\psi](x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (3.4)$$

Neste caso a condição de admissibilidade (3.1)

$$c_\psi = \|\psi\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, U(a, b)\psi \rangle|^2 \frac{dad b}{a^2} < \infty \quad (3.5)$$

pode ser escrita da seguinte forma

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (3.6)$$

Isto será demonstrado na seção 3.1

Partindo de (3.5) e tomando

$$\psi_{a,b}(x) = [U(a, b)\psi](x)$$

ou seja

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \quad (3.7)$$

mostraremos que a função $f \in L^2(\mathbb{R})$, pode ser escrita como

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{dad b}{a^2} \quad (3.8)$$

que é a expressão (3.2) para este caso particular. Podemos interpretar (3.8) como sendo uma maneira de recuperar f a partir de $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$. A aplicação

$$f \rightarrow \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

será chamada transformada de wavelet. Isto será feito na seção 3.2.

Restringindo os valores de a e b em (3.7) à valores discretos, isto é, fazendo

$$a = a_0^m \quad e \quad b = nb_0 a_0^m, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

com $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$, e considerando $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição (3.6), geramos a seguinte família de funções

$$\psi_{mn}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

Na seção 3.3 serão estabelecidas condições sobre a função ψ , e sobre as constantes a_0 e b_0 tais que as ψ_{mn} formam uma frame em $L^2(\mathbb{R})$ e, com isso, podemos escrever a função f como

$$f = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n}, \quad \text{ou} \quad f = \sum_{m,n} \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

com $\tilde{\psi}_{m,n}$ como definido em (2.2.8).

Famílias deste tipo foram primeiro construídas por Aslaksen e Klauder ([15]) onde eram chamadas de estados coerentes associados ao grupo “ $ax + b$ ”. Hoje, a função admissível ψ e as $\psi_{m,n}$ como em (3.9) são chamadas de **wavelet(s)**.

3.1. Condição de Admissibilidade

Nesta seção, partimos de uma função ψ admissível e definimos wavelet. A seguir, são mostradas algumas propriedades da ψ que são consequência da condição de admissibilidade.

Antes, porém, vamos mostrar que a condição de admissibilidade (3.5) pode ser escrita como

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$$

3.1.1 Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet. Então

$$\hat{\psi}_{a,b}(\xi) = a |a|^{-1/2} e^{-ib\xi} \hat{\psi}(a\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (3.1.1)$$

Demonstração. Usando (3.7) e a definição de transformada de Fourier, obtemos, para qualquer, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$;

$$\hat{\psi}_{a,b}(\xi) = \frac{|a|^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

Fazendo a mudança de variáveis $x' = \frac{x-b}{a}$, obtemos

$$\hat{\psi}_{a,b}(\xi) = a |a|^{-1/2} e^{-ib\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\xi x'} \psi(x') dx'$$

Logo

$$\hat{\psi}_{a,b}(\xi) = a |a|^{-1/2} e^{-ib\xi} \hat{\psi}(a\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

3.1.2. Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Se $\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

então a condição $c_\psi = \|\psi\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle \right|^2 \frac{dadb}{a^2} < \infty$ pode ser escrita como

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

Demonstração. Usando a identidade de Parseval e a proposição 3.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle \right|^2 db &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, h \rangle \right|^2 db \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \hat{\psi}, \hat{h} \rangle \right|^2 db = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{h}(\xi)} d\xi \right|^2 db \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi) |a|^{-1/2} e^{-i\xi b} \overline{\hat{\psi}(a\xi)} d\xi \right|^2 db \\ &= \frac{a^2 \cdot 2\pi}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi b} \overline{\hat{\psi}(\xi)} \hat{\psi}(a\xi) d\xi \right|^2 db \end{aligned}$$

Tomando $G(\xi) = \overline{\hat{\psi}(\xi)} \hat{\psi}(a\xi)$, temos que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi b} \overline{\hat{\psi}(\xi)} \hat{\psi}(a\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi b} G(\xi) d\xi = \sqrt{2\pi} \hat{G}(b).$$

Assim, usando a identidade de Parseval, obtemos.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle \right|^2 db &= \frac{a^2 \cdot 2\pi}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{G}(b)|^2 db \\
&= 2\pi \frac{a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2\pi \frac{a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Agora, integrando em relação a $\frac{da}{a^2}$ e usando novamente a identidade de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle \right|^2 \frac{dadb}{a^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \left[\frac{a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi \right] \frac{da}{a^2} \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} d\xi da \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|} da \right] d\xi
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis, $\xi' = a\xi$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle \right|^2 \frac{dadb}{a^2} &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi')|^2}{|\xi'|} d\xi' \right] d\xi \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi')|^2}{|\xi'|} d\xi' \right]
\end{aligned}$$

Assim, usando a identidade de Parseval, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle \psi, \psi_{a,b} \rangle \right|^2 \frac{dad b}{a^2} = 2\pi \|\psi\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi$$

Logo

$$c_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \quad \blacksquare$$

Definição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Se ψ satisfaz a “condição de admissibilidade”:

$$c_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty \quad (3.1.2)$$

então ψ é chamada **wavelet básica** ou simplesmente **wavelet**. Dizemos também, que ψ é admissível se ψ satisfaz a condição (3.1.2).

3.1.3 Proposição. Seja $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Se ψ satisfaz a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty, \text{ então } \hat{\psi}(0) = 0.$$

Demonstração: Como $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ ($\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$), segue pelo teorema 1.2.1 que $\hat{\psi}$ é uniformemente contínua. Supondo que $\hat{\psi}(0) \neq 0$, vamos mostrar que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi$$

não converge. De fato, suponhamos que $|\hat{\psi}(0)| = b \neq 0$. Como $\hat{\psi}$ é contínua no zero, existe $\delta > 0$ tal que $|\xi| < \delta$ implique

$$|\hat{\psi}(\xi)| \geq \frac{b}{2}$$

Isto implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \geq \frac{b^2}{4} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\xi}{|\xi|}$$

Como integral $\int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\xi}{|\xi|}$ não converge, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi$$

também não converge. Logo $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$ implicam $\hat{\psi}(0) = 0$.

■

Como $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx$, então $\hat{\psi}(0) = 0$ implica que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$. Esta é a razão

pela qual a função ψ é chamada de wavelet. Tipicamente a função ψ deve ter algumas

oscilações. Um exemplo é dado pela função “chapéu mexicano”, $\psi(x) = \frac{2\pi^{-1/4}}{\sqrt{3}}(1-x^2)e^{-x^2/2}$,

cuja transformada de Fourier é $\hat{\psi}(\xi) = \frac{2\pi^{-1/4}}{\sqrt{3}}\xi^2 e^{-\xi^2/2}$.

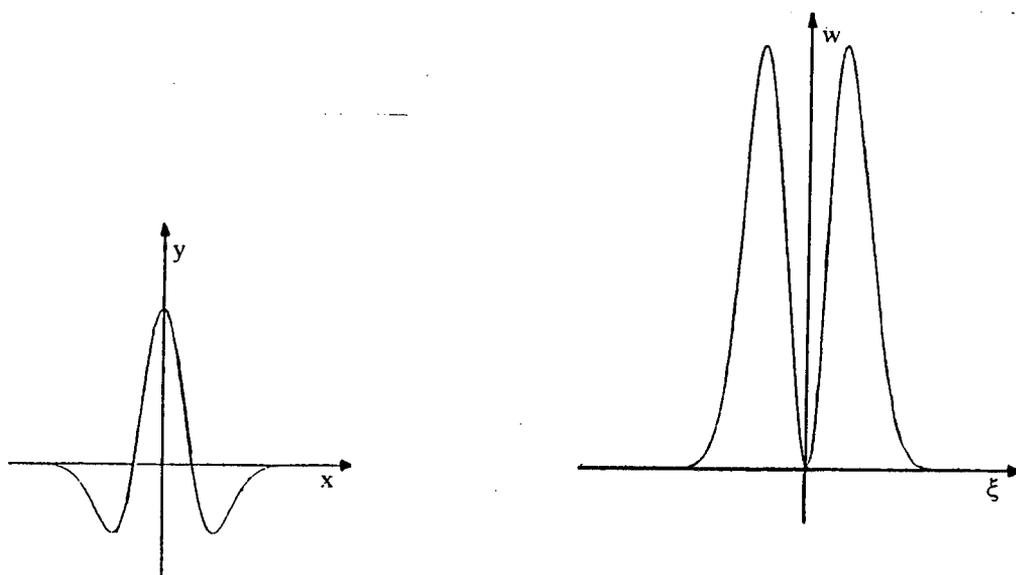


Figura 3.1 A função “chapéu mexicano” $\psi(x) = \frac{2\pi^{-1/4}}{\sqrt{3}}(1-x^2)e^{-x^2/2}$ e sua transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi) = \frac{2\pi^{-1/4}}{\sqrt{3}}\xi^2 e^{-\xi^2/2}$.

A proposição 3.1.3 nos diz que se a função $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ é admissível, então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

Seria ótimo que a recíproca fosse verdadeira, já que, iríamos a procura de funções não nulas cuja integral é nula em \mathbb{R} . No entanto, para garantir a condição de admissibilidade teremos que impor outra exigência sobre a ψ , que é, que ψ “domine” funções do tipo $(1+|x|)^\alpha$, $\alpha \geq 1$, para que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^\alpha |\psi(x)| dx < \infty.$$

O seguinte resultado fornece uma recíproca da proposição 3.1.3, porém com condições mais fortes que integrabilidade sobre a função ψ .

3.1.4 Proposição. Seja $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Se $\hat{\psi}(0) = 0$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^\alpha |\psi(x)| dx < \infty, \text{ para algum } \alpha \geq 1,$$

então $|\hat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|$, $C < \infty$, $\xi \in \mathbb{R}$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

Demonstração: Seja $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Como $\hat{\psi}(0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(\xi)| &= |\hat{\psi}(\xi) - \hat{\psi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi x} - 1| |\psi(x)| dx \end{aligned}$$

Como $|e^{-i\xi x} - 1| = 2 \left| \sin \frac{\xi x}{2} \right| \leq |\xi x|$, $\forall \xi, x \in \mathbb{R}$ e para $\alpha \geq 1$, $|x| \leq 1 + |x| \leq (1 + |x|)^\alpha$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, segue que

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi(x)| dx \leq \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^\alpha |\psi(x)| dx = C|\xi|, \text{ já que a integral}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^\alpha |\psi(x)| dx \text{ converge.}$$

Logo $|\hat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Temos ainda que mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$

Podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{|\xi| \geq 1} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi + \int_{|\xi| \leq 1} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi$$

Como $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ e $|\hat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\int_{|\xi| \geq 1} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$$

e

$$\int_{|\xi| \leq 1} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq C \int_{-1}^1 d\xi = 2C$$

Portanto $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$ ■

3.2 A Transformada Wavelet

Nesta seção, definiremos transformada wavelet e mostraremos alguns resultados que garantem que qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$, pode ser escrita da forma

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, ψ uma wavelet, isto é, ψ é quadrado integrável em \mathbb{R} e satisfaz a condição (3.1.2). Consideremos o conjunto de funções definida da seguinte maneira:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (3.2.1)$$

Observação: A função ψ que gera a família $\{\psi_{a,b}\}$ é chamada, muitas vezes, de wavelet mãe e as $\psi_{a,b}$ de wavelets.

$$\text{Note que } \|\psi_{a,b}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(x)|^2 dx = |a|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|^2 dx = \|\psi\|^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Definição: Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet. A **transformada wavelet**

$$W: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} * \mathbb{R}, a^{-2} dadb)$$

é definida por

$$(Wf)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Note que $(Wf)(a, b)$ representa o produto interno de f com a família $\{\psi_{a,b}\}$, ou seja, $(Wf)(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e que

$$|(Wf)(a, b)| \leq \|f\| \|\psi_{a,b}\| = \|f\| \|\psi\|, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Temos o seguinte resultado, chamado “resolução da identidade”.

3.2.1 Teorema. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, uma wavelet. Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \overline{(Wg)(a, b)} \frac{dadb}{a^2} = c_{\psi} \langle f, g \rangle \quad (3.2.2)$$

para todo $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi(a\xi)}} \\ G(\xi) &= \widehat{g}(\xi) \overline{\widehat{\psi(a\xi)}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Usando (3.2.3), a proposição 3.1.1 e a identidade de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \overline{(Wg)(a, b)} db \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{a,b}} \rangle \overline{\langle \widehat{g}, \widehat{\psi_{a,b}} \rangle} db \\ &= \frac{a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{e^{-ib\xi} \widehat{\psi(a\xi)}} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib\xi'} \widehat{\psi(a\xi')} \overline{\widehat{g}(\xi')} d\xi' \right\} db \\ &= \frac{a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib\xi} \overline{\widehat{f}(\xi)} \widehat{\psi(a\xi)} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib\xi'} \overline{\widehat{g}(\xi')} \widehat{\psi(a\xi')} d\xi' \right\} db \\ &= \frac{2\pi \cdot a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib\xi} \overline{F(\xi)} d\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ib\xi'} \overline{G(\xi')} d\xi' \right\} db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi \cdot a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(b) \cdot \widehat{G}(b) \, db \\
&= \frac{2\pi \cdot a^2}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot \overline{G(\xi)} \, d\xi
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (3.2.3) na expressão acima e integrando com relação a $\frac{da}{a^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \overline{(Wg)(a, b)} \, db \right\} \frac{da}{a^2} \\
&= \frac{2\pi}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 \, d\xi \, da
\end{aligned}$$

Usando o teorema de Fubini, a condição de admissibilidade e a identidade de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \overline{(Wg)(a, b)} \frac{dad b}{a^2} \\
&= \frac{2\pi}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 \, da \, d\xi \\
&= \frac{2\pi}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(a\xi)|^2 \, da \right\} \, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi')|^2}{\xi'} \, d\xi' \right\} \, d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_\psi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \\
&= c_\psi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \\
&= c_\psi \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

Isto demonstra o teorema. ■

Observe que, tomando $g = f$ na equação (3.2.2), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(Wf)(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} = c_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

Isto mostra que a aplicação $f \rightarrow Wf$ é uma isometria (a menos de uma constante).

3.2.2 Corolário. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Se $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz a condição de admissibilidade, então

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \psi_{a,b} \frac{dad b}{a^2} \tag{3.2.4}$$

em todos os pontos onde f é contínua.

Demonstração: Seja g_α a função gaussiana definida no capítulo 1 em (1.2.2). Usando a função $h_\alpha(t) = g_\alpha(t-x)$ como função g no teorema 3.2.1, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a,b) \overline{(Wh_\alpha)(a,b)} \frac{dadb}{a^2} = c_\psi \langle f, h_\alpha \rangle \quad (3.2.5)$$

Se a função f é contínua em x , o teorema 1.2.3 nos garante que

$$\langle f, h_\alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g_\alpha(t-x)} dt = (g_\alpha * f)(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} f(x)$$

e

$$(Wh_\alpha)(a,b) = \langle h_\alpha, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha(t-x) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = (\psi_{a,b} * g_\alpha)(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \psi_{a,b}(x)$$

Daí, tomando o limite quando $\alpha \rightarrow 0^+$ em (3.2.5), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a,b) \overline{\psi_{a,b}(x)} \frac{dadb}{a^2} = c_\psi f(x),$$

ou seja

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a,b) \overline{\psi_{a,b}(x)} \frac{dadb}{a^2},$$

em todos os pontos x , onde f é contínua. ■

Note que o resultado 3.2.2 nos fornece uma maneira de recuperar f a partir da transformada wavelet $(Wf)(a,b)$.

A seguir, vamos utilizar a transformada wavelet para mostrar um resultado que será utilizado na seção 3.3.3 para mostrar que se temos uma frame gerada por ψ , esta ψ será admissível, isto é, satisfaz a condição (3.1.2)

3.2.3 Proposição Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet. Se $c(a, b)$ é uma função positiva e limitada, então o operador

$$(Cf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \psi_{a,b}(x) c(a, b) \frac{dad b}{a^2}, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

é positivo e limitado. Se além disso, $c(a, b)$ é integrável com relação a $\frac{dad b}{a^2}$, então C é classe-traço e

$$\text{traço } C = \|\psi\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(a, b) \frac{dad b}{a^2}$$

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $c(a, b) < M \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Usando o fato que $c(a, b)$ é positiva e limitada e o teorema 3.2.1, obtemos para $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle Cf, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(Wf)(a, b)|^2 c(a, b) \frac{dad b}{a^2} \geq 0$$

e

$$\begin{aligned} \|Cf\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Wf)(a, b) \psi_{a,b}(x) c(a, b) \frac{dad b}{a^2} \right|^2 dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Wf(a, b)|^2 |\psi_{a,b}(x)|^2 |c(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \right] dx \\ &\leq M^2 \|\psi_{a,b}\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Wf(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \\ &= M^2 \|\psi\|^2 \cdot C_\psi \|f\|^2 = K \|f\|^2, \end{aligned}$$

onde $K = C_\psi M^2 \|\psi\|^2 < \infty$.

Portanto C é um operador positivo e limitado. Temos ainda que mostrar que C é classe-traço. Se $\{u_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} \sum_j \langle Cu_j, u_j \rangle &= \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle u_j, \psi_{a,b} \rangle|^2 c(a,b) \frac{dad b}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j |\langle u_j, \psi_{a,b} \rangle|^2 c(a,b) \frac{dad b}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|\psi_{a,b}\|^2 c(a,b) \frac{dad b}{a^2} \\ &= \|\psi\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(a,b) \frac{dad b}{a^2}, \end{aligned}$$

onde usamos que $\sum_j |\langle u_j, \psi_{a,b} \rangle|^2 = \|\psi_{a,b}\|^2$.

Como $c(a,b)$ é integrável com relação a $\frac{dad b}{a^2}$ segue que

$$\sum_j \langle Cu_j, u_j \rangle < \infty$$

ou seja, C é um operador classe-traço.

Além disso,

$$\text{traço } C = \sum_j \langle Cu_j, u_j \rangle = \|\psi\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(a,b) \frac{dad b}{a^2}$$

■

3.3 Frames de Wavelets

Nesta seção, estamos interessados em determinar condições sobre a ψ , tais que as $\psi_{m,n}$ com

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.3.1)$$

onde $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$, constituem uma frame em $L^2(\mathbb{R})$. Em 3.3.1 consideraremos o caso em que a transformada de Fourier de ψ , $\hat{\psi}$, tem suporte compacto e em 3.3.2 são apresentados alguns exemplos de frames tight. Em 3.3.3 apresentamos condições mais gerais sobre ψ . Inicialmente, se as $\psi_{m,n}$ geradas pela função ψ , formam uma frame de wavelet, é mostrado que a condição de admissibilidade (3.1.2) é satisfeita. O problema recai na pergunta de que $\psi_{m,n}$ formam uma

frame, ou seja, para quais $\psi_{m,n}$ existem constantes $A > 0$ e $B < \infty$ tais que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} \left| \langle f, \psi_{m,n} \rangle \right|^2 \leq B \|f\|^2 \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

Se partirmos da condição de admissibilidade sobre a wavelet ψ , as $\psi_{m,n}$ não necessariamente constituem uma frame e condições adicionais sobre a ψ , são exigidas. Geralmente as exigências são sobre a transformada de Fourier de ψ .

Observe que, para m grande e positivo, a função $\psi_{m,o}$ é muito expandida e temos uma translação $b_0 a_0^m$ muito grande. Para m grande e negativo, a função $\psi_{m,o}$ é muito concentrada e a translação $b_0 a_0^m$ é pequena.

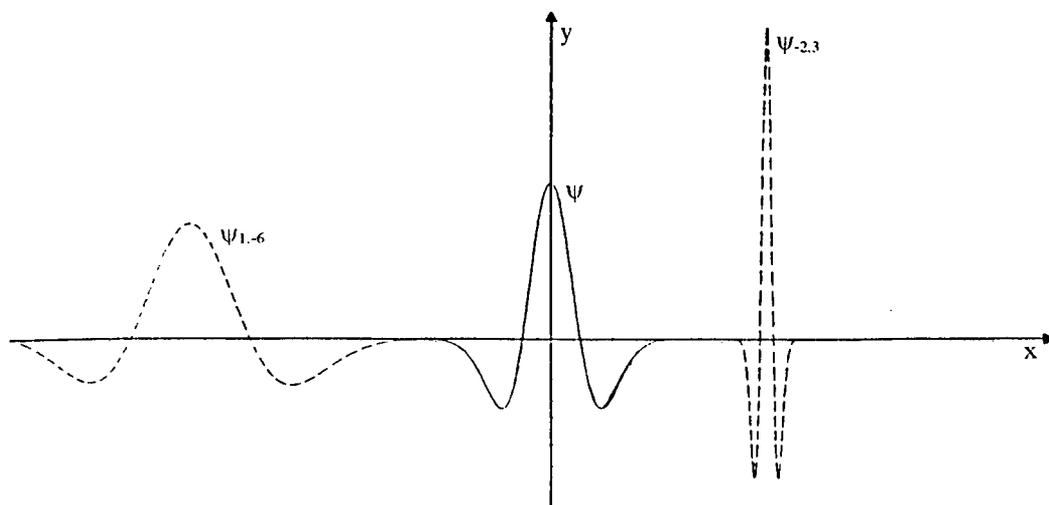


Figura 3.2 Função wavelet

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ e } \psi_{m,n}(x) \text{ com } a_0 = 2 \text{ e } b_0 = 1$$

3.3.1 Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet. Então

$$\hat{\psi}_{m,n}(\xi) = a_0^{m/2} e^{-inb_0 a_0^m \xi} \hat{\psi}(a_0^m \xi), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Basta tomar $a = a_0^m$ e $b = nb_0 a_0^m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, na proposição (3.1.1) que obteremos o resultado. ■

Gostariamos, agora, de escrever qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$, usando as $\psi_{m,n}$, onde

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

com $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$.

Como vimos no capítulo 2, se o conjunto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitui uma frame em $L^2(\mathbb{R})$, então a função f pode ser escrita como

$$f = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n} \quad \text{ou} \quad f = \sum_{m,n} \langle f, \tilde{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$$

onde $\tilde{\psi}_{m,n} = (T^*T)^{-1} \psi_{m,n}$ e $T^*Tf = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}$.

com T definido em (2.2.1).

Particularmente, se o conjunto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ é uma frame tight, com limite frame A , temos

$$f = A^{-1} \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Continuamos a supor que ψ satisfaz a condição de admissibilidade

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$$

3.3.1 Frames e Frames Tight de Wavelets

Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Suponhamos, inicialmente, que ψ seja tal que sua transformada de Fourier $\hat{\psi}$ tenha suporte compacto no intervalo $[\ell, L]$ com $0 < \ell < L < \infty$. Note que a exigência de que $\ell > 0$, automaticamente garante que ψ é admissível, já que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{\ell}^L \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{1}{\ell} \int_{\ell}^L |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{\ell} \|\psi\|^2$$

Consideremos a família de funções $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, onde

$$\psi_{m,n}^+(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0)$$

$$\text{e} \quad \psi_{m,n}^-(x) = a_0^{-m/2} \psi(-a_0^{-m}x - nb_0) \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3.2)$$

Desta forma

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{m,n}^+(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi_{m,n}^+(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0) dx \\ &= \hat{\Psi}_{m,n}(\xi)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{m,n}^-(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \psi_{m,n}^-(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} a_0^{-m/2} \psi(-a_0^{-m}x - nb_0) dx\end{aligned}$$

Tomando $x' = -x$, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{m,n}^-(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x'} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x' - nb_0) dx' \\ &= \hat{\Psi}_{m,n}(-\xi)\end{aligned}$$

ou seja, $\hat{\Psi}_{m,n}^+(\xi) = \hat{\Psi}_{m,n}(\xi)$ e $\hat{\Psi}_{m,n}^-(\xi) = \hat{\Psi}_{m,n}(-\xi)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Observe que estamos usando uma segunda função para atingir também o eixo negativo, já que $\hat{\Psi}$ tem suporte compacto em $[\ell, L]$, com $\ell > 0$. A definição de ψ^+ e ψ^- é bastante

conveniente, já que isto permite tratar de frequências positivas e negativas separadamente, facilitando os cálculos.

A seguir, vamos analisar condições que nos garantem que a ψ gera uma frame. Para isso, temos que estimar a série $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2$, que aparece na condição frame.

3.3.2 Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet. Suponhamos que sua transformada de Fourier, $\hat{\psi}$, tem suporte compacto no intervalo $[\ell, a_0^2 \ell]$, onde $\ell = \frac{2\pi}{b_0(a_0^2 - 1)}$, $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$,

Então, para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_{-\infty}^{\infty} [|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{f}(-\xi)|^2] \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 d\xi$$

Demonstração: Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Usando a identidade de Parseval e a proposição 3.3.1, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{m,n} \rangle|^2 \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_0^m \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{inb_0 a_0^m \xi} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi \right|^2 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\xi' = a_0^m \xi$, e usando o fato que $\hat{\psi}$ tem suporte compacto em $[\ell, a_0^2 \ell]$, obtemos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_0^{-m} \left| \int_{\ell}^{a_0^{2\ell}} e^{inb_0 \xi'} \hat{f}(a_0^{-m} \xi') \overline{\hat{\psi}(\xi')} d\xi' \right|^2$$

Fazendo $\xi = \xi' - \ell$, obtemos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_0^{-m} \left| \int_0^{\ell(a_0^2-1)} e^{inb_0 \xi} \hat{f}(a_0^{-m} (\xi + \ell)) \overline{\hat{\psi}(\xi + \ell)} d\xi \right|^2$$

Como a integral

$$\int_0^{\ell(a_0^2-1)} e^{inb_0 \xi} \hat{f}(a_0^{-m} (\xi + \ell)) \overline{\hat{\psi}(\xi + \ell)} d\xi$$

representa o coeficiente de Fourier da função $h(\xi) = \hat{f}(a_0^{-m} (\xi + \ell)) \overline{\hat{\psi}(a_0^{-m} \xi)}$, no intervalo $[0, \ell(a_0^2 - 1)]$, segue pela identidade de Parseval, que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_0^{-m} \int_0^{\ell(a_0^2-1)} |\hat{f}(a_0^{-m} (\xi + \ell))|^2 |\hat{\psi}(\xi + \ell)|^2 d\xi$$

Fazendo $\xi' = a_0^{-m} (\xi + \ell)$, vem que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{a_0^{-m}\ell}^{a_0^{-m} a_0^{2\ell}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 d\xi$$

Como a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$ converge, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, já que somente um número finito de termos

contribui para a soma, devido a compacidade do suporte de $\hat{\psi}$, obtemos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_0^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \right] d\xi$$

De forma análoga, usando os mesmos argumentos para $\psi_{m,n}^-$, obtemos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^- \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_0^\infty |\hat{f}(-\xi)|^2 \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \right] d\xi$$

Logo

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_0^\infty \left[|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{f}(-\xi)|^2 \right] \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \right] d\xi,$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$. ■

O seguinte teorema fornece condições suficientes para que o conjunto $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ definido em (3.3.2) constitua uma frame em $L^2(\mathbb{R})$.

3.3.3 Teorema. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Se $\hat{\psi}$ tem suporte compacto em $[\ell, a_0^2 \ell]$, com

$\ell = \frac{2\pi}{b_0(a_0^2 - 1)}$ e $|\hat{\psi}|$ é uma função contínua sem zeros no interior de seu suporte, então o

conjunto $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ definido em (3.3.2) é uma frame em $L^2(\mathbb{R})$. Os limites frame A e B são dados por

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \inf_{\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$$

e

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \sup_{\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$$

Demonstração. Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pela proposição (3.3.2), temos que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_0^\infty \left[|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{f}(-\xi)|^2 \right] \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 d\xi$$

Seja

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \inf_{\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$$

e

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \sup_{\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2. \quad (3.3.3)$$

Segue que

$$A \int_0^\infty [|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{f}(-\xi)|^2] d\xi \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 \leq B \int_0^\infty [|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{f}(-\xi)|^2] d\xi$$

ou seja

$$A \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 \leq B \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Usando a identidade de Parseval, obtemos

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Como $\hat{\psi}$ tem suporte compacto e $|\hat{\psi}|$ é contínua em zeros no interior de seu suporte, temos que $A > 0$ e $B < \infty$, onde A e B são definidos em (3.3.3).

Portanto $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitui uma frame para $L^2(\mathbb{R})$. \blacksquare

A seguir, vamos analisar condições que garantem que as $\psi_{m,n}^\pm$ formam uma frame tight em $L^2(\mathbb{R})$.

Observe que a condição sobre o suporte compacto de $\hat{\psi}$, $[\ell, a_0^2 \ell]$ com $\ell = \frac{2\pi}{b_0(a_0^2 - 1)}$, é na realidade uma restrição sobre a_0 e b_0 .

3.3.4 Teorema. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet. Suponhamos que $\hat{\psi}$ tem suporte compacto em $[\ell, a_0^2 \ell]$ com $\ell = \frac{2\pi}{b_0(a_0^2 - 1)}$, que $|\hat{\psi}|$ é contínua e não tem zeros no interior de seu suporte e que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 = \text{constante} = C.$$

Então $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ com $\psi_{m,n}^\pm$ definidas em (3.3.2) constitui uma **frame tight** em $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração: Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pela proposição (3.3.2), temos que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_0^\infty [|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{f}(-\xi)|^2] \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \right] d\xi$$

Como $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 = C < \infty$, segue que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} C \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Usando a identidade de Parseval, obtemos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} C \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

Logo, o conjunto $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, constitui uma frame tight em $L^2(\mathbb{R})$, com limite frame

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \cdot C \quad \blacksquare$$

Vamos ressaltar novamente as condições que garantem que a família $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitua uma frame tight. A função ψ que gera as $\psi_{m,n}^\pm$ deve satisfazer:

i) $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, ψ admissível,

ii) $\hat{\psi}$ tem suporte compacto,

iii) $|\hat{\psi}|$ é contínua e não tem zeros no interior de seu suporte,

iv) $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 = C$.

Neste caso, a expansão para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$, em função da frame tight

$\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$, é dada por

$$f = \frac{b_0}{2\pi C} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle \psi_{m,n}^\pm$$

ou seja

$$f = \frac{b_0}{2\pi C} \left[\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle \psi_{m,n}^+ + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n}^- \rangle \psi_{m,n}^- \right]$$

3.3.2 Exemplos

As seguintes construções levam a famílias de frames tight de wavelets.

Exemplo 1. Seja $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , definida por

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

(3.3.4)

Para $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$, definimos ψ em função de $\hat{\psi}^\pm(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, por

$$\hat{\psi}^+(\xi) = (\ln a_0)^{-1/2} \begin{cases} 0, & \xi \leq \ell \text{ e } \xi \geq a_0^2 \ell \\ \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - \ell}{\ell(a_0 - 1)} \right) \right], & \ell \leq \xi \leq a_0 \ell \\ \operatorname{cos} \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - a_0 \ell}{a_0 \ell(a_0 - 1)} \right) \right], & a_0 \ell \leq \xi \leq a_0^2 \ell \end{cases}$$

onde $\ell = \frac{2\pi}{b_0(a_0^2 - 1)}$ e $\hat{\psi}^-(\xi) = \hat{\psi}^+(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

As figuras 3.3 e 3.4 mostram, respectivamente, v e $\hat{\psi}^+$ para $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ como em (3.3.4).

Desta forma $\hat{\psi}^+$ é uma função com suporte compacto em $[\ell, a_0^2 \ell]$, que não tem zeros em

$(\ell, a_0^2 \ell)$. Sendo $v \in C^1$, segue que $\hat{\psi}^+$ também é de classe C^1 . Além disso,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^+(a_0^m \xi)|^2 = (\ln a_0)^{-1} \cdot \chi_{(0, \infty)}(\xi),$$

onde $\chi_{(0, \infty)}$ é a função indicadora do intervalo $(0, \infty)$, isto é,

$$\chi_{(0, \infty)}(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 < \xi < \infty \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

De fato, para $\ell \leq \xi \leq a_0 \ell$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^+(a_0^m \xi)|^2 &= |\hat{\psi}^+(\xi)|^2 + |\hat{\psi}^+(a_0 \xi)|^2 \\ &= (\ln a_0)^{-1} \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - \ell}{\ell(a_0 - 1)} \right) \right) + \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{a_0 \xi - a_0 \ell}{a_0 \ell(a_0 - 1)} \right) \right) \right] \\ &= (\ln a_0)^{-1} \left[\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - \ell}{\ell(a_0 - 1)} \right) \right) + \operatorname{cos}^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - \ell}{\ell(a_0 - 1)} \right) \right) \right] \\ &= (\ln a_0)^{-1} \chi_{(0, \infty)}(\xi) \end{aligned}$$

$$= (\ln a_0)^{-1}, \quad \xi \in (0, \infty)$$

e para $a_0 \ell \leq \xi \leq a_0^2 \ell$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^+(a_0^m \xi)|^2 &= |\hat{\psi}^+(a_0^{-1} \xi)|^2 + |\hat{\psi}^+(\xi)|^2 \\ &= (\ln a_0)^{-1} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - a_0 \ell}{a_0 \ell (a_0 - 1)} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{a_0^{-1} \xi - \ell}{\ell (a_0 - 1)} \right) \right) \right] \\ &= (\ln a_0)^{-1} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - a_0 \ell}{a_0 \ell (a_0 - 1)} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} v \left(\frac{\xi - a_0 \ell}{a_0 \ell (a_0 - 1)} \right) \right) \right] \\ &= (\ln a_0)^{-1} \chi_{(0, \infty)}(\xi) \\ &= (\ln a_0)^{-1}, \quad \xi \in (0, \infty) \end{aligned}$$

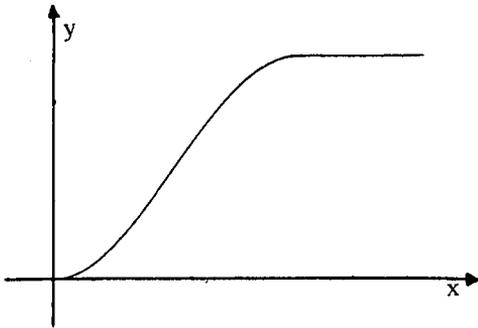


Figura 3.3 Função $v(x)$



Figura 3.4 Função $\hat{\psi}^+(\xi)$ para $a_0=2$ e $b_0=1$.

Para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^+ \rangle|^2 &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_0^m \left| \int_{a_0^{-m\ell}}^{a_0^{-m} a_0^{2\ell}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i n b_0 a_0^m \xi} \overline{\hat{\psi}^+(a_0^m \xi)} d\xi \right|^2 \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}^+(a_0^m \xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0} \int_0^\infty |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^- \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0} \int_{-\infty}^0 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Segue que

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0} \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

Isto implica que a família $\{\psi_{m,n}^\pm\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ é uma frame tight em $L^2(\mathbb{R})$, com limite frame

$$A = \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0}.$$

Exemplo 2. Seja $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^{2k} , tal que v não é decrescente no intervalo $(0, 1)$ e

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Sejam $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$. Definimos ψ , em termos de $\hat{\psi}^\pm$, como segue

$$\hat{\psi}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq \ell, \xi \geq a_0^2 \ell \\ \left[v\left(\frac{\log(\xi/\ell)}{\log a_0}\right) \right]^{1/2}, & \ell \leq \xi \leq a_0 \ell \\ \left[1 - v\left(\frac{\log(\xi/\ell)}{\log a_0}\right) \right]^{1/2}, & a_0 \ell \leq \xi \leq a_0^2 \ell \end{cases}$$

onde $\ell = \frac{2\pi}{b_0(a_0^2 - 1)}$ e $\hat{\psi}^-(\xi) = \hat{\psi}^+(-\xi)$

Desta forma, $\hat{\psi}^+$ é uma função contínua, com suporte compacto em $[\ell, a_0 \ell]$ e sem zeros no intervalo $(\ell, a_0 \ell)$.

a) Sejam $\ell = 1$ e $a_0 = \sqrt{3}$. Definimos

$$\hat{\psi}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 1, \xi \geq 3 \\ \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot \log \xi}{\log 3}\right), & 1 \leq \xi \leq 3 \end{cases}$$

(3.3.5)

e $\hat{\psi}^-(\xi) = \hat{\psi}^+(-\xi)$.

A correspondente função v é dada por

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \text{sen}^2 \frac{\pi x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Assim, a função $\hat{\psi}^+$ é uma função contínua com suporte compacto em $[1, 3]$ e sem zeros no intervalo $(1, 3)$. Além disso,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^+(a_0^m \xi)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^+(3^{\frac{m}{2}} \xi)|^2$$

$$\begin{aligned}
&= |\hat{\psi}^+(\xi)|^2 + |\hat{\psi}^+(3^{1/2}\xi)|^2 \\
&= \left| \text{sen}\left(\frac{\pi \log \xi}{\log 3}\right) \right|^2 + \left| \text{sen}\left(\frac{\pi \log(3^{1/2}\xi)}{\log 3}\right) \right|^2 \\
&= \text{sen}^2\left(\frac{\pi \log \xi}{\log 3}\right) + \left| \text{sen}\left[\pi\left(\frac{\log \xi}{\log 3} + \frac{1}{2}\right)\right] \right|^2 \\
&= \text{sen}^2\left(\frac{\pi \log \xi}{\log 3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi \log \xi}{\log 3}\right) \\
&= \chi_{(0,\infty)}(\xi) \\
&= 1, \quad \xi \in (0,\infty).
\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

e portanto

$$\psi_{m,n}^+(x) = 3^{-m/4} \psi(3^{-m/2} x - n\pi)$$

$$\text{e } \psi_{m,n}^-(x) = 3^{-m/4} \psi(-3^{-m/2} x - n\pi), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

com ψ definida por (3.3.5), constitui uma frame tight para $L^2(\mathbb{R})$, com limite frame $A = 1$.

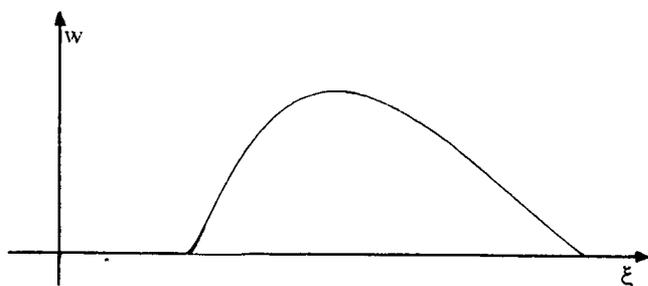


Figura 3.5 A função $\hat{\psi}^+(\xi) = \text{sen}\left(\frac{\pi \log \xi}{\log 3}\right) \chi_{(1,3)}(\xi)$

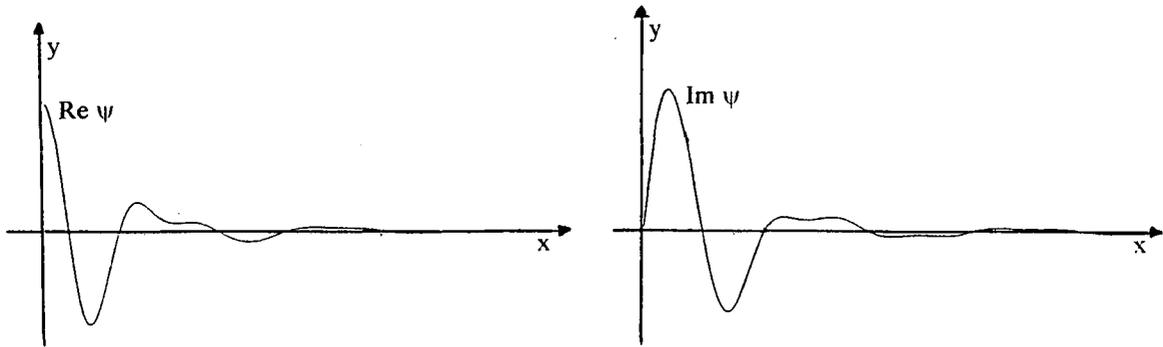


Figura 3.6 Parte real e parte imaginária de ψ .

b) Sejam $\ell = 1$ e $a_0 = 2$. Definimos

$$\hat{\psi}^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 1, \xi \geq 4 \\ 2\sqrt{2} \left[\frac{\log \xi}{\log 2} \right]^2 & 1 \leq \xi \leq \sqrt{2} \\ \left[1 - 8 \left(1 - \frac{\log \xi}{\log 2} \right)^4 \right]^{1/2} & \sqrt{2} \leq \xi \leq 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \left[2 - \left(\frac{\log \xi}{\log 2} \right) \right]^2 & 2\sqrt{2} \leq \xi \leq 4 \end{cases}$$

(3.3.6)

Neste caso, a função v é dada por

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 8x^4 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 8(1-x)^4 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

A função $\hat{\psi}^+$, assim definida, tem suporte compacto em $[1, 4]$, não tem zeros em $(1, 4)$ e é contínua. Além disso, é fácil mostrar que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^m \xi)|^2 = 1$$

Como $b_0 = 2\pi/3$, temos que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n}^\pm \rangle|^2 = 3 \|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

ou seja

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - \frac{2\pi}{3}n), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

com ψ definida em (3.3.6) é uma frame tight em $L^2(\mathbb{R})$.

3.3.3 Condições Gerais

Nesta subseção, encontraremos condições mais gerais sobre a função ψ tal que $\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, constitui uma frame em $L^2(\mathbb{R})$. Também obtemos estimativas para os limites frame. Antes, porém, mostramos que a exigência de que $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ é uma frame, claramente impõe que ψ é admissível.

3.3.5 Lema. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva, contínua e limitada, com $f(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Assumimos que f tem um número finito de máximos locais em x_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Definimos

$$\Delta_j = \sup_{\delta \in [0,1]} \int_{x_j - \delta}^{x_j + \delta} f(x) dx$$

Então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \sum_{j=1}^N \Delta_j \leq \sum_{n \in Z} f(n) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \sum_{j=1}^N f(x_j)$$

Demonstração. Provaremos para o caso $N=1$. O caso geral pode ser provado analogamente.

Sejam x_1 o ponto onde f atinge seu máximo e n_0 o maior inteiro não excedendo x_1 . Como f é crescente em $(-\infty, x_1]$ e decrescente em $[x_1, \infty)$ e $n_0 \leq x_1 < n_0 + 1$, temos que

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0-1} f(n) \leq \sum_{n=-\infty}^{n_0-1} \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{n_0} f(x)dx$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{n-1}^n f(x)dx = \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

Daí,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + f(n_0)$$

Por outro lado

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} f(n) \geq \sum_{n=-\infty}^{n_0} \int_{n-1}^n f(x)dx = \int_{-\infty}^{n_0} f(x)dx$$

e

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \geq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_{n_0+1}^{\infty} f(x)dx$$

Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \int_{n_0}^{n_0+1} f(x)dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \Delta_1$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \Delta_1 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + f(x_1)$$

Isto demonstra o lema. ■

Em particular, se f no lema 3.3.5, tem somente um ponto de máximo em $x = x_1$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - f(x_1) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + f(x_1)$$

3.3.6. Teorema.

Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Se $\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $a_0 > 1$, $b_0 > 0$, constitui uma frame em $L^2(\mathbb{R})$ com limites frame A e B, então

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B \quad (3.3.7)$$

e

$$\frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} A \leq \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} B \quad (3.3.8)$$

Demonstração: Como $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ é uma frame, temos para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.3.9)$$

Seja C um operador positivo, classe-traço, ou seja, da forma

$$Cf = \sum_j c_j \langle f, u_j \rangle u_j, \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

onde $\{u_j\}$ é uma base ortonormal, $c_j > 0$ e $\text{trac } C = \sum_j c_j < \infty$.

Então (3.3.9) implica que

$$A \sum_j c_j \|u_j\|^2 \leq \sum_j \sum_{m,n} c_j |\langle u_j, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \sum_j c_j \|u_j\|^2 \quad (3.3.10)$$

Como $\langle C\psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle = \sum_j c_j |\langle u_j, \psi_{m,n} \rangle|^2$, $\text{trac } C = \sum_j c_j$ e $\|u_j\| = 1$, temos por (3.3.10)

$$A \text{ trac } C \leq \sum_{m,n} \langle C\psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle \leq B \text{ trac } C. \quad (3.3.11)$$

Agora, vamos aplicar (3.3.11) a um operador especial C , construído via transformada wavelet.

Sejam $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet e $\phi_{a,b}(x) = a^{-1/2} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Se $c(a, b)$ é uma função positiva e limitada, então, de acordo com a proposição (3.2.3), o operador

$$Cf = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle f, \phi_{a,b} \rangle \phi_{a,b} c(a, b) \frac{dad b}{a^2}, \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{R})$$

é positivo e limitado. Se além disso, $c(a, b)$ é integrável com relação a $\frac{dad b}{a^2}$, C é classe-traço e

$$\text{trac } C = \|\phi\|^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty c(a, b) \frac{dad b}{a^2}$$

Escolhemos, em particular,

$$c(a, b) = \begin{cases} w\left(\frac{|b|}{a}\right), & 1 \leq a \leq a_0 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases}$$

com w positiva e integrável com relação a $\frac{dad b}{a^2}$.

Neste caso,

$$Cf = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle f, \phi_{a,b} \rangle \phi_{a,b} w\left(\frac{|b|}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{trac } C &= \|\phi\|^2 \int_1^{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{|b|}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \\
&= \|\phi\|^2 \int_1^{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} w(|s|) \frac{da ds}{a} \\
&= \|\phi\|^2 \ln a_0 \int_{-\infty}^{\infty} w(|s|) ds \\
&= 2 \ln a_0 \|\phi\|^2 \int_0^{\infty} w(|s|) ds
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{m,n}, \phi_{a,b} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0) \cdot a^{-1/2} \overline{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \\
&= a^{-1/2} a_0^{m/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \overline{\phi\left(\frac{y - (ba_0^{-m} - nb_0)}{a a_0^{-m}}\right)} dy \\
&= \langle \psi, \phi_{a a_0^{-m}, b a_0^{-m} - nb_0} \rangle,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n} \langle C \Psi_{m,n}, \Psi_{m,n} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \int_1^{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{|b|}{a}\right) |\langle \Psi_{m,n}, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dadb}{a^2} \\
&= \sum_{m,n} \int_1^{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{|b|}{a}\right) |\langle \psi, \phi_{a a_0^{-m}, b a_0^{-m} - nb_0} \rangle|^2 \frac{dadb}{a^2}
\end{aligned}$$

Fazendo as mudanças $a' = aa_0^{-m}$ e $b' = ba_0^{-m}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m,n} \langle C\Psi_{m,n}, \Psi_{m,n} \rangle \\
 &= \sum_{m,n} \int_{a_0^{-m}}^{a_0^{-m+1}} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{|b'|}{a'}\right) |\langle \Psi, \phi_{a', b' - nb_0} \rangle|^2 \frac{da' db'}{a'^2} \\
 &= \sum_{m,n} \int_{a_0^{-m}}^{a_0^{-m+1}} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{|b + nb_0|}{a}\right) |\langle \Psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dadb}{a^2} \\
 &= \sum_n \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{|b + nb_0|}{a}\right) |\langle \Psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dadb}{a^2}
 \end{aligned}$$

Como esta integral converge, já que $|\langle \Psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \leq \|\Psi\|^2 \|\phi\|^2$ e w é integrável com relação a $\frac{dadb}{a^2}$, segue

$$\sum_{m,n} \langle C\Psi_{m,n}, \Psi_{m,n} \rangle = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \Psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \sum_n w\left(\frac{|b + nb_0|}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}$$

Agora, tomamos, em particular

$$w(s) = \lambda \sqrt{\pi} e^{-\lambda^2 \pi^2 s^2}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0$$

Esta função tem somente um máximo local em $s = 0$ e é monótona decrescente quando $|s|$ cresce.

Aplicando o lema 3.3.5 à função w , temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt - \frac{b_0}{a} w(0) \leq \frac{b_0}{a} \sum_n w\left(\frac{|b + nb_0|}{a}\right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt + \frac{b_0}{a} w(0)$$

(3.3.12)

Como $w(o) = \lambda\sqrt{\pi}$ e $\int_0^{\infty} w(t)dt = \frac{1}{2}$, então (3.3.12) implica que

$$\frac{a}{b_o} - \lambda\sqrt{\pi} \leq \sum_n w\left(\frac{|b + nb_o|}{a}\right) \leq \frac{a}{b_o} + \lambda\sqrt{\pi},$$

ou seja

$$\sum_n w\left(\frac{|b + nb_o|}{a}\right) = \frac{a}{b_o} + \rho(a, b),$$

com $|\rho(a, b)| \leq w(o) = \lambda\sqrt{\pi}$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n} \langle C\psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \left[\frac{a}{b_o} + \rho(a, b) \right] \frac{dadb}{a^2} \\ &= \frac{1}{b_o} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dadb}{a} + R \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

onde

$$\begin{aligned} |R| &\leq \lambda\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dadb}{a^2} \\ &= \lambda\sqrt{\pi} c_{\phi} \|\psi\|^2, \end{aligned}$$

onde, usamos o fato que $|\rho(a, b)| \leq \lambda\sqrt{\pi}$ e a resolução da identidade (3.2.2).

Como

$$\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) a^{-1/2} \overline{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{x+a^{-1}b}{a^{-1}} \right) \overline{\phi(x)} dx \\
&= \langle \psi_{a^{-1}, -a^{-1}b}, \phi \rangle,
\end{aligned}$$

podemos escrever

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dad b}{a} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi_{a^{-1}, -a^{-1}b}, \phi \rangle|^2 \frac{dad b}{a}$$

Fazendo as mudanças de variáveis $a' = a^{-1}$ e $b' = -a^{-1}b$, obtemos,

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dad b}{a} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi_{a', b'}, \phi \rangle|^2 \frac{da' db'}{a'^2}$$

Segue, usando a resolução da identidade que

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \psi, \phi_{a,b} \rangle|^2 \frac{dad b}{a} = 2\pi \|\phi\|^2 \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi$$

Substituindo todos os resultados em (3.3.11), obtemos

$$A \|\phi\|^2 \ln a_0 \leq \frac{2\pi}{b_0} \|\phi\|^2 \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi + R \leq B \|\phi\|^2 \ln a_0 \quad (3.3.14)$$

onde $|R| \leq \lambda c_{\phi} \|\psi\|^2$.

Dividindo (3.3.14) por $\frac{2\pi}{b_0} \|\phi\|^2$ e fazendo λ tender a zero, obtemos

$$A \frac{b_0}{2\pi} \ln a_0 \leq \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq \frac{b_0}{2\pi} \ln a_0 B.$$

Isto demonstra (3.3.7). A prova de (3.3.8) é análoga. ■

Infelizmente, a recíproca do teorema 3.3.6 não é verdadeira, isto é, nem toda ψ admissível gera uma frame de wavelets. Para garantir que ψ gere uma frame, teremos que impor condições adicionais à ψ . Na realidade estas condições são sobre a $\hat{\psi}$. Veremos agora, condições sobre ψ , a_0 e b_0 tais que, realmente obtemos uma frame.

3.3.7. Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet tal que

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{C|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}}, \text{ com } C > 0, \alpha > 0 \text{ e } \gamma > \alpha + 1.$$

Então

$$\sup_{1 \leq k_j \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 < \infty$$

Demonstração: Como $|\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \leq \frac{C^2 a_0^{2\alpha m} |\xi|^{2\alpha}}{(1+a_0^{2m} \xi^2)^\gamma}$, $m \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq k_j \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 &\leq C^2 a_0^{2\alpha} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(a_0^{2\alpha m})}{(1+a_0^{2m})^\gamma} \\ &= C^2 a_0^{2\alpha} \left[\sum_{m=-\infty}^0 \frac{(a_0^{2\alpha})^m}{(1+a_0^{2m})^\gamma} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_0^{2\alpha})^m}{(1+a_0^{2m})^\gamma} \right] \end{aligned}$$

Como $1+a_0^{2m} \geq 1$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, temos $(1+a_0^{2m})^\gamma \geq 1$, logo $\frac{1}{(1+a_0^{2m})^\gamma} \leq 1$

Segue que

$$\sum_{m=-\infty}^0 \frac{(a_0^{2\alpha})^m}{(1+a_0^{2m})^\gamma} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a_0^{2\alpha}} \right)^m < \infty$$

já que $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a_0^{2\alpha}} \right)^m$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{a_0^{2\alpha}} < 1$.

Agora, para $m \geq 1$, temos $(1 + a_0^{2m})^2 \geq a_0^{2m}$ ($a_0 > 1$). Assim,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_0^{2\alpha})^m}{(1 + a_0^{2m})^\gamma} \leq \sum_{m=1}^{\infty} a_0^{2m(\alpha-\gamma)} = \sum_{m=1}^{\infty} (a_0^{2(\alpha-\gamma)})^m$$

A série $\sum_{m=1}^{\infty} (a_0^{2(\alpha-\gamma)})^m$ converge, pois é uma série geométrica de razão $a_0^{2(\alpha-\gamma)} < 1$.

Portanto, $\sup_{1 \leq \xi \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$ converge.

■

3.3.8 Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet tal que

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{C|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}}, \quad \alpha > 0, \quad C > 0, \quad \gamma > \alpha + 1 \quad (3.3.15)$$

Então

$$\beta(s) = \sup_{1 \leq \xi \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi + s)|$$

“decai tão rápido” quanto $\frac{1}{(1+|s|^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$ com $\varepsilon > 0$.

Demonstração: Usando (3.3.15), obtemos que

$$\beta(s) \leq C^2 \sup_{1 \leq \xi \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(|a_0^m \xi| |a_0^m \xi + s|)^\alpha}{[(1+|a_0^m \xi|^2)(1+|a_0^m \xi + s|^2)]^{\gamma/2}}$$

Para qualquer $m \in \mathbb{Z}$, temos $\frac{1}{(1+|a_0^m \xi|^2)^{\gamma/2}} < 1$, $|a_0^m \xi|^\alpha \leq (1+|a_0^m \xi|^2)^{\alpha/2}$ e

$|a_0^m \xi + s|^\alpha \leq (1+|a_0^m \xi + s|^2)^{\alpha/2}$, já que $\alpha > 0$, $\gamma > \alpha + 1$.

Assim, podemos escrever

$$\beta(s) \leq C^2 \sup_{1 \leq |k| \leq a_0} \left\{ a_0^\alpha \sum_{m=-\infty}^{-1} a_0^{\alpha m} (1+|a_0^m \xi + s|^2)^{-\frac{(\gamma-\alpha)}{2}} + \sum_{m=0}^{\infty} [(1+|a_0^m \xi|^2)(1+|a_0^m \xi + s|^2)]^{-\frac{(\gamma-\alpha)}{2}} \right\}$$

Para o primeiro termo usamos que para $|s| \geq 2$, $|a_0^m \xi + s| \geq |s| - |a_0^m \xi| \geq |s| - 1 \geq \frac{|s|}{2}$, já que

$$|a_0^m \xi| \leq a_0^{m+1} \leq 1 \quad (m \leq -1).$$

Isto implica que

$$\frac{1}{1+|a_0^m \xi + s|^2} \leq \frac{1}{1+\frac{|s|^2}{4}} \leq \frac{4}{1+|s|^2}$$

Para $|s| \leq 2$, temos $1+|s|^2 \leq 5$. Daí

$$\frac{1}{1+|a_0^m \xi + s|^2} \leq 1 \leq \frac{5}{1+|s|^2}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq |k| \leq a_0} a_0^\alpha \sum_{m=-\infty}^{-1} a_0^{\alpha m} (1+|a_0^m \xi + s|^2)^{-\frac{(\gamma-\alpha)}{2}} &\leq a_0^\alpha \frac{9}{(1+|s|^2)^{\frac{(\gamma-\alpha)}{2}}} \sum_{m=-\infty}^{-1} a_0^{\alpha m} \\ &= \frac{C_1}{(1+|s|^2)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}}, \end{aligned}$$

já que a série $\sum_{m=-\infty}^{-1} a_0^{\alpha m}$ converge, pois é uma série geométrica com razão $\frac{1}{a_0^\alpha} < 1$.

Para o segundo termo, usamos o fato que

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}} \frac{1+y^2}{(1+(x-y)^2)(1+(x+y)^2)} < \infty$$

para obter

$$\frac{1}{(1+|a_0^m \xi|^2)(1+|a_0^m \xi + s|^2)} \leq \frac{C_2}{1+\frac{|s|^2}{4}} \leq \frac{4C_2}{1+|s|^2}$$

Assim,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(1+|a_0^m \xi|^2)(1+|a_0^m \xi + s|) \right]^{-\frac{(\gamma-\alpha)}{2}} \leq \frac{C_3}{(1+|s|^2)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}}$$

Logo

$$\beta(s) \leq \frac{C_4}{(1+|s|^2)^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}}$$

Seja $\rho = \gamma - \alpha$. Como $\gamma > \alpha + 1$, então $\rho = 1 + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Daí obtemos

$$\beta(s) \leq \frac{C_\varepsilon}{(1+|s|^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

o que demonstra a proposição. ■

Observe que sendo

$$\beta(s) \leq \frac{C_\varepsilon}{(1+|s|^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}, \quad \varepsilon > 0$$

obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} &\leq C_\varepsilon^2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{2\pi}{b_0} k\right|^2\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \\ &\leq C_\varepsilon^2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{1}{\left|\frac{2\pi}{b_0} k\right|^{1+\varepsilon}} = 2C_\varepsilon^2 (2\pi)^{-(1+\varepsilon)} b_0^{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \\ &= C'_\varepsilon \cdot b_0^{1+\varepsilon} \end{aligned}$$

já que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$ converge.

Ou seja,

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} \leq C'_\varepsilon \cdot b_0^{1+\varepsilon} \quad (3.3.16)$$

Vamos, agora, estimar a série $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2$, para obter estimativas para os limites frame

A e B.

3.3.9 Proposição. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet tal que

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{C|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}}, \quad C > 0, \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \gamma > \alpha + 1$$

Então

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 d\xi + R(f), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.3.17)$$

onde

$$|R(f)| \leq \frac{2\pi}{b_0} \|f\|^2 \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2}, \quad (3.3.18)$$

com

$$\beta(s) = \sup_{\xi} \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi + s)|$$

Demonstração: Usando a identidade de Parseval e a proposição 3.3.1, obtemos para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 &= \sum_{m,n} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{m,n} \rangle \langle \hat{\psi}_{m,n}, \hat{f} \rangle \\ &= \sum_{m,n} a_0^m \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cdot e^{inb_0 a_0^m \xi} \cdot \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\xi')} \cdot e^{-inb_0 a_0^m \xi'} \cdot \hat{\psi}(a_0^m \xi') d\xi' \right] \\ &= \sum_{m,n} a_0^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{inb_0 a_0^m (\xi - \xi')} \cdot \overline{\hat{f}(\xi')} \hat{\psi}(a_0^m \xi') d\xi' \right] \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} a_0^m e^{inb_0 a_0^m (\xi - \xi')} \overline{\hat{f}(\xi')} \hat{\psi}(a_0^m \xi') \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi' d\xi \right| \\
 \leq \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_0^m |\hat{f}(\xi')| |\hat{\psi}(a_0^m \xi')| |\hat{f}(\xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| d\xi' d\xi \\
 = a_0^m \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi')| |\hat{\psi}(a_0^m \xi')| d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| d\xi \\
 \leq a_0^m \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a_0^m t)|^2 dt \right) \\
 = a_0^m \|\hat{f}\|^2 \frac{1}{a_0^m} \|\hat{\psi}\|^2 \\
 = \|\hat{f}\|^2 \cdot \|\hat{\psi}\|^2 < \infty
 \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 &= \sum_m a_0^m \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{inb_0 a_0^m (\xi - \xi')} \overline{\hat{f}(\xi')} \hat{\psi}(a_0^m \xi') d\xi' \right] \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi \\
 &= \sum_m a_0^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_n e^{inb_0 a_0^m (\xi - \xi')} \overline{\hat{f}(\xi')} \hat{\psi}(a_0^m \xi') d\xi' \right] \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi
 \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Poisson

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{i\ell a x} = \frac{2\pi}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(x - \frac{2\pi}{a} k\right),$$

obtemos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{2\pi}{b_0} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \delta\left(\xi - \xi' - \frac{2\pi}{b_0 a_0^m} k\right) \overline{\hat{f}(\xi')} \hat{\psi}(a_0^m \xi') d\xi' \right] \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{b_0} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{b_0 a_0^m} k\right)} \hat{\psi}(a_0^m \xi) \hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right) d\xi \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 d\xi + R(f) \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 d\xi + R(f)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
|R(f)| &= \left| \frac{2\pi}{b_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \neq 0} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{b_0 a_0^m} k\right)} \hat{\psi}(a_0^m \xi) \hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right) d\xi \right| \\
&\leq \frac{2\pi}{b_0} \sum_{\substack{m, k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| \left| \hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{b_0 a_0^m} k\right) \right| |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right) \right| d\xi
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}
|R(f)| &\leq \frac{2\pi}{b_0} \sum_{\substack{m, k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right)| d\xi \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}\left(\xi + \frac{2\pi}{b_0 a_0^m} k\right) \right|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right) \right| d\xi \right]^{1/2} \right\}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\xi' = \xi + \frac{2\pi}{b_0 a_0^m} k$ na segunda integral, usando a desigualdade de

Cauchy-Schwarz e o fato que $\sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi + s)|$ converge (Proposição 3.3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
|R(f)| &\leq \frac{2\pi}{b_0} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right) \right| d\xi \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi')|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi')| \left| \hat{\psi}\left(a_0^m \xi' - \frac{2\pi}{b_0} k\right) \right| d\xi' \right]^{1/2} \right\} \\
&\leq \frac{2\pi}{b_0} \sum_{k \neq 0} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^m \xi + \frac{2\pi}{b_0} k\right) \right| d\xi \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^m \xi - \frac{2\pi}{b_0} k\right) \right| d\xi \right]^{1/2} \right\}
\end{aligned}$$

Seja $\beta(s) = \sup_{\xi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi + s)|$. Segue que

$$\begin{aligned}
|R(f)| &\leq \frac{2\pi}{b_0} \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \left[\beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \|\hat{f}\|^2 \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \|\hat{f}\|^2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Isto completa a prova da proposição. ■

Agora, estamos em condições de obter estimativas para os limites frame A e B. Estas estimativas estão ligadas à hipótese de que $a_0 > 1$ e que existe $B_0 > 0$, tal que, para $b_0 < B_0$, as $\Psi_{m,n}$ constituem uma frame.

3.3.10 Teorema. Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma wavelet e $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 > 1$, tais que

$$\inf_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 > 0$$

e

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{C|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}}, \quad C > 0, \alpha > 0 \text{ e } \gamma > \alpha + 1 \quad (3.3.19)$$

Então, existe $B_0 > 0$ tal que

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} x - n b_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

constitui uma frame em $L^2(\mathbb{R})$ para toda a escolha de $b_0 < B_0$. Para $b_0 < B_0$, as seguintes expressões são limites frame.

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \left\{ \inf_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 - \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} \right\} \quad (3.3.20)$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \left\{ \sup_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 + \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} \right\} \quad (3.3.21)$$

Demonstração: Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. De (3.3.17) e (3.3.18), obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{b_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 - \|f\|^2 \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} \right\} \\ & \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq \\ & \leq \frac{2\pi}{b_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 + \|f\|^2 \sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

Tomando A e B como em (3.3.20) e (3.3.21), respectivamente, obtemos

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.3.22)$$

A condição de decaimento sobre $\hat{\psi}$, dada em (3.3.19), garante que $B < \infty$ (Proposições 3.3.7 e 3.3.8). Pela expressão (3.3.16), temos que existe $B_0 > 0$ tal que para $b_0 < B_0$.

$$\sum_{k \neq 0} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0} k\right) \beta\left(\frac{-2\pi}{b_0} k\right) \right]^{1/2} < \inf_{1 \leq |k| \leq a_0} \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2.$$

$$\text{Basta tomar } B_0 = \left[\frac{1}{C_\varepsilon} \inf_{1 \leq |k| \leq a_0} \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \right]^{1/1+\varepsilon}$$

Isto nos garante que A , como definido em (3.3.20) é positivo. Portanto $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitui uma frame em $L^2(\mathbb{R})$. ■

3.4 Conclusões e Comentários Finais

A seguir, veremos algumas modificações para as estimativas dos limites frames A e B , onde são usadas diferentes funções wavelets, ψ^1, \dots, ψ^N , para gerar uma frame. Os resultados citados aqui, são encontrados nas referências [5] ou [6]. Antes, porém, vamos recapitular os resultados obtidos anteriormente.

Para que as $\psi_{m,n}$,

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} x - nb_0), \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

com $a_0 > 1$ e $b_0 > 0$ geram uma frame de wavelets em $L^2(\mathbb{R})$, devemos ter, inicialmente, que ψ deve ser admissível, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

Vimos, no resultado 3.3.6, que se as $\psi_{m,n}$ constituem uma frame, então ψ é admissível, porém, a condição de admissibilidade não é suficiente para garantir que as $\psi_{m,n}$ formam uma frame. O teorema 3.3.3, nos garante que se a transformada de Fourier $\hat{\psi}$, tem suporte compacto

no eixo positivo, é contínua e sem zeros no interior de seu suporte, então $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ forma uma frame. Já, o teorema 3.3.10, nos diz que se o decaimento de $\hat{\psi}$ é do tipo

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{C|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\gamma/2}} \quad C > 0, \alpha > 0 \text{ e } \gamma > \alpha + 1$$

e se $\sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 > 0$, então $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ gera uma frame sempre que $b_0 < B_0$ (onde B_0 é estimado no teorema 3.3.10), ou seja, se $\hat{\psi}$ decai razoavelmente, então existe uma variação possível para a_0 e b_0 tal que para esses valores as $\psi_{m,n}$ formam uma frame de wavelets.

Na prática, porém, é muito conveniente tomar $a_0 = 2$, pois isto significa que passando de uma escala m , para a seguinte $m + 1$ ou para a anterior $m - 1$, simplesmente duplicamos ou dividimos por 2 a translação $nb_0 a_0^m$, que é muito mais prático que usar outro a_0 qualquer. Por outro lado, é vantajoso trabalhar com frames que são quase-tight, isto é, $\frac{B}{A}$ próximo de 1.

Das estimativas (3.3.20) e (3.3.21) para os limites frame A e B , obtemos

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0} \sum_m |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \leq B \quad (3.4.1)$$

para todo $\xi \neq 0$. Assim essas duas condições juntas implicam que $\sum_m |\hat{\psi}(2^m \xi)|^2$ deve ser quase constante, o que é uma exigência nem sempre satisfeita.

A. Grossmann, R. Kronland - Martinet e J. Morlet, sugeriram o uso de diferentes wavelets, ψ^1, \dots, ψ^N , para gerar uma “multi frame” $\{\psi_{m,n}^j\}_{m,n \in \mathbb{Z}, j=1, \dots, N}$.

Como uma variante dos teoremas 3.3.9 e 3.3.10, podemos obter os seguintes limites para A e B .

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \left[\inf_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^j(2^m \xi)|^2 - R\left(\frac{2\pi}{b_0}\right) \right] \quad (3.4.2)$$

e

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \left[\sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^j(2^m \xi)|^2 + R\left(\frac{2\pi}{b_0}\right) \right] \quad (3.4.3)$$

com $R(x) = \sum_{k \neq 0} \sum_{j=1}^N [\beta^j(kx) \beta^j(-kx)]^{1/2}$

e

$$\beta^j(s) = \sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^j(2^m \xi)| |\hat{\psi}^j(2^m \xi + s)|$$

A escolha de wavelets ψ^1, \dots, ψ^N , pode levar a uma boa relação de $\frac{B}{A}$.

Na prática são usadas versões “fracionais” dilatadas de uma wavelet ψ ,

$$\psi^j(x) = 2^{-\frac{(j-1)}{N}} \psi\left(2^{-\frac{(j-1)}{N}} x\right), \quad j = 1, \dots, N$$

Note que as ψ^j tem diferentes normas em $L^2(\mathbb{R})$, já que

$$\|\psi^j\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^j(x)|^2 dx = 2^{-\frac{2(j-1)}{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(2^{-\frac{(j-1)}{N}} x)|^2 dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x' = 2^{-\frac{(j-1)}{N}} x$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi^j\|^2 &= 2^{-\frac{2(j-1)}{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x')|^2 dx' \\ &= 2^{-\frac{2(j-1)}{N}} \|\psi\|^2, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Observe também que a série $\sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^j(2^m \xi)|^2$ pode ser escrita da forma

$\sum_{m'=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{\frac{m'}{N}} \xi)|^2$. De fato,

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^j(2^m \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i 2^m \xi x} \psi^j(x) dx \\ &= \frac{2^{-\frac{(j-1)}{N}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i 2^m \xi x} \psi\left(2^{-\frac{(j-1)}{N}} x\right) dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x' = 2^{-\frac{(j-1)}{N}} x$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^j(2^m \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i 2^m 2^{\frac{(j-1)}{N}} \xi x'} \psi(x') dx' \\ &= \hat{\psi}\left(2^{\frac{mN+j-1}{N}} \xi\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}^j(2^m \xi)|^2 &= \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}\left(2^{\frac{mN+j-1}{N}} \xi\right)|^2 \\ &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}\left(2^{\frac{m'}{N}} \xi\right)|^2 \end{aligned}$$

Exemplo: A função “chapéu mexicano” é a segunda derivada da função gaussiana (a menos de sinal e normalizada) e é dada por

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-x^2) e^{-x^2/2}$$

com $\hat{\psi}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \xi^2 e^{-\xi^2/2}$

O gráfico de ψ está representado na figura 3.1. Usando $a_0 = 2$ e diferentes b_0 , nas fórmulas (3.4.2) e (3.4.3) com N variando de 1 a 4, obtemos os seguintes valores para os limites frame A e B:

N = 1				N = 2			
b_0	A	B	B/A	b_0	A	B	B/A
0.25	13.091	14.183	1.083	0.25	27.273	27.278	1.000
0.50	6.546	7.092	1.083	0.50	13.673	13.639	1.000
0.75	4.364	4.728	1.083	0.75	9.091	9.093	1.000
1.00	3.223	3.596	1.116	1.00	6.768	6.870	1.015
1.25	2.001	3.454	1.726	1.25	4.834	6.077	1.257
1.50	0.325	4.221	12.986	1.50	2.609	6.483	2.485
				1.75	0.517	7.276	14.061
N = 3				N = 4			
b_0	A	B	B/A	b_0	A	B	B/A
0.25	40.914	40.914	1.000	0.25	54.552	54.552	1.000
0.50	20.457	20.457	1.000	0.50	27.276	27.276	1.000
0.75	13.638	13.638	1.000	0.75	9.091	9.093	1.000
1.00	10.178	10.279	1.010	1.00	13.586	13.690	1.007
1.25	7.530	8.835	1.173	1.25	10.205	11.616	1.138
1.50	4.629	9.009	1.947	1.50	6.594	11.590	1.758
1.75	1.747	9.942	5.691	1.75	2.928	12.659	4.324

Tabela 3.1 Limites frame para a frame de wavelets baseada na função “chapéu mexicano”.

Observação: De acordo com a tabela 3.1, podemos considerar a frame tight para $b_0 \leq 0,75$. Se b_0 for maior que 0,75 (por exemplo 1,75), o valor de $\frac{B}{A}$ cresce muito, e conseqüentemente não temos uma frame tight. A utilização da “multi-frame” $\{\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4\}$, como mostra a tabela, é bastante vantajosa já que com translações maiores b_0 , continuamos a obter frames tight.

Referências

- [1] Bachman, G. e Narici, L. - Functional Analysis, Academic Press, New York, 1966.
- [2] Chui, C.K. - An Introduction to Wavelets, Academic Press, San Diego, 1992.
- [3] Daubechies, I. - Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets, Comm. Pure and Applied Math., vol. 41, pg. 909-996, 1988.
- [4] Daubechies, I., Grossmann A. e Meyer Y. - Painless Nonorthogonal Expansions, J. Math. Phys., vol. 27, pg. 1271-1283, 1986.
- [5] Daubechies, I. - Ten Lectures in Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [6] Daubechies, I. - The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 36, n°5, pg. 961-1005, 1990.
- [7] Gaal, S.A. - Linear Analysis e Representation Theory, Springer, Berlin, 1973.
- [8] Grossmann, A. e Morlet, J. - Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape, SIAM J. Math. Anal. 15, pg. 723-736, 1984.
- [9] Hewitt, E e Ross, K. A. - Abstract Harmonic Analysis, Springer, Berlin, 1970.
- [10] Medeiros, L.A. e Mello, E.A. de - A Integral de Lebesgue - Textos e Métodos Matemáticos 18, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [11] Okikiolu, G.O. - Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L^p - Spaces, Academic Press, New York, 1971.
- [12] Reed, M e Simon.- Methods of Modern Mathematical Physics, vol I: Functional Analysis. Academic Press, New York, 1979.
- [13] Rudin, W.- Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- [14] Young, R. M.- An Introduction to No-harmonic Fourier Séries, Academic Press, New York, 1980.
- [15] Aslaksen, J. W. e Klauder, J. R., J. Math. Phys., 16, 2267, 1969.