

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO E EXTENSÃO DE UMA METODOLOGIA
AERODINÂMICA PARA ANÁLISES AEROELÁSTICAS

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

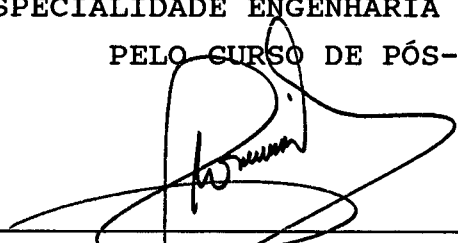
ÁLVARO LUIZ DE BORTOLI

FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1995.


**DESENVOLVIMENTO E EXTENSÃO DE UMA METODOLOGIA
AERODINÂMICA PARA ANÁLISES AEROELÁSTICAS**

ÁLVARO LUIZ DE BORTOLI

ESTA TESE FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

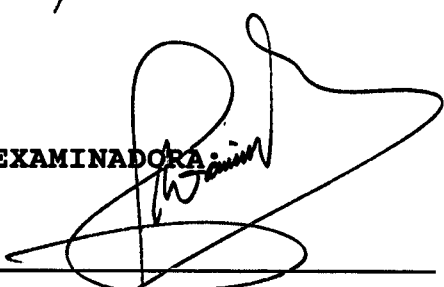


Prof. Clovis Raimundo Maliska
ORIENTADOR



Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva
COORDENADOR DO CURSO

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Clovis Raimundo Maliska



Prof. Álvaro L. G. A. Coutinho



Prof. Armando Miguel Awruch



Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva



Prof. Carlos Alberto Campos Selke

à minha família

AGRADECIMENTOS:

O autor gostaria de agradecer:

- À orientação:

Orientador: Prof. Clovis Raimundo Maliska

Co-Orientador: Prof. Clovis Sperb de Barcellos

- Às oportunidades oferecidas:

UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina

"Desenvolvimento de Códigos Computacionais para a Solução de Escoamentos a Alta Velocidade"

Projeto relacionado ao IAE do CTA (Mestrado)

Prof. Clovis R. Maliska

DLR - "Institut für Entwurfsaerodynamik"

"Transformação do código CEVCATS para solução de Escoamentos Incompressíveis"

Dr. Norbert Kroll / Dr. Rolf Radespiel

- O suporte das instituições financiadoras

CNPq - CAPES/DAAD

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS E TABELAS	viii
SIMBOLOGIA	xiv
RESUMO	xx
ABSTRACT	xxii
1. INTRODUÇÃO	1
2. EQUAÇÕES GOVERNANTES	12
2.1 Equações governantes para problemas aerodinâmicos	12
2.2 Equações governantes para problemas estruturais	15
3. APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES	17
3.1 Introdução	17
3.2 Procedimento de solução em volumes finitos baseado na formulação incompressível	19
3.2.1 Transformação de coordenadas	19
3.2.2 Discretização das equações governantes do problema aerodinâmico	21
3.2.3 Aproximação das velocidades nas faces do volume de controle	25
3.2.4 Formulação para escoamentos a qualquer velocidade e obtenção da equação para a pressão	27
3.3 Formulação compressível e pré-condicionamento	33
3.3.1 Formulação compressível voltada ao método de Runge-Kutta	33
3.3.2 Dissipação artificial	38
3.3.3 Pré-condicionamento	41
3.4 Aproximação do problema estrutural (viga)	45

4.	CONDIÇÕES DE CONTORNO, CONDIÇÕES INICIAIS E GERAÇÃO DA MALHA COMPUTACIONAL	51
4.1	Condições de contorno e iniciais do problema aerodinâmico	51
4.2	Condições de contorno e iniciais do problema estrutural	58
4.3	Geração e movimento da malha computacional	59
4.3.1	Geração da malha computacional	59
4.3.2	Movimento da malha computacional	61
5.	METODOLOGIA GERAL DE SOLUÇÃO	65
5.1	Introdução	65
5.2	Métodos de solução do problema aerodinâmico	66
5.3	Métodos de solução do problema dinâmico estrutural	71
5.4	Convergência	76
5.5	O acoplamento aeroelástico	78
6.	TÉCNICAS PARA ACELERAR A CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA AERODINÂMICO	82
6.1	Passo de tempo local	82
6.2	Média dos resíduos	83
6.3	Técnicas "Multigrid" (multigrade)	83
7.	RESULTADOS	89
7.1	Resultados aerodinâmicos	90
7.1.1	Cilindro	91
7.1.2	Superfície contendo curvatura	98
7.1.3	Perfil NACA 0012	104
7.1.4	Placa com extremidade cilíndrica	118
7.1.5	Cilindro hemisférico	123

7.2 Resultados estruturais (viga)	126
7.3 Resultados aeroelásticos	130
7.3.1 Painei	131
7.3.2 Aerofólio	133
7.3.3 Cilindro hemisférico	134
8. CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES	138
9. BIBLIOGRAFIA	145
APÊNDICE	
A. O PROBLEMA AEROELÁSTICO	159
A.1 Introdução	159
A.2 Principais fenômenos aeroelásticos	160
A.3 Modelos estáticos e dinâmicos	162
A.4 Cálculo do carregamento aerodinâmico	171

LISTA DE FIGURAS E TABELAS:

LISTA DE FIGURAS:

Fig. 1.1	Presença de choques numa asa submetida a um escoamento transônico	6
Fig. 2.1	Domínio de um corpo qualquer	16
Fig. 3.1	Arranjo co-localizado (armazenamento nos centros do volume de controle)	21
Fig. 3.2	Arranjo co-localizado das variáveis na malha a) variáveis armazenadas nos nós (vértices) b) variáveis armazenadas nos centros	35
Fig. 3.3	Vetor das métricas nas faces do volume de controle	36
Fig. 3.4	Métricas (co-localizado com armazenamento nos nós)	37
Fig. 3.5	Células com grandes relações de dimensão	41
Fig. 3.6	Elemento típico para uma viga	46
Fig. 3.7	Deformação de um elemento de viga	48
Fig. 4.1	Condição de contorno de parede	52
Fig. 4.2	Condição de contorno para um corte	53
Fig. 4.3	Condição de contorno de simetria	54
Fig. 4.4	Condição de contorno longe do corpo	55
Fig. 4.5	Viga engastada uniformemente carregada	59
Fig. 4.6	Volume de controle móvel	63
Fig. 5.1	Elongação de período (PE/T %) e decaimento de amplitude (AD %) dos métodos de integração direta	73

Fig. 5.2	Diagrama funcional básico de um problema aeroelástico	79
Fig. 5.3	Interface fluido-sólido para um corpo em forma de veículo lançador	80
Fig. 6.1	Ciclo V	85
Fig. 6.2	Ciclo W	85
Fig. 6.3	Malhas grossa e fina	88
Fig. 7.1	Malha para o cilindro, 160x48 volumes	91
Fig. 7.2	Linhas de pressão constante para o cilindro, Mach = 0,2	93
Fig. 7.3	Coefficiente de pressão para o cilindro, Mach = 0,2	93
Fig. 7.4	Linhas de pressão constante para o cilindro, Mach = 0,01	94
Fig. 7.5	Coefficiente de pressão para o cilindro, Mach = 0,01	95
Fig. 7.6	Convergência para o cilindro para malhas diferentes, Mach = 0,1	96
Fig. 7.7	Convergência para o cilindro para números de Mach variando entre 0,2 e 0,01	97
Fig. 7.8	Refinamento da malha para o cilindro, Mach = 0,1	97
Fig. 8.9	Malha utilizada para uma superfície com curvatura de 10%	99
Fig. 7.10	Linhas de pressão constante para uma superfície com curvatura de 1%	100
Fig. 7.11	Linhas de pressão constante para uma superfície com curvatura de 5%	101

Fig. 7.12	Linhas de pressão constante para uma superfície com curvatura de 20%	101
Fig. 7.13	Coefficiente de pressão para uma superfície com curvaturas variando entre 1% e 20%	102
Fig. 7.14	Convergência para uma superfície com curvatura de 1%	103
Fig. 7.15	Malha utilizada para o NACA 0012, "C", 256x64 volumes	105
Fig. 7.16	Linhas de pressão constante para o NACA 0012, Mach = 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$	106
Fig. 7.17	Coefficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$	106
Fig. 7.18	Comparação do coeficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,85 e $\alpha = 0^\circ$	107
Fig. 7.19	Linhas de pressão constante para o NACA 0012, Mach = 0,5 e $\alpha = 5^\circ$	108
Fig. 7.20	Coefficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,5 e $\alpha = 5^\circ$	108
Fig. 7.21	Linhas de pressão constante para o NACA 0012, Mach = 0,3 e $\alpha = 5^\circ$	109
Fig. 7.22	Coefficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,3 e $\alpha = 5^\circ$	110
Fig. 7.23	Linhas de pressão constante para o NACA 0012, Mach = 0,05 e $\alpha = 5^\circ$	110
Fig. 7.24	Coefficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,05 e $\alpha = 5^\circ$	111
Fig. 7.25	Linhas de pressão constante para o NACA 0012, Mach = 0,005 e $\alpha = 5^\circ$	112

Fig. 7.26	Coeficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,005 e $\alpha = 5^\circ$	112
Fig. 7.27	Convergência para o NACA 0012, Mach = 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$	113
Fig. 7.28	Comparação da convergência para o NACA 0012, Mach = 0,1 e 0,01, $\alpha = 5^\circ$	114
Fig. 7.29	Convergência para o NACA 0012, Mach = 0,1 e $\alpha = 5^\circ$	114
Fig. 7.30	Convergência para o NACA 0012 para Mach variando entre 0,8 e 0,005, $\alpha = 5^\circ$	116
Fig. 7.31	Convergência para o NACA 0012 para malhas diferentes, Mach = 0,1, $\alpha = 5^\circ$	116
Fig. 7.32	Convergência do coeficiente de sustentação para o NACA 0012, Mach = 0,01, $\alpha = 5^\circ$	117
Fig. 7.33	Malha utilizada para a placa com extremidade cilíndrica (bidimensional)	119
Fig. 7.34	Linhas de Mach constante para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 0,05	120
Fig. 7.35	Linhas de pressão constante para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 0,8	120
Fig. 7.36	Linhas de pressão constante para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 1,5	121
Fig. 7.37	Convergência para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 0,8	122
Fig. 7.38	Malha para o cilindro hemisférico, 34x26x19 volumes	124
Fig. 7.39	Linhas de massa específica para o cilindro hemisférico, Mach = 0,6 e $\alpha = 0^\circ$	124

Fig. 7.40	Coeficiente de pressão para o cilindro hemisférico, Mach = 0,6 e $\alpha = 0^\circ$	125
Fig. 7.41	Linhas de massa específica constante para o cilindro hemisférico, Mach = 0,85 e $\alpha = 6^\circ$	126
Fig. 7.42	Modelo para um elemento de viga (4 nós)	128
Fig. 7.43	Deslocamentos do painel para espessura de 1,45 mm	131
Fig. 7.44	Deslocamentos do painel para espessura de 1,55 mm	132
Fig. 7.45	Aproximação da solução aeroelástica para o aerofólio NACA 0012	134
Fig. 7.46	Deslocamentos verticais do nariz do cilindro, Mach = 0,85 e $\alpha = 6^\circ$	136
Fig. 7.47	Comparação dos deslocamentos verticais do nariz do cilindro, Mach = 0,85 e $\alpha = 6^\circ$	136
Fig. A.1	Triângulo da aeroelasticidade	160
Fig. A.2	Asa rígida elasticamente restrita	163
Fig. A.3	Modelo de "flutter" para um aerofólio	165
Fig. A.4	Modelo aeroelástico de uma asa	166
Fig. A.5	Painel bidimensional	167
Fig. A.6	Sistema massa-mola-amortecedor	170
Fig. A.7	Oscilações de um sistema massa-mola-amortecedor	
	a) sem amortecimento	
	b) com amortecimento	170

LISTA DE TABELAS:

Tab. 7.1	Deslocamentos para um elemento de viga com carregamento estático	127
Tab. 7.2	Segunda frequência natural para um elemento de viga	129

SIMBOLOGIA:

a	- constante, coeficiente
$a_{i,j}$	- coeficientes da matriz [A]
A	- área
a^ϕ	- coeficiente para a variável ϕ na forma discretizada
b	- constante, forças de corpo
$\{b\}$	- vetor excitação
b^ϕ	- termo fonte para ϕ
c	- corda, velocidade do som local
c_L	- coeficiente de sustentação
c_∞	- velocidade do som da corrente livre
c^p	- inverso da temperatura
\vec{c}	- vetor das variáveis características
C_h	- correção (técnica "multigrid")
[C]	- matriz amortecimento
c_p	- coeficiente de pressão
CFL	- número de Courant-Friedrich-Lewy
D	- rigidez à flexão
D_η	- matriz Jacobiana associada a direção η
\vec{D}	- vetor de dissipação artificial
d	- coeficientes do vetor dissipação artificial, face dorso do volume de controle
d^ϕ	- coeficiente da influência da diferença de pressão para ϕ
e	- face leste do volume de controle
ec	- percentagem do comprimento da corda
E	- ponto leste, energia total, módulo de elasticidade longitudinal

EI	- rigidez à flexão
f	- "forcing function", força
F	- tensor dos fluxos convectivos
$\{F\}$	- força externa
GJ	- rigidez à torção
G	- módulo de elasticidade transversal
h	- espessura, altura
h_i	- função de interpolação
H	- entalpia total
i, j, k	- vetores de base nas direções x, y, z
I_h^{2h}	- operador restrição
I_{2h}^h	- operador prolongamento
I	- inverso do determinante da matriz do Jacobiano, momento de inércia
J	- determinante da matriz Jacobiana
$[K]$	- matriz de rigidez
k_h	- constante da mola para alongação
$k^{(2)}$	- coeficiente usado para a dissipação (segunda ordem)
$k^{(4)}$	- coeficiente usado para a dissipação (quarta ordem)
k_α	- constante da mola para rotação
κ	- constante para correção do perfil de cisalhamento
L	- comprimento, sustentação, Lagrangeano
$[L]$	- matriz triangular inferior
$L[]$	- aproximação do termo entre []
m	- massa
m^ρ	- coeficiente para a equação em ρ
m^u	- coeficientes das velocidades
M	- fluxo de massa (nas faces do volume de controle)

M_∞	- número de Mach da corrente livre
[M]	- matriz massa
M_t	- momento torsor
n	- face norte do volume de controle
\bar{n}	- normal
p	- pressão
P	- ponto central do volume de controle
p^ϕ	- termo fonte
P,Q,R	- pesos utilizados para atração na geração da malha
q	- vetor velocidades
{q}	- graus de liberdade
Q	- fluxo convectivo
q_1	- deslocamento na direção x
q_2	- deslocamento na direção y
q_3	- deslocamento na direção z
r	- massa específica do sólido
R	- constante dos gases perfeitos
\vec{R}	- vetor resíduo
Re	- número de Reynolds
s	- face sul do volume de controle, função minmod
S	- ponto sul
S_α	- momento estático de inércia
\vec{S}	- vetor da métricas nas faces do volume de controle
$s_{ix}, s_{iy},$	- métricas
t	- tempo, trações
T	- temperatura
u,v,w	- componentes cartesianas do vetor velocidade nas direções x,y,z

[U]	- matriz triangular superior
U	- componente contravariante do vetor velocidade, energia potencial total
V	- componente contravariante do vetor velocidade
\vec{V}_M	- vetor velocidade da malha
w	- função de interpolação, frequência natural
\vec{W}	- vetor dos fluxos convectivos
W	- componente contravariante do vetor velocidade, trabalho realizado pelas forças externas
x,y,z	- sistema cartesiano de coordenadas
x_τ, \dots	- velocidade da malha
x_α	- distância do centro aerodinâmico ao centro de gravidade

SÍMBOLOS ESPECIAIS:

α_r	- coeficiente dos estágios para o método de Runge-Kutta
α	- função de interpolação do fluxo convectivo, fator de escala da dissipação, rotação
α_{11}	- métrica
β	- limitador, ângulo de rotação
γ	- coordenada generalizada para a direção z, razão entre os calores específicos
Γ	- matriz de pré-condicionamento, circulação, contorno do domínio de um corpo
δ	- constante, variação
Δ	- incremento
$\nabla^2()$	- laplaciano
ϵ	- erro, constante, deformação

ϵ_{xx}	- deformação principal na direção x
$\epsilon^{(2)}$	- coeficiente para escalar a dissipação (segunda ordem)
$\epsilon^{(4)}$	- coeficiente para escalar a dissipação (quarta ordem)
θ	- somatório das tensões normais, ângulo de rotação
λ	- raio espectral da matriz Jacobiana
μ	- viscosidade, parâmetro
ν	- coeficiente de Poisson, sensor de variação de pressão
ξ, η, γ	- sistema generalizado de coordenadas
π	- 3,1415....
π_p	- energia potencial total
ρ	- massa específica do fluido
σ	- tensão principal
Σ	- somatório
ζ	- coordenada generalizada (ξ, η, γ)
τ	- energia cinética, tempo adimensional
φ	- ângulo de rotação
ϕ	- variável genérica
ψ	- rotação dos elementos ao longo da linha de centro
Ω	- domínio de um corpo
$ $	- módulo

Superíndices:

*	- melhor estimativa de uma variável
'	- variação de uma variável
o	- valor antigo de uma variável
k+1	- valor referente à iteração k+1

- 1 - representa o inverso
- i,j,k - direção coordenada
- .
- derivada em relação ao tempo

Subíndices:

- e,w,n,.. - valor referente a face leste, oeste, norte, .. do volume de controle
- i,j,k - valor relacionado aos pontos i,j,k
- o - condição de referência
- nb, NB - valor referente aos pontos vizinhos

RESUMO

Os métodos numéricos desempenham um papel cada vez mais importante no processo de projeto de uma aeronave. No entanto, o desenvolvimento dos métodos computacionais nesta área ainda não é suficiente e muito experimento necessita ainda ser feito para garantir a execução de um projeto aerodinâmico. O desenvolvimento experimentado pelos computadores e pelos métodos numéricos, entretanto, conduzem a substituição de parte do trabalho repetitivo experimental por simulações numéricas.

Especialmente para escoamentos transônicos são observadas rápidas variações nos coeficientes aerodinâmicos. Isto ocorre devido às instabilidades presentes no escoamento que são causadas não somente pelas interações viscosas na camada limite, mas também devido à interações entre choque e camada limite.

O projeto de um avião ou de um veículo lançador envolve o cálculo do escoamento em torno do mesmo, passando por vários regimes de escoamento. Por outro lado a análise aeroelástica desempenha um papel importante para o desenvolvimento de aviões modernos, uma vez que eles tendem a ser mais flexíveis. Vários fenômenos importantes aparecem devido a interações entre o escoamento e as partes flexíveis de um avião, os quais podem limitar o seu uso. Fenômenos aeroelásticos indesejáveis ocorrem especialmente para escoamentos transônicos, onde o choque varia de posição. Então, para resolver fenômenos aeroelásticos é necessário resolver as equações do problema aerodinâmico e estrutural simultaneamente.

O estudo completo do escoamento em torno de uma aeronave não é fácil, mas é necessário para minimizar tempo e custo de um

projeto aerodinâmico. Uma das estratégias utilizadas são os métodos numéricos onde as equações governantes do problema são transformadas em equações algébricas. Os métodos normalmente usados para aproximar estas equações são os de volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas e elementos de contorno.

É óbvia a necessidade de métodos eficientes para resolver escoamentos, especialmente para projetos aeronáuticos. Muitos códigos ainda em uso apresentam baixa taxa de convergência para obter soluções em regime permanente, o que conduz a elevados custos de projeto. Conseqüentemente, existem muitos trabalhos de pesquisa que visam aumentar a taxa de convergência dos métodos numéricos. Entre estas técnicas, passos de tempo local, média dos resíduos e a sua combinação com técnicas "multigrid" são comuns na prática, especialmente para obter soluções em regime permanente.

Este trabalho apresenta uma metodologia computacional para resolver problemas aerodinâmicos e a sua extensão para resolver problemas aeroelásticos. Esta metodologia emprega volumes finitos e elementos finitos. Volumes finitos são usados para resolver o problema aerodinâmico. Elementos finitos são usados para resolver o problema estrutural. Resultados numéricos são obtidos para números de Mach variando entre 0,005 até 1,5 para um cilindro, uma placa, o aerofólio NACA 0012, um painel e um cilindro hemisférico.

**DEVELOPMENT AND EXTENSION OF AN AERODYNAMIC
METHODOLOGY TO AEROELASTIC ANALYSIS**

ABSTRACT

Today, numerical flow simulation plays more and more important role in the design process of an aircraft. However, the development of computational methods in this area is still not enough and a lot of works have to be done for real designs. The development experienced by the computers and numerical methods, however, lead to the substitution of part of the repetitive experimental work by computational tests.

Specially for transonic flows sharp changes in the aerodynamic coefficients are observed. This occurs because of the instabilities whose are caused not only by strong viscous interations in the boundary layer, but also by interactions between shock wave and boundary layer.

The design of an aircraft or a launch vehicle involves the calculation of the flow behaviour during a full flight, passing through various flow regimes. Aeroelasticity plays an important role in the development of a modern aircraft, since they tend to be more flexible. Some important phenomena appear in the interaction between the flow and the flexible parts of an aircraft, that can limit its behaviour. Undesirable aeroelastic phenomena occur specially in transonic flows because the shock is mobile. Then, to compute aeroelastic phenomena it is necessary to solve the aerodynamic and elastic equations simultaneously.

The study of a complete flight is not easy, but it is

necessary, in order to minimize the time and the cost of the aerodynamic design. In this way one strategy is to use numerical methods where the governing equations are transformed into algebraic ones. Common methods used to approximate differential equations are the finite volumes, finite elements, finite differences and boundary elements.

The need of efficient methods to solve flow problems is obvious, especially for the design of an aircraft. Many solvers, still in use today, exhibit slow convergence to obtain steady state solutions, which leads to high design costs. Consequently, there are many research works to accelerate the convergence of numerical codes. Among these approaches, the local time-stepping, residual averaging and its combination with multigrid techniques are in use, especially to obtain steady state solutions.

This work presents a computational methodology to solve aerodynamic problems and its extension to solve aeroelastic problems. Finite volumes are used to model the aerodynamic part of the problem. Finite elements are used to model the structural part. Numerical results are presented for Mach-numbers ranging from 0,005 to 1,5 over a cylinder, a plate, the NACA 0012 airfoil, a panel and a hemisphere cylinder.

1. INTRODUÇÃO

O desejo de voar é talvez uma das mais antigas aspirações do ser humano. Os primeiros experimentos foram difíceis, perigosos e desanimadores. Mesmo assim o desafio continuou. Surgiu também a necessidade de percorrer grandes distâncias em pouco tempo. Portanto, o perigo e a necessidade aumentaram a responsabilidade na construção das máquinas voadoras. Por outro lado, ambições históricas contribuíram e continuam contribuindo para este desenvolvimento, embora estas sejam, na maior parte das vezes, indesejáveis.

Muitos fenômenos que ocorrem para um avião em vôo são, até hoje, um desafio, exigindo por isso experiências para homologar o emprego de cada novo avião. Como a aviação é um meio de transporte muito importante na atualidade, é clara a necessidade de maior desenvolvimento dos métodos numéricos, visando a diminuição de experimentos em laboratório.

Com o aumento da importância e da necessidade dos aviões na vida do homem, tanto em períodos de conflito como em períodos de paz, surgiram ramos especializados da engenharia aplicados ao estudo da aeronáutica. Dentre os ramos da engenharia aeronáutica encontram-se a aerodinâmica, a aerotermodinâmica e a aeroelasticidade. A aerodinâmica [1] corresponde a parte da física que estuda o movimento ou o escoamento dos gases, e a aeroelasticidade [2] [3] corresponde a parte da mecânica que estuda as deformações da estrutura dos corpos elásticos, como resposta às forças aerodinâmicas aplicadas. Os fenômenos aeroelásticos ocorrem quando as deformações estruturais produzem forças aerodinâmicas adicionais,

que produzem novas deformações. Tais interações podem tender ao equilíbrio ou à destruição da estrutura.

É conveniente classificar os regimes de escoamento conforme:

Regime incompressível	$M_{\infty} < 0,3$
Regime compressível subsônico	$0,3 < M_{\infty} < 0,8$
Regime transônico	$0,8 < M_{\infty} < 1,2$
Regime supersônico	$1,2 < M_{\infty} < 5,0$
Regime hipersônico	$5,0 < M_{\infty}$

onde M_{∞} é o número de Mach da corrente livre, que fornece a razão entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no meio.

Os escoamentos incompressíveis podem ser caracterizados por não haver variação da massa específica. Estes escoamentos são de grande importância, por serem de grande frequência na natureza. Do ponto de vista numérico o método dos volumes finitos tem sido intensivamente empregado na previsão destes escoamentos.

Os escoamentos supersônicos e hipersônicos são escoamentos compressíveis a alta velocidade onde ocorrem efeitos de fortes choques e expansões [4] [5] [6]. Estes escoamentos são de interesse para a entrada de veículos na atmosfera, e aviões de alta velocidade e foguetes. A presença de choques refletidos constitui-se num fator importante para este tipo de escoamento, dificultando a solução numérica com precisão.

Os escoamentos transônicos são escoamentos compressíveis de grande interesse pois se aplicam a aerodinâmica de aviões comerciais. Para escoamentos transônicos ocorre um comportamento crítico, uma vez que é observada uma variação rápida nos coeficientes aerodinâmicos [7] [8]. O escoamento é complexo devido

à presença de choques e pode ser caracterizado por fortes interações viscosas na camada limite e interações entre choque e camada limite. Complicações adicionais ocorrem para escoamentos práticos devido à presença de regiões de separação, particularmente para ângulos de ataque de moderados a grandes. Além disso, devido à presença de instabilidades no escoamento, ocorrem variações na posição do choque, tornando a sua captação fortemente dependente do tempo [8].

Os trabalhos publicados até meados da década de setenta mostram que os problemas aerodinâmicos eram tratados de forma simplificada. Muitos destes trabalhos empregavam e ainda empregam a teoria para escoamentos potenciais com a finalidade de simplificar a análise e reduzir os custos de projeto. No entanto, as perturbações são geralmente grandes o suficiente quando da análise de problemas transônicos, não permitindo, assim, o emprego de uma formulação potencial. Então, são usadas as equações de Euler. O emprego das equações de Euler exige malhas menos refinadas que as necessárias para as equações completas do problema aerodinâmico, ou equações de Navier-Stokes, fornecendo bons resultados para o coeficiente de pressão [9] [10].

Outros trabalhos [11] [12], com propósito de considerar os termos viscosos, separavam o problema em regiões, uma considerada viscosa e conhecida como camada limite, e outra não viscosa, usando métodos para fazer o acoplamento entre as regiões. Estas simplificações são necessárias pois as equações de Navier-Stokes, na sua forma completa, são altamente não lineares e exigem a utilização de malhas muito refinadas nas proximidades do corpo para captar os gradientes de interesse.

Os experimentos aerodinâmicos e aeroelásticos sempre

foram, continuam sendo e serão importantes no projeto de aeronaves. O desenvolvimento dos modelos numéricos e dos computadores apontam, no entanto, na direção da substituição de parte do trabalho experimental pelos testes computacionais, ficando como atribuição importante do trabalho de laboratório o estudo de novos fenômenos e a experimentação de casos bem escolhidos que possam ser usados também para serem comparados com métodos numéricos.

O projeto aerodinâmico de aviões, por exemplo, envolve o comportamento em vôo desde a decolagem até o pouso, passando por diversos regimes de escoamento. A aeroelasticidade tem um papel importante no projeto e no desenvolvimento de aviões modernos, que tendem a ser mais leves e flexíveis [13]. Diversos fenômenos que podem limitar o desempenho de um avião ocorrem devido à interação do escoamento com as componentes flexíveis do avião. Fenômenos aeroelásticos indesejáveis também ocorrem devido ao movimento do choque no caso de problemas transônicos.

Os experimentos aeroelásticos são de uma ordem de grandeza mais caros quando comparados com os experimentos aerodinâmicos [13]. Portanto, o custo total de desenvolvimento de um avião pode ser reduzido consideravelmente através de uma análise aeroelástica teórica confiável. Para resolver problemas aeroelásticos é necessário resolver as equações do problema aerodinâmico e estrutural simultaneamente [14].

Neste sentido é importante estudar os modos estruturais para ver quais são os mais importantes numa análise aeroelástica. Embora a resposta da estrutura de um corpo oscilante seja determinada pela combinação de um número infinito de modos [13], geralmente apenas parte deles são necessários quando se quer estudar

o comportamento de uma estrutura como um todo. A participação de cada modo não depende somente da geometria e das propriedades físicas, mas, também, das condições de voo.

Devido ao surgimento de computadores cada vez mais velozes nos últimos anos, passou-se a resolver as equações governantes do problema aerodinâmico de forma mais completa [15] [16]. O crescimento das facilidades computacionais tem proporcionado o estudo de problemas transientes com regiões de descontinuidade com mais facilidade, problemas para os quais a obtenção da malha torna-se mais crítica no processo de obtenção da solução.

O choque formado sobre uma asa submetida a um escoamento transônico, como mostrado na Fig. 1.1, depende do ângulo de ataque e do movimento da asa. Neste caso, a precisão temporal é de grande importância [17] [18] [19] [20].

Caso existam choques, além da dificuldade de sua captação, poderão surgir problemas de instabilidade numérica em regiões onde estes surgem. Estas instabilidades são dependentes da qualidade da malha, da função de interpolação [21] e do passo de tempo empregado para obter a solução. Malhas mais refinadas na região do choque facilitam a sua captação, mas isto eleva o custo computacional.

A análise numérica de um voo completo não é uma tarefa fácil, porém necessário para minimizar o custo de projetos aerodinâmicos. Sendo assim, surgem estratégias para aproximar as equações governantes do problema. Nestas estratégias as equações diferenciais são transformadas em equações algébricas através de processos de integração aproximada para cada volume de controle, caracterizando os métodos de diferenças finitas [21], volumes finitos [22] [23] [24] [25], elementos finitos [26] [27] e elementos

de contorno [28].

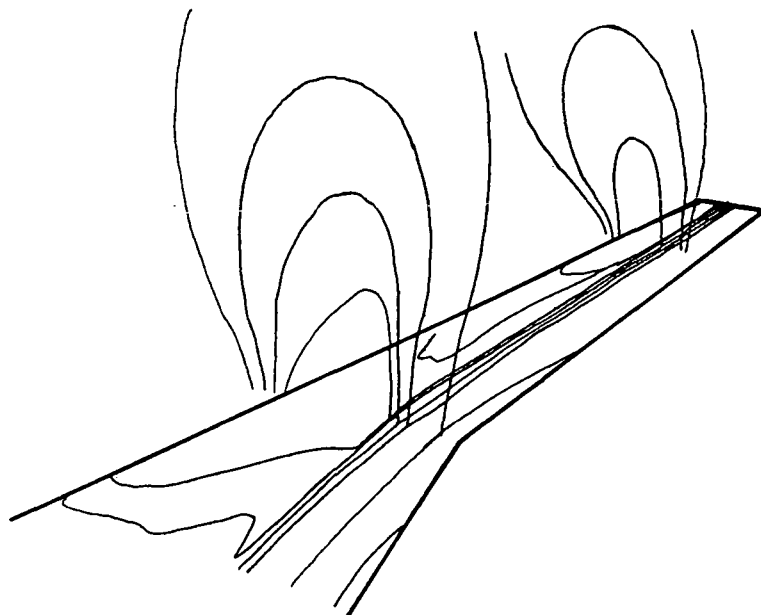


Fig. 1.1 Presença de choques numa asa submetida a um escoamento transônico

Os termos não lineares das equações e o valor da propriedade nas faces do volume de controle, quando necessários, são aproximados de acordo com o método aplicado, obtendo-se os sistemas de equações a serem resolvidos. Os métodos normalmente empregados para solução de problemas aerodinâmicos são o de diferenças finitas e volumes finitos. Para o problema estrutural usa-se geralmente o método de elementos finitos.

No estudo de escoamentos a alta velocidade lineariza-se as equações diferenciais através de expansões em séries de Taylor, comum aos métodos de diferenças finitas [21] e alguns métodos de volumes finitos [24] [25]. Neste caso há a necessidade de introduzir dissipação artificial a qual consiste de termos de terceira ou quarta ordem, para garantir as características de estabilidade do

método [24] [25]. A formulação empregada é a formulação compressível, onde a equação de conservação da massa é usada para o cálculo da massa específica e a energia total é preferida na equação da energia. A principal limitação deste procedimento é a solução de escoamentos a baixa velocidade.

No estudo de problemas a baixa velocidade, as equações governantes são normalmente integradas aproximadamente sobre os volumes de controle elementares e a avaliação do valor das variáveis dependentes e as suas derivadas nas faces do volume de controle são baseados nos aspectos físicos do problema em estudo [29]. Este procedimento caracteriza a formulação incompressível, cujas soluções são isentas de oscilações espúrias quando do emprego de funções de interpolação híbridas ou "upwind" de primeira ordem [22].

Embora este procedimento tenha surgido para a solução de escoamentos a baixa velocidade, dependendo da forma de linearização da equação de conservação da massa, ele pode ser empregado na solução de escoamentos a alta velocidade ou escoamentos contendo regiões mistas [30] [31] [32] [33], caracterizando a metodologia para escoamentos a qualquer velocidade. A principal limitação deste procedimento é a função de interpolação utilizada que, normalmente, não é de segunda ordem no espaço e dificulta a solução de escoamentos invíscidos a baixa velocidade [34] e escoamentos transônicos sobre corpos aerodinâmicos [35].

Na metodologia para escoamentos a qualquer velocidade a tarefa consiste em encontrar alguma forma para linearizar a equação de conservação da massa, levando-se em consideração variações tanto de massa específica como de velocidades [30] [31]. Como as componentes do vetor velocidade e a temperatura possuem a sua

equação evolutiva, escolhe-se a equação de conservação da massa para determinar a pressão.

Outra maneira de resolver escoamentos a baixa velocidade partiu da observação das diferentes formas que a equação da energia assume para as formulações compressível e incompressível [36] [37]. Verifica-se que a forma da temperatura é preferida na equação da energia para resolver escoamentos a baixa velocidade. Este procedimento pode ser aplicado com facilidade num código computacional preparado para resolver escoamentos compressíveis que contenham técnicas para acelerar a convergência e que forneçam soluções de segunda ordem no tempo e no espaço.

Como não é aconselhável resolver as equações governantes dos problemas aerodinâmicos na sua forma completa diretamente, devido ao tamanho do sistema linear que se origina, quando estas equações são aproximadas numericamente, este sistema de equações é normalmente resolvido de forma segregada.

Os métodos de solução normalmente empregados para a solução de problemas aerodinâmicos em volumes finitos são o TDMA ("Tridiagonal Matrix Algorithm" [22]), MSI ("Modified Strongly Implicit Procedure" [38] [39]), Runge-Kutta [24] [40] ou LU-SSOR [41]. Dentre estes métodos, prefere-se normalmente o TDMA e o MSI para escoamentos a baixa velocidade. Os outros dois são normalmente usados para escoamentos a alta velocidade.

Os métodos de elementos finitos [26] [27] e elementos de contorno [28] são métodos comumente usados para a solução de problemas estruturais, mas inúmeras aplicações, principalmente do primeiro, podem ser vistas no estudo de problemas aerodinâmicos [42] [43] [44] [45]. A região a ser analisada poderá possuir formas,

cargas e condições de contorno arbitrárias permitindo a discretização de domínios com facilidade. Afim de conservar estas características de versatilidade, a aplicação dos princípios de conservação tem sido feita desta forma no método de elementos finitos baseado no volume de controle [46] [47] [48].

Os métodos de solução para problemas dinâmicos estruturais são os de integração direta como o de Houbolt e de Newmark [26] [27] e o de superposição modal. Quando da solução de estruturas simples com um elemento de viga, por exemplo, o custo de uma integração direta ou de uma análise modal é semelhante.

É óbvia a necessidade de métodos numéricos eficientes para resolver os problemas aerodinâmicos. Muitos códigos computacionais ainda em uso apresentam baixa taxa de convergência aumentando o custo computacional. Conseqüentemente, existem atualmente muitos trabalhos que visam aumentar a eficiência dos códigos computacionais.

As técnicas para aceleração da convergência convencional são as do passo de tempo local, média dos resíduos e "multigrid". O passo de tempo local permite reduzir em aproximadamente uma ordem de grandeza o tempo computacional necessário para obter a solução em regime permanente [40]. Média dos resíduos é empregada para aumentar o número de Courant de um esquema explícito [40]. Este procedimento consiste na substituição dos resíduos por uma média dos resíduos vizinhos. A idéia da técnica "multigrid" é o emprego de uma seqüência de malhas não refinadas para amortecer as perturbações do erro da solução na malha refinada [49] [50] [51] [52] ajudando a diminuir o esforço computacional que, para problemas transônicos, pode chegar a 90%.

Na solução de problemas aeroelásticos o problema aerodinâmico geralmente tem sido resolvido usando diferenças finitas [14] [17] [18] [19] [53] ou elementos finitos, e a parte estrutural com elementos finitos. Na solução de problemas aeroelásticos com elementos finitos a formulação ALE ("Arbitrary Lagrangian-Eulerian"[54] [55] [56] [57]) tem sido empregada. Nesta formulação os pontos da malha podem mover-se com o fluido, permanecerem fixos, ou movem-se de forma especificada. Nesta formulação [57] a malha computacional é tratada como um sistema de referência que pode estar se movendo a uma velocidade arbitrária.

O presente trabalho tem por objetivo [35] a obtenção de um método para solução de problemas aerodinâmicos e a sua extensão para a solução de alguns problemas aeroelásticos. Para a parte aerodinâmica o procedimento emprega o método dos volumes finitos baseado no processo de integração temporal de Runge-Kutta e aproximação espacial de segunda ordem, com a introdução de dissipação artificial. Isto permite informar adequadamente a solução aerodinâmica, que é necessária para um procedimento de solução aeroelástico. Apresenta-se ainda uma formulação para escoamentos a qualquer velocidade baseada no método incompressível [22] [30] com a finalidade de comparação entre os métodos.

A solução da parte estrutural baseia-se no método dos elementos finitos utilizando um elemento de viga. Escolheu-se o elemento de viga baseado na teoria de Timoshenko por ser possível a sua aplicação tanto para vigas longas como para vigas relativamente curtas. Simplificações desta viga podem ser usadas para problemas de interesse. O referencial de descrição do problema fluido-sólido é o Lagrangiano, uma vez que a estrutura sofre

deslocamentos infinitesimais.

Um outro objetivo deste trabalho é mostrar que existe mais de uma possibilidade de solução de escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis para valores de Mach variando entre 0,005 e 1,5, usando métodos baseados em procedimentos de pré-condicionamento.

As técnicas empregadas para acelerar a convergência neste caso como passos de tempo local, média dos resíduos e "multigrid" (multigrade) são usadas para resolver escoamentos quase incompressíveis ($Mach = 0,005$). No entanto, nenhuma destas técnicas será empregada para problemas transientes neste trabalho.

A ferramenta resultante deste estudo visa contribuir para a solução dos complexos problemas aerodinâmicos e aeroelásticos encontrados na engenharia.

Descreve-se a seguir o escopo do trabalho. O Capítulo 2 apresenta as equações governantes para problemas aerodinâmicos e estruturais. A aproximação destas equações é descrita no Cap. 3. No Cap. 4 demonstra-se os principais tipos de condições de contorno utilizadas, as condições iniciais e a geração da malha computacional. No Cap. 5 é descrita a metodologia geral de solução das equações governantes. No capítulo que se segue são introduzidas as principais técnicas para aceleração da convergência para obter soluções em regime permanente como passo de tempo local, média dos resíduos e "multigrid".

No Cap. 7 é mostrada uma seleção representativa de resultados aerodinâmicos, estruturais e aeroelásticos. Finalmente, são apresentadas as conclusões, as referências bibliográficas e um apêndice que descreve alguns fundamentos da aeroelasticidade clássica.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

Enquanto que as equações governantes dos problemas aerodinâmicos são as equações de Euler ou de Navier-Stokes, as equações governantes para problemas estruturais são as equações do movimento ou do equilíbrio dinâmico. Estas equações são apresentadas a seguir.

2.1 Equações governantes para problemas aerodinâmicos

As equações governantes dos problemas aerodinâmicos são as equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia. Estas equações, para escoamentos não viscosos, são as equações de Euler, e podem ser escritas em coordenadas cartesianas como:

Conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Conservação da quantidade de movimento (direção x)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2 \text{ a})$$

Conservação da quantidade de movimento (direção y)

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2 \text{ b})$$

Conservação da quantidade de movimento (direção z)

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.2 \text{ c})$$

Conservação da energia

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u H)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v H)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w H)}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

A energia total E e a entalpia total H são dadas por

$$E = e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

$$H = E + \frac{p}{\rho}$$

A relação de estado para um gás ideal é escrita na forma

[58]

$$p = \rho R T = (\gamma - 1) \rho \left[E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] \quad (2.4)$$

onde R é a constante dos gases e γ é a relação entre os calores específicos. As Eqs. (2.1) - (2.3) também podem ser escritas na forma integral, conforme [58]

$$\int_V \frac{d\vec{w}}{dt} dV + \int_S [\vec{F} \cdot \vec{n}] dS = 0 \quad (2.5)$$

onde

$$\vec{w} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{Bmatrix} \rho \vec{q} \\ \rho u \vec{q} + p \vec{i} \\ \rho v \vec{q} + p \vec{j} \\ \rho w \vec{q} + p \vec{k} \\ \rho H \vec{q} \end{Bmatrix}$$

O vetor normal \vec{n} e o vetor velocidades \vec{q} são escritos como

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

$$\vec{q} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

A forma apresentada na Eq. (2.5) é preferida com a formulação compressível. Quando do emprego da formulação incompressível ou da formulação para escoamentos a qualquer velocidade estas equações são escritas na forma genérica [22]

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} = -p\phi \quad (2.6)$$

onde ϕ é (u, v, w) para as equações de conservação da quantidade de movimento, 1 para a equação de conservação da massa e T para a equação de conservação da energia. O termo fonte $p\phi$ é nulo para a equação de conservação da massa,

$$-\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z},$$

para as equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x, y e z, respectivamente, e

$$\frac{1}{C_p} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{q}) - p (\nabla \cdot \vec{q}) \right]$$

para a equação de conservação da energia.

A forma incompressível destas equações é obtida fazendo-se a massa específica constante, e esta simplificação é geralmente utilizada para valores de Mach da corrente livre inferiores a 0,3.

2.2 Equações governantes para problemas estruturais

As equações governantes dos problemas estruturais são as equações do movimento ou do equilíbrio dinâmico. Para obtenção das equações do movimento utiliza-se o princípio de Hamilton [26] [27]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\tau - (\pi_p + W)] dt = 0 \quad (2.7)$$

onde τ representa a energia cinética, π_p a energia potencial total e W o trabalho realizado pelas forças externas. A energia cinética é dada por

$$\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} r [\dot{q}_i]^2 d\Omega \quad (2.8)$$

onde r é a massa específica do sólido.

A energia potencial total pode ser escrita como

$$\pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} q_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma} t_i q_i d\Gamma \quad (2.9)$$

onde Ω representa o domínio do corpo e Γ o contorno deste domínio, conforme mostrado na Fig. 2.1.

Substituindo-se as Eq. (2.8) e (2.9) na Eq. (2.7), obtém-se as equações governantes do problema dinâmico estrutural. Estas equações são aproximadas em elementos finitos usando funções de

interpolação lineares, quadráticas, cúbicas, etc, dependendo do elemento escolhido. Desta forma obtém-se a equação do movimento na sua forma discretizada, ou seja,

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (2.10)$$

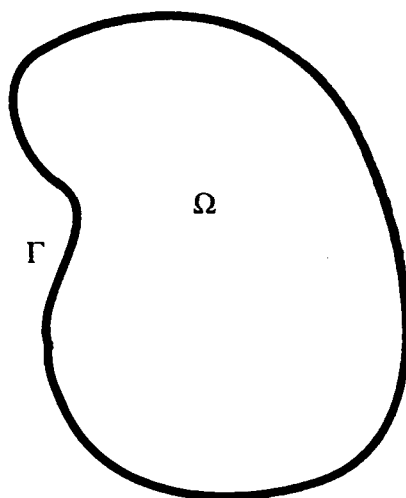


Fig. 2.1 Domínio de um corpo qualquer

onde $[M]$ representa a matriz massa, $[C]$ a matriz de amortecimento, $[K]$ a matriz de rigidez, $\{q\}$ os graus de liberdade e $\{F\}$ o carregamento (excitação).

Quando o amortecimento estrutural não é considerado, a Eq. (2.10) resulta em

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (2.11)$$

3. APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

3.1 Introdução

Os métodos de solução das equações governantes do problema aerodinâmico são voltados para escoamentos compressíveis e incompressíveis. Considere um escoamento para o qual devem ser resolvidas as equações da conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia. As incógnitas são pressão, temperatura (ou energia total), massa específica e as componentes do vetor velocidade. Se for empregada uma metodologia segregada do processo de solução é necessário que cada incógnita tenha uma equação evolutiva para ser avançada.

Se a massa específica não varia significativamente com a pressão, o desafio é determinar um campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, origine um campo de velocidades que satisfaça a equação de conservação da massa. A equação da energia é utilizada para o cálculo da temperatura e as equações da quantidade de movimento para o cálculo das componentes do vetor velocidade. Torna-se necessário tratar o acoplamento pressão-velocidades uma vez que o sistema é resolvido segregadamente. Então, substitui-se as velocidades como uma função da pressão na equação de conservação da massa e obtém-se a equação para a pressão. Esta formulação é denominada de formulação incompressível [22] [23]. A classe de problemas mais importantes que usa esta formulação é a dos problemas de transferência de calor com escoamentos a baixa velocidade.

Se a massa específica tem variação considerável com a pressão, a equação de estado, relacionando a massa específica com a pressão e a temperatura, é a equação evolutiva para a pressão, enquanto que a equação de conservação da massa é usada para a massa específica. Esta formulação, onde todas as variáveis dependentes possuem a sua equação de evolução, é chamada de formulação compressível [21] [24] [25]. A classe de problemas mais importante que usa esta formulação é a dos escoamentos de gases a alta velocidade, onde o principal interesse é a determinação do coeficiente de pressão sobre a superfície do corpo, para o cálculo das forças de arrasto e sustentação de corpos aerodinâmicos.

Com base no exposto anteriormente, uma das diferenças entre a formulação compressível ou a incompressível é a maneira de linearização adotada na equação de conservação da massa. A idéia básica da formulação para escoamentos a qualquer velocidade [30] [31] [32] [33] é substituir as velocidades e a massa específica como função da pressão na equação de conservação da massa e determinar a pressão ou a variação da pressão (p'). Neste caso, a equação de conservação da massa se transforma numa equação para a pressão que carrega os efeitos da variação da velocidade e da massa específica. Esta formulação baseia-se na formulação incompressível.

Como a formulação compressível é mais aplicada na solução de problemas aerodinâmicos a alta velocidade e devido à possibilidade de estender esta formulação para a solução de problemas aerodinâmicos incompressíveis, através do emprego de técnicas de pré-condicionamento, esta formulação é preferida neste trabalho. Pré-condicionamento, no entendimento deste trabalho, consiste em transformar o sistema de equações governantes do

problema aerodinâmico de forma a modificar o conjunto de autovalores e autovetores resultantes da matriz Jacobiana, que tendem a valores muito diferentes (0 e c , onde c é a velocidade do som) quando o número de Mach tende a zero. Isto é desejado para continuar selecionando adequadamente o passo de tempo e a dissipação artificial para escoamentos (quase) incompressíveis, garantindo assim a estabilidade do método.

O desenvolvimento de metodologias para a solução de escoamentos compressíveis e incompressíveis com um modelo único vem recebendo grande atenção dos pesquisadores. Isto deve-se a necessidade de resolver problemas onde aparecem vários regimes de escoamento como por exemplo para bocais convergentes-divergentes.

Dando prosseguimento, descreve-se as formulações aerodinâmicas e a aproximação do problema estrutural para um elemento de viga com a nomenclatura utilizada na literatura [59] [60] [35] [24] [58] [61].

3.2 Procedimento de solução em volumes finitos baseado na formulação incompressível

3.2.1 Transformação de coordenadas

A Eq. (2.6) é transformada para o sistema generalizado de coordenadas para conferir maior flexibilidade e generalidade do modelo numérico. A transformação é feita do plano físico (x, y, z, t) para o plano transformado (ξ, η, γ, t) . A equação transformada obtida

pode ser escrita como [35]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho W \phi) = - \frac{D \phi}{J} = -\hat{p} \phi \quad (3.1)$$

As componentes contravariantes do vetor velocidade U , V e W levam a informação da resultante entre o escoamento e a velocidade da malha. Estas são escritas, como por exemplo [35] (veja a Fig. 3.1)

$$U = \frac{1}{J} [(u-x_\tau) \cdot \xi_x + (v-y_\tau) \cdot \xi_y + (w-z_\tau) \cdot \xi_z] \quad (3.2)$$

e de forma semelhante para V e W . Na Eq. (3.2) u , v e w são as componentes cartesianas do vetor velocidade e x_τ , y_τ e z_τ são as velocidades da malha, que são nulas para malhas fixas.

O Jacobiano da transformação é escrito como

$$J = \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z & \gamma_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\xi_x = J(y_\eta z_\gamma - z_\eta y_\gamma)$$

$$\xi_y = J(z_\eta x_\gamma - x_\eta z_\gamma)$$

$$\xi_z = J(x_\eta y_\gamma - y_\eta x_\gamma)$$

$$\xi_t = - (x_\tau \xi_x + y_\tau \xi_y + z_\tau \xi_z)$$

e de forma semelhante para as outras componentes. Para mais detalhes sobre a transformação de coordenadas veja [35].

3.2.2 Discretização das equações governantes do problema aerodinâmico

Integra-se a Eq. (3.1) no volume e no tempo

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_f^d \int_S^n \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\rho W \phi) \right] d\xi d\eta d\gamma dt =$$

$$-\int_t^{t+\Delta t} \int_f^d \int_S^n \int_w^e \hat{p} \phi d\xi d\eta d\gamma dt$$

O arranjo co-localizado com variáveis $\{u, v, w\}$ armazenadas nos centros do volume de controle é empregado, conforme mostra a Fig. 3.1. Nesta figura U, V e W são as componentes contravariantes do vetor velocidade.

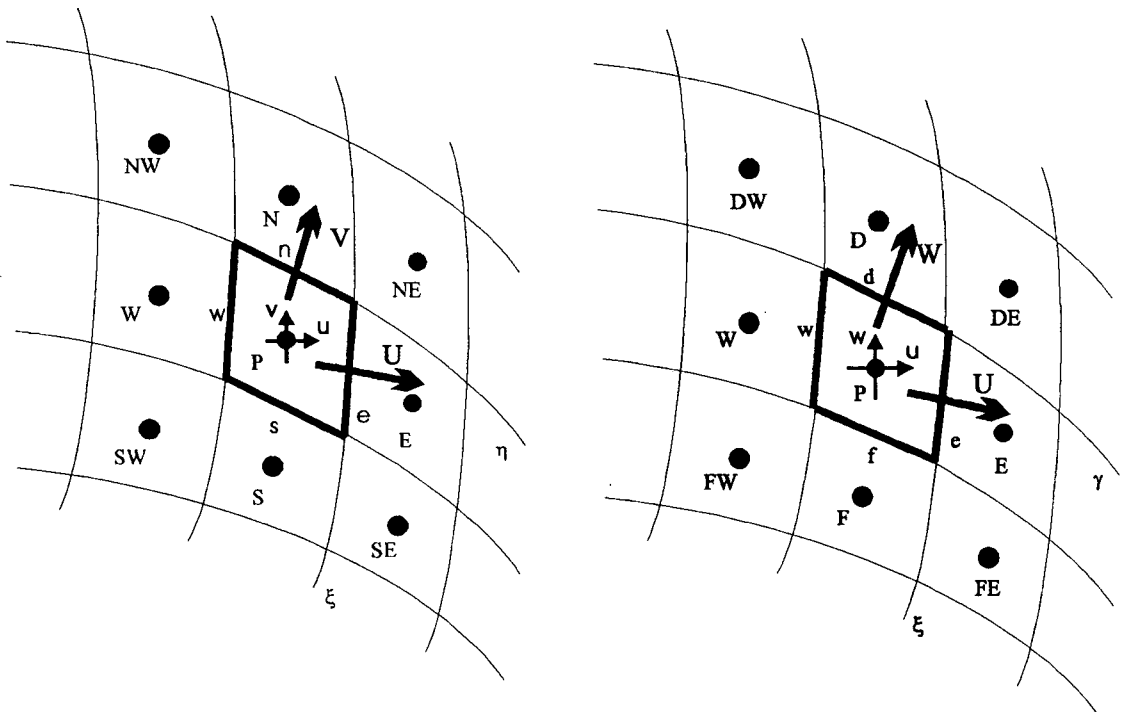


Fig. 3.1 Arranjo co-localizado (armazenamento nos centros do volume de controle - planos $\xi x \eta$ e $\xi x \gamma$)

Obtém-se

$$\left[\frac{\rho_P \phi_P}{J_P} - \frac{\rho_P^o \phi_P^o}{J_P^o} \right] \frac{\Delta V}{\Delta t} + [\rho U \phi|_e - \rho U \phi|_w] \Delta \eta \Delta \gamma + [\rho V \phi|_n - \rho V \phi|_s] \Delta \xi \Delta \gamma +$$

$$[\rho W \phi|_d - \rho W \phi|_f] \Delta \xi \Delta \eta = -L[\hat{p}^\phi] \Delta V$$

Esta equação também pode ser colocada na forma

$$\frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + M_e \phi_e - M_w \phi_w + M_n \phi_n - M_s \phi_s + M_d \phi_d - M_f \phi_f = -L[\hat{p}^\phi] \Delta V \quad (3.3)$$

onde {e, w, n, s, d, f} representam as faces do volume de controle, conforme mostrado na Fig. 3.1. Os coeficientes são escritos como

$$M_P = \frac{\rho_P \Delta V}{J_P}$$

$$M_P^o = \frac{\rho_P^o \Delta V}{J_P}$$

$$M_e = (\rho U)_e \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$M_w = (\rho U)_w \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$M_n = (\rho V)_n \Delta \xi \Delta \gamma$$

$$M_s = (\rho V)_s \Delta \xi \Delta \gamma$$

$$M_d = (\rho W)_d \Delta \xi \Delta \eta$$

$$M_f = (\rho W)_f \Delta \xi \Delta \eta$$

O termo $L[p^\phi]$ é a aproximação de p^ϕ , e o superescrito "o" indica que as variáveis são avaliadas no instante t , enquanto que as outras variáveis são avaliadas no instante $(t + \Delta t)$

caracterizando uma formulação implícita.

Os valores de ϕ nas faces do volume de controle podem ser obtidos através do esquema "WUDS" [29], como por exemplo para a face leste do volume de controle

$$\phi_e = (0,5 + \alpha_e)\phi_P + (0,5 - \alpha_e)\phi_E \quad (3.4)$$

Nesta expressão observa-se que o primeiro termo contém a informação da propriedade do ponto imediatamente anterior a face e o segundo termo para o ponto imediatamente posterior a face do volume de controle, como mostrado para um plano $(\xi x \eta)$ na Fig. 3.1.

Como estamos trabalhando com as equações de Euler, $\alpha_e = 0,5$ ou $-0,5$ na função de interpolação da Eq. (3.4), dependendo do sinal do vetor velocidade. Então, a captação de choques torna-se difícil pois uma função do tipo "upwind" pura tende a amortecer os gradientes, proporcionando o aparecimento de difusão numérica. Dentre as funções de interpolação usadas com a finalidade de melhorar a captação de regiões contendo descontinuidades podem ser mencionadas as do tipo "upwind" de ordem elevada ou esquemas do tipo "TVD" ("Total Variation Diminishing") [5]. Tais esquemas podem modificar a matriz dos coeficientes obtida de diagonal para cheia ou do tipo esparsa, tornando a solução implícita do sistema de equações mais complicada.

Procura-se uma função de interpolação simples baseada nas características do escoamento. Seguindo a função sugerida por Noll [62], obtém-se como por exemplo para a face leste do volume de controle [62] [34]

$$\phi_e = (0,5 + \alpha_e)\phi_P + (0,5 - \alpha_e)\phi_E + \alpha_e s_e \Delta x_e \quad (3.5)$$

onde $\alpha_e = 0,5$ ou $-0,5$, dependendo do sinal do vetor velocidades e

$$s_e = \text{minmod}\left[\frac{a+b}{2}, 2 \cdot \text{minmod}(a,b)\right]$$

O termo $\text{minmod}(a,b)$ é definido por

$$\text{minmod}(a,b) = \begin{cases} a & \text{se } |a| \leq |b| \text{ e } ab > 0 \\ b & \text{se } |a| > |b| \text{ e } ab > 0 \\ 0 & \text{se } ab \leq 0 \end{cases}$$

cujos coeficientes a e b são dados por

$$a = \frac{\phi_E - \phi_P}{X_E - X_P}$$

$$b = \frac{\phi_P - \phi_W}{X_P - X_W} \quad \text{se } u_e \geq 0$$

$$b = \frac{\phi_{EE} - \phi_E}{X_{EE} - X_E} \quad \text{se } u_e < 0$$

Verifica-se que a interpolação da Eq. (3.4) é corrigida pelo termo $(\alpha_s \Delta x)$ originando a Eq. (3.5). Este tipo de função de interpolação contribui para captar o coeficiente de pressão, mas não o suficiente para geometrias aerodinâmicas, como por exemplo para o NACA 0012 [34].

A substituição da Eq.(3.5) e similares na Eq. (3.3) resulta na forma discretizada usada para resolver as velocidades e a temperatura

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{NB} + b^\phi \quad (3.6)$$

onde

$$a_P = \frac{M_P}{\Delta t} + \sum a_{nb}$$

$$\sum a_{nb} = a_e + a_w + a_n + a_s + a_d + a_f$$

$$\sum a_{nb} \phi_{NB} = a_e \phi_E + a_w \phi_W + a_n \phi_N + a_s \phi_S + a_f \phi_F + a_d \phi_D$$

$$a_e = - (0,5 - \alpha_e) M_e$$

e de forma semelhante para as outros coeficientes.

O termo fonte b^ϕ pode ser escrito como

$$b^\phi = - L[\hat{p}^\phi] \Delta V + \frac{M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + [\text{termos da forma minmod}]$$

O termo fonte p^ϕ , como por exemplo na direção x,

$$p^u = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial p}{\partial \gamma} \gamma_x$$

é aproximado numericamente por

$$L[\hat{p}^u]_P = \frac{P_E - P_W}{2\Delta\xi} \xi_{x_P} + \frac{P_N - P_S}{2\Delta\eta} \eta_{x_P} + \frac{P_D - P_F}{2\Delta\gamma} \gamma_{x_P}$$

3.2.3 Aproximação das velocidades nas faces do volume de controle

O cálculo das componentes do vetor velocidade nas faces do volume de controle se constitui numa particularidade importante para o procedimento em volumes finitos baseado na formulação incompressível com o arranjo co-localizado de variáveis na malha.

Deve-se avaliar os fluxos nas faces do volume de controle para executar o balanço de massa. No entanto, as velocidades encontram-se armazenadas nos centros do volume de controle. Uma aproximação simples para as velocidades nas faces do volume de controle, como a diferença central, causa oscilações do campo de pressões e/ou o procedimento não converge para regime permanente [22]. Para resolver este problema usa-se o procedimento indicado a seguir.

Considere, por exemplo, o cálculo da componente cartesiana e contravariante do vetor velocidade na face leste do volume de controle. Inicia-se pelo cálculo da componente cartesiana. A expressão inicialmente sugerida por [63] [64] é da forma (Fig. 3.1)

$$u_e = \frac{1}{2} \left[\left(\sum \frac{a_{nb} u_{NB}}{a_p} \right)_P + \left(\sum \frac{a_{nb} u_{NB}}{a_p} \right)_E \right] - d_e^u (p'_E - p'_P) \quad (3.7)$$

onde

$$d_e^u = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta V}{\Delta x \cdot a_p} \right)_P + \left(\frac{\Delta V}{\Delta x \cdot a_p} \right)_E \right]$$

e p' é a variação de pressão.

A forma apresentada a seguir foi sugerida em [60] [65]. Considere o cálculo da componente contravariante do vetor velocidade na face leste do volume de controle. Inicia-se pelo cálculo da componente cartesiana para o ponto P, dada por

$$u_p = \frac{1}{a_p^u} \left[\sum_{nb} (a_{nb} u_{NB})_P + \frac{M_p^o u_p^o}{\Delta t} \right] + \frac{\Delta V}{a_p^u} L [\hat{p}^u]_P \quad (3.8)$$

e para o ponto E

$$u_E = \frac{1}{a_E^u} \left[\sum_{nb} (a_{nb} u_{NB})_E + \frac{M_E^o u_E^o}{\Delta t} \right] + \frac{\Delta V}{a_E^u} L[\hat{p}^u]_E \quad (3.9)$$

Determina-se a componente cartesiana do vetor velocidade na face do volume de controle adicionando-se as Eqs. (3.8) e (3.9), com exceção do termo de pressão, onde é aplicado o gradiente de pressões mais próximo ou fisicamente consistente, conforme Eq. (3.10).

$$u_e = \frac{1}{a_P^P + a_P^E} \left[\sum a_{nb} (u_{NB} + b^u)_P + \sum a_{nb} (u_{NB} + b^u)_E + \frac{M_P^o u_P^o + M_E^o u_E^o}{\Delta t} \right] - \frac{2}{a_P^P + a_P^E} L[\hat{p}^u]_e \Delta V_e \quad (3.10)$$

onde

$$L[\hat{p}^u]_e = \frac{P_E - P_P}{\Delta \xi} \xi_{x_e} + \frac{P_E + P_{NE} - P_S - P_{SE}}{4 \Delta \eta} \eta_{x_e} + \frac{P_D + P_{DE} - P_F - P_{FE}}{4 \Delta \gamma} \gamma_{x_e}$$

Então pode-se escrever a componente contravariante do vetor velocidade na face leste do volume de controle conforme [34]

$$U_e = \left\{ \frac{1}{J} [(u-x_\tau) \cdot \xi_x + (v-y_\tau) \cdot \xi_y + (w-z_\tau) \cdot \xi_z] \right\}_e$$

Através de procedimento análogo obtém-se as outras componentes contravariantes do vetor velocidade nas outras faces do volume de controle.

3.2.4 Formulação para escoamentos a qualquer velocidade e obtenção da equação para a pressão

Para obter uma formulação que seja adequada tanto para escoamentos a alta velocidade como para escoamentos a baixa velocidade faz-se necessário que tanto a massa específica como as velocidades sejam mantidas ativas no processo de linearização da equação de conservação da massa [31][32][33]. A estratégia usada nestes trabalhos é continuar usando a equação de conservação da massa para determinar a pressão, introduzindo também a variação da massa específica com a pressão nesta equação. Desta forma parte-se da equação de conservação da massa na forma discretizada obtida para $\phi = 1$ e $p^\phi = 0$ na Eq. (3.3)

$$\frac{M_P - M_P^o}{\Delta t} + M_e - M_w + M_n - M_s + M_d - M_f = 0 \quad (3.11)$$

A linearização do fluxo de massa que aparece na equação de conservação da massa é feita de forma a manter a massa específica e as velocidades ativas [31][32][33], obtendo-se, por exemplo, para a face leste do volume de controle (Fig. 3.1)

$$M_e = (\rho^*U + \rho U^* - \rho^*U^*)_e \Delta \eta \Delta \gamma \quad (3.12)$$

Para avaliar as variáveis escrevem-se as mesmas em função de uma correção sobre o valor estimado como

$$u = u^* + u'$$

$$p = p^* + p' \quad (3.13)$$

$$\rho = \rho^* + \rho'$$

onde os escalares com asterisco são valores conhecidos e obtidos com o campo de pressões estimado.

A massa específica é aproximada na face leste do volume de

controle usando a seguinte função de interpolação [33]

$$\rho_e = (0,5 + \Upsilon_e) \rho_P + (0,5 - \Upsilon_e) \rho_E \quad (3.14)$$

onde

$$\Upsilon_e = \begin{cases} 0,5 & \text{se } U_e \geq 0 \\ 0,5 & \text{se } U_e < 0 \end{cases}$$

Introduzindo-se as Eqs. (3.12) e (3.14) e as similares na Eq. (3.11), obtém-se

$$m_P^p \rho_P + \sum (m_{nb}^p \rho_{NB} + m_{nb}^U U_{NB}) = b^c \quad (3.15)$$

onde

$$m_P^p = \frac{\Delta V}{J_P \Delta t} + [(0,5 + \Upsilon_e) U_e^* - (0,5 - \Upsilon_w) U_w^*] \Delta \eta \Delta \gamma + \\ [(0,5 + \Upsilon_n) V_n^* - (0,5 - \Upsilon_s) V_s^*] \Delta \xi \Delta \gamma + [(0,5 + \Upsilon_d) W_d^* - (0,5 - \Upsilon_f) W_f^*] \Delta \xi \Delta \eta$$

$$m_e^p = (0,5 - \Upsilon_e) U_e^* \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$m_e^U = [(0,5 + \Upsilon_e) \rho_P^* + (0,5 - \Upsilon_e) \rho_E^*] \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$b^c = \frac{\rho_P^0 \Delta V}{J_P^0 \Delta t} + m_e^U U_e^* + m_w^U U_w^* + m_n^V V_n^* + m_s^V V_s^* + m_d^W W_d^* + m_f^W W_f^*$$

Os outros coeficientes são escritos de forma semelhante [66].

Para obter a equação para a pressão, as componentes do vetor velocidade e a massa específica devem ser escritas em função da pressão. Partindo-se da equação da quantidade de movimento pode-se escrever

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb} u_{NB} - L[\hat{p}^u] \Delta V + b^u \quad (3.16)$$

que, para o valor estimado, assume a forma

$$a_p^u u_p^* = \sum a_{nb} u_{NB}^* - L[\hat{p}^{u^*}] \Delta V + b^u \quad (3.17)$$

Subtraindo-se a Eq. (3.17) da Eq. (3.16), obtém-se

$$u_p = u_p^* - d_p^u L[\hat{p}^{u^*}] \Delta \xi \quad (3.18)$$

Na obtenção da Eq. (3.18) o método de acoplamento pressão-velocidade SIMPLEC [67] foi empregado. Este método, assim como o SIMPLE [22], o SIMPLER [22] e o PRIME [66], é necessário para que haja o acoplamento das equações governantes do problema aerodinâmico na forma discretizada, que são resolvidas segregadamente. As equações de Euler são acopladas e o acoplamento aqui mencionado refere-se à solução numérica das equações, já que o procedimento de cálculo não é feito de forma direta.

A escolha do método SIMPLEC baseia-se no fato do mesmo ter tido bom desempenho para escoamentos compressíveis e incompressíveis [59] [65]. Como extensão do que foi exposto, pode-se escrever a velocidade corrigida para a face leste do volume de controle como

$$u_e = u_e^* - d_e^u L[\hat{p}^{u^*}]_e \Delta \xi$$

onde

$$d_e^u = \frac{d_p + d_E}{2} \Delta \eta \Delta \gamma$$

$$d_p = \frac{1}{a_p^\phi - \sum a_{nb}^\phi}$$

A equação de estado, utilizada para o cálculo da massa específica, é escrita como

$$p = \rho RT \quad (3.19)$$

onde R é a constante dos gases. A massa específica é colocada em função de uma correção do campo de pressão pela equação

$$\rho_p = \rho_p^* + C_p^p p_p' = \rho_p^* + \frac{1}{RT_p} p_p' \quad (3.20)$$

Partindo-se da definição da velocidade contravariante, Eq. (3.2), pode-se escrever a componente da velocidade contravariante corrigida, por exemplo, para a face leste do volume de controle,

$$U_e = U_e^* - d_p^u [p_E' - p_p'] \alpha_{11}, \quad (3.21)$$

onde

$$\alpha_{11} = \frac{1}{J^2} [\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2]$$

Na Eq. (3.21) os termos

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e \quad e \quad \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_e$$

foram desconsiderados.

Substituindo-se as Eq. (3.21) e (3.20) na Eq. (3.15), e as formas semelhantes para as outras faces do volume de controle, obtém-se a equação para a pressão

$$a_P^P p_P' = \sum (a_{nb}^{P'} p_{NB}') + b^{P'} \quad (3.22)$$

onde

$$a_P^P = m_P^P C_P^P + m_e^U d_P^U \alpha_{11_e} - m_w^U d_w^U \alpha_{11_w} + m_n^V d_P^V \alpha_{22_n} - m_s^V d_s^V \alpha_{22_s} \\ + m_d^W d_P^W \alpha_{33_d} - m_f^W d_f^W \alpha_{33_f}$$

$$\sum a_{nb}^{P'} p_{NB}' = a_e^P p_E' + a_w^P p_W' + a_n^P p_N' + a_s^P p_S' + a_d^P p_D' + a_f^P p_F'$$

$$a_e^P = - m_e^P C_E^P + m_e^U d_P^U \alpha_{11_e}$$

$$b^{P'} = \frac{\rho_P^0 \Delta V}{J_P^0 \Delta t} - [m_P^P \rho_P^* + m_e^P \rho_E^* + m_w^P \rho_W^* + m_n^P \rho_N^* + m_s^P \rho_S^* + m_d^P \rho_D^* + m_f^P \rho_F^*]$$

e de forma semelhante para os outros coeficientes [35].

O procedimento de solução básico empregado é descrito a seguir:

1. Discretiza-se o domínio
2. Estimam-se as variáveis ρ , u , v , w , p , e T
3. Calculam-se os coeficientes
4. Aproximam-se os termos fonte
5. Calculam-se as velocidades u^* , v^* e w^*
6. Calculam-se as velocidades contravariantes U , V e W
7. Calcula-se a pressão
8. Corrigem-se as velocidades u^* , v^* e w^*
9. Corrigem-se as velocidades contravariantes
10. Corrige-se a massa específica
11. Calcula-se a temperatura
12. Calcula-se o novo valor da massa específica
13. Retorna-se ao ítem 3 até o estado desejado

3.3 Formulação compressível e pré-condicionamento

3.3.1 Formulação compressível voltada ao método de Runge-Kutta

Quando a variação da massa específica for considerável, as equações da conservação da quantidade de movimento são usadas para calcular as componentes do vetor velocidade, a equação de conservação da energia para calcular a energia total, a equação de conservação da massa para calcular a massa específica e a equação de estado para calcular a pressão. Esta formulação é denominada de formulação compressível. As equações governantes são escritas de acordo com o método empregado. Dentre estes métodos encontram-se o de Runge-Kutta e o de Beam & Warming [21].

Quando emprega-se o método de Runge-Kutta [24] [25] [40], o sistema de equações governantes é escrito na forma integral

$$\int_V \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} dV = - \int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS \quad (3.23)$$

Este sistema de equações pode ser escrito para cada componente do vetor \vec{W} como, por exemplo, para a equação da quantidade de movimento na direção x

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = - \frac{\int_S [\rho u (\vec{q} \cdot \vec{n}) + p (\vec{n} \cdot \vec{i})] dS}{\int_V dV}$$

Com a finalidade de discretizar estas equações, diferentes formas do arranjo co-localizado são encontradas na literatura, com

o armazenamento das variáveis no centro do volume de controle [24], nos vértices do volume de controle (Fig. 3.2) [6] [34] e nos vértices do volume de controle com armazenamento dos resíduos no centro do volume de controle ("cell-vertex" - para mais detalhes veja [52] [68]). Cada um destes esquemas possui vantagens e desvantagens. A discretização que se segue é baseada no arranjo co-localizado, com as variáveis armazenadas nos nós do volume de controle, visando facilitar a aplicação da técnica "multigrid" (multigrade).

Como a Eq. (3.23) é válida para um volume de controle arbitrário, ela também é válida para $V_{i,j,k}$, ou seja

$$\frac{d}{dt} \bar{w}_{i,j,k} = - \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_S (\bar{F} \cdot \bar{n}) dS = - \frac{1}{V_{i,j,k}} \bar{Q}_{i,j,k} \quad (3.24)$$

onde $V_{i,j,k}$ é o volume de cada célula. A aproximação dos fluxos nas faces do volume de controle é feita conforme [6]

$$\bar{Q}_{i,j,k} = \bar{Q}_{i+1/2,j,k} - \bar{Q}_{i-1/2,j,k} + \bar{Q}_{i,j+1/2,k} - \bar{Q}_{i,j-1/2,k} + \bar{Q}_{i,j,k+1/2} - \bar{Q}_{i,j,k-1/2}$$

onde, por exemplo, para a face leste do volume de controle,

$$\bar{Q}_{i+1/2,j,k} = \bar{F}(\bar{w}_{i+1/2,j,k}) \cdot \bar{S}_{i+1/2,j,k} \quad (3.25)$$

O vetor das métricas nas faces do volume de controle \bar{S} , conforme mostrado na Fig. 3.3, é escrito como

$$\bar{S}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{J} [\xi_x \cdot \bar{i} + \xi_y \cdot \bar{j} + \xi_z \cdot \bar{k}]_{i+1/2,j,k}$$

que também pode ser escrito como (Fig. 3.4)

$$\bar{S}_{i+1/2,j,k} = [s_{ix} \cdot \bar{i} + s_{iy} \cdot \bar{j} + s_{iz} \cdot \bar{k}]_{i+1/2,j,k}$$

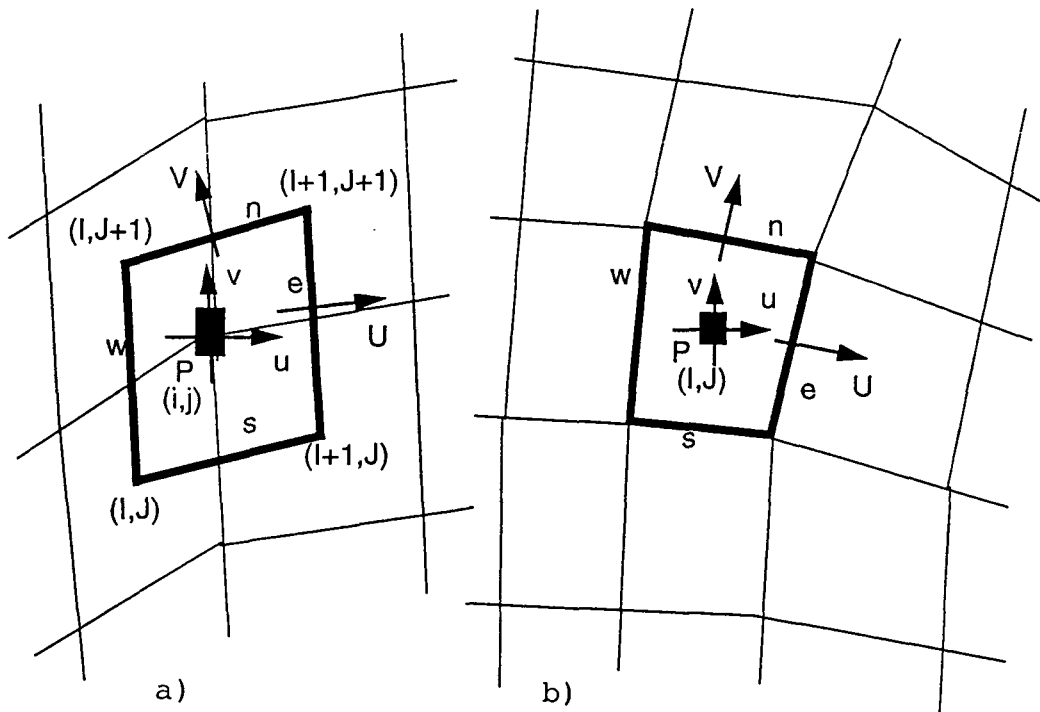


Fig. 3.2 Arranjo co-localizado das variáveis na malha
 a) variáveis armazenadas nos nós (vértices)
 b) variáveis armazenadas nos centros

onde s_{ix} , s_{iy} e s_{iz} são as componentes do vetor \vec{S} nas direções x , y e z , respectivamente. Portanto,

$$s_{ix} = \frac{\xi_{x}}{J}$$

$$s_{iy} = \frac{\xi_{y}}{J}$$

$$s_{iz} = \frac{\xi_z}{J}$$

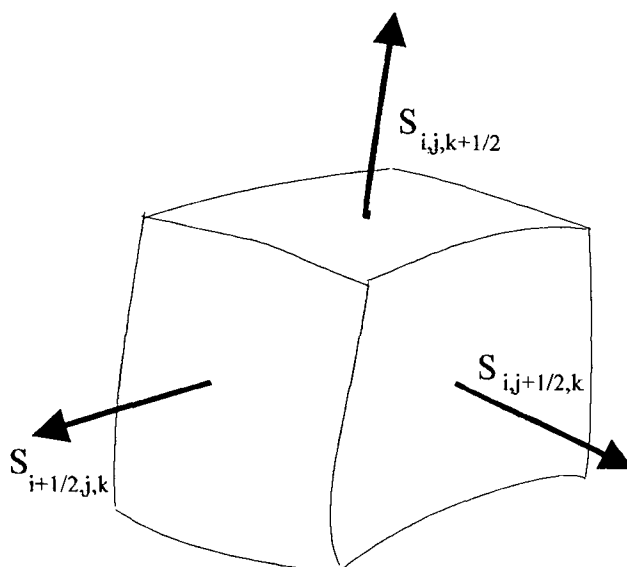


Fig. 3.3 Vetor das métricas nas faces do volume de controle

O termo $\bar{Q}_{i+1/2,j,k}$ pode ser escrito para a equação de conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia conforme segue:

Conservação da massa

$$\bar{Q}_{i+1/2,j,k} = (\rho \bar{q})_{i+1/2,j,k} \cdot \bar{S}_{i+1/2,j,k} = (\rho U)_{i+1/2,j,k}$$

onde

$$\vec{Q}_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{S}_{i+1/2,j,k} = [u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}] \cdot [s_{ix}\vec{i} + s_{iy}\vec{j} + s_{iz}\vec{k}] = U_{i+1/2,j,k}$$

Conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{i+1/2,j,k} &= (\rho u \vec{q} + p \vec{i})_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{S}_{i+1/2,j,k} \\ &= (\rho U u)_{i+1/2,j,k} + (p s_{ix})_{i+1/2,j,k} \end{aligned}$$

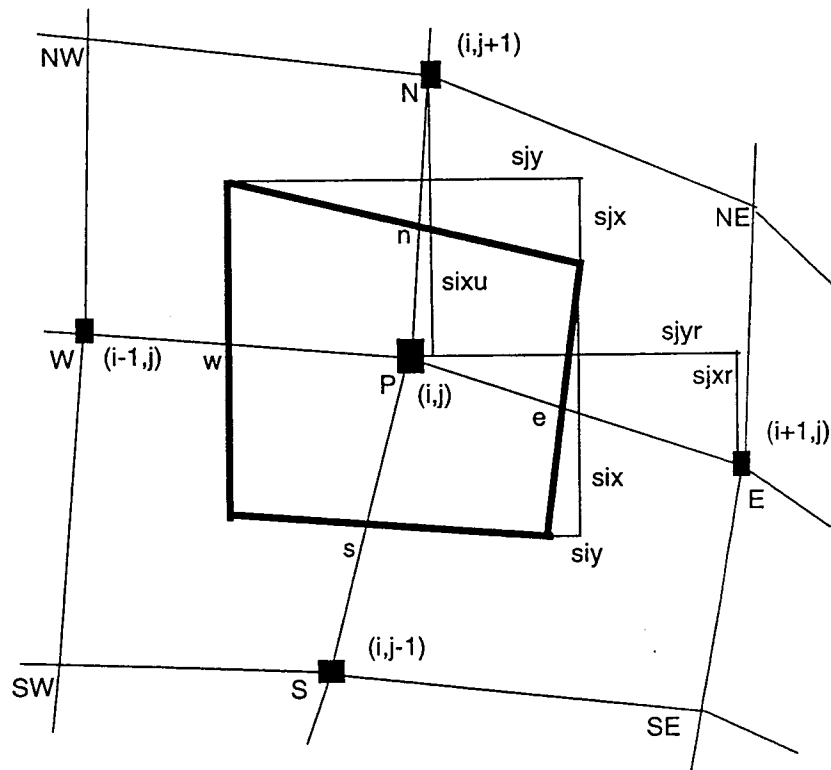


Fig. 3.4 Métricas (co-localizado com armazenamento nos nós)

Conservação da energia

$$\vec{Q}_{i+1/2,j,k} = (\rho H \vec{q})_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{S}_{i+1/2,j,k} = (\rho U H)_{i+1/2,j,k}$$

Os fluxos nas outras faces do volume de controle são escritos de forma semelhante.

A aproximação dos fluxos nas faces do volume de controle pode ser feita usando outros esquemas além de diferença central, como o "upwind", o "AUSM" e o esquema "TVD" dentre outros de primeira, de segunda ou de ordem superior, como podem ser vistos em [69] [70].

3.3.2 Dissipação artificial

A discretização em volumes finitos baseada em diferenças centrais não é dissipativa. Isto quer dizer que as freqüências de alta ordem do erro na solução não são amortecidas [40]. Caso termos de dissipação artificial não sejam introduzidos, o procedimento de cálculo não converge para a solução correta. Os termos dissipativos $\bar{D}_{i,j,k}$ são introduzidos através de fluxos dissipativos que preservam a forma conservativa [24]

$$\frac{d}{dt} \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{V_{i,j,k}} [\bar{Q}_{i,j,k} - \bar{D}_{i,j,k}] = 0 \quad (3.26)$$

O vetor dissipação é uma combinação de diferenças de ordem superior que não deve alterar a ordem de aproximação da solução, por ser de ordem superior (terceira ou quarta ordem). Geralmente é descrito como

$$\bar{D}_{i,j,k} = d_{i+1/2,j,k} - d_{i-1/2,j,k} + d_{i,j+1/2,k} - d_{i,j-1/2,k} + d_{i,j,k+1/2} - d_{i,j,k-1/2}$$

cujos coeficientes de dissipação são dados por, como por exemplo

$$d_{i+1/2,j,k} = \alpha_{i+1/2,j,k} [\epsilon_{i+1/2,j,k}^{(2)} \cdot \delta_x \cdot \vec{W}_{i,j,k} - \epsilon_{i+1/2,j,k}^{(4)} \cdot \delta_{xxx} \cdot \vec{W}_{i-1,j,k}]$$

onde α é um fator de escala que será descrito posteriormente.

Os operadores diferenciais de primeira e terceira ordem são descritos como

$$\delta_x \vec{W}_{i,j,k} = \vec{W}_{i+1,j,k} - \vec{W}_{i,j,k}$$

$$\delta_{xxx} \vec{W}_{i,j,k} = \vec{W}_{i+2,j,k} - 3\vec{W}_{i+1,j,k} + 3\vec{W}_{i,j,k} - \vec{W}_{i-1,j,k}$$

Os coeficientes $\epsilon^{(2)}$ e $\epsilon^{(4)}$ são adaptados aos gradientes de pressão locais. Eles podem ser escritos, como por exemplo para a face leste do volume de controle, como

$$\epsilon_{i+1/2,j,k}^{(2)} = K^{(2)} \max(v_{i+2,j,k}, v_{i+1,j,k}, v_{i,j,k}, v_{i-1,j,k})$$

$$\epsilon_{i+1/2,j,k}^{(4)} = \max(0, k^{(4)} - \epsilon_{i+1/2,j,k}^{(2)})$$

e

$$v_{i,j,k} = \left| \frac{p_{i+1,j,k} - 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}}{p_{i+1,j,k} + 2p_{i,j,k} + p_{i-1,j,k}} \right|$$

é o sensor de variação de pressão de segunda ordem. Valores típicos dos coeficientes $k^{(2)}$ e $k^{(4)}$ são [40]

$$0,5 \leq k^{(2)} \leq 0,6$$

$$\frac{1}{256} \leq k^{(4)} \leq \frac{1}{48}$$

O coeficiente $\epsilon^{(2)}$ é proporcional a segunda variação de pressão. O fluxo dissipativo $d_{i+1/2,j,k}$ é de terceira ordem em

regiões suaves. Mas, em regiões de grande variação de pressão, este operador é de primeira ordem.

A dissipação em cada direção coordenada é selecionada usando o raio espectral (maior autovalor) da matriz Jacobiana. Este é usado para escalar o passo de tempo e a dissipação artificial e é dado por [6], para as direções coordenadas $\{i,j,k\}$,

$$\lambda^{i,j,k} = \bar{q} \cdot \bar{S}^{i,j,k} + c |\bar{S}^{i,j,k}| \quad (3.27)$$

que pode ser escrito para a direção i em coordenadas cartesianas como

$$\lambda^i = u + c$$

ou para a direção i em coordenadas generalizadas como

$$\lambda^i = U + c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}$$

onde c é a velocidade do som local.

Como isto introduz excessiva dissipação artificial especialmente para células com grandes relações de dimensões, como as que aparecem para as equações de Navier-Stokes, o fator de escala é também modificado conforme [6], para a direção i

$$\lambda_{i+1/2,j,k}^{i*} = \lambda_{i+1/2,j,k}^i \cdot \Phi_{i+1/2,j,k}^i \quad (3.28)$$

onde

$$\Phi_{i+1/2,j,k}^i = 1 + \max \left[\left(\frac{\lambda_{i+1/2,j,k}^j}{\lambda_{i+1/2,j,k}^i} \right)^w, \left(\frac{\lambda_{i+1/2,j,k}^k}{\lambda_{i+1/2,j,k}^i} \right)^w \right] \quad (3.29)$$

O fator de escala é dado por

$$\alpha_{i+1/2,j,k} = \frac{\lambda_{i,j,k}^{i*} + \lambda_{i+1,j,k}^{i*}}{2}$$

e de forma semelhante para as direções j e k . Valores típicos usados para w são

$$0,0 \leq w \leq 0,667$$

O valor $w = 0,667$ é preferido, por introduzir menos dissipação artificial para células com grandes relações de dimensão, conforme mostrado na Fig. 3.5. No entanto, valores pequenos para w podem ser usados para resolver escoamentos para $Mach = 0,01$ com perda de aproximadamente 2 a 3% na precisão do C_p .

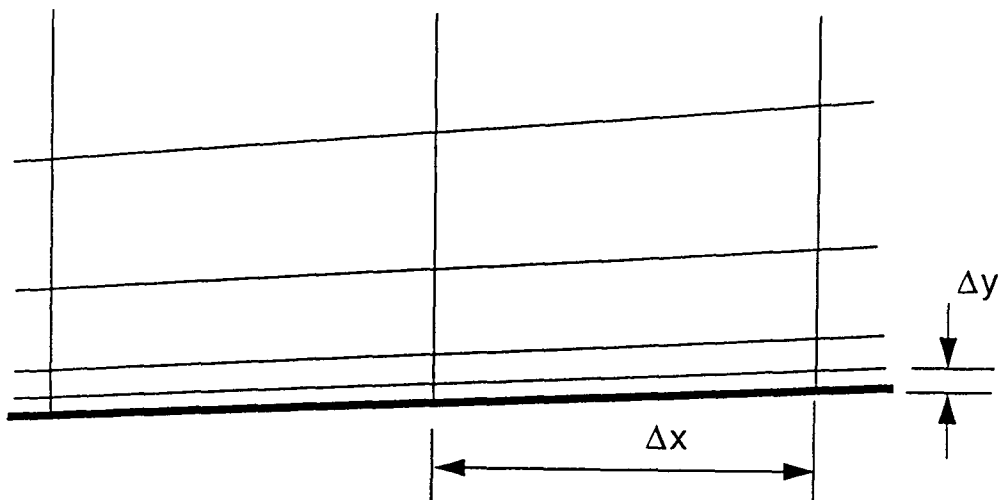


Fig. 3.5 Células com grandes relações de dimensão

3.3.3 Pré-Condicionamento

Como é de conhecimento os métodos de solução dos sistemas

de equações diferenciais, desenvolvidos para escoamentos compressíveis, convergem lentamente para escoamentos a baixa velocidade. Uma das maneiras de melhorar a taxa de convergência para estes problemas é pré-condicionar o sistema de equações. O procedimento utilizado consiste em multiplicar o vetor \vec{W} por uma matriz que, para escoamentos invíscidos, visa transformar a equação da energia na sua forma da temperatura.

Baseado na forma conservativa das equações de Euler, a seguinte matriz é empregada [36] [37]

$$\Gamma \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_i} = 0$$

onde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\rho^2 (M^2 - 1)}{2} & u(1 - M^2) & v(1 - M^2) & w(1 - M^2) & M^2 \end{bmatrix}$$

O efeito do pré-condicionamento, conforme descrito neste trabalho, pode ser entendido considerando dois pontos de vista: o físico e o matemático [34].

Sob o ponto de vista físico, compara-se a equação da energia no limite incompressível quando emprega-se a matriz de pré-condicionamento [37]

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \left[\frac{(\gamma - 1) / M^2}{(\gamma - 1)} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 0$$

com a forma natural da equação da energia escrita para a temperatura. Verifica-se que estas equações são equivalentes para

escoamentos incompressíveis quando

$$\frac{(\gamma-1)/M^2}{(\gamma-1)} = 1$$

Este termo serve então para acelerar a taxa de convergência para obter a solução para escoamentos à baixa velocidade e pode ser entendido como um termo de dissipação artificial no termo temporal da pressão p .

A análise matemática, por outro lado, indica que os autovalores das equações para o escoamento compressível ($u, u+c$) tendem a limites muito diferentes quando o número de Mach tende a zero. Os autovalores das equações pré-condicionadas

$$\left(u, \frac{u(1+M^2) + \sqrt{u^2(1-M^2)^2 + 4M^2C^2}}{2} \right)$$

são similares quando o número de Mach tende a zero, permitindo, assim, a construção de um "solver" eficiente para a solução de problemas aerodinâmicos incompressíveis, pois os autovalores são usados para determinar o passo de tempo e a dissipação artificial.

Uma análise simplificada do conceito de autovalores e autovetores para o problema aerodinâmico pode ser feita através de uma analogia com o problema estrutural. Os autovalores correspondem aos valores principais (as tensões principais para um problema de tensões) e os autovetores correspondem aos ângulos com que os valores principais formam com os eixos principais. Portanto, estes são importantes também para a obtenção de eficientes funções de interpolação para problemas aerodinâmicos [63].

O sistema de equações obtido é transformado neste trabalho para ser aplicado junto com o método de Runge-Kutta, conforme [34]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = - \Gamma^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}$$

onde

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Q^2 \frac{(M^{-2}-1)M^2}{2} & -u(1-M^{-2})M^2 & -v(1-M^{-2})M^2 & -w(1-M^{-2})M^2 & M^2 \end{bmatrix}$$

É conveniente também indicar o raio espectral (maior autovalor) que foi usado em coordenadas generalizadas como, por exemplo, para a direção i [34], tem-se

$$\lambda^i = \frac{U(1+M^2) + \sqrt{U^2(1-M^2)^2 + \beta^2 C^2 (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)}}{2}$$

O termo β^2 corresponde ao limite utilizado, pois para velocidades muito baixas o valor de λ tende a ser muito pequeno e o passo de tempo e a dissipação artificial não são apropriadamente escalados. Desta forma, escolhe-se β^2 [34], por

$$\beta^2 = \max(4M^2, \epsilon)$$

onde

$$0,1 \leq \epsilon \leq 0,6$$

A utilização da matriz de pré-condicionamento e dos autovalores adequados permite resolver problemas aerodinâmicos a baixa velocidade usando um código inicialmente preparado para resolver escoamentos a alta velocidade.

Há pelo menos duas possibilidades de emprego do pré-

condicionamento para a forma discretizada das equações governantes, conforme indicado a seguir [34]:

1. O pré-condicionamento é aplicado apenas para os termos convectivos

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_{i,j,k} + \frac{1}{V_{i,j,k}} [\Gamma^{-1} \vec{Q}_{i,j,k} - \vec{D}_{i,j,k}] = 0$$

2. O pré-condicionamento é aplicado também para a dissipação artificial

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_{i,j,k} + \frac{\Gamma^{-1}}{V_{i,j,k}} [\vec{Q}_{i,j,k} - \vec{D}_{i,j,k}] = 0$$

Neste trabalho, para problemas incompressíveis, o pré-condicionamento é aplicado para os termos convectivos na obtenção de soluções em regime permanente.

3.4 Aproximação do problema estrutural (viga)

Considere um elemento de viga típico, conforme mostrado na Fig. 3.6. Uma secção transversal do elemento, localizada a uma distância da extremidade do elemento, gira e translada durante o movimento geral do elemento [61]. A translação da linha de centro da secção é dada pelos deslocamentos que consistem de uma contribuição devido à flexão e à deformação por cisalhamento. A rotação da secção é descrita pelo ângulo de rotação

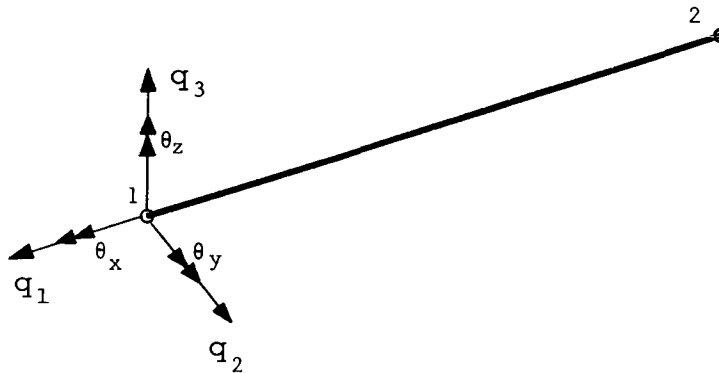


Fig. 3.6 Elemento típico para uma viga

As equações do elemento podem ser determinadas empregando o princípio de Hamilton, o qual estabelece que a trajetória real extremiza a integral do Lagrangiano L , ou seja,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (3.30)$$

Usando a teoria de Timoshenko, supõe-se que secções retas normais à linha de centro, no estado não deformado, permanecem retas depois da deformação (Fig. 3.7). Linhas tangentes à linha de centro formam um ângulo de rotação $\beta(x)$, quando se considera o cisalhamento. A inclinação total dq_3/dx da linha de centro pode ser escrita como

$$\frac{dq_3}{dx} = \psi(x) + \beta_x \quad (3.31)$$

onde ψ é a rotação dos elementos ao longo da linha de centro devido à flexão. Supõe-se que a deformação cisalhante é a mesma ao longo da secção transversal da viga. Tal procedimento visa diminuir o esforço computacional. O deslocamento pode ser considerado como uma superposição do cisalhamento e da flexão, ou seja [61]

$$q_1(x, y, z) = -z\psi(x) = -z\left[\frac{\partial q_3}{\partial x} - \beta_x\right]$$

$$q_2(x, y, z) = 0$$

$$q_3(x, y, z) = q_3(x)$$

que para um problema dinâmico é dado por

$$q_1(x, y, z, t) = -z\psi(x, t)$$

$$q_2(x, y, z, t) = 0$$

$$q_3(x, y, z, t) = q_3(x, t)$$

A energia cinética é dada por

$$\tau = \frac{1}{2} \int_V r (\dot{q}_i)^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left[rI \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + rA \left(\frac{\partial q_3}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (3.32)$$

onde r é a massa específica do material.

A energia de deformação associada à energia potencial para uma força F aplicada segundo o eixo z pode ser escrita como

$$\pi_P = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa GA}{2} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x} - \Psi \right)^2 - FQ_3 \right] dx \quad (3.33)$$

onde κ é um fator de correção para a distribuição (não uniforme) de tensão de cisalhamento transversal na secção do elemento.

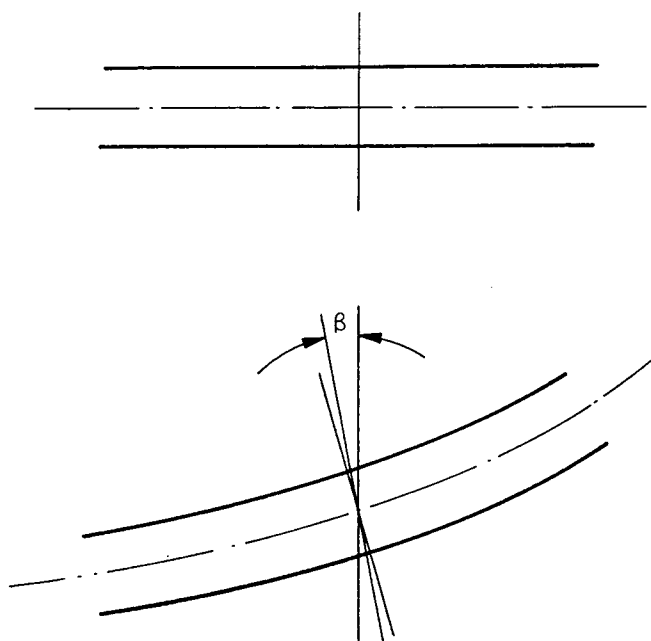


Fig 3.7 Deformação de um elemento de viga

A aplicação do princípio de Hamilton resulta em

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t,x} \left(\frac{1}{2} \left[rI \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + rA \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial t} \right)^2 \right] - \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\kappa GA}{2} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x} - \Psi \right)^2 - FQ_3 \right] \right) dx dt$$

Então as equações de Euler-Lagrange podem ser escritas

como

$$-\frac{\partial}{\partial t} (rA\dot{q}_3) + \frac{\partial}{\partial x} [\kappa GA(q_{3,x} - \psi)] + F = 0 \quad (3.34)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (rI\dot{\psi}) + \frac{\partial}{\partial x} [EI\psi_x] + \kappa GA(q_{3,x} - \psi) = 0$$

com as seguintes condições de contorno

$$q_{3,x} - \psi = 0 \quad \text{ou} \quad q_3 \text{ é especificado}$$

$$\psi_x = 0 \quad \text{ou} \quad \psi \text{ é especificado}$$

Depois de integrar por partes no tempo, para E, I, G e A constantes têm-se

$$rA\ddot{q}_3 - kGA(q_{3,xx} - \psi_x) - F = 0$$

$$rI\ddot{\psi} - EI\psi_{xx} - kGA(q_{3,x} - \psi) = 0$$

Estas equações são aproximadas em elementos finitos usando funções de interpolação lineares da forma

$$q_3 = \sum_{i=1}^N h_i q_i$$

$$\psi = \sum_{i=1}^N h_i \theta_i$$

que resulta na forma discretizada

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}$$

O elemento de viga assim obtido é válido para pequenos

deslocamentos. Para grandes deslocamentos o elemento deve ser substituído. A descrição apresentada é Lagrangiana. Esta formulação não é suficiente para grandes deslocamentos/deformações.

4. CONDIÇÕES DE CONTORNO, CONDIÇÕES INICIAIS E GERAÇÃO DA MALHA COMPUTACIONAL

O sistema de equações diferenciais obtido necessita de condições de contorno e iniciais para ser resolvido. Freqüentemente existem as seguintes possibilidades para definição das condições de contorno:

- a variável é fornecida na fronteira (Dirichlet)
- o fluxo da variável é fornecido (Neumann)
- as condições de contorno são cíclicas ou periódicas

A nomenclatura das condições de contorno é diferenciada entre os problemas aerodinâmicos e estruturais. Para problemas aerodinâmicos ela pode ser de parede, corte, simetria e "far field = longe do corpo". Para problemas estruturais, pode ser classificada como essencial e não essencial.

4.1 Condições de contorno e iniciais do problema aerodinâmico

No estudo de problemas envolvendo volumes finitos, o correto e fisicamente consistente é a realização do balanço da propriedade para os volumes da fronteira. Entretanto, volumes fictícios normalmente são usados com o objetivo de facilitar a aplicação das condições de contorno e estabelecer apenas uma equação para representar todos os volumes do domínio.

a) *Condição de contorno de parede*

Para uma parede impermeável, a condição de fluxo nulo através da fronteira deve ser exigida. Esta condição pode ser aplicada para a velocidade contravariante V [34] conforme mostra a Fig. 4.1 por

$$V = \vec{Q}_{i,2,k} \cdot \vec{S}_{i,2,k} = 0 \quad (4.1)$$

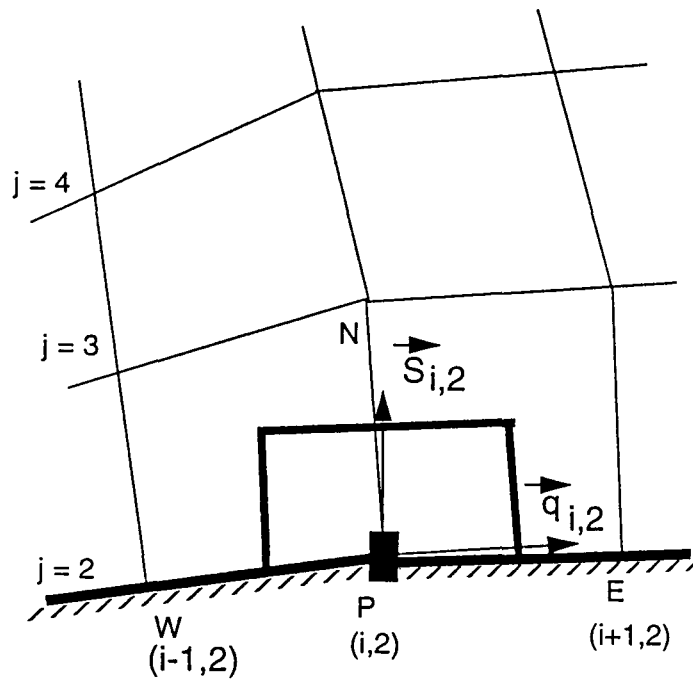


Fig. 4.1 Condição de contorno de parede

b) *Condição de contorno para um corte*

Considerando que uma malha do tipo "0" esteja em torno de um corpo, o domínio físico deve ser transformado para o domínio computacional introduzindo um corte para malhas simplesmente conexas. A continuidade do valor das variáveis usando volumes fictícios pode ser feita da seguinte maneira, conforme mostra a Fig. 4.2

$$\vec{w}(i1, j, k) = \vec{w}(3, j, k)$$

$$\vec{w}(1, j, k) = \vec{w}(i2-1, j, k)$$

Pode ser esperado para a solução que o valor do vetor \vec{w} seja idêntico no corte

$$\vec{w}(i2, j, k) = \vec{w}(2, j, k)$$

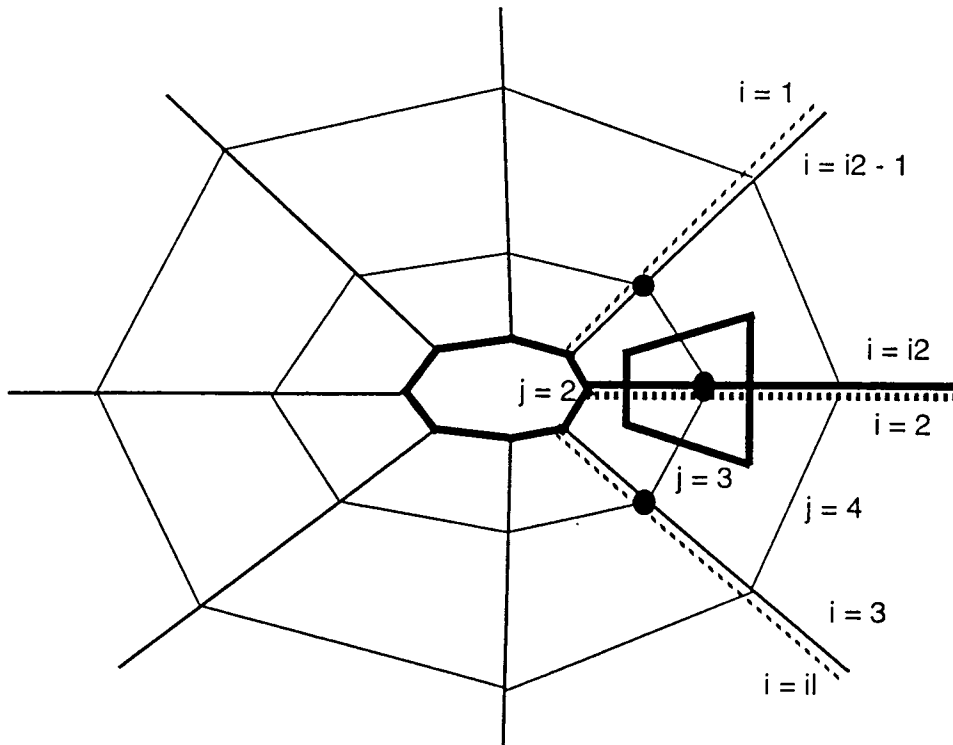


Fig. 4.2 Condição de contorno para um corte

c) *Condição de contorno de simetria*

As condições de contorno de simetria são fáceis de implementar. Como exemplo, considere a fronteira indicada na Fig. 4.3. Para este caso a condição de contorno para $i = 2$ pode ser escrita como

$$\rho u(1, j, k) = \rho u(3, j, k)$$

$$\rho v(1, j, k) = -\rho v(3, j, k)$$

$$\rho w(1, j, k) = \rho w(3, j, k)$$

$$p(1, j, k) = p(3, j, k)$$

$$\rho(1, j, k) = \rho(3, j, k)$$

e de forma similar para $i = i_2$.

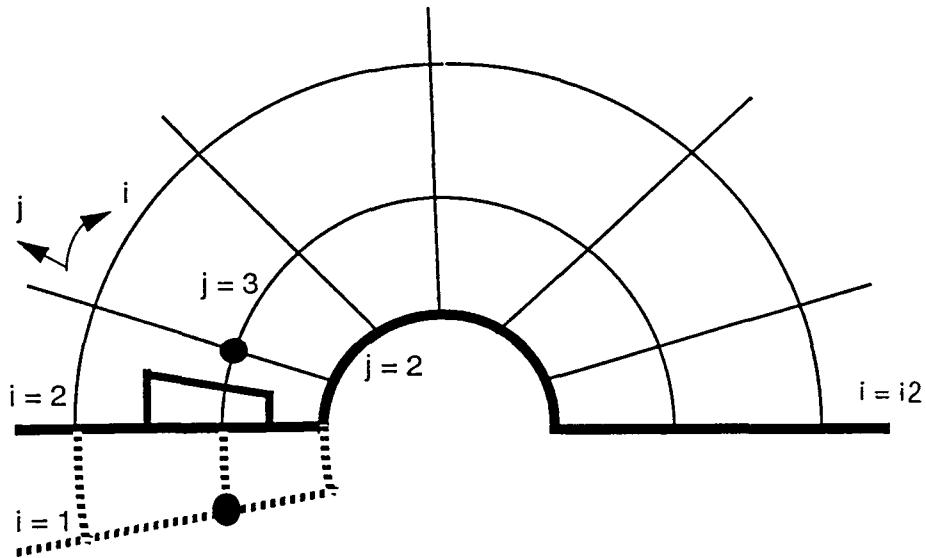


Fig. 4.3 Condição de contorno de simetria

d) *Condição de contorno longe do corpo ("far field")*

As condições de contorno longe do corpo [71] são muito importantes para escoamentos externos a baixa velocidade. Esta condição de contorno é obtida empregando o conceito de variáveis características, executando a transformação de coordenadas do sistema (x, y, z, t) para o sistema (ξ, η, γ, t) . Assumindo que a fronteira longe do corpo coincida com a linha $\eta = \text{constante}$, o

escoamento unidimensional, normal ao contorno, é governado pela equação característica

$$\frac{\partial \vec{w}^*}{\partial t} + D_\eta \frac{\partial \vec{w}^*}{\partial \eta} = 0 \quad (4.2)$$

onde $\vec{w}^* = \{\rho, u, v, w, p\}^T$ e D_η é a matriz Jacobiana associada à direção característica.

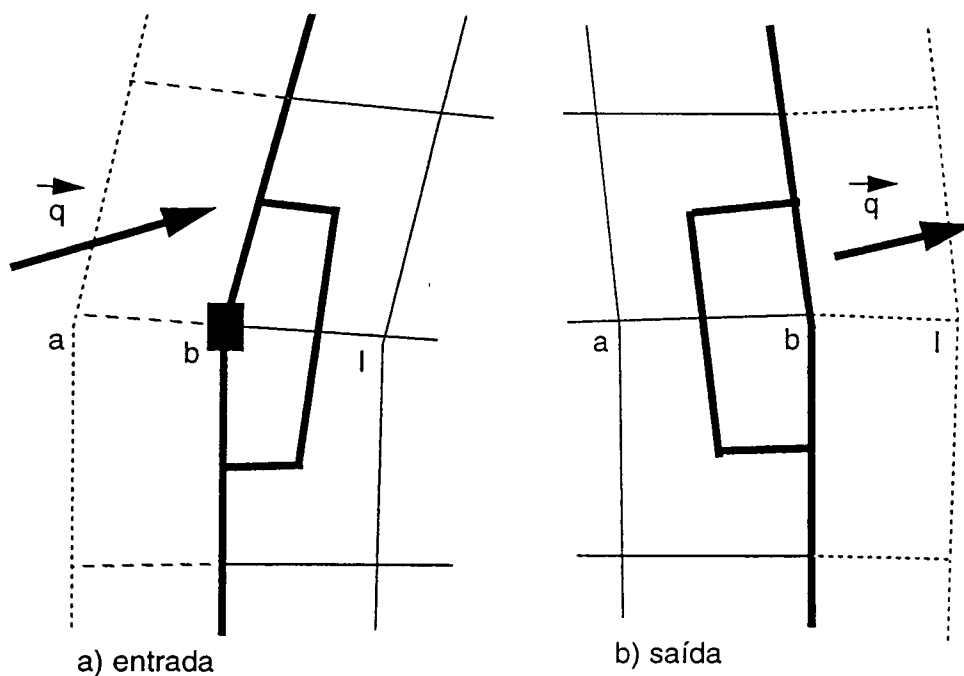


Fig. 4.4 Condição de contorno longe do corpo
a) entrada, b) saída

A matriz Jacobiana pode ser diagonalizada através de uma matriz P da seguinte forma

$$D_\eta = P\Lambda P^{-1}$$

onde as colunas de P são os autovetores correspondentes aos autovalores da matriz D_η . A multiplicação da Eq. (4.2) por P^{-1}

resulta em

$$P^{-1} \frac{\partial \vec{W}^*}{\partial t} + P^{-1} P \Lambda P^{-1} \frac{\partial \vec{W}^*}{\partial \eta} = 0$$

O vetor das variáveis características resultantes é

$$\vec{C} = P^{-1} \vec{W}^*$$

Os valores das correções das variáveis são obtidos igualando-se \vec{C} para os pontos a e b indicados na Fig. 4.4, resolvendo o sistema de equações obtido para ρ , u , v , w e p

$$[P^{-1} \vec{W}^*]_a = [P^{-1} \vec{W}^*]_b$$

Para problemas subsônicos bidimensionais esta condição resulta para entrada de fluido em (Fig. 4.4 a) [71]

$$\rho_b = \rho_a + \frac{P_b - P_a}{C_o^2}$$

$$u_b = u_a \pm \frac{\zeta_x}{Z} \frac{P_a - P_b}{\rho_o C_o}$$

$$v_b = v_a \pm \frac{\zeta_y}{Z} \frac{P_a - P_b}{\rho_o C_o} \quad (4.3)$$

$$w_b = w_a \pm \frac{\zeta_z}{Z} \frac{P_a - P_b}{\rho_o C_o}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \left\{ P_a + P_1 \pm \rho_o C_o \left[\frac{\zeta_x}{Z} (u_a - u_1) + \frac{\zeta_y}{Z} (v_a - v_1) + \frac{\zeta_z}{Z} (w_a - w_1) \right] \right\}$$

onde

$$Z = \sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}$$

O termo ζ é substituído por $\{\xi, \eta, \gamma\}$ (dependendo da direção coordenada) e ρ_0, c_0 representam a condição de referência. Para saída de escoamentos subsônicos esta condição é dada por [71], conforme mostrado na Fig. 4.4 b

$$P_b = P_1$$

$$\rho_b = \rho_a + \frac{P_b - P_a}{c_0^2}$$

$$u_b = u_a \pm \frac{\zeta_x}{Z} \frac{P_a - P_b}{\rho_0 c_0} \quad (4.4)$$

$$v_b = v_a \pm \frac{\zeta_y}{Z} \frac{P_a - P_b}{\rho_0 c_0}$$

$$w_b = w_a \pm \frac{\zeta_z}{Z} \frac{P_a - P_b}{\rho_0 c_0}$$

Esta condição de contorno deve ser modificada para resolver problemas com as equações pré-condicionadas para escoamentos a qualquer velocidade. Por exemplo, para a direção i [34], tem-se

$$c_0 = \sqrt{U^2 (1 - M^2)^2 + \beta^2 C^2 (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)} \quad (4.5)$$

onde c_0 pode ser interpretada como uma velocidade característica que modifica os autovalores para escoamentos a baixa velocidade.

Para resolver problemas externos sobre aerofólios (2D), esta condição de contorno pode ainda ser modificada para um "vortex" centrado a 25% do comprimento da corda do aerofólio com a finalidade de reduzir o domínio computacional necessário [72] [40].

Trabalhos recentes [40] têm indicado que o emprego desta condição permite usar domínios da ordem de 1/4 dos domínios que são necessários para condições de contorno prescritas.

e) Condição inicial

Para a condição inicial os valores da corrente livre são geralmente empregados.

4.2 Condições de contorno e iniciais do problema estrutural

a) Condições de contorno

As condições de contorno para problemas estruturais geralmente são classificadas como essenciais (principais, Dirichlet) e não essenciais (naturais, Neumann). Condições de contorno essenciais são prescrições de deslocamentos, e condições de contorno não essenciais são prescrições de tensões [73]. Por exemplo considere a viga engastada uniformemente carregada mostrada na Fig. 4.5.

As condições de contorno essenciais exigem que o bordo fixo não tenha deslocamento e rotação, e as condições de contorno não essenciais requerem que a extremidade livre possua momentos e forças cisalhantes nulas.

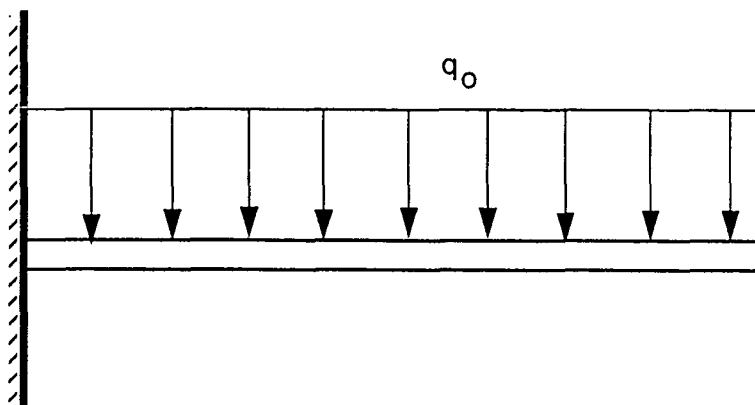


Fig. 4.5 Viga engastada uniformemente carregada

b) Condição inicial

As condições iniciais são geralmente de deslocamentos e rotações nulas.

4.3 Geração e movimento da malha computacional

4.3.1 Geração da malha computacional

A solução de um sistema de equações diferenciais parciais pode ser geralmente simplificada através do emprego de uma malha bem construída. O processo de geração da malha é que determina o mapeamento o qual transforma os pontos da malha do domínio físico no domínio transformado.

A geração de malhas é feita através do emprego de métodos para variáveis complexas, métodos algébricos ou através de técnicas

para equações diferenciais [21]. O método para variáveis complexas é restrito para problemas bidimensionais. Os métodos algébricos são diretos e as métricas da transformação podem ser computadas rapidamente. Os métodos que empregam equações diferenciais são bastante utilizados. Neste caso, prefere-se as equações de Laplace ou de Poisson.

A principal dificuldade na discretização de domínios usando-se sistemas ortogonais como o cartesiano diz respeito à necessidade de interpolações nas fronteiras para aplicação das condições de contorno. Afim de evitar estas dificuldades, discretiza-se o domínio usando um sistema de coordenadas coincidente com as fronteiras.

Para o método que usa as equações diferenciais de Poisson, o procedimento consiste em solucionar o seguinte sistema de equações [74]

$$\begin{aligned}\nabla^2 \xi &= P(\xi, \eta, \gamma) \\ \nabla^2 \eta &= Q(\xi, \eta, \gamma) \\ \nabla^2 \gamma &= R(\xi, \eta, \gamma)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Os termos fonte P, Q e R são aproximados por

$$\begin{aligned}P &= - \sum_{i=1}^m a_i \cdot \text{sgn}(\xi - \xi_i) e^{-c_i(\xi - \xi_i)} - \sum_{j=1}^n b_j \cdot \text{sgn}(\xi - \xi_j) e^{-d_j Z} \\ Q &= - \sum_{i=1}^m a_i \cdot \text{sgn}(\eta - \eta_i) e^{-c_i(\eta - \eta_i)} - \sum_{j=1}^n b_j \cdot \text{sgn}(\eta - \eta_j) e^{-d_j Z} \\ R &= - \sum_{i=1}^m a_i \cdot \text{sgn}(\gamma - \gamma_i) e^{-c_i(\gamma - \gamma_i)} - \sum_{j=1}^n b_j \cdot \text{sgn}(\gamma - \gamma_j) e^{-d_j Z}\end{aligned}$$

onde

$$Z = \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2 + (\gamma - \gamma_j)^2}$$

Quando da solução do sistema de equações (4.6), os coeficientes (a,b,c,d) podem ser escolhidos para atrair linhas e pontos para as linhas e pontos de interesse. Os escalares (m,n) representam o número de linhas e pontos para os quais as outras linhas e pontos devem ser atraídos [75] [66].

4.2.2 Movimento da malha computacional

Como a solução de problemas aeroelásticos exige a utilização de malhas móveis, surge a necessidade de satisfazer uma lei de conservação adicional, denominada de lei de conservação geométrica [76] [77] [78].

Com a finalidade de obter a forma desta lei, escreve-se a equação de conservação da massa na forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{\Gamma} \rho (\vec{q} - \vec{V}_M) d\Gamma = 0 \quad (4.7)$$

onde \vec{V}_M corresponde a velocidade da malha, que é dada por

$$\vec{V}_M = x_{\tau} \vec{i} + v_{\tau} \vec{j} + w_{\tau} \vec{k} \quad (4.8)$$

e \vec{q} é o vetor velocidades já definido anteriormente.

Então, pode-se obter a relação que determina a variação

do volume da célula em termos da área, orientação e velocidades das faces do volume de controle, através de

$$\frac{d}{dt} \int_V dV + \int_{\Gamma} \vec{V}_M d\Gamma = 0 \quad (4.9)$$

que, através da aplicação do teorema da divergência, resulta em [77]

$$I_{\tau} + (I\xi_t)_{\xi} + (I\eta_t)_{\eta} + (I\gamma_t)_{\gamma} = 0 \quad (4.10)$$

onde

$$\xi_t = -(x_{\tau}\xi_x + y_{\tau}\xi_y + z_{\tau}\xi_z)$$

$$\eta_t = -(x_{\tau}\eta_x + y_{\tau}\eta_y + z_{\tau}\eta_z)$$

$$\gamma_t = -(x_{\tau}\gamma_x + y_{\tau}\gamma_y + z_{\tau}\gamma_z)$$

$$I = \frac{1}{J}$$

Esta lei é similar à lei de conservação da massa e governa a variação do Jacobiano com o tempo. Não satisfazer esta lei pode representar uma restrição a mais no passo de tempo. Mas, quando o intervalo de tempo Δt necessário para resolver o problema aerodinâmico for pequeno, a nova malha é praticamente a malha anteriormente utilizada. Neste caso, o erro causado pela não satisfação da lei é pequeno [35]. Portanto, para os problemas em estudo, a obtenção da malha é feita desconsiderando-se a lei de conservação geométrica, pois os intervalos de tempo necessários para o problema aerodinâmico são pequenos e os erros induzidos pela não satisfação desta lei podem ser desprezados. Considera-se que a estrutura sofre deslocamentos infinitesimais, onde as discretizações

Lagrangiana e Euleriana se confundem.

Para finalizar, serão interpretadas fisicamente as componentes contravariantes do vetor velocidade considerando o volume de controle móvel indicado na Fig. 4.6. O fluxo de massa que passa pelas faces do volume de controle é calculado em função das velocidades relativas entre o escoamento e a malha.

$$\vec{q} - \vec{V}_M = (u-x_\tau)\vec{i} + (v-y_\tau)\vec{j} + (w-z_\tau)\vec{k}$$

Desta forma, as componentes contravariantes do vetor velocidade levam a informação da resultante entre o escoamento e a velocidade da malha. Estas podem ser definidas como

$$U = \frac{1}{J} [(u-x_\tau)\xi_x + (v-y_\tau)\xi_y + (w-z_\tau)\xi_z]$$

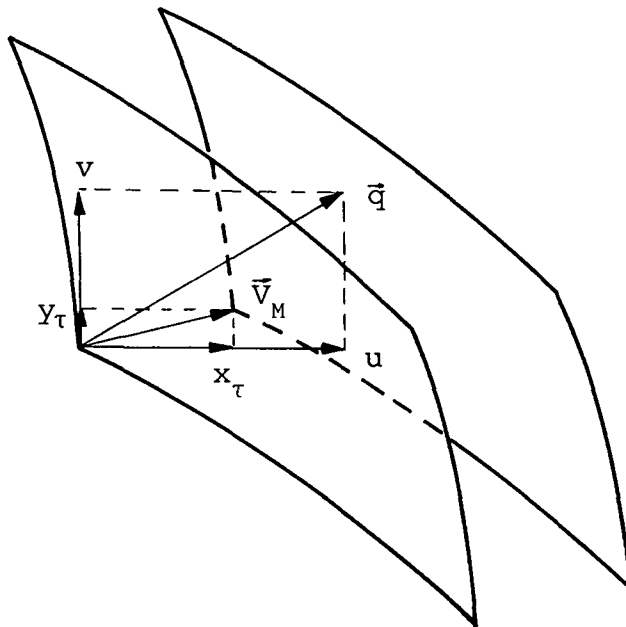


Fig. 4.6 Volume de controle móvel

ao invés de

$$U = \frac{1}{J} [u \cdot \xi_x + v \cdot \xi_y + w \cdot \xi_z]$$

que é usada para malhas fixas. As componentes V e W são escritas de forma semelhante.

5. METODOLOGIA GERAL DE SOLUÇÃO

5.1 Introdução

Os métodos de solução das equações algébricas são geralmente classificados como métodos diretos e iterativos. Dentre os métodos diretos, encontram-se o método de eliminação de Gauss e a decomposição LU exata. Dentre os métodos iterativos encontram-se o TDMA [22] ("Tridiagonal Matrix Algorithm") e o MSI [38] ("Modified Strongly Implicit Procedure").

Dos métodos citados, o método de eliminação de Gauss é aplicado para matrizes de baixa ordem, uma vez que um grande número de operações é necessário para obter a solução. Pode-se dizer também que o comportamento do método MSI não varia muito com o aumento do número de pontos da malha [79]. Por sua vez, o método TDMA, tende a aumentar a eficiência para malhas grandes.

Na solução de problemas aerodinâmicos a alta e baixa velocidade, por outro lado, os métodos MSI e Runge-Kutta têm sido normalmente empregados. Estes métodos são descritos neste trabalho, pois são empregados na solução de problemas aerodinâmicos em estudo.

Estes métodos também podem ser classificados como explícitos e implícitos. Dentre os métodos explícitos encontra-se o método de Jacobi e o de Runge-Kutta, por exemplo. O último destes é apresentado neste trabalho.

Para a solução do problema dinâmico em elementos finitos

os métodos de solução usando integração direta são utilizados. Dentre os métodos de integração direta podem ser mencionados o método de diferenças centrais, o método de Houbolt, o método de θ -Wilson e o método de Newmark. O último destes possui um comportamento mais estável ocorrendo apenas alongação de período que, para intervalos de tempo pequenos, pode ser desprezada. Os outros métodos possuem comportamento menos estáveis e o seu detalhamento pode ser visto na literatura especializada. Neste trabalho são descritos os métodos Runge-Kutta e MSI para o problema aerodinâmico e o método de Houbolt (e Newmark) para o problema dinâmico estrutural.

5.2 Métodos de solução do problema aerodinâmico

Dentre os métodos normalmente utilizados para a solução do problema aerodinâmico, o MSI [38] [39], normalmente empregado com a metodologia para escoamentos a qualquer velocidade, e o Runge-Kutta, usado com a formulação compressível, são aqui apresentados.

a) MSI

O método MSI consiste em resolver um sistema de equações algébricas da forma

$$[A] \{\phi\} = \{b\} \tag{5.1}$$

onde a matriz $[A]$ é dada por

$$[A] = \begin{bmatrix} a_p & a_e & \dots & a_n & \dots & a_d & \dots \\ & a_w & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & a_s & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & a_f & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & \cdot & & & & & \end{bmatrix}$$

Observando-se a matriz $[A]$, verifica-se que a mesma possui apenas algumas diagonais não nulas. Procurando tirar vantagem deste aspecto, decompõe-se a matriz $[A]$ não exatamente conforme

$$[A] + [B] = [L] [U] \quad (5.2)$$

onde $[B]$ é o resíduo da fatoração incompleta de $[A]$.

Neste caso as matrizes $[L]$ e $[U]$ são matrizes triangulares superiores e inferiores, mas o seu produto não representa a matriz $[A]$ identicamente afim de facilitar o seu cálculo que é feito de forma explícita aproximada.

Então, a obtenção da solução torna-se um processo iterativo da forma

$$[A+B] \{\Phi\}^{(k+1)} = [A+B] \{\Phi\}^{(k)} - ([A] \{\Phi\}^{(k)} - \{b\})$$

ou seja,

$$[A+B] \{\Delta\}^{(k+1)} = \{R\}^{(k+1)} \quad (5.3)$$

O resíduo $\{R\}$ deve atender ao critério de convergência quando da convergência do processo.

b) Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é caracterizado pelo pequeno número de operações necessárias. Este método é usado porque os seus coeficientes podem ser selecionados de forma a obter soluções de alta precisão (temporal), otimizando as características de amortecimento do erro da solução. Mais de dois estágios são empregados com a finalidade de estender a região de estabilidade [40].

O método de Runge-Kutta clássico contém 4 estágios e é descrito como [40]

$$\begin{aligned}
 \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} &= \vec{W}_{i,j,k}^n \\
 \vec{W}_{i,j,k}^{(1)} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(0)} \\
 \vec{W}_{i,j,k}^{(2)} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - \frac{\Delta t}{2V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(1)} \\
 \vec{W}_{i,j,k}^{(3)} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - \frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(2)} \\
 \vec{W}_{i,j,k}^{(4)} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - \frac{\Delta t}{6V_{i,j,k}} \{ \vec{R}_{i,j,k}^{(0)} + 2\vec{R}_{i,j,k}^{(1)} + 2\vec{R}_{i,j,k}^{(2)} + \vec{R}_{i,j,k}^{(3)} \} \\
 \vec{W}_{i,j,k}^{n+1} &= \vec{W}_{i,j,k}^{(4)}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde

$$\vec{R}_{i,j,k}^{(k)} = \vec{Q}_{i,j,k}^{(k)} - \vec{D}_{i,j,k}^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Como este método requer o cálculo de 4 coeficientes $\vec{Q}_{i,j,k}$ e 4 termos dissipativos $\vec{D}_{i,j,k}$, este esquema conduz a problemas de memória. Um esquema Runge-Kutta simplificado que requer menos memória computacional é dado por [40]

$$\vec{W}_{i,j,k}^{(0)} = \vec{W}_{i,j,k}^n$$

$$\vec{W}_{i,j,k}^{(r)} = \vec{W}_{i,j,k}^{(0)} - \frac{\alpha_r \Delta t}{V_{i,j,k}} \vec{R}_{i,j,k}^{(k-1)} \quad (5.5)$$

$$\vec{W}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{W}_{i,j,k}^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Alguns esquemas de segunda ordem eficientes são dados pelos seguintes coeficientes:

$$3 \text{ estágios} \rightarrow \alpha_1=1/2, \alpha_2=1/2, \alpha_3=1$$

$$4 \text{ estágios} \rightarrow \alpha_1=1/4, \alpha_2=1/3, \alpha_3=1/2, \alpha_4=1$$

$$5 \text{ estágios} \rightarrow \alpha_1=1/4, \alpha_2=1/6, \alpha_3=3/8, \alpha_4=1/2, \alpha_5=1$$

Esquemas com mais de 5 estágios não são eficientes, pois o trabalho computacional envolvido é muito alto.

Como é de conhecimento, o passo de tempo para esquemas explícitos é limitado em termos das características de estabilidade. Para o caso geral de uma malha não uniforme e não

ortogonal, a condição de estabilidade para cada célula é dada por [6] [34]

$$\Delta t_{i,j,k} \leq CFL \cdot \frac{V_{i,j,k}}{(\lambda^i + \lambda^j + \lambda^k)_{i,j,k}} \quad (5.6)$$

onde

$$\lambda^i = |U| + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}$$

$$\lambda^j = |V| + c\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}$$

$$\lambda^k = |W| + c\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}$$

Para estender o código para escoamentos incompressíveis os coeficientes indicados acima foram substituídos por

$$\lambda^i = \frac{|U(1+M^2)| + \sqrt{U^2(1-M^2) + \beta^2 c^2 (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)}}{2}$$

$$\lambda^j = \frac{|V(1+M^2)| + \sqrt{V^2(1-M^2) + \beta^2 c^2 (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}}{2}$$

$$\lambda^k = \frac{|W(1+M^2)| + \sqrt{W^2(1-M^2) + \beta^2 c^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)}}{2}$$

onde $c_{i,j,k}$ é a velocidade do som local.

Então, o Δt limite para obter soluções transientes é

$$\Delta t = \min(\Delta t_{i,j,k})$$

Este sistema de equações pode também ser resolvido implicitamente, conforme pode ser visto em [41].

5.3 Métodos de solução do problema dinâmico estrutural

Dentre os métodos normalmente utilizados para a solução do problema dinâmico estrutural, a integração direta e a análise modal são geralmente empregadas. Estes métodos são apresentados a seguir:

a) Integração direta

Dentre os métodos de integração direta, o método de Newmark é utilizado por possuir um comportamento mais estável, conforme mostra a Fig. 5.1. Na bibliografia especializada estes métodos são detalhados [26] [27]. Neste trabalho são fornecidas noções sobre o comportamento dos métodos assim como o algoritmo do método de Newmark afim de não quebrar o conteúdo.

O algoritmo do método de Newmark é descrito a seguir:

- Cálculos iniciais
- obter as matrizes de rigidez, massa e amortecimento
- inicializar $\{q\}^0$
- selecionar o passo de tempo Δt e calcular

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right)$$

$$a_6 = \Delta t (1 - \delta)$$

$$a_7 = \delta \Delta t$$

onde

$$\delta \geq 0,5$$

$$\alpha \geq 0,25 (0,5 + \delta)^2$$

- obter a matriz de rigidez equivalente

$$[K]_{eq} = [K] + a_0[M] + a_1[C] \quad (5.7)$$

- Para cada ciclo no tempo

- calcular a força efetiva no instante $t + \Delta t$

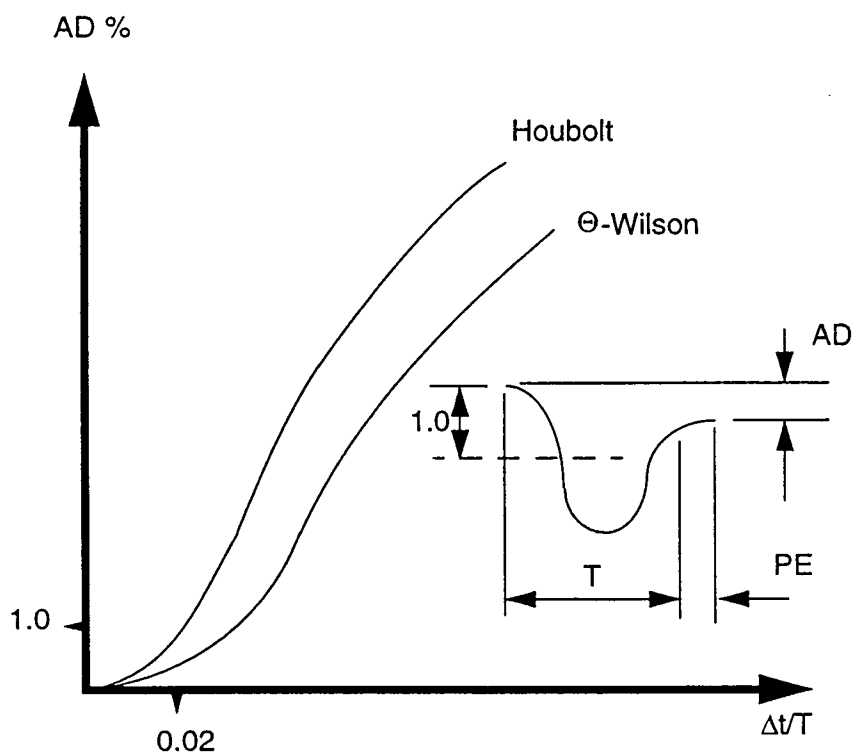
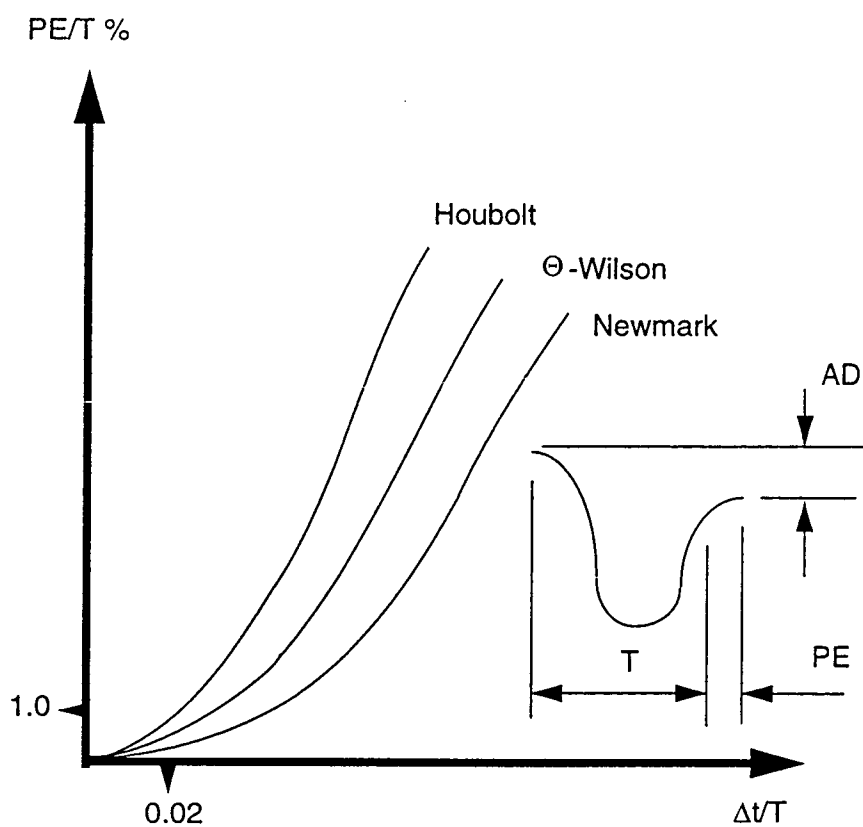


Fig. 5.1 Elongação de período ($PE/T \%$) e decaimento de amplitude ($AD \%$) dos métodos de integração direta

$$\{F\}_{eq}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} + [M] (a_0\{q\}^t + a_1\{\dot{q}\}^t + a_2\{\ddot{q}\}^t) + [C] (a_3\{q\}^t + a_4\{\dot{q}\}^t + a_5\{\ddot{q}\}^t) \quad (5.8)$$

- obter os deslocamentos e rotações q no instante $t + \Delta t$

$$[K]_{eq}\{q\}^{t+\Delta t} = \{F\}_{eq}^{t+\Delta t} \quad (5.9)$$

- calcular as velocidades e acelerações em $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}\}^{t+\Delta t} &= a_0 (\{q\}^{t+\Delta t} - \{q\}^t) - a_2\{\dot{q}\}^t - a_3\{\ddot{q}\}^t \\ \{\dot{q}\}^{t+\Delta t} &= a_7 (\{\ddot{q}\}^{t+\Delta t} + a_6\{\ddot{q}\}^t) + \{\dot{q}\}^t \end{aligned} \quad (5.10)$$

b) Análise modal

Caso necessário resolver um problema elástico linear cujo número de pontos seja muito grande, uma análise modal torna-se mais econômica que a integração direta. Por este motivo, este procedimento é bastante empregado. Através da utilização dos modos principais, tem-se uma idéia global do comportamento do sistema, conforme descrito a seguir [27]:

Considere o problema genérico

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (5.11)$$

Uma solução geral para o sistema de vibrações livres é da forma

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{\alpha t} = \sum_{i=1}^n \{\bar{q}_i\} e^{\alpha_i t} \quad (5.12)$$

onde os α_i são os autovalores e $\{q_i\}$ são os autovetores.

Assume-se que a solução para vibrações forçadas pode ser escrita como uma combinação linear dos modos

$$\{q\} = \sum \{\bar{q}_i\} y_i = [\{\bar{q}_1\}, \{\bar{q}_2\}, \dots] \{y\} \quad (5.13)$$

A substituição da Eq. (5.13) na Eq. (5.11) e a pré-multiplicação desta por $\{q_i\}^T$ resulta em

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \quad (5.14)$$

onde

$$m_i = \{\bar{q}_i\}^T [M] \{\bar{q}_i\}$$

$$c_i = \{\bar{q}_i\}^T [C] \{\bar{q}_i\}$$

$$k_i = \{\bar{q}_i\}^T [K] \{\bar{q}_i\}$$

$$f_i = \{\bar{q}_i\}^T \{F\}$$

Este sistema de equações encontra-se desacoplado somente se

$$\{\bar{q}_i\}^T [C] \{\bar{q}_i\} = 0 \quad (5.15)$$

Caso contrário escreve-se

$$c_i = 2w_i c_i'$$

A Eq. (5.14) resulta em

$$\ddot{y}_i + 2w_i c_i' \dot{y}_i + w_i^2 y_i + \frac{f_i}{m_i} = 0 \quad (5.16)$$

onde c_i representa a razão de amortecimento em relação ao seu valor crítico.

A solução da Eq. (5.16) pode ser obtida usando a seguinte expressão [80]

$$y_i = \int_0^t f_i e^{-v_i w_i (t-\tau)} \sin[w_i (t-\tau)] d\tau$$

onde v_i é um coeficiente de amortecimento.

Normalmente, é necessário um pequeno número de modos para aproximar a solução, pois as frequências de alta ordem são geralmente amortecidas e/ou insignificantes.

5.4 Convergência

A solução numérica de problemas de escoamento contém imprecisões as quais são limitadas pelo critério de convergência. Na prática, é comum a escolha de um critério de convergência pequeno o suficiente de forma a poder desprezar tais imprecisões.

O critério de convergência normalmente utilizado para resolver problemas compressíveis é da forma [6]

$$\epsilon \geq \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{\sum \Delta_o^2}} \quad (5.17)$$

onde

$$\Delta = \frac{p - p^o}{\Delta t}$$

Por outro lado, o critério de convergência utilizado para resolver problemas a qualquer velocidade é [33]

$$\epsilon \geq \frac{p' - p^o}{p'_{\max} - p'_{\min}}$$

Como a pressão varia tanto para problemas compressíveis como para problemas incompressíveis, ela pode ser usada como critério de convergência para escoamentos a qualquer velocidade. A união dos dois critérios anteriormente apresentados resulta para Δ [34]

$$\Delta = \frac{p - p^o}{\Delta t}$$

Procedimento análogo pode ser empregado para os deslocamentos e rotações do problema estrutural.

Para escoamentos a baixa velocidade os erros de arredondamento variam proporcionalmente ao quadrado do número de Mach [37]. Este problema pode ser parcialmente resolvido escrevendo a pressão como [37] (formulação compressível)

$$p = p^* + p'$$

sendo p^* um valor de referência.

5.5 O acoplamento aeroelástico

Como a deformação resultante da flexibilidade de uma estrutura pode variar consideravelmente a natureza do escoamento caracterizando um fenômeno aeroelástico, é necessário resolver o problema aerodinâmico e estrutural simultaneamente. Conforme mencionado anteriormente, as equações governantes da parte estrutural são as do movimento (ou do equilíbrio dinâmico) [17] [18] [19].

O procedimento de solução para uma estrutura elástica linear com deslocamentos infinitesimais consiste em resolver o problema aerodinâmico obtendo as componentes do vetor força atuante sobre a estrutura. Estas componentes servem como dados de entrada para o programa estrutural assim como as características do perfil (momento de inércia, tamanho do elemento, características elásticas, etc).

Com estes dados, o programa estrutural fornece os deslocamentos e rotações de cada nó, correspondendo à configuração deformada. Com a nova configuração da estrutura a nova malha do problema aerodinâmico é calculada e o novo campo de forças aerodinâmicas é calculado, realimentando-se o programa estrutural. O movimento da estrutura altera apenas a forma do corpo rígido que serve de obstáculo ao escoamento. De forma geral, o diagrama funcional básico para este problema é mostrado na Fig. 5.2 [3], onde a posição i corresponde à configuração inicial e a posição $i+1$ a configurações intermediárias entre a configuração inicial e a configuração final.

O procedimento de solução genérico é descrito como segue:

A. Problema aerodinâmico

1. Discretiza-se o domínio aerodinâmico
2. Calcula-se a força aerodinâmica

B. Problema estrutural

3. Monta-se as matrizes massa, amortecimento e rigidez
4. Obtém-se os deslocamentos e as rotações da estrutura

C. Problema aeroelástico

5. Retorna-se ao item 1 até obter o estado desejado

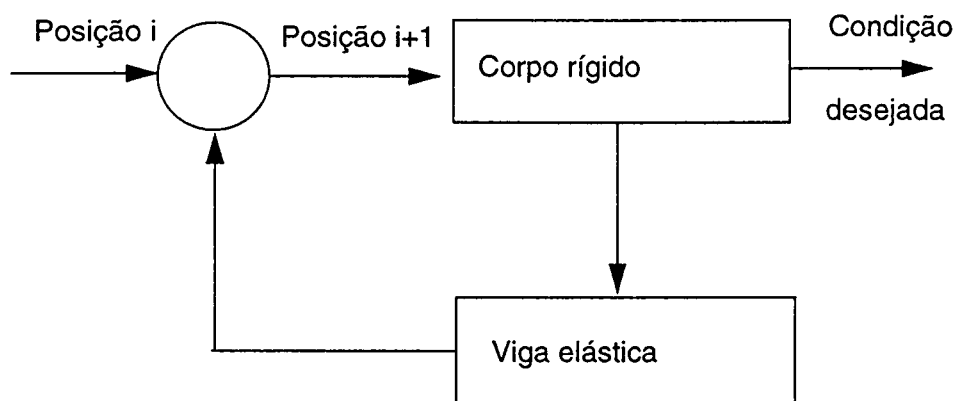


Fig. 5.2 Diagrama funcional básico de um problema aeroelástico

Afim de facilitar o entendimento do acoplamento na

interface fluido-sólido, considere o corpo submetido a um escoamento conforme mostrado na Fig. 5.3. Os pontos de intersecção da malha do problema aerodinâmico com a estrutura são transformados nos nós da estrutura. Quando a malha do problema aerodinâmico for muito mais refinada que a malha do problema estrutural, calcula-se a carga nodal equivalente da estrutura.

No caso da transformação do corpo da estrutura numa viga, cada secção onde ocorre a intersecção da malha para o escoamento com o corpo é transformada num nó e as características estruturais são transferidas para este nó. Este procedimento é seguido por facilidade de aplicação das forças devidas ao carregamento aerodinâmico e para que estas forças sejam consistentes com os nós que estiverem sendo aplicadas.

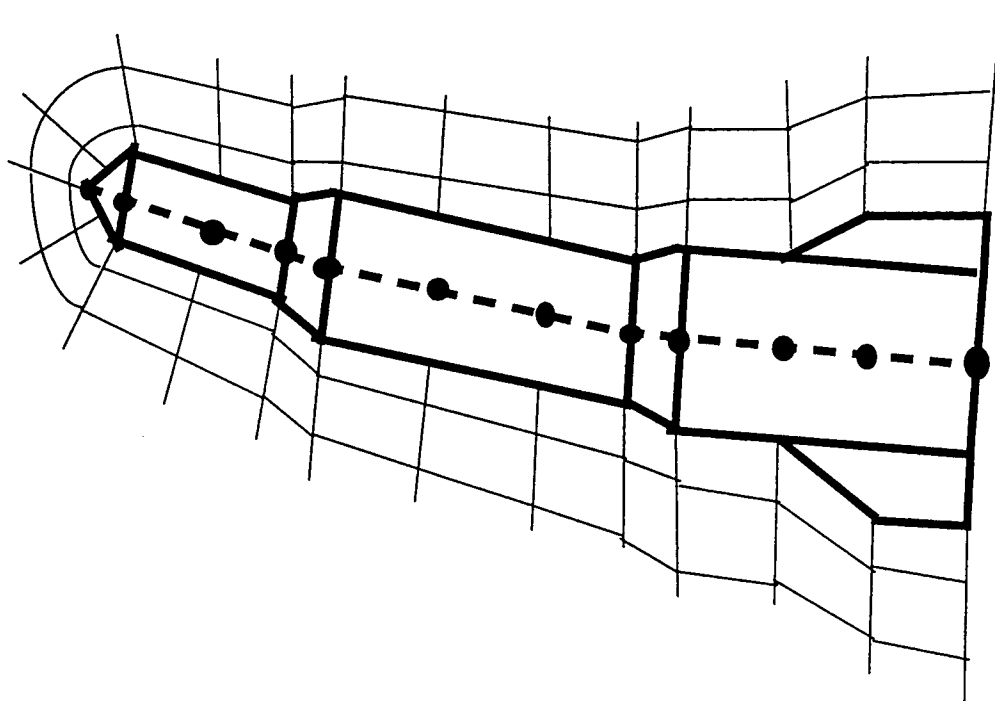


Fig. 5.3 Interface fluido-sólido para um corpo em forma de veículo lançador

Prescreve-se as seguintes restrições em cada nó da interface entre o fluído e o sólido

- a velocidade da malha coincide com a velocidade da fronteira
- não existe escoamento atravessando a fronteira do corpo
- não é feita restrição sobre a componente tangencial do vetor velocidade na superfície do corpo

Na solução de um problema aeroelástico, deve-se ainda escolher o passo de tempo adequado para os problemas aerodinâmicos e estruturais, que geralmente são diferentes. O passo de tempo para o problema estrutural utilizado corresponde a no máximo 1 sobre 20 a 30 vezes o valor da primeira freqüência natural da estrutura. Como o passo de tempo para o problema aerodinâmico é normalmente menor do que este, pode-se usar o passo de tempo do problema aerodinâmico para o problema aeroelástico.

6. TÉCNICAS PARA ACELERAR A CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA AERODINÂMICO

A maior parte dos métodos iterativos apresenta um dos seguintes inconvenientes:

- a taxa de convergência diminui significativamente após algumas iterações
- o trabalho computacional total é proporcional ao número de volumes elevado a um número maior que 1

A necessidade de métodos eficientes para a solução de problemas aerodinâmicos é óbvia. Muitos códigos ainda em uso apresentam baixas taxas de convergência aumentando os custos de projeto. Conseqüentemente, existem muitos trabalhos que visam aumentar a taxa de convergência dos métodos numéricos. Dentre estas técnicas, o passo de tempo local, a média dos resíduos e a técnica "multigrid" (multigrade) são descritas a seguir. O emprego da técnica "multigrid" com uma média de resíduos permite usar CFL grandes (da ordem de 7,5) com o método de Runge-Kutta.

6.1 Passo de tempo local

Esta técnica consiste no emprego do máximo valor de Δt para cada célula, conforme mostra a Eq. 5.6

$$\Delta t_{i,j,k} \leq CFL \frac{V_{i,j,k}}{(\lambda^i + \lambda^j + \lambda^k)_{i,j,k}} \quad (5.6)$$

O passo de tempo local equivale ao pré-condicionamento

do resíduo por um escalar em cada célula. Este procedimento pode reduzir o tempo computacional necessário para obter a solução em regime permanente em uma ordem de magnitude [40].

6.2 Média dos resíduos

Uma média ponderada de resíduos é empregada para aumentar o número de Courant ($\Delta t/\Delta x$) de um método de solução explícito. Desta forma, os resíduos \bar{R}_j , para um problema unidimensional [40] são escritos na forma

$$\bar{R}_j^* = -\epsilon \bar{R}_{j-1} + (1+2\epsilon) \bar{R}_j - \epsilon \bar{R}_{j+1}$$

Neste trabalho ϵ é constante e igual a 0,8.

6.3 Técnicas "multigrid" (multigrade)

Como é de conhecimento [50], o comportamento da convergência dos problemas resolvidos numericamente usando malhas finas é pior do que para malhas grossas. Este comportamento está associado com as propriedades de amortecimento das componentes do erro da solução. Em relação às técnicas "multigrid", o importante são as propriedades de amortecimento dos métodos de relaxação [50]. O sucesso do método "multigrid" depende do algoritmo de relaxação, que rapidamente reduz as componentes do erro de alta frequência. As frequências baixas do erro da solução nas malhas finas são transformadas em altas frequências nas malhas

grossas onde podem ser amortecidas. Então, as boas propriedades de amortecimento do método de Runge-Kutta são importantes para serem usadas num processo para acelerar a convergência empregando técnicas "multigrid".

Desta forma, uma seqüência apropriada de malhas ajuda a amortecer os erros de baixa freqüência e acelera a taxa de convergência.

De forma a obter as malhas computacionais a relação de dimensão 2 entre a malha fina e a sua correspondente malha grossa é um ótimo valor, pois este é o menor número inteiro maior que 1 e é o suficiente para fazer o trabalho computacional na malha grossa bem menor que o necessário na malha fina [50] [81].

O emprego de técnicas "multigrid" (multigrade) permite economizar até 90% do trabalho computacional necessário quando o método de Runge-Kutta é combinado com uma média de resíduos para escoamentos transônicos. Para alguns escoamentos incompressíveis resolvidos pelo autor [34] esta economia oscilou entre 70% e 90%.

São necessárias funções de interpolação para fazer a transferência das variáveis entre as malhas. Um operador interpolação (prolongamento) transforma (mapeia) malhas $2h$ em malhas h . Um operador de restrição mapeia as funções das malhas h para malhas $2h$. O método de interpolação mais freqüentemente utilizado é o de interpolação bilinear. O operador de restrição mais empregado com esta finalidade é o operador de aproximação total ("full approximation").

Existem basicamente dois tipos de ciclos "multigrid" (multigrade): o V e o W. O ciclo V é mais apropriado para resolver escoamentos supersônicos e hipersônicos (veja a Fig. 6.1), enquanto

que o ciclo W é mais utilizado para resolver escoamentos transônicos e subsônicos (Fig. 6.2). Para cada malha executa-se alguns passos de tempo (Runge-Kutta), injeta-se as variáveis na malha grossa e restringe-se o resíduo. Resolve-se então o problema na malha grossa. Para retornar as malhas finas prolonga-se (interpola-se) as correções das malhas grossas para as malhas finas.

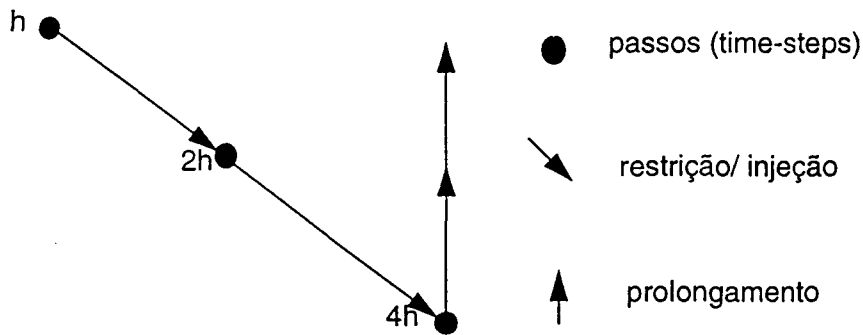


Fig. 6.1 Ciclo V

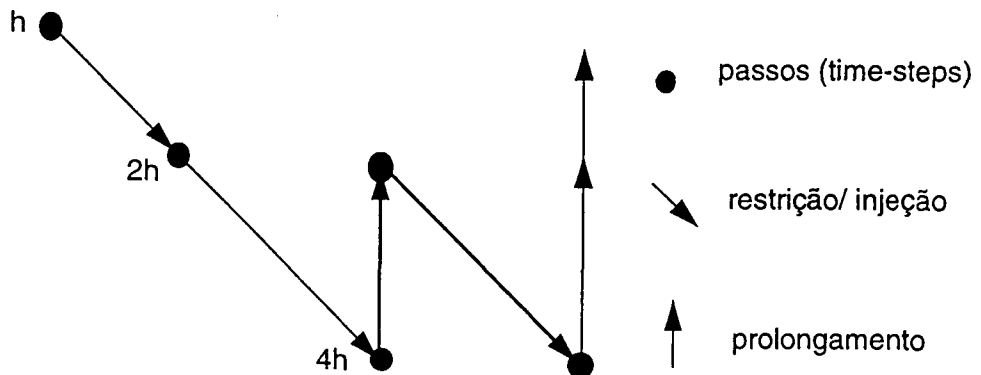


Fig 6.2 Ciclo W

Para ilustrar o esquema "FAS" ("Full Approximation Storage Scheme" [50]), considere as equações de Euler escritas para a malha

fina conforme (Fig. 6.3)

$$\frac{d}{dt} \vec{W}_h + \frac{\vec{R}_h}{V_h} = 0$$

O procedimento de solução para um ciclo V com duas malhas é constituído dos seguintes passos:

1. Obtém-se a solução aplicando alguns passos de tempo (1-2) para a malha fina

$$\vec{W}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{W}_{i,j,k}^{(5)}$$

onde o expoente (5) é o último estágio do método de Runge-Kutta.

2. Injeta-se as variáveis na malha grossa

$$\vec{W}_{2h}^{(0)} = \vec{W}_h^{(n+1)}$$

3. Transfere-se os resíduos da malha fina para a malha grossa usando a seguinte função ("forcing function")

$$f_{2h} = I_h^{2h} \vec{R}_h(\vec{W}_h^{n+1}) - \vec{R}_{2h}^{(0)}$$

com o operador restrição

$$I_h^{2h} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Resolve-se o problema na malha grossa realizando alguns passos (1-2)

$$\vec{W}_{2h}^{(k)} = \vec{W}_{2h}^{(0)} - \alpha_k \frac{\Delta t_{2h}}{V_{2h}} (\vec{R}_{2h}^{(k-1)} + f_{2h}) \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\vec{W}_{2h}^{n+1} = \vec{W}_{2h}^{(m)}$$

onde (m) é o número de estágios do método de Runge-Kutta.

5. Interpola-se a correção da solução da malha grossa para a malha fina

$$\vec{C}_{2h} = \vec{W}_{2h}^{n+1} - \vec{W}_{2h}^{(0)}$$

$$\vec{C}_h = \vec{W}_h^{(5)} - \vec{W}_h^{(0)} + I_{2h}^h \vec{C}_{2h}$$

com o operador prolongamento

$$I_{2h}^h = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Corrige-se a solução da malha fina

$$\vec{W}_h^{n+1} = \vec{W}_h^{(5)} + I_{2h}^h \vec{C}_{2h}$$

Para processo "multigrid" (multigrade) com mais de duas malhas, os passos 2-4 são repetidos sucessivamente começando pela malha fina. Em seguida, aplica-se os passos 5-6 a partir da malha grossa até a malha fina. Para ciclos do tipo W, realiza-se mais trabalho nas malhas grossas (veja a Fig. 6.2).

Para escoamentos a baixa velocidade surgem dificuldades para amortecer as freqüências do erro e, conseqüentemente, para obter boas taxas de convergência. Para aliviar este problema, realiza-se mais trabalho em cada malha, ou seja, 2 passos são realizados para cada malha [34]. Além disso, malhas grossas também

podem ser utilizadas para obter uma boa aproximação da solução da malha fina (FMG - "Full Multigrid" [50]).

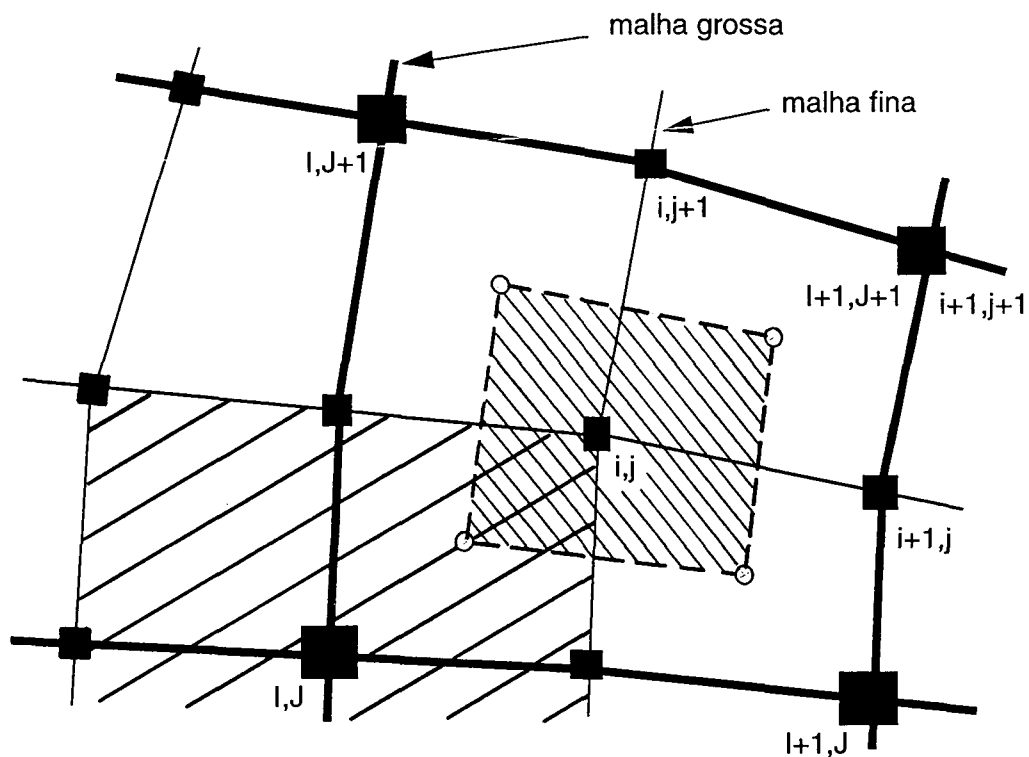


Fig. 6.3 Malhas grossa e fina

O emprego de técnicas "multigrid" (multigrade) apresenta as seguintes vantagens:

- o trabalho computacional por passo de tempo é reduzido
- os grandes volumes que aparecem para malhas grossas, têm como consequência um rápido equilíbrio global do procedimento da solução.

7. RESULTADOS

A validação de um código computacional para análises aeroelásticas, que se constitui de uma parte aerodinâmica e uma parte estrutural, pode ser feita em três etapas:

- validação da parte aerodinâmica
- validação da parte estrutural
- validação da parte aerodinâmica e estrutural (aeroelástica)

A validação da parte estrutural, neste trabalho, é feita através da obtenção da solução estática e dinâmica para uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra. Desta, pode-se verificar se as matrizes de rigidez e massa da estrutura e o sistema de equações estão sendo resolvidos de forma correta.

A validação da parte aerodinâmica deste trabalho consiste em soluções para uma superfície curva, uma placa, um cilindro e o perfil NACA 0012, e soluções tridimensionais para o cilindro hemisférico.

Preferiu-se usar a formulação compressível e uma discretização espacial de segunda ordem pois esta permite calcular os coeficientes aerodinâmicos sobre geometrias aerodinâmicas como o aerofólio NACA 0012 adequadamente. A metodologia para escoamentos a qualquer velocidade conforme descrita no Cap. 3 foi usada somente para o problema do cilindro hemisférico.

Finalmente, a comparação da parte aeroelástica deste trabalho consiste na solução para um painel, para um modelo bidimensional de um aerofólio e para um cilindro hemisférico tridimensional. Esta comparação limita-se a aeroelasticidade

clássica uma vez que os efeitos que são causados pela viscosidade do fluído não estão sendo considerados neste trabalho. No entanto, o estudo destes fenômenos é importante antes de analisar fenômenos aeroelásticos cujos efeitos viscosos são de grande importância.

7.1 Resultados aerodinâmicos

A parte do código computacional usada para análises aerodinâmicas emprega o método de volumes finitos com um arranjo colocalizado de variáveis. Resultados aerodinâmicos são apresentados para números Mach variando entre 0,005 e 1,5, embora resultados usando o mesmo procedimento, já tenham sido obtidos entre 0,0001 e 20,0 [6] [34] para o ar.

Verificou-se que a discretização espacial de primeira ordem no espaço, ou híbrida de primeira ordem no espaço, proporciona o aparecimento de difusão numérica, principalmente para a análise de geometrias aerodinâmicas como, por exemplo, para aerofólios [35]. Por outro lado, para geometrias mais rombudas razoáveis distribuições do coeficiente de pressão podem ser obtidas com funções de interpolação do tipo "upwind" ou híbridas de primeira ordem "WUDS" [29].

Como a distribuição do coeficiente de pressão é de grande importância para os problemas aeroelásticos, pois diferentes carregamentos aerodinâmicos podem excitar diferentes modos de vibração, a validação da parte aerodinâmica aqui apresentada é feita empregando a formulação compressível com discretização espacial de segunda ordem, descrita no capítulo 3, com exceção da análise

qualitativa sobre o cilindro hemisférico.

7.1.1 Cilindro (para Mach variando entre 0,2 e 0,01)

O cilindro foi escolhido, pois a sua solução analítica é conhecida. Além disso, a sua simplicidade geométrica facilita a execução da malha computacional.

A malha utilizada é do tipo "O" e contém 160x48 volumes, conforme mostrado na Fig. 7.1. Os volumes são do tipo retangular, com relações de dimensão da ordem de 1,0 (tendendo ao quadrado). São distribuídos 161 pontos na direção circunferencial e 49 pontos na direção radial. Como a malha é duplamente conexa, um corte é executado a partir do qual começa a ser contado o ângulo φ . O raio

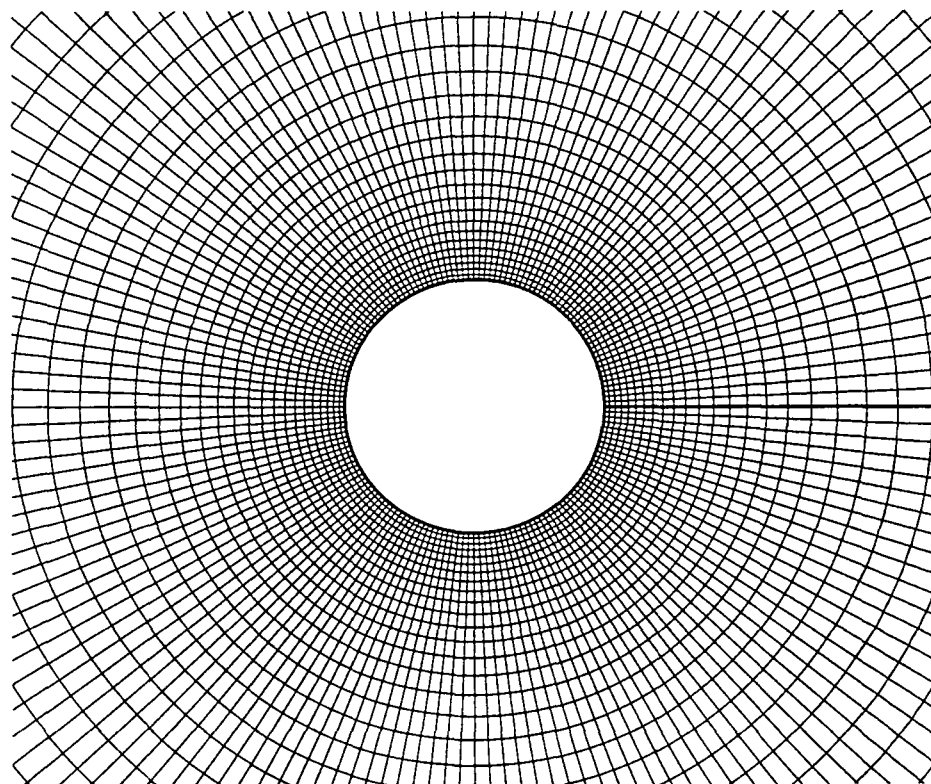


Fig. 7.1 Malha para o cilindro, 160x48 volumes

externo desta malha corresponde a aproximadamente 50 raios do cilindro e a malha foi obtida algebricamente.

A escolha do número de pontos da malha também visa obter o conjunto de malhas grossas usadas no processo "multigrid". Usando-se a relação $2h$ para obter as malhas grossas, tem-se

160x48 volumes	- malha fina (h)
80x24 volumes	- segunda malha (2h)
40x12 volumes	- terceira malha (4h)
20x6 volumes	- quarta malha (8h)
10x3 volumes	- quinta malha (16h)

Soluções aerodinâmicas para o cilindro são mostradas para números de Mach da corrente livre variando entre 0,2 e 0,01. Como estas soluções foram obtidas usando as equações de Euler, as linhas de pressão constantes são simétricas.

A Fig. 7.2 mostra as linhas de pressão constante obtidas para Mach = 0,2. Verifica-se que estas linhas são simétricas e isentas de oscilações. O coeficiente de pressão correspondente é mostrado na Fig. 7.3. Este é comparado com a solução teórica (potencial) que, para escoamentos incompressíveis, pode ser escrita como [82]

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho \bar{q}_\infty^2} = 2 \cos 2\varphi - 1$$

Verifica-se que existem diferenças entre o coeficiente de pressão obtido numericamente e o teórico na região da expansão (para $\varphi = 90$ e 270 graus). Esta diferença é esperada, pois a solução teórica não considera as variações de massa específica, que são consideradas no presente trabalho.

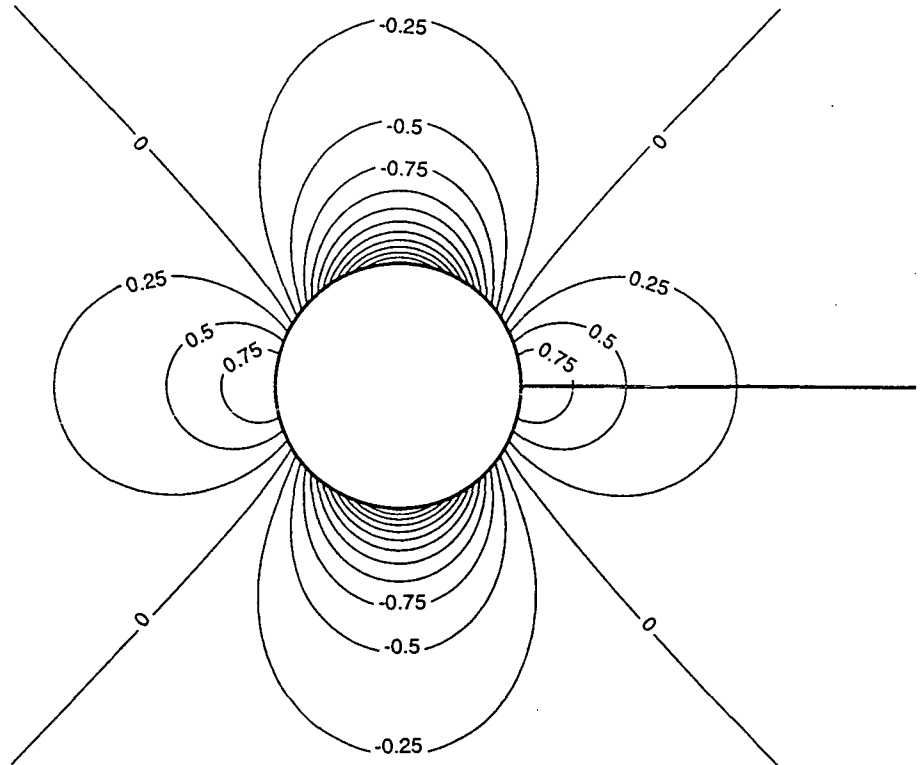


Fig. 7.2 Linhas de pressão constante para o cilindro,
Mach = 0,2

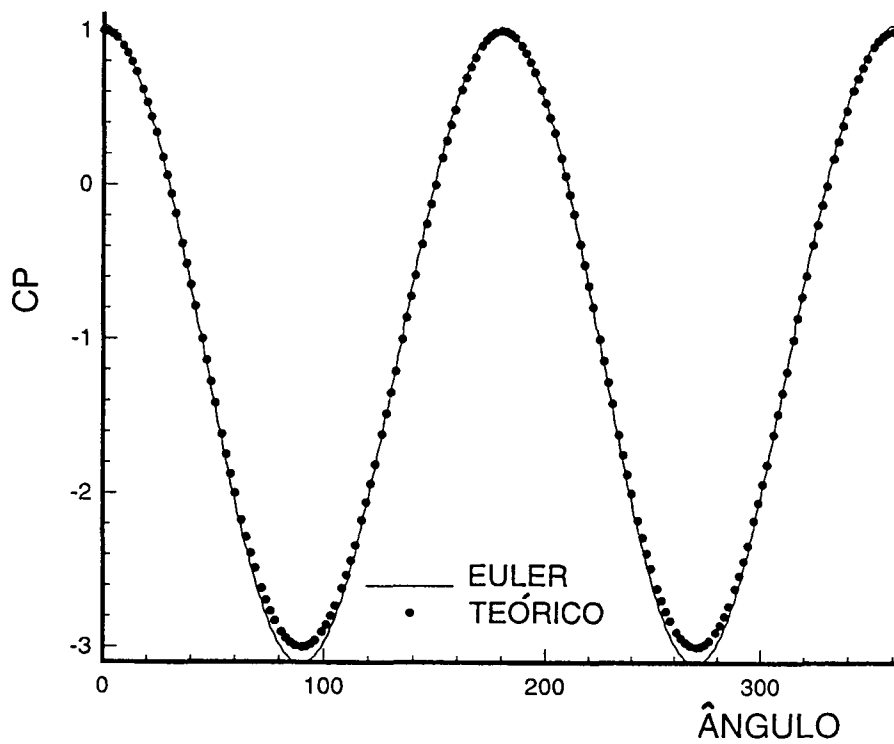


Fig. 7.3 Coeficiente de pressão para o cilindro,
Mach = 0,2

A seguir são apresentadas as soluções obtidas para Mach = 0,01. As linhas de pressão constante são mostradas na Fig. 7.4. Observa-se novamente boa simetria das linhas de pressão.

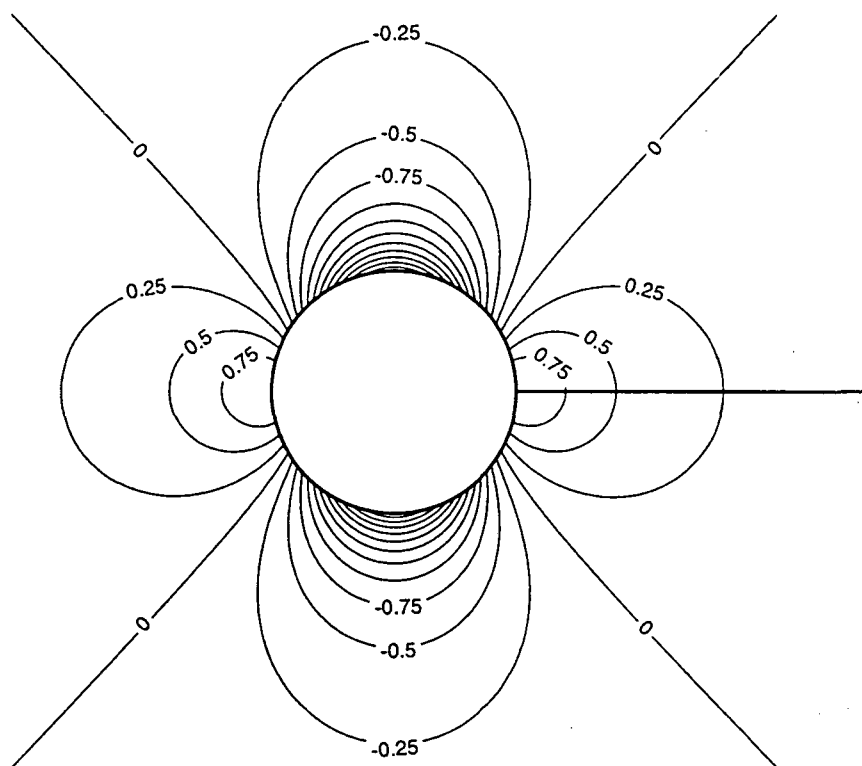


Fig. 7.4 Linhas de pressão constante para o cilindro, Mach = 0,01

O coeficiente de pressão correspondente é mostrado na Fig. 7.5. Verifica-se que as diferenças que existiam na região de expansão para Mach 0,2 desapareceram pois as variações de massa específica para Mach = 0,01 são muito pequenas.

A seguir apresentam-se estudos de convergência. A Fig. 7.6 compara a taxa de convergência para Mach = 0,1 para diferentes malhas (160x48, 80x24 e 40x12 volumes). Verifica-se que são necessários, aproximadamente, 4000 passos de tempo para obter a solução numérica para a malha contendo 160x48 volumes, para um

critério de convergência da ordem de $10E-4$ e $Mach = 0,1$. Enquanto isto, aproximadamente 250 e 1000 passos de tempo são suficientes para uma malha contendo 40×12 e 80×24 volumes, respectivamente. O resíduo parece estagnar em torno de $10E-5$, por ter sido empregada simples precisão.

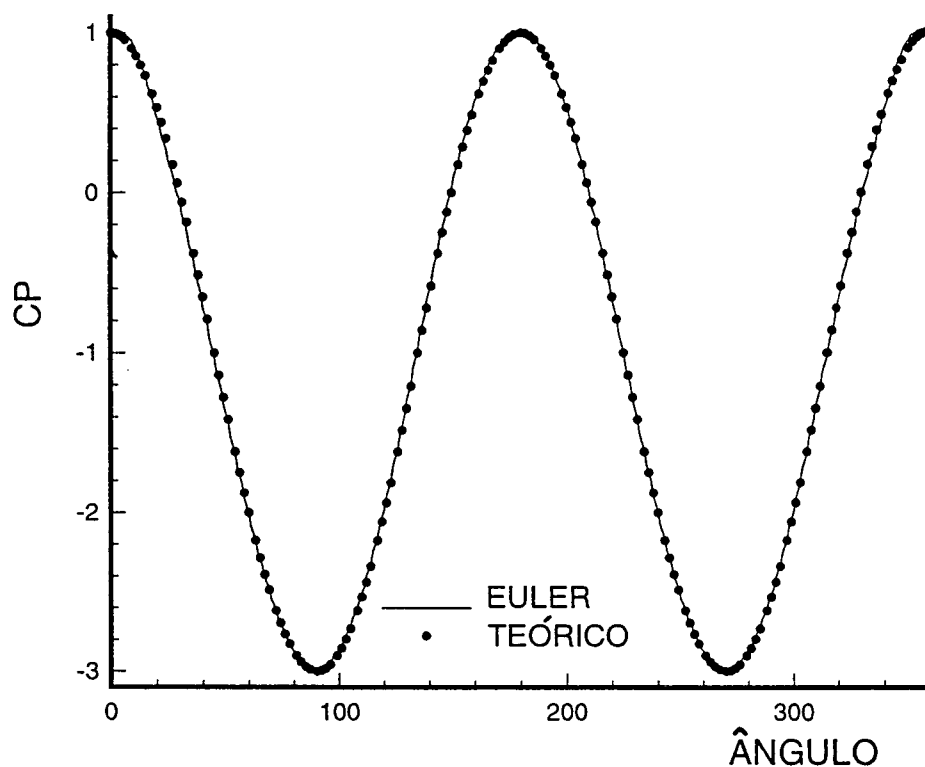


Fig. 7.5 Coeficiente de pressão para o cilindro,
 $Mach = 0,01$

A Fig. 7.7 compara a taxa de convergência para $Mach 0,2$ e $0,01$ quando emprega-se a técnica "multigrid" (multigrade). Observa-se agora que aproximadamente 400 passos de tempo são o suficiente para obter a solução em regime permanente para uma malha de 160×48 volumes. Isto quer dizer que aproximadamente 90% do tempo computacional pode ser economizado quando emprega-se esta técnica,

uma vez que o tempo gasto nas malhas grossas é muito menor que o necessário na malha fina.

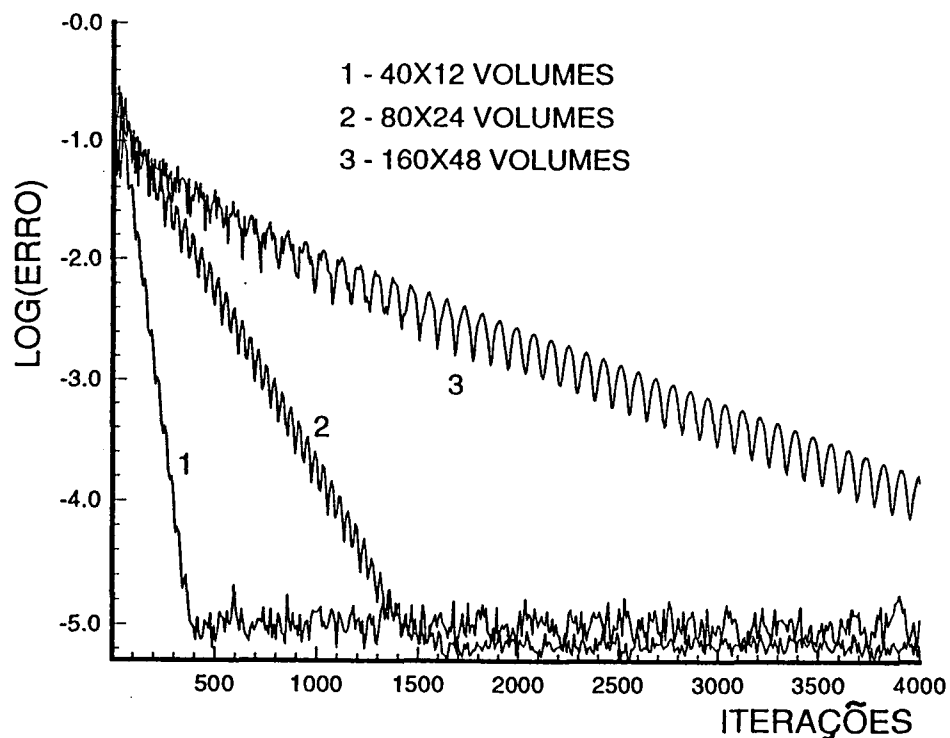


Fig. 7.6 Convergência para o cilindro para malhas diferentes, Mach = 0,1

O estudo do refinamento da malha para Mach = 0,1 é mostrado na Fig. 7.8. Verifica-se que a malha contendo 80x24 volumes representa razoavelmente bem o coeficiente de pressão (em termos de engenharia). A malha contendo 160x48 volumes é usada com a finalidade de obter precisões do coeficiente de pressão da ordem de 1%.

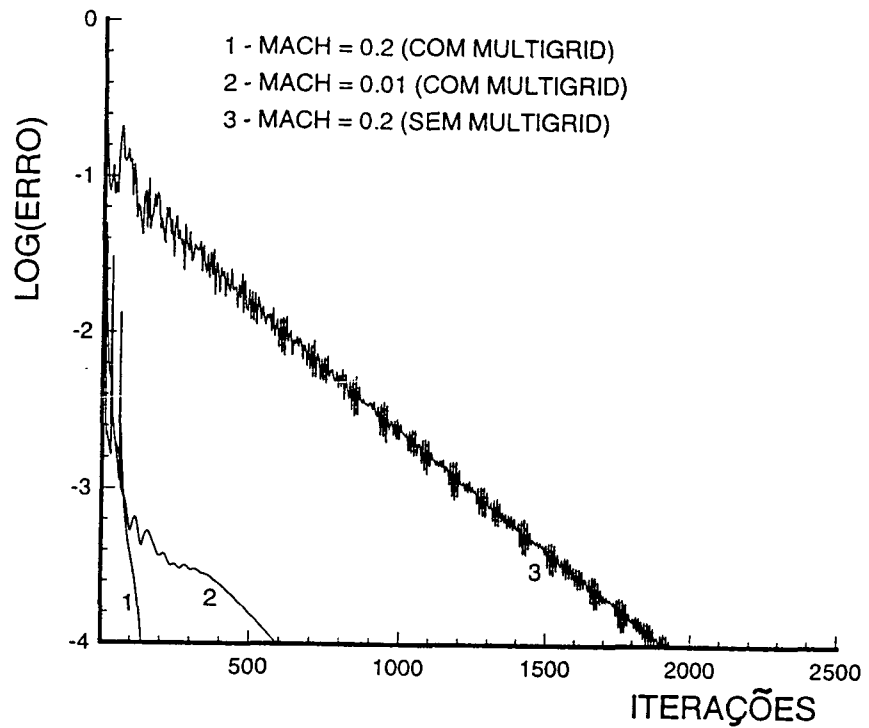


Fig. 7.7 Convergência para o cilindro para números de Mach variando entre 0,2 e 0,01

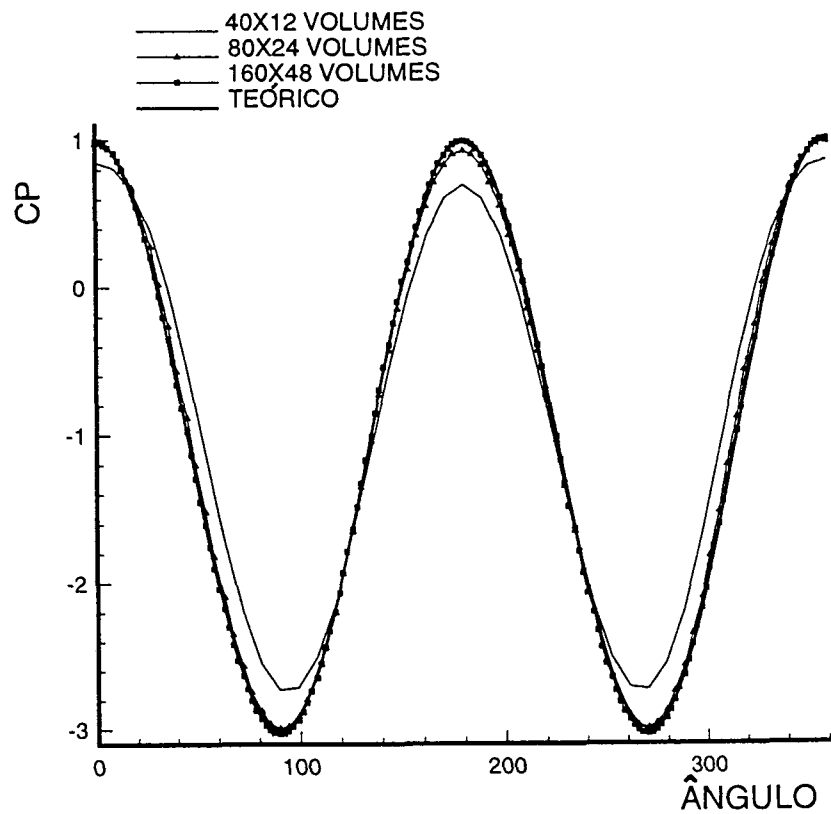


Fig. 7.8 Refinamento da malha para o cilindro, Mach = 0,1

Os resultados numéricos obtidos para escoamento incompressível sobre o cilindro demonstram que a presente metodologia compressível pode ser empregada para obter soluções com precisão da ordem de 1% no C_p para a discretização espacial de segunda ordem, quando do emprego de pré-condicionamento. Caso tal precisão não seja necessária, malhas mais grosseiras poderão ser utilizadas, como a segunda malha utilizada no processo "multigrid", que fornece precisões da ordem de 3% no C_p .

Verificou-se ainda que soluções incompressíveis para $Mach = 0,01$ podem ser obtidas empregando o código para resolver escoamentos compressíveis com expoente de dissipação artificial w da ordem de zero. Isto pode acarretar diferenças no coeficiente de pressão da ordem de 2 a 3%. Para escoamentos incompressíveis deve-se ainda empregar dois passos de tempo (Runge-Kutta) no processo "multigrid". Neste caso o processo "multigrid" é denominado de não convencional.

O emprego de técnicas para acelerar a convergência proporcionaram economias da ordem de 90%, uma vez que as iterações executadas nas malhas grossas são muito mais rápidas que as realizadas nas malhas finas.

7.1.2 Superfície contendo curvatura (para $Mach = 0,3$)

O estudo do escoamento sobre superfícies curvas é de grande interesse para a simulação de painéis bidimensionais. Este estudo visa determinar a habilidade do presente código em captar os gradientes de pressão sobre uma superfície curva para curvaturas variáveis.

A malha utilizada, mostrada na Fig. 7.9, para esta finalidade contém 160x48 volumes, sendo 1/3 destes sobre a parte curva. A distância das linhas na direção vertical é escolhida de forma a captar os gradientes de pressão adequadamente. Conforme a distância em relação à superfície aumenta, aumenta também o tamanho dos volumes. O contorno externo distancia-se aproximadamente 30 cordas da superfície do corpo, permitindo a aplicação da condição de contorno longe do corpo.

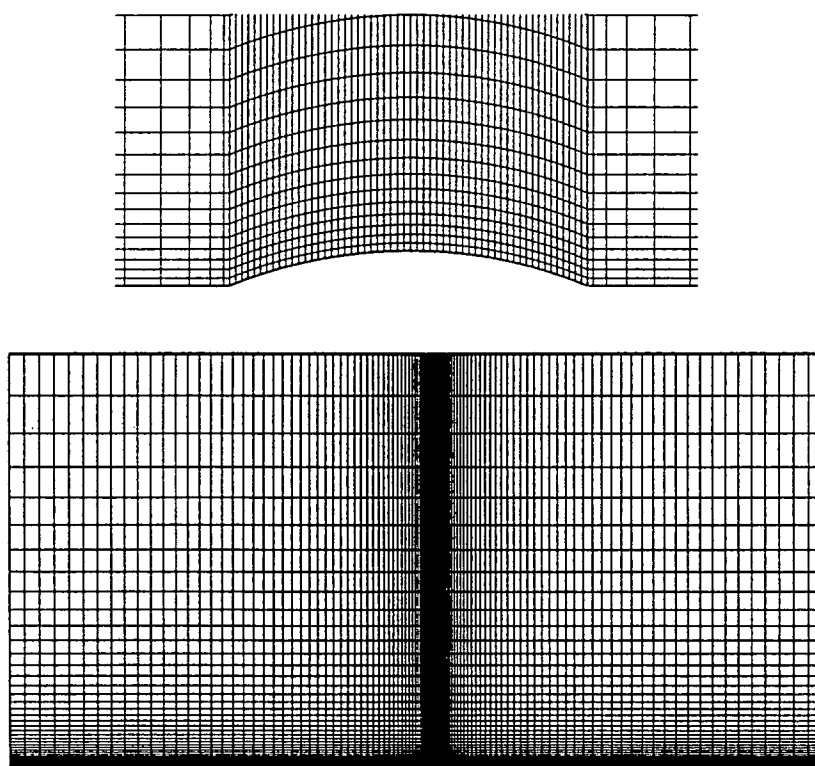


Fig. 7.9 Malha utilizada para uma superfície com curvatura de 10%

A Fig. 7.10 apresenta as linhas de pressão constante para uma superfície contendo curvatura de 1%. Apesar da pequena curvatura, observa-se que as linhas de pressão obtidas são simétricas.

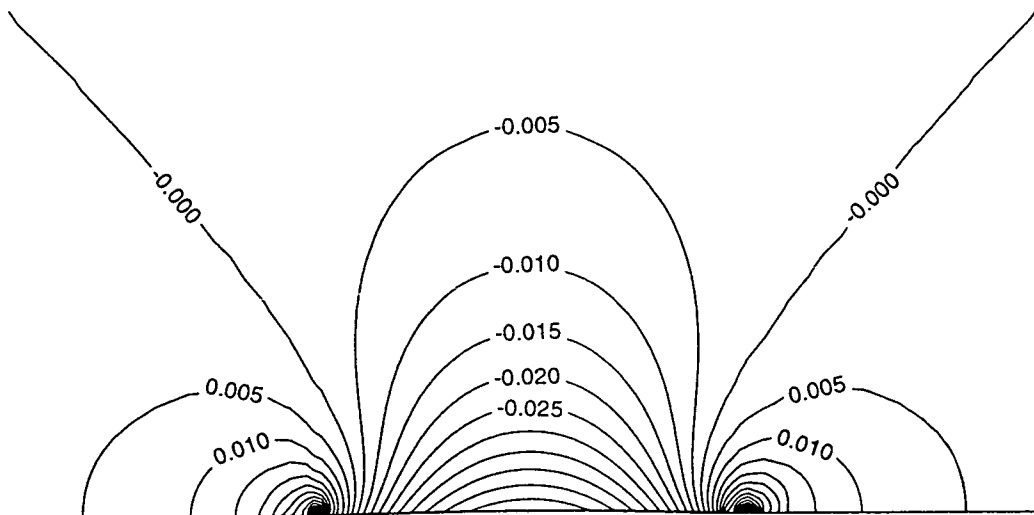


Fig. 7.10 Linhas de pressão constante para uma superfície com curvatura de 1%

As linhas de pressão constante para superfície contendo curvatura de 5% são indicadas na Fig. 7.11. Como a curvatura é maior que a anterior é relativamente mais fácil captar os gradientes de pressão que já possuem valores da ordem de 5 vezes a dos obtidos para curvatura de 1%. No entanto, uma curvatura de 5% ainda pode ser considerada como pequena.

As linhas de pressão constante para uma superfície contendo curvatura de 20% são mostradas na Fig. 7.12. As linhas de pressão constante para este caso possuem variação da ordem de 20 vezes as das indicadas para uma curvatura de 1%. No entanto, esta variação não é tão grande quanto para um cilindro.

A Fig. 7.13 compara o coeficiente de pressão para curvaturas da superfície variando entre 1% e 20% (1%, 2%, 5%, 10% e 20%). Observa-se que existem algumas oscilações no coeficiente de pressão nas proximidades do início e do fim da curvatura.

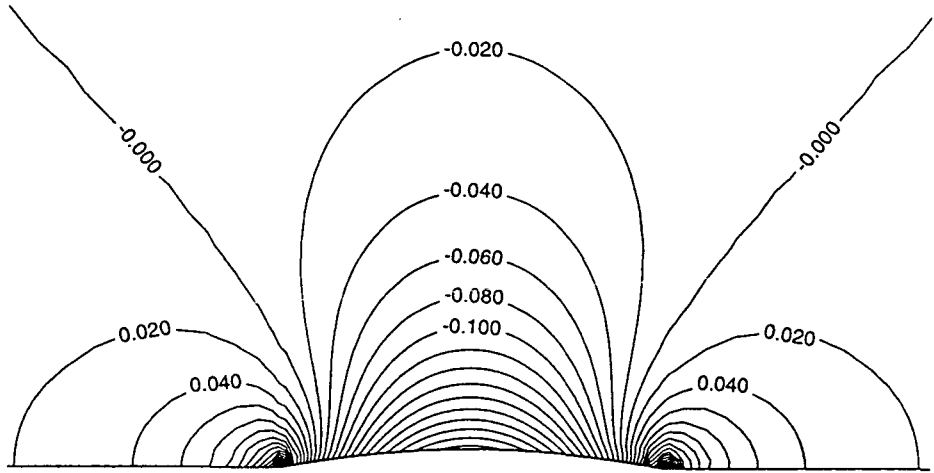


Fig. 7.11 Linhas de pressão constante para uma superfície com curvatura de 5%

Tais oscilações poderiam ser eliminadas pela construção de uma malha mais refinada nestas regiões o que proporcionaria um melhor escalonamento da dissipação artificial.

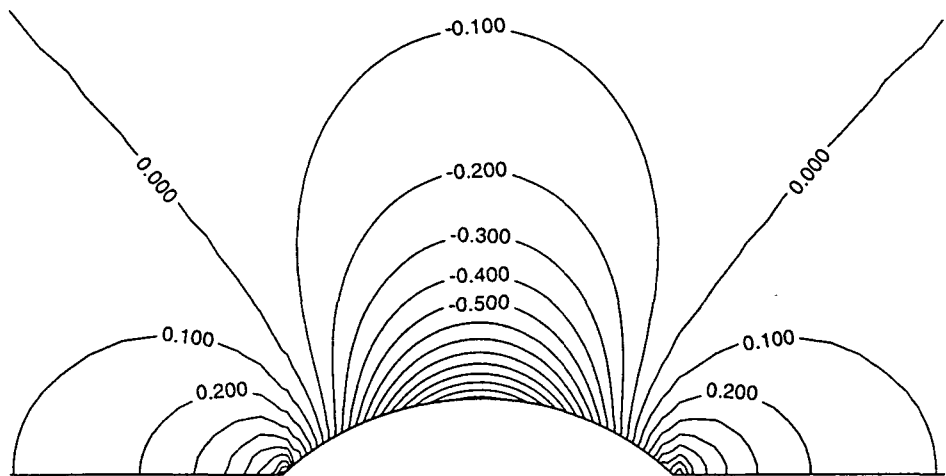


Fig. 7.12 Linhas de pressão constante para uma superfície com curvatura de 20%

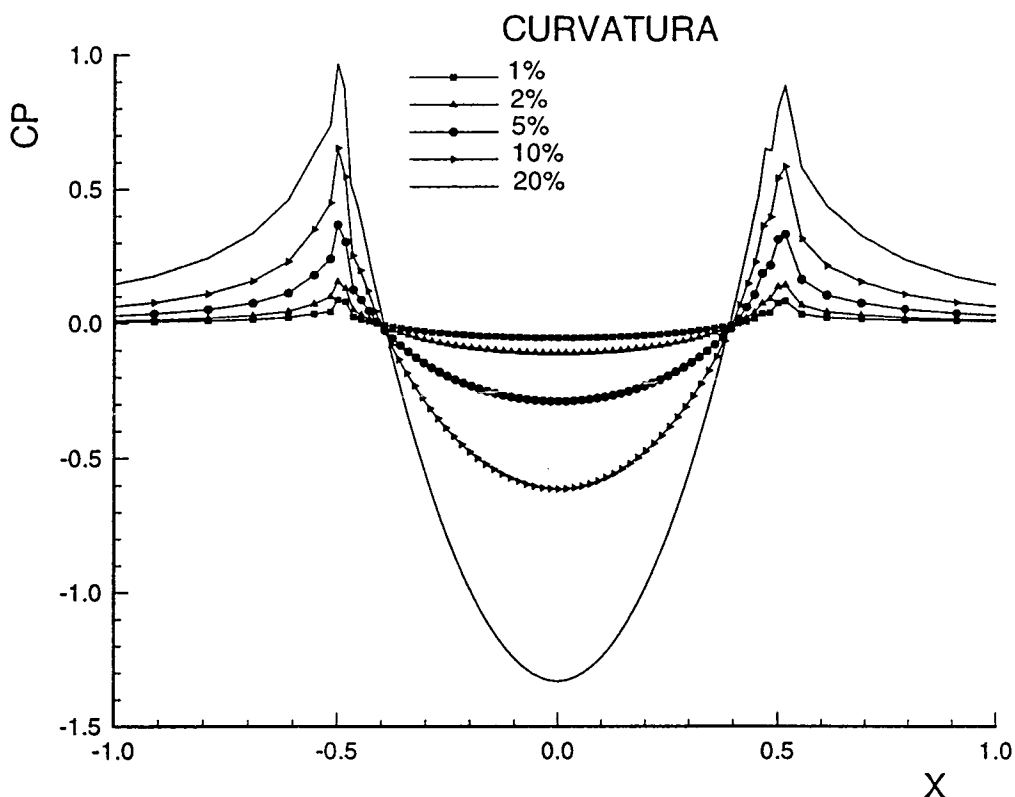


Fig. 7.13 Coeficiente de pressão para uma superfície com curvaturas variando entre 1% a 20%

Para finalizar, a Fig. 7.14 mostra a taxa de convergência para uma curvatura de 1%. A comparação entre as taxas de convergência para diferentes curvaturas não é apresentada pois a mesma demonstrou ser praticamente constante. Conclui-se, então, que a solução pode ser obtida com aproximadamente 300 iterações para critérios de convergência da ordem de $10E-5$, quando emprega-se a técnica multigrid para as seguintes malhas:

160x48 volumes	- malha fina (h)
80x24 volumes	- segunda malha (2h)
40x12 volumes	- terceira malha (4h)
20x6 volumes	- quarta malha (8h)
10x3 volumes	- quinta malha (16h)

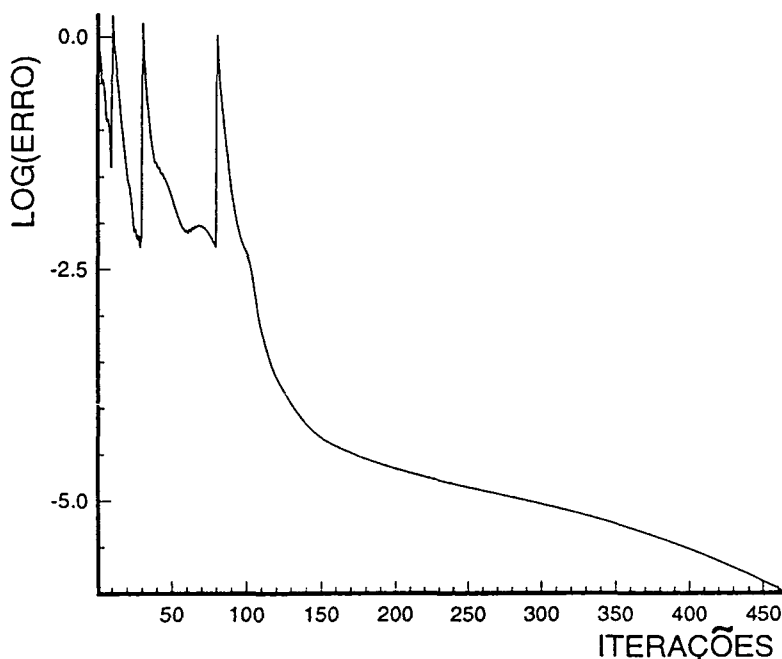


Fig. 7.14 Convergência para uma superfície com curvatura de 1%

No processo "multigrid" foram realizadas 10 iterações na quarta malha, 20 iterações na terceira malha, 50 iterações na segunda malha e o restante na malha fina, onde é aplicado o ciclo W .

Os resultados numéricos obtidos para Mach = 0,3 sobre uma superfície contendo curvatura demonstram que a presente metodologia pode ser empregada para obter soluções para curvaturas da ordem de 1%. Quando uma discretização espacial de primeira ordem foi usada, a distribuição de pressão sobre a superfície não foi captada.

Observou-se ainda que a taxa de convergência manteve-se praticamente constante para este problema. Cento e cinquenta iterações são o suficiente para obter resíduos da ordem de $10E-4$. Portanto, a metodologia apresentada permite obter soluções sobre superfícies contendo curvaturas variadas de forma eficiente.

7.1.3 Perfil NACA 0012 (Mach variando entre 0,005 e 0,8)

O aerofólio NACA 0012 foi escolhido pois ele representa os problemas aerodinâmicos de interesse. Todas as soluções para escoamentos incompressíveis desta secção foram obtidas para o ângulo de ataque 5° .

A malha utilizada é do tipo "C" e contém 256x64 volumes, conforme mostra a Fig. 7.15. Esta mostrou ser adequada para números de Mach variando entre 0,8 e 0,002 [34]. A malha foi gerada elipticamente e possui adequada concentração das linhas nas proximidades do aerofólio. Conforme aumenta a distância em relação ao corpo, aumenta o tamanho dos volumes. A fronteira externa encontra-se a aproximadamente 20 comprimentos de corda do aerofólio. Usando a relação 2h, as seguintes malhas foram obtidas para o processo "multigrid":

256x64 volumes	- malha fina (h)
128x32 volumes	- segunda malha (2h)
64x16 volumes	- terceira malha (4h)
32x8 volumes	- quarta malha (8h)
16x4 volumes	- quinta malha (16h)

A Fig. 7.16 mostra as linhas de pressão constante calculadas para Mach 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$. Observa-se a formação de choque sobre a superfície do aerofólio que, devido ao ângulo de ataque, não é simétrico. A boa qualidade do choque apresentado depende da função de interpolação usada, que é de segunda ordem.

A Fig. 7.17 compara o coeficiente de pressão obtido

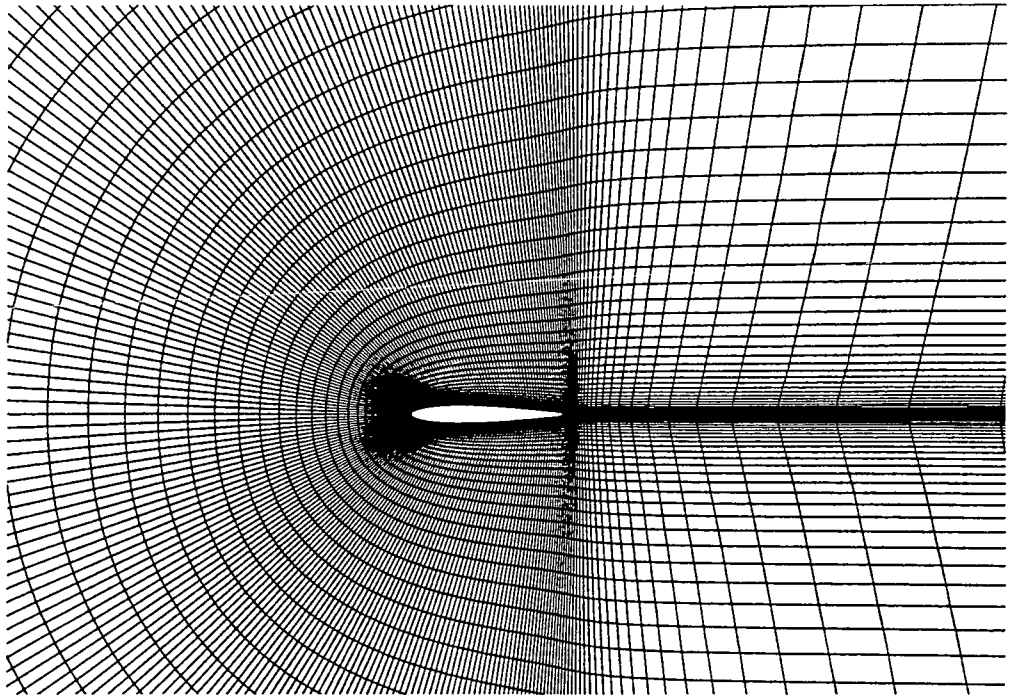


Fig. 7.15 Malha utilizada para o NACA 0012, "C", 256x64 volumes

numericamente com o experimental. Verifica-se um pequeno deslocamento do coeficiente de pressão em direção a parte traseira do aerofólio. Associa-se esta diferença a imprecisões no cálculo da geometria utilizada do aerofólio no código computacional. No entanto, pode-se dizer que a concordância é boa.

Experiências realizadas pelo autor [35] empregando a metodologia para escoamentos a qualquer velocidade demonstraram grande dificuldade desta metodologia para captar o coeficiente de pressão sobre o aerofólio NACA 0012, conforme mostra a Fig. 7.18, quando comparada com a apresentada por Pahlke [83]. Verifica-se que o choque some quando do emprego de uma discretização espacial de primeira ordem. Por este motivo preferiu-se a formulação compressível para resolver os problemas aerodinâmicos de interesse.

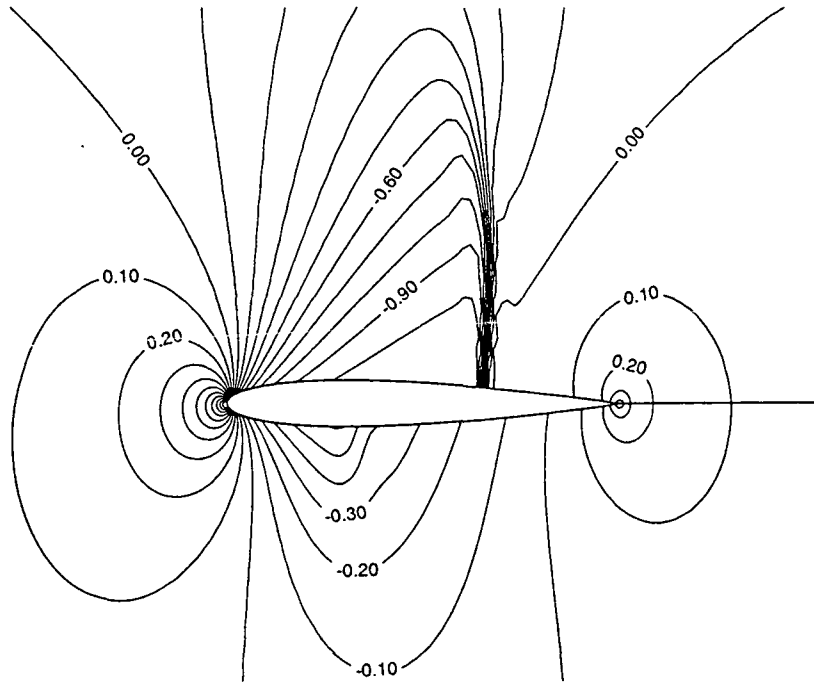


Fig. 7.16 Linhas de pressão constante para o NACA 0012,
Mach = 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$

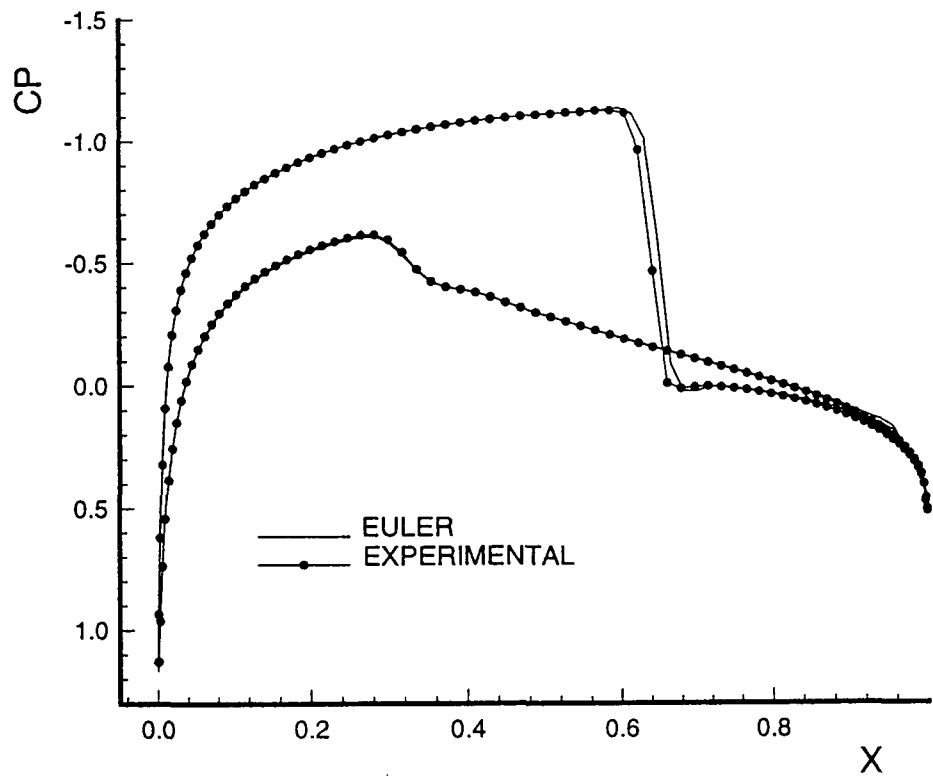


Fig. 7.17 Coeficiente de pressão para o NACA 0012,
Mach = 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$

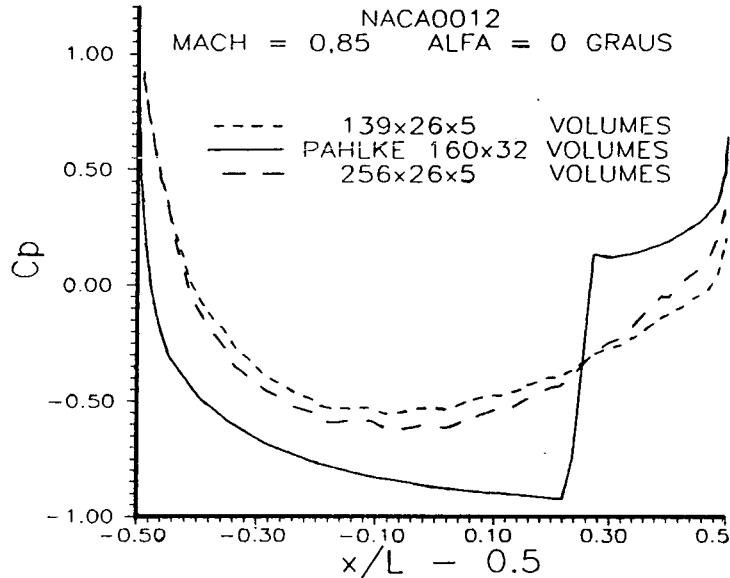


Fig. 7.18 Comparação do coeficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,85 e $\alpha = 0^\circ$

A Fig. 7.19 mostra as linhas de pressão constante calculadas para Mach 0,5 e $\alpha = 5^\circ$. Estas são contínuas e variam entre -2,0 e 1,0, sendo que a variação entre cada linha é 0,2.

Com relação a escoamentos incompressíveis, a Fig. 7.20 compara o coeficiente de pressão obtido numericamente para Mach = 0,5 e $\alpha = 5^\circ$ com a solução teórica [84]. Observa-se uma grande diferença no coeficiente de pressão (da ordem de 15%). Isto quer dizer que a simplificação incompressível não deve ser usada para Mach superiores a 0,3, para corpos aerodinâmicos como o NACA 0012.

A Fig. 7.21 mostra as linhas de pressão constante obtidas para Mach = 0,3. Estas tendem a se aproximar mais do aerofólio, quando comparadas com as linhas de pressão obtidas para Mach = 0,5.

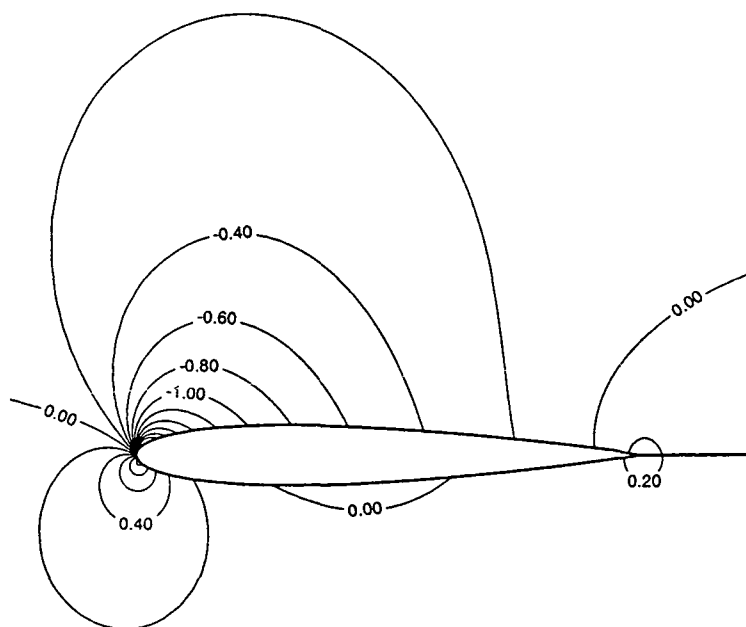


Fig. 7.19 Linhas de pressão constante para o NACA 0012,
Mach = 0,5 e $\alpha = 5^\circ$

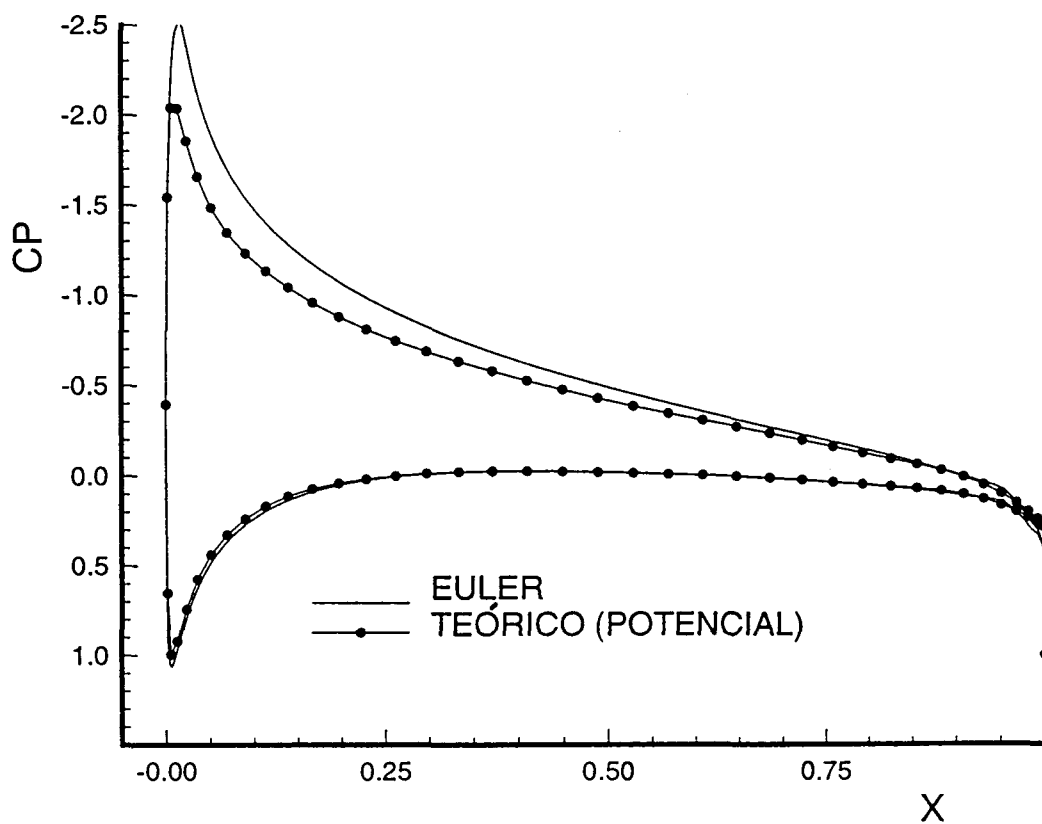


Fig. 7.20 Coeficiente de pressão para o NACA 0012,
Mach = 0,5 e $\alpha = 5^\circ$

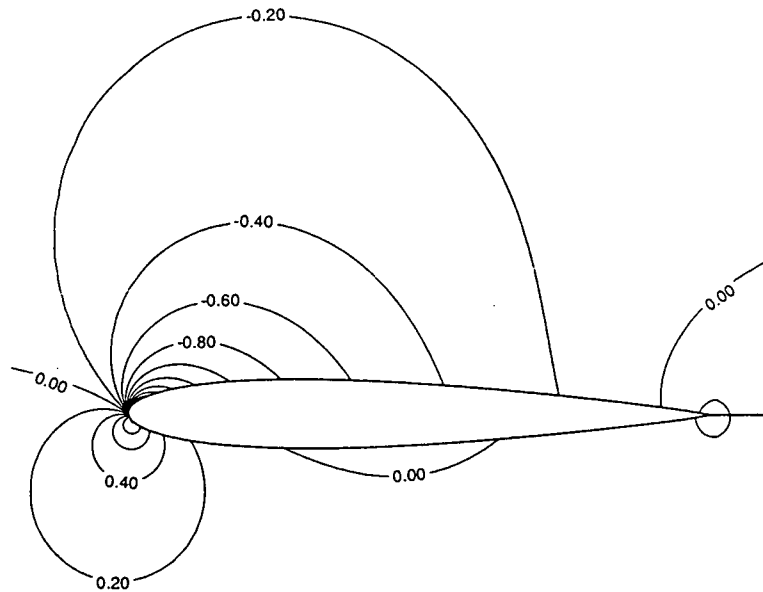


Fig. 7.21 Linhas de pressão constante para o NACA 0012,
Mach = 0,3 e $\alpha = 5^\circ$

A Fig. 7.22 compara o coeficiente de pressão calculado para Mach = 0,3. Observa-se que a diferença no coeficiente de pressão já é menor do que 5%. Tais imprecisões nem sempre são aceitáveis para problemas aeronáuticos exigindo, então, a comparação com a solução experimental.

Dando prosseguimento, soluções para escoamentos a baixa velocidade são apresentadas. A Fig. 7.23 mostra as linhas de pressão constante obtidas para Mach = 0,05. Estas linhas são concordantes com as obtidas para Mach 0,5 e 0,3 e tendem a se aproximar mais do aerofólio.

O coeficiente de pressão para Mach = 0,05 é indicado na Fig. 7.24. As diferenças que existiam para Mach 0,5 e 0,3 tornam-se, agora, da ordem de 1%, conforme o esperado.

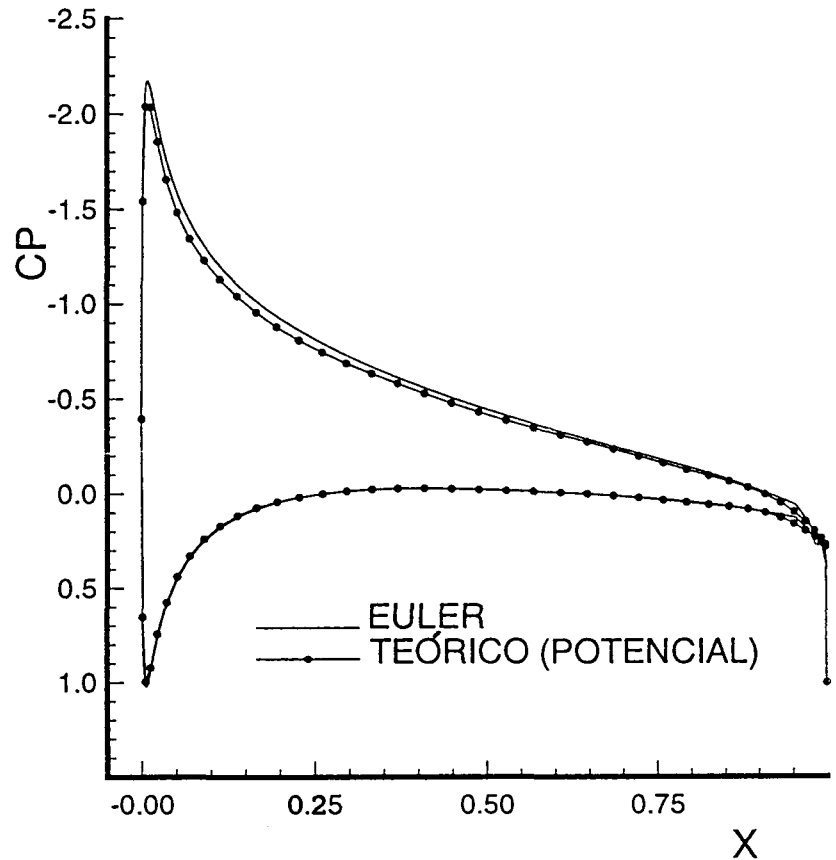


Fig. 7.22 Coeficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,3 e $\alpha = 5^\circ$

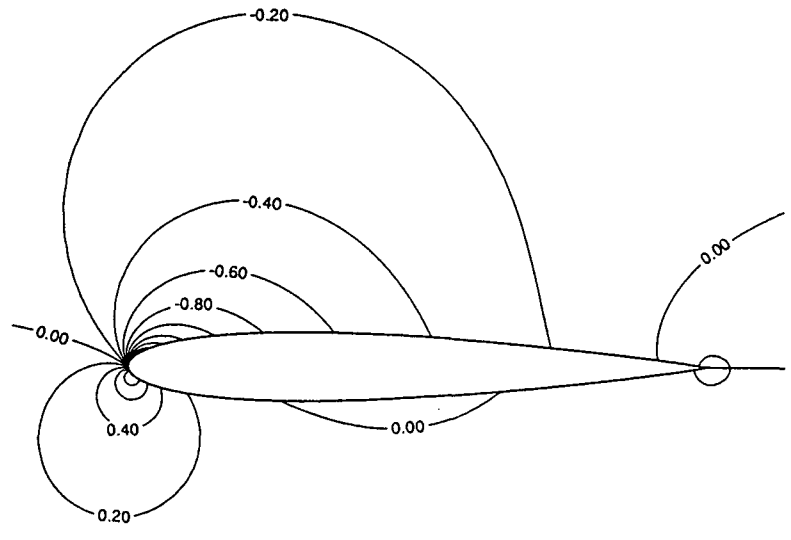


Fig. 7.23 Linhas de pressão constante para o NACA 0012, Mach = 0,05 e $\alpha = 5^\circ$

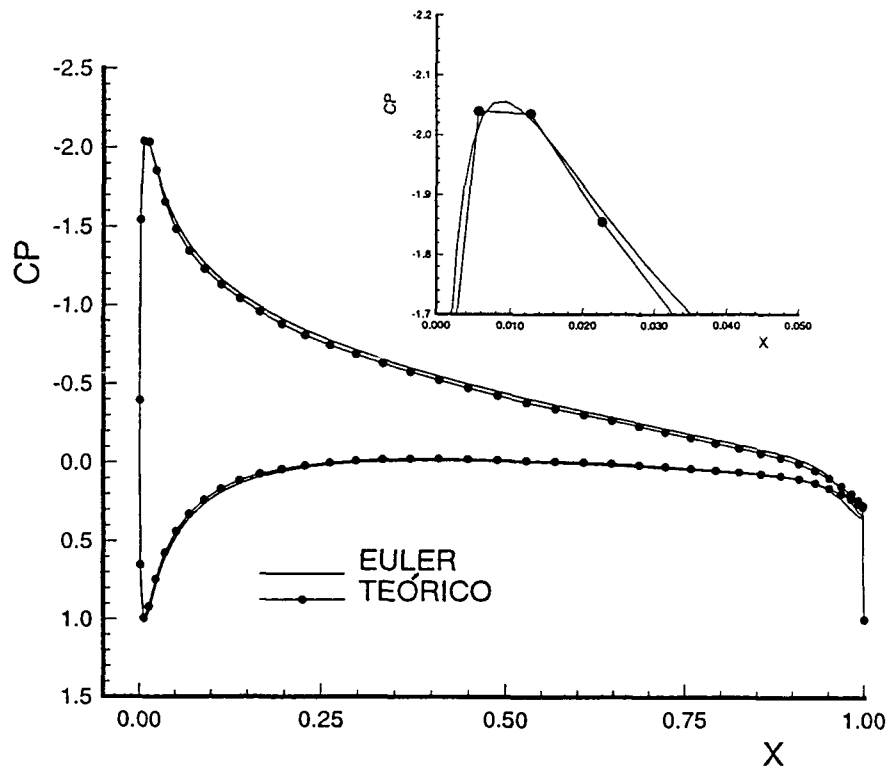


Fig. 7.24 Coeficiente de pressão para o NACA 0012, Mach = 0,05 e $\alpha = 5^\circ$

A seguir são apresentadas as soluções para Mach 0,005. A Fig. 7.25 mostra as linhas de pressão. Praticamente, não existe diferença entre as linhas de pressão para Mach 0,05 (Fig. 8.22) e 0,005, também conforme o esperado.

O coeficiente de pressão para Mach 0,005 é mostrado na Fig. 7.26. Este resultado demonstra boa concordância com a solução teórica, pois as diferenças são muito pequenas.

No que se segue, apresenta-se e compara-se a taxa de convergência para Mach da corrente livre variando entre 0,005 e 0,8. A Fig. 7.27 compara as taxas de convergência para malhas diferentes, Mach 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$ (256x64, 128x32 volumes), com e sem técnicas "multigrid". Observa-se que a eficiência desta técnica aumenta com o refino da malha. Enquanto que para uma

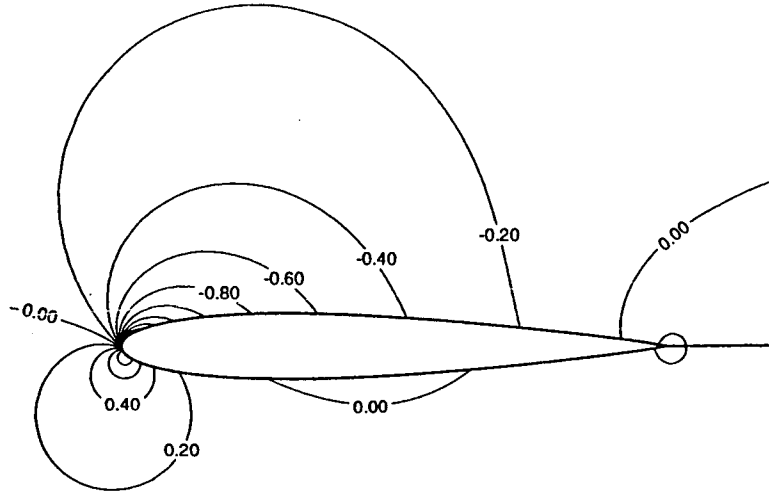


Fig. 7.25 Linhas de pressão constante para o NACA 0012,
 Mach = 0,005 e $\alpha = 5^\circ$

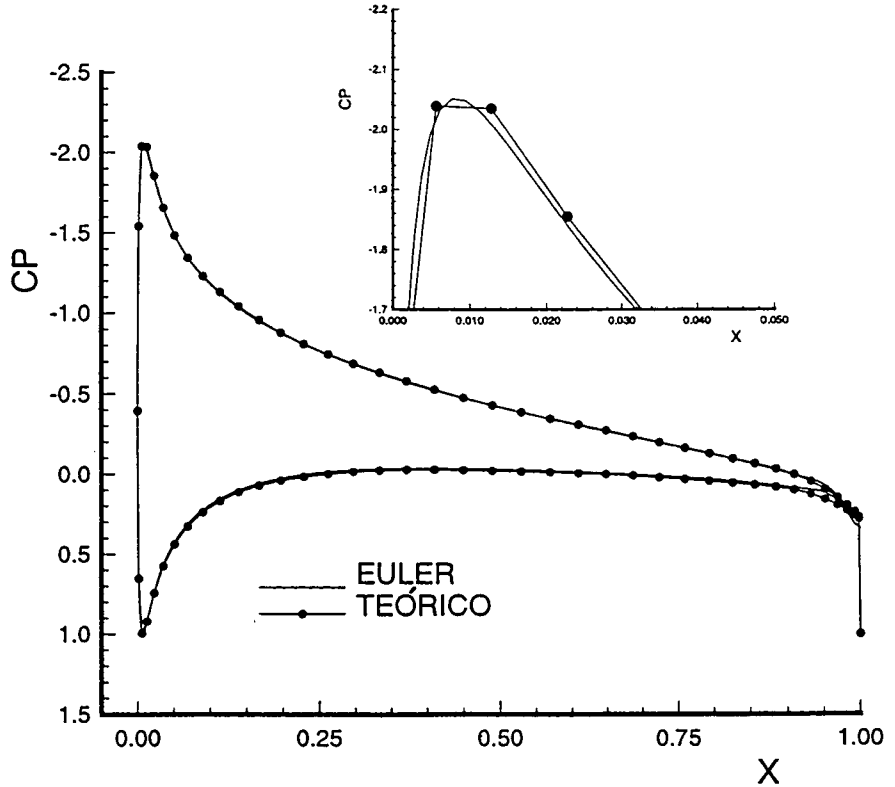


Fig. 7.26 Coeficiente de pressão para o NACA 0012,
 Mach = 0,005 e $\alpha = 5^\circ$

malha de 128x32 volumes o fator de redução é da ordem de 6 vezes, para 256x64 volumes este fator é da ordem de 10 vezes.

A comparação da taxa de convergência é também apresentada na Fig. 7.28 para Mach 0,1 e 0,01, com técnicas "multigrid" (com 1 ou 2 passos para cada malha) e sem estas. Verifica-se que o fator 10 é um pouco reduzido. Mesmo assim, a técnica "multigrid" pode ser eficientemente empregada para escoamentos incompressíveis. A Fig. 7.28 mostra ainda que 2 passos para cada malha são aconselháveis no processo "multigrid" em caso de escoamentos a baixa velocidade [34]. A Fig. 7.29 compara a taxa de convergência para Mach = 0,1 com e sem técnicas "multigrid".

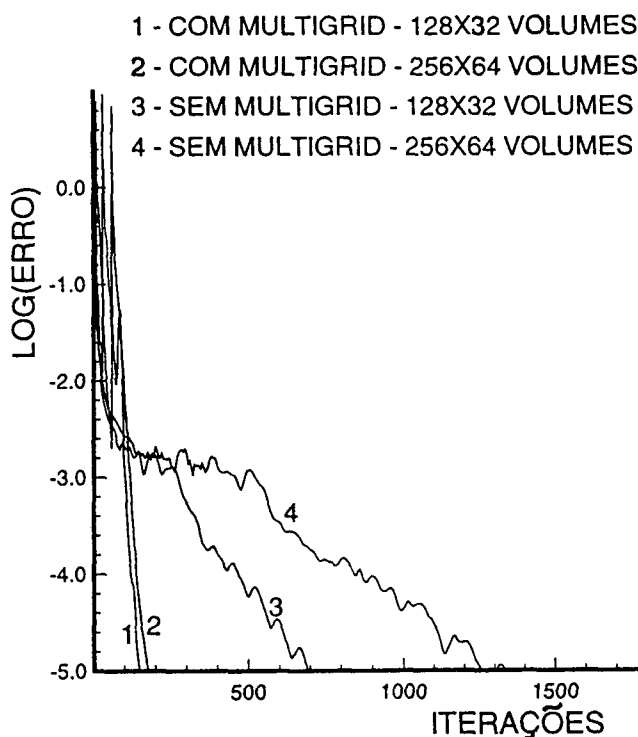


Fig. 7.27 Convergência para o NACA 0012, Mach 0,8 e $\alpha = 1,25^\circ$

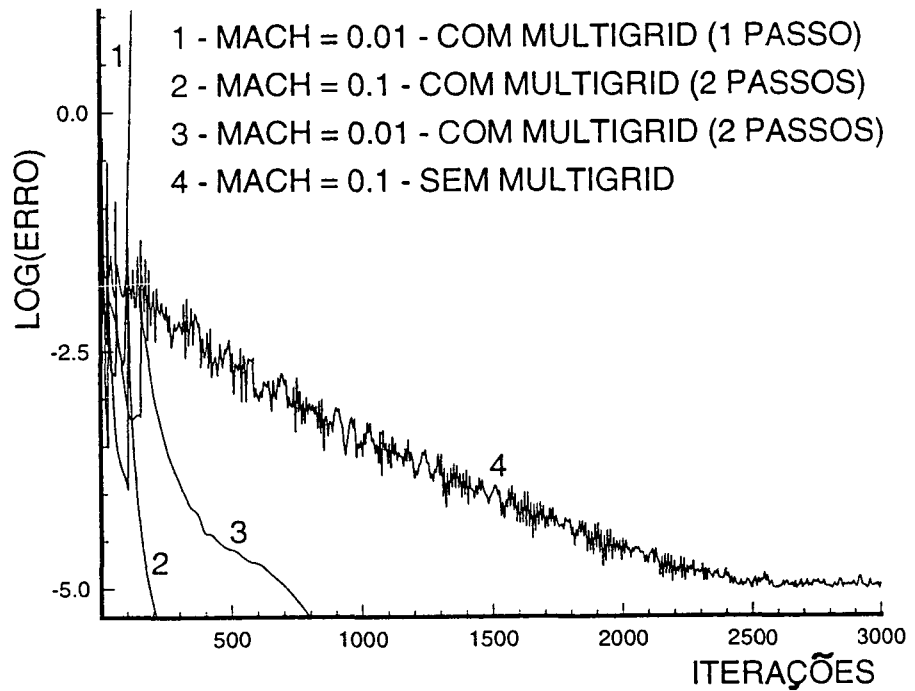


Fig. 7.28 Comparação da convergência para o NACA 0012 para Mach 0,1 e 0,01, $\alpha = 5^\circ$

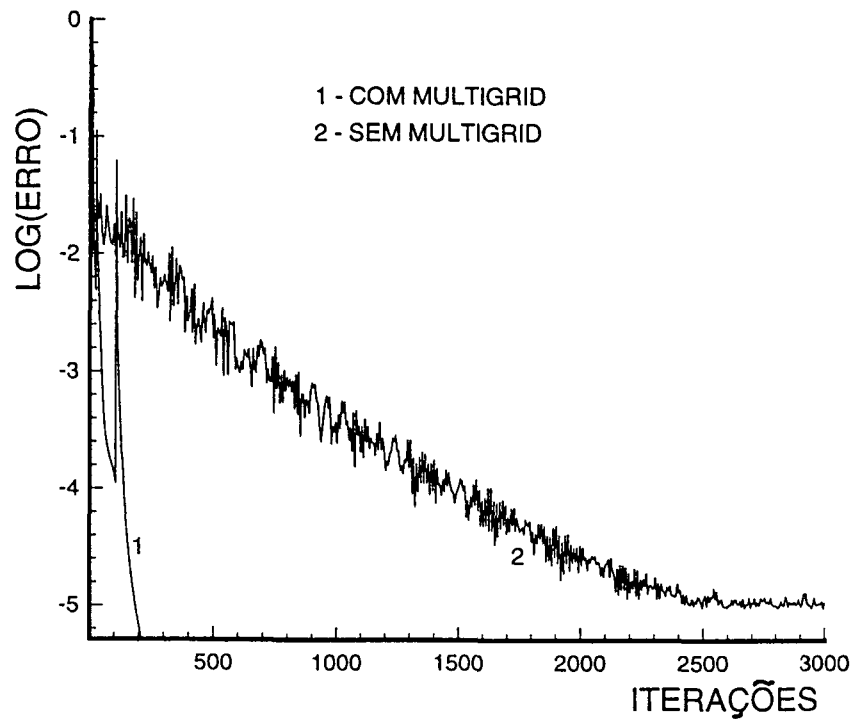


Fig. 7.29 Convergência para o NACA 0012, Mach 0,1 e $\alpha = 5^\circ$

Para finalizar, na Fig. 7.30 são mostradas histórias da convergência para valores de Mach variando entre 0,8 e 0,005. Verifica-se que o número de iterações quadruplica quando o número de Mach varia entre 0,8 e 0,005 para coeficiente $\epsilon = 0,8$ na média dos resíduos e para um critério de convergência $10E-4$. Este comportamento pode ser melhorado escrevendo-se ϵ variável como uma função do número de Mach ($\epsilon = 9 M^2$, conforme Dr. Radespiel do DLR).

A Fig. 7.31, por sua vez, mostra a taxa de convergência para Mach = 0,1 para diferentes malhas (32x8, 64x16, 128x32 e 256x64 volumes). Verifica-se que menos de 10% das iterações necessárias para obter a solução numa malha contendo 256x64 volumes é suficiente numa malha contendo 32x8 volumes. No entanto, aproximadamente, 20% das iterações são necessárias para uma malha contendo 64x16 volumes.

A Fig. 7.32 apresenta o comportamento da convergência para o coeficiente de sustentação, Mach = 0,1, com e sem técnicas "multigrid". Verifica-se um rápido equilíbrio do coeficiente de sustentação quando do emprego desta técnica. Tal comportamento talvez seja causado pelo emprego de malhas grossas que, com os seus grandes volumes, permitem um rápido equilíbrio global do método de solução numérica.

Verifica-se, então, que são necessárias mais iterações para obter soluções a baixa velocidade. Este comportamento está associado à dificuldade de escalar adequadamente a dissipação artificial e o passo de tempo quando o número de Mach tende a zero, uma vez que o conjunto de autovalores resultante dificulta a solução do sistema de equações. Mesmo assim, o critério de convergência utilizado permite a obtenção de soluções para Mach 0,01 com aproximadamente 400 iterações.

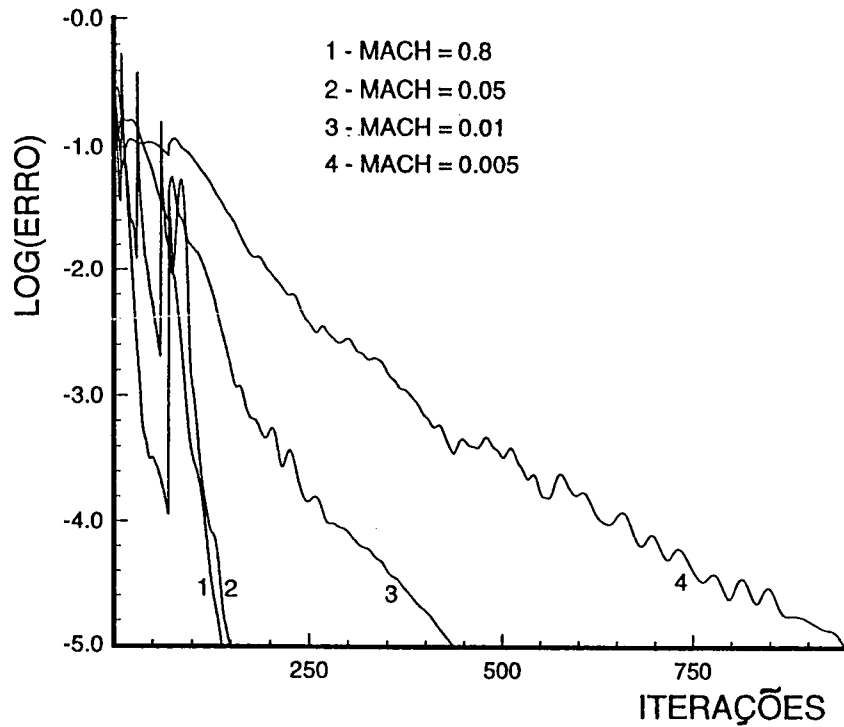


Fig. 7.30 Convergência para o NACA 0012 para Mach variando entre 0,8 e 0,005, $\alpha = 5^\circ$

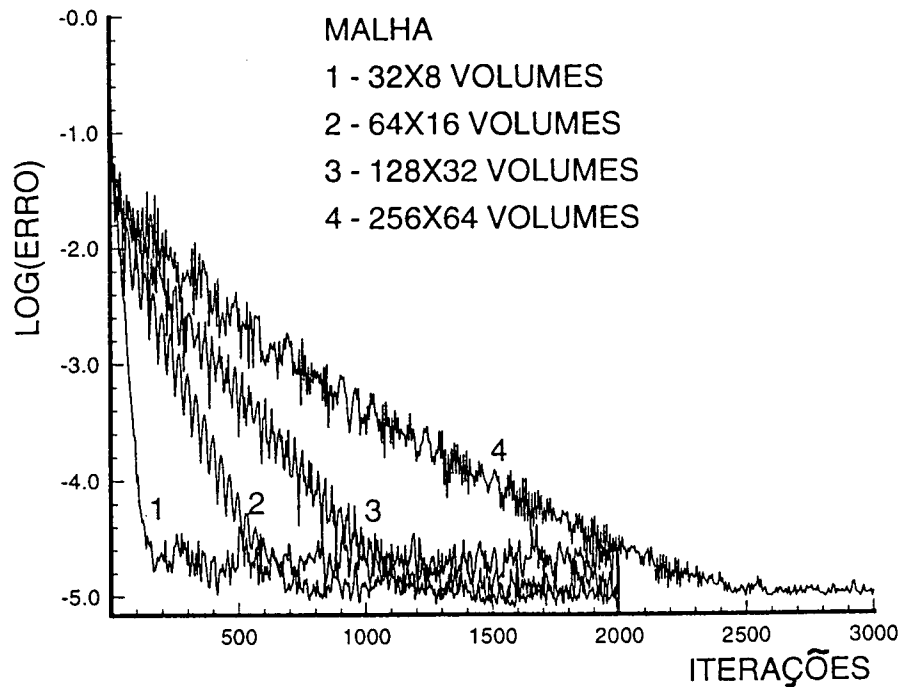


Fig. 7.31 Convergência para o NACA 0012 para malhas diferentes, Mach = 0,1 e $\alpha = 5^\circ$

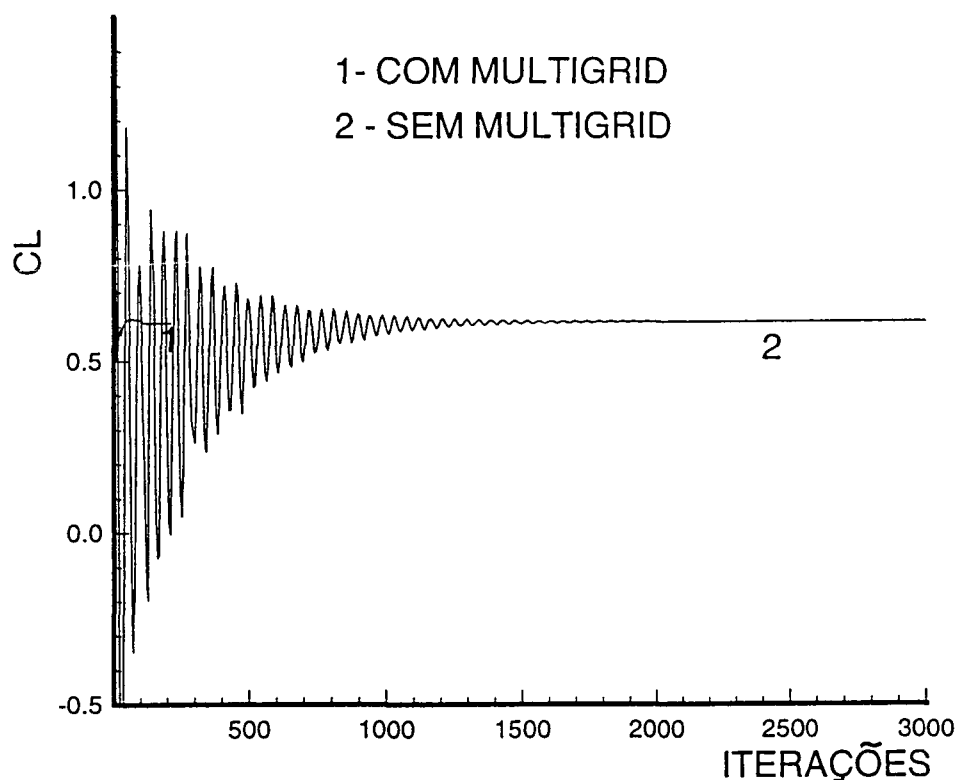


Fig. 7.32 Convergência do coeficiente de sustentação para o NACA 0012, Mach = 0,01 e $\alpha = 5^\circ$

Os resultados numéricos obtidos para escoamentos compressíveis e incompressíveis sobre o aerofólio NACA 0012 demonstram que a presente metodologia pode ser empregada para obter soluções com precisões da ordem de 1% no C_p sobre corpos aerodinâmicos. A segunda malha, contendo 128x32 volumes, fornece precisões da ordem de 3% no C_p para Mach variando entre 0,3 e 0,05, conforme testes realizados pelo autor [34]. Neste caso o principal interesse é a determinação do coeficiente de pressão sobre a superfície do corpo, para o cálculo da força de sustentação.

O emprego de técnicas "multigrid" proporcionou economias da ordem de 90% para a solução de escoamentos transônicos e da ordem

de 70% para escoamentos subsônicos. A diminuição da eficiência para escoamentos incompressíveis deve-se provavelmente ao uso de coeficientes para escalar a dissipação artificial e para escalar a média dos resíduos, que ainda merecem trabalhos de otimização. Verifica-se ainda que a eficiência desta técnica aumenta com o aumento do número de volumes da malha fina. Preferiu-se a utilização de 5 malhas pois a última destas já é suficientemente grossa para amortecer os componentes dos erros que não são amortecidos nas malhas mais refinadas.

Foram necessários 2 passos (iterações) para cada malha e o ciclo "multigrid" W quando da solução de escoamentos subsônicos. Verificou-se que o coeficiente de sustentação é rapidamente determinado quando do emprego desta técnica. Desta forma acredita-se que os grandes volumes que aparecem nas malhas grossas proporcionem um rápido equilíbrio global do procedimento de solução.

7.1.4 Placa com extremidade cilíndrica

(Mach entre 0,05 e 1,5)

Uma placa, de comprimento infinito perpendicular ao plano do papel, com extremidade cilíndrica, é escolhida para ser testada sob escoamentos subsônicos, transônicos e supersônicos. A malha utilizada é do tipo "C", conforme mostra a Fig. 7.33, gerada algebricamente, e contém 144x48 volumes, sendo 144 na direção longitudinal e 48 na direção radial. Os volumes nas proximidades do corpo são do tipo retangular e o seu tamanho

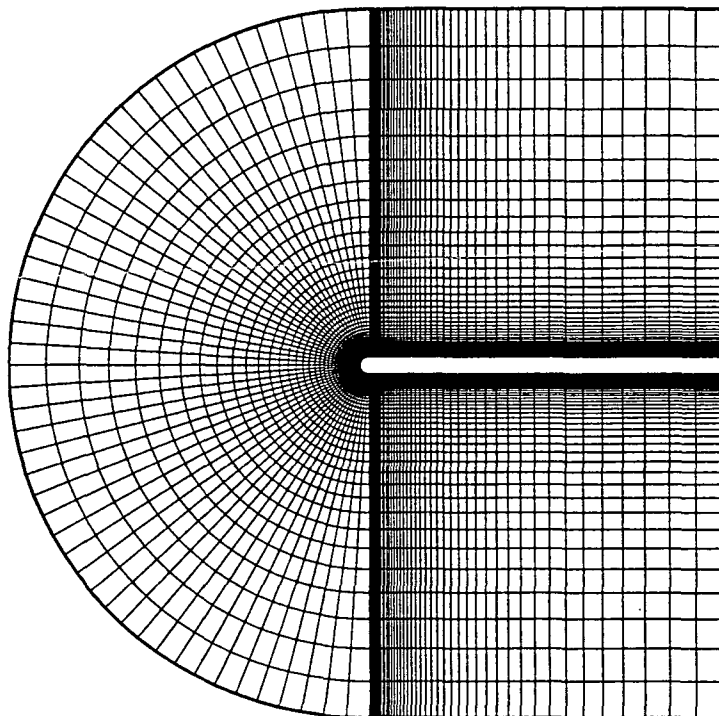


Fig. 7.33 Malha utilizada para a placa com extremidade cilíndrica

aumenta conforme aumenta a distância em relação ao corpo. O domínio externo estende-se até, aproximadamente, 30 vezes o diâmetro da parte cilíndrica.

A Fig. 7.34 apresenta as linhas de Mach constantes, obtidas para escoamento incompressível a Mach 0,05. As linhas tendem a se aproximar do corpo e a sua forma é semelhante a das linhas obtidas para um cilindro circular.

As linhas de pressão constante para escoamento transônico a Mach 0,8 e $\alpha = 0^\circ$ são mostradas na Fig. 7.35. Observa-se a formação de choque logo após a parte cilíndrica. Esta formação é esperada pois a velocidade aumenta e o número de Mach ultrapassa a unidade.

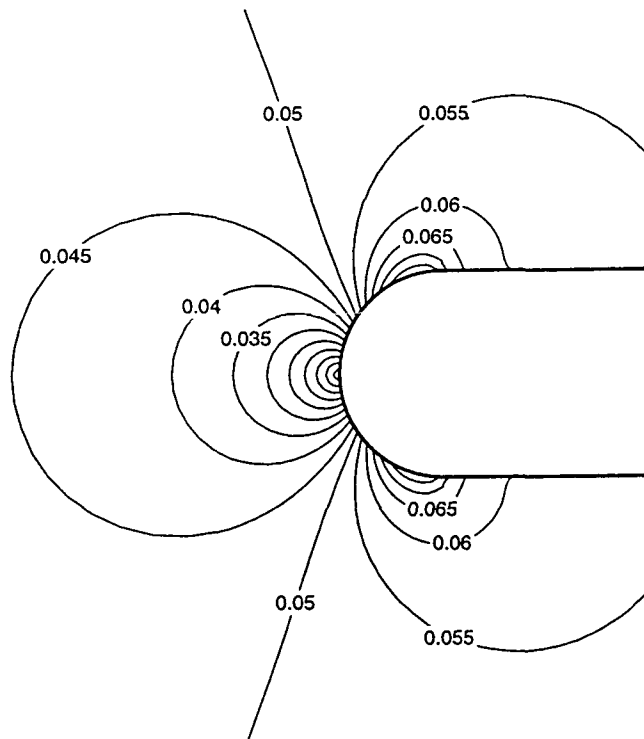


Fig. 7.34 Linhas de Mach constante para a placa com extremidade cilíndrica, Mach 0,05

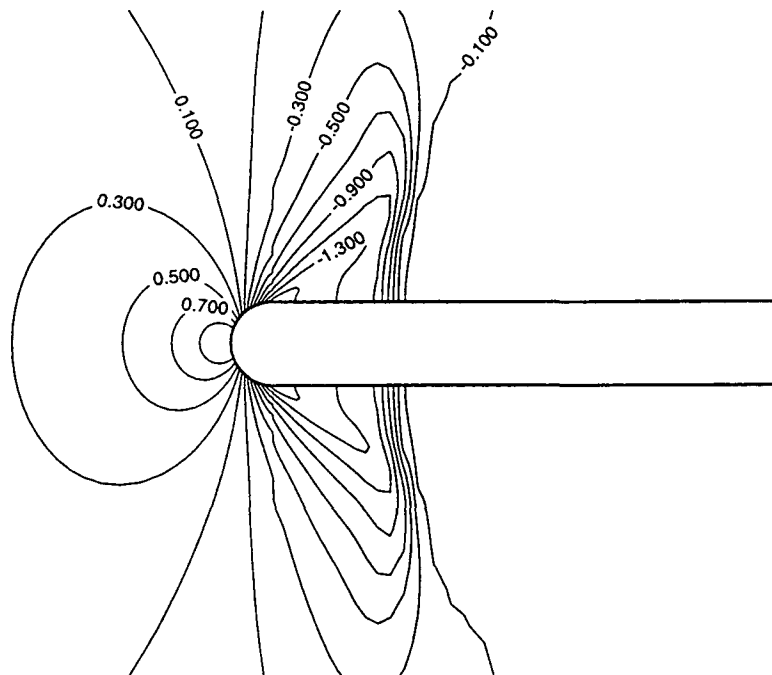


Fig. 7.35 Linhas de pressão constante para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 0,8

A Fig. 7.36 mostra as linhas de pressão constante calculadas para Mach 1,5 e $\alpha = 0^\circ$. Para este caso, o choque forma-se um pouco antes do corpo. Observa-se, ainda, algumas oscilações na região do surgimento do choque as quais podem ser eliminadas refinando a malha.

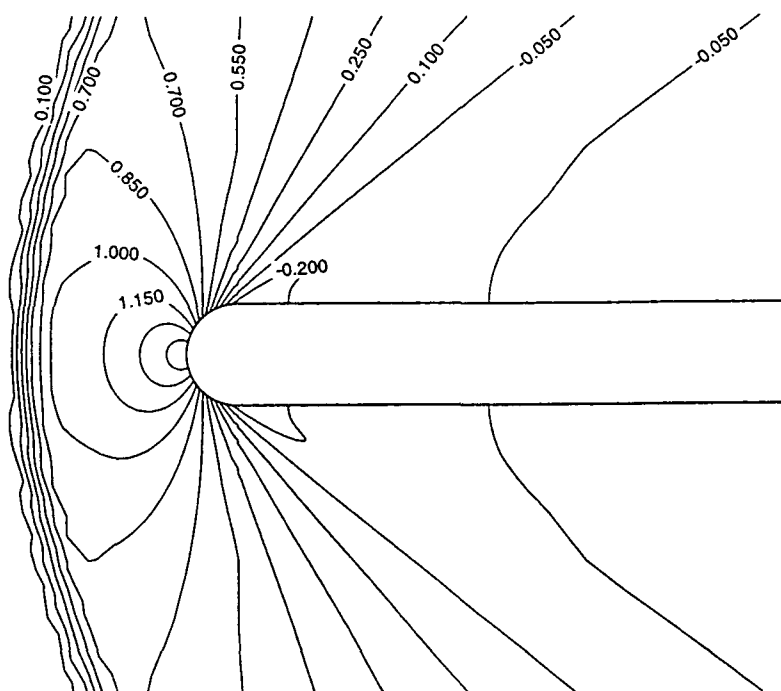


Fig. 7.36 Linhas de pressão constante para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 1,5.

Portanto, a presente metodologia pode ser empregada para resolver escoamentos incompressíveis, compressíveis subsônicos, transônicos e supersônicos. Neste trabalho, soluções hipersônicas não são apresentadas. O leitor interessado nestes escoamentos pode consultar a bibliografia especializada [6].

Na Fig. 7.37 mostra-se a taxa de convergência para Mach 0,8. Para a técnica "multigrid" (multigrade) foram empregadas as seguintes malhas:

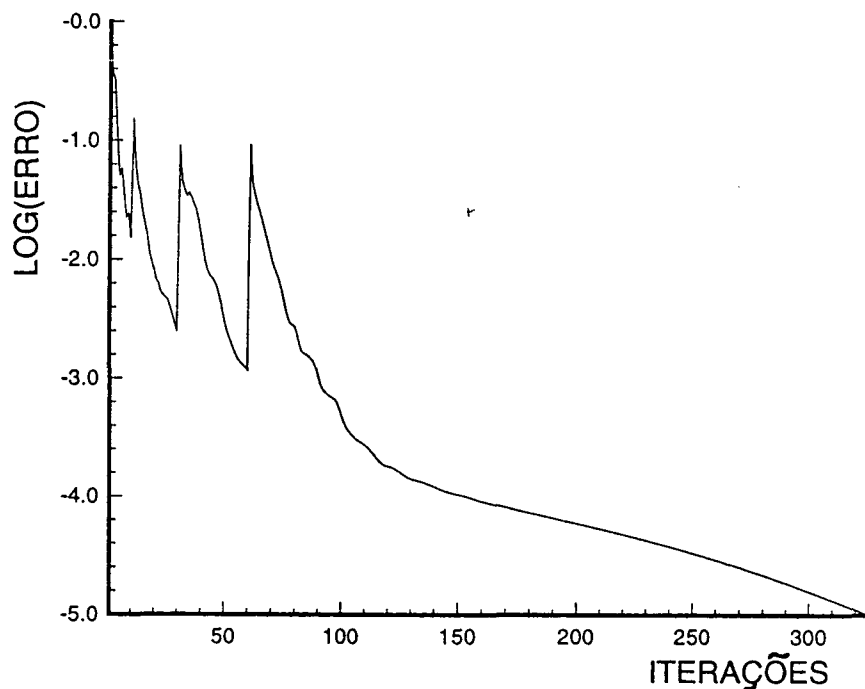


Fig. 7.37 Convergência para a placa com extremidade cilíndrica, Mach = 0,8

144x48 volumes	- malha fina (h)
72x24 volumes	- segunda malha (2h)
36x12 volumes	- terceira malha (4h)
18x6 volumes	- quarta malha (8h)
9x3 volumes	- quinta malha (16h)

Para este problema são necessários aproximadamente 300 iterações para obter a solução em regime permanente para critério de convergência $10E-5$.

7.1.5 Cilindro hemisférico

A seguir soluções aerodinâmicas para um cilindro hemisférico (3D) usando funções de interpolação unidimensionais são apresentadas e comparadas com a solução apresentada por Azevedo [17]. O cilindro hemisférico foi escolhido por sua simplicidade geométrica e pela sua forma representar a forma geral de veículos lançadores.

A Fig. 7.38 mostra a malha utilizada, com 34x26x19 volumes. Trinta e quatro volumes são escolhidos para a direção longitudinal, 26 para a direção radial e 19 para a direção circunferencial. A malha possui maior concentração das linhas na região do hemisfério, de forma a captar os gradientes de interesse com mais facilidade. Os volumes tendem à forma paralelepédica possuindo maiores dimensões nas proximidades do corpo.

A Fig. 7.39 mostra as linhas de massa específica constante obtidas para o cilindro submetido a Mach 0,6 e $\alpha = 0^\circ$. O coeficiente de pressão correspondente é apresentado e comparado na Fig. 7.40, para funções de interpolação de primeira e de segunda ordem.

A solução obtida através da metodologia para qualquer regime de velocidade apresenta um comportamento indesejável. As maiores variações do coeficiente de pressão foram suavizadas. Esta tendência de suavização das curvas deve ser creditada a excessiva dissipação numérica presente na discretização espacial de primeira ordem. Um estudo mais detalhado sobre este problema pode ser visto em [33].

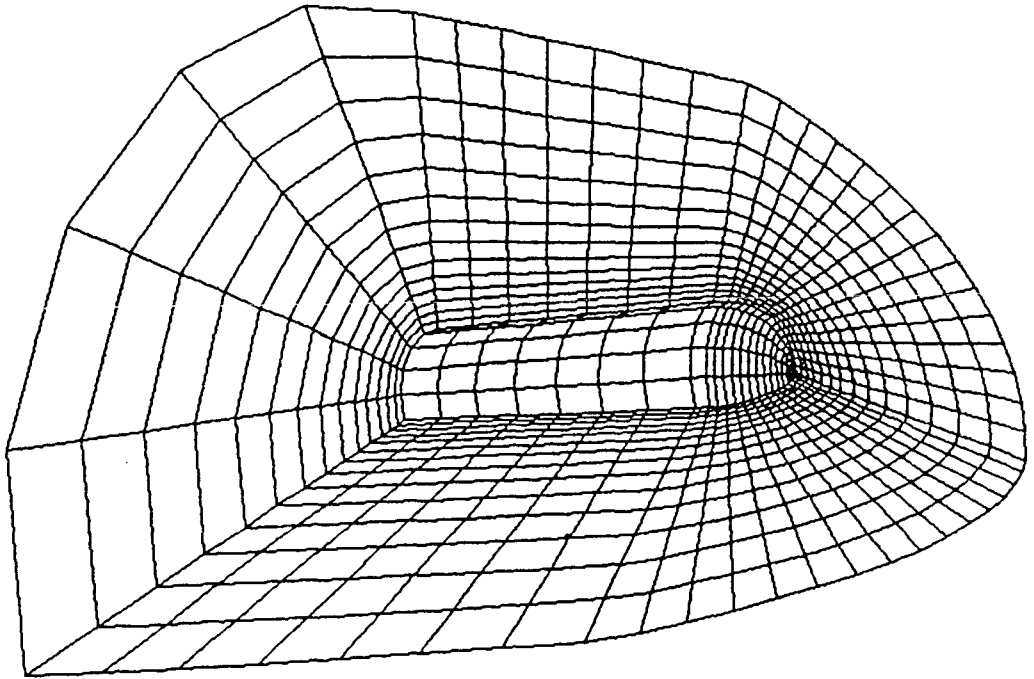


Fig. 7.38 Malha para o cilindro hemisférico, 34x26x19 volumes

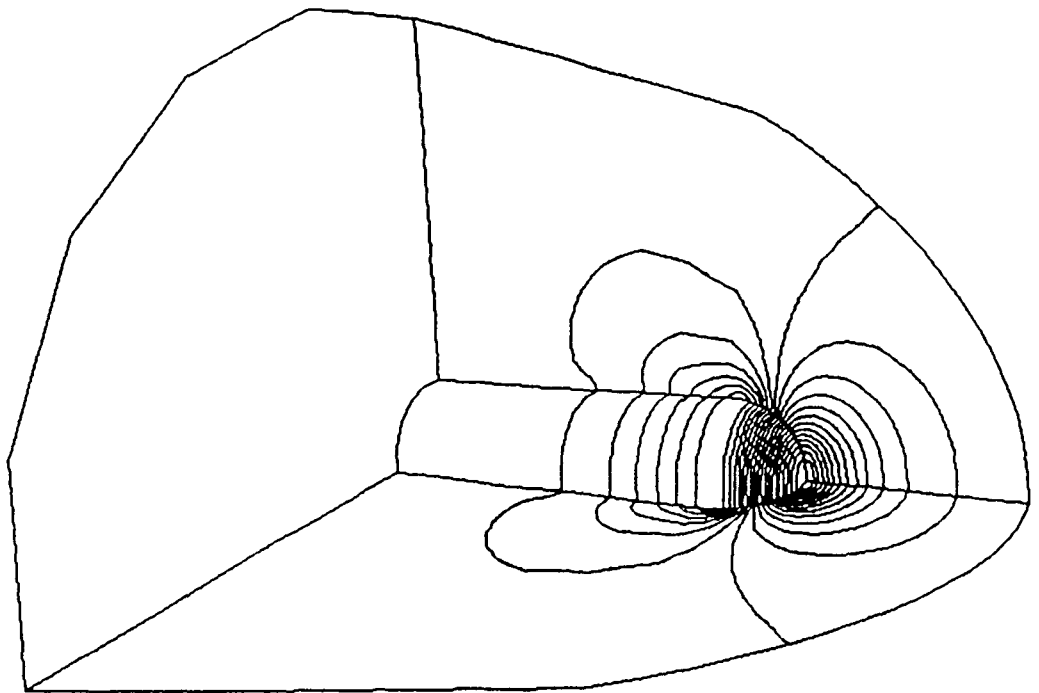


Fig. 7.39 Linhas de massa específica constante para o cilindro hemisférico, Mach = 0,6 e $\alpha = 0^\circ$

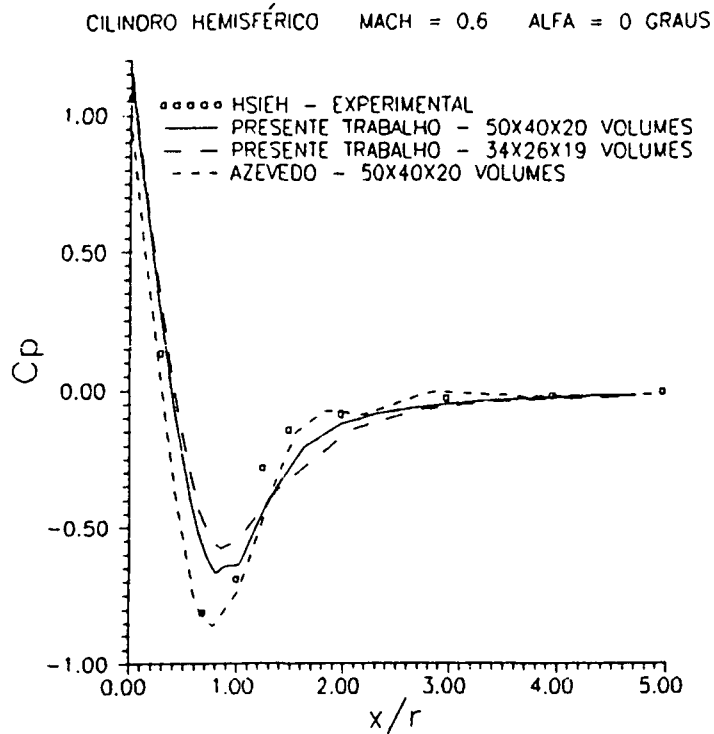


Fig. 7.40 Coeficiente de pressão para o cilindro hemisférico, Mach 0,6 e $\alpha = 0^\circ$

A Fig. 7.41 mostra as linhas de massa específica constante calculadas para Mach 0,85 e $\alpha = 6^\circ$. Estas são concordantes com as obtidas para Mach 0,6. Devido à presença de um ângulo de ataque, as linhas não são simétricas em relação à linha de centro do cilindro.

Os resultados numéricos obtidos para escoamento compressível sobre o cilindro hemisférico demonstram que uma discretização espacial de primeira ordem diminui a precisão do coeficiente de pressão para geometrias mesmo bojudas. Para geometrias aerodinâmicas como o NACA 0012 o coeficiente de pressão obtido usando uma discretização espacial de primeira ordem é impreciso e não será usado para análises aeroelásticas [35].

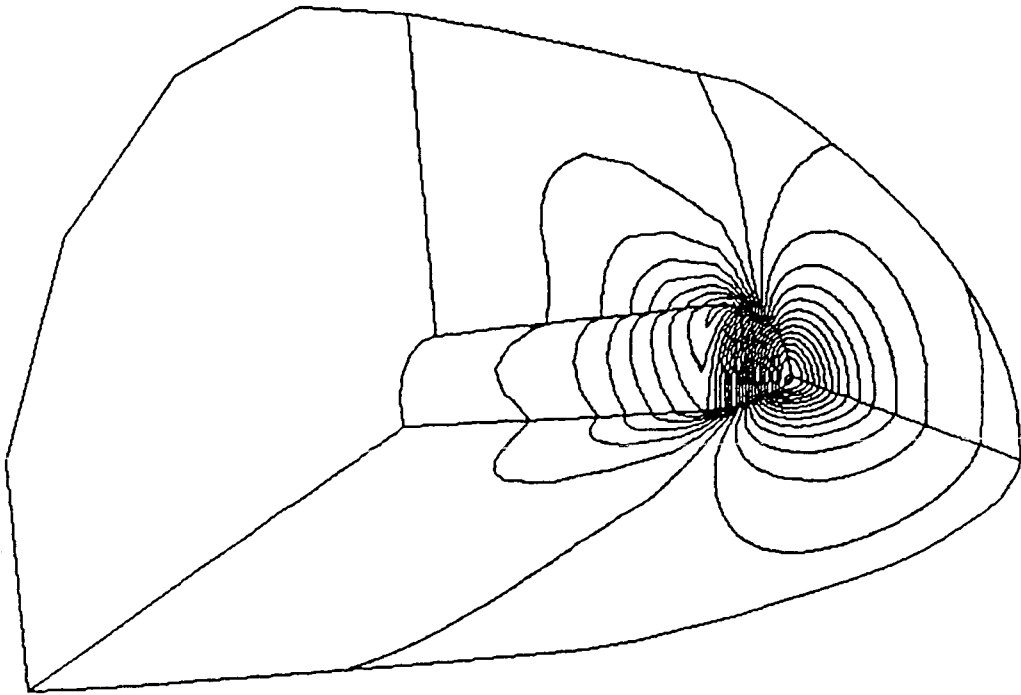


Fig. 7.41 Linhas de massa específica constante para o cilindro hemisférico, Mach = 0,85 e $\alpha = 6^\circ$

7.2 Resultados estruturais

A validação da parte estrutural do código computacional, para o elemento de viga que usa a teoria de Timoshenko [73], aqui apresentada, é feita através da comparação entre as soluções analíticas e numéricas. Por exemplo, considere uma viga engastada com um carregamento no seu extremo conforme mostra a Fig. 7.42. As características da geometria e do material são as seguintes:

$E = 2,1E11 \text{ N/m}^2$	- módulo de elasticidade longitudinal
$G = 8,077E10 \text{ N/m}^2$	- módulo de elasticidade transversal
$R = 1,0 \text{ m}$	- raio externo
$r = 0,97 \text{ m}$	- raio interno
$L = 6,0 \text{ m}$	- comprimento
$\rho = 7834 \text{ kg/m}^3$	- massa específica do material
$\nu = 0,3$	- coeficiente de Poisson

Os resultados são apresentados e comparados na Tab. 7.1, onde o programa DIEIXO, usado para comparação, constitui-se num código computacional desenvolvido para a solução de rotores flexíveis do grupo GRANTE desta universidade e fornecido pelo Prof. Barcellos.

Estes resultados mostram que a solução para uma viga de Timoshenko apresenta o mesmo valor, quando comparada com a do programa DIEIXO. A solução para uma viga de Euler é a mesma que a solução analítica pois, neste caso, foram desconsiderados os termos relativos ao cisalhamento. Isto demonstra que o programa desenvolvido resolve corretamente problemas estáticos de viga.

Tab. 7.1 Deslocamentos para um elemento de viga com carregamento estático

Nó	Presente trabalho Euler	Presente trabalho Timoshenko	Programa DIEIXO Timoshenko	Solução Analítica
1 primeiro	0,0000	0,0000	0,0000	
2 segundo	2,8190E-06	4,0753E-06	4,0753E-06	
3 terceiro	9,8666E-06	1,2379E-05	1,2379E-05	
4 quarto	1,9028E-05	2,2797E-05	2,2797E-05	1,9028E-05

A solução analítica da Tab. 7.1 para o elemento de viga é dada por [85]

$$q_3 = \frac{F L^3}{3 EI}$$

onde q_3 representa a deflexão na direção de aplicação da força.

Afim de validar a parte dinâmica do programa estrutural foi escolhida a solução do problema apresentado por Feng [86]. Para este caso, os dados estruturais são os seguintes:

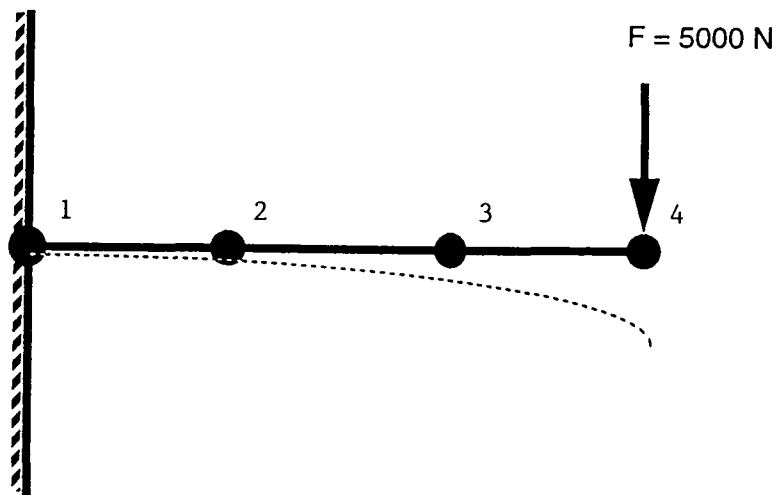


Fig. 7.42 Modelo para um elemento de viga (4 nós)

$E = 2,0E11 \text{ N/m}^2$	- módulo de elasticidade longitudinal
$G = 8,077E10 \text{ N/m}^2$	- módulo de elasticidade transversal
$I = 9,425E-02 \text{ m}^4$	- momento de inércia
$L = 30 \text{ m}$	- comprimento
$r = 7800 \text{ kg/m}^3$	- massa específica do material
$\nu = 0,3$	- coeficiente de Poisson

O valor da segunda frequência natural é apresentado na

Tabela 7.2. Este, por sua vez, é comparado com a solução obtida para um "rod = barra longa" [86], que pode ser escrita como

$$w_n = (1,506\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

onde m representa a massa da estrutura.

Tab. 7.2 Segunda frequência natural para um elemento de viga

Presente Trabalho	Presente Trabalho	Feng Numérico	Sol. Analítica "rod"
Euler	Timoshenko		
14,09	14,01	14,0	16,38

Observa-se que as frequências naturais são concordantes e que o presente programa pode ser usado para análises dinâmicas estruturais uma vez que as matrizes estão sendo obtidas de forma correta.

Para a solução de problemas dinâmicos emprega-se, neste trabalho, métodos de integração direta como o de Newmark e Houbolt [27] para o qual devem ser feitas considerações relativas ao decaimento de amplitude e alongação de período. Alguns métodos de soluções analíticas para problemas modelo também podem ser encontrados em [87].

A viga indicada na Fig. 7.42 é submetida inicialmente a determinada carga. Se esta carga for instantaneamente retirada, a viga permanecerá oscilando quando da não existência de amortecimento

(situação irreal). Isto acontece na solução obtida numericamente. Para o método de Newmark há a tendência de pequena alongação de período para os intervalos de tempo utilizados. No método de Houbolt aparece decaimento de amplitude e alongação de período maiores que para o método de Newmark.

Os resultados numéricos obtidos para problemas estáticos e dinâmicos de viga demonstram boa concordância com os resultados analíticos. Para o problema dinâmico de viga preferiu-se uma integração direta.

Diante das soluções aerodinâmicas e estruturais obtidas, apresenta-se a seguir algumas soluções aeroelásticas que são comparadas com alguns modelos aeroelásticos. Os problemas escolhidos são um painel, um modelo bidimensional de um aerofólio e um cilindro hemisférico.

7.3 Resultados aeroelásticos

Afim de melhor entender o comportamento estrutural esperado, considere o sistema massa-mola-amortecedor indicado no apêndice A. É claro que a obtenção da solução dinâmica de uma estrutura real é mais elaborada que para sistemas simples contendo massa-mola-amortecedor. No entanto, isto ajuda-nos a entender o comportamento dinâmico estrutural a ser obtido.

7.3.1 Painel (bidimensional)

O painel, conforme modelo indicado no apêndice A, foi escolhido pois os experimentos sugerem que ele comporta-se essencialmente como um aerofólio. A malha do problema do painel engastado nas duas extremidades é similar à indicada na Fig. 7.9. Este problema consiste em resolver a equação para uma viga cujo carregamento é a pressão aerodinâmica a qual é fornecida pela solução das equações do escoamento potencial.

Nas figuras 7.43 e 7.44, mostram-se os deslocamentos do painel obtidos para espessuras do mesmo um pouco maiores e um pouco menores (3%) que a espessura crítica de 1,5 mm apresentada no apêndice A na seção A.3. Estes resultados foram obtidos para Mach 0,282. A solução apresentada na Fig. 7.43 mostra

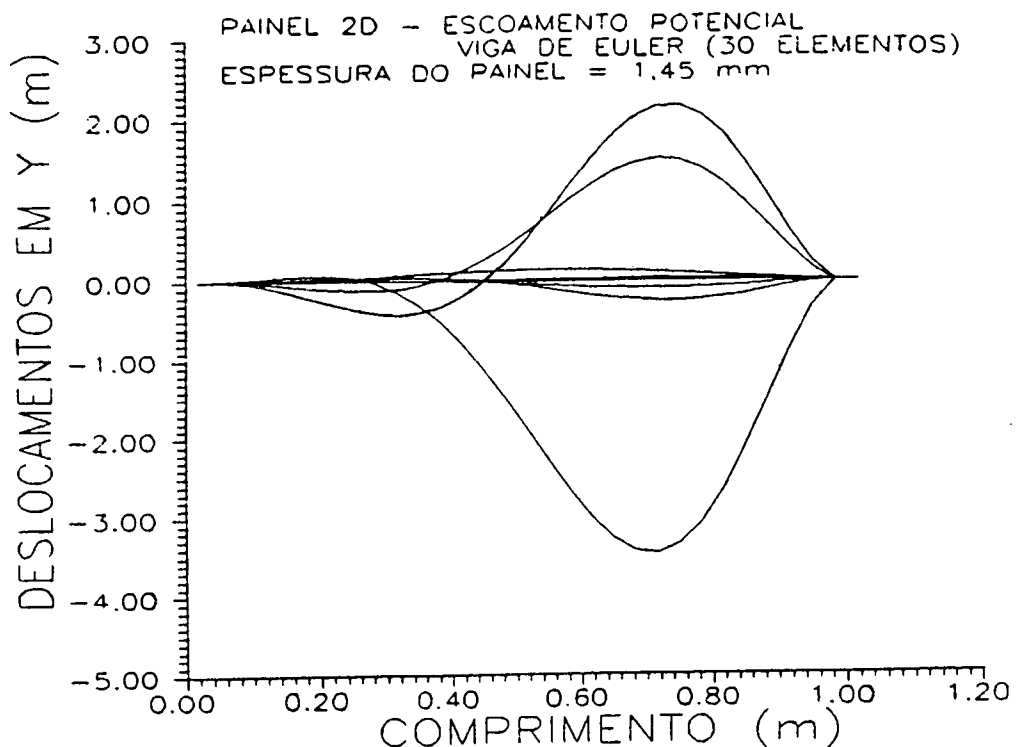


Fig. 7.43 Deslocamentos do painel para espessura de 1,45 mm

algumas iterações antes da divergência do processo de solução. Os deslocamentos apresentados não podem ser analisados através de uma teoria para pequenos deslocamentos/deformações.

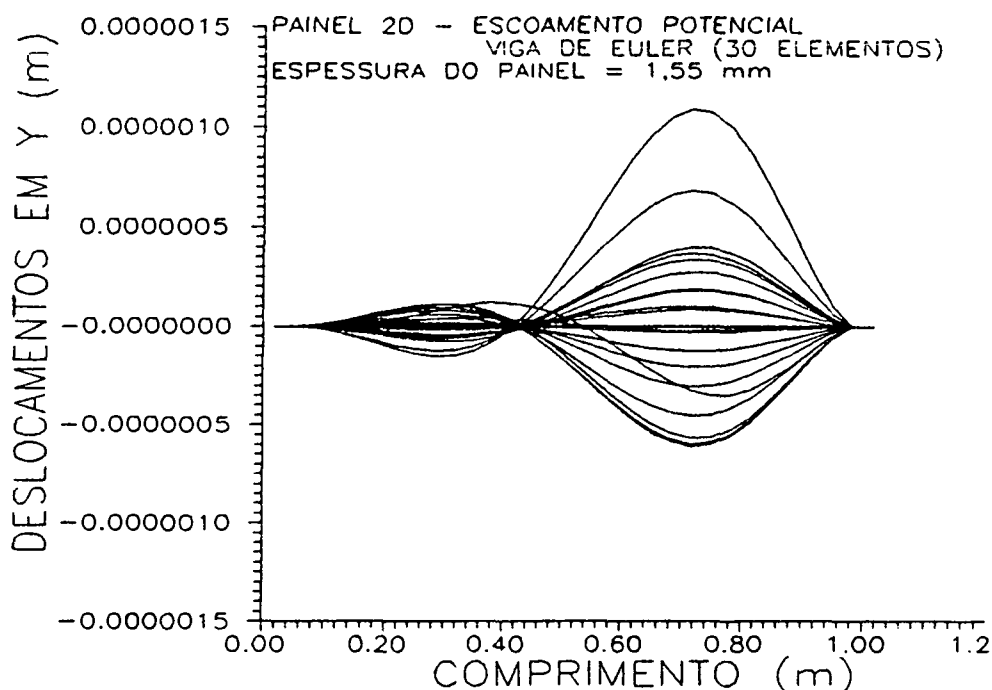


Fig. 7.44 Deslocamentos do painel para espessura de 1,55 mm

Como o painel encontra-se engastado nas duas extremidades, ele perde a estabilidade por divergência para escoamentos subsônicos [88].

Os resultados numéricos obtidos para o painel submetido ao escoamento incompressível ($Mach = 0,282$) indicam que se pode simular o escoamento potencial sobre uma superfície curva de pequena curvatura de forma correta. As soluções do escoamento utilizando as equações do escoamento potencial ou as equações de Euler são quase idênticas para superfícies de curvatura moderada, conforme já

demonstrado para o aerofólio NACA 0012. A simulação da parte estrutural pode ainda ser obtida empregando-se um elemento de placa ao invés de um elemento de viga.

7.3.2 Aerofólio (2D)

O comportamento aeroelástico de um aerofólio submetido a um escoamento incompressível a Mach 0,2, é apresentado a seguir. O modelo aeroelástico utilizado é constituído por um sistema massa-mola com dois graus de liberdade conforme mostrado no apêndice A na secção A.3. Através da utilização de uma mola vertical bem rígida tem-se pequenos deslocamentos verticais. Neste caso, a solução constitui-se principalmente de um movimento de rotação, que é controlado pela rigidez torsional da mola. Esta rigidez foi escolhida de forma que a variação máxima do ângulo de ataque seja inferior a $\alpha/5$.

A Fig. 7.45 mostra a solução obtida para o modelo aeroelástico já uindicado, com o carregamento aerodinâmico obtido usando as equações de Euler.

Os resultados numéricos obtidos para escoamento incompressível (Mach = 0,2) sobre o aerofólio do modelo indicado no apêndice demonstram concordância com a solução esperada. Neste caso somente dois graus de liberdade são considerados. A solução aerodinâmica obtida através das equações de Euler foi utilizada para o cálculo da força de sustentação e para o cálculo do momento tursor agindo sobre o centro de torção, que fica localizado a aproximadamente 35% do comprimento da corda.

APROXIMAÇÃO DA SOLUÇÃO AEROELÁSTICA - NACA 0012
 MACH = 0.2 - ÂNGULO = 5.0 GRAUS

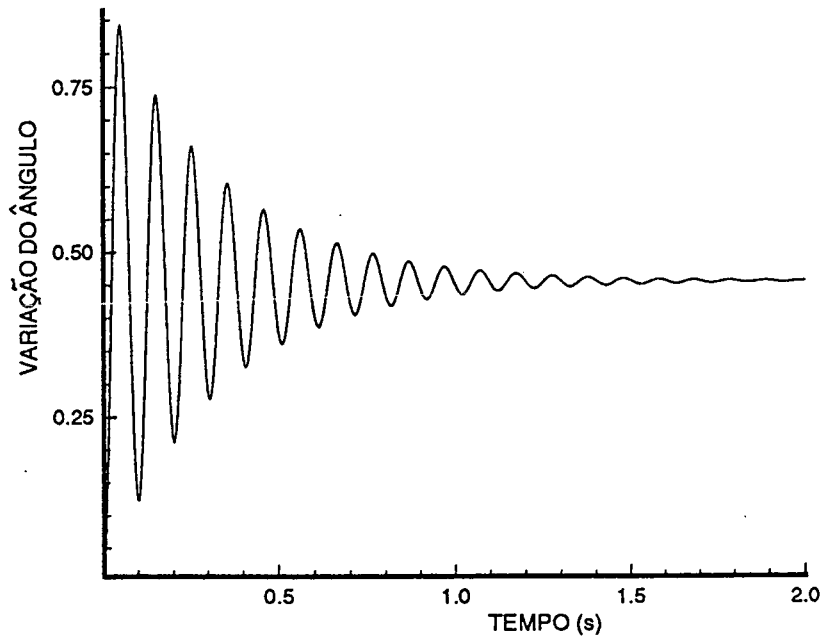


Fig. 7.45 Aproximação da solução aeroelástica para o aerofólio NACA 0012

O comportamento da solução era o esperado [18]. O aerofólio oscila em torno de um ângulo médio, observando-se decaimento de amplitude da oscilação com o passar do tempo, pois a mola utilizada para controlar a deflexão angular é bastante rígida. O rápido decaimento de amplitude obtido é auxiliado pelo amortecimento numérico do método de solução usado para resolver o problema dinâmico estrutural.

7.3.3 Cilindro hemisférico (3D)

Para finalizar, resultados aeroelásticos são apresentados para um cilindro hemisférico engastado em sua base (condição irreal) e submetido a um escoamento transônico a Mach 0,85 e $\alpha = 6^\circ$. Este problema foi escolhido para verificar o comportamento qualitativo

do código computacional usando uma geometria que representa a forma geral de um veículo lançador.

A malha utilizada para esta comparação qualitativa é grossa e possui 17x15x16 volumes. Esta malha contém 17 pontos na direção longitudinal, 15 na direção radial e 16 na direção circunferencial. Uma malha mais refinada deve ser usada para uma análise quantitativa (50x40x30 volumes por exemplo). No entanto, procurou-se melhor concentração nas regiões de interesse, ou seja, na parte hemisférica e submeteu-se o citado cilindro a Mach = 0,85.

A Fig. 7.46 mostra os deslocamentos do nariz do cilindro quando submetido ao citado escoamento. Estas soluções foram obtidas para comportamento de corpo rígido até resíduos da pressão da ordem de 0,005 quando, instantaneamente, a estrutura passa a ser flexível. O cilindro possui as seguintes características:

5 m	- comprimento
0,1 m	- espessura da parede
1,5 m	- diâmetro externo

A Fig. 7.47 compara a solução aeroelástica para espessuras diferentes da parede do cilindro pois o mesmo é oco. Um cilindro maciço com as dimensões e materiais apresentados seria extremamente rígido e possuiria deslocamentos desprezíveis. Um cilindro extremamente rígido, por sua vez, pode ser usado para verificar erros do código computacional, caso existam.

Os resultados numéricos obtidos para escoamento compressível sobre o cilindro hemisférico, embora qualitativos, demonstram um comportamento conforme o esperado. O rápido decaimento de amplitude verificado principalmente para o caso do comprimento do cilindro 5m e espessura 10 cm deve-se também ao Δt utilizado.

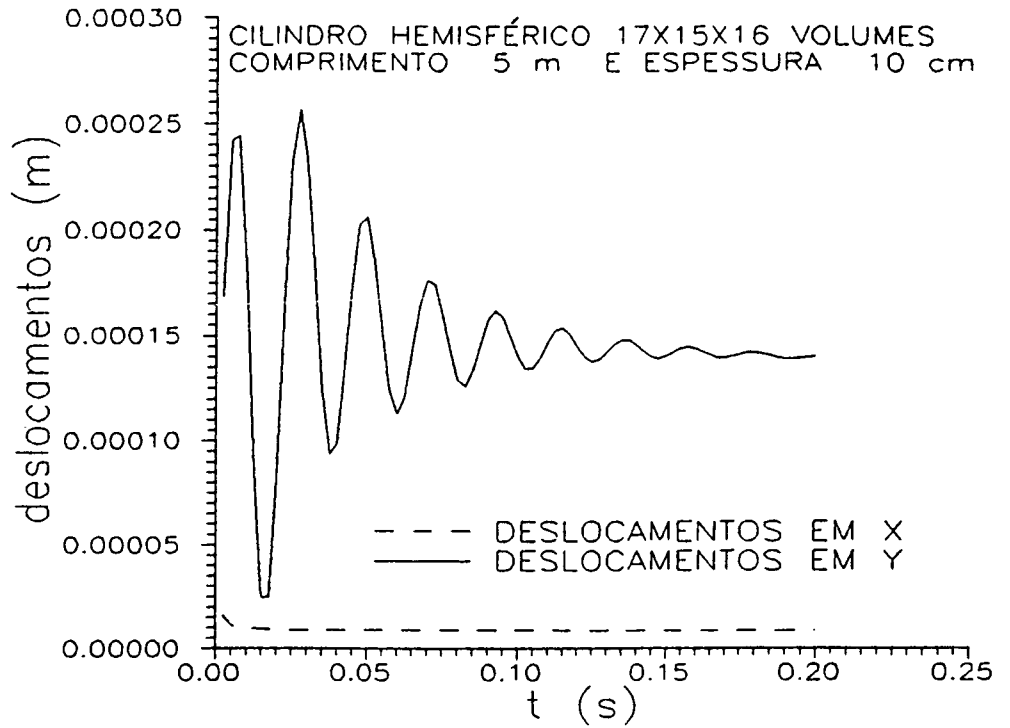


Fig. 7.46 Deslocamentos verticais do nariz do cilindro,
 Mach 0,85 e $\alpha = 6^\circ$

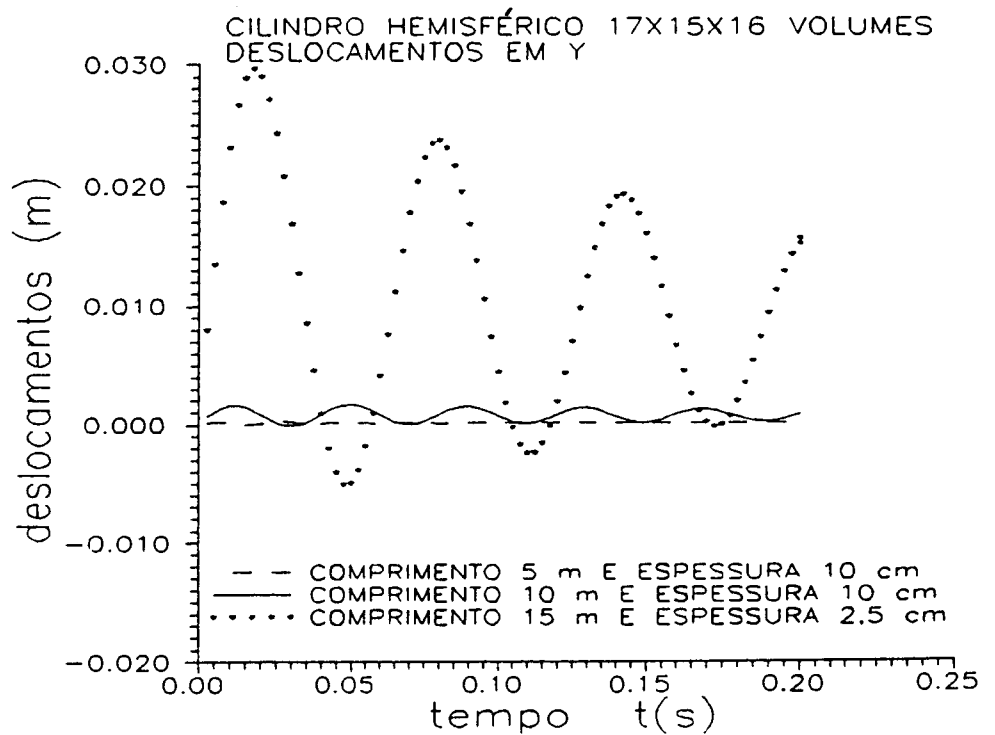


Fig. 7.47 Comparação dos deslocamentos verticais do nariz
 do cilindro, Mach 0,85 e $\alpha = 6^\circ$

Como a estrutura é bastante rígida, o período de oscilação é pequeno exigindo, assim, a escolha de um Δt menor para o método de Houbolt (veja a Fig. 5.1). Observa-se ainda que quanto mais rígida for a estrutura, maior tende a ser a frequência de oscilação e, como consequência, menor tende a ser a amplitude de oscilação. Observa-se que a amplitude das deflexões aumenta conforme diminui a espessura da parede do cilindro e aumenta conforme aumenta o comprimento do cilindro para espessura de parede constante.

Uma análise quantitativa, por outro lado, envolveria o emprego de uma malha da ordem de $50 \times 40 \times 30$ volumes para uma discretização espacial de segunda ordem. Preferiu-se então uma análise qualitativa com uma malha de $17 \times 15 \times 16$ volumes.

A seguir apresenta-se as conclusões e contribuições do presente trabalho.

8. CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

O presente trabalho teve por objetivo obter uma metodologia para a solução de problemas aerodinâmicos compressíveis e incompressíveis (pelo menos entre Mach 1,2 e 0,01) e a sua extensão para a solução de alguns problemas aeroelásticos. Esta ferramenta usa volumes finitos para a parte aerodinâmica e elementos finitos para a parte estrutural. O modelo emprega as equações de Euler para o problema aerodinâmico (2D e 3D) e elementos de viga para a parte estrutural.

Foram descritas as discretizações espaciais da metodologia compressível com e sem pré-condicionamento e da metodologia para escoamentos a qualquer velocidade. Durante a discretização foram indicadas as principais características de cada método. A preferência pela formulação compressível neste trabalho está associada a capacidade desta representar adequadamente o coeficiente de pressão sobre geometrias aerodinâmicas submetidas a escoamentos de alta e baixa velocidade. Isto é importante para estender a metodologia para análises aeroelásticas.

O emprego de coordenadas generalizadas permite que a metodologia usada para resolver problemas aerodinâmicos possa ser facilmente aplicada na resolução de escoamentos sobre geometrias complexas. A metodologia empregada neste trabalho pode, com facilidade, ser estendida para outras aplicações envolvendo interação entre ar e estruturas. Como a discretização espacial empregada no problema aerodinâmico é de segunda ordem no espaço e no tempo, pode-se empregar esta metodologia para a solução de estruturas mais flexíveis.

O método normalmente empregado para a solução de escoamentos compressíveis é estendido para resolver problemas incompressíveis. A implementação do código computacional empregando esta metodologia demonstrou ser relativamente simples. Devido ao baixo número de operações a serem realizadas por iteração, o custo de projeto é relativamente baixo. Empregando-se esta metodologia, soluções aerodinâmicas para o NACA 0012, uma superfície contendo curvatura, uma placa com extremidade cilíndrica e um cilindro são apresentadas para valores de Mach da corrente livre variando entre 0,005 e 1,5.

A discretização espacial em volumes finitos baseada no arranjo co-localizado de variáveis com armazenamento nos centros ou nos nós do volume de controle e com o método de Runge-Kutta (5 estágios) são usados para resolver escoamentos compressíveis e incompressíveis, demonstrando que a solução segregada das equações diferenciais se constitui numa alternativa para a solução de problemas aerodinâmicos.

A disposição das variáveis nos nós do volume de controle foi preferida para a aplicação da técnica "multigrid", pois isto facilita a injeção das variáveis da malha fina para as malhas grossas. Para a disposição co-localizada com as variáveis armazenadas nos centros do volume de controle deve-se executar algumas aproximações adicionais para a injeção das variáveis.

A metodologia normalmente usada para problemas compressíveis [24] demonstrou manter quase as mesmas características na solução de problemas aerodinâmicos a baixa velocidade, podendo-se usar todas as técnicas para acelerar a convergência normalmente usadas naquela formulação. Esta metodologia permite informar

adequadamente a solução aerodinâmica que é necessária para calcular os coeficientes de pressão para o cálculo da sustentação de geometrias aerodinâmicas.

Foram tomados cuidados especiais na escolha dos coeficientes utilizados para determinar o passo de tempo, a dissipação artificial e as técnicas de aceleração da convergência. Cuidados adicionais foram tomados para as condições de contorno, principalmente para a condição de contorno longe do corpo "far field". Neste caso consegue-se diminuir o domínio computacional necessário com condições de contorno prescritas para resolver problemas aerodinâmicos incompressíveis da ordem de 70%. Os autovalores e autovetores empregados neste caso devem ser apropriados para as velocidades dos escoamentos em estudo, portanto, devem ser adequados para resolver escoamentos a altas e baixas velocidades.

A partir dos campos iniciais estimados o processo iterativo de cálculo aerodinâmico sempre convergiu para a solução em regime permanente. Este processo permite usar CFL da ordem de 7,5 e as soluções foram sempre fisicamente realísticas.

Os resultados numéricos indicam que, para os problemas em estudo, o coeficiente de dissipação k^4 pode ser escolhido entre 1/48 e 1/256 sem alterar significativamente os resultados [40]. Como a dissipação artificial é usada apenas para amortecer as oscilações e é constituída de termos de terceira ou de quarta ordem, o valor de k^4 pode teoricamente possuir variações ainda maiores.

Observou-se ainda que os esquemas "upwind" de primeira ou de segunda ordem são menos precisos que esquemas em "diferenças centrais" para escoamentos a baixa velocidade sobre geometrias

aerodinâmicas, mas o suficiente quando de segunda ordem [5]. Portanto, eles devem ser preferidos na solução de escoamentos a qualquer velocidade com grandes variações do número de Mach (variação maior que entre 0,005 e 1,5). Pode-se, então, escolher funções de interpolação de primeira, segunda ou de ordem superior, dependendo da precisão necessária para cada problema. Como o custo aumenta proporcionalmente com a ordem da interpolação utilizada usa-se sempre que possível interpolações de baixa ordem. Portanto, deve-se adequar a ferramenta ao problema a ser resolvido.

Os resultados aerodinâmicos obtidos, usando as equações de Euler, permitem concluir que é possível e preferível acelerar a taxa de convergência para obter soluções em regime permanente empregando a técnica "multigrid" (multigrade). Entretanto, a eficiência desta técnica diminui para escoamentos incompressíveis quando comparada com a solução de problemas transônicos [6] (de 90% para 70%). Para escoamentos a baixa velocidade, a experiência também indicou [34] que é melhor usar dois passos (Runge-Kutta) para cada malha. Desta forma, pode-se obter soluções aerodinâmicas precisas para as equações de Euler com aproximadamente 300 iterações, para números de Mach variando entre 0,8 e 0,01 sobre um aerofólio.

A comparação entre as soluções numéricas e teóricas (experimentais) é encorajadora, especialmente o emprego de técnicas para acelerar a convergência as quais fornecem grande economia de tempo computacional. O procedimento de cálculo aerodinâmico apresentado neste trabalho já foi validado para valores de Mach da corrente livre variando entre 20,0 e 0,3 [6]. Este procedimento foi estendido e validado pelo autor [34] até Mach da ordem de 0,002 para escoamentos sobre aerofólios.

As soluções dos problemas estruturais apresentadas, tanto para problemas estáticos como para problemas dinâmicos de viga, demonstraram boa concordância com a solução teórica. Preferiu-se a escolha de um elemento de viga para testar a metodologia. Visando a extensão desta metodologia para estruturas mais complexas, elementos de placa e casca podem ser implementados. Pode-se comparar a solução obtida com o elemento de viga para o problema do painel com elementos de placa e/ou casca.

O problema aeroelástico aqui apresentado se constitui da combinação entre o problema aerodinâmico e estrutural. O acoplamento entre as equações de Euler e as equações do movimento é demonstrado. Preferiu-se esta escolha, pois a obtenção de um esquema único de integração entre as equações de Euler/Navier-Stokes para o problema aerodinâmico e de elementos estruturais é de difícil execução. Esta dificuldade está associada aos sistemas de matrizes obtidos que possuem problemas de condicionamento.

Existem atualmente muitos trabalhos de pesquisa visando melhorar o acoplamento aeroelástico. Se por um lado esquemas de integração única produzem teoricamente melhores resultados, por outro lado os métodos empregados para isso geralmente não se preocupam com a conservação das propriedades do escoamento localmente (balanço) e são geralmente limitados. Portanto, o ideal seria uma metodologia única que garanta as propriedades do escoamento localmente, onde elas se fazem necessárias.

No acoplamento entre programas preparados para problemas aerodinâmicos e estruturais separadamente, por outro lado, tem-se que considerar as imprecisões do acoplamento e minimizá-las, otimizando assim o problema. Neste sentido muitos trabalhos vem

sendo realizados.

Os fenômenos aeroelásticos como "flutter", "buffeting", dentre outros, não foram verificados neste trabalho. Para isto deve-se obter as condições críticas, que são relacionadas com às velocidades denominadas de velocidades críticas. Portanto, no presente trabalho verificou-se o comportamento de estruturas relativamente rígidas que são excitadas pelo carregamento aerodinâmico com as equações de Euler.

Simulações aeroelásticas envolvendo vórtices, por outro lado, necessitam de malhas mais finas para serem calculadas. Neste caso deve-se empregar equações mais completas para o escoamento. Usando o presente procedimento, soluções aeroelásticas são obtidas para um painel, um modelo bidimensional de um aerofólio e soluções qualitativas são apresentadas para um cilindro hemisférico.

Para finalizar, a metodologia aerodinâmica aqui apresentada serviu como base para extensão do código "CEVCATS" do DLR "Institute of Design Aerodynamics - Braunschweig" para a solução de escoamentos a baixa velocidade. No momento o código preparado para escoamentos compressíveis tridimensional do DLR está sendo estendido para a solução de problemas aerodinâmicos incompressíveis tridimensionais envolvendo as equações de Navier-Stokes.

Deve-se ressaltar ainda o bom desempenho da metodologia aerodinâmica apresentada, que vem envolvendo trabalhos de pesquisa e teses para a solução de problemas aerodinâmicos a alta e baixa velocidade. Há ainda interesse de aplicação da presente metodologia na análise de problemas de escoamentos para pequenos insetos. Este trabalho de pesquisa interdisciplinar visa melhor entender estes seres vivos e a influência da modificação das características do

meio ambiente sobre os mesmos. Devido à complexidade e a delicadeza do problema, devem ser utilizados modelos eficientes, uma vez que as dimensões envolvidas são muito pequenas e as velocidades de escoamento poderão ser baixas e/ou relativamente altas.

A pesquisa bibliográfica também indica a dificuldade de encontrar-se trabalhos com comparação para a parte aeroelástica na literatura. Por este motivo, as soluções apresentadas neste trabalho são comparadas com os modelos teóricos, quando existentes. Por todos estes motivos, o presente trabalho contribui para a solução do complexo problema aerodinâmico e aeroelástico encontrado na engenharia. Entretanto, muitos outros trabalhos devem ainda ser realizados.

9. BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDERSON, J.D.Jr. "Fundamentals of Aerodynamics", McGraw Hill, Second Edition, New York, 1991.
- [2] BISPLINGHOFF, R.L., ASHLEY, H., HALFMAN, R.L., "Aeroelasticity", Addison-Wesley Publishing Company, 1957.
- [3] FÖRSCHING, H.W., "Grundlagen der Aeroelastik", Springer Verlag, 1974.
- [4] JAMES, E.A.J., "Gas Dynamics", Allyn and Bacon, Second Edition, 1984.
- [5] KROLL, N., "A Systematic Comparative Study of Several High Resolution Schemes for Complex Problems in High Speed Flows", 29th Aerospace Sciences Meeting, January 7-10, Reno/Nevada, 1991.
- [6] BLAZEK, J., "Verfahren zur Beschleunigung der Lösung der Euler und Navier-Stokes Gleichungen bei Stationären Über- und Hyperschall-Strömungen", Ph. D. Thesis, University of Braunschweig, July 1994.
- [7] SAHU, J., STEGER, J.L., "Numerical Simulation of Three Dimensional Transonic Flows", I.J. Num. Mech. Fluids, Vol. 10, 1990, pp. 855-873.
- [8] SAHU, J., "Numerical Computations of Transonic Critical

Aerodynamic Behaviour", AIAA Journal, Vol. 28, Nr. 5, May 1990, pp. 807-816.

[9] MORICE, Ph., "Transonic Computations by Multidomain Techniques with Potential and Euler Solvers", Symposium Transsonicum III, IUTAM Symposium Göttingen, 1988.

[10] LIJEWSKI, L.E., "Transonic Euler Solutions on Mutually Interfering Finned Bodies", AIAA Journal, Vol. 28, Nr. 6, June 1990, pp. 982-988.

[11] LEVY, J.L.L, "Experimental and Computational Steady and Unsteady Transonic Flows about a Thick Airfoil", AIAA Journal, Nr. 6, June 1978, pp. 564-572.

[12] KORDULLA, W., "Inviscid-Viscous Interaction in Transonic Flows about Finite Three-Dimensional Wings", AIAA Journal, Vol. 16, Nr. 4, April 1978, pp. 369-376.

[13] OBAYASHI, S., GURUSWAMY, G.P., GOORJIAN, P.M., "Streamwise Upwind Algorithm for Computing Unsteady Transonic Flows Past Oscillating Wings", AIAA Journal, Vol. 29, Nr. 10, October 1991, pp. 1668-1677.

[14] GURUSWAMY, G.P., MARSTILLER, J.W., YANG, H.T.Y., GOORJIAN, P.M., "Effects of Viscosity and Modes on Transonic Aerodynamic and Aeroelastic Characteristics of Wings", J. of Aircraft, Vol. 22, Nr. 9, September 1985, pp.756-762.

- [15] FUJII, K., OBAYASHI, S., "Navier-Stokes Simulations of Transonic Flows over a Practical Wing Configuration", AIAA Journal, Vol. 25, Nr. 3, March 1987, pp. 369-370.
- [16] HIROSE, N., TAKANASHI, S., "Computational Transonic Aerodynamics Research in Japan", Symposium Transsonicum III, IUTAM Symposium Göttingen, 1988.
- [17] AZEVEDO, J.L.F., "Transonic Aeroelastic Analysis of Launch Vehicle Configurations", Ph. D. Thesis, University of Stanford, USA, 1988.
- [18] GURUSWAMY, G.P., "Unsteady Aerodynamic and Aeroelastic Calculations for Wings Using Euler Equations", AIAA Journal, Vol. 28, Nr. 3, March 1990, pp. 461-469.
- [19] GURUSWAMY. G.P., "Vortical Flow Computations on Swept Flexible Wings Using Navier-Stokes Equations", AIAA Journal, Vol. 28, Nr. 12, December 1990, pp.2077-2084.
- [20] BATINA, J.T., "Unsteady Euler Algorithm with Unstructured Dynamic Mesh for Complex-Aircraft Aerodynamic Analysis", AIAA J., Vol. 29, Nr. 3, March 1991, pp. 327-333.
- [21] ANDERSON, D.A., TANNEHIL, J.C., PLETCHER, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, New York, 1984.
- [22] PATANKAR, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow",

McGraw-Hill, New York, 1981.

[23] PATANKAR, S.V., SPALDING, D.B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows", Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, 1972, pp. 1787-1806.

[24] JAMESON, A., SCHMIDT, W., TURKEL, E., "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes", AIAA Paper 81-1259, 1981.

[25] SCHMIDT, W., JAMESON, A., "Euler Solvers as an Analysis Tool for Aircraft Aerodynamics", Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Vol. 4, Pinderidge Press, 1983.

[26] COOK, R.D., "Concepts and Application of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 1981.

[27] BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, 1982.

[28] BREBBIA, C.A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London, Second Edition, 1984.

[29] RAITHY, G.D., TORRENCE, K.E., "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Computer & Fluids, Vol. 2, 1974, pp 191-206.

[30] HARLOW, F.H., AMSDEN, A.A., "A Numerical Fluid Dynamics Calculation for All Flow Speeds", J. Comp. Phys., Vol. 8, 1971, pp. 197-213.

[31] VAN DOORMAAL, J.P., "Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows", Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1985.

[32] MALISKA, C.R., SILVA, A.F.C., "A Boundary-Fitted Finite Volume Method for the Solution of Compressible and/or Incompressible Fluid Flows Using Both Velocity and Density Correction", Proceedings of the Seventh International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, Huntsville, 1989.

[33] SILVA, A.F.C., "Um Procedimento em Volumes Finitos para Solução de Escoamentos a Qualquer Velocidade", Tese de doutorado, Florianópolis, Brasil, Setembro de 1991.

[34] DE BORTOLI, A.L., "Solution of Incompressible Flows Using Compressible Flow Solvers, DLR IB 129-94/18, Braunschweig, October 1994.

[35] DE BORTOLI, A.L., "Uma Metodologia Usando Volumes Finitos e Elementos Finitos para Análises Aeroelásticas", Proposta de Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, Brasil, Novembro de 1992.

[36] CHOI, D., MERKLE, C.L., "Application of Time-Iterative Schemes to Incompressible Flow", AIAA Journal, Vol. 23, Nr. 10,

1985, pp. 1518-1524.

[37] CHOI, Y.-H., MERKLE, C.L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", Journal of Computational Physics 105, 1993, pp. 207-223.

[38] SCHNEIDER, G.E., ZEDAM, M., "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", Numerical Heat transfer, Vol. 4, 1981, pp. 1-19.

[39] ZEDAN, M., SCHNEIDER, G.E., "3D Modified Strongly Implicit Procedure for Finite Difference Heat Conduction Modelling", AIAA Journal, Vol. 21, Nr. 2, 1983, pp. 295-306.

[40] KROLL, N., JAIN, R.K., "Solution of Two-Dimensional Euler Equations - Experience with a Finite Volume Code", Forschungsbericht, DFVLR-FB 87-41, Braunschweig 1987.

[41] BLAZEK, J., "Investigations of the Implicit LU-SSOR Scheme", DLR-FB 93-51 Forschungsbericht, January 1994.

[42] ODEN, J.T., STROUBOULIS, T., DEVLOO, P., "Adaptative Finite Element Methods for High-Speed Compressible Flows", Int. Journal for Num. Methods in Fluids, Vol. 7, 1987, pp. 1211-1228.

[43] PÉRIAUX, J., "Finite Element Methods in Fluids", French Brazilian Workshop, LNCC, Rio de Janeiro, November 1991.

[44] STOUFFLET, B., PÉRIAUX, J., DERVIEUX, A., FEZOUI, F.: "Numerical Simulation of 3D-Hypersonic Euler Flows Around Space Vehicles Using Adapted Finite Elements" AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno/Nevada, January 1990.

[45] BRISTEAU, M.O., MALLET, M., PÉRIAUX, J., ROGÉ, G., "Development of Finite Element Methods for Compressible Navier-Stokes Flow Simulations in Aerospace Design", AIAA Journal, 28th Aerospace Science Meeting, Reno/Nevada, January 1990.

[46] BALIGA, B.R., "Some Recent Advances in Computational Heat, Transfer and Fluid Flow", ENCIT, Itapema, S.C., Brasil, 1990.

[47] BALIGA, B.R., PATANKAR, S.V., "A Control-Volume Finite Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer", Numerical Heat Transfer, Vol. 6, 1983, pp. 245-261.

[48] SCHNEIDER, G.E., RAW, M.J., "Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables", Numerical Heat Transfer, Vol. 11, 1987, pp. 363-390.

[49] FEDORENKO, R.P., "The Speed of Convergence of one Iterative Process", USSR Comp. Math. and Math. Phys., Vol. 4, 1964, pp. 227-235.

[50] BRANDT, A., "Guide to Multigrid Development", Multigrid Methods I, Lecture Notes in Mathematics, 1981.

- [51] JAMESON, A., "Multigrid Algorithm for Compressible Flow Calculations", MAE Report 1743, Text of Lecture given at 2nd European Conference on Multigrid Methods, Cologne, October 1985.
- [52] RADESPIEL, R., "A Cell-Vertex Multigrid Method for the Navier-Stokes Equations", NASA Technical Memorandum 101557, 1989.
- [53] GURUSWAMY, G.P., TU, E.L., "Effekts of Symmetric and Asymmetric Modes on Transonic Aeroelastic Characteristics of Full-Span Wing-Body Configuration" AIAA Paper 88-2308, April 1988.
- [54] NOHN, W.F., "Methods in Computational Physics", Alder et al Ed., Vol. 3, Academic Press, New York, 1964, pp. 117.
- [55] TRULIO, J.G., Air Force Weapons Laboratory AFWL-Tr. 66-19, June 1966.
- [56] HIRT, C.W., AMSDEN, A.A., COOK, J.L., "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds", J. Comp. Physics 14227, 1974.
- [57] BELYTSCHKO, T., HUGHES, T.R.J., "Computational Methods for Transient Analysis", Elsevier Science Publishers, B.V., Amsterdam, 1986.
- [58] KROLL, N., ROSSOW, C.-C., "Foundations of Numerical Methods for the Solution of Euler Equations", Prepared for the Lecture F6.03 of the CCG, Braunschweig 1989.

[59] MALISKA, C.R., ET ALL, "Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Problemas de Escoamentos a Alta Velocidade", Relatórios Técnicos preparados para o IAE/CTA, Parte I-VII, 1987-1991.

[60] MARCHI, C.H., MALISKA, C.R., DE BORTOLI, A.L., "The Use of Colocated Variables in the Solution of Supersonic Flows", X Brazilian Congress of Mechanical Engineering, December 1989.

[61] DYM, C.L., SHAMES, I.H., "Solid Mechanics - A Variational Approach", McGraw-Hill, 1973.

[62] NOLL, B., "Numerische Strömungsmechanik", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[63] RHIE, C.M., "A Numerical Study of the Flow Past an Isolated Airfoil with Separation", Ph. D. Thesis, University of Illinois at Urbana Champaign, 1981.

[64] PERIC, M., KESSLER, R., SCHEUERER, G., "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", Computer and Fluids, Vol. 16, 1988, pp. 389-403.

[65] DE BORTOLI, A.L., "O Uso de Variáveis Co-Localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias", Dissertação de Mestrado, Florianópolis, Brasil, Setembro 1990.

- [66] MALISKA, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", Editora Livro Técnico e Científico - LTC, 1995.
- [67] VAN DOORMAAL, J.P., RAITHBY, G.D., "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", Num. Heat Transfer, Vol 7, 1984, pp. 147-163.
- [68] ROSSOW, C.-C., "Berechnung von Strömungsfeldern durch Lösung der Euler-Gleichungen mit einer erweiterten Finite-Volumen Diskretisierungsmethode", Forschungsbericht, DLR-FB 89-38, Braunschweig 1989.
- [69] KROLL, N., RADESPIEL, R., ROSSOW, C.-C., "Accurate and Efficient Flow Solvers for 3D Applications on Structured Meshes", Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series, March 21-25, 1994.
- [70] YEE, H.C., HARTEN, A., "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates", AIAA Journal, February 1987, Vol. 25, Nr. 2, pp. 266-274.
- [71] WHITFIELD, D.L., "Three-Dimensional Unsteady Euler Equation Solutions Using Flux Vector Splitting", MS 39762, Mississippi State University, 1983.
- [72] USAB, W.J., MURMAN, E.M., "Embedded Mesh Solution of the Euler Equation Using a Multiple-Grid Method", AIAA Paper 83-1946 - CP, 1983.

[73] BORESI, A.P., LYNN, P.P., "Elasticity in Engineering Mechanics", Prentice-Hall, 1974.

[74] MALISKA, C.R., "A Solution Method for the Three Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates", Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1981.

[75] THOMPSON, J.F., WARZI, Z.U.A., MASTIN, C.W., "Numerical Grid Generation Foundations and Applications", Elsevier Science Publishing Co, USA, 1985.

[76] TRULIO, J.G., TRIGGER, K.R., "Numerical Solution of the One-Dimensional Hydrodynamic Equations in an Arbitrary Time-Dependent Coordinate System", University of California Lawrence Radiation Report UCLR-6522, 1961.

[77] THOMAS, P.D., LOMBARD, C.K., "Geometric Conservation Law and its Application to Flow Computations on Moving Grids", AIAA Journal, Vol. 7, Nr. 7, October 1979.

[78] DIMIRDZIC, I., PERIC, M., "Space Conservation Law in Finite Volume Calculation of Fluid Flow", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.8, 1988, pp. 1037-1050.

[79] MALISKA, C.R., SILVA, A.F.C., MARCHI, C.H., AZEVEDO, J.L.F., "Desenvolvimento de Códigos Computacionais para Solução de Problemas de escoamentos a Alta Velocidade", Relatório técnico

preparado para o IAE/CTA, Parte VI, Janeiro 1991.

[80] ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., "The Finite Element Method" McGraw-Hill, Fourth Edition, Vol. 2, 1991.

[81] STUBEN, K., TROTTEBERG, U., "Multigrid Methods: Fundamental Algorithms, Model Problem Analysis and Applications", Multigrid Methods I, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.

[82] SCHLICHTING, H., TRUCKENBRODT, E., "Aerodynamik des Flugzeuges - Teil I", Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[83] PAHLKE, K., "Development of a Numerical Method Solving the Unsteady Euler Equations for Airfoils in Arbitrary Motion", IB 129-92/09, Institut für Entwurfsaerodynamik, Braunschweig, May 1992.

[84] BLAZEK, J., "Berechnung der Strömung um Profilsysteme mit und ohne Bodeneffekt mit der Methode der Konformen Abbildung", M. Sc. Dissertation, RWTH Aachen, 1989.

[85] ROARK, R.J., YOUNG, W.C., "Formulas for Stress and Strain", McGraw-Hill, 5th Edition, 1985.

[86] FENG, Y.Q., QUEVAT, J.P., "Three-Dimensional Non-Linear Fluid-Structure Interaction Problems": Formulation by the Finite and Infinite Element Method", Int. J. Num. Methods in Engineering, Vol.30, 1990, pp. 1115-1128.

[87] MEIROVITCH, L., "Analytical Methods in Vibrations", Macmillan Company, New York, 1967.

[88] KORNECKI, A., DOWELL, E.H., O'BRIEN, J., "On the Aeroelastic Instability of Two-Dimensional Panels in Uniform Incompressible Flow", Journal of Sound and Vibration, 1976, 47(2), pp. 163-178.

[89] FUNG, Y.C., "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity", John Wiley & Sons, 1955.

[90] SCHLICHTING, H., TRUCKENBRODT, E., "Aerodynamik des Flugzeuges - Teil II", Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[91] TICHY, L., "Transsonische Strömungen an einem schwingenden Profil und deren Einfluß auf die Flattergrenze", DLR-FB 92-08, Forschungsbericht, Göttingen, Mai 1992.

[92] STENDER, W., KIEßLING, F., "Aeroelastic Flutter Prevention in Gliders and Small Aircraft", DLR - Mitteilung 91-03, Göttingen, September 1990.

[93] GARRAD, A.D., CARPENTER, P.W., "On the Aeroelastic Forces Involved in Aeroelastic Instability of Two-Dimensional Panel in Uniform Incompressible Flow", Journal of Sound and Vibration, 1982, 80(3), pp. 437-439.

- [94] KORNECKI, A., "Static and Dynamic Instability of Panels and Cylindrical Shells in Subsonic Potential Flow", Journal of Sound and Vibration, 1974, Nr. 32, 32(2) , pp. 251-263.
- [95] SEIDEL, R., "From Equilibrium to Chaos", Elsevier Science Publishing, 1988.
- [96] SOKOLNIKOFF, L.S., "Tensor Analysis", John Wiley & Sons, 1951.
- [97] BEJAN, A., "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons, 1984.

APÊNDICE A

A. O PROBLEMA AEROELÁSTICO

A.1 Introdução

A aeroelasticidade é a ciência que estuda a interação natural entre as forças aerodinâmicas e as forças elásticas, e a influência desta interação no projeto de um corpo, como por exemplo [2] [3] [89]. Os fenômenos aeroelásticos ocorrem quando as deformações estruturais produzem forças aerodinâmicas adicionais, que, por sua vez, produzem novas deformações. Tais interações podem tornar-se pequenas e tenderem ao equilíbrio, ou grandes e tendem à destruição da estrutura.

O triângulo da aeroelasticidade constitui-se numa boa ferramenta para entender os fenômenos aeroelásticos [3], conforme mostrado na Fig. A.1. Basicamente três áreas da mecânica aplicada são necessárias para estudos aeroelásticos, a saber dinâmica, elasticidade e aerodinâmica.

Conforme indicado na Fig. A.1, a aeroelasticidade estuda a interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e da inércia, e o seu efeito no comportamento dinâmico de uma estrutura. Tais interações produzem oscilações as quais poderão ser amortecidas ou poderão permanecer aproximadamente constantes ou ainda tender à destruição da estrutura.

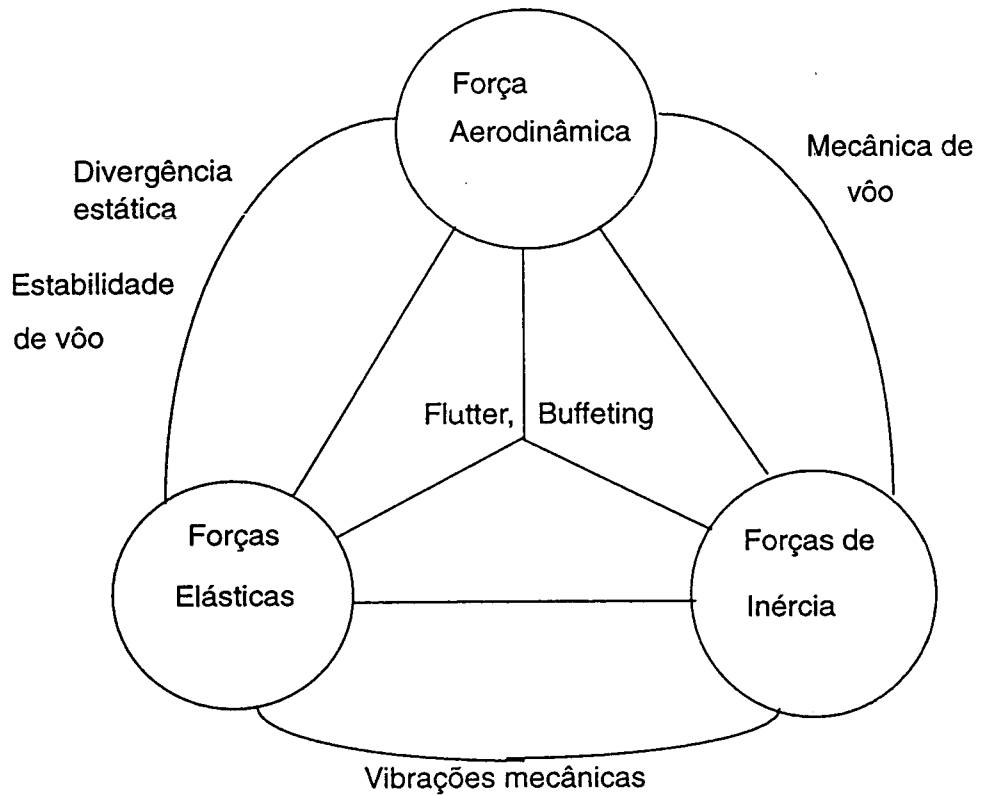


Fig. A.1 Triângulo da aeroelasticidade

A.2 Principais fenômenos aeroelásticos

Os principais fenômenos aeroelásticos, dentre outros, são "flutter = tremulação, vibração, oscilação aeroelástica", "buffeting = trepidação irregular" e "divergência" [3]. Estes são efeitos estáticos e dinâmicos conforme definições apresentadas a seguir:

"Flutter" é a principal instabilidade dinâmica que ocorre com um avião em vôo para velocidades denominadas de "velocidades de flutter" para a qual a elasticidade da estrutura assume um papel

importante. "Flutter" pode ser definido como a instabilidade dinâmica de um corpo elástico numa corrente. As forças necessárias para produzir este fenômeno são aquelas devido às deformações elásticas da estrutura. A experiência tem mostrado que o primeiro modo de flexão ou o primeiro modo de torção da estrutura conduz ao modo crítico de "flutter".

Para a velocidade crítica de "flutter", a oscilação de um aerofólio pode manter-se sozinha com amplitude aproximadamente constante. Para velocidades de escoamento um pouco acima da crítica, um pequeno distúrbio do aerofólio serve como início de uma oscilação forte.

"Buffeting" são vibrações transientes de componentes estruturais de um avião, por exemplo, devido a impulsos aerodinâmicos produzidos pela esteira atrás de asas, fuselagem e outros componentes. Este fenômeno também pode ser definido como o movimento irregular de partes ou de toda a estrutura em um escoamento excitado pela presença de turbulência no mesmo.

"Divergência" é uma instabilidade estática de uma superfície de sustentação de um avião, por exemplo, em vôo para a velocidade denominada de velocidade de divergência.

Os aviões modernos estão sujeitos a muitos tipos de "flutter". O tipo clássico envolve o acoplamento de 2 ou mais graus de liberdade. O tipo não clássico pode envolver separação de camada limite e outros fenômenos devido à interação entre as forças aerodinâmicas adicionais que afetam a resposta global da estrutura.

Alguns exemplos típicos de oscilações aeroelásticas são:

- oscilação de linhas de telefone
- oscilação de linhas de televisão

- vibração de asas

Os modelos aeroelásticos podem ser classificados como estáticos e dinâmicos e alguns exemplos são apresentados a seguir.

A.3 Modelos estáticos e dinâmicos

a) Condição de divergência para uma asa rígida elasticamente restrita

Para modelos estáticos o tempo não aparece como variável independente fazendo com que as forças de inércia sejam eliminadas das equações de equilíbrio. Considere o comportamento de uma asa rígida elasticamente restrita submetida a um escoamento bidimensional, conforme mostrado na Fig. A.2.

Deseja-se obter a posição de equilíbrio para um aerofólio submetido a velocidade V . A força de sustentação que age no aerofólio indicado na Fig. A.2 é dada por

$$L = q \cdot c \cdot c_L = qc \frac{\partial c_L}{\partial \alpha} (\theta + \alpha) \quad (\text{A.1})$$

Quando a direção da corrente livre coincide com a linha de momento zero, $\alpha = 0$, o torque é descrito como

$$M = L \cdot ec = q \cdot c \cdot ec \cdot \frac{\partial c_L}{\partial \alpha} (\theta + \alpha) \quad (\text{A.2})$$

onde

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

O momento de restauração elástico correspondente ao ângulo de giro θ é $k_\alpha \theta$. Do equilíbrio de momentos, obtém-se

$$k_\alpha \theta = M_t = q \cdot c \cdot e \cdot c \cdot \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} (\theta + \alpha)$$

que resulta para θ

$$\theta = \frac{q \cdot e \cdot c^2 \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha}{k_\alpha - q \cdot e \cdot c^2 \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}} \quad (\text{A.3})$$

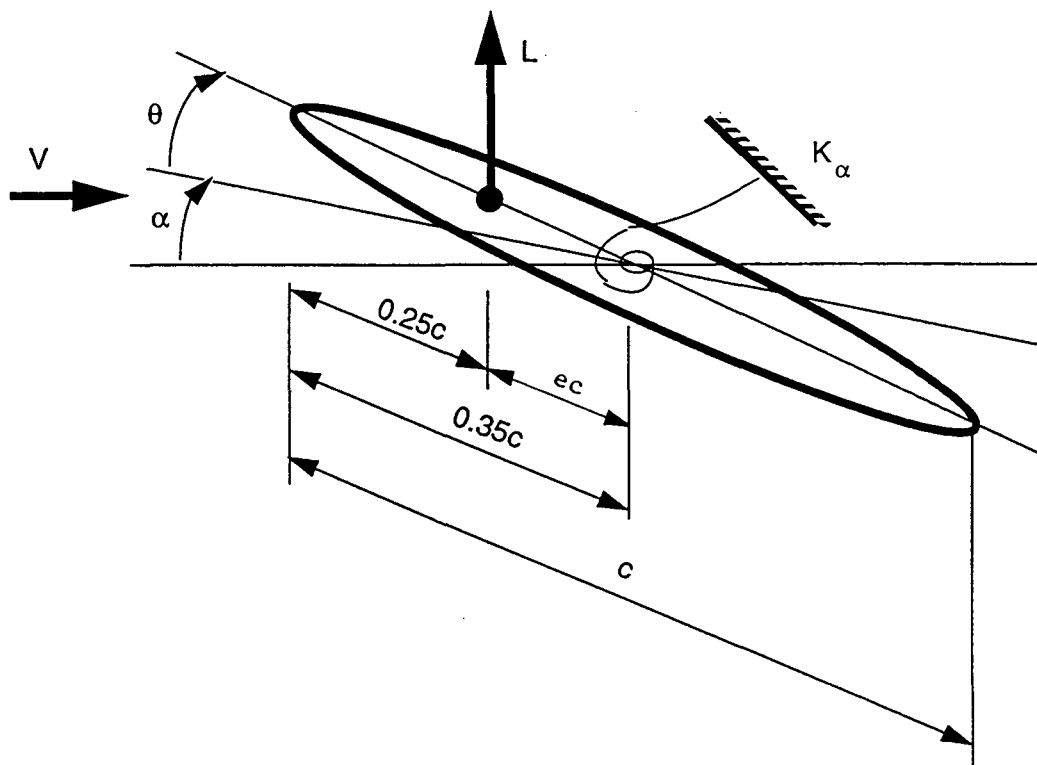


Fig. A.2 Asa rígida elasticamente restrita

A condição de divergência é encontrada quando o denominador da equação para θ (Eq. A.3) tende a zero, ou seja

$$V_{\text{divergência}} = \sqrt{\frac{2k_\alpha}{\rho \cdot e \cdot c^2 \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}} \quad (\text{A.4})$$

A variação do coeficiente de sustentação com α pode ser aproximada para aerofólios submetidos a escoamentos incompressíveis

[82] [90] usando a seguinte relação

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = 2\pi (1 + 0.77 \frac{h}{c}) \cos \alpha \quad (\text{A.5})$$

b) Modelo de "flutter" para um aerofólio e uma asa

O "flutter" é um problema de estabilidade dinâmica de grande interesse. Ele pode ser classificado em duas categorias. Na primeira categoria, encontram-se os fenômenos devido ao escoamento potencial onde os efeitos da camada limite podem ser desconsiderados. Este é também denominado de "flutter" clássico. Na segunda categoria encontram-se os fenômenos devido à formação de vórtices. Afim de modelar o fenômeno de "flutter" clássico inicia-se pela obtenção das equações do movimento ou do equilíbrio dinâmico.

Da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, resultam as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tau}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (\text{A.6})$$

A energia cinética para o aerofólio indicado na Fig. A.3 é dada por

$$\tau = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + S_\alpha \dot{\alpha} \dot{h} + \frac{1}{2} I_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (\text{A.7})$$

A energia potencial total pode ser escrita como

$$U = \frac{1}{2}K_h h^2 + \frac{1}{2}K_\alpha \alpha^2 \quad (\text{A.8})$$

A substituição das Eq. (A.8) e (A.7) na Eq. (A.6) e a aplicação do princípio de Hamilton resulta nas equações do movimento [2] [3]

$$m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + k_h h = L(t) \quad (\text{A.9})$$

$$I_\alpha \ddot{\alpha} + S_\alpha \ddot{h} + k_\alpha \alpha = M(t)$$

onde

$$S_\alpha = m x_\alpha$$

O momento de inércia da secção transversal é representado por I_α . A velocidade crítica de "flutter" é determinada assumindo-se um movimento harmônico simples, escrevendo-se [3]

$$h(t) = \bar{h} e^{i\omega t}, \quad \alpha(t) = \bar{\alpha} e^{i\omega t}$$

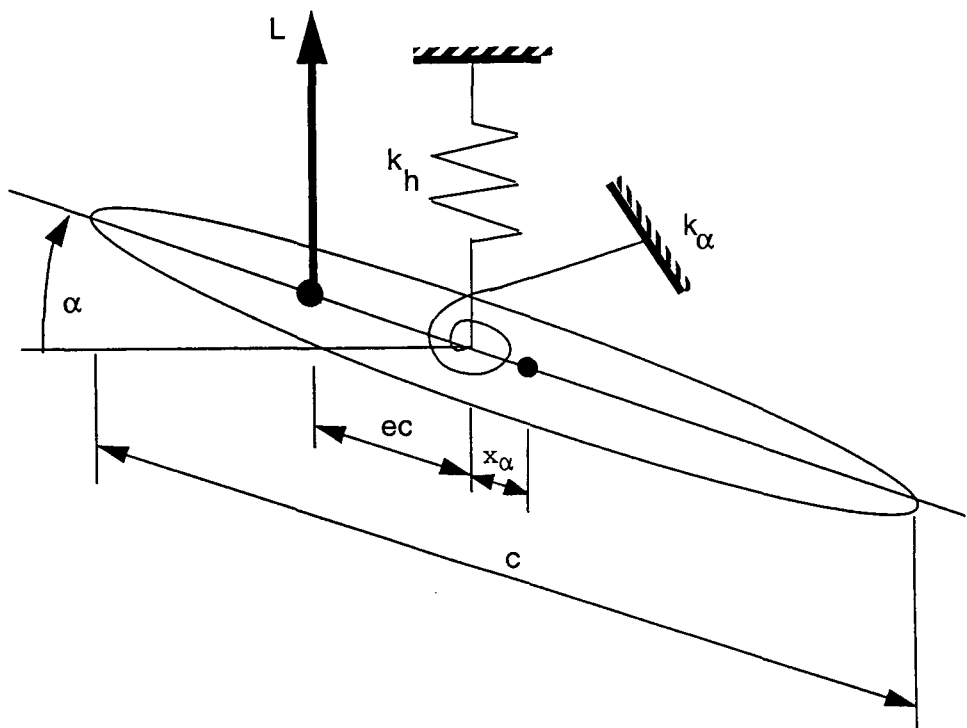


Fig. A.3 Modelo de "flutter" para um aerofólio

Um modelo mais elaborado para este problema pode ser visto em [91] e alguns critérios práticos usados para a prevenção de "flutter" podem ser vistos em [92][3].

Este procedimento também pode ser aplicado para uma asa, conforme mostra a Fig. A.4, onde se assume que a estrutura desta deforma-se como uma viga de rigidez à flexão EI e à rigidez a torção GJ . O centro de torção para aerofólios finos corresponde a aproximadamente 35% do comprimento da corda [3]. As secções transversais são infinitamente rígidas e o eixo elástico é reto.

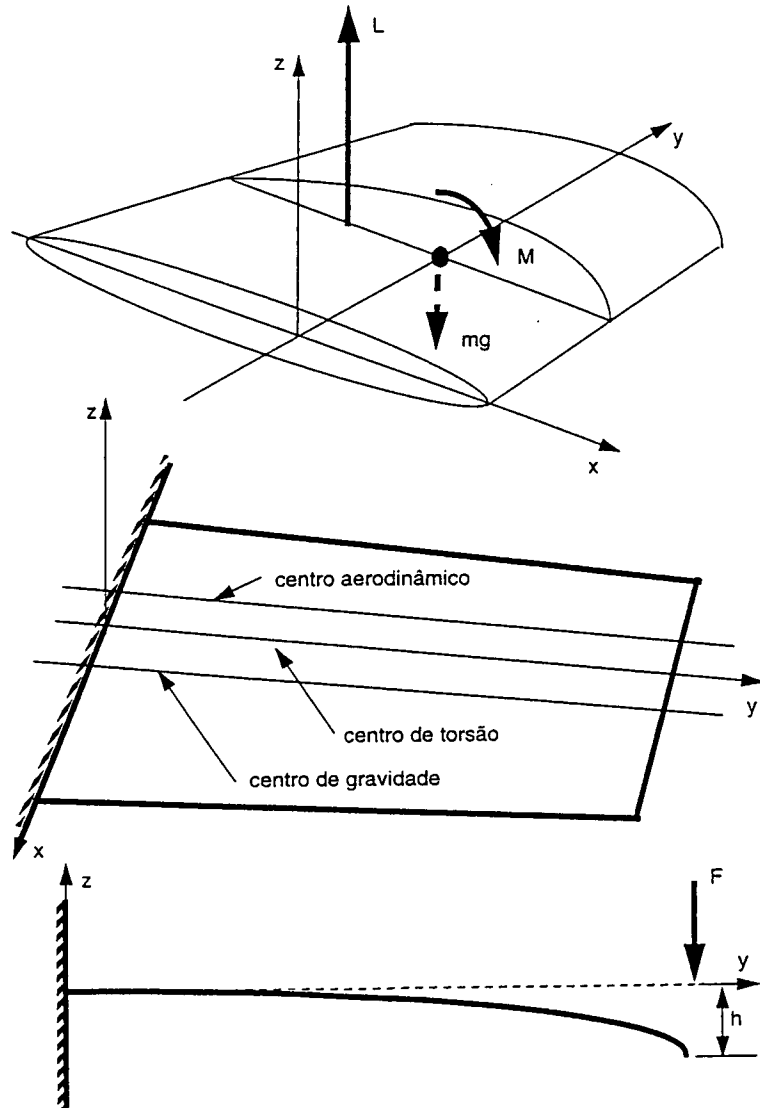


Fig. A.4 Modelo aeroelástico de uma asa (simples)

Após a aplicação do princípio de Hamilton, obtém-se as seguintes equações dos movimento [2] [3]

$$m(y)\ddot{h}(y, t) - S_y\ddot{\alpha}(y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [EI \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}] = L(y, t) \quad (\text{A.10})$$

$$I_y(y)\ddot{\alpha}(y, t) - S_y\dot{h}(y, t) - \frac{\partial}{\partial y} [GJ \frac{\partial \alpha}{\partial y}] = M(y, t)$$

c) Modelo de um painel bidimensional

Outro modelo dinâmico importante é o utilizado para painéis bidimensionais. Um painel, no contexto deste trabalho, é constituído por uma superfície de curvatura moderada conforme mostrado na Fig. A.5.

O estudo do escoamento sobre painéis é importante pois os experimentos sugerem que um painel, com uma extremidade engastada e as outras livres, comporta-se essencialmente como um aerofólio [88] [93] [94].

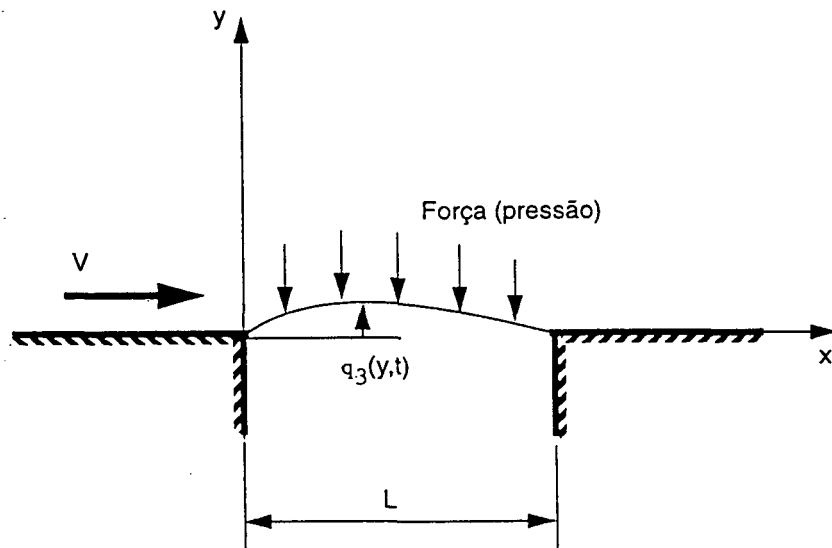


Fig. A.5 Painel bidimensional

Um painel quando submetido a um escoamento poderá tornar-se instável dependendo da velocidade do escoamento. Se um painel está simplesmente apoiado ou engastado em ambas as extremidades, este pode perder a estabilidade por divergência em escoamentos subsônicos e por "flutter" em escoamentos supersônicos. No entanto, um painel com uma extremidade engastada e as outras livres perde estabilidade por "flutter" em escoamentos subsônicos e por divergência em escoamentos supersônicos [88].

O problema da interação entre o fluido e a estrutura pode ser modelado para o painel da Fig. A.5 como [88]

$$\frac{\partial^4 q_3}{\partial x^4} + \frac{rh}{D} \frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} + \frac{\Delta p}{D} = 0 \quad (\text{A.11})$$

onde

$$\Delta p = -\rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{y=0}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

O termo D é a rigidez à flexão, h a espessura do painel, r a massa específica do material e ϕ a perturbação da velocidade potencial que satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

e as seguintes condições de contorno para $y = 0$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0} = \begin{cases} v \frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial q_3}{\partial t} & \text{para } 0 < x < L \\ 0 & \text{no restante} \end{cases}$$

A solução deste sistema de equações, conforme apresentado por Kornecki [88], conduz aos seguintes parâmetros críticos para escoamentos incompressíveis:

- painel engastado ($\lambda^2 = 181$)
- painel simplesmente apoiado ($\lambda^2 = 41,8$)

onde

$$\lambda^2 = \frac{\rho V^2 L^3}{D} \quad (\text{A.12})$$

Usando-se a condição para um painel com bordos engastados ($\lambda^2 = 181$), verifica-se que para

$L = 1\text{m}$	- comprimento
$h = 1,5\text{ mm}$	- espessura
$\rho = 1,2339\text{ kg/m}^3$	- massa específica do fluido
$r = 7800\text{ kg/m}^3$	- massa específica do material
$E = 2,1\text{ E11 N/m}^2$	- módulo de elasticidade longitudinal
$\nu = 0,3$	- coeficiente de Poisson

e condições normais de temperatura e pressão, a solução diverge para velocidades superiores a $V = 97,6\text{ m/s}$, que corresponde a aproximadamente 350 Km/h ($\text{Mach} = 0,282$).

Para finalizar, com a finalidade de melhor entender o comportamento estrutural esperado, considere o sistema massa-mola-amortecedor, conforme mostrado na Fig. A.6.

A resposta a uma excitação (força) aplicada neste sistema é indicada na Fig A.7, quando não existe amortecimento ou quando da presença do mesmo. O amortecimento estrutural pode ser aproximado por [27]

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (\text{A.13})$$

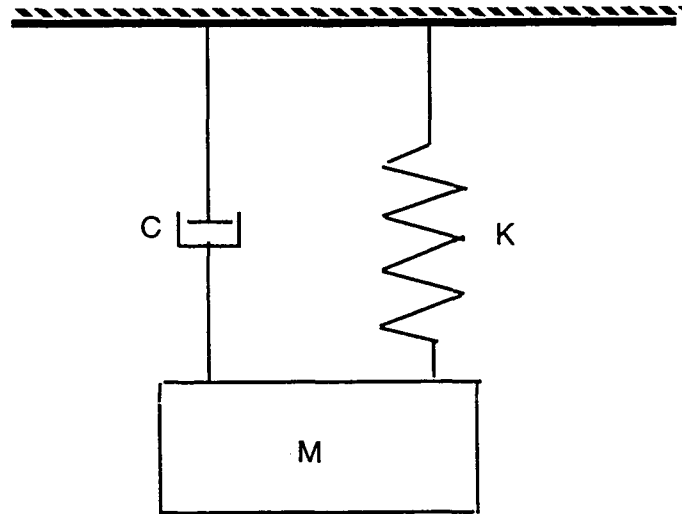


Fig. A.6 Sistema massa-mola-amortecedor

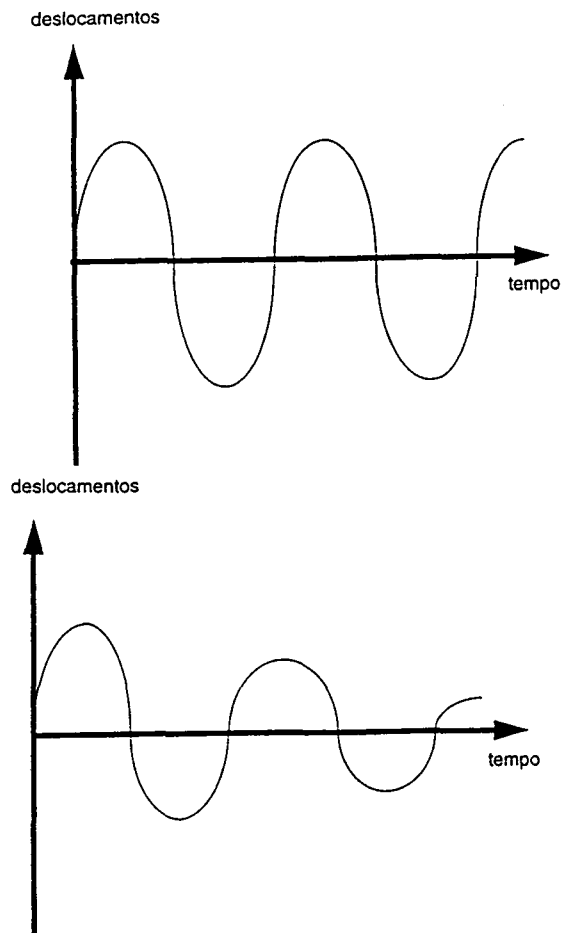


Fig. A.7 Oscilações de um sistema massa-mola-amortecedor

- a) sem amortecimento
- b) com amortecimento

Neste trabalho o amortecimento estrutural foi desconsiderado. No entanto, amortecimento numérico existe. Outras considerações relativas à estabilidade de sistemas quaisquer podem ser vistas em [95].

A.4 Cálculo do carregamento aerodinâmico

A determinação do carregamento aerodinâmico é de grande importância num problema aeroelástico. Por isso deve-se usar uma metodologia de cálculo aerodinâmico que forneça distribuições de pressão e velocidades precisas com a finalidade de calcular os coeficientes aerodinâmicos.

O carregamento aerodinâmico sobre uma superfície é dado pela combinação da força de atrito e força de pressão. A força devido ao atrito aerodinâmico é tangencial à superfície do corpo e corresponde à parcela

$$F_a = \mu A \frac{\partial \vec{q}}{\partial n}$$

onde μ é a viscosidade cinemática, A a área de contato e \vec{n} o vetor normal à superfície.

A força devido à pressão é normal à superfície e corresponde à parcela

$$F_p = p(\vec{n} \cdot A)$$

onde [96]

$$\vec{n} = \frac{e_i \times e_j}{|e_i \times e_j|}$$

Portanto, a força total assume a forma

$$F_t = F_a + F_p$$

Estudos envolvendo a utilização da força de atrito não serão apresentados neste trabalho por serem necessárias malhas mais refinadas para captar os efeitos da camada limite. É bom lembrar que para placas planas, a espessura da camada limite laminar é da ordem de [97]

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re_L}}$$

onde devem ser feitas no mínimo 10 divisões na malha computacional.