

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TORÇÃO EM BARRAS PRISMÁTICAS DE SECÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA  
E MULTICONEXA - ABORDAGEM POR ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

MANOEL PEREIRA DE ANDRADE FILHO

MAIO/1981

TORÇÃO EM BARRAS PRISMÁTICAS DE SECÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA  
E MULTICONEXA-ABORDAGEM POR ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

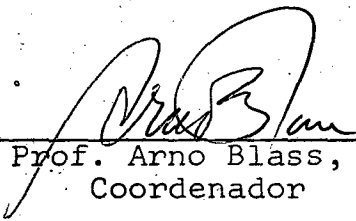
MANOEL PEREIRA DE ANDRADE FILHO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO

DE

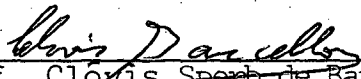
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO  
MECÂNICO E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.



---

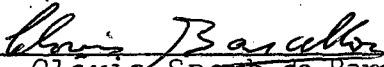
Prof. Arno Blass, Ph.D.  
Coordenador



---

Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.  
Orientador

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS PROFESSORES:



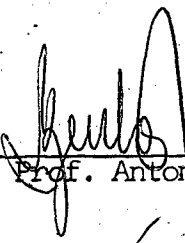
---

Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D.



---

Prof. Nelson Back, Ph.D.



---

Prof. Antonio Bento Filho, M.Sc.

À Valéria e Meus Pais

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Clóvis Sperb de Barcellos, Ph.D., pela orientação neste trabalho e ensinamentos;

- Aos Profs:

Domingos Boechat Alves, Ph.D.

José João de Espíndola, Ph.D.

Nelson Back, Ph.D.

Jaroslav Kozel, Ph.D. (In Memoriam)

Sérgio Colle, Ph.D.

pelos ensinamentos;

- A CHESF - Companhia Hidro Elétrica do São Francisco , pela indicação e apoio a realização do Curso de Pós-Graduação na UFSC e a este trabalho, em especial aos Engenheiros:

Felício Limeira de França

Aldemir Sobreira de Oliveira

Adelmo Lapa Filho

- A UFSC, em particular a Coordenadoria do Curso de Pós-Graduação através do Prof. Arno Blass, Ph.D.

# Í N D I C E

RESUMO .....	viii
ABSTRACT .....	ix
CAPÍTULO 1 - INFORMAÇÕES GERAIS SOBRE O TRABALHO .....	1
1.1. Introdução .....	1
1.2. Métodos Numéricos .....	2
1.3. Descrição Específica dos Objetivos do Trabalho .....	2
1.4. Descrição Sumária do Conteúdo do Trabalho .....	3
CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA DE TORÇÃO .....	5
2.1. Introdução .....	5
2.2. Formulação do Problema pela Função de Torção de Prandtl. ....	5
2.3. Campo de Deslocamento .....	9
2.4. Relações - Função de Torção X Função de Empenamento ...	10
2.5. Determinação da Constante $\lambda$ - Equação de Equilíbrio ...	10
2.6. Resumo .....	11
2.7. Outras Formulações .....	11
2.7.1. Função de Empenamento $\Psi$ .....	11
2.7.2. Função $\chi$ = conjugada de $\Psi$ .....	12
2.8. Obtenção do Funcional do Problema de Torção .....	12
CAPÍTULO 3 - O MÉTODO DO ELEMENTO FINITO .....	15
3.1. Introdução - Descrição do Método .....	15
3.2. Escolha do Tipo de Elemento .....	16
3.3. Elementos Curvos Isoparamétricos .....	17
3.4. Detalhamento Geral do Método - Aplicação Particular ao Problema de Torção .....	21
3.5. Integração Numérica Gaussiana para Elementos Isoparamé- tricos .....	29
CAPÍTULO 4 - DESCRIÇÃO DA SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA ..	31
4.1. Introdução .....	31

4.2.	Estratégia para Solução do Problema .....	31
4.3.	Cálculo das Áreas das Cavidades .....	35
4.4.	Descrição do Programa DEPM001 .....	37
4.4.1.	Definição dos Parâmetros Principais .....	37
4.4.2.	Fluxograma Geral .....	40
CAPÍTULO 5 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS .....		42
5.1.	Introdução .....	42
5.2.	Soluções Analíticas Conhecidas .....	42
5.2.1.	Secção Elíptica ou Circular .....	42
5.2.2.	Secção Retangular ou Quadrada .....	43
5.2.3.	Secção Circular Vazada .....	44
5.2.4.	Secção Triangular Equilátera .....	44
5.3.	Interpretação dos Resultados Obtidos .....	45
5.3.1.	Modelo Elíptico com 12 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 2...	46
5.3.2.	Modelo Elíptico com 48 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 3...	47
5.3.3.	Modelo Elíptico com 64 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 4...	49
5.3.4.	Modelo Retangular com 24 Elementos Isoparamétricos-ANEXO 5...	50
5.3.5.	Modelo Retangular com 32 Elementos Isoparamétricos-ANEXO 6...	51
5.3.6.	Modelo Circular Vazado com 24 Elementos Isoparamétricos- ANEXO 7 .....	52
5.3.7.	Modelo Circular Vazado com 48 Elementos Isoparamétricos- ANEXO 8 .....	52
5.3.8.	Modelo Quadrado com Furo Quadrado com 144 Elementos Iso- paramétricos - ANEXOS 9 e 10 .....	53
5.3.9.	Modelo Quadrado com 100 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 11 .....	55
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....		58
6.1.	Recomendações e Precauções Para o Mapeamento de Domínios com Elementos Isoparamétricos .....	58
6.2.	Uma Interpretação mais Geral para Conteúdo do Programa DEPM001 (Sugestões Para Novos Desenvolvimentos).....	59
6.3.	Alternativa para Problema de Torção em Domínios Compostos de Diferentes Materiais .....	62

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	64
APÊNDICE .....	65
ANEXOS .....	69
ANEXO 1 - Interpretações das Tensões .....	70
ANEXO 2 - Modelo Elíptico com 12 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	71
ANEXO 2-A- Modelo Elíptico com 12 Elementos - Detalhamento das Coordenadas Nodais .....	72
ANEXO 3 - Modelo Elíptico com 48 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	73
ANEXO 3-A- Modelo Elíptico com 48 Elementos - Detalhamento das Coordenadas Nodais .....	74
ANEXO 4 - Modelo Elíptico com 64 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	75
ANEXO 4-A- Modelo Elíptico com 64 Elementos - Detalhamento das Coordenadas Nodais .....	76
ANEXO 5 - Modelo Retangular com 24 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	77
ANEXO 6 - Modelo Retangular com 32 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	78
ANEXO 7 - Modelo Circular Vazado com 24 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	79
ANEXO 8 - Modelo Circular Vazado com 48 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	80
ANEXO 9 - Modelo Quadrado com Furo Quadrado com 144 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	81
ANEXO 10- Modelo Quadrado com Furo Quadrado com 144 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos - Nova Ordenação dos Nodos .....	82
ANEXO 11- Modelo Quadrado com 100 Elementos - Malha de Elementos Finitos Isoparamétricos .....	83

## RESUMO

Neste trabalho o problema de torção em barras prismáticas de secção transversal arbitrária e multiconexa é formulado através da função de torção de Prandtl, sendo inclusive obtido um funcional para este problema.

A solução deste problema é obtida utilizando-se elementos finitos curvos isoparamétricos. Um programa computacional foi desenvolvido, permitindo a determinação da constante geométrica de rigidez da secção, o ângulo de torção, forma de empenamento e as tensões de cisalhamento em qualquer ponto da barra, em função do torque atuante.

Os resultados obtidos são apresentados e comparados com as soluções analíticas e/ou numéricas encontradas na literatura.

Inúmeros problemas em engenharia são regidos pelo mesmo tipo de equação diferencial parcial Laplaceana que rege o problema de torção, podendo este trabalho servir como base à solução destes problemas e isto também é discutido neste trabalho.



ABSTRACT

The behavior of prismatic bars of arbitrary cross section with or without holes, under torsion loads, is formulated through Prandtl torsion function. A functional is also developed to solve this problem.

The solution for this problem was reached using curved isoparametric finite elements. A computational program was developed, allowing to reach the stiffness geometric constant of the section, the torsion angle, the warping function and the shearing stresses at any point of bar, as a function of the imposed torque.

The solutions are shown and compared with analytical and numerical solutions presented in the specific literature.

Several problem in engineering are defined in terms of the same differential parcial Laplace's equation, which define the torsion problem, therefore this paper could be used as a background for the solution of these problems and about this a discussion is showed.

# 1. INFORMAÇÕES GERAIS SOBRE O TRABALHO

## 1.1 - Introdução

Na formulação teórica de análise de sistemas contínuos, a etapa de obtenção da equação ou conjunto de equações diferenciais que regem o problema juntamente com as condições de contorno associadas, embora requeira em alguns casos técnicas mais sofisticadas como por exemplo cálculo variacional, não se constitui na principal dificuldade. O grande problema consiste sim, na solução da equação ou conjunto de equações diferenciais, obedecidas todas as condições de contorno e outras restrições adicionais. Apenas para uma classe muito restrita destes problemas é que se conhece a solução exata (analítica, fechada) obtidas por técnicas tais como separação de variáveis, funções tentativas e outras. Na medida em que a complexidade do sistema aumenta as soluções exatas praticamente tornam-se impossíveis de serem obtidas.

Seja agora o problema mais geral da Teoria da Elasticidade qual seja: "Análise Dinâmica Tridimensional em Meios Elásticos - Contínuo", no Apêndice A são citados os requisitos necessários à solução deste problema<sup>[2]</sup>. Esta formulação é imprescindível em estruturas sólidas não modeláveis por cascas, por exemplo em análise de tensões em rotores de máquinas de fluxo, vasos de contenção de reatores nucleares, etc. Particularizando as expressões apresentadas no Apêndice A, obtêm-se as relações válidas em análise bidimensional (estado plano de tensões ou deformações), neste caso enquadram-se por exemplo barragens, condutos forçados, etc.

Em análise geral de cascas, um conjunto de nada menos que 6 (seis) equações diferenciais parciais ainda mais complexas que as dadas em (A.1), são requeridas para satisfazerem as condições de equilíbrio. Resumindo: soluções analíticas em problemas tridimensionais de Elasticidade ou mesmo de cascas, praticamente inexistem.

Generalizando, inúmeros problemas em Engenharia, seja de Elasticidade, Mecânica dos Fluidos, Distribuição de Calor, Termo - Elasticidade, Campos Elétricos ou Magnéticos, entre outros, são regidos por equação ou sistema de equações diferenciais parciais e

respectivas equações de contorno. A cada um destes problemas já se conhece ou pode-se obter um funcional de "energia generalizada" (dimensionalmente pode não significar uma energia) o qual otimizado reproduz todas as equações de equilíbrio e de contorno do problema.

Existem vários princípios variacionais especialmente em problemas de Elasticidade [3 e 4], assim como deve existir ou ainda podem ser obtidos, princípios variacionais para problemas das outras áreas aqui citadas. No capítulo seguinte, um princípio variacional para o problema de torção será obtido, partindo-se da equação de equilíbrio (problema inverso).

Concluindo pode-se adiantar que, conforme veremos no capítulo 3, a aplicação do Método do Elemento Finito está intimamente ligada a otimizações de funcionais.

## 1.2 - Métodos Numéricos

Motivado pela necessidade de solucionar toda essa gama de problemas anteriormente expostos, surgiram os métodos numéricos, que são técnicas aproximadas-convergentes com utilização cada vez mais frequente e de grande confiabilidade. Entre os métodos mais eficientes e usuais destacam-se: Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Matrizes de Transferência [1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11 e 12]. Em todos, o que se procura basicamente é transformar de modo consistente, a equação ou sistema de equações diferenciais que regem o problema em um sistema de equações algébricas, introduzindo-se nestas as condições de contorno (vínculos do sistema: naturais ou geométricos).

O enfoque principal deste trabalho é dado ao Método do Elemento Finito e para sua concepção é indispensável conhecimentos básicos sobre Cálculo Variacional [3, 4, 6, e 10].

## 1.3 - Definição Específica dos Objetivos do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é a apresentação explícita do Método do Elemento Finito à solução de um problema em um meio elástico contínuo, no caso: "Torção em Barras Prismáticas de Secção Transversal Arbitrária e Multiconexa". A formulação teó

rica deste problema. é feita através da função de torção de Prandtl e a solução numérica é obtida utilizando-se elementos finitos curvos do tipo isoparamétricos.

Trata-se de um problema de Elasticidade em domínio Plano multiconexo, onde conforme será mostrado no capítulo seguinte pode ser abordado através de uma função de torção  $\phi$ , ficando o problema restrito a solução de uma equação diferencial parcial do tipo Laplaceana não homogênea com condições de contorno do tipo constantes nas bordas internas e externas. As tensões cisalhantes  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  estão diretamente relacionadas com esta função sendo que, obtida a solução de  $\phi$ , determina-se a constante geométrica de rigidez da secção, o ângulo de torção, as tensões e as formas de empenamento em todos os pontos nodais da secção considerada.

Note-se ainda que, inúmeros problemas de Engenharia são regidos pela mesma equação diferencial parcial do tipo da aqui resolvida [3 e 4] (capítulos 10 e 17, respectivamente), mudando-se em alguns casos apenas as condições de contorno. Neste sentido, o conteúdo teórico e o próprio programa computacional desenvolvidos neste trabalho são fundamentais, servindo de base para a solução de tais problemas e isto está descrito na importante discussão que é feita no item 6.2 do Capítulo final deste trabalho.

#### 1.4 - Descrição Sumária do Conteúdo do Trabalho

No Capítulo 2, é apresentada a formulação completa do problema de torção através da função de Prandtl, sendo inclusive apresentadas outras alternativas de formulação do problema por outras funções:  $\Psi$  de empenamento e  $\chi$  conjugada de  $\Psi$ . Um funcional para o problema de torção é também detalhadamente obtido.

No Capítulo 3, em paralelo a apresentação detalhada que é feita para o problema de torção, o método do elemento finito é descrito de um modo bastante geral, permitindo maiores conclusões sobre suas potencialidades.

No Capítulo 4 é apresentada uma descrição detalhada da solução computacional do problema, estratégia de solução, descrição dos parâmetros do programa DEPM001, incluindo um fluxograma geral do mesmo.

No Capítulo 5, é feita a apresentação dos resultados incluindo uma análise interpretativa para cada um dos modelos pesquisados, sendo ainda feita uma análise comparativa da performance do elemento finito isoparamétrico utilizado neste trabalho, em relação ao elemento triangular linear (mais rudimentar), apresentado por Brebbia e Ferrante [5].

Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões do trabalho, incluindo: recomendações e precauções para mapeamento de domínio com elementos isoparamétricos, uma interpretação mais geral do conteúdo do programa DEPM001 e por último uma formulação para problemas de torção em domínio composto de diferentes materiais.

## 2. FORMULAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA DE TORÇÃO

### 2.1 - Introdução

Seja uma barra prismática de secção transversal arbitrária e multiconexa (multivazada), submetida a momentos torsores nos terminais e em equilíbrio - (Figura 2.1).

Como os extremos da barra são sujeitos apenas a tensões cisalhantes no plano  $xy$ , devido a ação de um momento torsor  $M_t$ , as tensões na superfície lateral podem ser consideradas nulas, daí o seguinte estado de tensões para este problema pode ser assumido:

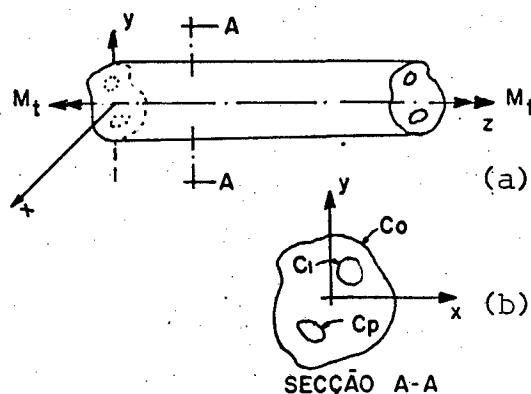


Figura 2.1. - (a) barra prismática (b) secção transversal.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = 0 \quad (2.1)$$

Como os planos terminais são identicamente carregados, pode-se assumir  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  como funções de  $x$  e  $y$  somente. Note-se entretanto que estas tensões variam de secção a secção ao longo do eixo, isto devido a distribuição de  $M_t$  ao longo da barra.

Para uma análise estática deste problema, considerando desprezáveis as forças de corpo (influência de peso próprio, no caso) e influências térmicas, as equações gerais de equilíbrio da Elasticidade (A.1), se reduzem a:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

### 2.2 - Formulação do Problema pela Função de Torção de Prandtl

Prandtl verificou que (2.2) é satisfeita, definindo uma função  $\phi(x,y)$  tal que:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.3,4)$$

A função  $\phi$  assim definida é denominada função de torção de Prandtl.

As equações de compatibilidade em termos de tensões, dadas pelas relações (A.2), também devem ser atendidas e neste caso se reduzem a

$$\nabla^2 \sigma_{xz} = \nabla^2 \sigma_{yz} = 0 \quad (2.5,6)$$

sendo todas as demais satisfeitas.

Desenvolvendo agora as relações (2.5,6), levando-se em conta (2.3,4), temos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\sigma_{xz} - \sigma_{yz}) &= \nabla^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \nabla^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi \\ &= \nabla^2 \nabla \phi = \nabla \cdot \nabla^2 \phi = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \phi = \lambda \quad (2.7)$$

Portanto (2.7) fornece o requisito para a compatibilidade de  $\phi$ , sendo  $\lambda$  uma constante que está relacionada com o ângulo de torção  $\theta$ , como será mostrado no item 2.5.

Resta agora verificar as relações (A.3) de condições de contorno lateral:

$$\sigma_x l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n = 0$$

$$\sigma_{xy} l + \sigma_y m + \sigma_{yz} n = 0$$

$$\sigma_{xz} l + \sigma_{yz} m + \sigma_z n = 0$$

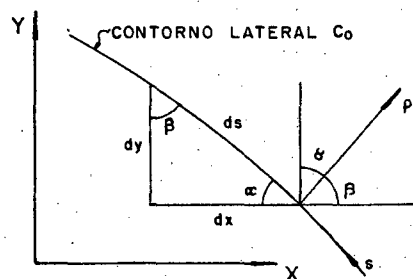


Figura 2.2 - Co-senos diretores da normal ao contorno  $C_0$

Neste caso:  $\rho = (l, m, 0)$ , sendo que as duas primeiras equações são automaticamente satisfeitas e a última fornece:

$$\sigma_{xz} l + \sigma_{yz} m = 0 \quad (2.8)$$

Onde:

$$l = \cos \beta = \frac{dy}{ds} \quad m = \cos \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad (2.9,10)$$

Substituindo agora as relações (2.3,4) e (2.9,10) em (2.8), resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0 \rightarrow \frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\phi = K_0 \quad (\text{constante}) \text{ em } C_0 \quad (2.11)$$

Uma análise inteiramente análoga pode ser feita para os contornos internos, fornecendo:

$$\phi = k_i, \quad i = 0, p \quad (2.12)$$

onde  $k_i$  são constantes associadas aos  $p$  contornos  $C_i$  da secção, sendo que apenas uma destas constantes pode ser assumida arbitrariamente ( |2| - páginas 111 a 113).

As condições de contorno nos planos terminais da barra permitem escrever:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \rightarrow \iint_R \sigma_{P1} \, dx dy &= \iint_R \sigma_{xz} \, dx dy = \int dx \int \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dy \\ &= \int \phi \Big|_{y_1}^{y_2} \, dx = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \rightarrow \iint_R \sigma_{P2} \, dx dy &= \iint_R \sigma_{yz} \, dx dy = - \int dy \int \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx \\ &= - \int \phi \Big|_{x_1}^{x_2} \, dy = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tendo em vista as relações (2.12), (2.13) e (2.14) são imediatamente satisfeitas, mesmo nos casos de regiões multiconexas, pois:

$$\phi \Big|_{y_1}^{y_2} = 0, \quad \forall dx$$

$$dx_0 \rightarrow \phi_0 - \phi_0 = 0$$

$$dx_1 \rightarrow \phi_1 - \phi_0 + \phi_0 - \phi_1 = 0$$

$$dx_{2,3} \rightarrow \phi_3 - \phi_0 + \phi_2 - \phi_3 + \phi_0 - \phi_2 = 0$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

Analogamente,  $\forall dy$

$$\phi \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \rightarrow \Sigma F_y = 0$$

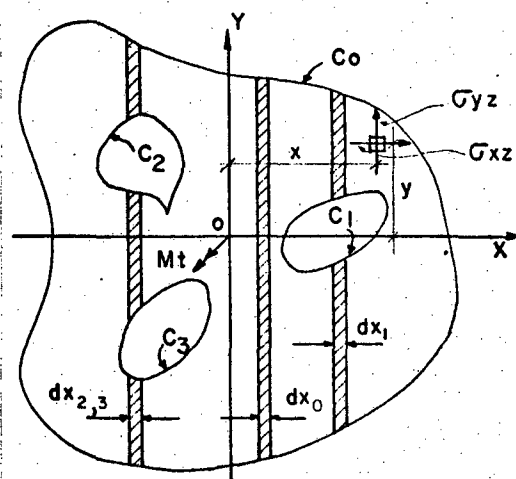


Figura 2.3 - Secção transversal típica



Por outro lado a equação de equilíbrio da barra em termos do torque  $M_t$  atuante permite escrever:

$$\Sigma M = M_t = \iint_R (x \sigma_{yz} - y \sigma_{xz}) dx dy \quad (2.15)$$

substituindo as relações (2.3,4) em (2.15), vem:

$$M_t = -\iint_R (x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y}) dx dy \quad (2.16)$$

adicionado e subtraindo  $\iint_R 2\phi dx dy$  em (2.16), temos:

$$M_t = \iint_R 2\phi dx dy - \iint_R (2\phi + x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y}) dx dy \rightarrow$$

$$M_t = \iint_R 2\phi dx dy - \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (x\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y\phi) \right\} dx dy \quad (2.17)$$

usando o teorema de Green:  $\int_C (U dx + V dy) = \iint_R (\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}) dx dy$ ,  
no segundo termo de (2.17), vem:

$$M_t = 2\iint_R \phi dx dy - \oint_C \phi (x dy - y dx) \quad (2.18)$$

Para regiões multiconexas:

$$\begin{aligned} \oint_C \phi (x dy - y dx) &= \oint_{C_0} \phi (x dy - y dx) - \oint_{C_1} \phi (x dy - y dx) - \dots \\ &\quad - \oint_{C_P} \phi (x dy - y dx) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Fazendo agora  $U = -y$  e  $V = x$ , o teorema de Green fornece:

$$\oint_{C_i} (x dy - y dx) = 2 \iint_{R_i} dx dy = 2A_i \quad (2.20)$$

onde  $A_i$  representa a área da cavidade do contorno  $C_i$ .

Levando agora em conta as relações (2.12) e (2.20), (2.19) fica:

$$\begin{aligned} \oint_C \phi (x dy - y dx) &= 2K_0 A_0 - 2K_1 A_1 - 2K_2 A_2 \dots \dots \dots - 2K_P A_P \\ &= 2K_0 A_0 - 2 \sum_{i=1}^P K_i A_i \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como um dos valores  $k_i$  de (2.12) pode ser assumido arbitrariamente, fazemos  $k_0 = 0$  para o contorno externo, daí substituindo (2.21) em (2.18), resulta:

$$M_t = 2 \iint_R \phi dx dy + 2 \sum_{i=1}^p k_i A_i \quad (2.22)$$

que representa a relação momento torsor X função tensão para torção em secções multiconexas.

### 2.3 - Campo de Deslocamento

Assumido o campo de tensões,

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = 0 \text{ e } \sigma_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \sigma_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.23)$$

é possível obter de imediato, através das relações (A.5) e (A.8), o campo de deformações:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_{xy} = 0 \text{ e } \epsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}, \epsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \quad (2.24)$$

e finalmente por intergração das relações (A.4) da Elasticidade, obtem-se (|2| - páginas 102 e 103) o campo de deslocamento:

$$\begin{array}{l} u = -\theta zy \\ v = \theta zx \\ w = \theta \Psi(x,y) \end{array} \quad \begin{array}{l} + \theta zb \\ - \theta za \\ - \theta(bx-ay)+c \end{array} \quad (2.25)$$

onde:

$\theta$  - Ângulo de torção por unidade de comprimento

$(a,b)$  - Centro de torção:

Neste ponto os deslocamentos  $u$  e  $v$  se anulam e a secção da barra gira como um corpo rígido em torno do eixo que contém este ponto (dito eixo de torção)

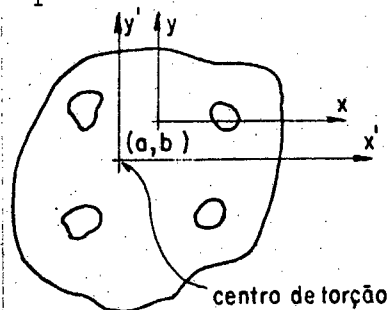


Figura 2.4- Coordenadas do centro de torção.

$\Psi(x,y)$ - Função de empenamento:

É a forma da parcela do deslocamento de  $w$  que produz deformação. Quando o centro do sistema de referência coincide com o centro de torção,  $\Psi(x,y)$  fornece diretamente a forma do empenamento da secção (a menos de uma constante aditiva).

Do ponto de vista de análise de tensões, a escolha do sistema de referência pode ser arbitrária visto que as parcelas entre linhas tracejadas e que relacionam os valores  $a$ ,  $b$  e  $c$  não produzem deformações, representando assim deslocamento de corpo rígido. Para esta verificação, basta substituir estas parcelas nas relações (A.4) da Elasticidade.

#### 2.4 - Relação - Função de Torção x Função de Empenamento

Substituindo as relações (2.25) nas relações (A.4) da Elasticidade, vem:

$$\epsilon_{xz} = \theta \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \theta b - \theta y + \theta b \rightarrow \epsilon_{xz} = \theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) \quad (2.26)$$

$$\epsilon_{yz} = \theta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \theta a + \theta x - \theta a \rightarrow \epsilon_{yz} = \theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \quad (2.27)$$

levando em conta as relações (2.24), vem:

$$\sigma_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) \quad \sigma_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \quad (2.28,29)$$

e agora substituindo (2.3,4) em (2.28,29) resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) \quad - \frac{\partial \phi}{\partial x} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \quad (2.30,31)$$

#### 2.5 - Determinação da Constante $\lambda$ - (Equação de Equilíbrio)

Diferenciando as relações (2.30,31), respectivamente em relação a  $y$  e  $x$ , resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = G\theta \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - 1 \right) \quad \rightarrow \quad - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = G\theta \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + 1 \right) \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - 2G\theta \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \phi = - 2G\theta \quad (2.32)$$

levando-se agora, em conta (2.7), resulta finalmente:  $\lambda = - 2G\theta$ .

## 2.6 - Resumo

A formulação do problema de torção em barras prismáticas com secção transversal arbitrária e multiconexa, através da função de torção de Prandtl, satisfeitos todos os requisitos da Elasticidade, resume-se em determinar  $\phi$ , tal que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= - 2G\theta \quad \text{em } R \text{ (Região ou Domínio)} \\ \phi &= 0 \quad \text{em } C_0 \text{ (Contorno externo)} \\ \phi &= k_i \quad \text{em } C_i \text{ (Contorno interno), } i = 1, p \end{aligned}$$

onde as seguintes relações são válidas:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \quad \sigma_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right)$$

$$M_t = 2 \iint_R \phi \, dx \, dy + 2 \sum_{i=1}^p k_i A_i$$

## 2.7 - Outras Formulações

É possível ainda, obter a equação de equilíbrio e condição de contorno deste problema em termos de  $\Psi$  ou mesmo através de uma função conjugada desta,  $\chi$ . São procedimentos simples e semelhantes [2] ao da formulação através de  $\phi$  aqui apresentado. Resumidamente, temos:

### 2.7.1 - Função de Empenamento $\Psi$

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{em } R$$

$$\frac{d\Psi}{dn} = ly - mx \quad \text{em } C_i, i = 0, p, \quad \text{, onde:}$$

$$\sigma_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) \quad \sigma_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right)$$

### 2.7.2 - Função $\chi$ , conjugada de $\Psi$

$$\nabla^2 \chi = 0$$

$$\chi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad \text{em } C_i, i=0, p, \quad \text{, onde:}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\sigma_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} - y \right), \quad \sigma_{yz} = - G\theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \right)$$

Note-se que nas 3 (três) formulações aqui apresentadas, as funções  $\phi$ ,  $\Psi$  e  $\chi$  estão inter-relacionadas.

### 2.8 - Obtenção do Funcional do Problema de Torção

O procedimento agora é o inverso ou seja, conhecida a equação (ou conjunto de equações) diferencial que rege (m) o problema, juntamente com a (s) equação (ões) de contorno, o que se procura é determinar um funcional (neste caso de torção), que otimizado reproduz todos os requisitos do problema. Isto também é possível (notem a flexibilidade) assim, obtido o funcional, a formulação do problema pelo Método do Elemento Finito é também possível como veremos adiante.

Para problemas regidos por sistemas de equações diferenciais lineares do tipo:

$$A(U) = L \{ U \} + b = 0 \quad (2.33)$$

sendo:

- L - operador diferencial linear
- b - função de "cargas" do problema.
- U - variável dependente do problema

e sendo ainda o operador L auto-adjunto, ou seja:

$$\int_D U L \{V\} dD = \int_D V L \{U\} dD \quad (2.34)$$

onde: U e V são funções comparatrizes  $|\delta|$  isto é, satisfazem as condições de contorno naturais e geométricas e os requisitos de continuidade e derivações até a ordem  $2q$  sendo  $q$  a ordem da mais alta derivada do funcional.

Admitidas as considerações acima, é fácil verificar que:

$$F = \int_D \left( \frac{1}{2} U L \{U\} + U b \right) dD \quad (2.35)$$

é um princípio variacional para o problema (2.33), de fato:

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_D \left\{ \frac{1}{2} (\delta U L \{U\} + U \delta L \{U\}) + \delta U b \right\} dD \\ &= \int_D \left\{ \frac{1}{2} (\delta U L \{U\} + U L \{\delta U\}) + \delta U b \right\} dD \\ &= \int_D (L\{U\} + b) \delta U dD = 0 \rightarrow L\{U\} + b = 0 \end{aligned}$$

No nosso caso, definindo:

$$L = \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad U = \phi \quad \text{e} \quad b = 2G\theta, \quad \text{vem:}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + 2G\theta = 0 \quad \text{e assim, (2.35) fornece:}$$

$$F = \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \phi \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + 2G\theta \phi \right\} dx dy \quad (2.36)$$

Por outro lado, utilizando o teorema de Green:

$$\iint_R U \frac{\partial V}{\partial x} dx dy = - \iint_R \frac{\partial U}{\partial x} V dx dy + \oint_C UV \left( -\frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$\iint_R U \frac{\partial V}{\partial y} dx dy = - \iint_R \frac{\partial U}{\partial y} V dx dy + \oint_C UV \left( +\frac{dy}{ds} \right) ds$$

Os dois primeiros termos da integral (2.36), fornecem:

$$\frac{1}{2} \iint_R \phi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = - \frac{1}{2} \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \oint_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( -\frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$\frac{1}{2} \iint_R \phi \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = - \frac{1}{2} \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy + \frac{1}{2} \oint_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \left( \frac{dy}{ds} \right) ds$$

Substituindo em (2.36), resulta:

$$F = - \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy + \frac{1}{2} \oint_C \phi \frac{d\phi}{ds} ds \rightarrow$$

$$F = - \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy \quad (2.37)$$

Portanto, (2.37) representa um funcional do problema de torção, formulado através da função de torção de Prandtl.

Apenas a título de verificação,

$$\delta F = - \iint_R \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - 2G\theta \delta \phi \right\} dx dy \quad (2.38)$$

$$\iint_R \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi) dx dy = - \iint_R \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta \phi dx dy + \oint_C \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \left( -\frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$\iint_R \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \phi) dx dy = - \iint_R \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \delta \phi dx dy + \oint_C \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \phi \left( \frac{dy}{ds} \right) ds$$

substituindo agora em (2.38), resulta:

$$\delta F = \iint_R \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta \right) \delta \phi dx dy + \oint_C \frac{d\phi}{ds} \delta \phi ds = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0 \quad \text{em } R$$

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \text{em } C_i, i = 0, p$$

$$\nabla^2 \phi = -2G\theta \quad \text{em } R$$

$$\phi = k_i \quad \text{em } C_i, i = 0, p$$

e assim, de fato a otimização do funcional de torção (2.37), re-produz a equação fundamental que rege o problema, juntamente com as equações de contorno associadas.

### 3. O MÉTODO DO ELEMENTO FINITO

#### 3.1 - Introdução - Descrição do Método

Todas as etapas a seguir descritas, serão explicitamente demonstradas mais adiante para o nosso particular problema de torção, sendo entretanto estes procedimentos, de caráter comum, inteiramente geral e válidos para todos os problemas formulados pelo método do elemento finito:

- 1 - Neste método, o domínio ou região (linear, plana ou sólida) do problema, é dividido em subdomínios (sub-regiões) de modo que a união destes, reproduz (mapeia) todo o domínio (região), não havendo superposição. A cada subdomínio (sub-região) corresponde rá um elemento linear, plano ou sólido, conforme o tipo de domínio (região).
- 2 - As variáveis dos subdomínios relacionadas no funcional do problema, são postas como sendo uma combinação dos valores nodais (pontuais) destas variáveis, ponderados por funções de interpolação. Assim, as variáveis do funcional são portanto interpoladas e as incógnitas do problema passam a ser os valores nodais destas variáveis.
- 3 - Como o funcional do problema é válido em todo o domínio, é conseqüentemente, também válido para os seus subdomínios (elementos). Ao se otimizar o funcional correspondente a um elemento genérico por exemplo e, e considerando as interpolações previstas e anteriormente citadas, agora ao invés de se obter uma equação diferencial que rege o problema para o subdomínio (elemento e), o que se obtém é um sistema de equações algébricas no qual as incógnitas são os valores nodais das variáveis do funcional correspondentes ao elemento e.
- 4 - A seguir são feitas otimizações em todos os funcionais relativos a cada um dos n elementos que mapeiam o domínio, obtendo n sistemas de equações algébricas do tipo descrito anteriormente. Note-se que o integrando destes funcionais é o mesmo, o que mu



da são os subdomínios e conseqüentemente as regiões de integração.

- 5 - A superposição dos  $n$  sistemas de equações algébricas vai sendo feita na medida em que se vai otimizando cada um dos funcionais dos elementos, resultando num sistema global de equações algébricas, o qual relaciona todas as incógnitas (valores nodais das variáveis sobre todos os nodos da malha).
- 6 - Para alguns tipos de elementos, a obtenção do sistema de equações algébricas (matrizes de "rigidez" e "carga") correspondente a cada elemento, é feita em um sistema de referência local, não coincidente com o sistema de referência global adotado para o problema, e assim nestes casos se requer antes da etapa de superposição citada em 5, a aplicação de convenientes matrizes de transformação para o sistema global. É o caso por exemplo de estruturas espaciais compostas de vigas ou treliças.
- 7 - Agora são colocados diretamente no sistema global de equações algébricas, os vínculos do problema, ou seja, as condições de contorno sobre os valores nodais das variáveis do funcional os quais possuam restrições. Evidentemente o tipo de condição de contorno (vínculo, restrição) depende da natureza do problema.
- 8 - Resolve-se o sistema global de equações algébricas obtido conforme etapas até então descritas, obtendo-se assim, de modo consistente, os valores nodais de todas as incógnitas (valores nodais das variáveis sobre todos os nodos da malha).
- 9 - Além das variáveis do funcional, este método permite determinar os valores de outras variáveis, as quais estejam relacionadas com as variáveis do funcional por derivação, ou mesmo por integrações destas.

### 3.2 - Escolha do Tipo de Elemento

Seja agora o domínio plano da Fig-3.1, cada um dos 9 (nove)

tipos de elementos mostrados, poderia ser usado para mapear a região  $R$  indicada, entretanto a escolha do tipo de elemento não é arbitrária e depende do funcional (tipo de problema) e da precisão desejada.

Uma escolha inadequada, por exemplo um elemento mais precário (poucos nodos) pode requerer um refinamento muito grande da malha para obter valores convergentes admissíveis e por conta disso, o custo da solução (tempo de computação, tempo de elaboração da malha, número de cartões de dados) torna-se bastante oneroso e desnecessário.

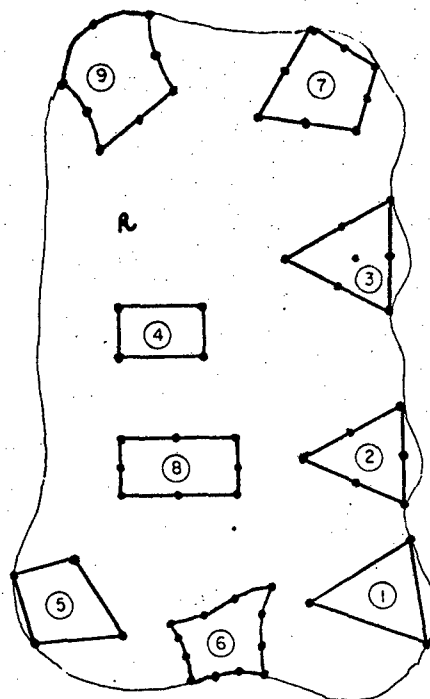


Figura 3.1 - Exemplos de elementos planos.

Em geral a convergência neste método é assegurada quando a escolha do elemento é tal que para um funcional cuja ordem da mais alta derivada seja  $n$ , as funções de interpolação associadas sejam contínuas e deriváveis pelo menos até a ordem  $n-1$ .

Escolhido o tipo de elemento, o domínio do problema é sempre mapeado com este mesmo elemento, principalmente por razões de simplificações computacionais.

### 3.3 - Elementos Curvos Isoparamétricos

O enfoque principal deste trabalho é dado aos elementos de faces curvas (os mais gerais e precisos), em particular ao tipo n° 9, que satisfaz as condições de convergência requeridas para o Funcional de Torção.

Estes elementos tem a vantagem em primeiro lugar, de mapear quase exatamente os contornos curvos, aproximando-os por arcos de parábola (no caso do tipo n°9), ao contrário dos elementos de faces retas. Possuem ainda técnicas bem mais precisas de integração numérica na obtenção das matrizes de rigidez associadas a

cada elemento, dispensando ainda a etapa número 6 do item 3.1.

Devido à complexidade que se teria na integração em sub-regiões curvas e tendo em vista as variações de forma destas sub-regiões de elemento para elemento em uma mesma malha, para estes tipos de elementos faz-se necessário utilizar uma transformação de coordenadas do sistema curvilíneo onde está o elemento para um ou tro retilíneo normalizado, conforme mostrado na Figura 3.2.

Da teoria de sistemas curvilíneos vista em cursos de cálculo integral, tem-se que:

$$dx dy = \det J d\xi d\eta \quad (3.1)$$

onde:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e ainda mais, existe uma relação biunívoca, de cada ponto dos subdomínios, entre os dois sistemas de referência (I) e (II), ou seja:

$$(x,y) = f(\xi,\eta) \quad (3.3)$$

Assim, o problema pode ser totalmente resolvido no sistema (II). Para elementos curvos isoparamétricos como os aqui apresentados, as mesmas funções de interpolação associadas aos respectivos nodos são usadas tanto para interpolar as variáveis do funcional, como também a geometria do elemento.

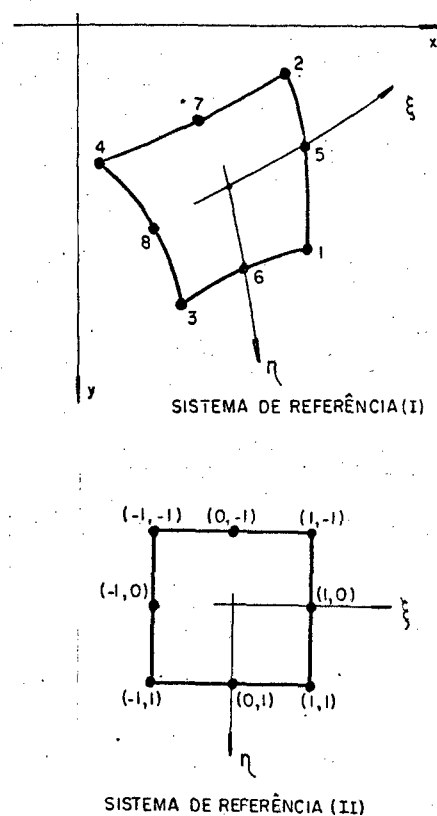


Figura 3.2 - Sistemas de referências

As funções "Serendipity" de interpolação para o elemento aqui exposto, associadas aos seus 8 (oito) nodos, são respectivamente:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note-se que elas satisfazem os requisitos básicos de interpolação para os nodos do elemento numerado na Figura 3.2, ou seja:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \tag{3.5}$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Partindo-se das relações (3.4), de imediato obtêm-se as derivadas das funções de interpolação com respeito a  $\xi$  dadas pelas relações:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \{ (1+\eta)(\xi+\eta-1) + (1+\xi)(1+\eta) \}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \{ (1-\eta)(\xi-\eta-1) + (1+\xi)(1-\eta) \}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \{ (1+\eta)(-\xi+\eta-1) + (1-\xi)(1+\eta) \}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \{ (1-\eta)(-\xi-\eta-1) + (1-\xi)(1-\eta) \}$$

(3.6)

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi}(\xi, \eta) = +\frac{1}{2} (1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -\xi (1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -\xi (1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} (1-\eta^2)$$

e agora derivação com respeito a  $\eta$ , nas relações (3.4), resulta:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \{ (1+\xi)(\xi+\eta-1) + (1+\xi)(1+\eta) \}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \{ (1+\xi)(\xi-\eta-1) + (1+\xi)(1-\eta) \}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \{ (1-\xi)(-\xi+\eta-1) + (1-\xi)(1+\eta) \}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \{ (1-\xi)(-\xi-\eta-1) + (1-\xi)(1-\eta) \} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta}(\xi, \eta) = -(1+\xi)\eta$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi, \eta) = -(1-\xi)\eta$$

### 3.4 - Detalhamento Geral do Método - Aplicação Particular ao Problema de Torção.

Todo o procedimento que daqui por diante será adotado para o Funcional de Torção, seria na sua essencialidade análogo seja qual fosse o funcional (tipo de problema). Dito isto, as etapas daqui por diante detalhadas, podem (e devem) ser vistas de modo bem mais geral. Assim por exemplo,  $\phi$  (função de torção) pode ser encarado como um "deslocamento generalizado" (dimensionalmente pode não significar um deslocamento).

O funcional para o problema de torção obtido no capítulo anterior, é como vimos:

$$F = - \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta \phi \right\} dx dy \quad (3.8)$$

De acordo com o que já foi dito sobre as interpolações previstas no método, podemos escrever:

$$\phi = \underline{N} \cdot \underline{\phi}_e^t = \underline{\phi}_e \cdot \underline{N}^t = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \phi_i \quad (3.9)$$

$$\underline{x} = \underline{N} \cdot \underline{X}_e^t = \underline{X}_e \cdot \underline{N}^t = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) X_i \quad (3.10)$$

$$\underline{y} = \underline{N} \cdot \underline{Y}_e^t = \underline{Y}_e \cdot \underline{N}^t = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) Y_i \quad (3.11)$$

onde:

$$\underline{N} = \{N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), \dots, N_8(\xi, \eta)\}_{1 \times 8} \quad (3.12)$$

$$\underline{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8\}_{1 \times 8} \quad (3.13)$$

$$\underline{X}_e = \{X_1, X_2, \dots, X_8\}_{1 \times 8} \quad (3.14)$$

$$\underline{Y}_e = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_8\}_{1 \times 8} \quad (3.15)$$

Os valores de  $\underline{N}$  são dados em (3.4), os de  $\underline{X}_e$  e  $\underline{Y}_e$  são as coordenadas nodais (valores conhecidos), sendo os valores de  $\underline{\phi}$  as incógnitas do problema.

Considerando as relações (3.9) a (3.15), podemos escrever:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \xi} \cdot \underline{X}_e^t = \underline{X}_e \cdot \frac{\partial \underline{N}^t}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} X_i \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \eta} \cdot \underline{X}_e^t = \underline{X}_e \cdot \frac{\partial \underline{N}^t}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} X_i \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial \xi} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \xi} \cdot \underline{Y}_e^t = \underline{Y}_e \cdot \frac{\partial \underline{N}^t}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} Y_i \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \eta} \cdot \underline{Y}_e^t = \underline{Y}_e \cdot \frac{\partial \underline{N}^t}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} Y_i \quad (3.19)$$

onde:

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \xi} = \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi, \eta), \frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi, \eta), \dots, \frac{\partial N_8}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 8} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \eta} = \left\{ \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi, \eta), \frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\xi, \eta), \dots, \frac{\partial N_8}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 8} \quad (3.21)$$

sendo que os valores dos componentes dos vetores  $\partial \underline{N}/\partial \xi$  e  $\partial \underline{N}/\partial \eta$  são dados nas relações (3.6) e (3.7), respectivamente.

Precisamos determinar agora em termos de  $\xi$  e  $\eta$ , as relações  $\partial \phi/\partial x$  e  $\partial \phi/\partial y$  que aparecem no funcional (3.8) do nosso problema. Para isto, levando em conta (3.9), temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial x} \cdot \phi_e^t = \phi_e \cdot \frac{\partial \underline{N}^t}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x}(\xi, \eta) \phi_i \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial y} \cdot \phi_e^t = \phi_e \cdot \frac{\partial \underline{N}^t}{\partial y} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y}(\xi, \eta) \phi_i \quad (3.23)$$

Resta agora a obtenção explícita de  $\partial \underline{N}/\partial x$  e  $\partial \underline{N}/\partial y$  em termos de  $\xi$  e  $\eta$ . Para isto, podemos escrever:

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \xi} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \underline{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Matricialmente, as relações (3.24) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \underline{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \underline{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \underline{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{N}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \underline{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{N}}{\partial y} \end{Bmatrix} \rightarrow$$



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Sendo  $J$  a mesma matriz da equação (3.1) e é denominada matriz Jaco- biano ou de transformação de coordenadas. Usando agora as relações (3.16) a (3.19) em (3.25), resulta finalmente:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\det J} \left( \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot \underline{y}_e^t \frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \underline{y}_e^t \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\det J} \left( -\frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot \underline{x}_e^t \frac{\partial N}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \underline{x}_e^t \frac{\partial N}{\partial \eta} \right) \quad (3.27)$$

onde:

$$\det J = \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \underline{x}_e^t \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot \underline{y}_e^t - \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot \underline{x}_e^t \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \underline{y}_e^t \quad (3.28)$$

Agora que temos todos os membros do funcional (3.8) conhe- cidos em termos de  $\xi$  e  $\eta$ , podemos passar para a etapa número 3 que é descrita no item 3.1. Ou seja, como o funcional é válido em todo o domínio, para um subdomínio associado a um dado elemento genérico  $e$ , podemos escrever:

$$F_e = - \iint_{Re} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\phi \right\} dx dy \quad (3.29)$$

otimizando (3.29), vem:

$$\delta F_e = - \iint_{Re} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - 2G\theta \delta \phi \right\} dx dy \quad (3.30)$$

Substituindo-se agora as relações (3.1), (3.9), (3.22), (3.23) em (3.30) e considerando os limites de integração do sistema de referência (II), teremos:

$$\delta F_e = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \delta(\phi_e \cdot \frac{\partial N^t}{\partial x}) \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \phi_e^t + \delta(\phi_e \cdot \frac{\partial N}{\partial y}) \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \phi_e^t + \right. \\ \left. - 2G\theta \delta(\phi_e N^t) \right\} \det J \, d\xi d\eta \quad \text{ou:}$$

$$\delta F_e = -\delta\phi_e \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial N^t}{\partial x} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N^t}{\partial y} \cdot \frac{\partial N}{\partial y} \right) \det J d\xi d\eta \right\} \phi_e^t + \\ \delta\phi_e \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2G\theta N^t \det J d\xi d\eta \right\} = 0 \rightarrow$$

$$\underline{K}_e \phi_e^t = \underline{P}_e \quad (3.31)$$

onde:

$$\underline{K}_e^{8 \times 8} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial N^t}{\partial x} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N^t}{\partial y} \cdot \frac{\partial N}{\partial y} \right) \det J \, d\xi d\eta = \quad (3.32)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{I}_1^{8 \times 8}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$\underline{P}_e^{8 \times 1} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2G\theta N^t \det J d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{I}_2^{8 \times 1}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.33)$$

Note-se assim que (3.31) representa agora de fato um sistema de equações lineares algébricas, ao invés de uma equação diferencial parcial do tipo (2.32). Entenda-se que (3.31) equivale neste problema a (2.32), sendo:

$\underline{K}_e$  - É sempre uma matriz quadrada (neste problema  $\rightarrow 8 \times 8$ ), denominada "matriz de rigidez generalizada" associada a um elemento (subdomínio) genérico e do problema.

$\underline{P}_e$  - É uma matriz coluna (neste problema  $\rightarrow 8 \times 1$ ), denominada "matriz de carga generalizada" associada a um elemento (subdomínio) genérico e do problema.

Em geral, o número de linhas de  $\underline{K}_e$  e  $\underline{P}_e$  é igual ao número de nodos por elemento vezes o número de graus de liberdade por nodo.

Perceba-se que neste problema a cada nodo está associado um único grau de liberdade ( $\phi$ ) e como neste caso temos oito nodos por elemento, de fato o sistema de equações lineares algébricas associadas a cada elemento (subdomínio) é de 8 equações x 8 incógnitas. Apenas exemplificando, em um problema tridimensional de Elasticidade e analisado estaticamente, utilizando elemento isoparamétrico sólido, similar ao aqui apresentado, nada menos que 20 nodos seriam necessários por elemento, tendo cada nodo, 3 (três) graus de liberdade ( $u, v$  e  $w$ ) em termos de deslocamento. Daí a cada um deste elemento (subdomínio), um sistema de 60 equações algébricas é obtido, ou seja  $\underline{K}_e$  e  $\underline{P}_e$  são respectivamente de dimensões  $(60 \times 60)$  e  $(60 \times 1)$ .

Voltando ao problema de torção, a superposição de todas as equações do tipo (3.31), relacionadas a todos os elementos (subdomínios) que mapeiam inteiramente o domínio, permite formar um sistema global de equações algébricas lineares do tipo:

$$\underline{K} \phi^t = \underline{P} \quad (3.34)$$

onde:

$\underline{K}$  - "Matriz Global de Rigidez Generalizada" do problema, tipo quadrada e de dimensão igual ao número total de nodos do domínio vezes o número de graus de liberdade de cada nodo. Neste exemplo coincide com o número de nodos do domínio, visto que o número de graus de liberdade por nodo neste caso é 1 (um).

Na realidade, a superposição das matrizes  $\underline{K}_e$  para a geração de  $\underline{K}$  leva ao aparecimento de componentes nulos em trechos triangulares nas partes superior e inferior de  $\underline{K}$ , sendo esta portanto do tipo semibanda ou banda (Figura 3.3.a) conforme  $\underline{K}_e$  seja ou não simétrica. No presente problema como o funcional é uma forma quadrática,  $\underline{K}_e$  é simétrica.

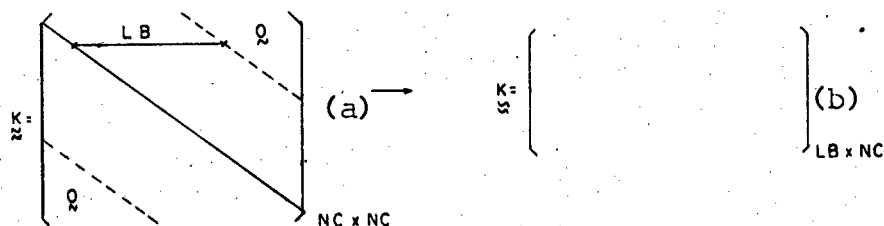


Figura 3.3-Matriz de rigidez (a)-tipo quadrada (b)-tipo banda.

Devido a estes fatos, basta armazenar no computador,  $\underline{K}$  com dimensão  $\underline{LBXNC}$  onde:

$\underline{LB}$  - Semilargura de banda igual a:  $(D_{\text{máx}} + 1)N$ , sendo  $D_{\text{máx}}$  a maior diferença entre os números de dois nodos quaisquer de qualquer elemento do domínio, e  $N$  é número de graus de liberdade por nodo. Note-se portanto que o valor de  $\underline{LB}$  depende da ordem de numeração dos nodos sobre a malha.

$\underline{NC}$  - Número total de nodos do domínio vezes o número de graus de liberdade por nodo.

$\underline{P}$  - "Matriz Global de Carga Generalizada" do problema, tipo coluna e com número total de linhas igual ao número de colunas de  $\underline{K}$ .

$\underline{\phi}^t$  - "Matriz Global de Deslocamento Generalizado" do sistema, tipo coluna e com número total de linhas igual ao número de linhas de  $\underline{P}$  ou  $\underline{K}$ .

Montado o sistema global de equações lineares algébricas, a etapa seguinte é a colocação das condições de contorno (vínculos, restrições) do problema que é feita diretamente sobre (3.34). No caso do problema em questão, como vimos, basta impor os valores nodais de  $\phi$ , nulos no contorno externo e constantes nos contornos internos, ou seja:

$$\begin{aligned} \phi &= 0 && \text{em } C_0 \\ \phi &= K_i && \text{em } C_i, \quad i = 1, n \end{aligned}$$

Feito isto, resta resolver o sistema (3.34) e obter os valores nodais  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ .

Note-se que os valores assim obtidos, satisfazem globalmente a equação de equilíbrio (equivalente) do problema, e todas as condições de contorno do problema.

A aproximação existente neste método está em se assumir previamente a forma (através das funções de interpolação) para a configuração dos deslocamentos generalizados no interior dos subdo

mínios (elementos). Entretanto, uma das maiores vantagens deste método reside exatamente neste fato, isto porque, conhecido o vetor  $\phi^t$  dos deslocamentos generalizados obtido de modo consistente conforme as etapas descritas, pode-se:

- 1 - Obter os seus valores em qualquer ponto no interior de um subdomínio (elemento) e por conseguinte do domínio.
- 2 - Pode-se derivar os deslocamentos generalizados em relação as variáveis independentes do funcional, obtendo assim valores cujo significado físico depende da natureza do problema. Por exemplo: tensão (como aqui), fluxo de temperatura, fluxo de escoamento de líquido, fluxo de potencial (elétrico ou magnético), etc, (pensem outros).
- 3 - Pode-se até integrar os deslocamentos generalizados em relação as variáveis independentes do funcional, e isto neste trabalho também será feito para obter o ângulo de torção e a forma de empenamento de cada secção. É evidente que em outros tipos de problemas, os valores assim obtidos terão significado físico inerentes a natureza dos mesmos.

Neste trabalho, as etapas de montagem do sistema (3.34) feita na forma da Figura 3.3.b, a colocação das condições de contorno e a solução do sistema global de equações lineares algébricas são feitas com a ajuda das sub-rotinas computacionais SORIT, COCON e IMB, respectivamente. Estas sub-rotinas foram desenvolvidas na UFSC pelo GRANTE - Grupo de Análise de Tensões, sendo bastante gerais e aplicáveis a problemas ainda mais completos (maior número de graus de liberdade por nó) que o resolvido neste trabalho, permitindo a solução simultânea do sistema (3.34) para diversos tipos de carregamentos ( $\underline{P}$ ), podendo ainda as condições de contorno que relacionam os graus de liberdade I, J e K, serem dos seguintes tipos:

- 1 -  $\phi_I = 0$  ("deslocamento" nulo especificado).
- 2 -  $\phi_I = k$  ("deslocamento" não nulo especificado).
- 3 -  $\phi_I = \alpha \phi_J$

$$4 - \phi_I = \gamma + \alpha\phi_J + \beta\phi_K$$

$$5 - \phi_I = \gamma + \alpha\phi_J$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes que dependem da natureza do problema.

### 3.5 - Integração Numérica Gaussiana Para Elementos Isoparamétricos

A fórmula de integração numérica Gaussiana de  $n$  pontos, integra exatamente um polinômio de ordem até  $2n-1$ . Note-se que o integrando de  $K_e$ ,  $I_1(\xi, \eta)$  é uma matriz  $8 \times 8$ , cujos componentes são funções de  $(\xi, \eta)$ .

Substituindo convenientemente as relações (3.26) a (3.28) em (3.32), a ordem das funções não polinomiais de  $I_1(\xi, \eta)$  pode ser avaliada, analogamente para  $I_2(\xi, \eta)$  substituindo (3.28) e (3.12) diretamente em (3.33) verifica-se que as funções assim obtidas são polinômios de até 5ª ordem em  $\xi$  ou  $\eta$ .

Neste trabalho, para obtenção das matrizes  $K_e$  e  $P_e$  será adotado a fórmula de integração numérica Gaussiana em domínios bidimensionais, com 3 pontos ( $n = 3$ ) de integração em cada uma das direções  $\xi$  e  $\eta$ . Assim, a integração das funções de  $I_2$  é exata e para as funções de  $I_1$  estas são integradas assumindo-se como sendo arcos de polinômios de 5ª ordem em cada uma das direções. Como veremos posteriormente, os resultados para o número de pontos de integração adotado neste problema são inteiramente satisfatórios.

Para  $n = 3$  em domínios bidimensionais, a expressão para a integração numérica Gaussiana é:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 H_i H_j G(a_i, a_j) \quad (3.35)$$

onde:

$$H_1 = -0.7745966692 \quad a_1 = 0.5555555555$$

$$H_2 = 0. \quad a_2 = 0.$$

$$H_3 = 0.7745966692 \quad a_3 = 0.5555555555$$

Isto posto, estamos com todos os dados requeridos pelo método para elaboração de algoritmos numéricos para solução do problema de torção aqui proposto.

#### 4. DESCRIÇÃO DA SOLUÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA

##### 4.1 - Introdução

É simplesmente impraticável um procedimento manual, mesmo com ajuda de calculadoras convencionais programáveis para a resolução de um problema pelo Método do Elemento Finito. Não apenas pela necessidade de resolver o sistema de equações (3.31), onde nos exemplos que serão apresentados visando obter bons resultados, varia de 45 a até 576 graus de liberdade por malha (igual número de equações), afóra as etapas antecedentes de:

- 1 - Obter as matrizes de "Rigidez" e "Carga" para cada subdomínio através de integração de cada componente destas.
- 2 - Montagem das matrizes dos Elementos (Subdomínios) no sistema global de equações.
- 3 - Colocação das condições de contorno (restrições ou vínculos do problema).

Mesmo em malhas simples e com poucos graus de liberdade, como aqui, um procedimento deste tipo levaria dias, meses, e não se teria jamais a confiabilidade de uma técnica computacional através de algoritmos numéricos codificados.

##### 4.2 - Estratégia para Solução do Problema

Como o ângulo de torção ( $\theta$ ) também é desconhecido a priori, façamos a seguinte mudança de variável:

$$\phi = G\theta\phi^* \quad (4.1)$$

Substituindo agora no funcional, o problema fica reduzido inicialmente a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi^* &= -2 \text{ em } R \\ \phi^* &= 0 \text{ em } C_0 \text{ (contorno externo)} \\ \phi^* &= k_i^* \text{ em } C_i \text{ (contornos internos), } i = 1, p \end{aligned} \quad (4.2)$$



Resolvido o problema (4.2), obtêm-se todos os valores no dais de  $\phi^*$  e assim pode-se determinar a constante geométrica de rigidez (J) de cada secção, pois:

$$M_t = G\theta J = 2 \iint_R \phi \, dx dy + 2 \sum_{i=1}^P k_i A_i \quad (4.3)$$

Tendo em vista (4.1), (4.3) fornece:

$$J = 2 \iint_R \phi^* \, dx dy + 2 \sum_{i=1}^P k_i^* A_i \quad (4.4)$$

Ou ainda, levando em conta (3.33) e (4.1), vem:

$$J = \sum_{e=1}^{NE} \phi_e^* \cdot \underline{P}_e^* + 2 \sum_{i=1}^P \phi_i^* A_i \quad (4.5)$$

Onde:

$\underline{P}_e^*$  - Matriz - coluna de "carga" do elemento  $e$  do problema dado pelas relações (4.2)

$\phi_e^*$  - Matriz - linha dos "deslocamentos" do elemento  $e$  do problema dado pelas relações (4.2)

$p$  - Número de cavidades (furos) da secção

$NE$  - Número de Elementos (Subdomínios) da malha

$\phi_i^*$  - Valor constante de  $\phi^*$  sobre o contorno da cavidade  $i$

$A_i$  - Área da cavidade (furo)  $i$  da secção.

Agora através de (4.3), podemos calcular o ângulo de torção  $\theta$ , ou seja:

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \quad (4.6)$$

Onde  $M_t$  e  $G$  são dados e  $J$  obtido por

A etapa seguinte é a obtenção das tensões. Levando em conta (4.1), vem:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow \sigma_{xz} = G\theta \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow \sigma_{yz} = -G\theta \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \quad (4.8)$$

em termos de valores até então conhecidos, temos:

$$\sigma_{xz}(\xi, \eta) = G\theta \frac{\partial N}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot \phi_e^{*t} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{yz}(\xi, \eta) = -G\theta \frac{\partial N}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot \phi_e^{*t} \quad (4.10)$$

A última etapa é a obtenção da forma de empenamento  $\Psi$ . Partindo das relações (2.30,31) e levando em conta (4.1), temos:

$$\Psi = \int_0^x \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + y \right) dx, \quad \Psi = \int_0^y \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} - x \right) dy \quad (4.11,12)$$

Por outro lado,

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \partial \eta, \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \partial \eta \quad (4.13,14)$$

Levando em conta as relações:

$$x = NX_e^t, \quad y = NY_e^t, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot X_e^t, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot Y_e^t \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot X_e^t, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot Y_e^t, \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \phi_e^{*t},$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \phi_e^{*t}$$

Substituindo agora as relações (4.15) em (4.11,12) , e considerando ainda as fórmulas de integração Gaussiana para domínios unidimensionais, as relações (4.11,12) resultam:

$$\Psi_e(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \phi_e^{*t} + N \tilde{Y}_e^t \right) \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot X_e^t \right) H_i \Bigg|_{(\xi_{int}, \eta)} + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \phi_e^{*t} + N \tilde{Y}_e^t \right) \left( \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot X_e^t \right) H_j \Bigg|_{(\xi, \eta_{int})} \quad (4.16)$$

$$\Psi_e(\xi,\eta) = - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \phi_e^{*t} + N \tilde{X}_e^t \right) \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot Y_e^t \right) H_i \Bigg|_{(\xi_{int}, \eta)} - \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \phi_e^{*t} + N \tilde{X}_e^t \right) \left( \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot Y_e^t \right) H_j \Bigg|_{(\xi, \eta_{int})} \quad (4.17)$$

Note-se que os limites de integração em (4.11,12) são dados no domínio e as relações (4.16) ou (4.17), fornecem apenas a contribuição do subdomínio (elemento)  $e$  para o valor de  $\Psi$ . Assim por exemplo para um ponto nodal  $n$  do domínio da Figura 4.1.a, o valor de  $\Psi$  neste ponto, será:

$$\Psi_n(\xi,\eta) = \sum_{e=1}^n \Psi_e(\xi,\eta) \quad (4.18)$$

Onde  $\Psi_e$  são dados por (4.16) ou (4.17). Na escolha destas relações recomenda-se levar em conta em qual das direções a variação esperada de  $\phi^*$  é menor, o que levará a melhores resultados.

Seria de certa forma difícil, estabelecer um algoritmo numérico de geração de  $\Psi$  que servisse para qualquer tipo de malha. Devido a este fato, estudou-se algumas alternativas visando dar diretamente (sem superposição) o valor da forma de empenamento. A seguir é apresentada uma destas alternativas e que foi usada em algumas malhas para obter uma primeira aproximação para  $\Psi$ .

Partindo da 2ª relação de (4.11,12), temos:

$$\Psi = -xy - \int_0^y \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \partial y \quad (4.19)$$

Substituindo as relações (4.15) em (4.19) e posteriormente adicionando (4.17) e dividindo por 2, temos:

$$\Psi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \left\{ (\underline{N} \cdot \underline{X}_e^t) (\underline{N} \cdot \underline{Y}_e^t) + \sum_{i=1}^3 \left( 2 \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \phi_e^{*t} + \underline{N} \cdot \underline{X}_e^t \right) \left( \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot \underline{Y}_e^t \right) H_i \right\} \Bigg|_{(\xi_{int}, \eta)} + \sum_{j=1}^3 \left( 2 \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \phi_e^{*t} + \underline{N} \cdot \underline{X}_e^t \right) \left( \frac{\partial N}{\partial \eta} \cdot \underline{Y}_e^t \right) H_j \Bigg|_{(\xi, \eta_{int})} \quad (4.20)$$

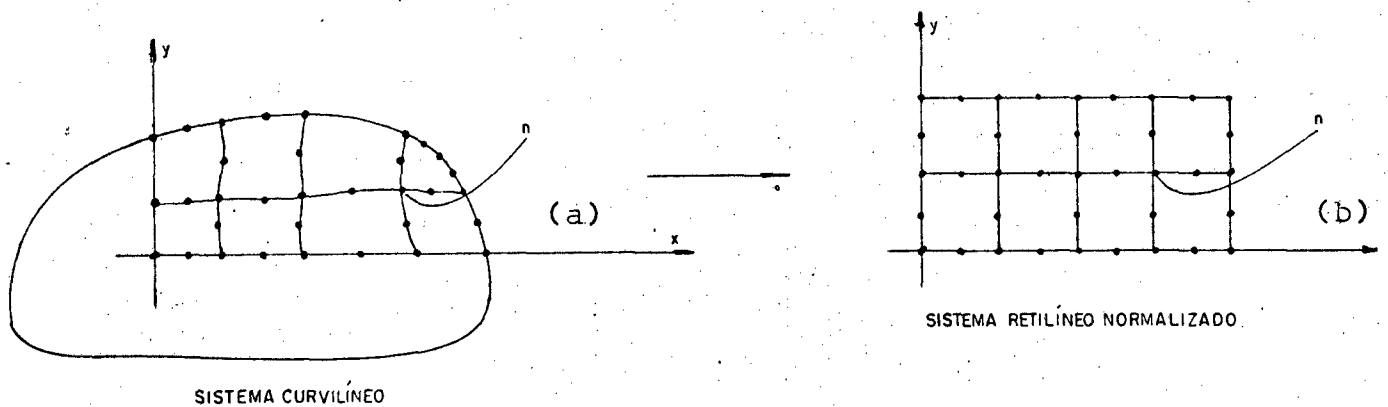


Figura 4.1 - Mapeamento por elementos isoparamétricos. (a)- sistema curvilíneo, (b)- sistema normalizado.

Em modelos elípticos, referenciados de modo convencional, a variação de  $\phi^*$  em relação a  $x$  é mais suave e (4.20) fornece resultados razoáveis.

Vale salientar entretanto, que o procedimento correto e convergente para o cálculo de  $\Psi$  é obtido através de (4.18).

#### 4.3 - Cálculo das Áreas das Cavidades

Seja  $R$  um domínio plano multiconexo qualquer. A área relativa a um furo genérico  $I$ , pode ser obtida aproximadamente por conveniente soma das áreas dos arcos de parábolas formados por to

dos os elementos  $k$  que contornam o furo . Conhecidos os três pontos da face de um elemento genérico  $k$  que contorna o furo I ( Figura 4.2), é unívoca a parábola que contém estes pontos, ou seja:

$$\begin{cases}
 y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\
 y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\
 y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c
 \end{cases}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 a = \frac{(y_1 - y_3)(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)(x_1 - x_3)}{\Delta} \\
 b = \frac{(x_1^2 - x_3^2)(y_1 - y_2) - (x_1^2 - x_2^2)(y_1 - y_3)}{\Delta} \\
 c = y_1 - ax_1^2 - bx_1
 \end{cases}$$

Onde:

$$\Delta = (x_1^2 - x_3^2)(x_1 - x_2) - (x_1 - x_3)(x_1^2 - x_2^2)$$

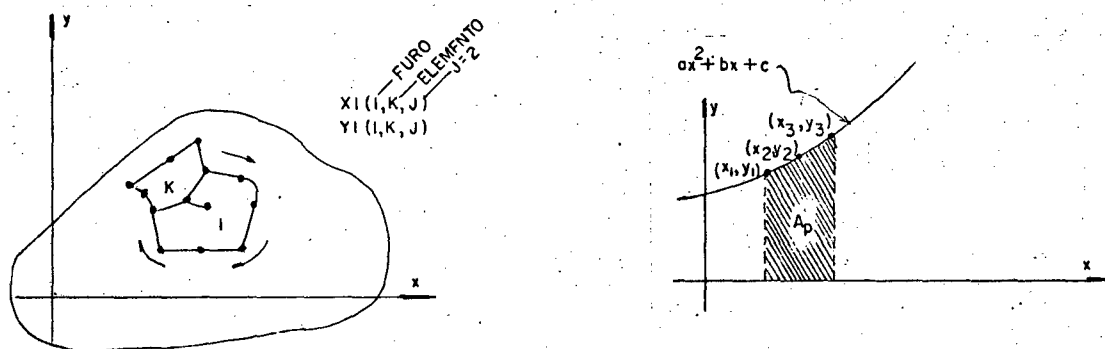


Figura 4.2 - Esquema para cálculo das áreas das cavidades de secção multiconexa.

Por outro lado, a área correspondente a este arco de parábola é:

$$A_p = \int_{x_1}^{x_3} y dx = \int_{x_1}^{x_3} (ax^2 + bx + c) dx \rightarrow$$

$$A_p = \frac{a}{3} (x_3^3 - x_1^3) + \frac{b}{2} (x_3^2 - x_1^2) + c (x_3 - x_1) \quad (4.21)$$

Agora, percorrendo-se a cavidade no sentido horário, as áreas correspondentes aos arcos de parábola situados na parte superior da cavidade são positivas e as abaixo serão negativas (veja os limites de integração). Portanto a soma algébrica das relações(4.21) assim calculadas, fornece a área desejada.

#### 4.4 - Descrição do Programa DEPM001

##### 4.4.1 - Definição dos Parâmetros Principais

NELEM - Número de elementos ou subdomínios da malha

NDENO - Número dos nós (nodos) por elemento

NGL - Número de graus de liberdade por nó (nodo)

LEL - Número de graus de liberdade por elemento

NK - Número de carregamentos

LRE -  $LEL * (LEL + 1) / 2$

LB - Largura mínima da semibanda de  $R$

NC -  $NGL * (\text{número total de nós do domínio mapeado})$

NCC - Número de nós com condição de contorno

X(NELEM,NDENO) - Cada linha desta matriz armazena as abcissas de cada elemento, ordenadamente.

Y(NELEM,NDENO) - Cada linha desta matriz armazena as ordenadas de cada elemento, ordenadamente.

NF - Número de cavidades ou furos da secção transversal.

NELDF - Número de elementos que contornam as cavidades ou furos.

NNDUMF(NF) - Número de um nó do furo,  $I, I = 1, NF$ .

R(LB,NC) - Matriz de rigidez global do domínio.

F(NC,NK) - Matriz de carga global do domínio.

REI(LEL,LEL) - Matriz quadrada que armazena temporariamente a rigidez de cada elemento.

- RE(LRE) - Vetor que armazena a parte triangular superior ou inferior de REI.
- FE(LEL,NK) - Matriz retangular que armazena temporariamente as cargas de cada elemento.
- TM - Momento torsor atuante.
- G - Constante elástica de rigidez transversal.
- B(8) - Vetor das funções de interpolação associadas univocamente a cada nó do elemento.
- DNE(8) - Vetor das derivadas das funções de interpolação na direção  $\xi$ ; tomadas ordenadamente.
- DNQ(8) - Vetor das derivadas das funções de interpolação na direção  $\eta$ , tomadas ordenadamente.
- DETA - Determinante do Jacobiano no ponto de integração (I,J)
- NDONO(NDENO) - Vetor de conectividade do elemento NL, informa de modo ordenado a numeração dos nodos.
- NDONU(NDENO,NELEM) - Matriz de conectividade de todos os elementos do domínio.
- XI(NF,NELEM,3) - Abcissas dos 03 (três) pontos referentes a cada elemento que contorna a cavidade (furo), tomadas no sentido horário.
- YI(NF,NELEM,3) - Ordenadas idem XI(NF,NELEM,3)
- IIN - Código da leitora de cartões.
- IOU - Código da impressora.
- MAT(8,2) - Matriz que armazena ordenadamente as coordenadas nodais de um elemento genérico no sistema retilíneo normalizado, a cada coluna corresponde os valores de  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente.
- MAT3(8,2) - É a mesma que MAT, permutando-se as colunas.
- AMAT(17,2) - Matriz auxiliar gerada contendo ordenadamente, os pontos nodais e os de integração, sendo utilizada na obtenção das tensões.

- MAT1 (24,2) - Matriz auxiliar para obtenção dos valores no  
dais da forma de empenamento.
- MAT2 (24,2) - Idem MAT1.
- TETA(1) - Ângulo de torção calculado da secção.
- RIG(1) - Constante geométrica calculada de rigidez da  
secção.
- TETAR(1) - Ângulo de torção exato da secção.
- RIGR(1) - Constante geométrica exata da secção.
- CISXZ(17,NK,NELEM) - Tensão cisalhante na direção X, cal  
culada nos nodos e pontos de integra  
ção dos elementos.
- CISYZ(17,NK,NELEM) - Tensão cisalhante na direção Y, calcu  
lada nos nodos e pontos de integração  
dos elementos.
- CISXZR(17,NK,NELEM) - Tensão cisalhante na direção X, cal  
culada nos nodos e pontos de integra -  
ção - valores exatos.
- CISYZR(17,NK,NELEM) - Tensão cisalhante na direção Y, calcu  
lada nos nodos e pontos de integração -  
valores exatos.
- PSI(NELEM,8) - Forma de empenamento calculada nos nodos dos  
elementos.
- PSIR(NELEM,8) - Forma de empenamento calculada nos nodos dos  
elementos - valores exatos.
- FTE(LEL,NK,NELEM) - Matriz que armazena todos os vetores de  
carga dos elementos.
- UTE(LEL,NK,NELEM) - Matriz que armazena todos os vetores da  
função de torção de Prandtl\* (assumindo  
 $G\theta = 1$ ) dos elementos.
- VT(LB) - Vetor auxiliar utilizado na sub-rotina IMB da solu  
ção do sistema de equações.
- IN - Define o tipo de condição de contorno, no presente  
problema:



Contorno Externo ( $U_i = \phi_i^* = 0$ ) - deslocamento\* nulo especificado para o grau de liberdade  $I \rightarrow IN=1$  e demais valores  $J, K, ALFA, BETA$  e  $GAMA$  são arbitrários.

Contorno Interno ( $U_i = 1 U_j$ ) - deslocamentos\* iguais para os graus de liberdade  $I$  e  $J \rightarrow IN = 3, ALFA=1$  e os valores  $K, BETA$  e  $GAMA$  são arbitrários.

P(8) - Vetor das derivadas das funções de interpolação com respeito a direção  $X$ .

S(8) - Vetor das derivadas das funções de interpolação com respeito a direção  $Y$ .

H(3) - Pesos para integração Gaussiana

E(3) - Pontos de integração na direção  $\xi$

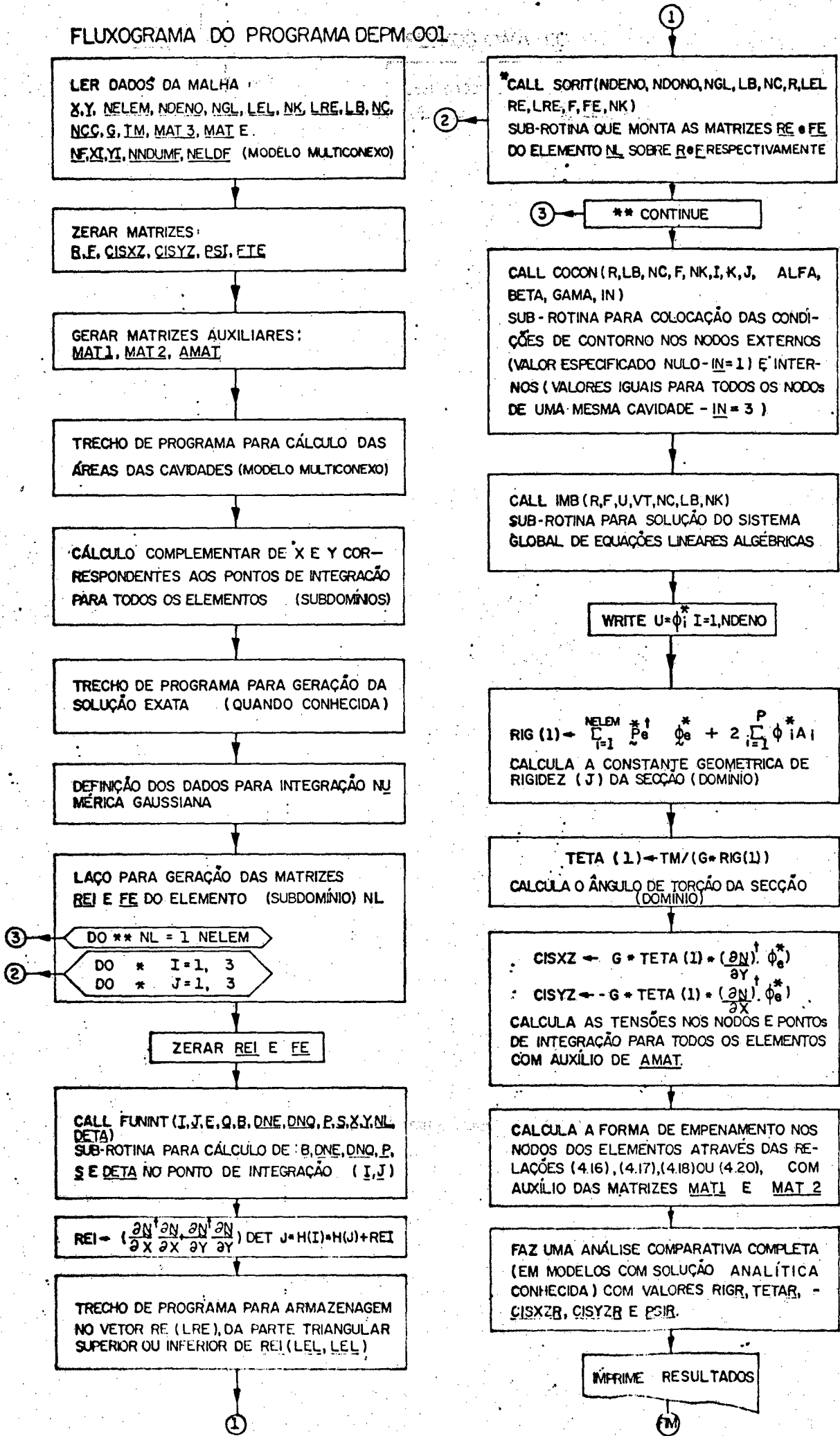
Q(3) - Pontos de integração na direção  $\eta$

#### 4.4.2 - Fluxograma Geral

Na página seguinte é apresentado um fluxograma geral do programa computacional DEPM001 desenvolvido neste trabalho, o qual é constituído de 7(sete) sub-rotinas: FURNINT, COCON, COCO1, COCO2, COCO3, SORIT e IBM, comandadas pelo programa principal.

Os parâmetros indicados neste fluxograma estão descritos no item 4.4.1.

FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DEPM-001



## 5. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

### 5.1 - Introdução

Para comprovar a exatidão do programa DEPM001, bem como obter uma análise do desempenho do tipo de elemento usado no que se refere a convergência na solução do problema aqui proposto, este programa foi testado em diversos modelos (tipos de secção, região ou domínio). Preferencialmente, em modelos com solução analítica conhecida, entre eles: elíptico, retangular, circular vazada e quadrada. Variou-se em cada caso o número de elementos, verificando-se assim a convergência do método.

### 5.2 - Soluções Analíticas Conhecidas

A seguir são apresentadas as expressões analíticas (exatas) para alguns modelos, sendo:

- $\phi(x,y)$  - função de torção de Prandtl
- $J$  - constante geométrica de rigidez da secção
- $\theta$  - ângulo de torção
- $\sigma_{xz}$  - tensão cisalhante na direção  $x$
- $\sigma_{yz}$  - tensão cisalhante na direção  $y$
- $\Psi(x,y)$  - forma de empenamento da secção

#### 5.2.1 - Secção Elíptica ou Circular

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \\ \sigma_{xz} &= -\frac{2M_t}{\pi ab^3} y = -G\theta \frac{2a^2}{a^2 + b^2} y \\ \sigma_{yz} &= \frac{2M_t}{\pi ab^3} x = G\theta \frac{2b^2}{a^2 + b^2} x\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ}$$

$$\Psi(x,y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy$$

onde: a e b são, respectivamente, os semi-eixos maior e menor da elipse, referenciados convencionalmente.

Fazendo-se a=b as expressões (5.1) reproduzem os respectivos valores para uma secção tipo circular de raio igual a a.

### 5.2.2 - Secção Retangular ou Quadrada

$$\phi(x,y) = G\theta \left\{ (a^2 - y^2) - \frac{32}{\pi^3} a^2 \left( \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \cos \left( \frac{n\pi y}{2a} \right) \frac{\cosh(n\pi x/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right) \right\}$$

$$\sigma_{xz} = -G\theta y + \frac{16G\theta a}{\pi^2} \left\{ \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2a} \right) \frac{\cosh(n\pi x/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right\} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \cos \left( \frac{n\pi y}{2a} \right) \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right\}$$

$$J = \frac{16a^3 b}{3} - \frac{1024a^4}{\pi^5} \left\{ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left( \frac{n\pi b}{2a} \right) \right\}$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ}$$

$$\Psi(x,y) = -xy + \frac{32a^2}{\pi^3} \left\{ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{2a} \right) \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right\}$$

onde: b e a são respectivamente, os semilados maior e menor do retângulo, referenciado de modo que o lado

maior coincide com o eixo x.

Fazendo-se  $a=b$  as expressões (5.2) reproduzem os respectivos valores para uma secção tipo quadrada de lado igual a  $2a$ .

### 5.2.3 - Secção Circular Vazada

$$\phi(x,y) = -\frac{G\theta}{2} (x^2 + y^2 - a^2)$$

$$\sigma_{xz} = -G\theta y$$

$$\sigma_{yz} = G\theta x$$

(5.3)

$$J = \frac{\pi}{2} (a^4 - b^4)$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ}$$

$$\Psi(x,y) = 0$$

onde:  $a$  e  $b$  são respectivamente os raios externo e interno.

### 5.2.4 - Secção Triangular Equilátera

$$\phi(x,y) = -G\theta \left\{ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{2a^2}{27} \right\}$$

$$\sigma_{xz} = -G\theta \left( y + \frac{3xy}{2} \right)$$

$$\sigma_{yz} = G\theta \left( x - \frac{3x^2}{2a} + \frac{3y^2}{2a} \right)$$

(5.4)

$$J = a^4 \sqrt{3}/45$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ}$$

$$\Psi(x,y) = -\frac{3x^2y}{2a} + \frac{y^3}{2a}$$

Sendo  $a$  o lado do triângulo, referenciado de modo que o centro de referência coincida com seu centro de gravidade e o eixo dos  $x$  é perpendicular a um dos lados.

### 5.3 - Interpretação dos Resultados Obtidos

Resultados excelentes são obtidos para os valores de  $\phi^*$  - função de torção de Prandtl\* ( $G\theta=1$ ), visto que a otimização do funcional é feita diretamente para estes valores.

Posteriormente, a constante geométrica de rigidez ( $J$ ) e o ângulo de torção ( $\theta$ ) são obtidos por integração de  $\phi^*$  no domínio plano, levando ainda nos casos multiconexo os erros de aproximação das áreas das cavidades, entretanto os valores assim obtidos, como será visto são considerados muito bons.

Na obtenção das tensões, já se carrega os erros (embora pequenos) cometidos no cálculo do ângulo de torção, além destas serem obtidas por derivação de  $\phi^*$ . Neste problema, as tensões  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  num dado ponto, podem ser interpretadas como as tangentes nesse ponto a superfície  $\phi(x,y)$  nas direções  $y$  e  $x$ , respectivamente. A superfície obtida pelo método é aproximada da configuração real  $\phi(x,y)$ , tanto para os nodos, como para o interior do subdomínio (elemento), onde seu valor é interpolado (ver Figura do ANEXO 1). Assim os valores das tensões obtidos pelo método, são secantes ao invés de tangentes a superfície  $\phi(x,y)$ , daí os valores das tensões são menos precisos comparativamente aos valores de  $\phi^*$ ,  $J$  e  $\theta$ .

Nos exemplos a seguir apresentados, o torque atuante foi tomado:  $10^4$  ou  $10^6$  (F.L) e a constante elástica  $G$  é assumida:  $8 \cdot 10^7$  (F.L<sup>-2</sup>). Aqui não se tem a preocupação em estabelecer suas unidades, inclusive para as dimensões do modelo. Note-se entretanto que escolhidas, elas devem ser compatíveis.

## 5.3.1 - Modelo Elíptico com 12 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 2

A referência bibliográfica [5] inicia a solução parcial ( $J, \phi^*$ ) do problema de torção, utilizando elementos finitos triangulares (com 3 nodos por elemento), e testa o seu programa através de um modelo elíptico (2x1) usando 48 elementos, correspondendo a 33 graus de liberdade para toda a malha. Também para testar inicialmente o programa DEPM001 inteiramente distinto aqui desenvolvido, e ao mesmo tempo evidenciar a melhor precisão dos elementos isoparamétricos, resolveu-se estudar como primeiro exemplo o mesmo modelo, usando apenas 12 elementos correspondendo a 45 graus de liberdade para toda a malha. Os valores obtidos para a constante geométrica de rigidez ( $J$ ) da secção e os valores de  $\phi^*$  no centro da elipse estão a seguir comparados no Quadro 5.1.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA Ref. [5]	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)
Constante Geométrica $J$	4.5572	4.8575	5.0265
Erro Relativo Percentual	9.33%	3.36%	-
$\phi^*$ no Centro da Elipse	0.7927	0.7973	0.8000
Erro Relativo Percentual	0.91%	0.34%	-

- Quadro Comparativo 5.1 -

Os valores das tensões são omitidos no programa da referência [5], provavelmente porque já carregaria um erro de quase 10% no cálculo de  $J$ , neste exemplo. Devido as limitações do programa da referência [5], os valores do Quadro 5.1 são os únicos comparativos.

De fato os resultados apresentados evidenciam a melhor precisão dos 12 elementos isoparamétricos (tipo nº 9), comparativamente aos 48 elementos triangulares (tipo nº 1) isto para o mesmo modelo.

No caso da elipse, os máximos valores das tensões ocorrem nos contornos e o máximo maximumum na sua intersecção, com o semi-eixo menor, onde o gradiente de  $\phi(x,y)$  na direção  $y$  é máxima (ver

ANEXO 1), sendo portanto a tensão  $\sigma_{xz}$ .

Note-se que do ponto de vista de tensões, a malha deste primeiro exemplo não é nada boa, pois próximo aos contornos, onde a variação de  $\phi$  é maior, poucos nodos existem e é nestas regiões onde as tensões são maiores, sendo o seu valor máximo comparado no Quadro 5.2.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Valor Máximo de Tensão	$\pm$ 3387.61	$\pm$ 3183.10	-6.42 %

- Quadro Comparativo 5.2.-

Uma análise comparativa completa que é feita no programa DEPM001, mostra a necessidade de um refino da malha, visto que os valores de tensões e forma de empenamento não estão satisfatórios para este número de elementos.

### 5.3.2 - Modelo Elíptico com 48 Elementos Isoparamétricos-ANEXO 3

Objetivando comprovar a convergência do programa DEPM001 e obter melhores resultados para as tensões e forma de empenamento, a malha do mesmo modelo elíptico (2x1) é refinada para 48 elementos contendo ao todo 161 graus de liberdade, resultando agora os valores apresentados no Quadro 5.3.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA Ref.-  5	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)
Constante Geométrica J	4,5572	5.0165	5.0265
Erro Relativo Percentual	9.33%	0.20%	-
$\phi^*$ no Centro da Elipse	0.7927	0.8002	0.8000
Erro Relativo Percentual	0.91%	-0.02 %	-

- Quadro Comparativo 5.3 -

Os erros obtidos para  $\phi^*$  já desprezáveis, incidem no 49



algarismo significativo nos nodos mais próximos ao centro. Nos raros pontos onde há distorção em relação a média dos erros, estes valores são perfeitamente justificáveis. Devido a simetria do modelo, basta uma análise dos valores de  $\phi^*$  no primeiro quadrante. Exemplificando:

1 - O 1º e 5º nodos (111-113) do elemento nº32

Note-se que o número de nodos com valores nodais não nulos que circunvizinham estes nodos é pequeno (erros em torno de 1%).

2 - O 2º e 5º nodos (140-135) do elemento nº38

Pertencem a face mais distorcida deste elemento, resultando valores menos confiáveis (erros em torno de 2%).

3 - O 1º e 2º nodos (149-146) do elemento nº41

Idem item 2 (erros em torno de 1.5%).

4 - O 1º e 2º nodos (146-140) do elemento nº 42

Idem item 2 (erros em torno de 2%).

5 - Elemento 46

Idem item 1 (erros em torno de 1.5%)

6 - O 4º e 7º nodos (140-144) do elemento nº47

Motivos itens 1 e 2 (erros em torno de 2%)

7 - O 1º e 5º nodos (140-144) do elemento nº 48

Motivos itens 1 e 2 (erros em torno de 2%)

Nos demais pontos os valores de  $\phi^*$  foram excelentes.

Note-se que o mapeamento aqui feito, também do ponto de vista das tensões, não pode ser considerado bom. Maior número de pontos nodais estão próximos do centro da elipse, quando na realidade deveriam estar mais próximos ao contorno, onde a variação de  $\phi^*$  e das tensões é maior. Isto justifica alguns valores destoantes das tensões em alguns elementos próximos ao contorno.

Para esta malha, resultou os valores apresentados no Quadro 5.4.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Valor Máximo de Tensão	+ 3203.75	+ 3183.10	-0.65%

São também apresentadas uma primeira aproximação para os valores de  $\Psi$  obtidos pela relação (4.20).

### 5.3.3 - Modelo Elíptico com 64 Elementos Isoparamétricos-ANEXO 4

Para este novo refino, com 64 elementos e 209 graus de liberdade, resultou os valores apresentados no Quadro 5.5.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Constante Geométrica J	5.0190	5.0265	0.15%
$\phi^*$ no Centro da Elipse	0.8001	0.8000	-0.016%
Valor máximo de tensão	+ 3201.36	+ 3183.10	-0.57 %
	- 3197.18	- 3183.10	-0.44 %

- Quadro Comparativo 5.5 -

A melhora dos resultados de um modo geral pode ser considerada boa, sendo um pouco mais confiáveis os valores nodais dos elementos mais próximos ao contorno. Vale ressaltar que o tipo de refino feito, resultou em alguns elementos uma relação entre lados bem maior que 2.0 que não é recomendado, entretanto o valor obtido para J, mostra uma melhora global para os valores desta malha.

No Quadro 5.6, é apresentado um resumo para estes primeiros exemplos dos valores calculados pelo programa DEPM001, os quais evidenciam sua rápida convergência para os valores analíticos (exatos), mesmo consideradas as críticas feitas para os refinamentos e mapeamentos adotados.

PROGRAMA DEPM001	12 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	48 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	64 ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	ANALÍTICO (EXATO)
J	4.8575	5.0165	5.0190	5.0265
ERRO %	3.36%	0.20%	0.15%	-
$\phi^*$	0.7973	0.8002	0.8001	0.8000
ERRO %	0.34%	-0.02%	-0.016%	-
$\sigma_{\max}$	$\pm$ 3387.61	$\pm$ 3203.75	+3201.36/-3197.18	$\pm$ 3183.10
ERRO %	- 6.42%	-0.65%	-0.57%/-0.44%	-

- Quadro Comparativo 5.6 -

Novos refinamentos poderiam ser feitos, mas acredita-se que estes três primeiros exemplos são suficientes para demonstrar a exatidão e convergência do Programa DEPM001 para este tipo de domínio. Note-se que do ponto de vista de Engenharia, os erros aqui obtidos, inclusive para as tensões são perfeitamente aceitáveis, dispensando melhor precisão (novos refinamentos) da malha.

#### 5.3.4 - Modelo Retangular com 24 Elementos Isoparamétricos -ANEXO 5

Agora, a intenção é verificar o desempenho deste tipo de elemento em outras formas de domínios (secções). Domínios retangulares, podem ser mapeados facilmente por elementos retangulares ou quadrados, os quais dão melhores resultados visto que o sistema intrínseco de referência destes elementos, também é retilíneo e os erros na obtenção da matriz Jacobiano praticamente inexistem.

Inicialmente, testa-se o programa para uma malha retangular (12x8), com 24 elementos e 93 graus de liberdade em todo o domínio, resultando os valores apresentados no Quadro 5.7.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Constante Geométrica J	1201.77	1202.76	0.08%
$\phi^*$ no Centro do retângulo	12.8886	12.8987	0.08%
Valor Máximo de Tensão	$\pm$ 56.01	$\pm$ 56.37	0.64%

- Quadro Comparativo 5.7 -

Os valores exatos (analíticos) deste modelo dados pelas séries das relações (5.2), são gerados dentro do próprio computador utilizando-se os seus 25 primeiros termos, fornecendo resultados suficientemente exatos para o número de casas decimais adotado. Como já era esperado, de fato os valores agora obtidos são muito bons.

Considerando a simetria da malha, é feita agora uma análise para os valores das tensões para o primeiro quadrante nos poucos nodos destoantes, incluindo as respectivas justificativas.

1 - 0 59.nodo (62) do elemento nº 15

$\sigma_{yz}$  precário pois o número de nodos na direção  $x$  é pequeno daí  $\partial\phi/\partial x$  é menos confiável (erro de 4%).

- 2 - O 5º nodo (64) do elemento nº 16  
Idem comentário item 1 (erro de 4%).
- 3 - O 3º, 4º e 8º nodos (61, 63 e 62) do elemento 19  
Para o cálculo das tensões, é mais confiável partir dos valores nodais dos elementos mais centrais (maior densidade de nodos), erros em torno de 9%.
- 4 - O 1º, 3º e 8º nodos (77, 63 e 64) do elemento 20  
Idem comentários itens 3 e 1 (erros em torno de 14%)
- 5 - O 4º nodo (77) do elemento 23  
Idem comentários item 3 (erro de 18%)
- 6 - O 3º, 5º, 6º e 7º nodos (77, 92, 83 e 84) do elemento nº 24.  
Idem comentários itens 1 e 3 (erros em torno de 15%)

Para os demais nodos, os valores das tensões estão dentro do esperado, sendo o maior erro no cálculo de  $\phi^*$  em torno de 1%.

### 5.3.5 - Modelo Retangular com 32 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 6

Agora, o teste é feito para outra malha retangular (2x1) com 32 elementos num total de 121 graus de liberdade em todo o domínio, fornecendo os valores apresentados no Quadro 5.8.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Constante Geométrica J	0.45698	0.45736	0.08%
$\phi^*$ no Centro do Retângulo	0.2278	0.2277	-0.02%
Valor Máximo de Tensão	$\pm 20288.04$	$\pm 20335.20$	0.23%

- Quadro Comparativo 5.8 -

Nesté modelo, a numeração intrínseca dos nodos sobre os elementos é tomada conforme Figura 5.1.b ao lado, facilitando a numeração dos vetores de conectividade e das coordenadas nodais. Neste caso há uma modificação na ordenação dos vetores que associam as funções de interpolação e suas derivadas, a cada nodo. As únicas modificações no programa são em B, DNE, DNQ, MAT e MAT3. Quando nada for falado a numeração intrínseca é da Figura 5.1.a.

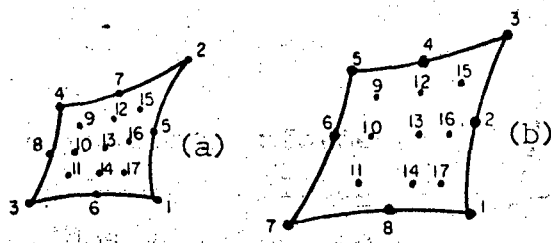


Figura 5.1 - Numeração intrínseca do elemento.

### 5.3.6 - Modelo Circular Vazado com 24 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 7

Aqui, o programa é testado para uma malha tipo circular vazada com diâmetro externo igual a 10 e interno 3, com um total de 88 graus de liberdade. Os resultados neste caso foram mais precários, obtendo-se os valores apresentados no Quadro 5.9.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Constante Geométrica J	813.53	973.79	16.46%
$\phi^*$ no Contorno Interno	8.6641	11.3750	23.83%
Valor Máximo de Tensão	$\pm$ 55.78	$\pm$ 51.34	- 8.64 %

- Quadro Comparativo 5.9 -

Justifica-se estes resultados, visto que todos os elementos agora são do tipo distorcidos (setores circulares) e ainda mais para os elementos mais externos a relação entre lados é bem maior que 2.

### 5.3.7 - Modelo Circular Vazado com 48 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 8

A intenção da apresentação destes exemplos não é apenas

mostrar os modelos onde os critérios de mapeamento da malha são corretamente atendidos (ver item 6.1). É possível, como neste exemplo é mostrado, um refino não conveniente de uma malha levar praticamente a nenhuma melhora dos resultados.

Neste modelo, agora com 176 graus da liberdade e com numeração intrínseca igual a da Figura 5.1.b, resultou os valores apresentados no Quadro 5.10.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Constante Geométrica J	813.15	973.79	16.49%
$\phi^*$ no Contorno Interno	8.6706	11.3750	23.77%
Valor Máximo de Tensão	$\pm 55.95$	$\pm 51.34$	- 8.97%

- Quadro Comparativo 5.10 -

Neste caso, estes valores são justificados devido principalmente a relação entre lados ter se tornado bem maior que 2 para diversos elementos, além destes serem todos distorcidos. E ainda mais, o refino desta malha na direção axial como foi feito, não modificou o número de pontos nodais na direção do raio. Como as tensões são representadas pelas tangentes a superfície  $\phi$ , seus valores não sofreram melhora. Um refino agora na direção radial (96 elementos) levaria a resultados bem melhores.

Conclui-se ainda, como já era esperado que se faz necessário refinar bem mais este tipo de malha para obter resultados equivalentes, por exemplo aos tipos de modelos apresentados anteriormente.

#### 5.3.8 - Modelo Quadrado com Furo Quadrado com 144 Elementos Isoparamétricos - ANEXOS 9 e 10.

Esta malha de 30 x 27 com 144 elementos e 576 graus de liberdade é agora apresentada e visa demonstrar que a teoria de torção em seção tubular de paredes finas não deve ser aplicada em casos como este, onde a espessura não é suficientemente fina e além

disto existem cantos reentrantes.

Nesta teoria admite-se que a espessura da parede é suficientemente pequena, de modo que se possa aproximar a configuração real  $\phi(x,y)$ , por uma superfície  $\phi_a(x,y)$  - Figura 5.2 ao lado, desprezando-se as curvaturas. Assim o valor da tensão, como sendo a tangente a curva no ponto, é constante na direção normal (ao longo da espessura) e variável ao longo do comprimento (linha média) caso haja variação da espessura, visto que  $h$  é constante. As tensões obtidas por esta teoria apresenta valores máximos menores que os reais. Note-se as tangentes no ponto 1 ( $\beta > \alpha$ ).

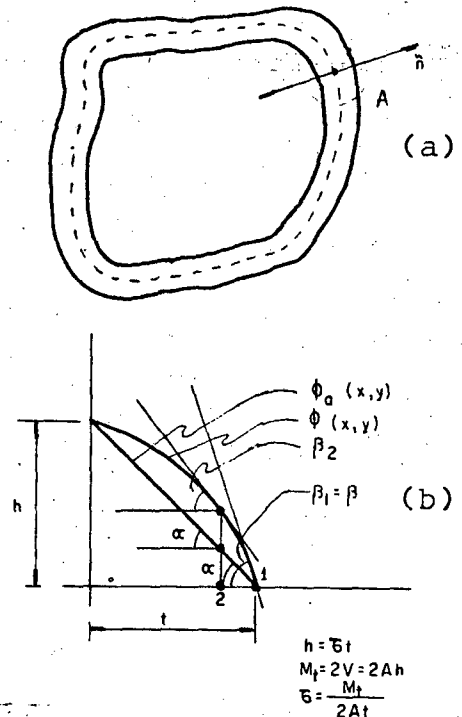


Figura 5.2-(a) Secção tubular de parede fina.

(b) detalhe A

Os resultados obtidos neste exemplo estão mostrados no Quadro 5.11.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	TEORIA DE PAREDES FINAS	PROGRAMA DEPM001	ERRO RELATIVO %
Valor Máximo de Tensão	± 228.62	± 390.88	41.51%

- Quadro Comparativo 5.11 -

Para verificar a convergência deste valor, o programa deveria ser testado para um número maior de elementos, refinando ainda mais a malha (maior número de graus de liberdade). Neste caso, já começaria a existir problemas com a capacidade de memória do computador IBM - 370 (onde o programa foi testado), requerendo técnicas de superposição de soluções parciais do problema (subestruturação).

Inicialmente a malha nº 1 (ANEXO 9) foi usada e a dimensão requerida para matriz de rigidez global- $\underline{R}$ , foi (320 x 576) a qual com precisão dupla já supera a capacidade de memória do IBM-370. Objetivando diminuir a dimensão de  $\underline{R}$  uma nova numeração de nodos (malha nº 2 - ANEXO 10) é feita diminuindo assim o valor largura da semibanda daí, a dimensão requerida para  $\underline{R}$  passou a ser (240x576) a qual foi armazenada agora em precisão simples evitando assim o problema surgido.

Outros modelos, com solução analítica desconhecida poderiam ser testados e comparados com a solução desta teoria aproximada, sendo que os resultados deveriam ser bem mais próximos, na medida em que os requisitos para aplicação desta teoria fossem atendidos, ou seja:

- 1 - As espessuras das paredes devem ser pequenas comparadas com as dimensões da secção.
- 2 - A variação de espessura ao longo da linha média não deve ser brusca.
- 3 - Não deve haver cantos reentrantes.

#### 5.3.9 - Modelo Quadrado com 100 Elementos Isoparamétricos - ANEXO 11

Agora, o teste é feito para uma malha quadrada (10 x 10) com 100 elementos, num total de 341 graus de liberdade em todo o domínio.

Neste modelo assim como no exemplo anterior, a malha é gerada no próprio computador, ou seja, dada as coordenadas e a conectividade dos nodos de um único elemento, as coordenadas e as conectividades dos demais elementos são obtidas utilizando-se algoritmos numéricos codificados. Com este procedimento evita-se a entrada de muitos cartões de dados e é essencial em malhas que requeriam um refino muito grande. Neste exemplo, pelo menos cerca de 260 cartões de dados foram evitados devido a este procedimento e no exemplo anterior evitou-se cerca de 600 cartões.



Obtido um algoritmo numérico para geração de uma malha com N elementos, através de pequenas adaptações no algoritmo inicial, é possível obter novos algoritmos numéricos para geração automática de malhas com N + P elementos. Em domínios bem definidos tais como retangulares ou circulares por exemplo, é possível o desenvolvimento de uma sub-rotina de geração automática de malhas para um número qualquer de elementos, dadas as suas dimensões.

Como já era esperado, esta malha é a que apresenta os melhores resultados comparativos, visto o número de elementos e tipo de domínio, resultando os valores mostrados no Quadro 5.12.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)	ERRO RELATIVO %
Constante Geométrica J	1 405.71	1 405.77	0.005 %
$\phi^*$ no Centro do Quadrado	14.7344	14.7343	-0.001 %
Valor Máximo de Tensão	$\pm$ 4785.21	$\pm$ 4803.87	0.388 %

- Quadro Comparativo 5.12 -

A referência |3| apresenta os valores obtidos para J em uma barra quadrada (2a x 2a), utilizando elementos triangulares tipo nº 1, para diversos números de nodos por malha. Fazendo-se a=5, comparativamente para 400 nodos com elementos triangulares tipo Nº1 X 341 nodos de elementos isoparamétricos tipo nº 9 apresentado neste modelo, resulta os valores do Quadro 5.13.

PROCEDIMENTO DE CÁLCULO UTILIZADO	PROGRAMA REF.  3	PROGRAMA DEPM001	ANALÍTICO (EXATO)
Constante Geométrica J	1408.50	1405.71	1405.77
Erro Relativo Percentual	0.19 %	0.005 %	-

- Quadro Comparativo 5.13 -

Aqui também os valores da forma de empenamento são obtidos, e agora de modo mais consistente através das relações (4.12)

e (4.14). Especialmente nos vértices dos elementos, os valores de  $\psi$  são bem confiáveis provando assim também sua convergência.

Os erros aqui obtidos para  $\phi^*$  praticamente inexistem pois na quase totalidade dos valores a aproximação é a partir do 5º algarismo. Os valores das tensões também são considerados muito bons.

Na medida em que a malha é refinada, o seu número total de graus de liberdade aumenta, juntamente com o tempo computacional para a solução do problema. Exemplificando, neste modelo o tempo total de computação foi de 11 min. e 17.16 seg. Em geral, um refino deste tipo, mesmo para os valores das tensões é desnecessário, tendo em vista as hipóteses assumidas na teoria (material homogêneo isotrópico, despreza-se as influências de peso próprio, influências térmicas, etc). Como o método é convergente, ele permite chegar a valores tão próximo dos "exatos" quanto se queira, porém do ponto de vista de Engenharia, consideradas as hipóteses assumidas para cada tipo de problema, a precisão requerida (aceitável) é em geral pequena.

## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 6.1 - Recomendações e Precauções para o Mapeamento de Domínios com Elementos Isoparamétricos.

Decorrentes das análises dos resultados para os diversos tipos de malhas apresentadas no capítulo anterior, as observações abaixo devem ser levadas em conta:

- a - Evitar elementos muito distorcidos, nos quais se perde informação na obtenção da matriz de transformação de coordenadas (Jacobiano) que repassa o problema para o sistema retilíneo normalizado (II).
- b - O ângulo interno entre faces, para todos os elementos, deve ser menor que  $180^\circ$ .
- c - Caso os elementos sejam quadráticos (tipo n<sup>o</sup>9), recomenda-se que os nodos intermediários estejam localizados dentro do círculo A de raio  $l/10$  e que de modo algum estejam no exterior da circunferência B de raio  $l/4$ , isto em relação ao ponto médio.
- d - Refinar a malha em regiões onde se espera maiores variações dos deslocamentos\*  $\rightarrow$  tensões\* maiores.
- e - Em malhas simétricas recomenda-se adotar um mapeamento também simétrico. Ajuda à análise da geração das matrizes de "rigidez" e "carga" de cada elemento.
- f - Na medida do possível, usar elementos quadrados ou mesmo retangulares (dão melhores resultados). Praticamente não há erro no cálculo do Jacobiano. Nestes casos, o que existe é uma ampliação ou redução da matriz unitária. Os elementos fora da diagonal são nulos o que indica que o sistema (I) também é retilíneo. Se o elemento é quadrado de lados  $l \times l$ , J será a própria matriz unitária, o que significa que os sistemas de referência se confundem.
- g - Para mapeamento de domínios com solução analítica desconhecida,

faz-se uma malha com N elementos. A seguir para testar se a convergência está dentro dos limites desejáveis, repete-se um mapeamento com N+P elementos de preferência fazendo-se coincidir os nodos anteriores. Repete-se este passo quantas vezes for necessário.

- h - Antes do 2º passo em g, deve-se verificar a geração correta das matrizes de "rigidez" e "carga" dos elementos, com auxílio do item e quando for o caso.
- i - Evitar que a relação entre lados para os elementos da malha seja maior que 2.

## 6.2 - Uma Interpretação Mais Geral para o Conteúdo do Programa DEPM001 (Sugestões para Novos Desenvolvimentos).

O objetivo maior dessa discussão é o de mostrar as potencialidades deste programa, visando a sua possível contribuição no desenvolvimento de novos trabalhos.

Muitos problemas em Engenharia, com significados físicos inteiramente distintos são regidos por um mesmo tipo de equação, mutando-se apenas o significado físico das constantes e variáveis envolvidas. Exemplificando, o tipo de equação diferencial parcial resolvida neste programa ( Equação de Laplace ) é o mesmo que rege, entre outros, os seguintes problemas (Ver |3| e |4|, capítulos 10 e 17, respectivamente):

- Transferência de Calor por Condução
- Distribuição de Potencial Elétrico
- Distribuição de Potencial Magnético
- Filtração Através de Meios Porosos
- Flexão de Vigas Prismáticas
- Lubrificação de Mancais
- Fluxo Irrotacional de Flúidos Ideais

Em alguns destes problemas e de acordo com o tipo de regi

me, a equação Laplaceana é mais completa que (2.32), podendo ser por exemplo do tipo:

$$\nabla^2 \phi + C\phi + Q = 0 \quad (6.1)$$

e cujo funcional associado é:

$$F(\phi) = - \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} C\phi^2 - Q\phi \right\} dx dy \quad (6.2)$$

Neste caso, um procedimento inteiramente análogo ao anteriormente exposto para o problema de torção, deverá ser feito, e através de algumas adaptações no Programa DEPM001 (basicamente na geração de RE), a equação (6.1) poderá ser resolvida.

Existem casos ainda mais gerais, onde o tempo também aparece como variável, por exemplo o problema de condução de calor em regime linear transitório, é regido por:

$$\nabla^2 T + \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{Q}{K} = 0 \quad (6.3)$$

onde:

k - condutividade térmica

$\rho$  - densidade

c - calor específico

Ou ainda a equação de ondas:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (6.4)$$

onde:

C - velocidade de propagação

$\phi$  - forma da onda

Na solução das equações (6.3) e (6.4) obtem-se agora para cada elemento um conjunto de equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem respectivamente. Nestes casos as técnicas de solução são

um pouco mais sofisticadas (Ver [4] - Capítulos 20 e 21).

Já por exemplo em regimes estacionários e na ausência de "cargas", a distribuição de temperatura ou potencial elétrico em uma placa de forma irregular e multiconexa, com valores especificados nos contornos, é regido por:

$$(I) \quad \nabla^2 T = 0 \text{ em } R \quad (6.5)$$

$$T = t_i \text{ em } C_i, \quad i = 0, P \text{ (contornos)} \quad (6.6)$$

Note-se que (I) é agora um caso particular de problema de torção aqui resolvido, onde  $G\theta = 0$  e  $\phi^* = T$ . Bastaria algumas simplificações neste programa ou seja fazer ( $FE = Q$ ) e introduzir as condições de contorno (6.6) nos nodos correspondentes através da sub-rotina COCON (IN=2, valor especificado não nulo), depois chamar a sub-rotina denominada IMB para solução do sistema de equações, resultando diretamente os valores nodais desejados. Vale salientar que os valores assim obtidos, usando o mesmo tipo de elemento, terão precisões excelentes (equivalentes as obtidas para  $\phi^*$ ), requerendo malhas com poucos elementos para obter resultados convergentes aceitáveis.

O próprio problema de torção aqui proposto, poderia ser também facilmente resolvido através da formulação tipo 2.4.2 - Função  $\chi$ , conjugada de  $\Psi$ , ou seja:

$$(II) \quad \nabla^2 \chi = 0 \quad (6.7)$$

$$\chi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \text{ em } C_i, \quad i = 0, P \quad (6.8)$$

Para resolver o problema (II) bastaria fazer  $FE=Q$  e colocar as condições de contorno (6.8) através da sub-rotina COCON (IN=2, valor especificado não nulo), resolver o sistema através da IMB e daí:

$$M_t = \iint_R (x \sigma_{yz} - y \sigma_{xz}) dx dy =$$

$$= \iint_R \left\{ -xG\theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \right) - yG\theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} - y \right) \right\} dx dy$$

$$= G\theta \left\{ \iint_R (x^2 + y^2) dx dy - \iint_R \left( x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) dx dy \right\} \quad (6.9)$$

$$J = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy - \iint_R \left( x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) dx dy \quad (6.10)$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \quad (6.11)$$

$$\sigma_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} - y \right) \quad \sigma_{yz} = -G\theta \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} - x \right) \quad (6.12)$$

$$\psi = \int - \frac{\partial \chi}{\partial x} dy = \int \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \quad (6.13)$$

Conhecido o vetor nodal  $\chi$  da malha, resta substituir as interpolações previstas no método nas relações (6.10) a (6.13), conforme procedimentos adotados nos capítulos 3 e 4 e o problema estará resolvido.

### 6.3 - Alternativa para Problema de Torção em Domínios Compostos de Diferentes Materiais.

Seja agora um domínio plano multiconexo qualquer, constituído de  $n$  tipos de materiais em  $n$  regiões distintas pertencentes a este domínio. A cada uma destas regiões a equação de equilíbrio é:

$$\nabla^2 \phi = -2G_j \theta \quad \text{na região } R_j \in R, \quad j = 1, n \quad (6.14)$$

onde:

$G_j$  - é a constante elástica correspondente a região  $R_j$

$\theta$  - ângulo de torção da secção.

Faz-se agora:

$$G_j/G_1 = \alpha_j, \quad j = 1, n \quad (6.15)$$

onde a região 1 é escolhida arbitrariamente.

Substituindo agora (6.15) em (6.14), resulta:

$$\nabla^2 \phi = -2\alpha_j G_1 \theta \quad \text{na região } R_j \in R, \quad j = 1, n \quad (6.16)$$

Fazendo-se agora a seguinte transformação de coordenadas:

$$\phi = G_1 \theta \phi^* \quad (6.17)$$

e substituindo-se em (6.16), temos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi^* &= -2\alpha_j \quad \text{em } R_j \quad j=1, n \\ \phi^* &= 0 \quad \text{em } C_0 \\ \phi^* &= K_i^* \quad \text{em } C_i, \quad i=1, P \end{aligned} \quad (6.18)$$

Resolvido o problema (6.18), obtem-se o vetor nodal  $\phi^*$  do domínio. Agora, como:

$$M_t = 2 \iint_R \phi \, dx \, dy + 2 \sum_{i=1}^P A_i \phi_i^*, \quad \text{substituindo (6.17), vem}$$

$$M_t = 2G_1 \theta \left\{ \iint_R \phi^* \, dx \, dy + 2 \sum_{i=1}^P A_i K_i^* \right\} \quad (6.19)$$

$$J_1 = 2 \iint_R \phi^* \, dx \, dy + 2 \sum_{i=1}^P A_i \phi_i^* \quad (6.20)$$

Onde  $J_1$  representa a constante geométrica de rigidez referenciada em relação a região 1, daí:

$$\theta = \frac{M_t}{G_1 J_1} \quad (6.21)$$

Os valores das tensões, consideradas as relações (6.17) serão:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = G_1 \theta \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \quad \text{e} \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -G_1 \theta \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \quad (6.22)$$

A geração das matrizes de "rigidez" e "carga" dos elementos de cada região com diferente tipo de material, serão diferentes apenas conforme os valores de  $\alpha_j$ . Esta é basicamente a única diferença em relação ao programa original DEPM001 e isto poderá ser facilmente adaptado.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALVES, D.Boechat, "Métodos Numéricos", Publicação da UFSC, Florianópolis - SC, 1978.
2. ALVES, D.Boechat, "Elasticidade", Publicação da UFSC, Florianópolis - SC, 1976.
3. BREBBIA C.A. e FERRANTE A.J, "The Finite Element Technique", Publicação da UFRS, Porto Alegre - RS, 1975.
4. ZIENKIEWICZ O.C, "El Método de Los Elementos Finitos", Editorial Reverté S.A., Barcelona 1980.
5. BREBBIA C.A e FERRANTE A.J, "Computational Methods for the Solution of Engineering Problems", Pentech Press Limited, 2nd revised edition, London, 1979.
6. MEIROVITCH, Leonard, "Analitical Methods in Vibrations", Macmillan, New York, 1967.
7. BATHE, Klaus-Jürgen e WILSON, Edward L, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", By Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1976.
8. VENANCIO, F.Fº, ITA, "Análise Matricial de Estruturas", Almeida Neves-Editores, Ltda. Rio de Janeiro - RJ, 1975.
9. RUBINSTEIN, F.Moshe, "Matriz Computer Analysis of Structures", By Prentice- Hall, Inc, New Jersey, 1966.
10. LANGHAAR, H.L, "Energy Methods in Applied Mechanics", By John Wiley & Sons, Inc, New York, 1962.
11. BREBBIA C.A e CONNOR J.J, "Fundamentals of Finite Element Techniques", By Butterworth & Co Ltd. London, 1963.
12. PESTEL, Eduard C. e LECKIE, Frederick, "Matriz Methods in Elastomechanics", Mc Graw-Hill, New York, 1963.
13. TIMOSHENKO, S.P e GOODIER, J.N. "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill, Third Edition, Tokyo, 1970.

## A P Ê N D I C E

## Apêndice A

Formulário dos Requisitos da Teoria da Elasticidade para:  
 "Análise Dinâmica Tridimensional em Meios Elásticos Contínuos"

a - Equações de Equilíbrio

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{13} + X_1 &= \frac{d}{dt} (\mu \dot{u}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{23} + X_2 &= \frac{d}{dt} (\mu \dot{v}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{13} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{23} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{33} + X_3 &= \frac{d}{dt} (\mu \dot{w}) \end{aligned} \quad (A.1)$$

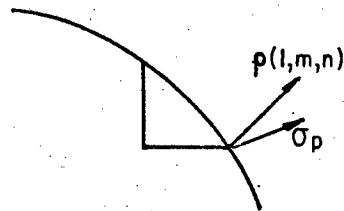
b - Equações de Compatibilidade (Tensões):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) &= - \frac{\delta_{ij}\nu}{1-\nu} \nabla \cdot R - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \\ &- \frac{\delta_{ij}\nabla^2}{1-\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{aligned} \quad (A.2)$$

$i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad R = (X_1, X_2, X_3)$

c - Condições de Contorno:

$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= l\sigma_{11} + m\sigma_{12} + n\sigma_{13} \\ \sigma_{p2} &= l\sigma_{12} + m\sigma_{22} + n\sigma_{23} \\ \sigma_{p3} &= l\sigma_{13} + m\sigma_{23} + n\sigma_{33} \end{aligned} \quad (A.3)$$



onde:

- $(u, v, w)$  - deslocamentos nas direções  $x_1, x_2$  e  $x_3$  respectivamente.
- $(X_1, X_2, X_3)$  - forças de corpo (gravitacionais, inerciais, magnéticas)

$(l, m, n)$  - co-senos diretores das direções  $x_1, x_2, x_3$ , respectivamente.

$T(x_1, x_2, x_3)$  - distribuição de temperatura.

$E, \nu, G$  - constantes elásticas

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{se } i=j \\ = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

São válidas ainda as seguintes relações:

d - Deformações - Deslocamentos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}, \epsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}, \epsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial x_2}, \epsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_3}, \epsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

e - Deformações - Tensões:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{E} |\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})| + KT, \quad \epsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12} \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} |\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})| + KT, \quad \epsilon_{13} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{13} \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} |\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})| + KT, \quad \epsilon_{23} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{23} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

f - Tensões - Deformações:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda e + 2G \epsilon_{11} - a T & \sigma_{12} &= G \epsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= \lambda e + 2G \epsilon_{22} - a T & \sigma_{13} &= G \epsilon_{13} \\ \sigma_{33} &= \lambda e + 2G \epsilon_{33} - a T & \sigma_{23} &= G \epsilon_{23} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sendo:  $e = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ , e demais constantes relacionadas em h.

g - Compatibilidade (Deformações):

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2}, \quad 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

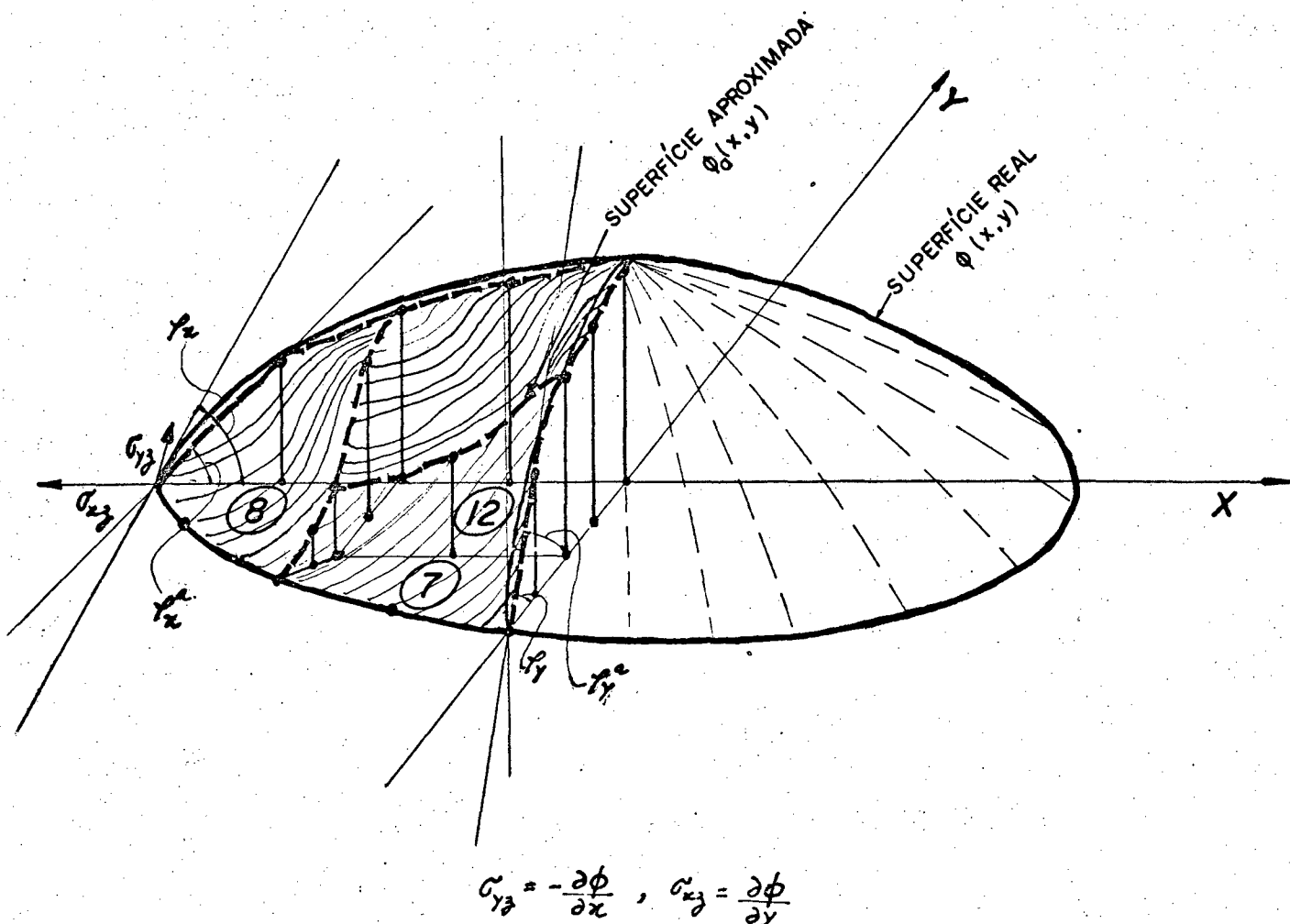
$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

h - Constantes Elásticas:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad a = (3\lambda + 2G) K$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad (\text{A.8})$$

## A N E X O S

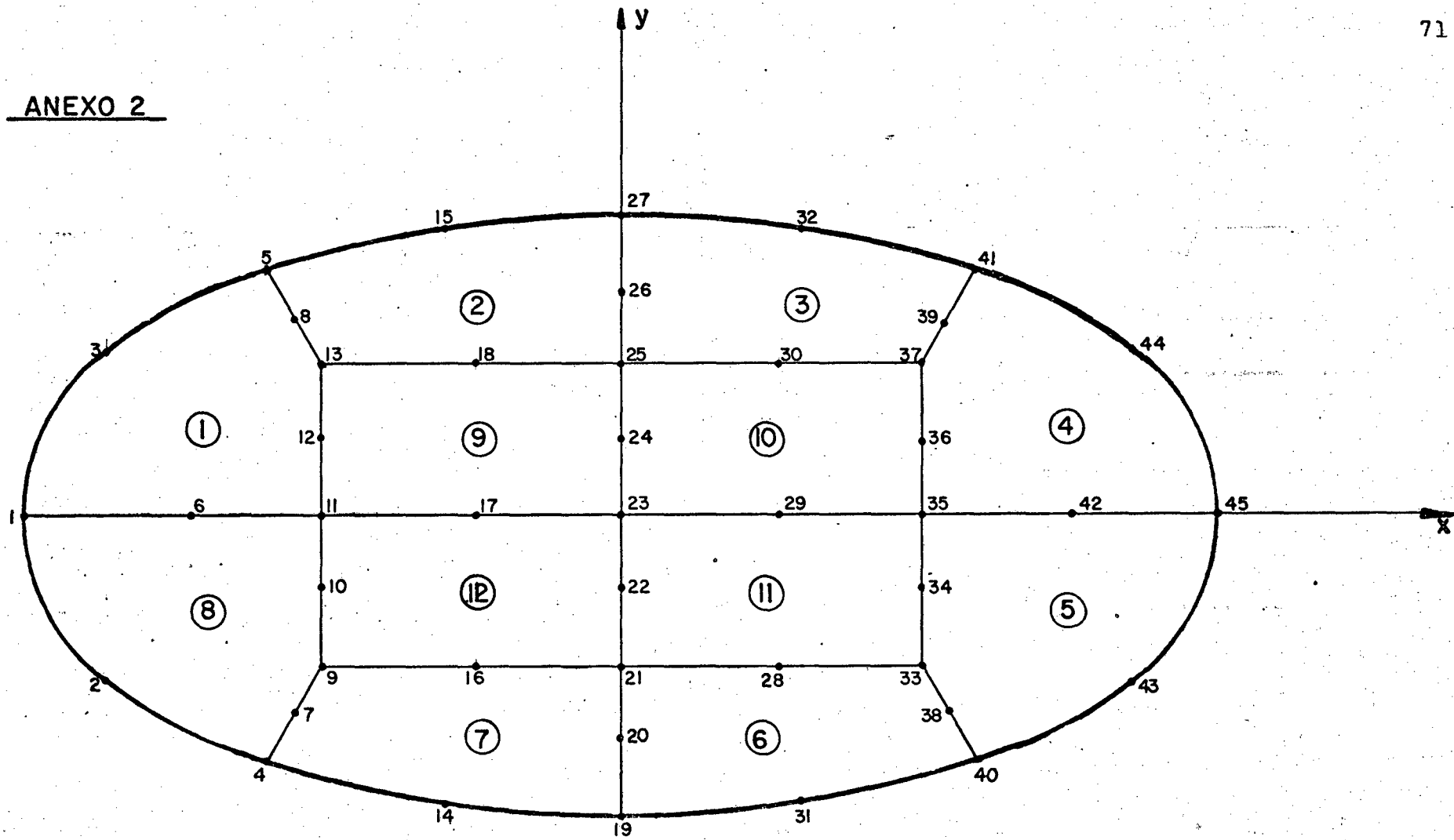
ANEXO IINTERPRETAÇÕES DAS TENSÕES

- VALORES NODAIS DE  $\phi$  OBTIDOS PELO MÉTODO
- VALORES REAIS DE  $\phi$
- CONTORNO SOBRE OS VALORES NODAIS

NOTA:

NESTE ANEXO É MOSTRADA UMA VISTA EM PERSPECTIVA DAS SUPERFÍCIES  $\phi$ ,  $\phi_0$  E VALORES NODAIS PARA O MODELO ELÍPTICO COM 12 ELEMENTOS - ANEXO 2, DETALHANDO ESPECIALMENTE O 3º QUADRANTE.

ANEXO 2



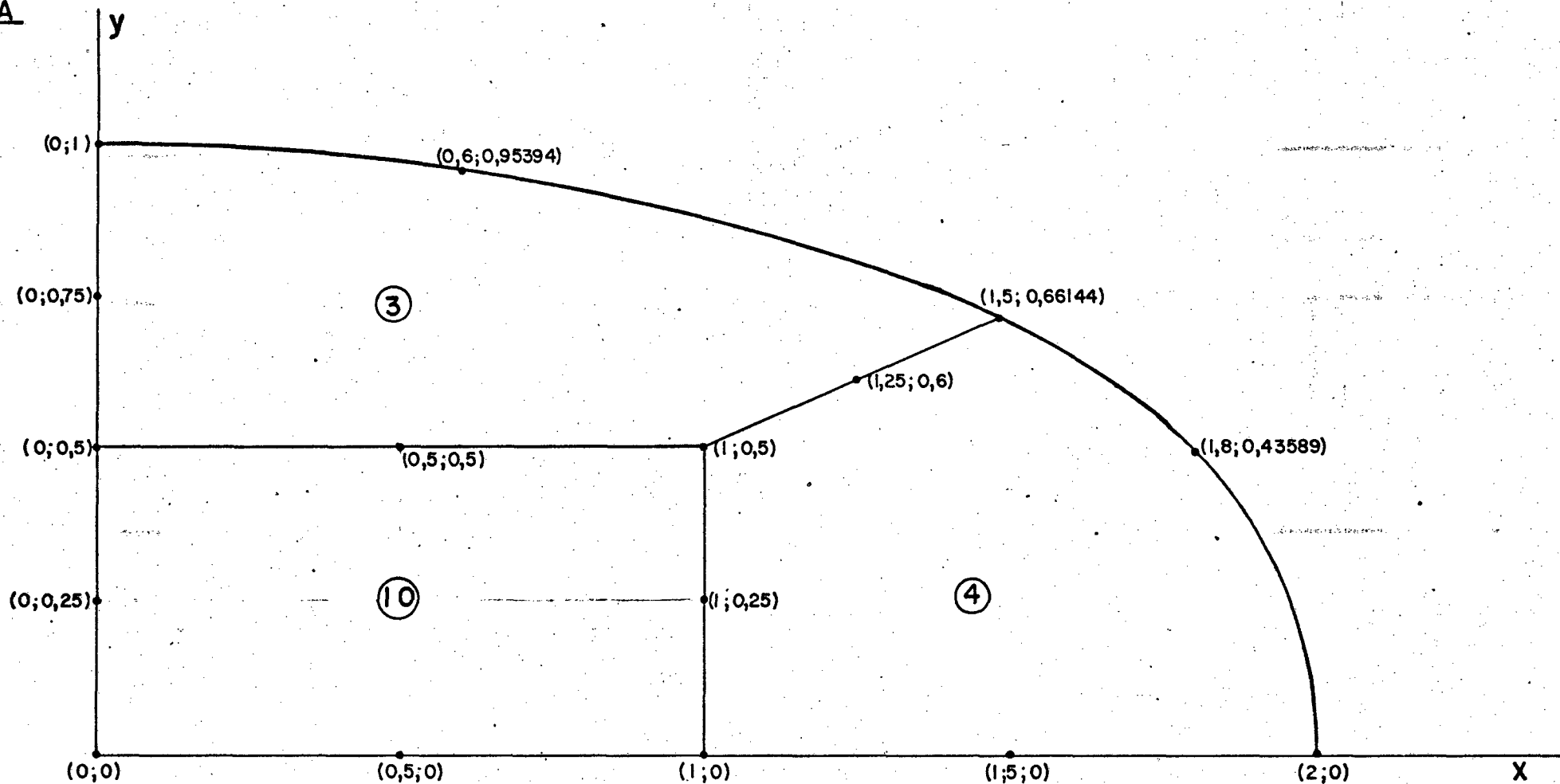
**MODELO ELÍPTICO COM 12 ELEMENTOS**  
**MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS**

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MATERIAIS

*[Handwritten signature]*

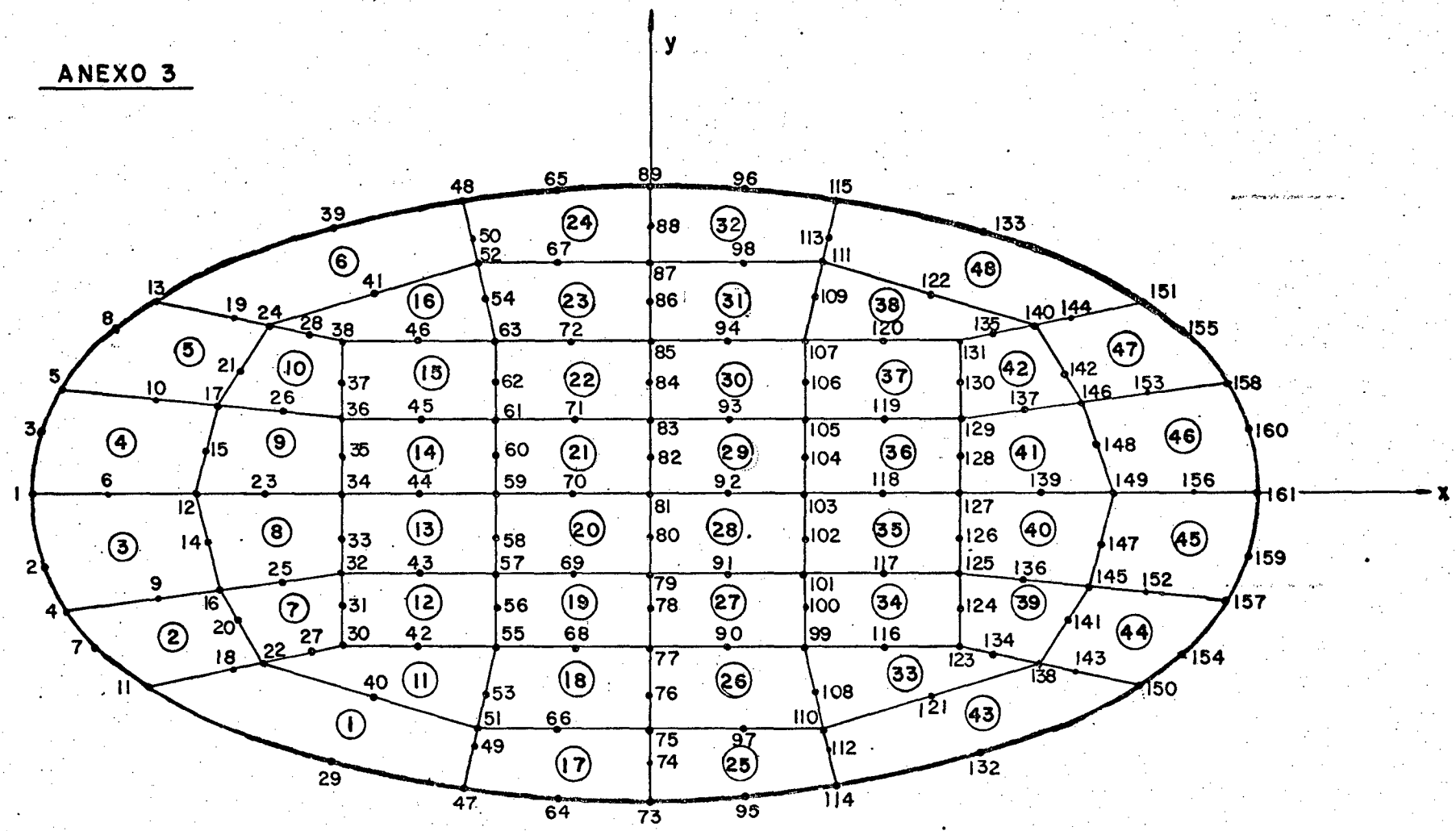


## ANEXO 2-A



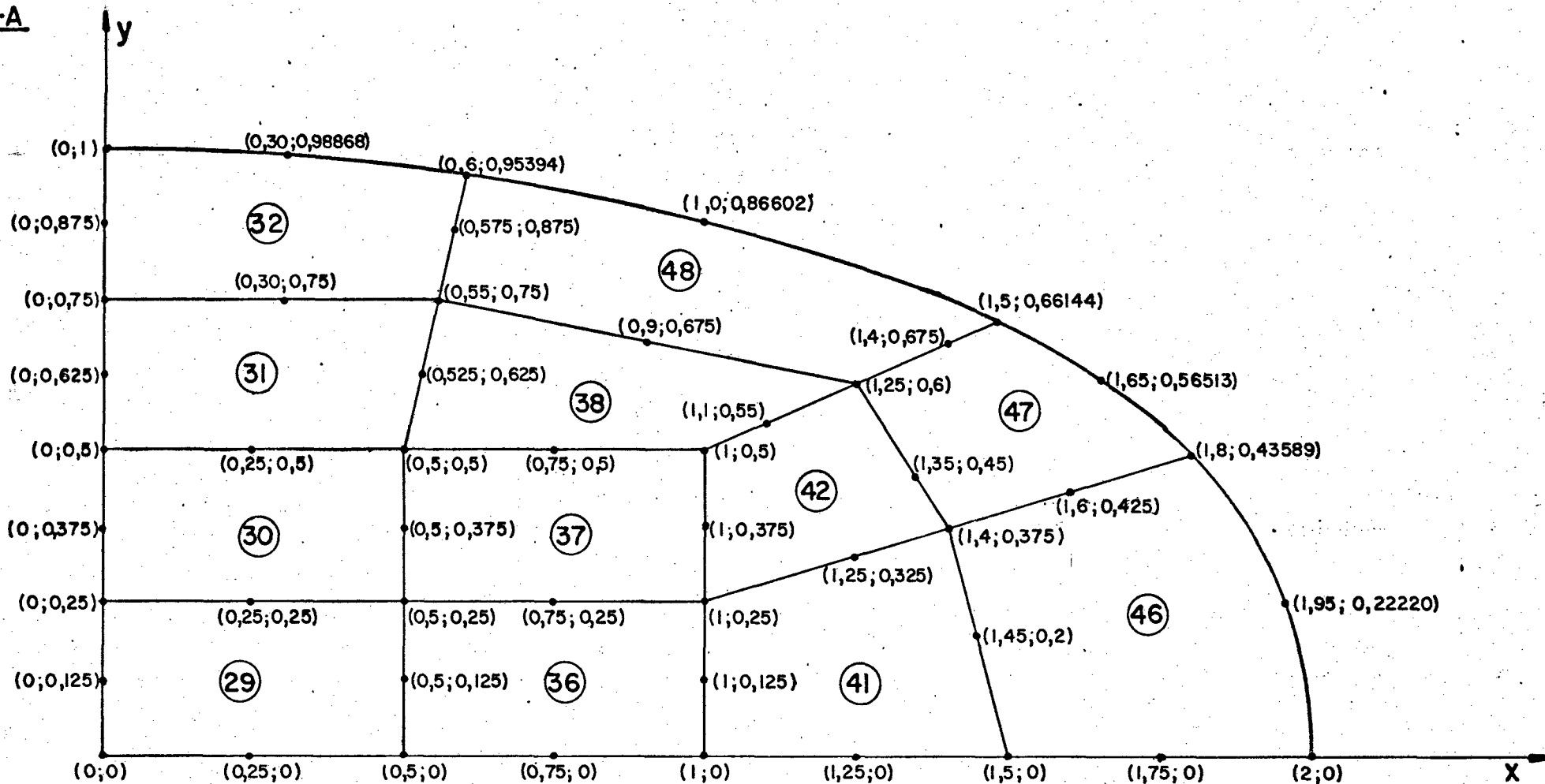
MODELO ELÍPTICO COM 12 ELEMENTOS  
DETALHAMENTO DAS COORDENADAS NODAIS

ANEXO 3



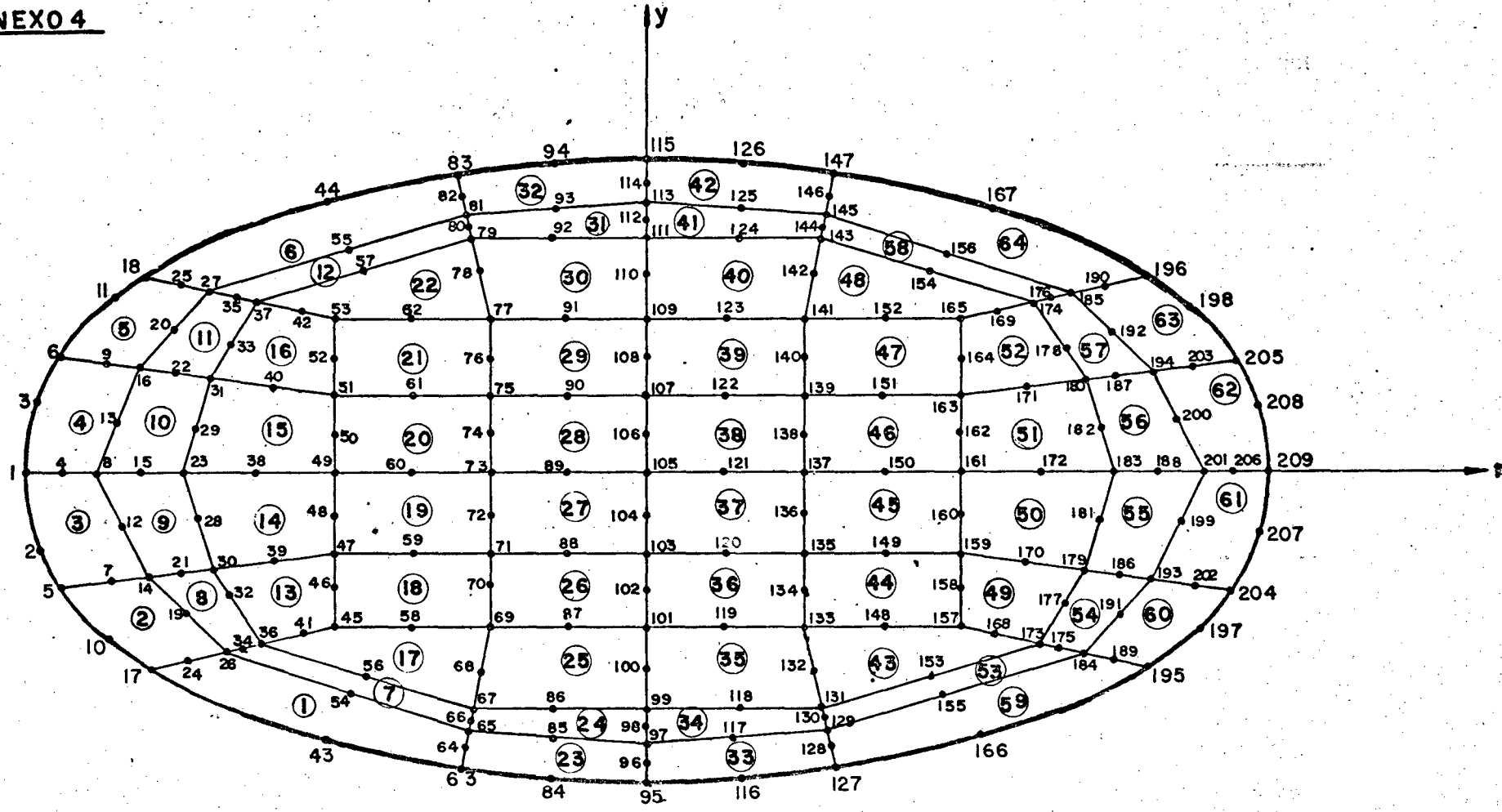
**MODELO ELÍPTICO COM 48 ELEMENTOS**  
**MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS**

## ANEXO 3-A



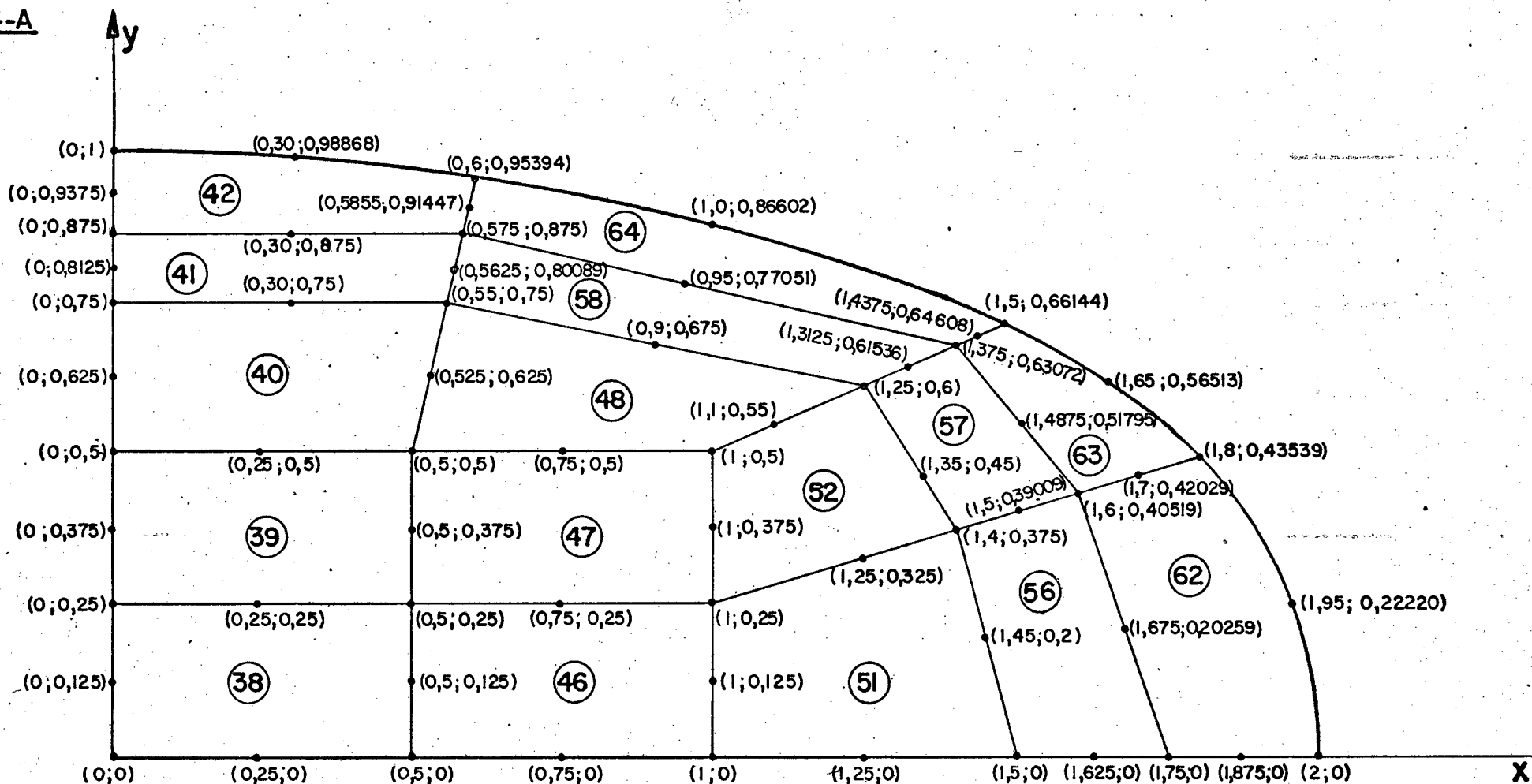
MODELO ELÍPTICO COM 48 ELEMENTOS  
DETALHAMENTO DAS COORDENADAS NODAIS

ANEXO 4



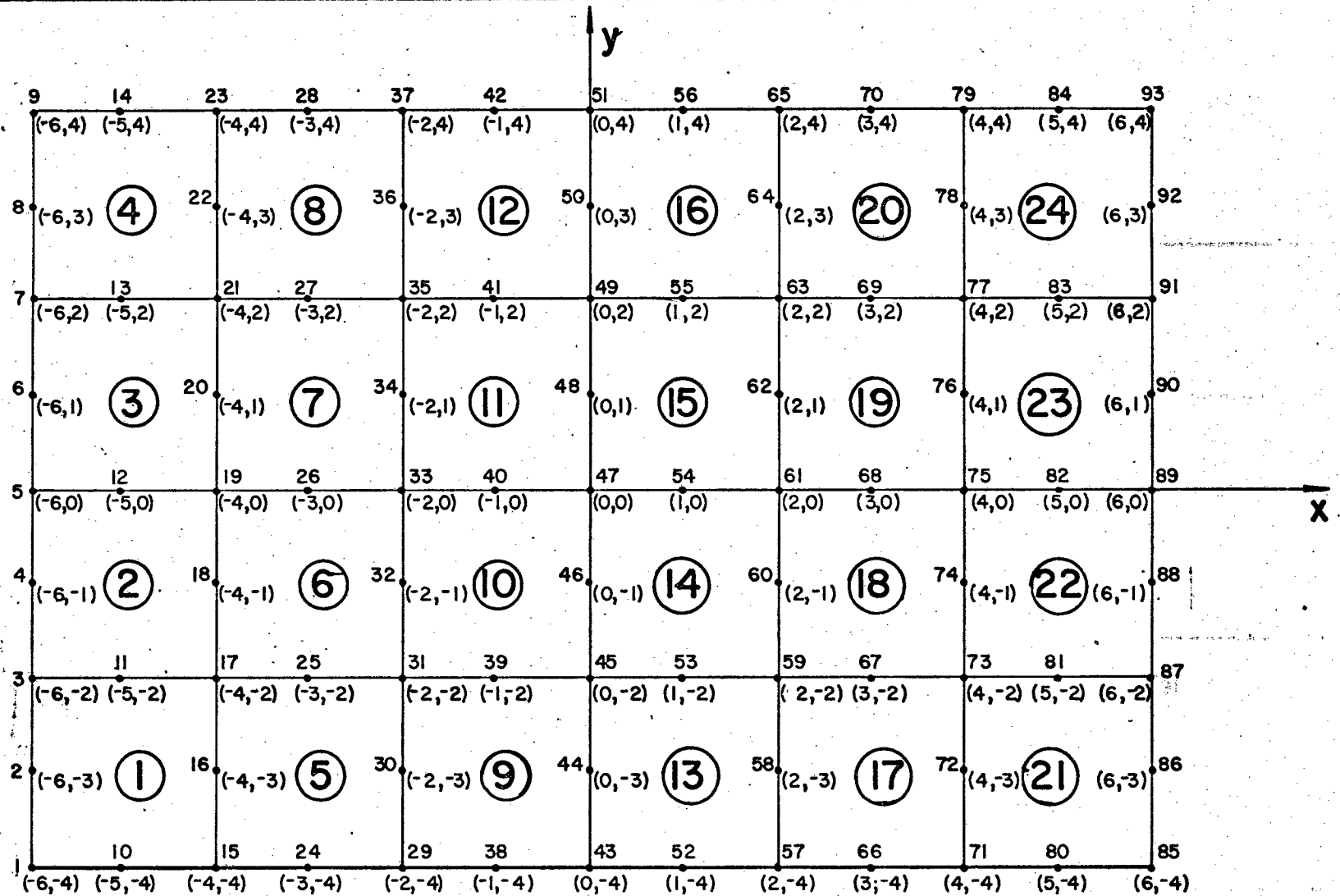
MODELO ELÍPTICO COM 64 ELEMENTOS  
MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

## ANEXO 4-A



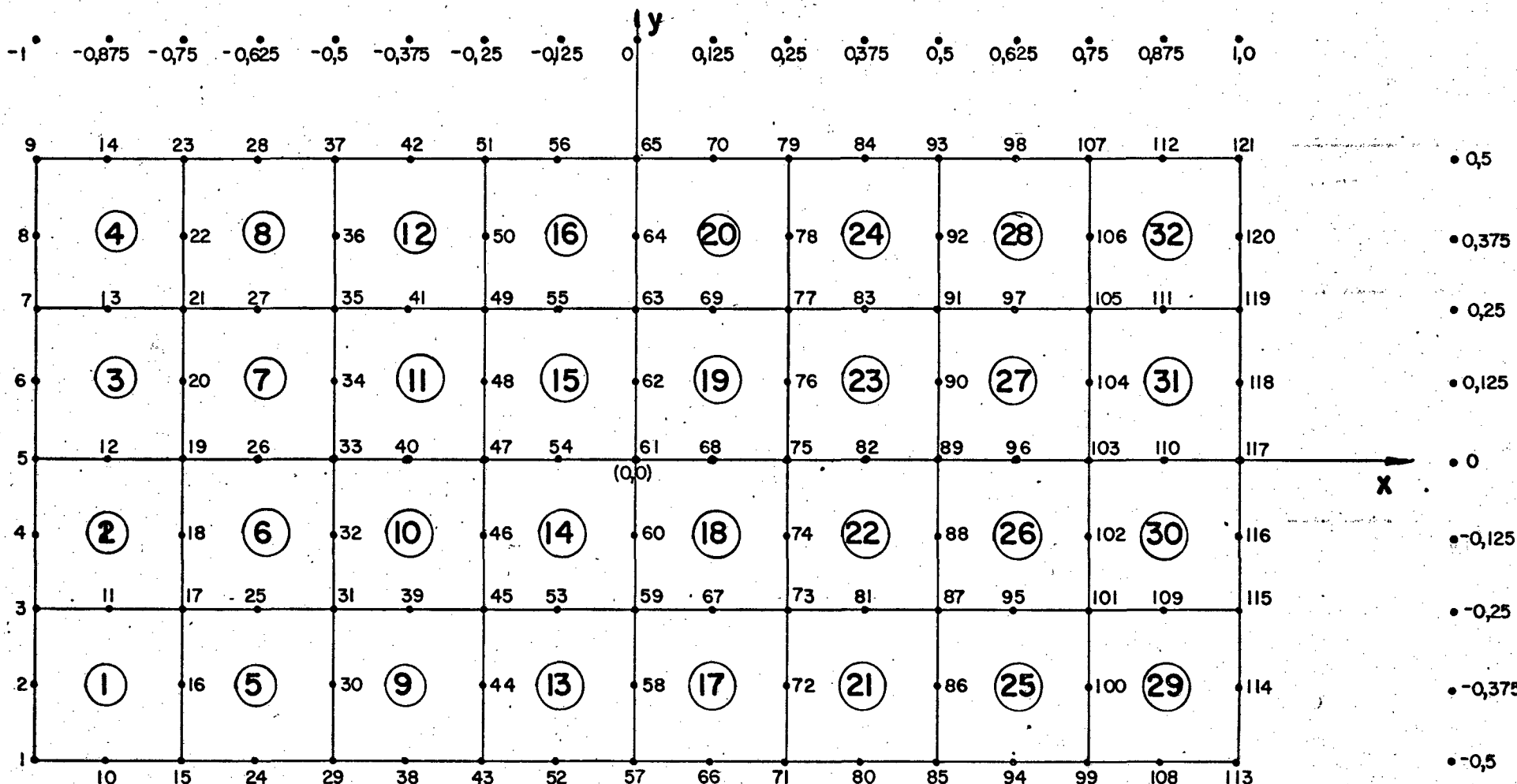
MODELO ELÍPTICO COM 64 ELEMENTOS  
DETALHAMENTO DAS COORDENADAS NODAIS

**ANEXO 5**



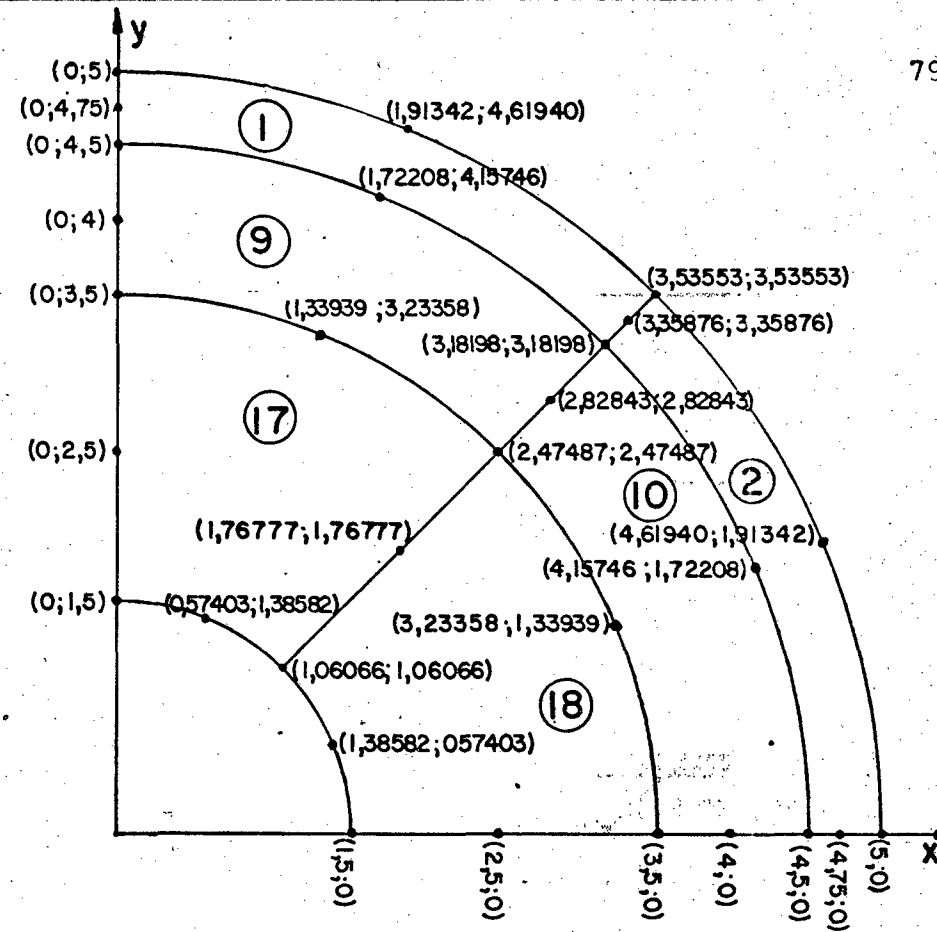
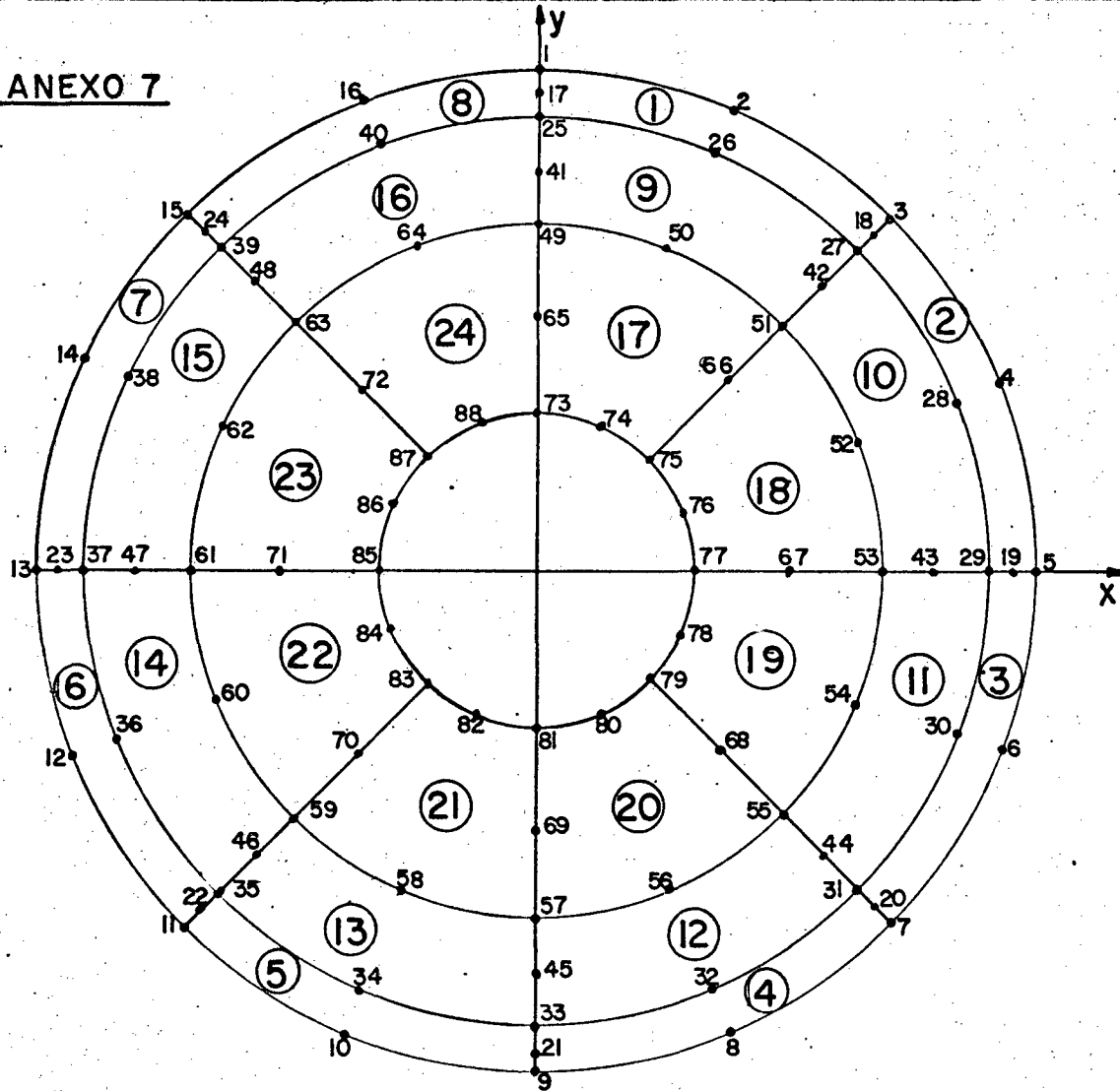
**MODELO RETANGULAR COM 24 ELEMENTOS**  
**MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMETRICOS**

**ANEXO 6**



**MODELO RETANGULAR COM 32 ELEMENTOS**  
**MALHA DE ELEM. FINITOS ISOPARAMÉTRICOS**

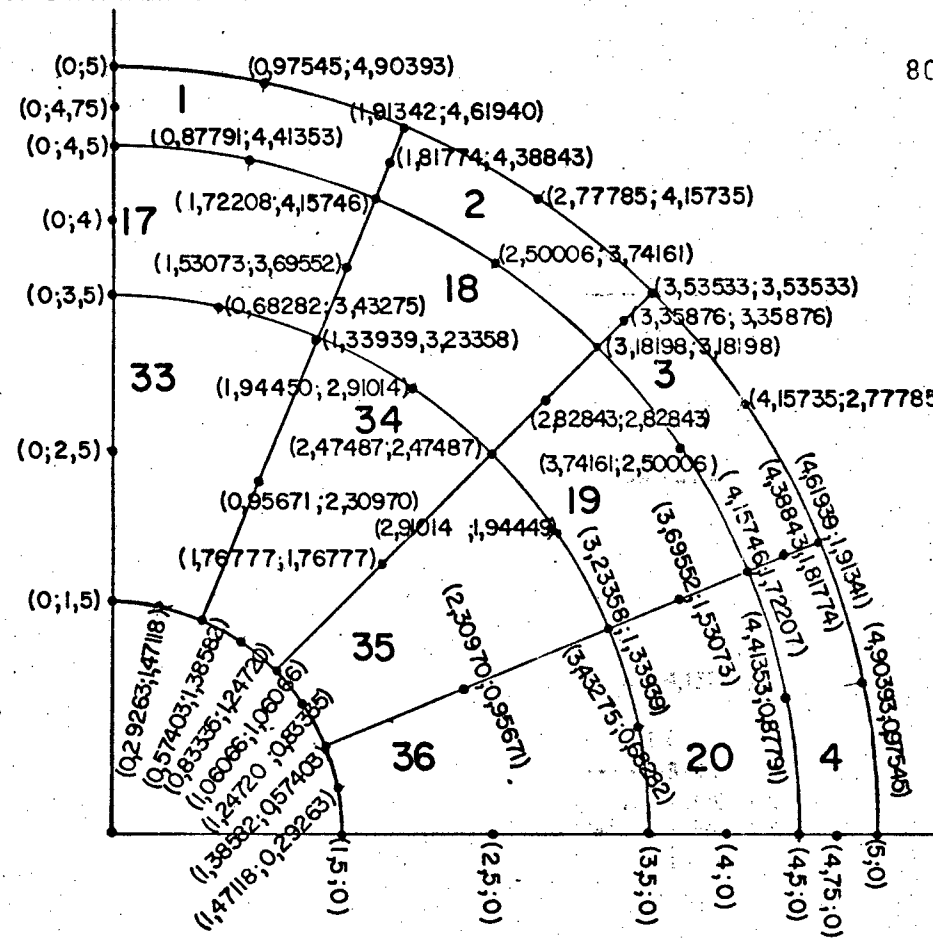
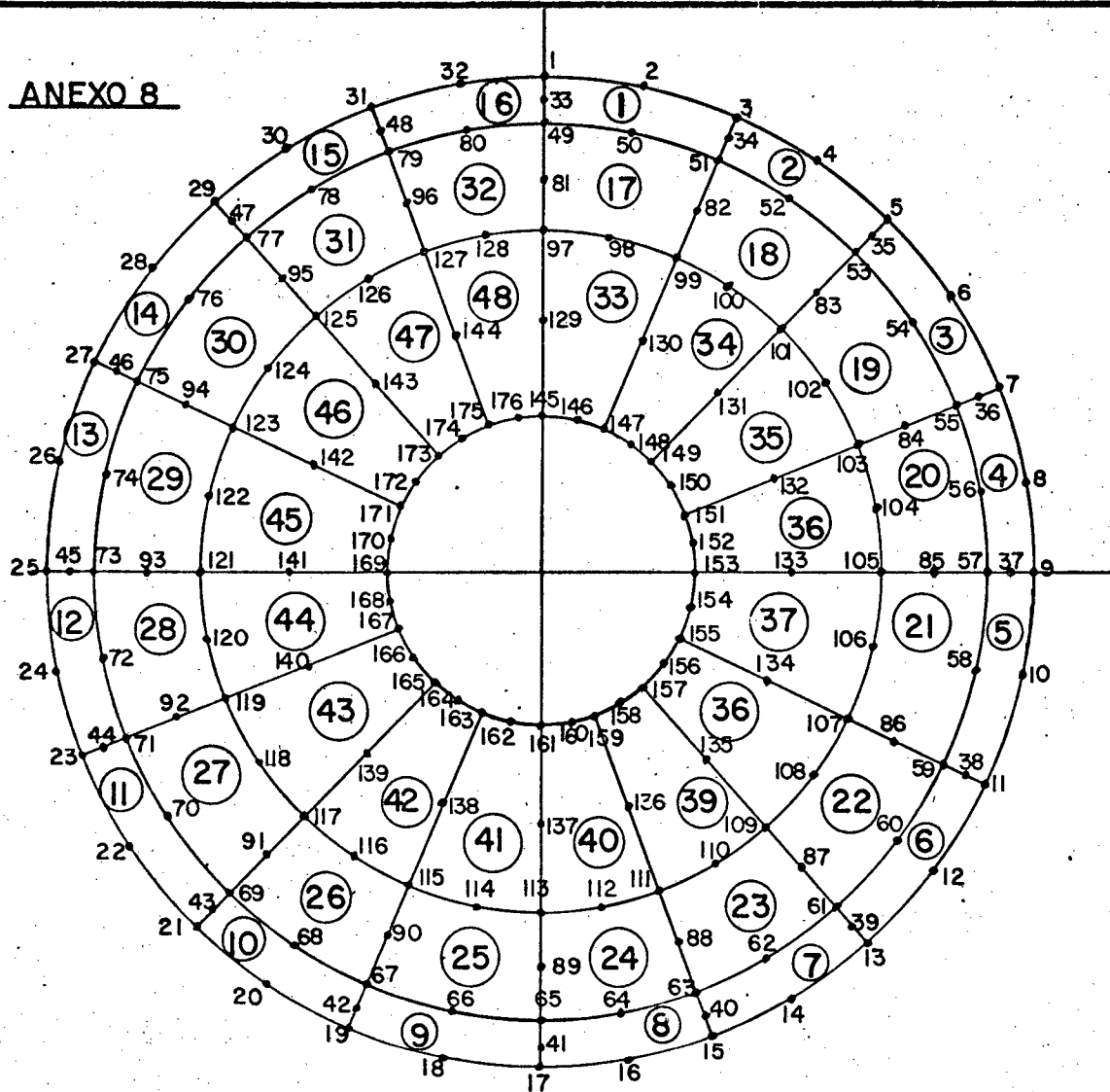
**ANEXO 7**



**MODELO CIRCULAR VAZADO COM 24 ELEMENTOS  
MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS**

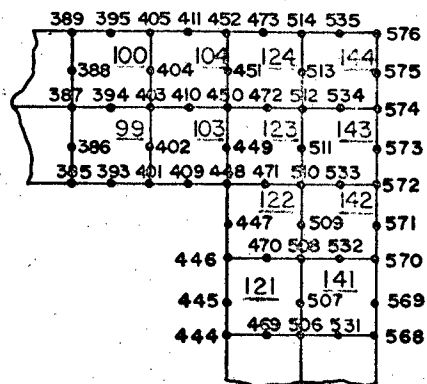
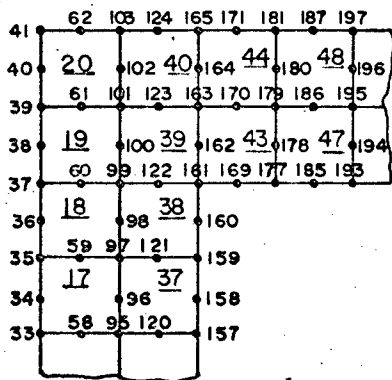


**ANEXO 8**

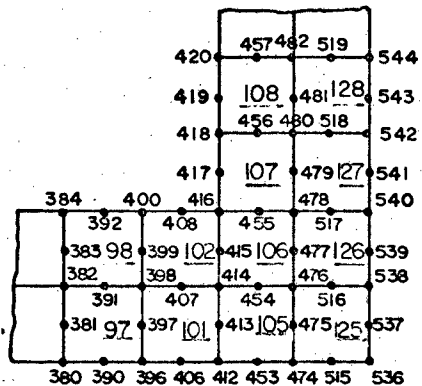
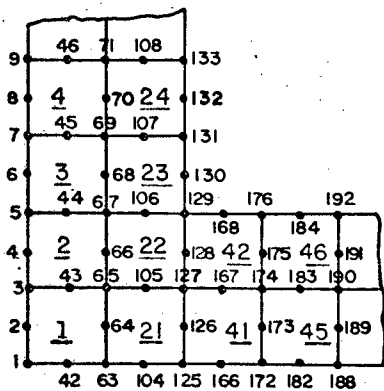


**MODELO CIRCULAR VAZADO COM 48 ELEMENTOS  
MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTR.**

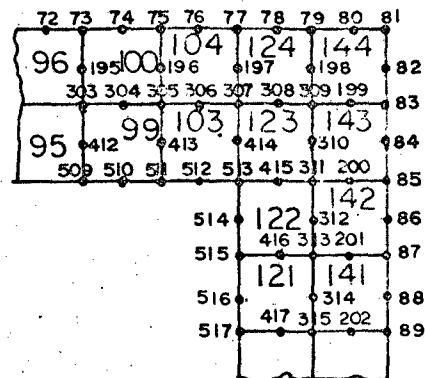
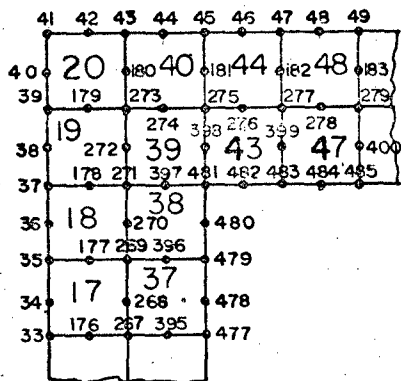
**ANEXO 9**



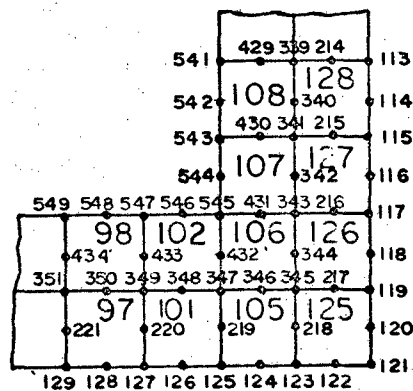
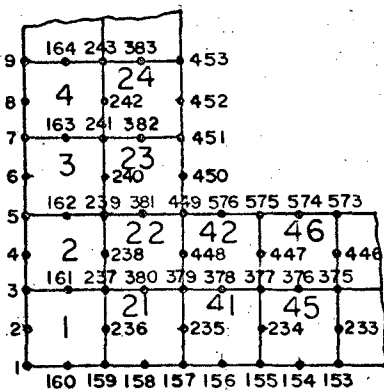
MODELO QUADRADO COM FURO  
 QUADRADO COM 144 ELEMENTOS  
 MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

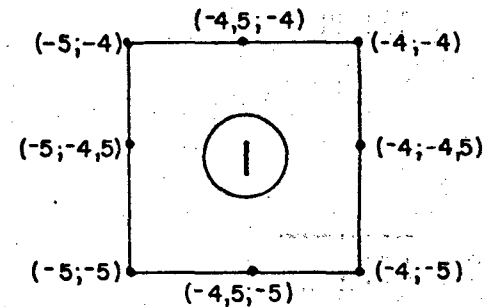
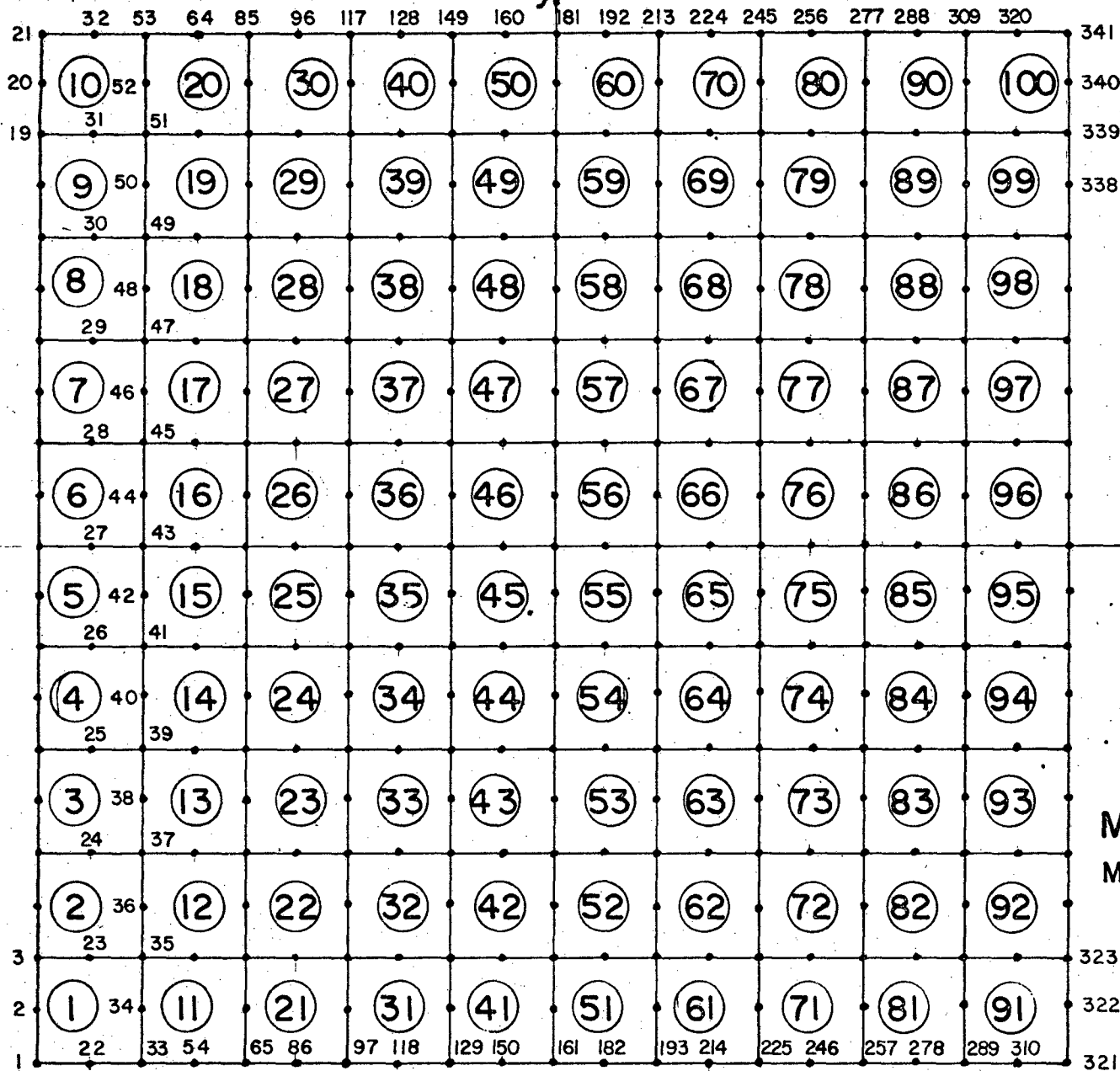


**ANEXO 10**



**MODELO QUADRADO COM FURO**  
**QUADRADO COM 144 ELEMENTOS**  
 MALHA DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS  
 (NOVA ORDENAÇÃO DOS NODOS)





DETALHE TÍPICO DAS COORDENADAS DO ELEMENTO I

MODELO QUADRADO C/ 100 ELEM.  
MALHA DE ELEM. FINITOS ISOPARAMETRICO