Esta tese foi julgada adequada para a obtençao do titulo de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

especialidade em Matemática e aprovada em sua forma final pe lo Curso de Pós-Graduação.

Prof.William Glenn Whitley, Ph.D.

Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Teófilo Abuabara Saad

Orientador

Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NÃO LINEARES COM RETARDAMENTO

MAURICI JOSÉ DUTRA

NOVEMBRO - 1980

À minha sogra, esposa e filho

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Teófilo Abuabara Saad, pela orientação que me dispensou e pela dedicação demonstrada sem a qual não me teria sido possível realizar tal trabalho.

Ao Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas, pelo empenho, abnegação e sugestões dadas.

Aos colegas pelo apoio e incentivo.

A Universidade Federal de Santa Catarina, pelas condições favoráveis para realização deste trabalho.

HOMENAGEM PÓSTUMA

Ao inesquecível Prof. Dr. Walter de Bona Castelan, idealizador e orientador deste trabalho, pelo apoio e segurança que sempre demonstrou.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos algumas propriedades de estabilidade de equações diferenciais funcionais não lineares com retardamento

$$\dot{y}(t) = f(t,y_t) + g(t,y_t, Ly_t) , \quad (*)$$

perturbado da equação não linear

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \qquad (**)$$

onde f, g são aplicações tomando valores em $\mathbb{R}^n$, definidas sobre os conjuntos $I \times C$ e $I \times C \times C$, respectivamente, $L: C \to C$ é um operador linear contínuo, $I = [0, \infty)$ e C é o espaço de Banach das aplicações contínuas sobre o intervalo $[-r, 0]$ $(r > 0)$ e tomando valores em $\mathbb{R}^n$, munido da norma do supremo.

Mais exatamente, nós estudamos a limitação das soluções da equação (*), como também seu comportamento assintótico, estendendo, assim, ao caso funcional retardado $(r > 0)$ os resultados de Pachpatt [6], e portanto os de Brauer [2].

ABSTRACT

In this paper, we study some properties of the stability of non linear functional differential equations with retarded

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t, Ly_t) \qquad (*)$$

of the non linear perturbed equation

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \qquad (**)$$

where f, g are functions taking values in R^n defined over the sets I x C and I x C x C, respectively, L: C → C is a continuous linear operator, I = [0, +) and C is the Banach space of continuous functions on the interval |-r, 0| (r > 0) and taking values in R^n satisfying the norm of the supremum.

More exactly, we study the limitations of the equation (*) as also its asymptotic behavior, thus extending to the case of retarded functional (r > 0), the results of Pachpatt [6] and therefore of the Brauer [2].

ÍNDICE

CAPÍTULO I

PRELIMINARES:

1. CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, procuraremos explicar resumidamente a teoria de equações diferenciais funcionais com retardamento, que serão usadas no desenvolvimento deste trabalho.

Sejam $r \geq 0$ e $\rho \in (-\infty, \infty)$ números reais, $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial de dimensão n com a norma euclidiana $|\cdot|$ e $C([-r, 0], R^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas definidas em $[-r, 0]$ e tomando valores em $\mathbb{R}^n$, munido da topologia da convergência uniforme, definida pela norma

$$\phi \in C \longmapsto \|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$$

Seja $x \in C([a-r, b], \mathbb{R}^n)$ $(a < b)$. Para cada $t \in [a, b]$, denotamos por x_t o elemento de C definido por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \ \forall \ \theta \in [-r, 0]$$

Seja $\Gamma = (\rho, +\infty) \times \Lambda$, onde Λ é um aberto de C, e $f: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Uma equação diferencial funcional com retardamento é uma relação da forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \ , \tag{1}$$

onde $\dot{x}(t)$ indica a derivada à direita da função $x(u)$ no ponto $u = t$.

Definição 1.1:

Dizemos que uma função x é uma solução de (1) passando por $(t_o, \phi) \in \Gamma$ se, e somente se, existe um número real A, $0 < A \leqslant \infty$ tal que:

i) $x \in C[t_o - r, t_o + A, \mathbb{R}^n]$

ii) $x_{t_o} = \phi$, isto é $x_{t_o}(\theta) = \phi(\theta)$ para $-r \leqslant \theta \leqslant 0$

iii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, isto é, x(t) satisfaz a equação (1), para todo t em $[t_o, t_o + A)$.

Vamos denotar por $x(t, t_o, \phi)$ qualquer solução de (1) passando por $(t_o, \phi) \in \Gamma$ e por $x_t(t_o, \phi)$ o elemento de C correspondente a essa solução.

Indicaremos por $[t_o - r, t^+)$, $t_o < t^+ \leqslant \infty$, o maior intervalo aberto à direita ao qual podemos estender $x(t, t_o, \phi)$ como solução de (1).

Definição 1.2:

A solução $x(t, t_o, \phi)$ é limitada, se existe constante $k > 0$ tal que $|x(t, t_o, \phi)| \leqslant k$ para todo t tal que $t_o - r \leqslant t \leqslant t^+$.

OBS. 1.1: Se $f(t, \phi)$ é contínuo em Γ, então para todo $(t_o, \phi) \in \Gamma$ existe pelo menos uma solução de (1) passando por (t_o, ϕ).

OBS. 1.2: Se $f(t, \phi)$ é localmente Lipschitziano em relação a ϕ, em cada sub-conjunto compacto de Γ, então para todo

$(t_o, \phi) \in \Gamma$ existe uma única solução de (1), passando por (t_o, ϕ), e a solução $x(t, t_o, \phi)$ é contínua em (t, t_o, ϕ) no seu domínio de definição.

Para a prova destes resultados de existência e unicidade da solução, ver [5].

<u>**Lema 1.1**</u>:

Se $x \in C([t_o - r, t_o + A], \mathbb{R}^n)$, então a aplicação $t \in [t_o, t_o + A] \longmapsto x_t \in C$, é contínua.

Demonstração - Ver [4].

<u>**Lema 1.2**</u>:

Sejam $(t_o, \phi) \in \Gamma$, e $f: \Gamma \longmapsto \mathbb{R}^n$ contínuo. Então, mostrar que a equação (1) tem uma solução passando por (t_o, ϕ) é equivalente mostrar que a equação integral

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_o}^{t} f(s, x_s)\, ds \quad , \quad t \geq t_o$$

$$x_{t_o} = \phi$$

tem uma solução. Com efeito, a equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

é equivalente à equação

$$x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} f(s, x_s)\, ds \ ,$$

onde $x(t_o) = x_{t_o}(0) = \phi(0)$, então

$$x(t) = \phi(0) + \int_{t_o}^{t} f(s, x_s)\, ds.$$

OBS. 1.3:

a) Se $A: (\rho, +\infty) \longmapsto L(C, \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua, então temos que

i) A função $t \in (\rho, \infty) \longmapsto \|A(t)\| \in \mathbb{R}^+$, é contínua,

e

ii) $|A(t)\,\phi| \leq \|A(t)\|\ \|\phi\|$, para todo $(t_o, \phi) \in \Gamma$.

Portanto, pela Obs. 1.1, segue-se que para cada $(t_o, \phi) \in \Gamma$, a equação diferencial funcional linear

$$\dot{y}(t) = A(t)\, y_t \tag{2}$$

tem uma única solução $y(t, t_o, \phi)$, definida e contínua em $[t_o - r, \infty)$.

Além disso, para todo $t \geq t_o$, a aplicação $y(t_o, \cdot)(t) : C \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear contínuo.

Deste modo, podemos associar à equação (2) uma família de operadores lineares contínuos

$$T(t, t_o) : C \to C\ ,\ t \geq t_o > \rho,\ \phi \in C$$

definido por:

$$T(t, t_o)\phi = y_t(t_o, \phi) \tag{3}$$

b) A família de operadores $\{T(t, t_o),\ t \geq t_o\}$ tem as seguintes propriedades:

i) A família $\{T(t, t_o) \,/\, t \geq t_o\}$ é um semi-grupo de transformações lineares, isto é

$$T(t + s, t_o) = T(t, t_o) + T(s, t_o) ,$$

para todo $t \geq t_o$, todo $s \geq t_o$.

ii) O operador $T(t, t_o)$ é fortemente contínuo para $\rho < t_o \leq t < \infty$, isto é

$$\lim_{\lambda \to t} \|T(t, t_o)\,\phi - T(s, t_o)\,\phi\| = 0 \qquad s, t \geq t_o ,$$

para cada $\phi \in C$.

iii) $T(t, t) = I$, onde I = matriz identidade.

Para a demonstração destas propriedades, nós indicamos ao leitor a [5].

Se $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua por partes, então podemos definir uma solução da equação linear (2) passando por (t_o, ψ). Consequentemente, dada a função matricial

$$Y_o : \theta \in [-r, 0] \longmapsto \begin{cases} 0 , & -r \leq \theta \leq 0 \\ I , & \theta = 0 \end{cases} \tag{4}$$

então podemos definir $T(t, s)\, Y_o$ como sendo a função matricial cujas funções colunas são as imagens por $T(t, s)$ das funções colunas de Y_o, isto é, o operador $T(t, t_o)$ é definido sobre as colunas de Y_o.

Consideremos a equação

$$\dot{Z}(t) = A(t)\, Z_t + g(t,\, Z_t,\, LZ_t) \tag{5}$$

onde $g: \Gamma \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, e $L: C \rightarrow C$ um operador linear contínuo.

Uma função $Z(t)$ é solução da equação (5) passando por $(t_o, \phi) \in \Gamma$ se, e somente se, $Z(t)$ satisfaz a equação integral

$$Z(t) = T(t,\, t_o)\phi + \int_{t_o}^{t} T(t,s)Y_o\, g(s,\, Z_s,\, LZ_s)ds \tag{6}$$

$\forall\ t \geq t_o$.

A equação (6) é uma equação integral no espaço $\mathbb{R}^n$ e deve ser interpretada como

$$Z_t(\Theta) = \left[T(t,t_o)\phi\right](\Theta) + \int_{t_o}^{t} \left[T(t,s)Y_o\right](\Theta)\, g(s,\, Z_s,\, LZ_s)\, ds$$

para $t \geq t_o$, $-r \leq \Theta \leq 0$.

Para uma derivação de (6) ver [5].

2. FÓRMULA INTEGRAL DE ALEKSEEV-SHANHOLT

Esta fórmula (teorema 1.2, por vir) mostra uma relação entre as soluções da equação funcional

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \qquad (1)$$

e as de sua equação perturbada

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t, Ly_t) \qquad (7).$$

O objetivo deste parágrafo é enunciar esta relação, mas antes precisamos das seguintes considerações:

Suponhamos que

i) $f: \Gamma \to \mathbb{R}^n$ e $g: \Gamma \times C \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas.

ii) $L: C \to C$ é um operador linear contínuo, e que

iii) $f(t, \phi)$ possui derivada de Frechet em relação a ϕ, $\frac{\partial f}{\partial \phi}(t, \phi)$, contínua em Γ.

Como as soluções de (7) não são únicas, em geral, denotaremos por $y(t, t_o, \phi)$ qualquer solução de (7), passando por $(t_o, \phi) \in \Gamma$.

Sendo $\frac{\partial}{\partial \phi} f(t, \phi)$ contínua em Γ, então $f(t, \phi)$ é localmente Lipschitziana em ϕ, em cada sub-conjunto compacto de Γ.

Deste modo, as soluções da equação (1) não somente existem, mas são únicas e contínuas em seus três argumentos.

Vamos denotar por $J = J(t_o, \phi)$, para cada $(t_o, \phi) \in \Gamma$, o intervalo maximal de existência da solução $x(t, t_o, \phi)$.

À cada solução $x(t, t_o, \phi)$ da equação (1) podemos associar a seguinte equação diferencial funcional linear

$$\dot{Z}(t) = [\frac{\partial f}{\partial \phi} (t, x_t(t_o, \phi))] Z_t \quad , \quad t \in J. \tag{8}$$

Chamaremos a equação (8) de equação Variacional Linear da equação (1) em relação à solução $x(t, t_o, \phi)$.

Daqui por diante, denotaremos por $\{T(t, t_o); t \geq t_o\}$, a família de operadores lineares associada à equação (8) (Obs. 1.2-a).

Se $\frac{\partial f}{\partial \phi} (t_o, \phi)$ é contínuo em Γ, então o operador T satisfaz a seguinte propriedade de continuidade:

Para cada $(t_o, \phi) \in \Gamma$, cada $A > 0$ tal que $[t_o, t_o + A] \in J$, e cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_o, \phi, A) > 0$ tal que $\psi \in \Lambda$ e $\|\phi - \psi\| < \delta$, então

$$\|T(t, t_o : \phi) - T(t, t_o : \psi)\| < \varepsilon ,$$

uniformemente em $t \in [t_o, t_o + A]$.

Para uma prova deste resultado, ver [8].

Teorema 1.1:

Para qualquer $(t_o, \phi) \in \Gamma$ e para cada $t \in J$, a derivada de Frechet da função $x_t(t_o, \phi)$ em relação a ϕ, $\frac{\partial}{\partial \phi} x_t(t_o, \phi)$, existe e é igual a $T(t, t_o : \phi)$, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} x_t(t_o, \phi) = T(t, t_o : \phi)$$

Além disso se $\phi \in \Lambda_p$, então

$$\frac{\partial}{\partial t_o} x_t(t_o, \phi) = T(t, t_o : \phi)\varepsilon , \tag{9}$$

onde $\Lambda_p \equiv \{\phi \in \Lambda, \dot{\phi}(\theta)$ existe, é limitada e contínua por partes em $[-r, 0]\}$, e ε é a função definida por:

$$\varepsilon(\theta) = \begin{cases} -f(t_o, \phi) & \text{se } \theta = 0 \\ -\dot{\phi}(\theta) & \text{se } -r \leqslant \theta < 0 \end{cases}$$

Para a demonstração deste teorema ver [4]. Ver também [8].

Teorema 1.2:

Suponhamos que para qualquer $(t_o, \phi) \in (\rho, \infty) \times \Lambda_p$, as soluções $x_t(t_o, \phi)$ e $y_t(t_o, \phi)$ das equações (1) e (7), respectivamente, estejam definidas em $[t_o - r, \bar{t})$, $t_o < \bar{t} \leqslant \infty$, e que a solução $x_s(s, y_s(t_o, \phi))$ de (1) existe em $[t_o - r, \bar{t})$ para todo s, $t_o \leqslant s < \bar{t} \leqslant \infty$. Então,

$$y_t(t_o, \phi) = x_t(t_o, \phi) + \int_{t_o}^{t} T(t, s: y_s(t_o, \phi))Y_o \ .$$

$$. \ g[s, y_s(t_o, \phi), Ly_s(t_o, \phi)] \, ds \qquad (10)$$

para $t_o \leqslant t \leqslant \bar{t}$.

Prova: Ver [8].

OBS. 1.4: A relação (10) - Fórmula Integral de Alekseev-Shanholt - é uma generalização da fórmula da variação das constantes (6).

CAPÍTULO II

Neste capítulo, vamos estender ao caso retardado não linear, alguns resultados obtidos por Pachpatte [6], usando a fórmula integral de Alekseev-Shanholt (Capítulo I).

Inicialmente demonstraremos a desigualdade de Gronwall-Bellman e daremos algumas definições.

Lema 2.1: (Desigualdade de Gronwall-Bellman)

Seja u(t), h(t) e k(t) funções reais não negativas contínuas, definidas em $I = [0, \infty)$, para o qual a desigualdade

$$u(t) \leq u_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\, u(s)ds + \int_{t_0}^{t} h(s) \left(\int_{t_0}^{s} k(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right) ds$$

$t \in I$, é válida, onde u_0 é uma constante não negativa, então

$$u(t) \leq u_0 \left[1 + \int_{t_0}^{t} h(s) \exp \left(\int_{t_0}^{s} [h(\tau) + k(\tau)]d\tau\right) ds\right]$$

para todo $t \in I$.

Prova: Se v(t) é a função definida por:

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\, u(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} h(s) \left(\int_{t_0}^{s} k(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right)ds,$$

onde $u(t_0) = u_0$, então

Teorema 1.3:

Se para cada $(t_o, \phi) \in \Gamma$, $J(t_o, \phi) = [t_o, \infty)$, então:

$$y_t(t_o, \phi) = x_t(t_o, \phi) + \int_{t_o}^{t} T(t, s: y_s(t_o, \phi))Y_o \; .$$

$$. \; g\,[s, y_s(t_o, \phi), Ly_s(t_o, \phi)]\; ds$$

é válido para todo (t_o, ϕ), para o qual $y_t(t_o, \phi)$ é única.

Prova: Ver [8].

$$\dot{v}(t) = h(t)\, u(t) + h(t) \int_{t_o}^{t} k(\tau)\, v(\tau)\, d\tau, \quad \text{logo}$$

$$\dot{v}(t) \leqslant h(t) \left[v(t) + \int_{t_o}^{t} k(\tau)\, v(\tau)\, d\tau \right].$$

Definindo

$$m(t) = v(t) + \int_{t_o}^{t} k(\tau)\, v(\tau)\, d\tau ,$$

então $m(t_o) = v(t_o)$, logo

$$\dot{m}(t) = \dot{v}(t) + k(t)\, v(t) ,$$

e como

$$\dot{v}(t) \leqslant h(t)\, m(t), \qquad (*)$$

então

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &\leqslant h(t)\, m(t) + k(t)\, v(t) \leqslant \\ &\leqslant h(t)\, m(t) + k(t)\, m(t) = \\ &= [h(t) + k(t)]\, m(t) , \end{aligned}$$

de onde

$$m(t) \leqslant m(t_o) + \int_{t_o}^{t} [h(s) + k(s)]\, m(s)\, ds ,$$

isto é,

$$m(t) \leqslant u_o + \int_{t_o}^{t} [h(s) + k(s)]\, m(s)\, ds.$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall, temos

$$m(t) \leq u_o \exp \left(\int_{t_o}^{t} [h(s) + k(s)]\, ds\right),$$

logo, tendo em conta (*), se tem que

$$\dot{v}(t) \leq u_o\, h(t) \exp \left(\int_{t_o}^{t} [h(s) + k(s)]\, ds\right)$$

integrando de t_o a t, esta desigualdade, temos que

$$v(t) \leq v(t_o) + u_o \int_{t_o}^{t} h(s) \exp \left(\int_{t_o}^{s} [h(\tau) + k(\tau)]\, d\tau\right) ds$$

e como $v(t_o) = u_o$ e $u(t) \leq v(t)$,

então

$$u(t) \leq u_o \left[1 + \int_{t_o}^{t} h(s) \exp \left(\int_{t_o}^{s} [h(\tau) + k(\tau)]\, d\tau\right) ds\right],$$

para todo $t \in I$. Portanto, o Lema.

<u>Definição 2.1</u>:

A solução $x = 0$ de (1) diz-se "exponencialmente assintoticamente estável em variação", se existem $M > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\|x_t(t_o, \phi)\| \leq M\, \|\phi\|\, e^{-a(t-t_o)}$$

e

$$\|T(t, t_o; \phi)\| \leq M\, e^{-a(t-t_o)},$$

para todo $t \geq t_o \geq 0$ e $\|\phi\| \to 0$.

Definição 2.2:

A solução $x = 0$ de (1) diz-se "uniformemente lentamente crescente em variação" se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\|x_t(t_o, \phi)\| \leq M \|\phi\| e^{\varepsilon(t-t_o)}$$

e

$$\|T(t, t_o: \phi)\| \leq M e^{\varepsilon(t-t_o)}$$

para todo $t \geq t_o \geq 0$ e $\|\phi\| < \infty$.

O seguinte teorema relaciona uma propriedade das soluções da equação (1) com as de sua equação perturbada (7).

Teorema 2.1:

Suponhamos que

$$\|T[t,s: \Psi]\| \, |g[s,\Psi,\psi]| \leq p(s) (\|\Psi\| + \|\psi\|), \quad (H_1)$$

para todo $\Psi \in C$, todo $\psi \in C$, todo s, $t \in I$, e que

$$\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leq \int_{t_o}^{t} q(s) \|y_s(t_o, \phi)\| ds, \ \phi \in C, \quad (H_2)$$

onde $p(s) \in C[I, \mathbb{R}_+]$, $q(s) \in C[I, \mathbb{R}_+]$ são tais que $\int_{t_o}^{\infty} p(s) ds < \infty$ e $\int_{t_o}^{\infty} q(s) ds < \infty$. Então, para cada solução limitada em I, $x_t(t_o, \phi)$, de (1), a correspondente $y_t(t_o, \phi)$ de (7) também é limitada em I.

Demonstração:

Pela fórmula integral de Alekseev-Shanholt temos que

$$y_t(t_o, \phi) = x_t(t_o, \phi) + \int_{t_o}^{t} T[t, s: y_s(t_o, \phi)]Y_o \,.$$

$$. \, g[s, y_s(t_o, \phi), Ly_s(t_o, \phi)] \, ds \,,$$

de onde

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \|x_t(t_o, \phi)\| + \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \,.$$

$$. \, |g[s, y_s(t_o, \phi), Ly_s(t_o, \phi)]| \, ds \,,$$

logo, por (H_1) e (H_2), se tem que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \|x_t(t_o, \phi)\| + \int_{t_o}^{t} p(s) \, [\|y_s(t_o, \phi)\| +$$

$$+ \|Ly_s(t_o, \phi)\|] \, ds = \|x_t(t_o, \phi)\| +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} p(s) \, \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds + \int_{t_o}^{t} p(s) \, \|Ly_s(t_o, \phi)\| \, ds \leq$$

$$\|x_t(t_o, \phi)\| + \int_{t_o}^{t} p(s) \| \, y_s(t_o, \phi)\| \, ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} p(s) \, [\int_{t_o}^{s} q(\tau) \, \|y_\tau(t_o, \phi)\| \, d\tau] \, ds$$

Portanto, se $x_t(t_o, \phi)$ é uma solução limitada de (1), digamos $\|x_t(t_o, \phi)\| \leq a$, então

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \alpha + \int_{t_o}^{t} p(s) \|y_s(t_o, \phi)\| ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} p(s) \left[\int_{t_o}^{s} q(\tau)\| y_\tau(t_o, \phi)\| d\tau\right] ds ,$$

logo, pela desigualdade de Gronwall-Bellman, temos que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \alpha \left[1 + \int_{t_o}^{t} p(s) \exp \left(\int_{t_o}^{s} [p(\tau) + q(\tau)] d\tau\right) ds\right] ,$$

de onde, como $\int_{t_o}^{\infty} p(s) ds < \infty$ e $\int_{t_o}^{\infty} q(s) ds < \infty$, se segue que existe $\beta > 0$ tal que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \beta , \quad \forall t \geq t_o.$$

o qual queríamos demonstrar.

Com uma demonstração análoga à deste teorema temos o seguinte:

Corolário 2.1:

Suponhamos que

$$\|T(t, s: \Psi)\| \; |g(s, \Psi, \psi)| \leq p(s) \; (\|\Psi\|+\|\psi\|), \quad s,t \in I,$$

para todo $\Psi \in C$, todo $\psi \in C$ com $\|\psi\| \leq 1$, e que $\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leq \min \{1, \int_{t_o}^{t} q(s)\| y_s(t_o, \phi)\| ds\}$, onde $p(s)$, $q(s) \in C\,[I, \mathbb{R}_+]$ são funções tais que $\int_{t_o}^{\infty} p(s) ds < \infty$ e $\int_{t_o}^{\infty} q(s) ds < \infty$.

Então, para cada solução limitada em I, $x_t(t_o, \phi)$, de (1), a correspondente $y_t(t_o, \phi)$ de (7) também é limitada em I.

Uma outra relação entre as soluções de (1) e (7) é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2:

Seja a solução $x = 0$ de (1) exponencialmente assintoticamente estável em variação.

Suponhamos que a perturbação $g(t, \Psi, \psi)$, em (7), satisfaz a desigualdade

$$|g[t, \Psi, \psi]| \leq p(t)\,(\|\Psi\| + \|\psi\|), \quad t \in I \qquad (H_3)$$

para todo $\Psi \in C$, todo $\psi \in C$, onde $p(s) \in C[I, \mathbb{R}_+]$ é tal que $\int_{t_o}^{\infty} p(s)ds < \infty$.

Suponhamos, além disso, que o operador L satisfaz a desigualdade

$$\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leq e^{-ct} \int_{t_o}^{t} q(s)\| y_s(t_o, \phi)\| \, ds \qquad (H_4)$$

onde $C > 0$, $q(s) \in C[I, \mathbb{R}_+]$ e $\int_{t_o}^{\infty} q(s)ds < \infty$ então todas as soluções de (7) tendem para zero quando $t \to \infty$.

Demonstração:

Pela fórmula integral de Alekseev-Shanholt temos que

$$y_t(t_o, \phi) = x_t(t_o, \phi) +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} T[t; s: y_s(t_o, \phi)]\, Y_o\, g[s, y_s(t_o, \phi), Ly_s(t_o, \phi)]\, ds \;,$$

logo:

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \|x_t(t_o, \phi)\| +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \; |g[s, y_s(t_o, \phi), Ly_s(t_o, \phi)]\, ds ,$$

de onde, tendo em conta (H_3) e (H_4), temos que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq \|x_t(t_o, \phi)\| +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \; p(s) \; (\|y_s(t_o, \phi)\| + \|Ly_s(t_o, \phi)\|) ds$$

$$= \|x_t(t_o, \phi)\| + \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \; p(s) \; \|y_s(t_o, \phi)\| \; ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \; p(s) \; \|Ly_s(t_o, \phi)\| \; ds \leq$$

$$\leq \|x_t(t_o, \phi)\| + \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \; p(s) \; \|y_s(t_o, \phi)\| \; ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|T[t, s: y_s(t_o, \phi)]\| \; p(s) \; [e^{-cs} \int_{t_o}^{s} q(\tau)\| \; y_\tau(t_o, \phi)\| \; d\tau \,] ds.$$

Portanto, usando a hipótese de que $x = 0$ é exponencialmente assintoticamente estável em variação (definição 2.1), temos que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leq M \, \|\phi\| \, e^{-c(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} M \, e^{-c(t-t_o)} p(s) \| \, y_s(t_o, \phi)\| \; ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M \, e^{-c(t-s)} \, p(s) \; [e^{-cs} \int_{t_o}^{s} q(\tau)\| \; y_\tau(t_o, \phi)\| \; d\tau \,] ds ,$$

isto é,

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant M\,\|\phi\|\, e^{-c(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} M\, e^{-c(t-s)}\, p(s)\, \|y_s(t_o, \phi)\|\, ds +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M\, e^{-ct}\, p(s)\, [\int_{t_o}^{s} q(\tau)\|\, y_\tau(t_o, \phi)\|\, d\tau\,]\, ds.$$

Multiplicando ambos os membros desta desigualdade por e^{ct}, temos que

$$e^{ct}\, \|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant M\,\|\phi\|\, e^{ct_o} + \int_{t_o}^{t} M\, e^{cs}\, p(s)\, \|y_s(t_o, \phi)\|\, ds \;+$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M\, p(s)\, [\int_{t_o}^{s} q(\tau)\|\, y_\tau(t_o, \phi)\|\, d\tau\,]\, ds \;=$$

$$= M\,\|\phi\|\, e^{ct_o} + \int_{t_o}^{t} M\, e^{cs}\, p(s)\, \|y_s(t_o, \phi)\|\, ds \;+$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M\, p(s)\, [\int_{t_o}^{s} q(\tau)\, e^{c\tau}\, \frac{\|y_\tau(t_o, \phi)\|}{e^{c\tau}}\, d\tau\,]\, ds \quad ,$$

logo, aplicando a desigualdade de Gronwall-Bellman, temos

$$e^{ct}\, \|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant M\,\|\phi\|\, e^{ct_o}\, [1 + \int_{t_o}^{t} M\, p(s)\, \exp(\int_{t_o}^{s} [M\, p(\tau) \;+$$

$$+ q(\tau)\, e^{-c\tau}\,]\, d\tau)\, ds\,] \,,$$

ou seja

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant M\,\|\phi\|\, e^{-c(t-t_o)}\, [1 + \int_{t_o}^{t} M\, p(s)\, \exp(\int_{t_o}^{s} [M\, p(\tau) \;+$$

$$+ q(\tau)\, e^{-c\tau}\,]\, d\tau)\, ds]$$

portanto, o teorema.

Teorema 2.3:

Seja a solução $x = 0$ de (1) uniformemente lentamente crescente em variação (definição 2.2).

Suponhamos que a perturbação $g(t, \Psi, \psi)$ em (7), satisfaz que

$$|g[t, \Psi, \psi]| \leq p(t)\,(\|\Psi\| + \|\psi\|), \quad t \in I, \qquad (H_5)$$

para todo $\Psi \in C$, todo $\psi \in C$, onde $p(s) \in C[I, \mathbb{R}_+]$ e $\int_{t_0}^{\infty} p(s)ds < \infty$.

Suponhamos, além disso, que o operador L satisfaz a desigualdade

$$\|Ly_t(t_0, \phi)\| \leq e^{\varepsilon t} \int_{t_0}^{t} q(s)\, \|y_s(t_0, \phi)\|\, ds\,, \qquad (H_6)$$

onde $\varepsilon > 0$, $q(s) \in C[I, \mathbb{R}_+]$ e $\int_{t_0}^{\infty} q(s)ds < \infty$, e que existem constantes $M > 0$ e $k > 0$ tais que

$$\int_{t_0}^{\infty} M\, p(s) \exp\left(\int_{t_0}^{s} [M\, p(\tau) + q(\tau)\, e^{\varepsilon\tau}]d\tau\right) ds \leq k \qquad (H_7).$$

Então, as soluções de (7) são lentamente crescentes.

Demonstração:

Pela fórmula de Alekseev-Shanholt temos que

$$y_t(t_0, \phi) = x_t(t_0, \phi) + \int_{t_0}^{t} T[t, s: y_s(t_0, \phi)]\, Y_0\, g[s, y_s(t_0,\phi), Ly_s(t_0,\phi)]\,ds,$$

logo

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant \|x_t(t_o, \phi)\| \quad +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|T\ [t,\ s:\ y_s(t_o, \phi)]\|\ |g\ [s,\ y_s(t_o, \phi),\ Ly_s(t_o, \phi)]\ |\, ds,$$

de onde, tendo em conta (H_5) e (H_6), temos que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant \|x_t(t_o, \phi)\| \quad +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} \|T\ [t,\ s:\ y_s(t_o, \phi)]\|\ p(s)\ (\|y_s(t_o, \phi)\| + \|Ly_s(t_o, \phi)\|)\, ds$$

$$\leqslant \|x_t(t_o, \phi)\| + \int_{t_o}^{t} \|T\ [t,\ s:\ y_s(t_o, \phi)]\|\ p(s)\ (\|y_s(t_o, \phi)\| \quad +$$

$$+ e^{\varepsilon s} \int_{t_o}^{s} q(\tau)\ \|y_\tau(t_o, \phi)\| d\tau)\ ds.$$

portanto, usando a hipótese de que $x = 0$ é uniformemente lenta - mente crescente em variação (def. 2.2), temos que

$$\|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant M\ \|\phi\|\ e^{\varepsilon(t-t_o)} + \int_{t_o}^{t} M\ e^{\varepsilon(t-t_o)}\ p(s)\ (\|y_s(t_o, \phi)\| \quad +$$

$$+ e^{\varepsilon s} \int_{t_o}^{s} q(\tau)\|\ y_\tau(t_o, \phi)\| d\tau)\ ds.$$

Multiplicando ambos os membros desta desigualdade por $e^{-\varepsilon t}$, temos que

$$e^{-\varepsilon t}\ \|y_t(t_o, \phi)\| \leqslant M\ \|\phi\|\ e^{-\varepsilon t_o} + \int_{t_o}^{t} M\ e^{-\varepsilon s}\ p(s)\ (\|y_s(t_o, \phi)\| \quad +$$

$$+ e^{\varepsilon s}\int_{t_o}^{s} q(\tau)\ \|y_\tau(t_o,\ \phi)\|\ d\tau)ds = M\ \|\phi\|\, e^{-\varepsilon t_o}\ +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M\ e^{-\varepsilon s}\ p(s)\ \|y_s(t_o,\ \phi)\|\, ds + \int_{t_o}^{t} M\ p(s)\ [$$

$$[\ \int_{t_o}^{s} q(\tau)\ \|y_\tau(t_o,\ \phi)\|\, d\tau\ ]\ ds\ =$$

$$= M\ \|\phi\|\ e^{-\varepsilon t_o} + \int_{t_o}^{t} M\ e^{-\varepsilon s}\ p(s)\ \|y_s(t_o,\ \phi)\|\, ds\ +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} M\ p(s)\ [\int_{t_o}^{s} q(\tau)\ e^{-\varepsilon\tau}\frac{\|y_\tau(t_o,\ \phi)\|}{e^{-\varepsilon\tau}}\ d\tau\ ]\ ds\ ,$$

logo, pela desigualdade de Gronwall-Bellman, temos que

$$e^{-\varepsilon t}\ \|y_t(t_o,\ \phi)\| \leqslant u_o\ [1 + \int_{t_o}^{t} M\ p(s)\ \exp(\int_{t_o}^{s} M\ p(\tau)\ +$$

$$+ q(\tau)\ e^{\varepsilon\tau}]d\tau)\ ds \leqslant u_o\ [1 + \int_{t_o}^{\infty} M\ p(s)\ \exp(\int_{t_o}^{s}[M p(\tau)\ +$$

$$+ q(\tau)\ e^{\varepsilon\tau}]d\tau)\ ds$$

portanto, usando (H_7), se tem que

$$e^{-\varepsilon t}\ \|y_t(t_o,\ \phi)\| \leqslant u_o\ [1 + k] = M_1\ ,$$

isto é,

$$\|y_t(t_o,\ \phi)\| \leqslant\ M\ e^{\varepsilon t}\ .$$

Portanto, o teorema.

2. EXEMPLOS

Exemplo 2.1:

No sistema de equações (1) e (7),

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ \dot{y}(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t, Ly_t) \end{cases} ,$$

Sejam

$$f(t, \Psi) = -\Psi(0) \;, \; t \in I \;, \; \Psi \in C$$

$$g(t, \Psi, \psi) = e^{-t} \psi(-r) \;, \; t \in I, \; \Psi, \psi \in C$$

e L: C → C o operador (contínuo) definido assim:

Se $y \in C([t_o - r, t_o + A], \mathbb{R})$, então se define

$L(y_t) \in C([t_o - r, t_o + A], \mathbb{R})$ como sendo a função

$$\Theta \in [-r, 0] \rightarrow Ly_t(\Theta) = \min \{1, \hat{y}_t(\Theta)\} ,$$

onde

$$\hat{y}(\Theta) = \begin{cases} \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds \;, & t \geq t_o \\ 0 \;, & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Demonstraremos que f, g e L satisfazem as hipóteses do teorema 2.1. com efeito,

a) A solução de (1) passando por (t_o, Ψ) é dada por $x_t(t_0, \Psi)$, onde

$$x(t,\ s,\ \Psi) = \begin{cases} \Psi(0)\ e^{-t+s}, & t \geqslant s \\ \Psi(t-s), & s-r \leqslant t \leqslant s, \end{cases}$$

pois, para $t \geqslant t_o$, temos que

$$\dot{x}(t) = -\Psi(0)\ e^{-t+t_o} = -\ x_t(t_o,\ \Psi)(0) = f(t,\ x_t).$$

b) Como neste caso, a equação não perturbada é linear, sua variacional em torno de qualquer solução coincide com ela própria, logo

$$T(t,\ t_o:\ \Psi) = x_t(t_o,\ \Psi)\quad,\quad t \geqslant t_o$$

c) Demonstremos que se $p(s) = e^{r}\ e^{-s}$, $s \in I$, então:

$$\|T(t,\ s:\ \Psi)\|\ |g(t,\ \Psi,\ \psi)| \leqslant p(s)(\|\Psi\| + \|\psi\|),$$

para todo $t \in I$, todo $s \in I$, todo $\Psi \in C$ e todo $\psi \in C$ com $\|\psi\| \leqslant 1$. Com efeito,

$$\|T(t,\ s:\ \Psi)\|\ |g(t,\ \Psi,\ \psi)| = \sup_{-r \leqslant \Theta \leqslant 0} |x_t(s,\ \Psi)(\Theta)|\ |e^{-t}\ \psi(-r)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|\ e^{-t} \sup_{-r \leqslant \Theta \leqslant 0} |\Psi(0)\ e^{-t\ -\ \Theta\ +\ s}| \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|\ \|\Psi\|\ e^{r}\ e^{-2t\ +\ s} \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi\|\ \|\Psi\|\ e^{r}\ e^{-s} = \|\psi\|\ \|\Psi\|\ p(s),$$

para todo $s \in I$, todo $t \in I$ com $t \geqslant s$, todo $\Psi \in C$ e todo $\psi \in C$.

Além disso, como

$$\|\psi\| \; \|\Psi\| \leqslant \|\Psi\| + \|\psi\|$$

para todo $\Psi \in C$ e todo $\psi \in C$ com $\|\psi\| \leqslant 1$, então temos que

$$\|T(t, s: \Psi)\| \; |g(t, \Psi, \psi)| \leqslant p(s) \; (\|\Psi\| + \|\psi\|) \; ,$$

$s \in I$, $t \in I$, $t \geqslant s$, para todo $\Psi \in C$, todo $\psi \in C$ com $\|\psi\| \leqslant 1$. Portanto, a afirmação.

d) Demonstremos que se $q(s) = e^{-s}$, $s \in I$, então

$$\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leqslant \min \{1, \int_{t_o}^{t} q(s) \; \|y_s(t_o, \phi)\| \; ds\}. \qquad (A)$$

Com efeito, como

$$Ly_t(t_o, \phi)(\theta) = \min \{1, \hat{y}_t(\theta)\}$$

então

$$\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leqslant \min \{1, \|\hat{y}_t\|\} \; . \qquad (B)$$

Ora,

$$\hat{y}_t(\theta) = \hat{y}(t + \theta) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_o}^{t+\theta} e^{-s} \; \|y_s(t_o, \phi)\| \; ds \; , & t + \theta \geqslant t_o \\ 0 & , \; t + \theta \leqslant t_o \end{cases}$$

e como

$$\int_{t_o}^{t+\theta} e^{-s} \; \|y_s(t_o, \phi)\| \; ds \leqslant \int_{t_o}^{t} e^{-s} \; \|y_s(t_o, \phi)\| ds, \text{ para todo}$$

$\theta \in [-r, 0]$, então se tem que

$$\|\hat{y}_t\| \leqslant \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds. \qquad (C)$$

Portanto, de (B) e (C) tem-se (A).

<u>Exemplo 2.2</u>:

No sistema de equações (1) e (7),

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t) \\ \dot{y}(t) = f(t, y_t) + g(t, y_t, Ly_t) \end{cases} ,$$

Seja

$$f(t, \Psi) = - \Psi(0) ,$$

$$g(t, \Psi, \psi) = p(t) \left(\Psi(-\tau_1) + \psi(-\tau_2)\right) ,$$

onde $\tau_1, \tau_2 \in [0,r]$ são fixos, $p(t) > 0$, $t \in I$, $\int_{t_o}^{\infty} p(s)ds < \infty$, e seja $L: C \to C$ o operador definido da seguinte maneira: para $y \in C$, se define $Ly \in C$ pela fórmula

$$Ly(\Theta) = \hat{y}(\Theta),$$

onde

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} e^{-c(t+r)} \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds , & t \geqslant t_o \\ 0 , & t_o - r \leqslant t \leqslant t_o \end{cases}$$

Então,

a)

$$|g(t, \Psi, \psi)| \leq p(t) \, (|\Psi(-\tau_1)| + |\psi(-\tau_2)|) \leq p(t) \, (\|\Psi\| + \|\psi\|)$$

logo a hipótese (H_3) do teorema 2.2 é satisfeita.

b) Demonstremos que

$$\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leq e^{-ct} \int_{t_o}^{t} q(s)\| \, y_s(t_o, \phi)\| \, ds \, ,$$

onde $q(s) = e^{-s}$, $s \in I$, e portanto a hipótese (H_4) do mesmo teorema 2.2 é satisfeita. Com efeito

$$|Ly_t(t_o, \phi)(\theta)| = \hat{y}_t(\theta) = \hat{y}(t+\theta) = \begin{cases} e^{-c(t+\theta+r)} \displaystyle\int_{t_o}^{t+\theta} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds, & t+\theta \geq t_o \\ 0 \quad , & t + \theta \leq t_o \end{cases}$$

Ora, já que

$$e^{-c(t+\theta+r)} \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds \leq e^{-ct} \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds, \quad \text{para}$$

todo $\theta \in [-r, 0]$, então temos que

$$|Ly_t(t_o, \phi)(\theta)| \leq e^{-ct} \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds \quad \text{para todo}$$

$\theta \in [-r, 0]$, logo

$$\|Ly_t(t_o, \phi)\| \leq e^{-ct} \int_{t_o}^{t} e^{-s} \|y_s(t_o, \phi)\| \, ds.$$

Portanto, a afirmação.

c) Finalmente, como, neste caso, a equação (1) é linear e exponencialmente assintoticamente estável, segue-se que ela coincide com sua variacional em torno de qualquer solução e portanto, a solução $x = 0$ é exponencialmente assintoticamente estável em variação.

Portanto, pelo teorema 2.2, concluimos que toda solução de (7) tende a zero, quando $t \to \infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOTURA, F. Décio. Estabilidade uniforme de sistemas perturbados não lineares de equações diferenciais com retardamento - Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da USP., (1977).

[2] BRAUER, F. Pertubations of nonlinear systems of differential equations, I.J. Math. Anal. Appl., 14(1966), 198-206.

[3] CASSAGO, J.H. Comportamento assintótico de sistemas de equações diferenciais funcionais não lineares. Dissertação de Mestrado apresentado ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da USP, (1974).

[4] DUARTE, J.C.S. Convergência de soluções de sistemas de equações diferenciais funcionais perturbadas - Dissertação de Mestrado apresentada a UFSC, (1979).

[5] HALE, J.K. Theory of functional differential equations, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, 3, 1976.

[6] PACHPATTE, B.G. Perburbations of Nonlinear Systems of Differential Equations.

[7] PACHPATTE, B.G. A Note on Gronwall-Bellman Inequality. Journal of Mathematical and Applications (44, 758-768, (1973).

[8] SHANHOLT, G.A. A nonlinear variation of constants fórmulo for functional differential equations. Mathematical Systems Theory, Vol. 6, nº 4, pp. 343-352, (1973).