

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**APLICAÇÃO DE UM PROCEDIMENTO PARA MINIMIZAÇÃO
DO PESO ESTRUTURAL DE PLACAS SANDUÍCHE**

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

PAULO ROBERTO LINZMAIER

Florianópolis, Setembro de 1992

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**APLICAÇÃO DE UM PROCEDIMENTO PARA MINIMIZAÇÃO
DO PESO ESTRUTURAL DE PLACAS SANDUÍCHE**

PAULO ROBERTO LINZMAIER

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA

sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Clovis Sperb de Barcellos, Ph.D. - Orientador

Berend Snoeijer, Dr. - Coordenador do Curso de Pós Graduação

BANCA EXAMINADORA

Carlos Alberto de Campos Selke, Ph.D.

Domingos Boechat Alves, Pós-Doctor

Edson da Rosa, Dr. Eng.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	vi
LISTA DE FIGURAS.....	vii
SIMBOLOGIA.....	ix
RESUMO.....	xiv
ABSTRACT	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação para otimização.....	1
1.2 Pequeno histórico dos métodos de otimização estrutural.....	1
1.2.1 Otimização estrutural antes de 1958	2
1.2.2 Programação matemática e elementos finitos	2
1.2.3 Critério de otimalidade	3
1.2.4 Combinação de conceitos de aproximação e métodos duais	4
1.2.5 Tendências atuais	5
1.3 Proposta de trabalho.....	6
1.3.1 Suporte da pesquisa	6
1.3.2 Proposta	7
2 O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO	8
2.1 Introdução.....	8
2.2 Conceitos fundamentais matemáticos.....	9
2.2.1 Definição do problema de otimização	9
2.2.2 Forma adequada do problema	9
2.2.3 Hamiltoniano, problema linear conjugado e existência de solução	11
2.2.4 Elemento finito físico	12
2.3 Procedimento de otimização.....	15
2.3.1 Introdução	15
2.3.2 Índice de performance, restrições e discretização	16
2.3.3 Dedução das condições de ótimo	17
2.4 Resumo e observações.....	20

2.4.1	Resumo	20
2.4.2	Observações sobre o Método	21
3	APLICAÇÃO DO MÉTODO À OTIMIZAÇÃO DE PLACAS	22
3.1	Introdução.....	22
3.2	Definição do problema.....	22
3.2.1	Equações de Placas	22
3.2.2	Montagem do Problema	25
3.2.3	Colocação do Problema na Forma Adequada	26
3.3	Condições de ótimo.....	27
3.3.1	Funcional aumentado	27
3.3.2	Condições de Pontryagin	28
3.3.3	Expressão final para o ótimo	30
3.4	Discretização.....	33
3.5	Resumo do capítulo.....	37
4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	38
4.1	Introdução.....	38
4.2	Equações algébricas.....	38
4.3	Estratégia de solução.....	39
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	44
5.1	Introdução.....	44
5.2	Exemplos.....	46
5.2.1	Exemplo 1. Viga em balanço	46
5.2.2	Exemplo 2. Viga engastada	49
5.2.3	Exemplo 3. Viga simplesmente apoiada.....	52
5.2.4	Exemplo 4. Placa em balanço	55
5.2.5	Exemplo 5. Placa engastada nos 4 lados.....	58
5.2.6	Exemplo 6. Placa simplesmente apoiada nos 4 lados.....	61
5.2.7	Exemplo 7. Placa circular engastada.....	64
5.2.8	Exemplo 8. Placa circular simplesmente apoiada	67
5.2.9	Exemplo 9. Placa trapezoidal	70

5.3 Exemplos adicionais.....	73
5.4 Conclusões do capítulo.....	77
6 CONCLUSÕES	80
6.1 Resumo do trabalho.....	80
6.2 Conclusões.....	81
6.3 Recomendações para trabalhos futuros.....	81
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	82

LISTA DE TABELAS

- Tabela 01 - Dados de geometria e materiais para viga em balanço
- Tabela 02 - Histórico do processo iterativo para viga em balanço
- Tabela 03 - Espessuras na configuração otimizada da viga em balanço
- Tabela 04 - Dados de geometria e materiais para viga bi-engastada
- Tabela 05 - Histórico do processo iterativo para viga bi-engastada
- Tabela 06 - Espessuras nodais na configuração otimizada da viga bi-engastada
- Tabela 07 - Dados de geometria e materiais para viga simplesmente apoiada
- Tabela 08 - Histórico do processo iterativo para viga simplesmente apoiada
- Tabela 09 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa simplesmente apoiada
- Tabela 10 - Dados de geometria e materiais para placa engastada
- Tabela 11 - Histórico do processo iterativo para placa em balanço
- Tabela 12 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa em balanço
- Tabela 13 - Dados de geometria e materiais para placa engastada
- Tabela 14 - Histórico do processo iterativo para placa engastada
- Tabela 15 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa engastada
- Tabela 16 - Dados de geometria e materiais para placa simplesmente apoiada
- Tabela 17 - Histórico do processo iterativo para placa simplesmente apoiada
- Tabela 18 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa simplesmente apoiada
- Tabela 19 - Dados de geometria e materiais para placa circular engastada
- Tabela 20 - Histórico do processo iterativo para placa circular engastada
- Tabela 21 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa circular engastada
- Tabela 22 - Dados de geometria e materiais para placa circular simplesmente apoiada
- Tabela 23 - Histórico do processo iterativo para placa circular simplesmente apoiada
- Tabela 24 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa circular simplesmente apoiada
- Tabela 25 - Dados de geometria e materiais para placa trapezoidal
- Tabela 26 - Histórico do processo iterativo para placa trapezoidal
- Tabela 27 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa trapezoidal
- Tabela 28 - Redução da massa total e desvio padrão percentual das energias Lagrangeanas para os diversos tipos de placas sanduíche e condições de contorno

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1 - Domínio e contorno da região D
- Figura 2.2 - Estrutura discretizada em elementos finitos de espessura constante
- Figura 2.3 - Estrutura discretizada em elementos finitos de espessura variável
- Figura 2.4 - Função $u_p(x, y)$, contínua por partes
- Figura 2.5 - Domínio discretizado em elementos finitos físicos e matemáticos
- Figura 3.1 - a) Placa sanduíche
- Figura 3.1 - b) Placa homogênea
- Figura 3.2 - Solicitações, deflexões e rotações
- Figura 3.3 - a) Placa inicial
- Figura 3.3 - b) Placa otimizada
- Figura 4.1 - Fluxograma do programa de otimização
- Figura 5.1 - Configuração inicial da viga sanduíche em balanço
- Figura 5.2 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos
- Figura 5.3 - Gráfico volume x iterações para viga em balanço
- Figura 5.4 - Configuração otimizada das espessuras da face da viga em balanço
- Figura 5.5 - Configuração inicial da viga sanduíche bi-engastada
- Figura 5.6 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos
- Figura 5.7 - Gráfico volume x iterações para viga bi-engastada
- Figura 5.8 - Configuração otimizada das espessuras da face da viga engastada
- Figura 5.9 - Configuração inicial da viga simplesmente apoiada
- Figura 5.10 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos
- Figura 5.11 - Gráfico volume x iterações para viga simplesmente apoiada
- Figura 5.12 - Configuração otimizada das espessuras da face da viga simplesmente apoiada
- Figura 5.13 - Configuração inicial para placa sanduíche em balanço
- Figura 5.14 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos
- Figura 5.15 - Gráfico volume x iterações para placa em balanço
- Figura 5.16 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço
- Figura 5.17 - Configuração inicial para placa sanduíche engastada
- Figura 5.18 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos
- Figura 5.19 - Gráfico volume x iterações para placa engastada
- Figura 5.20 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa engastada

Figura 5.21 - Configuração inicial para placa sanduíche simplesmente apoiada

Figura 5.22 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Figura 5.23 - Gráfico volume x iterações para placa simplesmente apoiada

Figura 5.24 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa simplesmente apoiada

Figura 5.25 - Configuração inicial para placa sanduíche circular engastada

Figura 5.26 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Figura 5.27 - Gráfico volume x iterações para placa circular engastada

Figura 5.28 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa circular engastada

Figura 5.29 - Configuração inicial para placa sanduíche circular simplesmente apoiada

Figura 5.30 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Figura 5.31 - Gráfico volume x iterações para placa circular simplesmente apoiada

Figura 5.32 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa circular
simplesmente apoiada

Figura 5.33 - Configuração inicial para placa sanduíche trapezoidal

Figura 5.34 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Figura 5.35 - Gráfico volume x iterações para placa trapezoidal

Figura 5.36 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa trapezoidal

Figura 5.37 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço com
interpolação linear na espessura

Figura 5.38 - Malha com 9 elementos finitos físicos e 36 elementos matemáticos para o caso
da placa em balanço

Figura 5.39 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço com 9
elementos físicos e 36 elementos matemáticos. Interpolação linear na espessura.
Redução de massa 84,0%

Figura 5.40 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço. Espessura
constante em cada elemento físico. Redução de massa 83,1 %

Figura 5.41 - Convergência para o ótimo. Placa em balanço com diferentes interpolações e
número de elementos físicos

Figura 5.42 - Configuração otimizada das espessuras da face da para em balanço com 9
elementos físicos. Espessura mínima de 0,5 mm. redução de massa 69,4 %

Figura 5.43 - Malha com 8 elementos físicos e 32 matemáticos da placa circular engastada

Figura 5.44 - Configuração otimizada das espessuras da face para placa circular engastada
com 8 elementos físicos. Interpolação linear. redução de 86,5% da massa

SIMBOLOGIA

Alfabeto Latino:

a	largura da placa
b	comprimento da placa
B_i	termos para simplificar dedução nas equações (3.25)
B_i'	termos para simplificar dedução nas equações (3.25)
\mathbf{B}	matriz com derivadas das funções de interpolação
c	comprimento do lado menor da placa trapezoidal
C	constante multiplicativa
C_1	constante com propriedades geométricas e de material
C_2	constante com propriedade de material
C_3	integral de área
C_{3kj}	integral de área referente ao elemento físico k e espessura j
dx	diferencial em x
dy	diferencial em y
D	rigidez da placa
\mathbf{D}_b	matriz com propriedades de material da placa
\mathbf{D}_m	matriz com propriedades geométricas da placa
d_{kj}	espessura associada ao elemento físico k no nó j
D	domínio da equação diferencial
D_k	subdomínio de D
D_l	subdomínio de D
∂D	contorno do domínio D
D_h	segmento do contorno ∂D
∂D_{kl}	contorno entre os subdomínios D_k e D_l
E	módulo de elasticidade
\mathbf{f}	vetor das funções contínuas
f_i	função contínua
F	funcional da integral I a minimizar
\mathbf{g}	vetor das funções contínuas
g_i	função contínua
G	módulo de cisalhamento

G_x	constante da equação constitutiva de placa
G_y	constante da equação constitutiva de placa
G_{xz}	módulo de cisalhamento transversal
G_{yz}	módulo de cisalhamento longitudinal
H	Hamiltoniano
h	espessura total da placa, capítulo 5
h_c	espessura do núcleo da placa sanduíche (“core”)
h_s	espessura da camada estrutural ou lâmina externa da placa sanduíche
h_l	espessura da placa homogênea
h_{kj}^1	espessura modificada
h_{kj}^0	espessura da iteração anterior
$h(x,y)$	função distribuição de espessuras
$h_k(x,y)$	função distribuição de espessuras no elemento físico
I	integral do funcional para minimização
I	termo inercial na equação do movimento da placa, capítulo 3
J_0	índice de performance, função objetivo, funcional
J	funcional aumentado
k	fator de correção do cisalhamento
\mathbf{K}	matriz de rigidez
\mathbf{K}_{ot}	matriz de rigidez de otimização
l	comprimento total do contorno
\bar{L}	desvio padrão das energias Lagrangeanas
\bar{L}_r	desvio padrão das energias Lagrangeanas na configuração inicial ou de referência
L_{kj}	energia Lagrangeana associada a espessura nodal j do elemento físico k .
L_M	valor médio de todas as energias Lagrangeanas
L	operador diferencial linear
L_{Max}	maior energia Lagrangeana entre todos os elementos físicos
L_{Min}	menor energia Lagrangeana entre todos os elementos físicos
$L_p(D)$	espaço das funções integráveis segundo Lebesgue em D
m	número de variáveis de controle
m	unidade de comprimento, metro, no capítulo 5

ma	constante com propriedades geométricas e de material
mb	constante com propriedades geométricas e de material
M	termo inercial na equação do movimento da placa
M	matriz massa
M_{ot}	matriz massa de otimização
M _{xx}	intensidade de momento de flexão
M _{yy}	intensidade de momento de flexão
M _{xy}	intensidade de momento de torção
n	número de equações diferenciais
nσ _x	cosseno diretor
nσ _y	cosseno diretor
N	número subdomínios de D e de elementos físicos
N	unidade de força Newton, no capítulo 5
N	matriz com funções de interpolação
NE	número de espessuras nodais
N	número de subdivisões do contorno ∂D
Q _x	intensidade de força cisalhante no plano de normal x
Q _y	intensidade de força cisalhante no plano de normal y
q	carga distribuída
r	raio da placa circular
R	fator de incremento da espessura
U	espaço prescrito das variáveis de projeto
u	variável de projeto
u _j	variável de controle (função mensurável)
u _j	valor nodal da função up
u	vetor das variáveis de controle
up	função particular contínua por partes
VIN	volume inicial do modelo
VOL	volume da iteração corrente
x	variável independente, coordenadas
x	autovetor
x_k	autovetor referente ao elemento físico k
w	variável independente, deflexão na direção z

W_k	termo da equação da condição de ótimo envolvendo rigidez
W_M	termo da equação da condição de ótimo envolvendo massa
W_p^1	espaço de Sobolev
y	variável independente, coordenadas
z	variável independente, coordenadas do eixo vertical
z_i	variável de estado
\mathbf{z}	vetor das variáveis de estado

Alfabeto Grego:

α_h	funções em L_p
α_{kj}	parâmetro de ajuste de espessura para frequência
β	fator para amenizar de ajuste de frequência
γ	função multiplicador de Lagrange
λ_i	função definida em D
$\boldsymbol{\lambda}$	vetor das funções λ_i
$\Lambda_{hi}(\boldsymbol{\sigma})$	função das condições de contorno do problema linear conjugado
μ_i	função definida em D
$\boldsymbol{\mu}$	vetor das funções μ_i
ν	número das relações para a condição de contorno
ν	coeficiente de Poisson
Ω_0	frequência natural do passo anterior
Ω	frequência natural
ϕ_j	função de interpolação para espessura
$\phi_j(x,y)$	funções de interpolação
ϕ_h	funções em L_K
ψ_x	rotação x
ψ_y	rotação y
$\boldsymbol{\Psi}$	vetor das funções de interpolação
ρ	densidade do material, capítulo 2
ρ	densidade do material na placa homogênea, capítulo 3
ρ_s	densidade do material das lâminas

ρ_c	densidade do material do “core”
σ	parâmetro de comprimento de arco
ξ	índice das relações de condições de contorno

Índices

h	índice das partições do contorno ∂D
i	índice das variáveis de estado
j	índice das variáveis de controle, capítulo 2
j	índice das espessuras nodais
$\{i\}_h$	conjunto dos índices das variáveis de estado que tem valores definido no contorno
k	índice de subdomínios e do elemento físico
p	índice do espaço de Sobolev
q	índice do espaço de Sobolev

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo e aplicação de um método de otimização estrutural. Esse método reúne técnicas da teoria de controle ótimo e elementos finitos para obter um procedimento que oferece suporte teórico quanto às condições de ótimo a serem satisfeitas e abrangência de aplicação quanto ao tipo e tamanho do problema estrutural considerado. O procedimento é aqui utilizado para deduzir as condições de ótimo do problema de peso mínimo de placas homogêneas semi-espessas e placas sanduíche, ambas com restrição na frequência fundamental de vibração. Vários exemplos de placas sanduíche são testados e analisados.

ABSTRACT

This research follows the structural optimization method study and application. The method joins the techniques of the optimal control theory and finite elements to obtain a procedure that offers theoretical basis for the optimality conditions to be satisfied and, possibility of many applications that refers to the kind and size of the structural problem are considered. The procedure is, here, employed to derive the optimality conditions for the minimum weight problem of thick homogeneous plate and sandwich plate, both with constraint in the fundamental vibrational frequency. Various examples of sandwich plates are tested and analysed.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Motivação para otimização

A atividade de projeto em engenharia mecânica se resume basicamente na escolha adequada de materiais, disposição espacial e dimensões dos componentes integrantes de um sistema mecânico idealizado para cumprir determinada função. Várias são as alternativas para um projeto aceitável e, portanto, uma escolha final deve ser feita quanto ao projeto particular a ser adotado.

A aplicação de rotinas matemáticas de otimização a modelos mecânicos e a crescente capacidade computacional oferecem uma ferramenta poderosa para a escolha do projeto final. Baseado num critério adotado pelo projetista, o computador pode auxiliar este na procura de soluções específicas. Por exemplo, dentre vários projetos possíveis de serem adotados pode-se escolher aquele que tenha um custo de fabricação mínimo, ou aquele de menor peso, ou ainda, o de máxima resistência.

Dá-se o nome de otimização do projeto mecânico ao procedimento de análise e dimensionamento que visa modificar um sistema mecânico de modo a levar algumas de suas quantidades relevantes como peso, resistência, deslocamentos, etc. a valores máximos ou mínimos, procurando obedecer restrições em outras quantidades importantes como dimensões, frequência, tensões, etc.

Na área da mecânica estrutural é comum a preocupação em se diminuir o peso de estruturas sem alterar algumas características de resistência e/ou comportamento dinâmico, particularmente em aplicações aeroespaciais. Esse tipo de aplicação foi e tem sido um dos grandes motivadores do desenvolvimento dos métodos de otimização estrutural. Nas últimas décadas, o crescimento do poder computacional, menor custo de operação e a existência de uma capacidade de análise abrangente e confiável, permitiram que as pesquisas nessa área se intensificassem. A aplicação crescente dos métodos de otimização estrutural nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica Naval, Aeroespacial, aumenta a importância do entendimento e utilização destes métodos na prática, Schmit (1984).

1.2 Pequeno histórico dos métodos de otimização estrutural

A pesquisa e a aplicação de técnicas de otimização na área estrutural ocorreu em períodos bem definidos de desenvolvimento. Ao longo dos últimos 40 anos, estes períodos podem ser

caracterizados pelo tipo de abordagem empregada na solução dos problemas de otimização de estruturas e estão distribuídos em: estudos sobre otimização antes de 1958, programação matemática e elementos finitos (1960-1970), critério de otimalidade (1970-1980), combinação de conceitos de aproximação e métodos duais (início dos anos 80) e tendências atuais (1985 em diante).

1.2.1 Otimização estrutural antes de 1958

Schmit (1981) descreve as principais aplicações e técnicas empregadas na otimização estrutural antes de 1958. Os trabalhos representativos dessa época abordavam: “layout” de peso mínimo, projeto ótimo de componentes estruturais e projeto de peso mínimo de sistemas estruturais simples.

Layout de peso mínimo. Os primeiros trabalhos em otimização estrutural foram feitos por Maxwell em 1869 e ampliados por Michell em 1904. Estes, abordaram a teoria de “layout”, que procura arranjar os membros estruturais uniaxiais de forma a obter uma estrutura de mínimo peso para dadas condições de carga e o tipo de material. Embora altamente idealizados estes trabalhos oferecem uma base para os problemas de otimização de treliças.

Projeto ótimo de componentes estruturais. O início do desenvolvimento de projeto ótimo de componentes estruturais se deu durante a Segunda Guerra Mundial e se estendeu pelos anos 50's com aplicações em projetos de peso mínimo para componentes aeroespaciais, tais como colunas e painéis enrijecidos. A abordagem básica seguida por estes trabalhos era o modo de falha simultâneo, no qual o projeto ótimo é atingido quando cada componentes da estrutura atinge o limite de resistência simultaneamente;

Projeto de peso mínimo para sistemas estruturais simples. Os trabalhos abordavam a minimização do peso de pórticos e treliças, datando do início dos anos 50. Estes utilizavam a filosofia de projeto do colapso plástico, que consiste em minimizar o peso enquanto prevê o colapso plástico da estrutura quando esta é sujeita a condições de sobrecarga. Estes trabalhos são uma das primeiras aplicações dos métodos de programação matemática linear em otimização estrutural.

1.2.2 Programação matemática e elementos finitos (1960-1970)

Em 1960 Schmit estabelece uma nova abordagem para os problemas de otimização estrutural, introduzindo a ideia de acoplar a análise estrutural por elementos finitos e técnicas

de programação matemática não-linear. Existem dois aspectos importantes a serem ressaltados neste trabalho. Primeiro, Schmit demonstrou que o projeto de peso mínimo não é aquele onde todos os componentes estão totalmente tensionados, ou seja, próximos a tensão limite admissível. Isto vai contra a abordagem do modo de falha simultâneo, até então utilizada. Segundo, o uso de técnicas de programação matemática não linear ofereceu um meio de obter um projeto ótimo automático para uma grande classe de sistemas estruturais. Este trabalho serviu de base para o desenvolvimento dos métodos modernos e marcou o início da era da pesquisa do projeto otimizado baseado no computador.

No início de sua utilização na área estrutural as técnicas de programação matemática se mostraram bastante úteis para o projeto de numerosas estruturas de engenharia civil, aeronáutica e espacial. As principais variáveis de projeto como dimensões de membros de treliças, espessuras de cascas, anéis e cabos continuaram as mesmas só que passaram a ser consideradas simultaneamente. A estrutura passou a ser projetada para satisfazer múltiplas e frequentemente complexas restrições, incluindo resistência, deflexão, estabilidade, frequência, dentre outras, sob uma variedade de condições de carga. Muitos pesquisadores consideraram esta metodologia como uma mudança revolucionária na abordagem do projeto, Vanderplaat (1981).

No final dos anos 60, tornou-se aparente que a otimização estrutural baseada em programação matemática não linear e elementos finitos teria sérias dificuldades para projetar estruturas de grande porte. Os problemas mais simples muitas vezes precisavam ser analisados centenas de vezes durante a otimização. Se esta análise consumir muito tempo, como é o caso de grandes modelos em elementos finitos, o custo de otimização se torna rapidamente proibitivo. Nesta época, a experiência computacional adquirida indicou que as técnicas da programação matemática, aplicada ao projeto estrutural, se limitava a poucas variáveis de projeto e, portanto, apenas estruturas modestas podiam ser otimizadas satisfatoriamente. Em 1971 Gellatly, Berke e Gibson mostraram as limitações do conceito de otimização conforme definido por Schmit em 1960, Schmit (1981).

1.2.3 Critério de otimalidade (1970-1980)

Em 1968 surge uma abordagem alternativa para tratar problemas de otimização, critério de otimização. Prager (1968) mostra a forma analítica deste método e Venkayya, Khot e Reddy a forma numérica. Um bom resumo sobre o método pode ser encontrado em Khot e Berke (1984).

O método começa com o mesmo enunciado geral do problema de otimização dado pela programação matemática, no entanto, ao invés de se trabalhar diretamente na minimização da função objetivo, especifica-se um critério que deve ser satisfeito para que o projeto seja definido como ótimo. Um critério comumente utilizado é a de que a densidade de energia de deformação em cada membro da estrutura seja a mesma. A essência dessa abordagem está em primeiro estabelecer o critério que define o ótimo e então deduzir uma fórmula recursiva que leve, iterativamente à solução desejada.

Esta abordagem se mostrou bastante útil como ferramenta de projeto. Sua principal atração era a facilidade de programação por computador, a relativa independência do tamanho do problema, e o fato de geralmente oferecer um projeto ótimo com poucas análises detalhadas. Esta última característica representou um considerável avanço comparado com o número de análises necessárias para os métodos de programação matemática encontrarem a solução. Por causa desses melhoramentos na eficiência, considerável esforço de pesquisa foi devotado ao conceito de critério de otimalidade no início e no meio dos anos 70.

Estes dois conceitos de projeto ótimo competiam nesta época, embora nenhum deles oferecia clara superioridade para aplicação de problemas de interesse prático.

Programação matemática ofereceu uma ferramenta extremamente geral. Era atrativa do ponto de vista teórico já que nenhuma suposição era necessária acerca da natureza do ótimo. Podia-se simplesmente abordar o processo de projeto como um problema de minimização não linear restringido e deixar que o otimizador levasse até o extremo.

Critério de otimalidade não tinha base teórica clara. Era conhecido que esta técnica podia, em algumas ocasiões, levar a um projeto não ótimo e mesmo divergir da solução. No entanto, este comportamento estava geralmente associado a problemas testes especiais que pareciam ser mais acadêmicos do que aplicação prática. O mais importante é que critério de otimalidade oferecia uma solução para problemas de projeto mais práticos, um aspecto favorável apesar das limitações do método. As características dos dois métodos sugeriram uma natural separação do problema de projeto, onde o critério de otimalidade abordaria problemas com um grande número de variáveis e a programação matemática resolveria problemas de projetos de componentes. Vanderplaats (1981).

1.2.4 Combinação dos conceitos de aproximação e métodos duais

Antes de 1970 os principais obstáculos no desenvolvimento de um procedimento eficiente de otimização estrutural para grandes sistemas, baseado no uso de algoritmos de

programação matemática, estavam associados ao fato da formulação geral envolver um grande número de variáveis de projeto e um grande número de restrições, sendo estas, funções implícitas das variáveis de projeto.

Durante a década de 70 procurou-se acabar com estes obstáculos substituindo o problema básico por uma sequência de problemas explícitos aproximados relativamente pequenos, de modo a preservar as características essenciais do problema de otimização inicial. Isto foi feito com o uso dos seguintes conceitos de aproximação:

- a) a redução do número de variáveis independentes de projeto por meio de ligação "linkage";
- b) a redução temporária do número de restrições;
- c) a construção de uma aproximação explícita para as funções de restrição.

A introdução, por Schmit e Farshi em 1974, dos conceitos de aproximação permitiu utilizar os métodos de programação matemática para otimizar sistemas de maior porte. No início dos anos 80 os conceitos de aproximação foram combinados com métodos duais para criar um novo e poderoso método para o projeto de peso mínimo de sistemas estruturais. Métodos duais utilizam teoremas de dualidade como base para colocar problemas de otimização em formatos mais adequados e melhorar o processo de solução, por exemplo, um problema de minimização com equações de restrição com desigualdades (problema primal), pode ser transformado em um problema de maximização com restrição apenas na variável de projeto (problema dual), este último formato tem melhores características para uma solução mais efetiva, Luenberger (1969). A combinação de conceitos de aproximação com métodos duais levou a perspectiva de que para uma significativa classe de problemas de peso mínimo, os métodos de critério de otimalidade e programação matemática se unem num mesmo método com os aspectos positivos de cada um sendo mantidos. Schmit e Fleury (1982).

1.2.5 Tendências atuais

A metodologia moderna de otimização estrutural, baseada na união com a análise por elementos finitos, conceitos de aproximação e métodos duais, encontrou uma sólida fundação do entendimento teórico e experiência computacional, ao menos para o problema de dimensionamento tipo "sizing" sob carga estática, Schmit (1984). De um modo geral, na década de 80 os trabalhos em otimização estrutural voltaram-se para o estudo de técnicas para a otimização de estruturas de grande porte, Ahmed (1987). Alguns dos trabalhos nesta área abordam:

- a) integração de algoritmos de análise e otimização para obtenção do projeto, Haftka (1985);

- b) otimização de forma, Haftka (1986) e Ding (1986);
- c) análise de sensibilidade em larga escala;
- d) otimização de topologia, Bendsoe e Kikuchi (1988);
- e) otimização multinível;
- f) integração de sistemas de otimização de topologia, otimização de forma e "sizing", Olhoff (1991).

A pesquisa intensiva em técnicas de otimização estrutural está fazendo com que estas ganhem maior aceitação na prática da engenharia. Embora a otimização estrutural não tenha alcançado ainda a aceitabilidade atingida por elementos finitos é crescente o número de sistemas de otimização desenvolvidos e utilizados principalmente na indústria automotiva, Balasubramanian (1991), e aeroespacial.

1.3 Proposta de trabalho

1.3.1 Suporte da pesquisa

Acompanhando a tendência da década de 70 no desenvolvimento de técnicas para a melhora de desempenho dos procedimentos de otimização disponíveis, Barcellos (1977) propõe um novo método de otimização estrutural. Nesta época, as técnicas de programação matemática eram aplicáveis aos mais diversos tipos de problemas, no entanto demandavam muito tempo e memória de computador mesmo para estruturas de médio porte. Os procedimentos de otimização analíticos envolvendo equações diferenciais e variáveis de projeto contínuas utilizavam cálculo variacional e teoria de controle. Estas abordagens eram convenientes para o entendimento teórico dos problemas de otimização e projeto de pequenas estruturas, mas não eram econômicas para estruturas de grande porte. Os procedimentos baseados em critério de otimização e na técnica dos elementos finitos eram restritos a problemas com espessura uniforme dentro dos elementos.

Procurando superar as limitações dos métodos utilizados até então, Barcellos (1977) desenvolve uma formulação para otimização estrutural geral o bastante para aceitar diversos tipos de elementos estruturais com variação interna na espessura e o suficientemente adequado para a utilização conjunta com os métodos de elementos finitos existentes, permitindo a aplicação para estruturas de grande porte. Outro aspecto inovativo é a dedução das condições de ótimo através da teoria de controle ótimo.

Os resultados apresentados se mostraram encorajadores para o problema de minimização da massa de elementos estruturais simples como hastes, vigas e colunas sanduíche. Foi ainda

sugerida uma formulação original para obtenção das condições necessárias de ótimo para placa em vibração livre. Devido a falta de equipamento computacional adequado, nesta época na UFSC, não foi possível a obtenção de resultados numéricos para o problema de placa. Somando a isto o fato do assunto ser bastante abrangente se verifica que o potencial de pesquisa do método não foi totalmente esgotado. Observando hoje a tendência que a otimização estrutural tomou durante a última década conclui-se que o método apresenta muitas características das abordagens mais recentes. A preocupação em lidar com sistemas de grande porte, a integração com o método de elementos finitos e a utilização de conceitos que reduzem o número de variáveis de projeto conforme desejado são alguns exemplos.

1.3.2 Proposta

Pelos aspectos acima citados se justifica a continuação do estudo e aplicação do método de otimização estrutural proposto por Barcellos (1977). O presente trabalho pretende dar sequência a aplicação do método utilizando-o para o problema de minimização da massa de placas homogêneas semi-espessas e placas sanduíche em vibração livre. Para o caso de placas homogêneas apenas as condições de ótimo são deduzidas. Para o caso de placas sanduíche vários exemplos numéricos são testados a partir da solução das condições de ótimo.

No problema de otimização de placas sanduíche se procura observar tanto as características do método para este tipo de aplicação como o comportamento dessas placas quando otimizadas. Do ponto de vista das características do método objetiva-se verificar dados de convergência, número de iterações para solução e facilidade na obtenção das condições de ótimo. Para o comportamento espera-se observar a diminuição da massa do sistema, a configuração otimizada e a variação destes aspectos com a mudança das condições de contorno e geometria.

Seguindo as metas estabelecidas a distribuição do trabalho se dá na seguinte forma: no Capítulo 2 são mostrados os conceitos e fundamentos matemáticos do método de otimização utilizado. No Capítulo 3 o procedimento proposto é empregado para a obtenção das condições de ótimo do problema de minimização da massa estrutural de placas homogêneas semi-espessas e placas sanduíche sujeita a restrição na frequência fundamental de vibração. O Capítulo 4 mostra os aspectos de implementação numérica do procedimento de otimização e solução por elementos finitos. No Capítulo 5 vários exemplos são testados para diversos formatos de placas sanduíche e condições de contorno. No Capítulo 6 são dadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO

2.1 Introdução

O principal interesse da atual pesquisa é implementar o procedimento de otimização elaborado por Barcellos (1977) ao caso de elementos de placa e observar o comportamento de diversos modelos de placas sanduíche submetidas à otimização. Para atingir os propósitos acima citados é necessário um bom entendimento do método empregado. Sendo assim, o objetivo deste capítulo é mostrar os principais conceitos, fundamentos e procedimentos matemáticos que estruturam o método.

Os problemas de otimização estrutural vêm sendo tratados basicamente por duas classes de métodos: os métodos baseados em programação matemática e os métodos baseados em critério de otimização ou critério de otimalidade. Os métodos de programação matemática são caracterizados por utilizar rotinas de procura de pontos extremos da função objetivo. Os métodos de critério de otimização fazem uso de princípios variacionais para obter expressões que forneçam as condições necessárias ao projeto ótimo.

No método utilizado, as condições de ótimo são deduzidas através da teoria de controle ótimo. Estas condições são então discretizadas para formar um conjunto de equações algébricas a ser resolvido. Esta abordagem do problema, caracteriza o método como pertencente a classe dos métodos de critério de otimização.

Para o processo de discretização das condições de ótimo o domínio do modelo estrutural deve ser subdividido em elementos finitos. Muitos problemas de otimização estrutural, onde a distribuição de espessura é tomada como variável de projeto, utilizam elementos finitos de espessura constante ao longo de cada elemento. Aqui emprega-se o conceito de elemento finito físico definido por Barcellos (1977). Com este conceito, a função distribuição de espessura do elemento estrutural é interpolada dentro de diversas sub-regiões do domínio, em cada uma dessas sub-regiões a espessura do elemento pode variar, permitindo uma melhor representação do perfil ótimo do modelo.

O capítulo inicia com a definição do formato geral do problema de otimização e sua modificação para uma forma adequada a aplicação. Segue-se a definição de hamiltoniano, problema linear conjugado e condição de existência do ótimo. Estas são definições matemáticas importantes que fundamentam o método. O conceito de elemento finito físico e o procedimento que leva às condições necessárias de ótimo são apresentados na sequência. As

explicações são dadas para o caso bidimensional, embora sejam válidas também para os casos multidimensionais.

2.2 Conceitos e fundamentos matemáticos

2.2.1 Definição do problema de otimização

Basicamente o tipo de problema de otimização a ser considerado consiste no de minimizar uma integral I , obedecendo a equação diferencial $Lw = 0$ (restrição de comportamento) e restrições na variável de projeto u (restrição geométrica).

A integral I representa a quantidade estrutural a ser otimizada. Esta pode ser qualquer valor que se queira ver diminuído na estrutura, por exemplo, peso ou volume, algum tipo de energia, amplitude de vibração, etc.

A equação diferencial $Lw = 0$ descreve o comportamento do sistema estrutural em estudo. L é um operador diferencial linear e w a variável independente. A equação pode representar por exemplo a vibração de uma viga, distensão de uma haste, deflexão de placa ou casca.

A variável de projeto u está implícita no operador L e é a função que define a configuração de espessuras do sistema estrutural. A variável u pode possuir restrições tanto no conjunto a qual pertence como nos seus valores máximo e mínimo.

Em resumo, o problema de otimização tratado pode ser enunciado da seguinte forma: Encontrar a função $u(x, y)$ tal que,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize a integral} & I, \\ \text{sujeito a equação} & Lw = 0, \\ \text{com a restrição} & u \in U, \end{array} \quad (2.1)$$

onde U é o espaço prescrito das variáveis de projeto.

Como exemplo de um problema de otimização estrutural se poderia ter: Minimizar o peso de uma viga engastada, obedecendo a equação diferencial de vibração, com a distribuição de espessuras sendo representada por funções pertencentes ao conjunto das funções lineares por partes.

2.2.2 Forma Adequada do Problema

A teoria matemática na qual o método de otimização de Barcellos é baseado foi proposta por Cesari (1969). Este, fornece teoremas de existência para problemas de otimização com

equações diferenciais e problemas lineares conjugados. Para obedecer os pressupostos desse trabalho, o problema de otimização deve ser colocado em uma forma matemática adequada, conforme definida por Cesari.

A forma adequada é obtida passando a equação diferencial do tipo $Lw = 0$ para a forma de Dieudonné-Rashevsky, que consiste em um ou mais conjuntos de equações diferenciais parciais de 1ª ordem. Além disso, na integral I e nas equações diferenciais as variáveis de estado e de controle devem ser identificadas para que o problema seja tratado do ponto de vista da teoria de controle ótimo.

Cesari (1969) define o problema de otimização como sendo o de minimizar uma integral.

$$I[\mathbf{z}, \mathbf{u}] = \int_D F(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \, dx dy \quad (2.2)$$

em um domínio fixo D do plano xy , com as equações diferenciais (2.3) na forma de Dieudonné-Rashevsky como restrições de comportamento, e ainda, restrições na variável de controle \mathbf{u} .

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = f_i(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial z_i}{\partial y} = g_i(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (2.3)$$

$x, y \in D, i = 1, \dots, n$.

Nas expressões acima tem-se que:

$\mathbf{z} = \mathbf{z}(x, y) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ são as variáveis de estado. Cada z_i é obtida da variável independente w e suas derivadas, e descrevem o estado do sistema. Supõe-se que todo z_i pertence ao espaço de Sobolev $W_p^1(D)$, portanto $z_i \in L_p(D)$, $\partial z_i / \partial x \in L_p(D)$, $\partial z_i / \partial y \in L_p(D)$, $p \geq 1, i = 1, \dots, n$.

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ são as variáveis de controle e correspondem às variáveis que determinam a configuração do sistema. $\mathbf{u}(x, y)$ pertence a um espaço controle prescrito U de dimensão m . Supõe-se que cada $u_j, j = 1, \dots, m$, é uma função mensurável em D . As variáveis \mathbf{u} e \mathbf{z} satisfazem os dois conjuntos de equações diferenciais parciais de 1ª ordem (2.3).

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ são funções contínuas com argumentos x, y, \mathbf{z} e \mathbf{u} . As condições de contorno das equações diferenciais são construídas a seguir.

Seja ∂D o contorno do domínio D . Supõe-se que ∂D possa ser subdividido em um

número finito de partes ∂D_h , $h = 1, \dots, N$ não sobrepostas. Estas partes podem ser chamadas de lados ∂D de D . Seja σ um parâmetro de comprimento de arco em ∂D , $0 \leq \sigma \leq l$, onde l é o comprimento total ao longo do contorno. Portanto $\sigma = \sigma(x, y)$ para $x, y \in \partial D$. Mais detalhes a respeito desse desenvolvimento pode ser encontrado em Cesari (1969).

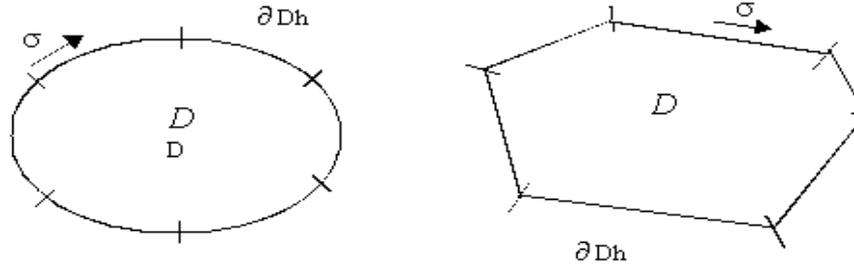


Figura 2.1 – Domínio e contorno da região D .

Denota-se $z_i(\sigma)$ ou $z_i(\sigma(x, y))$ os valores que as funções z_i assumem para $x, y \in \partial D$. Para cada contorno ∂D_h associa-se uma coleção de índices, $\{i\}_h$, que define quais componentes z_i de \mathbf{z} estão relacionados nas condições de contorno em ∂D_h . As condições de contorno são definidas então da seguinte forma: para todo ∂D_h , $h = 1, \dots, N$ define-se v relações do tipo

$$\sum_{i \in \{i\}_h} \alpha_{hi}^{(\xi)}(\sigma) z_i(\sigma) = \phi_h^{(\xi)}(\sigma) \quad (2.4)$$

$\sigma \in \partial D_h$, $\xi = 1, \dots, v$, onde $\alpha_{hi}^{(\xi)}$ são funções dadas em $L_{p'}(\partial D_h)$, $p' \geq p$. $\phi_h^{(\xi)}$ são funções dadas em $L_k(\partial D_h)$ com $1/k = 1/p' + 1/p$.

2.2.3 Hamiltoniano, problema linear conjugado e existência de solução

Hamiltoniano. Seja $\lambda(x, y) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\mu(x, y) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ qualquer par de funções definidas em D , onde cada λ_i e μ_i pertencem ao espaço de Sobolev $W_q^1(D)$, $1/q + 1/p = 1$, $i = 1, \dots, n$. O Hamiltoniano é definido como sendo uma função de valor real da forma,

$$H(x, y, \lambda, \mu, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n [\lambda_j f_j(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}) + \mu_j g_j(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u})] \quad (2.5)$$

$\mathbf{z}(x, y) = (z_1, \dots, z_n)$ e $\mathbf{u}(x, y) = (u_1, \dots, u_m)$ são respectivamente as variáveis de estado e de controle definidas anteriormente. $\mathbf{f}(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = (f_1, \dots, f_n)$ e $\mathbf{g}(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = (g_1, \dots, g_n)$ são funções contínuas de valor real.

Problema linear conjugado. Considere que o par de funções $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ e o Hamiltoniano H , satisfazem o sistema de n equações diferenciais parciais de 1ª ordem,

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} + \frac{\partial \mu_i}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial z_i} \quad (2.6)$$

mais condições de contorno. $i = 1, \dots, n$, $(x, y) \in D$. A equação diferencial (2.6), juntamente com as condições de contorno é dito ser o problema linear conjugado ao problema de otimização definido em (2.2).

Existência de solução. Dado o problema de minimizar a integral $I[\mathbf{z}, \mathbf{u}]$, o que equivale a encontrar o par \mathbf{z}, \mathbf{u} que minimiza o funcional I , com equações diferenciais como restrições de comportamento e restrições na variável de controle \mathbf{u} , L. Cesari [1969] prova que se existir um problema linear conjugado, com soluções $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, ao problema de otimização, então a condição necessária de Pontryagin é satisfeita. Em outras palavras, dado um problema de otimização, conforme definido, podendo-se extrair deste problema o seu problema linear conjugado com a respectiva solução $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$, então, as condições necessárias para o mínimo são satisfeitas, ou seja, é garantida a existência de mínimo. A prova deste teorema não será aqui demonstrada, podendo esta ser encontrada em Cesari (1969). O fato relevante é que o método está matematicamente bem fundamentado do ponto de vista da validade das condições de ótimo a serem obtidas.

O passo seguinte é adaptar os fundamentos matemáticos definidos ao problema de otimização estrutural e obter um procedimento que leve às condições de ótimo. A adaptação foi feita por Barcellos (1977) considera o fato de que muitas das funções empregadas em análise estrutural e elementos finitos pertencem a espaços matemáticos semelhantes aos definidos nos itens anteriores.

2.2.4 Elemento Finito Físico

A grande maioria dos problemas de otimização estrutural consiste em encontrar valores

adequados para as variáveis geométricas de forma a minimizar o peso de estruturas. No caso de elementos estruturais como vigas, placas, colunas e cascas, frequentemente as variáveis geométricas consideradas são as espessuras ao longo do elemento.

Em muitos problemas, este perfil de espessuras é obtido pela discretização da estrutura em elementos finitos de espessura constante em cada elemento. Neste caso, o perfil ótimo final é uma sequência de degraus descontínuos, resultando num projeto não adequado para propósitos reais, apenas fornecendo uma idéia da configuração ótima. Figura 2.2.

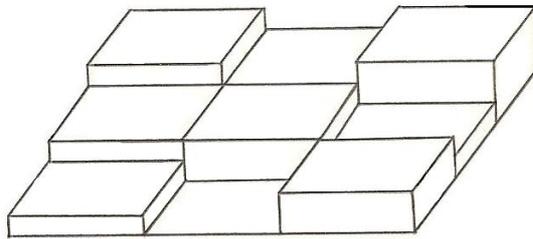


Figura 2.2 – Estrutura discretizada em elementos finitos de espessura constante.

Uma melhor representação pode ser dada por elementos finitos de espessura variável. No entanto, lidar com variação de espessura ao longo de cada elemento aumenta o número de espessuras nodais a determinar durante o processo de otimização, tornando o processo de solução mais demorado. Figura 2.3.

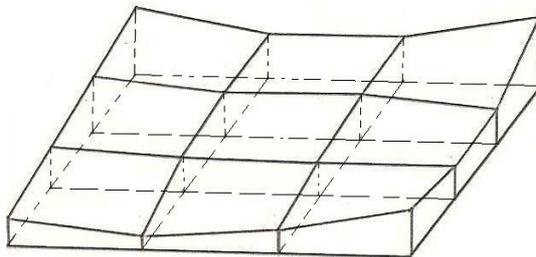


Figura 2.3 – Estrutura discretizada em elementos finitos de espessura variável.

Tem-se então a seguinte dificuldade: por um lado a utilização de elementos de espessura variável melhora a representação do projeto ótimo. Por outro, pode-se precisar de uma grande

quantidade de elementos finitos para a aproximação matemática do problema, e neste caso, o custo é aumentado por causa do número elevado de espessuras a serem encontradas. Procurando solucionar este problema, Barcellos (1997) define o conceito de **elementos finitos físicos**.

Seja D o domínio de definição do problema de otimização, ou seja, o domínio de atuação das equações diferenciais. Este domínio D é subdividido em N subdomínios D_k , $k = 1, \dots, N$ de tal modo que,

$$D = \cup D_k \quad \text{e} \quad D_k \cap D_l \equiv \emptyset \quad \text{se} \quad k \neq l \quad (2.7)$$

∂D_{kl} é o contorno entre os subdomínios D_k e D_l . Deve ser notado que os subdomínios acima não são os mesmos definidos pelo método de elementos finitos convencional.

Sabe-se que cada função u_j de $\mathbf{u}(x, y) = (u_1, u_2, u_p, \dots, u_m)$, é uma função mensurável em D . As funções contínuas por partes são mensuráveis, portanto, uma função particular $u_p(x, y)$ pode ser considerada como sendo contínua por partes. Assim, pode-se associar a cada subdomínio D_k , do domínio D , uma parte contínua da variável $u_p(x, y)$ ficando a descontinuidade no contorno ∂D_{kl} . Como, no caso estrutural, $u_p(x, y)$ pode representar uma função de distribuição de espessura no elemento, então $u_p(x, y)$ formará um perfil de espessuras contínuas por partes.

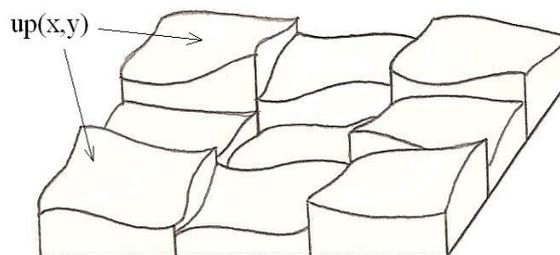


Figura 2.4. Função $u_p(x, y)$, contínua por partes

Definição. Um elemento finito físico é um pedaço de um elemento estrutural associado a um subdomínio D_k , onde u_p é definida de forma contínua. Portanto, o elemento finito físico

consiste num pedaço de viga, haste, placa, coluna ou casca que tem a priori definido o tipo de distribuição de espessura, ex. linear, quadrático, cúbico, etc.

A restrição imposta à função variável $u_p(x, y)$, para ser contínua por partes em D e contínua em D_k , define apenas a sua estrutura matemática. Resta encontrar uma função específica $u_p(x, y)$ que represente a configuração ótima. Esta definição será dada pelos valores nodais de u_p , que são os valores nodais de espessuras a ser encontrados dentro de cada elemento físico.

O conceito de elemento finito físico permite que se faça uma discretização para o perfil de espessuras independente da discretização para o problema de análise estrutural. Sendo assim, utilizam-se tantos elementos físicos quantos forem necessários para atender critérios definidos pelo projetista, enquanto também se utilizam tantos elementos matemáticos quantos forem necessários para o problema de análise, ficando apenas a restrição de que o número de elementos físicos seja menor que o número de elementos matemáticos e não haver um elemento matemático pertencente a dois elementos físicos ao mesmo tempo, figura 2.5.

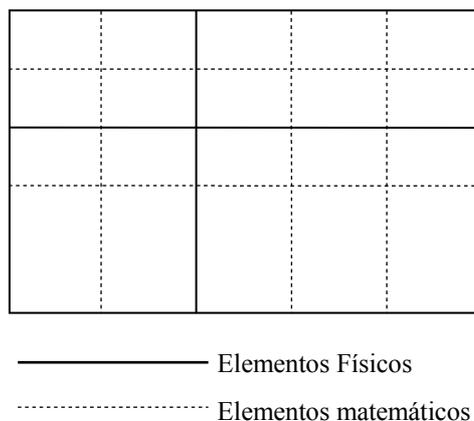


Figura 2.5 – Domínio discretizado em elementos finitos físicos e matemáticos

2.3 Procedimento de otimização

2.3.1 Introdução

Nos itens anteriores foram descritos os principais conceitos para o entendimento do método. Neste item é mostrado o procedimento desenvolvido por Barcellos (1977) que leva à obtenção das condições de ótimo para o problema de otimização.

O procedimento utilizado segue em linhas gerais a formulação padrão da teoria de controle ótimo para sistemas de parâmetros distribuídos. A quantidade a ser otimizada, as equações diferenciais e restrições são todas reunidas num funcional aumentado a ser

minimizado. Tomando-se as devidas variações do funcional e igualando-as a zero obtêm-se as condições necessárias de ótimo.

2.3.2 Índice de performance, restrições e discretização.

Índice de performance. A quantidade a ser otimizada é denominada índice de performance ou função objetivo e é representada por um funcional J_0 que deve estar em termos das variáveis de estado \mathbf{z} e/ou das variáveis de controle \mathbf{u} . Em otimização estrutural J_0 pode representar tanto a massa estrutural como algum aspecto do comportamento dinâmico ou estático. J_0 poderia representar, por exemplo, a amplitude de vibração na extremidade de uma viga. Supondo J_0 como a massa total de uma placa, este pode ser dado por,

$$J_0 = \rho \int_D \int_D u_p(x, y) dx dy \quad (2.8)$$

onde $u_p(x, y)$ é a variável de controle que representa a distribuição de espessura ao longo do domínio e ρ é a densidade do material.

Restrições no Comportamento. Como já foi dito, a equação diferencial que rege o comportamento do sistema deve ser transformada para $2n$ conjuntos de equações diferenciais parciais de 1ª ordem.

$$Lw = 0 \text{ é transformada em } \begin{cases} \mathbf{z}_{,x} = \mathbf{f}(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{z}_{,y} = \mathbf{g}(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (2.9)$$

mais condições de contorno.

As equações diferenciais são levadas em consideração no funcional através de funções multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(x, y)$ e $\boldsymbol{\mu}(x, y)$. $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ são frequentemente chamadas de co-variáveis de estado e satisfazem o problema linear conjugado definido anteriormente.

Discretização. O domínio de definição do problema deve ser subdividido em elementos finitos físicos em número suficiente para que o conjunto de funções definidoras do perfil de espessuras ofereça uma boa ideia do que seja a configuração ótima.

Restrições na Variável de Controle. A variável de controle $u_p(x, y)$ é a função a ser determinada no processo de otimização fornecendo a configuração ótima. O espaço desta

função é pré-definido pelo projetista, restringindo a sua estrutura matemática a um conjunto de funções escolhidas. Por exemplo pode-se restringir $up(x, y) = \phi_j u_j$, onde ϕ_j é uma função de interpolação e os u_j s são valores nodais da função. Portanto, durante o processo de otimização apenas os valores nodais são determinados, já que as funções de interpolação são escolhidas anteriormente. No funcional esta limitação é representada por $up(x, y) = h_k(x, y) = \phi_j d_{kj}$, onde ϕ_j é função de interpolação associada ao nó j , e d_{kj} valor da espessura no nó j do elemento físico k . Restrições em $up(x,y)$ podem também ser inseridas por meio de limitações em h_k fazendo-se $h_k(x,y) = \phi_j d_{kj} + h_{\min}$, para limite inferior e $h_k(x,y) = h_{\max} - \phi_j d_{kj}$, para limite superior. Pode-se ainda limitar d_{kj} , que pode ser reescrito como $d_{kj} = dr_{kj} + dm_{\min}$ para limitação de espessura mínima ou $d_{kj} = d_{\max} - dr_{kj}$ para limitação de espessura máxima.

2.3.3 Dedução das Condições de Ótimo

As condições de ótimo para o problema de otimização são deduzidas a partir da minimização de um funcional aumentado que reúne o índice de performance J_0 mais as equações de comportamento e as restrições na variável de controle, tomados sobre todos os elementos físicos do domínio discretizado. O funcional aumentado é:

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^N \iint_{D_k} \{ \lambda^t \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{z}_{,x}) + \mu^t \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{z}_{,y}) + \gamma (up - h_k) \} dx dy \quad (2.10)$$

onde, N é o número de elementos finitos físicos. Multiplicando-se os termos,

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^N \iint_{D_k} \{ \lambda^t \cdot \mathbf{f} + \mu^t \cdot \mathbf{g} + \gamma (up - h_k) - \lambda^t \cdot \mathbf{z}_{,x} - \mu^t \cdot \mathbf{z}_{,y} \} dx dy \quad (2.11)$$

Aplicando-se o Teorema de Green para os termos em $\mathbf{z}_{,x}$ e $\mathbf{z}_{,y}$, obtém-se

$$J = \sum_{k=1}^N \iint_{D_k} \left[H + (\lambda^t_{,x} + \mu^t_{,y}) \cdot \mathbf{z} \right] dx dy + \int_{\partial D_k} -\lambda^t \cdot \mathbf{z} dy + \int_{\partial D_k} \mu^t \cdot \mathbf{z} dx \quad (2.12)$$

onde H é o hamiltoniano definido como sendo,

$$H(x, y, z, u, \lambda, \mu, \gamma, d) = u_p + \lambda^t \cdot f + \mu^t \cdot g + \gamma (u_p - h_k) \quad (2.13)$$

Observando que $dx = n\sigma_x d\sigma$ e $dy = n\sigma_y d\sigma$, a expressão final do funcional fica,

$$J = \sum_{k=1}^N \iint_{D_k} [H + (\lambda^t_{,x} + \mu^t_{,y}) \cdot z] dx dy + \int_{\partial D_k} (-\lambda^t n\sigma_x + \mu^t n\sigma_y) \cdot z d\sigma \quad (2.14)$$

$n\sigma_x, n\sigma_y$ são os cossenos diretores da normal ao contorno ∂D_k .

Para o funcional ser minimizado é preciso que as condições necessárias de Pontryagin sejam satisfeitas. Estas exigem que a variação δJ seja igual a zero para toda possível escolha de variações admissíveis em $\mu, \lambda, z, u, \gamma$ e d , ou seja,

$$\begin{array}{ll} \text{i) } J_{,z} = 0 & \text{iv) } J_{,u} = 0 \\ \text{ii) } J_{,\lambda} = 0 & \text{v) } J_{,\gamma} = 0 \\ \text{iii) } J_{,\mu} = 0 & \text{vi) } J_{,d} = 0 \end{array} \quad (2.15)$$

Analisando cada uma das condições tem-se:

a) As condições "ii" e "iii" implicam que as equações diferenciais iniciais na forma de Dieudonné/Rashevsky devem ser satisfeitas, ou seja, o problema deve satisfazer as equações de comportamento do sistema.

$$f = z_{,x} \quad g = z_{,y} \quad (2.16)$$

b) A condição "v" leva a restrição imposta sobre o tipo de função que define a variável de controle $u_p(x, y)$.

$$u_p(x, y) = h_k(x, y) \quad (2.17)$$

com $h_k(x, y) = \phi_j d_{kj}$.

c) A condição "iv" leva a condições que as variáveis de controle $u = (u_1, u_2, u_p, \dots, u_m)$ devem

satisfazer.

$$H_{,u} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}_{,u} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{g}_{,u} = 0 \quad (2.18)$$

$$H_{,up} = 1 + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}_{,up} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{g}_{,up} + \gamma = 0 \quad (2.19)$$

d) A condição "vi" fornece k vezes j expressões que os parâmetros \mathbf{d} devem satisfazer.

$$-\iint_{D_k} \gamma h_{k \rightarrow d_{kj}} dx dy = 0 \quad (2.20)$$

e) A condição "i" leva ao sistema de equações diferenciais parciais lineares denominado problema linear conjugado e respectivas condições de contorno.

$$\lambda_{i,x} + \mu_{i,y} = -H_{,z_i} \quad (2.21)$$

em D_k , $\forall i=1, \dots, n$.

As condições de contorno do problema linear conjugado obtidas da minimização do funcional são enunciadas da seguir. Seja $\Lambda_{hi}(\boldsymbol{\sigma}) = -\lambda_i(\boldsymbol{\sigma}) n\sigma_x + \mu_i(\boldsymbol{\sigma}) n\sigma_y$, onde $n\sigma_x$ e $n\sigma_y$ são os cossenos diretores do vetor normal ao contorno, tem-se que:

a) Os valores de $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ em cada lado ∂D_h do contorno ∂D são dados pelas expressões,

$$\Lambda_{hi}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{se } i \notin \{i\}_h \quad (2.22a)$$

$$\sum_{i \in \{i\}_h} \Lambda_{hi}(\boldsymbol{\sigma}) ({}^1Z_i(\boldsymbol{\sigma}) - {}^2Z_i(\boldsymbol{\sigma})) = 0 \quad \text{se } i \in \{i\}_h \quad (2.22b)$$

${}^1Z_i(\boldsymbol{\sigma})$ e ${}^2Z_i(\boldsymbol{\sigma})$ são quaisquer duas funções vetoriais que satisfaçam as condições de contorno (2.4).

b) Os valores de $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ no contorno ∂D_{kl} entre dois elementos adjacentes são dados por:

$${}_{(kl)}\Lambda_i(\boldsymbol{\sigma}) = {}_{(lk)}\Lambda_i(\boldsymbol{\sigma}) \quad \boldsymbol{\sigma} \in \text{a qualquer contorno definido } \partial D_{kl} \forall i = 1, n. \quad (2.23)$$

As condições de contorno (2.22a) e (2.22b) indicam que $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ devem ser iguais a zero onde as variáveis $z_{i,s}$ não são especificadas ($i \notin \{i\}_h$), e devem ser calculados onde os $z_{i,s}$ são determinados ($i \in \{i\}_h$). Utilizando o fato de que \mathbf{z} é contínuo em D e $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ satisfazem o

problema linear conjugado, da condição (2.23) se chega à conclusão que λ e μ são contínuos em todo contorno ∂D_{kl} .

Terminadas as deduções, as condições "i", "iv" e "vi" devem ser convenientemente manipuladas para se chegar a expressão final da condição de ótimo. Estas substituições são adequadamente mostradas no capítulo seguinte.

O conjunto de equações que expressa as condições necessárias de ótimo deve ser resolvido simultaneamente com as equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema, com as restrições nas variáveis de controle e condições de contorno. As condições necessárias de ótimo juntamente com as equações diferenciais dadas são resultados exatos e formam um sistema de equações diferenciais e integrais não lineares. Tendo em mãos o sistema de equações não lineares, a etapa seguinte é resolver este sistema por qualquer procedimento numérico. Conforme já mencionado, o procedimento aqui utilizado para encontrar a solução aproximada do problema de otimização será o do método de elementos finitos acoplado a uma rotina de otimização especialmente desenvolvida para este fim.

2.4 Resumo e observações

2.4.1 Resumo

No presente capítulo procurou-se mostrar de um modo geral os fundamentos do método de otimização estrutural desenvolvido por Barcellos (1977). O método consiste num procedimento de sub-otimização de sistemas governados por equações diferenciais parciais na forma de Dieudonné-Rashevsky. O principal aspecto do método é o conceito de elementos finitos físicos. Com este conceito pode-se levar em consideração a variação de espessura dentro de cada subdomínio, melhorando a aproximação da configuração ótima, em contraste com métodos onde a espessura é tomada como constante.

As funções que compõem o perfil ótimo tem suas características pré-definidas pelo projetista. Este fato limita a configuração ótima final à funções de uma determinada forma, caracterizando na realidade, uma sub-otimização. Ou seja, ao final do processo se poderá ter, por exemplo, um perfil linear por partes, quadrático por partes, etc.

O procedimento utiliza a teoria de controle ótimo para obter as condições necessárias de extremo. A função objetivo do problema, equações diferenciais e restrições são todas reunidas num funcional aumentado que deve ser minimizado. As condições de extremo são equações diferenciais ou integrais e devem ser transformadas em equações algébricas com a utilização de funções de interpolação que discretizam a variável de controle.

As equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema, também são transformadas em equações algébricas utilizando-se a técnica de elementos finitos, que discretizam as variáveis de estado. Estes dois conjuntos de equações formam um sistema de equações algébricas não lineares que deve ser resolvido para se encontrar o projeto ótimo.

2.4.2 Observações sobre o Método

Citando algumas características especiais do método, tem-se que: A variável de controle u pode ter qualquer forma pré-estabelecida, com ou sem descontinuidade, com ou sem limites máximos ou mínimos ou ainda, ser representada por polinômios de diversos graus. Isto permite aproximar melhor o projeto ótimo a necessidades reais.

As condições necessárias de ótimo são expressões obtidas analiticamente sem aproximações, portanto são exatas e a sua completa resolução dependerá do método numérico empregado para resolvê-la.

Qualquer tipo de elemento físico pode ser definido já que as condições necessárias de ótimo dependem somente da equação diferencial dada. Assim o método está permanentemente aberto para novos métodos numéricos.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO MÉTODO À OTIMIZAÇÃO DE PLACAS

3.1 Introdução

No capítulo anterior foram estabelecidos todos os fundamentos e procedimentos do método de otimização desenvolvido por Barcellos (1977). Foram introduzidos os conceitos fundamentais, o formato geral dos problemas que podem ser tratados e a sequência de passos a seguir para a obtenção das condições de ótimo. Neste capítulo, o objetivo é a correta aplicação do método a um problema específico de otimização.

Será considerada a otimização de placas sanduíche em vibração livre. Este tipo de placa é comumente empregado em construção mecânica onde a economia de peso é muito importante, como no caso de estruturas aeronáuticas. A placa sanduíche é constituída de uma camada central de material para enchimento e para resistir ao cisalhamento, e duas camadas externas de material estrutural para resistir aos esforços de membrana. O objetivo da otimização é minimizar o peso da parte estrutural da placa sujeita a condições de contorno e restrições na primeira frequência natural, devendo esta ter um valor fixo.

O desenvolvimento do capítulo se dá principalmente para o caso de placas sanduíche, no entanto, é possível considerar paralelamente a otimização de placas homogêneas. A diferença entre as duas aplicações pode ser contornada tomando-se algumas constantes como genéricas ao longo das deduções, ficando a substituição dos valores correspondentes a cada placa para o final do procedimento.

3.2 Definição do problema

A correta definição do problema de otimização é de suma importância para a obtenção de um projeto ótimo. É preciso clareza quanto aos objetivos e imposições feitas ao modelo. Seguem-se, neste item, as equações do modelo da placa a ser utilizada, o enunciado matemático do problema de otimização e a colocação do problema no formato adequado para o procedimento.

3.2.1 Equações de placas

Considere, por exemplo, uma placa sanduíche retangular com movimento de vibração na direção z , de frequência natural Ω . A placa é formada por uma camada central ou núcleo ("core") de espessura $2h_c$, e duas lâminas ou faces externas de cobertura, com peso estrutural

passível de modificação. A espessura inicial de cada face é h_s . Se a placa for homogênea a espessura inicial é h_i . As medidas da placa são "a" e "b" para as direções x e y respectivamente. A teoria de placas sanduíche utilizada neste trabalho segue as suposições feitas por Ahmed (1971).

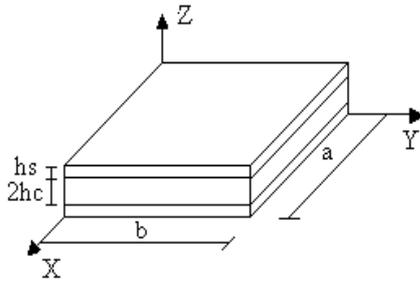


Figura 3.1(a) Placa sanduíche

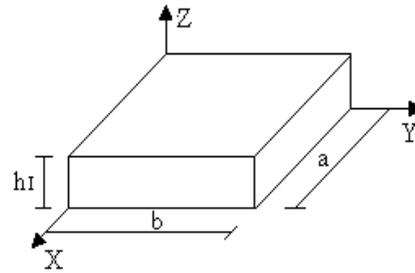


Figura 3.1(b) Placa homogênea

As equações diferenciais do movimento que regem a vibração de placas semi-espessas são

$$\begin{aligned} Q_x &= M_{xx,x} + M_{yy,y} + I \psi_{x,tt} \\ Q_y &= M_{xy,x} + M_{yy,y} + I \psi_{y,tt} \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + q &= M w_{,tt} \end{aligned} \quad (3.1a)$$

mais as condições de contorno em ∂D . As equações constitutivas são dadas por

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D (\psi_{x,x} + \nu \psi_{y,y}) \\ M_{yy} &= -D (\psi_{y,y} + \nu \psi_{x,x}) \\ M_{xy} &= -\frac{D(1-\nu)}{2} (\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ Q_x &= Gx (w_{,x} - \psi_x) \\ Q_y &= Gy (w_{,y} - \psi_y) \end{aligned} \quad (3.1b)$$

As equações acima foram retiradas do trabalho de Dym e Shames (1973) e tem-se que: M_{xx} e M_{yy} são momentos de flexão, M_{xy} é momento de torção, Q_x e Q_y são esforços cortantes, ψ_x e ψ_y são rotações, w é a deflexão na direção z, ν coeficiente de Poisson e q carga distribuída (considerada zero para a presente aplicação). Na figura 3.2 pode-se visualizar os planos e

sentidos de aplicação das solicitações atuantes em um elemento infinitesimal de uma placa, além das rotações e deflexão do plano médio.

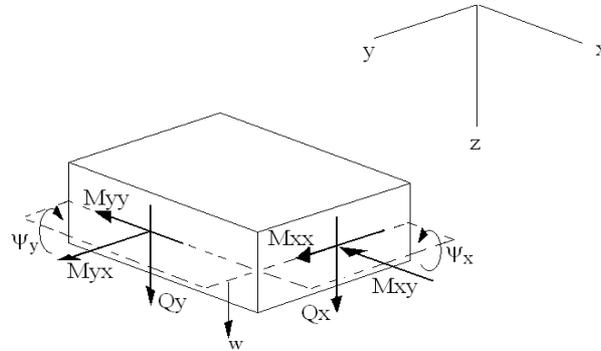


Figura 3.2 Solicitações, deflexões e rotações

As constantes G_x , G_y , M , I e D dependem do material e da geometria da placa que se está trabalhando. Para placas sanduíche as constantes assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} G_x &= k h_c G_{xz} & G_y &= k h_c G_{yz} \\ I &= 2 h_c^3 \rho_c / 3 + 2 h_s h_c^2 \rho_s & D &= 2 E h_c^2 h_s / (1 - \nu^2) \\ M &= 2 h_c \rho_c + 2 h_s \rho_s \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde, $2h_c$ é a espessura da camada central, núcleo ou "core", h_c a espessura inicial de cada face, ρ_s a densidade do material estrutural nas faces, ρ_c a densidade do material no "core", G_{xz} o módulo de cisalhamento transversal e G_{yz} o módulo de cisalhamento longitudinal. As relações para I e D nas equações (3.2) foram retiradas de Ahmed (1971) e são válidas para $h_s \ll h_c$ e $E_c \ll E$. E_c é o módulo de elasticidade do material do núcleo. Para placas homogêneas semi-espessas as constantes são:

$$\begin{aligned} G_x &= G_y = k h_l G & I &= \rho h_l^3 / 12 \\ M &= \rho h_l & D &= E h_l^3 / (1 - \nu^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde, E é o módulo de Young, h_l é a espessura da placa homogênea, ρ a densidade do material da placa homogênea, k o fator de correção do cisalhamento, G o módulo de cisalhamento.

As equações de vibração livre para placas podem ser colocadas de outra forma, onde não

aparecem termos com derivadas em relação ao tempo. Fazendo-se as devidas substituições se chega a:

$$\begin{aligned} & \left[Gx(w_{,x} + \psi_x) \right]_{,x} + \left[-Gy(w_{,y} - \psi_y) \right]_{,y} + q = -M\Omega^2 w \\ & \left[-D(\psi_{x,x} + \nu\psi_{y,y}) \right]_{,x} + \left[-D\frac{1-\nu}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \right]_{,y} - I\Omega^2 \psi_x = Gx(w_{,x} - \psi_x) \quad (3.4) \\ & \left[-D(\psi_{y,y} + \nu\psi_{x,x}) \right]_{,y} + \left[-D\frac{1-\nu}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \right]_{,x} - I\Omega^2 \psi_y = Gy(w_{,y} - \psi_y) \end{aligned}$$

$$\forall (x, y) \in D, q = 0$$

3.2.2 Montagem do problema

Conforme já mencionado, o problema de otimização aqui considerado é o de minimizar o peso da parte estrutural da placa sanduíche mantendo a primeira frequência natural de vibração Ω com valor fixo. Em outras palavras o que se quer é encontrar uma distribuição de espessuras nas faces de modo a tornar o peso desta o menor possível, mantendo a frequência fundamental a mesma do perfil inicial.

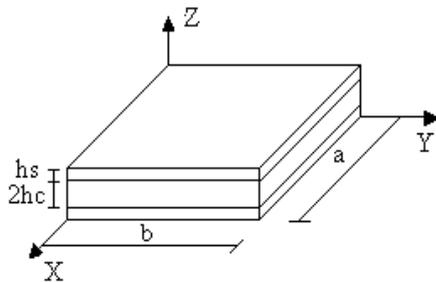


Figura 3.3 (a) Placa inicial

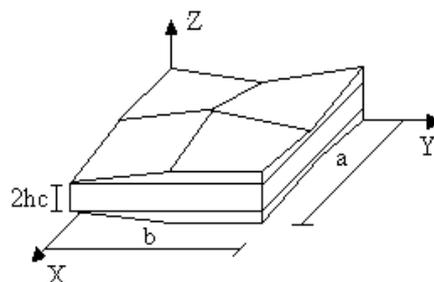


Figura 3.3 (b) Placa otimizada

Devido à simetria da placa em relação ao plano médio considera-se apenas uma face desta. O peso da parte estrutural é dado pela integral da função distribuição de espessura ao longo da área vezes o peso específico do material da face. Considerando constantes a propriedade do material ao longo da face e a aceleração da gravidade, o problema de peso será formulado em termos de volume estrutural que é dado por

$$J_0 = \int_D h(x, y) dx dy \quad (3.5)$$

$h(x, y)$ é a função distribuição de espessura da parte estrutural, ou face, da placa sanduíche. Se a placa for homogênea h é a espessura total.

Desse modo, o enunciado do problema de otimização pode ficar da seguinte forma: Minimizar a integral J_0 , sujeita as equações diferenciais (3.1) com restrição na frequência natural Ω e na função distribuição de espessura $h(x, y)$.

3.2.3 Colocação do problema na forma adequada

O procedimento exige que se escreva o sistema de equações diferenciais na forma de Dieudonné Rashevsky. A partir das equações de placa (3.1), e baseado no trabalho de Barcellos (1977), as variáveis de estado são definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z_1 &= w, & z_5 &= M_{yy}, \\ z_2 &= \psi_x, & z_6 &= M_{xy}, \\ z_3 &= \psi_y, & z_7 &= Q_y, \\ z_4 &= M_{xx}, & z_8 &= Q_x. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para as variáveis de controle tem-se:

$$\begin{aligned} u_p &= h(x, y) & u_5 &= \psi_{x,y} \\ u_1 &= M_{xx,x} & u_6 &= Q_{y,x} \\ u_2 &= M_{xx,y} & u_7 &= Q_{y,y} \\ u_3 &= M_{yy,x} & u_8 &= Q_{x,y} \\ u_4 &= M_{yy,y} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Os valores acima definidos são substituídos nas equações de placas (3.1). Explicitando-se as variáveis de estado dessas equações obtem-se o sistema na forma de Dieudonné-Rashevsky.

$$\begin{aligned} z_{1,x} &= (z_8 / Gx) + z_2 & z_{1,y} &= (z_7 / Gy) + z_3 \\ z_{2,x} &= -(z_4 - \nu z_5) / D(1 - \nu^2) & z_{2,y} &= u_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{3,x} &= -2z_6 / (1 - \nu) D & z_{3,y} &= - (z_5 - \nu z_4) / D(1 - \nu^2) \\
z_{4,x} &= u_1 & z_{4,y} &= u_2 \\
z_{5,x} &= u_3 & z_{5,y} &= u_4 \\
z_{6,x} &= z_7 - u_4 + I \Omega^2 z_3 & z_{6,y} &= z_8 - u_1 + I \Omega^2 z_2 \\
z_{7,x} &= u_7 & z_{7,y} &= u_7 \\
z_{8,x} &= -u_7 - M \Omega^2 z_1 & z_{8,y} &= u_8
\end{aligned} \tag{3.8}$$

com as respectivas condições de contorno.

3.3 Condições de ótimo

Definido o problema de otimização, passa-se à etapa seguinte do procedimento que é montar o funcional aumentado, impor as condições de extremo de Pontryagin e deduzir as equações que levam às condições de ótimo.

3.3.1 Funcional aumentado

O domínio de validade das equações de placas é subdividido em N elementos finitos físicos. O funcional aumentado é formado pelo índice de performance J_0 (3.5) mais as equações diferenciais e restrições somados sobre todo o domínio D . As equações diferenciais do problema e as restrições na função distribuição de espessura são mostradas abaixo e introduzidas no funcional através das co-variáveis de estado λ , μ e função multiplicador de Lagrange $\gamma(x, y)$. As funções \mathbf{f} e \mathbf{g} , definidas no Capítulo 2, descrevem o comportamento da placa e são obtidas do sistema de Dieudonné-Rashevsky.

$$\begin{aligned}
f_1 &= (z_0/Gx) + z_2, & g_1 &= (z_7 / Gy) + z_3 \\
f_2 &= - (z_4 - \nu z_5) / D(1 - \nu^2), & g_2 &= u_5 \\
f_3 &= - 2z_6 / (1 - \nu) D, & g_3 &= - (z_5 - \nu z_4) / D(1 - \nu^2) \\
f_4 &= u_1, & g_4 &= u_2 \\
f_5 &= u_3, & g_5 &= u_4 \\
f_6 &= z_7 - u_4 + I \Omega^2 z_3, & g_6 &= z_8 - u_1 + I \Omega^2 z_2 \\
f_7 &= u_7, & g_7 &= u_7 \\
f_8 &= - u_7 - M \Omega^2 z_1, & g_8 &= u_8
\end{aligned} \tag{3.9}$$

para cada subdomínio D_k , $k = 1, \dots, N$.

A função distribuição de espessura $h(x, y)$ a ser encontrada, é definida em cada elemento físico por $h_k(x, y)$, sendo

$$h_k(x, y) = \phi_j(x, y) d_{kj} \quad (3.10)$$

onde, k é índice dos elementos finitos físicos, j é índice das espessuras nodais, os ϕ_j s são funções de interpolação e os d_{kj} s são valores nodais da distribuição de espessura da placa em cada elemento físico.

Montando-se o funcional aumentado tem-se:

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^N \iint_{D_k} \{ \lambda^t \circ (\mathbf{f} - \mathbf{z}_{,x}) + \mu^t \circ (\mathbf{g} - \mathbf{z}_{,y}) + \gamma (h - h_k) \} dx dy \quad (3.11)$$

Conforme desenvolvimento do capítulo anterior, a expressão do funcional a ser minimizado fica:

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\partial D_k} (n \sigma_x \lambda^t + n \sigma_y \mu^t) \cdot \mathbf{z} d\sigma + \iint_{D_k} H + (\lambda^t_{,x} + \mu^t_{,y}) \cdot \mathbf{z} dx dy \right\} \quad (3.12)$$

$n\sigma_x$ e $n\sigma_y$ são os cossenos diretores da normal ao contorno ∂D_k . O Hamiltoniano é dado por,

$$H(x, y, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \gamma, d_{kj}) = h + \lambda^t \cdot \mathbf{f} + \mu^t \cdot \mathbf{g} + \gamma (h - h_k) \quad (3.13)$$

3.3.2 Condições de Pontryagin

As expressões para o ótimo são obtidas impondo-se as condições necessárias de Pontryagin. As diversas variações δJ , do funcional J , devem ser tomadas em relação às variações admissíveis em \mathbf{z} , \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, γ e \mathbf{d} . Considerando as condições (2.15) as seguintes deduções são feitas:

i) Condição $J_{,z} = 0$. Tomando-se a variação de J em relação a cada z_i , obtém-se o problema linear conjugado, com n equações do tipo, $\lambda_{i,x} + \mu_{i,y} = -H_{,z_i}$, $i = 1, \dots, n$, mais condições de contorno.

$$\lambda_{1,x} + \mu_{1,y} = \lambda_8 (M \Omega^2) \quad (3.14a)$$

$$\lambda_{2,x} + \mu_{2,y} = - (\lambda_1 + \mu_6 I \Omega^2) \quad (3.14b)$$

$$\lambda_{3,x} + \mu_{3,y} = - (\mu_1 + \lambda_6 I \Omega^2) \quad (3.14c)$$

$$\lambda_{4,x} + \mu_{4,y} = [(\lambda_2 + \mu_3 v) / D(1 - v^2)] \quad (3.14d)$$

$$\lambda_{5,x} + \mu_{5,y} = [(v \lambda_2 + \mu_3) / D(1 - v^2)] \quad (3.14e)$$

$$\lambda_{6,x} + \mu_{6,y} = - [2 \lambda_3 / D(1 - v)] \quad (3.14f)$$

$$\lambda_{7,x} + \mu_{7,y} = [\lambda_6 + \mu_1 / Gy] \quad (3.14g)$$

$$\lambda_{8,x} + \mu_{8,y} = - [\lambda_1 / Gx + \mu_6] \quad (3.14h)$$

As condições de contorno são explicadas no item seguinte.

ii) e iii) Condição $J_{,\lambda} = 0$ e $J_{,\mu} = 0$. Daqui volta-se a obter as equações diferenciais iniciais que regem o comportamento de vibração da placa.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{z}_{,x} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{z}_{,y} \end{aligned} \quad (3.15)$$

iv) Condição $J_{,u} = 0$. Daqui obtém-se $H_{,ui} = 0$, $i = 1, \dots, n$, e $H_{,h} = 0$, fornecendo as relações,

$$\begin{aligned} \lambda_4 - \mu_6 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_4 = \mu_6 \\ \mu_4 &= 0 \\ \lambda_5 &= 0 \\ \mu_5 - \lambda_6 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_5 = \lambda_6 \\ \lambda_7 &= 0 \\ \mu_2 - \lambda_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \lambda_3 \\ \mu_7 - \lambda_8 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_7 = \lambda_8 \\ \mu_8 &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

para $H_{,ui} = 0$ e

$$1 + \lambda^t \cdot \mathbf{f}_{,h} + \mu^t \cdot \mathbf{g}_{,h} + \gamma = 0 \quad (3.17)$$

para $H_{,h} = 0$.

Explicitando na expressão (3.17) apenas os termos de \mathbf{f} e \mathbf{g} que possuem derivadas em h chega-se a expressão,

$$H_{,h} = 1 + \gamma + \lambda_1 f_{1,h} + \lambda_2 f_{2,h} + \lambda_3 f_{3,h} + \lambda_6 f_{6,h} + \lambda_8 f_{8,h} + \mu_1 g_{1,h} + \mu_3 g_{3,h} + \mu_6 g_{6,h} = 0 \quad (3.18)$$

v) Condição $J_{,\gamma} = 0$. Volta-se a obter a interpolação definida para a espessura $h_k(x, y) = \phi_j d_{kj}$.

vi) Condição $J_{,d_{kj}} = 0$. Fornece $N \times NE$ relações do tipo

$$-\iint_{D_k} \gamma(x, y) h_{k,d_{kj}} dx dy = 0 \quad (3.19)$$

ou seja, para cada elemento finito físico e para cada espessura a condição acima deve ser satisfeita somando um total de $N \times NE$ equações. N é o número de elementos finitos físicos e NE o número de espessuras nodais. A inclusão de limitação de espessura mínima pode ser feita considerando-se $d_{kj} = dr_{kj} + d_{\min}$, onde d_{\min} é um valor limite mínimo constante a não ser ultrapassado que se deseja incluir, e dr_{kj} a parte variável. Desse modo, a relação (3.11) fica $h_k(x, y) = \phi_j(x, y) (dr_{kj} + d_{\min})$ e a condição (vi) $J_{,d_{kj}} = J_{,dr_{kj}} = 0$, permanece a mesma, já que d_{\min} é constante.

3.3.3 Expressão Final para o Ótimo

Considere os resultados da condição “iv” ($J_{,u} = 0$), equações (3.17), $\mu_4 = \mu_8 = \lambda_5 = \lambda_7 = 0$, $\lambda_4 = \mu_6$, $\mu_5 = \lambda_6$ e $\mu_7 = \lambda_8$, substituindo λ_7 , μ_7 e μ_8 da condição “iv” nas equações (3.14g) e (3.14h) da condição “i” ($J_{,z} = 0$), e explicitando-se os valores para λ_1 e μ_1 obtem-se:

$$\lambda_1 = -Gx (\lambda_{8,x} + \mu_6) \quad \mu_1 = -Gy (\lambda_{8,y} + \lambda_6) \quad (3.20)$$

tomando-se os valores de λ_1 , e μ_1 acima obtidos mais os valores de λ_4 , μ_4 , λ_5 , μ_5 e substituindo todos nas equações (3.14d), (3.14e) e (3.14f) da condição “i”, fica-se com:

$$\begin{aligned} \mu_{6,x} &= -(-\lambda_2 + v \mu_3) / D (1 - v^2) \\ \lambda_{6,y} &= -(v \lambda_2 - \mu_3) / D (1 - v^2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\lambda_{6,x} + \mu_{6,y} = 2 \lambda_3 / D (1 - \nu),$$

tirando-se daí o valor de $\lambda_2, \mu_2, \lambda_3$ chega-se a:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= [D (1 - \nu) / 2] (\lambda_{6,x} + \mu_{6,y}) \\ \lambda_2 &= D (\lambda_{6,y} + \nu \mu_{6,x}) \\ \mu_3 &= D (\lambda_{6,x} + \nu \mu_{6,y}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

substituindo $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$ nas equações (3.14a), (3.14b) e (3.14c) da condição “i” finalmente obtém-se:

$$\begin{aligned} &[-Gx(\lambda_{8,x} + \mu_6)]_{,x} + [-Gy(\lambda_{8,y} + \mu_6)]_{,y} = -\lambda_8 M \Omega^2 \\ &[D(\mu_{6,x} + \nu \lambda_{6,y})]_{,y} + \left[D \frac{1-\nu}{2} (\lambda_{6,x} + \mu_{6,y}) \right]_{,y} + I \Omega^2 \mu_6 = Gx(\lambda_{8,x} + \mu_6) \\ &[D(\lambda_{6,y} + \nu \mu_{6,x})]_{,y} + \left[D \frac{1-\nu}{2} (\mu_{6,y} + \lambda_{6,x}) \right]_{,x} + I \Omega^2 \lambda_6 = Gy(\lambda_{8,y} + \lambda_6) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Estas equações são as mesmas que as de vibração de placas semi-espessas (3.4), daí se conclui que $-\lambda_6, -\mu_6$ e λ_8 satisfazem o mesmo conjunto de equações diferenciais que ψ_y, ψ_x e w , respectivamente, em cada elemento físico D_k .

A condição “i” do item anterior fornece também as condições de contorno do problema conjugado. Como as variáveis $-\lambda_6, -\mu_6$ e λ_8 satisfazem as mesmas equações diferenciais e condições de contorno de ψ_y, ψ_x e w , Barcellos (1977), pode-se considerar que a diferença entre os dois conjuntos de variáveis é de uma constante multiplicativa C , ou seja

$$\begin{aligned} -\lambda_6 &= C \psi_y \\ -\mu_6 &= C \psi_x \\ \lambda_8 &= C w \end{aligned} \quad (3.24)$$

$\forall (x, y) \in D$.

Considere a condição $J_{,h} = 0$, explicitando dessa expressão as derivadas de \mathbf{f} e \mathbf{g} em relação a h , tem-se que:

$$\begin{aligned}
f_{1,h} &= -Gx_{,h} z_8 / Gx^2 &= B_1 z_8 \\
f_{2,h} &= D_{,h} (z_4 - v z_5) / D^2 (1 - v^2) &= B_2 D_{,h} / D^2 \\
f_{3,h} &= 2 z_6 D_{,h} / (1 - v^2) D^2 &= B_3 D_{,h} / D^2 \\
f_{6,h} &= I_{,h} \Omega^2 z_3 &= B_6 z_3 \\
f_{8,h} &= -M_{,h} \Omega^2 z_1 &= B_8 z_1 \\
g_{1,h} &= -Gy_{,h} z_7 / Gy^2 &= B_1' z_7 \\
g_{3,h} &= (z_5 - v z_4) D_{,h} / D^2 (1 - v^2) &= B_3' D_{,h} / D^2 \\
g_{6,h} &= I_{,h} \Omega^2 z_2 &= B_6' z_2
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Para facilitar a dedução das equações a seguir alguns termos acima foram trocados pela letra B seguida de um índice. Substituindo os valor de $f_{,h}$ e $g_{,h}$ na expressão de $H_{,h}$ (3.18) vem,

$$\begin{aligned}
1 + \gamma + (\lambda_1 B_1 z_8 + \mu_1 B_1' z_7) + (D_{,h} / D^2) (\lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 + \mu_3 B_3') + \\
B_6 (\lambda_6 z_3 + \mu_6 z_2) + \lambda_8 B_8 z_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

tomando-se as expressões para $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_3$, equações (3.20) e (3.22), mais as igualdades $z_1 = w, z_2 = \psi_x, z_3 = \psi_y, z_7 = Qy, z_8 = Qx$, e ainda

$$\begin{aligned}
z_4 - v z_5 &= -D \psi_{x,x} (1 - v^2), \\
z_5 - v z_4 &= -D \psi_{y,y} (1 - v^2),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

e substituindo tudo na expressão (3.26) chega-se a:

$$\begin{aligned}
1 + \gamma + \left[-Gx (\lambda_{8,x} + \mu_6) B_1 Q_x - Gy (\lambda_{8,y} + \mu_6) B_1' Q_y \right] + \\
\frac{D_{,h}}{D^2} \left[D^2 (\mu_{6,x} + v \lambda_{6,y}) \psi_{x,x} - D^2 \frac{(1-v^2)}{2} (\lambda_{6,x} + v \mu_{6,y}) - D^2 (\lambda_{6,y} + v \mu_{6,x}) \psi_{y,y} \right] + \\
B_6 (\lambda_6 \psi_y + \mu_6 \psi_x) + \lambda_8 B_8 z_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Observando as equações (3.24), e substituindo μ_6, λ_6 e λ_8 na expressão (3.28), chega-se a condição de ótimo geral do problema de minimização do volume estrutural de placas homogêneas ou placas sanduíche para uma dada frequência natural de vibração.

$$\begin{aligned}
& 1 + \gamma + \left[-G_x (C w_{,x} - C \psi_x) B_1 Q_x - G_y (C w_{,y} - C \psi_y) B_1' Q_y \right] + \\
D_{,h} & \left[\left(C \psi_{x,x}^2 + \nu C \psi_{y,y} \psi_{x,x} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} C (\psi_{y,x} + \psi_{x,y})^2 + C (\psi_{y,y}^2 + \nu \psi_{x,x} \psi_{y,y}) \right] - \\
& B_6 C (\psi_y^2 + \psi_x^2) + C B_8 w^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

A expressão acima pode ser particularizada tanto para a otimização de placas homogêneas como para placas sanduíche. Considerando as constantes (3.3) e substituindo-as em (3.29) chega-se à condição de ótimo para placas homogêneas semi-espessa.

$$\begin{aligned}
& 1 + \gamma + C k G \left[(w_{,x} - \psi_x)^2 + (w_{,y} - \psi_y)^2 \right] - \\
C \frac{E h_1}{4(1-\nu^2)} & \left[(\psi_{x,x}^2 + 2\nu \psi_{x,x} \psi_{y,y} + \psi_{y,y}^2) + \frac{(1-\nu)}{2} (\psi_{y,x} + \psi_{x,y})^2 \right] - \\
& - C \frac{\rho h^2 \Omega^2}{4} (\psi_y^2 + \psi_x^2) + C \rho \Omega^2 w^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$\forall (x, y) \in D_k$, e para cada elemento finito físico D_k , $k = 1, \dots, N$.

Para o caso de placas sanduíche considera-se as constantes (3.2), que substituídas em (3.29) fornece a condição de ótimo para este tipo de placa.

$$\begin{aligned}
& 1 + \gamma + C \frac{2E h_c}{(1-\nu^2)} \left[(\psi_{x,x}^2 + 2\nu \psi_{x,x} \psi_{y,y} + \psi_{y,y}^2) + \frac{(1-\nu)}{2} (\psi_{y,x} + \psi_{x,y})^2 \right] - \\
& C 2 h_c^2 \rho_s \Omega^2 (\psi_x^2 + \psi_y^2) - C 2 \rho_s \Omega^2 w^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$\forall (x, y) \in D_k$ e para cada elemento físico D_k , $k = 1, \dots, N$.

Estas são as equações que devem ser satisfeitas, em cada elemento físico D_k , para que a configuração ótima seja encontrada. A solução das condições de ótimo juntamente com as equações de vibração é tratada no item seguinte.

3.4 Discretização

No item anterior o procedimento de otimização levou até a forma analítica das condições

de ótimo, estas devem ser satisfeitas em cada elemento finito físico. Para resolver o sistema de equações numericamente é utilizado o método de elementos finitos convencional. As variáveis independentes w , ψ_x e ψ_y são interpoladas para formar a matriz massa e rigidez do sistema. O resultado dessa interpolação fornece a condição de ótimo expressa na forma de equações algébricas. A condição de ótimo obtida no item anterior para placas sanduíche é:

$$1 + \gamma + C \frac{2Eh_C}{(1-\nu^2)} \left[(\psi_{x,x}^2 + 2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y} + \psi_{y,y}^2) + \frac{(1-\nu)}{2} (\psi_{y,x} + \psi_{x,y})^2 \right] - C 2 \rho_S \Omega^2 [h_C^2 (\psi_x^2 + \psi_y^2) + w^2] = 0 \quad (3.32)$$

para cada elemento físico D_k . Para melhor manipulação das equações a expressão entre chaves é dividida em duas partes, onde,

$$W_k = \frac{2Eh_C}{(1-\nu^2)} \left[(\psi_{x,x}^2 + 2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y} + \psi_{y,y}^2) + \frac{(1-\nu)}{2} (\psi_{y,x} + \psi_{x,y})^2 \right]$$

$$W_M = 2 \rho_S [h_C^2 (\psi_x^2 + \psi_y^2) + w^2] \quad (3.33)$$

Numa forma mais condensada a expressão (3.32) fica:

$$1 + \gamma + C \{W_k - \Omega^2 W_M\} = 0 \quad (3.34)$$

ou

$$-\gamma = 1 + C \{W_k - \Omega^2 W_M\} \quad (3.35)$$

Considere a condição “vi”, $J_{,dkj} = 0$, que fornece,

$$-\iint_{D_k} \gamma(x, y) h_{k,d_{kj}} dx dy = 0 \quad (3.36)$$

para todo k, j , $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, NE$, N é o número de elementos físicos, NE é o número de espessuras nodais em cada elemento físico.

Conforme já definido, a interpolação feita para a espessura $h(x, y)$ em cada elemento físico é

$$h_k(x, y) = \phi_j d_{kj}, \quad (3.37)$$

portanto,

$$h_{k,d_{kj}} = \phi_j \quad (3.38)$$

Substituindo-se a expressão de γ obtida de (3.35) em (3.36) obtem-se:

$$\iint_{D_k} [1 + C(W_k - \Omega^2 W_M)] h_{k,d_{kj}} dx dy = 0 \quad (3.39)$$

ou considerando (3.37) e (3.38),

$$\iint_{D_k} [1 + C(W_k - \Omega^2 W_M)] \phi_j dx dy = 0 \quad (3.40)$$

para todo $k, j, k = 1, \dots, N, j = 1, \dots, NE$.

Separando-se alguns termos da integral,

$$\iint_{D_k} \phi_j dx dy + C \left\{ \iint_{D_k} W_k \phi_j dx dy - \Omega^2 \iint_{D_k} W_M \phi_j dx dy \right\} = 0 \quad (3.41)$$

para todo k, j .

Para satisfazer o conjunto de equações acima, funções adequadas para w, ψ_x e ψ_y devem ser encontradas. Os valores assumidos por estas variáveis estão associados a Ω^2 através do problema de frequência natural e modos de vibração. Por outro lado, as características de vibração dependem da geometria do modelo, no caso, da distribuição de espessura da placa. Portanto, uma determinada configuração de espessura deve ser encontrada, tal que, origine um modo de vibração que satisfaça a condição de ótimo e a equação de vibração do sistema para uma dada frequência Ω .

Para resolver os dois sistemas de equações, vibração e condições de ótimo, w, ψ_x e ψ_y podem ser interpolados normalmente, nas expressões de W_k e W_M da equação (3.41), com o método de elementos finitos convencional. Interpolando w, ψ_x e ψ_y na equação (3.41) e

montando a forma matricial da equação, fica-se com,

$$\iint_{D_k} \phi_j dx dy + C \left\{ \mathbf{x}_k^t \iint_{D_k} C_1 \mathbf{B}^t \mathbf{D}_b \mathbf{B} \phi_j dx dy - \Omega^2 \mathbf{x}_k^t \iint_{D_k} C_2 \mathbf{N}^t \mathbf{D}_m \mathbf{N} \phi_j dx dy \mathbf{x}_k \right\} = 0 \quad (3.42)$$

As matrizes \mathbf{B} , \mathbf{D}_b , \mathbf{N} , \mathbf{D}_m são,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{,x}^t & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{,y}^t \\ 0 & \Psi_{,y}^t & \Psi_{,y}^t \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \Psi^t & 0 & 0 \\ 0 & \Psi^t & 0 \\ 0 & 0 & \Psi^t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_b = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_C^2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{2 E h_C^2}{(1-\nu^2)} \quad C_2 = 2 \rho s$$

Ψ é o vetor das funções de interpolação para w , ψ_x e ψ_y .

\mathbf{x} é o vetor dos modos de vibração correspondentes a frequência Ω a nível de elemento.

Considerando

$$C_3 = \iint_{D_k} \phi_j dx dy \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}_{ot} = \iint_{D_k} C_1 \mathbf{B}^t \mathbf{D}_b \mathbf{B} \phi_j dx dy \quad (3.44)$$

$$\mathbf{M}_{ot} = \iint_{D_k} C_2 \mathbf{N}^t \mathbf{D}_m \mathbf{N} \phi_j dx dy \quad (3.45)$$

a condição de ótimo na forma matricial fica:

$$C_{3kj} + C \mathbf{x}_k^t (\mathbf{K}_{ot} - \Omega^2 \mathbf{M}_{ot})_{kj} \mathbf{x}_k = 0 \quad (3.46)$$

para todo k, j ; $k = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, NE$. A expressão (3.46) deve ser satisfeita para todos os elementos físicos e todas as espessuras nodais. O fato da constante C ser a mesma para todas as equações, força o resultado da multiplicação $[\mathbf{x}^t (\mathbf{K}_{ot} - \Omega^2 \mathbf{M}_{ot}) \mathbf{x} / C_3]$ também ser igual em todos os elementos e espessuras. A quantidade entre colchetes é denominada energia Lagrangiana média do elemento físico e a solução ótima terá sido encontrada quando todos os elementos físicos tiverem o mesmo valor dessa energia.

O cálculo da energia depende dos valores nodais dos modos de vibração no elemento, das matrizes \mathbf{K}_{ot} e \mathbf{M}_{ot} e da frequência do sistema. Estas matrizes estão definidas em cada elemento físico, no entanto, cada um dos elementos pode possuir em seu interior elementos finitos matemáticos para a interpolação das variáveis w , ψ_x e ψ_y . Assim, as matrizes \mathbf{K}_{ot} e \mathbf{M}_{ot} podem ser vistas, em cada elemento físico, como matrizes "globais" sendo formadas pelo somatório das diversas matrizes locais dos elementos matemáticos. Este fato possibilita um cálculo mais preciso na Energia Lagrangeana ao mesmo tempo que mantem a liberdade para a escolha do número de elementos físicos necessários para representação da superfície ótima.

3.5 Resumo do capítulo

Neste capítulo o método de otimização de Barcellos (1977) foi utilizado para obtenção das condições de ótimo para o problema de minimização do peso de placas sujeitas a restrição na frequência fundamental de vibração e restrição nas espessuras.

Primeiro o problema de otimização foi adequadamente definido, em seguida montou-se o funcional aumentado com as restrições de comportamento, foram impostas as condições de Pontryagin e deduzidas as expressões de ótimo tanto para placas sanduíche como para placas homogêneas.

No item anterior as condições de ótimo analíticas de placas sanduíche são transformadas em equações algébricas para a solução numérica. Este conjunto de equações juntamente com as equações de vibração da placa formam o conjunto de equações algébricas não lineares, cujo esquema de solução é tratado no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

4.1 Introdução

Obtidos os sistemas de equações algébricas que descrevem o estado e a configuração ótima do modelo, a preocupação passa ser a de resolver esses sistemas numericamente. Neste capítulo interessa mostrar a sequência de procedimentos numéricos utilizados para efetuar a otimização do problema de placas sanduíche. A técnica de elementos finitos é empregada para a análise de frequência natural da placa e seus respectivos modos de vibração. Os resultados da análise fornecem dados para a rotina de otimização que ajusta as variáveis de projeto em direção a configuração ótima.

4.2 Equações algébricas

São dois os conjuntos de equações algébricas que devem ser resolvidos para a solução do problema de otimização. O conjunto de equações que descreve o comportamento de vibração do sistema,

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \quad (4.1)$$

e o conjunto de equações que descreve as condições para o projeto ótimo,

$$C_{3kj} + C \mathbf{x}_k^t \left(\mathbf{K}_{ot} - \Omega^2 \mathbf{M}_{ot} \right)_{kj} \mathbf{x}_k = 0 \quad (4.2)$$

$\forall k, j \quad k = 1, \dots, N \text{ e } j = 1, \dots, NE.$

Os índices k e j indicam que as constantes, vetores e matrizes se referem ao elemento físico k e à espessura nodal j , N é o número total de elementos físicos e NE é o número de espessuras nodais por elemento físico. Na equação (4.1), \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes de rigidez e massa para o sistema global, respectivamente. As expressões para C_{3kj} , \mathbf{K}_{ot} e \mathbf{M}_{ot} estão dadas em (3.43), (3.44) e (3.45) e são montadas a nível de elemento físico. As equações dos dois conjuntos (4.1) e (4.2) são não lineares e devem ser resolvidas por um processo iterativo.

4.3 Estratégia de solução

O conjunto de equações (4.1) é resolvido pelo método de elementos finitos. Desse sistema de equações se obtém o primeiro autovalor Ω^2 e o autovetor \mathbf{x} correspondente. Os valores calculados para frequência natural e modos de vibração são passados para a rotina de otimização juntamente com outros dados do modelo. Nesta rotina, as condições de ótimo e restrições do problema são testadas. Se as mesmas forem satisfeitas a configuração corrente é apresentada como solução do problema, caso contrário, as espessuras são modificadas de modo a ajustar o modelo a uma configuração que satisfaça, pelo menos aproximadamente, as condições de ótimo e restrições. A sequência de cálculos realizados na rotina de otimização para se chegar ao projeto ótimo é a seguinte:

1) Primeiro a frequência natural do modelo é comparada com o valor de frequência desejado. Caso a diferença entre os dois valores seja maior que uma determinada precisão, são realizadas modificações nas espessuras até que o modelo apresente a frequência esperada. Este ajuste é efetuado utilizando-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$h_{kj}^1 = h_{kj}^0 \alpha_{kj} \quad (4.3)$$

onde, h_{kj}^1 é a espessura ajustada para originar a frequência Ω desejada, h_{kj}^0 é a espessura da configuração corrente que provoca a frequência Ω_0 , α_{kj} é o fator multiplicativo que ajusta a espessura e é dado por,

$$\alpha_{kj} = \frac{ma \Omega^2}{ma \Omega_0^2 + mb \Omega_0^2 - mb \Omega^2} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} ma &= \rho_c h_c \left[1 - \left(\frac{h_c^2}{3} \right) \right] \\ mb &= \rho_s h_{kj}^0 \left(1 - h_c^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

A expressão para α_{kj} foi obtida da divisão entre duas equações diferenciais de placas sanduíche, uma com frequência Ω_0 e outra com a frequência Ω . Considerando a simplificação de que os modos de vibração das duas placas sejam bem parecidos, pode-se eliminar da divisão termos em deslocamentos e rotações. Desse modo foi possível a obtenção de uma

equação em função apenas das densidades e espessuras das duas placas. A relação obtida se mostrou bastante útil para esta finalidade pois se verificou que, na maioria dos casos, com poucas iterações, 3 ou 4, se consegue ajustar as espessuras para alcançar a frequência desejada. Em alguns casos, a alteração das espessuras, sugerida pelo módulo de otimização, para satisfazer a condição de ótimo é brusca, causando problemas de convergência no ajuste de espessuras para satisfazer a restrição de frequência. Nesses casos, utilizou-se um fator $\beta=0,5$ para amenizar a taxa de alteração das espessuras proposta pelo parâmetro α . Desse modo, a fórmula para alteração das espessuras no sentido de manter a frequência natural constante ficou,

$$h_{kj}^1 = h_{kj}^0 (1 - \beta) \alpha_{kj} + \beta \quad (4.6)$$

2) Conseguindo o modelo com a frequência atualizada o passo seguinte é verificar se a condição de ótimo é satisfeita para esse novo conjunto de espessuras. A satisfação das condições de ótimo ocorre quando as razões de energia Lagrangeana com C_{3kj} de todos os elementos físicos forem iguais. O valor de energia Lagrangeana média, L_{kj} , para cada um dos N elementos físicos e cada uma das NE espessuras nodais, é dado pela expressão,

$$L_{kj} = \mathbf{x}_k^t (\mathbf{K}_{ot} - \Omega^2 \mathbf{M}_{ot})_{kj} \mathbf{x}_k / C_{3kj} \quad (4.7)$$

$k = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, NE$ obtendo-se daí N vezes NE energias L_{kj} .

3) Em seguida é calculado o valor médio entre todas as energias Lagrangeanas,

$$L_M = \sum_{K=1}^N \sum_{j=1}^{NE} L_{kj} / (N \times NE) \quad (4.8)$$

4) Com o valor médio, L_M , calcula-se o desvio padrão entre todas as energias,

$$\bar{L} = \sqrt{\sum_{K=1}^N \sum_{j=1}^{NE} \frac{(L_{kj} - L_M)^2}{(N \cdot NE) - 1}} \quad (4.9)$$

O desvio padrão foi a medida escolhida para verificar a igualdade entre todas as energias Lagrangeanas. Se a condição de ótimo é satisfeita, todas as energias são iguais e o desvio padrão é zero. Se as energias não são iguais o desvio padrão dá uma ideia da distância que se está da solução exata.

5) Baseado nos valores de cada energia Lagrangeana L_{kj} , no valor médio L_M , e no desvio padrão das energias \bar{L} , estima-se uma modificação nas espessuras nodais. A modificação é feita baseada na seguinte relação de recorrência,

$$h_{kj}^1 = h_{kj}^0 + \left(\frac{h_{kj}^0}{R} \right) \left(\frac{|L_{kj} - L_M|}{L_{Max} - L_{Min}} \right) \left(\frac{\bar{L}}{\bar{L}_r} \right) \quad \text{se } L_{kj} - L_M > 0 \quad (4.9)$$

$$h_{kj}^1 = h_{kj}^0 - \left(\frac{h_{kj}^0}{R} \right) \left(\frac{|L_{kj} - L_M|}{L_{Max} - L_{Min}} \right) \left(\frac{\bar{L}}{\bar{L}_r} \right) \quad \text{se } L_{kj} - L_M < 0 \quad (4.10)$$

h_{kj}^1 - espessura modificada,

h_{kj}^0 - espessura da iteração anterior,

R - fator de incremento de espessura (R = 2 ou 5),

L_{kj} - energia Lagrangeana média do elemento físico k na espessura j

L_M - média entre todas as energias dos elementos físicos

L_{Max} - maior energia Lagrangeana entre todos os elementos físicos

L_{Min} - menor energia Lagrangeana entre todos os elementos físicos

\bar{L} - desvio padrão de todas as energias Lagrangeanas na configuração corrente

\bar{L}_r - desvio padrão de todas as energias Lagrangeanas na configuração inicial ou de referência

Nas relações de recorrência (4.9) e (4.10) o termo (\bar{L} / \bar{L}_r) representa o desvio padrão das energias lagrangeanas da configuração corrente em relação ao desvio padrão das energias lagrangeanas da configuração inicial. Esse valor dá uma medida da diminuição do desvio padrão das energias durante o processo de otimização. Esse termo suaviza a mudança das espessuras a medida em que se aproxima da configuração ótima.

A relação de recorrência para alterar as espessuras em direção ao ótimo foi baseada na fórmula apresentada em Khot e Berke (1984), no entanto, uma análise do comportamento da energia Lagrangeana com relação a variação de espessura foi necessária para verificar qual

expressão deve ser usada (4.9) ou (4.10). No caso do presente trabalho, otimização das espessuras da face de placas sanduíche, as matrizes \mathbf{M}_{ot} e \mathbf{K}_{ot} , da equação 4.7, não dependem da espessura da face, elas permanecem constantes ao longo do processo iterativo. A variação da energia Lagrangeana, nesse caso, é dependente do autovetor \mathbf{x}_k , modo de vibração. Para uniformizar a energia em toda a placa, as espessuras da face devem ser modificadas para alterar as amplitudes relativas, entre os nós do modelo discretizado da placa, no primeiro modo de vibração, no sentido de redistribuir a energia de maneira equitativa por toda a placa. As fórmulas 4.9 e 4.10 estabelecem tal relação entre uniformidade de energia e variação de espessuras e foram ajustadas após verificações numéricas.

6) Com o novo perfil de espessuras volta-se ao programa de elementos finitos para se recalcularem as matrizes estruturais \mathbf{K} e \mathbf{M} , e resolver novamente o problema de autovalor e autovetor do novo sistema. A frequência de vibração obtida é comparada com a frequência desejada e reajustada conforme explicado na etapa "1".

A verificação da satisfação do limite de espessura mínima é feita juntamente com as modificações das espessuras efetuadas nas etapas "5" e "1", caso o limite seja ultrapassado, o acréscimo ou diminuição da espessura fica restrito ao limite imposto. A sequência de etapas acima é repetida até que o desvio padrão seja menor que um determinado valor, ou então, o número de iterações atinja um valor pré-estabelecido pelo programador. Um fluxograma simplificado com a sequência de cálculos efetuados pelo programa de elementos finitos e rotina de otimização é mostrado na figura 4.1.

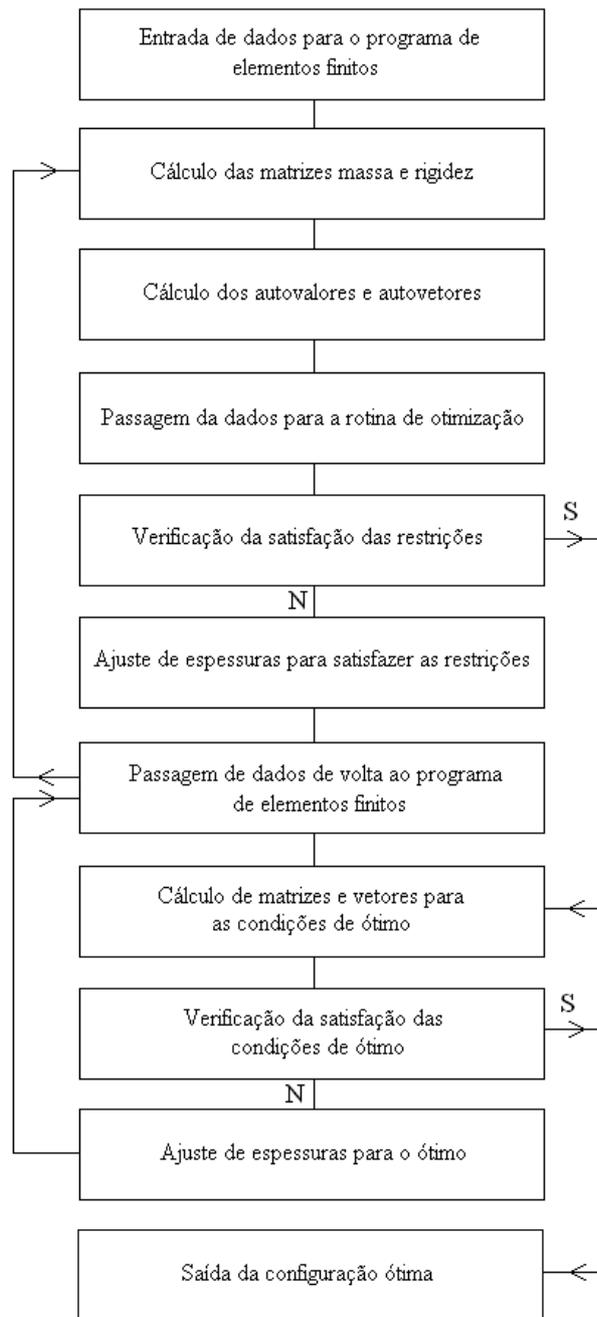


Figura 4.1- Fluxograma do programa de otimização.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Introdução

Para verificar a validade de aplicação das expressões e rotinas desenvolvidas nos capítulos anteriores vários exemplos de placas otimizadas foram testados. Neste capítulo são mostrados os resultados numéricos obtidos da otimização de diversos tipos de placas sanduíche.

O que se pretende obter como resposta é uma distribuição de espessura nas faces da placa tal que torne esta o mais leve possível, sendo que a frequência fundamental de vibração deve ser mantida a mesma de uma configuração de referência. Restrição de espessura mínima na face também é obedecida. A camada interna ("core") da placa sanduíche permanece com a espessura inalterada.

Os exemplos testados são, placas em forma de viga, placas retangulares, circulares e uma de formato trapezoidal. Para cada um dos tipos várias condições de contorno são consideradas. Em todos os exemplos a configuração de referência é aquela onde a espessura é constante ao longo de toda a placa. As propriedades dos materiais utilizados nas placas sanduíche foram analisadas e retiradas dos trabalhos de Ahmed (1971), Vinson (1986) e William (1982), as faces são de alumínio e o "core" de alumínio tipo colmeia ou corrugado. Todos os exemplos, com exceção do exemplo 3, apresentam as mesmas propriedades de material da face e do núcleo. As relações entre espessura da face e do núcleo também são mantidas iguais em todos os exemplos. Foram mantidos constantes parâmetros de espessura e de material para se fazer uma avaliação da influência do formato da placa e da condição de contorno na redução de massa e na configuração otimizada. As dimensões dos modelos, limites mínimos de espessuras e propriedades dos materiais utilizados são fornecidos em cada exemplo.

Com relação aos aspectos numéricos as seguintes características são adotadas:

a) *interpolação*; na obtenção das matrizes massa e rigidez, tanto para as matrizes convencionais de elementos finitos como para as matrizes de otimização, são utilizados elementos Lagrangeanos de 9 nós. Para interpolação das espessuras são mostrados exemplos com elementos finitos físicos lineares e quadráticos. Uma pequena comparação entre os dois tipos de funções pode ser vista no exemplo da placa quadrada em balanço;

b) *discretização*; em cada exemplo procurou-se utilizar uma malha adequada o suficiente para observar a configuração otimizada. Na maioria dos exemplos a malha de elementos finitos físicos é igual ao de elementos finitos matemáticos, no caso da placa quadrada em balanço e da placa circular apoiada são mostrados casos onde a discretização da espessura é diferente da discretização do domínio matemático, exemplificando bem esta característica do método.

Os resultados obtidos são apresentados na seguinte forma:

- a) um gráfico, mostrando a razão entre o volume da face calculado em cada interação (VOL) pelo volume da face inicial de referência (VIN), é montado para a visualização da diminuição do volume da face da placa conseguido pelo processo de otimização.
- b) outro aspecto a ser observado é o quanto se está afastado da solução exata do sistema de equações de ótimo. A medida aqui utilizada para verificar este afastamento é o desvio padrão das energias Lagrangeanas médias de todos os elementos físicos e espessuras nodais. Estes resultados estão colocados numa tabela que mostra o histórico do processo iterativo. O valor de $\bar{\sigma}$ apresentado nas tabelas está dividido por L_M média das energias Lagrangeanas na configuração otimizada.
- c) ao final de cada exemplo é mostrado o formato final da face da placa juntamente com alguns valores de espessuras nodais, redução do volume das faces com as espessuras otimizadas e redução da massa total das placa sanduíche. Em virtude das espessuras das faces serem muito menores que as dimensões das placas, as figuras são apresentadas com as escalas ajustadas para facilitar a visualização da configuração ótima. As frequências da configuração otimizada são as mesmas da configuração de referência.

5.2 Exemplos

5.2.1 Exemplo 1. Viga em balanço

No primeiro exemplo uma placa sanduíche engastada em um lado no formato de viga é sujeita a otimização. A configuração inicial da viga é dada na figura 5.1, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 1.

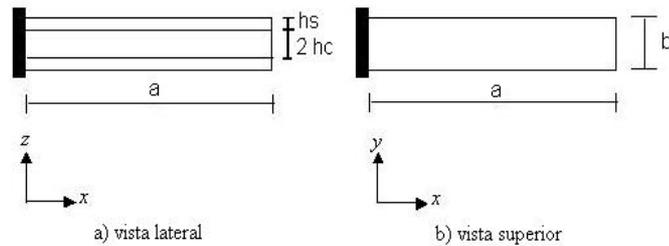


Figura 5.1 – Configuração inicial da viga sanduíche em balanço.

Tabela 1 – Dados de geometria e materiais para viga em balanço.

$h_s = 0,0025 \text{ m}$	$a = 5,0 \text{ m}$
$h_c = 0,0225 \text{ m}$; $h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$b/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 15,26$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada neste exemplo está mostrada na figura 5.2.

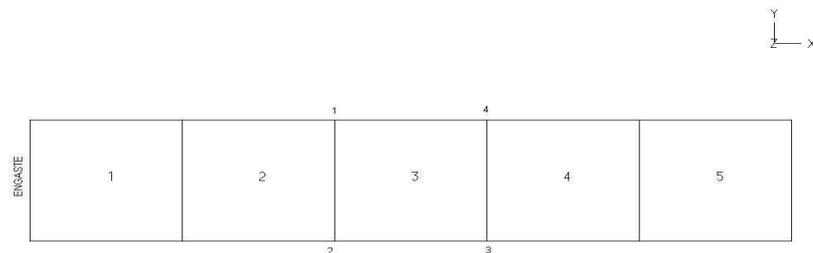


Figura 5.2 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x iterações (figura 5.3) e na tabela 2 histórico do processo de otimização.

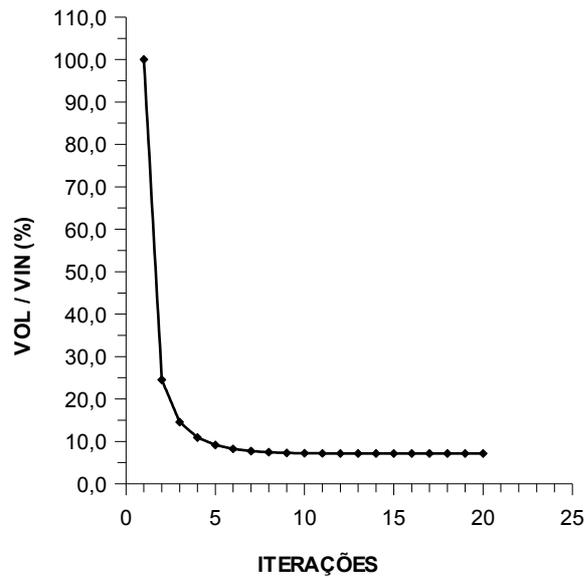


Figura 5.3 – Gráfico volume x iterações para viga em balanço.

Tabela 02 – Histórico do processo iterativo para viga em balanço.

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	648,6	11	7,2	59,3
2	24,5	661,2	12	7,2	46,3
3	14,6	669,7	13	7,2	37,1
4	10,9	692,5	14	7,2	30,5
5	9,2	740,2	15	7,2	25,6
6	8,2	836,7	16	7,1	22,0
7	7,7	1062,9	17	7,1	19,2
8	7,4	2047,3	18	7,1	17,2
9	7,3	1483,4	19	7,1	15,6
10	7,2	77,6	20	7,1	14,3

Na tabela acima VOL é o volume da iteração corrente, VIN é volume inicial do modelo e \bar{L} o desvio padrão das energias Lagrangeanas. Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 3 com as espessuras nodais, e na figura 5.4 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 03 – Espessuras na configuração otimizada da viga em balanço.

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	5,62E-04	5,62E-04	3,44E-04	3,44E-04
2	3,44E-04	3,44E-04	2,19E-04	2,19E-04
3	2,19E-04	2,19E-04	9,41E-05	9,41E-05
4	9,41E-05	9,41E-05	1,96E-05	1,96E-05
5	1,96E-05	1,96E-05	3,55E-07	3,55E-07

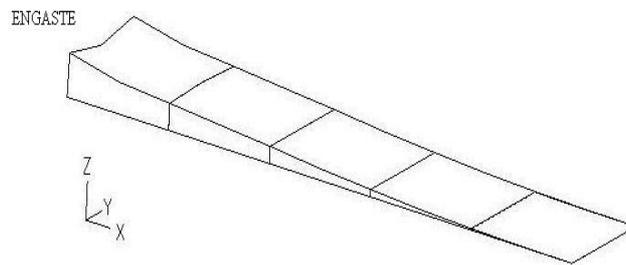


Figura 5.4 - Configuração otimizada das espessuras da face da viga em balanço.

A Figura 5.4 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da viga em balanço a tendência é haver um valor maior para a espessura próximo ao engaste, com redução gradual desta a medida em que se aproxima da extremidade livre. A tabela 2 apresenta em termos numéricos a redução do volume conseguido para as faces da viga sanduíche. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo da face em 7,1 % do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 14,3 % nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 16,9 %, ou seja, uma remoção de 83,1% de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,5 mm, apresenta uma remoção de 67,4 % da massa total da viga sanduíche em balanço. A menor redução neste caso se deve ao limite imposto à redução de espessura abaixo do valor mínimo.

5.2.2 Exemplo 2 . Viga bi-engastada.

Neste exemplo uma placa engastada em dois lados no formato de viga é sujeito a otimização. A configuração inicial da viga é dada na figura 5.5, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 4.

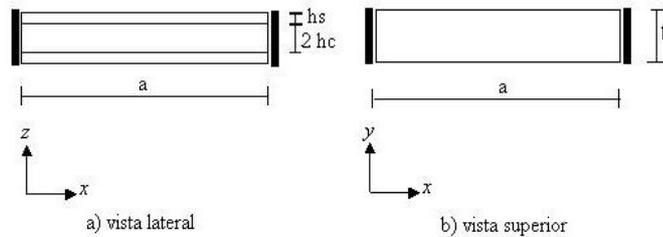


Figura 5.5 – Configuração inicial a viga sanduíche bi-engastada.

Tabela 04 – Dados de geometria e materiais para viga bi-engastada.

$h_s = 0,0025 \text{ m}$	$a = 5,0 \text{ m}$
$h_c = 0,0225 \text{ m} ; h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$b/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 94,42$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada para neste exemplo está mostrada na figura 5.6. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 6.

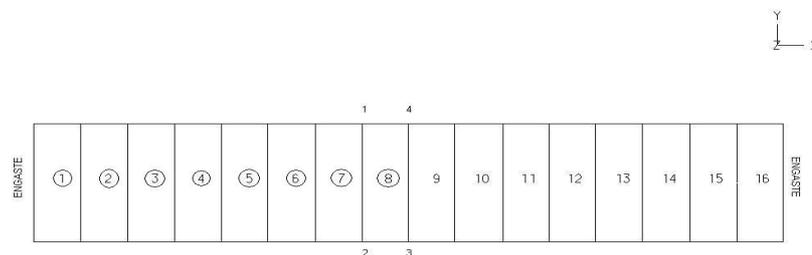


Figura 5.6 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos.

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x

iterações (Figura 5.7) e na tabela 5 histórico do processo de otimização.

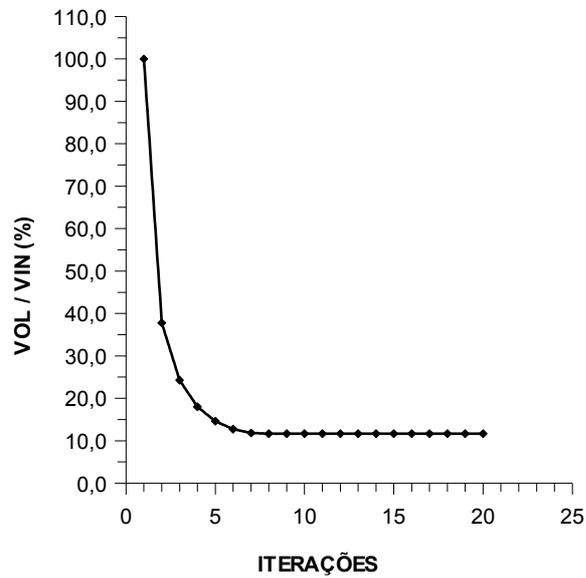


Figura 5.7 – Gráfico volume x iterações para viga bi-engastada.

Tabela 05 – Histórico do processo iterativo para viga bi-engastada.

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	349,4	11	11,7	86,2
2	37,8	402,5	12	11,7	80,7
3	24,3	414,9	13	11,7	76,4
4	18,0	453,7	14	11,7	72,8
5	14,6	583,0	15	11,7	69,8
6	12,7	1493,0	16	11,7	67,2
7	11,8	511,9	17	11,7	64,9
8	11,7	124,7	18	11,7	63,0
9	11,7	104,5	19	11,7	61,3
10	11,7	93,5	20	11,7	59,9

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 6 com as espessuras nodais, e na figura 5.8 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 06 – Espessuras nodais na configuração otimizada da viga bi-engastada.

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	1,26E-03	1,26E-03	7,27E-04	7,27E-04
2	7,27E-04	7,27E-04	5,29E-04	5,29E-04
3	5,29E-04	5,29E-04	3,33E-04	3,33E-04
4	3,33E-04	3,33E-04	1,41E-04	1,41E-04
5	1,41E-04	1,41E-04	2,33E-05	2,33E-05
6	2,33E-05	2,33E-05	4,98E-05	4,98E-05
7	4,98E-05	4,98E-05	6,17E-05	6,17E-05
8	6,17E-05	6,17E-05	6,39E-05	6,39E-05
9	6,39E-05	6,39E-05	6,17E-05	6,17E-05

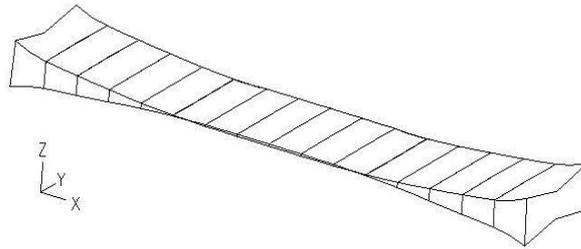


Figura 5.8 – Configuração otimizada das espessuras da face viga engastada.

A figura 5.8 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da viga bi-engastada a tendência é a de haver um valor maior para a espessura próximo ao engaste e no centro da placa, apresentando um forma ondulada. A tabela 5 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da viga sanduíche. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 11,7% do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 59,9 % nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 20,9 %, ou seja, uma remoção de 79,1% de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,5 mm, apresenta uma remoção de 68,3 % da massa total da viga sanduíche bi-engastada.

5.2.3 Exemplo 3 . Viga simplesmente apoiada

Neste exemplo uma placa simplesmente apoiada no formato de viga é sujeita a otimização. A configuração inicial da viga é dada na figura 5.9, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 7.

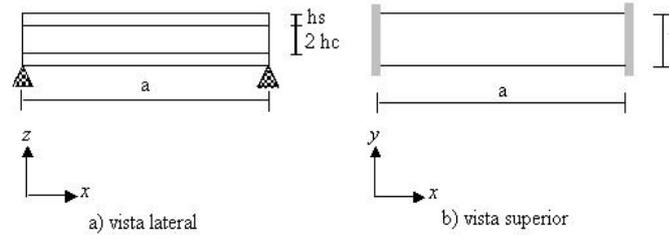


Figura 5.9 – Configuração inicial da viga simplesmente apoiada

Tabela 07 – Dados de geometria e materiais para viga simplesmente apoiada

$h_s = 0,0025 \text{ m}$	$a = 5,0 \text{ m}$
$h_c = 0,0225 \text{ m}$; $h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$b/h = 20$
$\rho_c = 350 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 30,32$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.10. Os elementos em destaque indicam quais elementos têm as espessuras apresentadas na tabela 09.

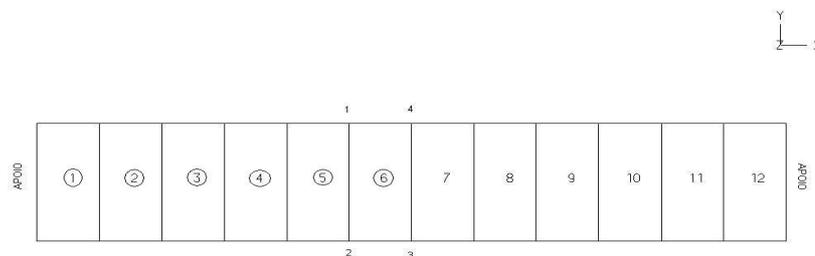


Figura 5.10 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos.

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x

iterações (Figura 5.11) e na tabela 08 histórico do processo de otimização.

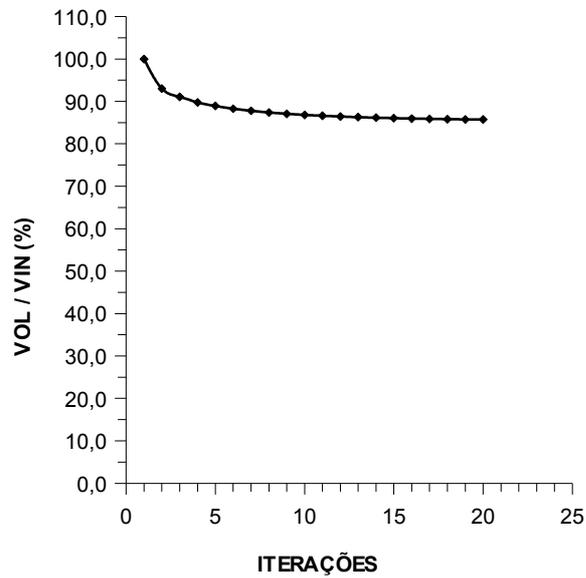


Figura 5.11 – Gráfico volume x iterações para viga simplesmente apoiada

Tabela 08 - Histórico do processo iterativo para viga simplesmente apoiada.

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	70,5	11	86,6	24,3
2	93,0	46,7	12	86,4	23,0
3	91,1	38,6	13	86,3	21,8
4	89,8	35,0	14	86,2	20,5
5	88,9	32,6	15	86,1	19,2
6	88,3	30,8	16	86,0	17,9
7	87,8	29,3	17	85,9	16,7
8	87,4	27,9	18	85,8	15,4
9	87,1	26,7	19	85,8	14,2
10	86,8	25,5	20	85,7	13,1

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 09 com as espessuras nodais, e na figura 5.12 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 09 – Espessuras nodais na configuração otimizada da placa simplesmente apoiada.

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	3,29E-04	3,29E-04	1,46E-03	1,46E-03
2	1,46E-03	1,46E-03	1,96E-03	1,96E-03
3	1,96E-03	1,96E-03	2,05E-03	2,05E-03
4	2,05E-03	2,05E-03	2,04E-03	2,04E-03
5	2,04E-03	2,04E-03	2,01E-03	2,01E-03
6	2,01E-03	2,01E-03	2,00E-03	2,00E-03

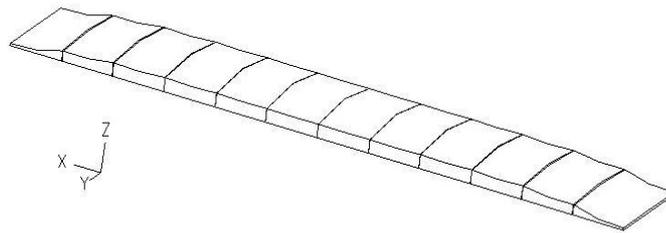


Figura 5.12 – Configuração otimizada das espessuras da face da viga simplesmente apoiada.

A figura 5.12 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da viga simplesmente apoiada a tendência é se ter um valor maior para a espessura no centro da placa com redução gradual desta a medida em que se aproxima das extremidades suportadas. A tabela 08 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da viga sanduíche. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 85,7% do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 13,1% nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 93,4%, ou seja, uma remoção de 6,56% de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,5 mm, apresenta uma remoção de 6,54% da massa total da viga sanduíche apoiada. A quase ausência de redução de massa neste caso, se deve à proximidade da configuração otimizada à forma inicial da viga apoiada, desse modo, uma redução de espessura abaixo da mínima permitida não foi necessária. Este caso foi analisado com a densidade do núcleo igual a 350 Kg/m² diferentemente de todos os outros casos que tem a densidade de 35 Kg/m², e não deve ser usado para comparação de redução de massa.

5.2.4 Exemplo 4 . Placa em balanço

Neste exemplo uma placa sanduíche quadrada engastada em um lado é sujeita a otimização. A configuração inicial da placa é dada na figura 5.13, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 10.

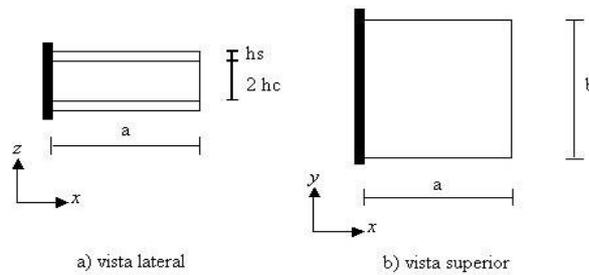


Figura 5.13 – Configuração inicial para placa sanduíche em balanço

Tabela 10 – Dados de geometria e materiais para placa engastada.

$h_s = 0,0025 \text{ m}$	$a = 1,0 \text{ m}$
$h_c = 0,0225 \text{ m} ; h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$b/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 360,4$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

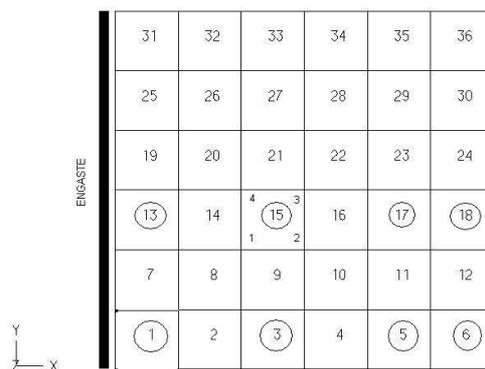


Figura 5.14 Malha de elementos finitos físicos e matemáticos.

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.14. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 12. Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x

iterações (Figura 5.15) e na tabela 11 histórico do processo de otimização.

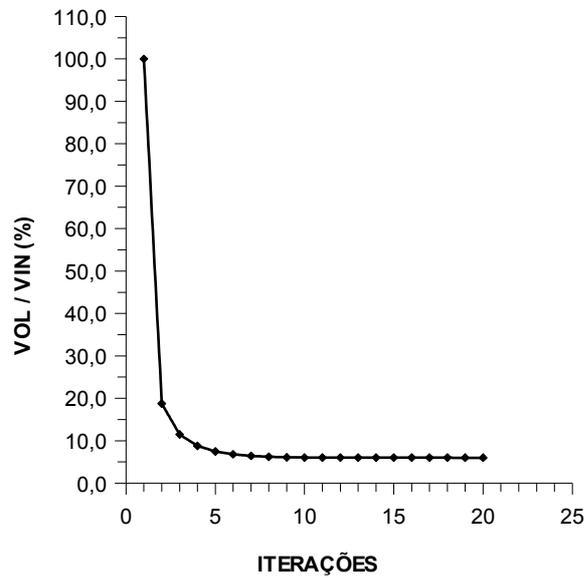


Figura 5.15 – Gráfico volume x iterações para placa em balanço.

Tabela 11 – Histórico do processo iterativo para placa em balanço.

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	424,0	11	6,0	82,5
2	18,8	874,9	12	6,0	55,1
3	11,5	1000,4	13	6,0	39,6
4	8,8	1138,4	14	6,0	29,4
5	7,5	1388,7	15	6,0	21,8
6	6,8	2036,1	16	6,0	17,5
7	6,4	6894,7	17	6,0	14,9
8	6,2	2435,4	18	6,0	13,1
9	6,1	676,6	19	6,0	11,8
10	6,1	164,9	20	6,0	10,8

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 12 com as espessuras nodais, e na figura 5.16 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 12 – Espessuras nodais na configuração otimizada da placa em balanço.

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	2,79E-04	2,57E-04	2,79E-04	3,67E-04
3	2,14E-04	1,35E-04	1,26E-04	2,11E-04
5	5,86E-05	1,28E-05	1,10E-05	5,21E-05
6	1,28E-05	3,63E-07	2,99E-07	1,10E-05
13	4,71E-04	3,34E-04	3,56E-04	5,01E-04
15	2,21E-04	1,24E-04	1,27E-04	2,32E-04
17	5,07E-05	1,10E-05	1,11E-05	5,13E-05
18	1,10E-05	2,80E-07	2,78E-07	1,11E-05

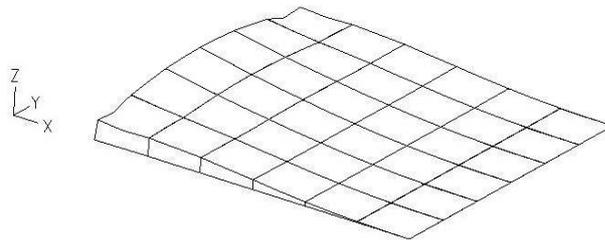


Figura 5.16 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço.

A figura 5.16 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da placa quadrada em balanço a tendência é haver um valor maior para a espessura próximo ao engaste com redução gradual desta a medida em que se aproxima da extremidade livre. A tabela 11 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da placa sanduíche. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 6,0% do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas em 10,8% nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 15,9%, ou seja, uma remoção de 84,1% de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,5 mm, apresenta uma remoção de 69,4% da massa total da placa sanduíche em balanço.

5.2.5 Exemplo 5. Placa engastada nos 4 lados

Neste exemplo uma placa sanduíche quadrada engastada nos 4 lados é sujeita a otimização. A configuração inicial da placa é dada na figura 5.17, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 13.

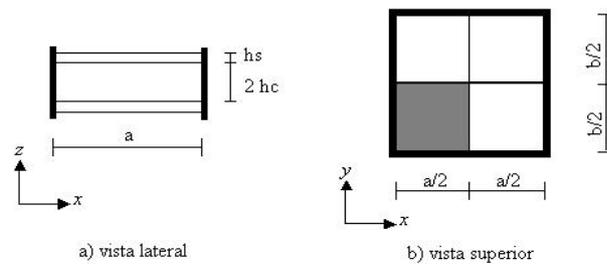


Figura 5.17 – Configuração inicial para placa sanduíche engastada.

Tabela 13 – Dados de geometria e materiais para placa engastada.

$h_s = 0,0025 \text{ m}$	$a = 1,0 \text{ m}$
$h_c = 0,0225 \text{ m} ; h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$b/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 2143$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.18. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 15.

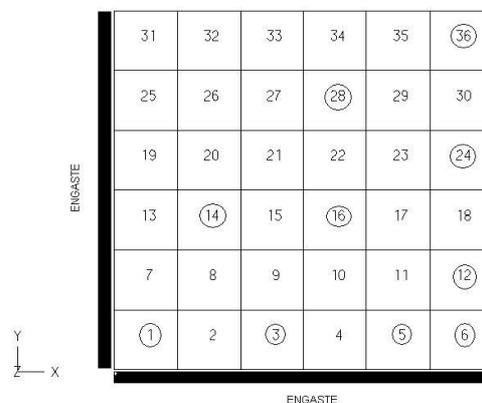


Figura 5.18 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos.

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x iterações (Figura 5.19) e na tabela 14 histórico do processo de otimização.

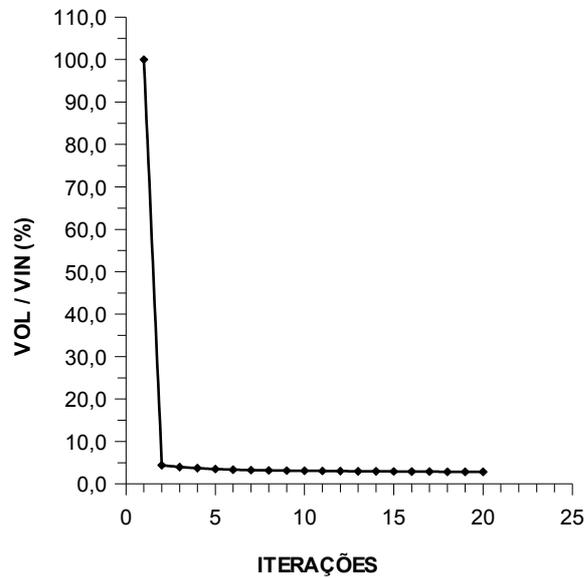


Figura 5.19 – Gráfico volume x iterações para placa engastada

Tabela 14 – Histórico do processo iterativo para placa engastada

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	151,4	11	3,1	46,4
2	4,4	146,8	12	3,0	44,2
3	4,0	111,5	13	3,0	42,2
4	3,7	87,9	14	3,0	40,4
5	3,5	71,7	15	2,9	39,2
6	3,3	61,2	16	2,9	38,3
7	3,3	56,3	17	2,9	37,6
8	3,2	53,2	18	2,9	37,1
9	3,1	50,8	19	2,9	36,6
10	3,1	48,5	20	2,8	36,2

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 15 com as espessuras nodais, e na figura 5.20 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 15 - Espessuras nodais na configuração otimizada da placa engastada

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	1,30E-07	1,82E-07	1,41E-06	1,82E-07
3	5,25E-07	3,13E-05	2,38E-05	5,94E-06
5	1,91E-04	3,39E-04	2,20E-04	1,06E-04
6	3,39E-04	3,92E-04	2,62E-04	2,20E-04
12	2,20E-04	2,62E-04	1,32E-04	1,10E-04
14	5,94E-06	8,76E-06	1,70E-05	2,38E-05
16	1,70E-05	3,79E-05	2,23E-05	3,22E-05
24	1,47E-05	1,56E-05	6,36E-05	5,92E-05
28	2,23E-05	6,25E-05	5,92E-05	1,47E-05
36	7,28E-05	7,59E-05	7,82E-05	7,59E-05

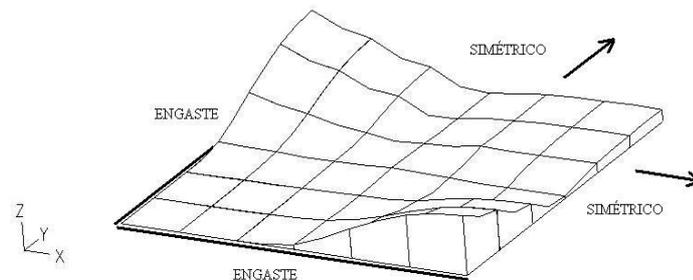


Figura 5.20 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa engastada.

A figura 5.20 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da placa engastada a espessura é maior no centro dos lados de engaste e no meio da placa, e com valores menores nos cantos e ao redor do centro. A tabela 14 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da placa sanduíche engastada. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 2,8% do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 36,2% nesta iteração.

Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 13,1%, ou seja, uma remoção de 86,9% de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,1 mm, apresenta uma remoção de 85,8% da massa total da viga sanduíche engastada nos 4 lados. Observa-se também, neste caso, uma proximidade entre as configurações otimizadas com e sem restrição de espessura, no entanto, aqui, ambas configurações apresentam espessuras muito pequenas.

5.2.6 Exemplo 6. Placa simplesmente apoiada nos 4 lados

Neste exemplo uma placa sanduíche quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados é sujeita a otimização. A configuração inicial da placa é dada na figura 5.21, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 16.

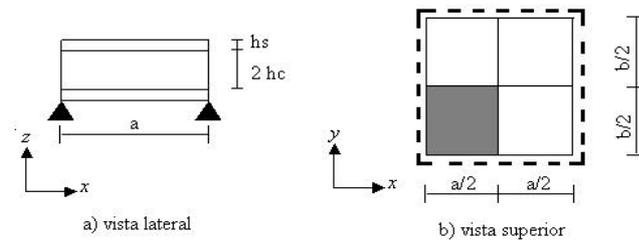


Figura 5.21 – Configuração inicial para placa sanduíche simplesmente apoiada.

Tabela 16 - Dados de geometria e materiais para placa simplesmente apoiada.

$h_s = 0,0025 \text{ m}$	$a = 1,0 \text{ m}$
$h_c = 0,0225 \text{ m}$; $h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$b/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 1586$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.22. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 18.

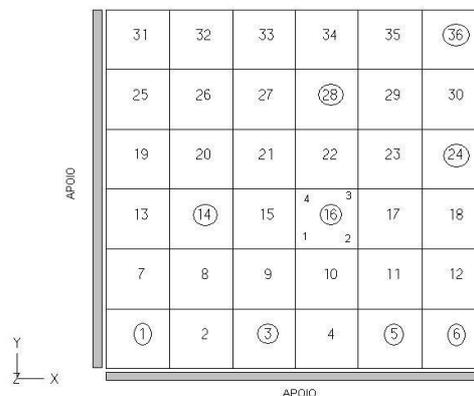


Figura 5.22 - Malha de elementos finitos físicos e matemáticos.

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x iterações (Figura 5.23) e na tabela 17 histórico do processo de otimização.

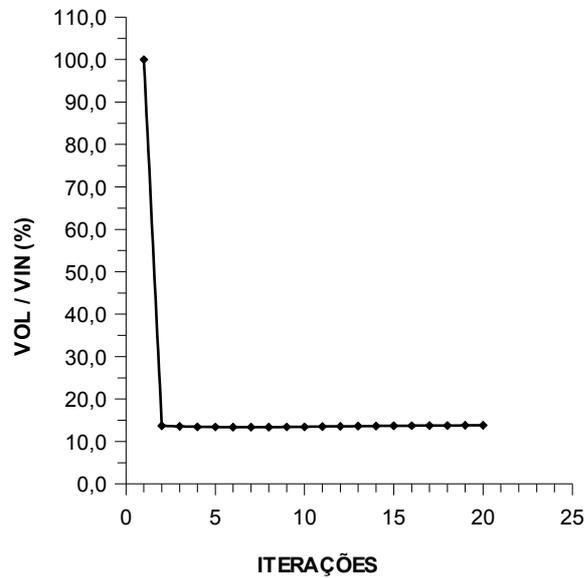


Figura 5.23 - Gráfico volume x iterações para placa simplesmente apoiada.

Tabela 17 - Histórico do processo iterativo para placa simplesmente apoiada.

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	132,8	11	13,5	117,7
2	13,7	1045,0	12	13,6	105,1
3	13,6	713,8	13	13,6	95,6
4	13,5	510,0	14	13,7	88,2
5	13,4	382,0	15	13,7	81,9
6	13,4	295,7	16	13,7	76,7
7	13,4	234,6	17	13,8	72,3
8	13,4	189,7	18	13,8	68,4
9	13,4	157,8	19	13,8	65,1
10	13,5	135,0	20	13,8	62,3

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 18 com as espessuras nodais, e na figura 5.24 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 18 – Espessuras nodais na configuração otimizada da placa simplesmente apoiada

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	1,16E-04	2,66E-04	1,22E-03	2,66E-04
3	2,57E-04	2,70E-04	1,24E-03	1,31E-03
5	2,80E-04	2,65E-04	2,67E-04	8,03E-04
6	2,65E-04	9,31E-05	1,28E-04	2,67E-04
12	2,67E-04	1,28E-04	8,45E-05	5,77E-05
14	1,31E-03	1,43E-03	7,92E-04	1,24E-03
16	7,92E-04	1,85E-04	2,38E-05	1,94E-04
24	8,00E-05	9,33E-05	1,02E-04	9,72E-05
28	2,38E-05	7,41E-05	9,72E-05	8,00E-05
36	1,05E-04	1,07E-04	1,08E-04	1,07E-04

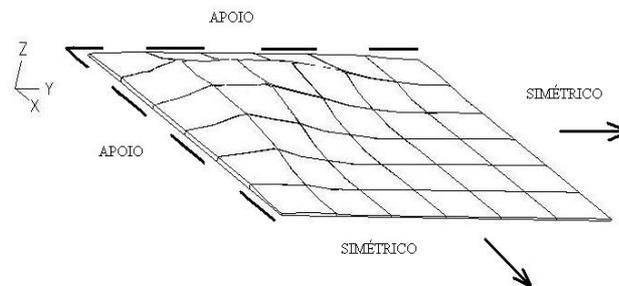


Figura 5.24 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa simplesmente apoiada.

A figura 5.24 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da placa apoiada as espessuras tem valores maiores próximos aos cantos e espessuras menores nos eixos centrais da placa. A tabela 17 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da placa. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 13,8% di volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 62,3% nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 22,9 %, ou seja, uma remoção de 77,1 % de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,1 mm, apresenta uma remoção de 77,38 % da massa total da placa sanduíche apoiada em 4 lados.

5.2.7 Exemplo 7. Placa circular engastada

Neste exemplo uma placa sanduíche circular engastada é sujeita a otimização. A configuração inicial da placa é dada na figura 5.25, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 19.

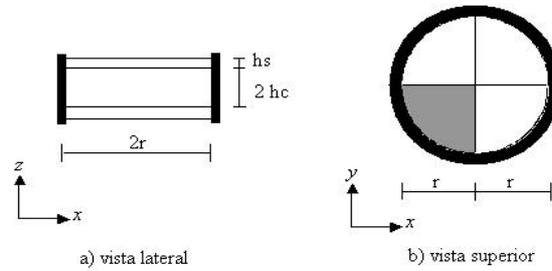


Figura 5.25 – Configuração inicial para placa sanduíche circular engastada

Tabela 19 – Dados de geometria e materiais para placa circular engastada

$h_s = 0,005 \text{ m}$	$r = 1,0 \text{ m}$
$h_c = 0,045 \text{ m}$; $h = 2h_c + 2h_s = 0,1 \text{ m}$	$2r = 2,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$2r/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 1209$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.26. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 21.

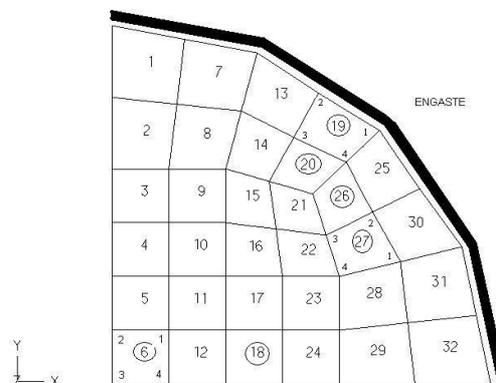


Figura 5.26 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x iterações (Figura 5.27) e na tabela 20 histórico do processo de otimização.

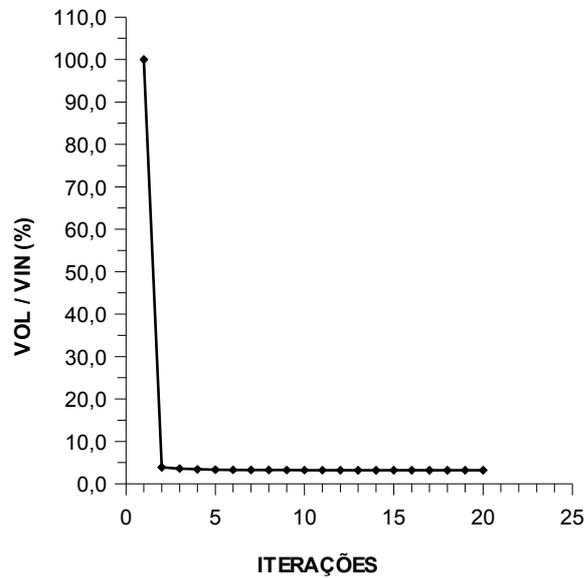


Figura 5.27 – Gráfico volume x iterações para placa circular engastada

Tabela 20 – Histórico do processo iterativo para placa circular engastada

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	128,7	11	3,2	25,3
2	3,9	111,5	12	3,2	24,4
3	3,6	82,0	13	3,2	23,7
4	3,4	61,2	14	3,2	23,1
5	3,3	46,0	15	3,2	22,7
6	3,3	38,2	16	3,2	22,4
7	3,3	33,5	17	3,2	22,2
8	3,3	30,3	18	3,2	22,0
9	3,2	28,1	19	3,2	21,8
10	3,2	26,5	20	3,2	21,7

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 21 com as espessuras nodais, e na figura 5.28 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 21 – Espessuras nodais na configuração otimizada da placa circular engastada

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
6	1,48E-04	1,55E-04	1,61E-04	1,54E-04
16	8,53E-05	2,42E-05	1,07E-04	2,81E-05
18	2,74E-05	1,17E-04	1,24E-04	4,40E-05
19	1,94E-04	3,95E-04	2,53E-04	1,81E-04
20	1,81E-04	2,53E-04	1,26E-04	1,12E-04
26	3,20E-04	1,81E-04	1,12E-04	1,57E-04
27	2,43E-04	3,20E-04	1,57E-04	1,47E-04

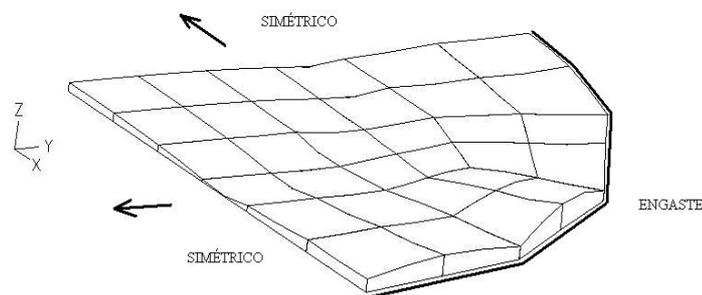


Figura 5.28 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa circular engastada.

A figura 5.28 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da placa circular engastada a mesma tendência de perfil encontrada na viga e placa engastadas pode verificada, com espessuras maiores no centro e no engaste. A tabela 20 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da placa sanduíche. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 3,2% do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 21,7% nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 13,2 %, ou seja, uma remoção de 86,8 % de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,1 mm, apresenta uma remoção de 86,7 % da massa total da placa sanduíche circular engastada.

5.2.8 Exemplo 8. Placa circular simplesmente apoiada

Neste exemplo uma placa sanduíche circular simplesmente suportada é sujeita a otimização. A configuração inicial da placa é dada na figura 5.29, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 22.

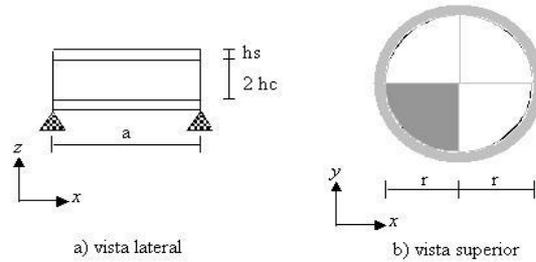


Figura 5.29 – Configuração inicial para placa sanduíche circular simplesmente apoiada

Tabela 22 – Dados de geometria e materiais para placa circular simplesmente apoiada

$h_s = 0,005 \text{ m}$	$r = 1,0 \text{ m}$
$h_c = 0,045 \text{ m} ; h = 2h_c + 2h_s = 0,05 \text{ m}$	$2r = 2,0 \text{ m}$
$\rho_s = 2680 \text{ kg/m}^3$	$2r/h = 20$
$\rho_c = 35 \text{ kg/m}^3$	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$
$\Omega = 898,78$	$E = 68,9 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.30. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 24.

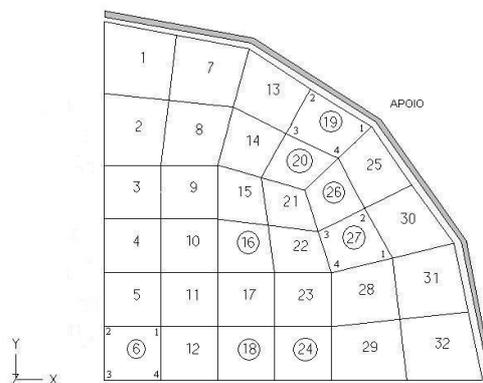


Figura 5.30 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x iterações (Figura 5.31) e na tabela 23 histórico do processo de otimização.

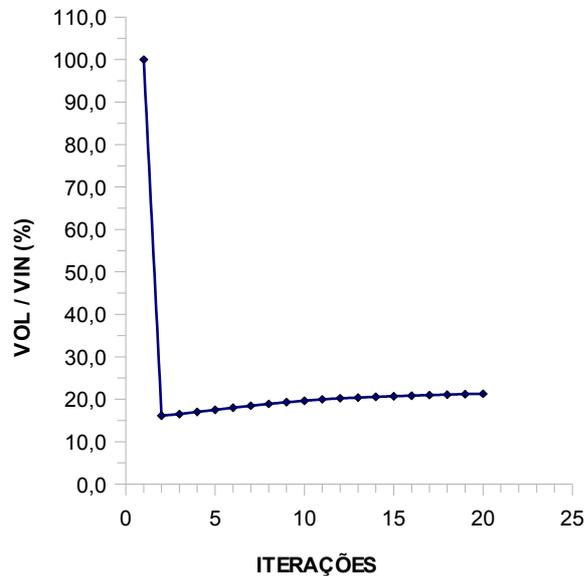


Figura 5.31 – Gráfico volume x iterações para placa circular simplesmente apoiada.

Tabela 23 – Histórico do processo iterativo para placa circular simplesmente apoiada.

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	119,1	11	20,0	145,5
2	16,1	1303,4	12	20,2	136,8
3	16,5	2925,4	13	20,4	124,7
4	17,0	2359,0	14	20,6	119,7
5	17,5	796,7	15	20,7	111,7
6	18,0	453,7	16	20,8	106,2
7	18,5	313,3	17	21,0	102,2
8	18,9	239,5	18	21,1	96,4
9	19,3	193,5	19	21,2	94,8
10	19,7	163,9	20	21,3	88,3

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 24 com as espessuras nodais, e na figura 5.32 com a distribuição de espessuras na face da placa. Este exemplo apresentou um aspecto particular no gráfico volume x iterações, existe configurações de volume menor do que a configuração otimizada após convergência. Embora os valores de volume a partir da segunda iteração sejam próximos, nenhum outro exemplo apresentou tal comportamento. Tal fato merece atenção e será comentado mais adiante.

Tabela 24 – Espessuras nodais na configuração otimizada da placa circular simplesmente apoiada.

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
6	2,33E-04	2,34E-04	2,35E-04	2,34E-04
16	1,55E-04	1,79E-04	2,11E-04	1,78E-04
18	2,08E-04	2,26E-04	2,27E-04	2,08E-04
19	2,69E-03	6,14E-03	2,65E-03	3,35E-03
20	3,35E-03	2,65E-03	8,90E-05	3,05E-04
24	1,47E-04	2,08E-04	2,08E-04	1,38E-04
26	2,78E-03	3,35E-03	3,05E-04	8,51E-05
27	2,52E-03	2,78E-03	8,51E-05	3,75E-05

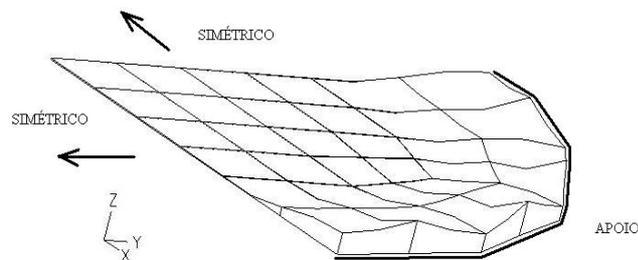


Figura 5.32 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa circular simplesmente apoiada.

A figura 5.4 mostra que na configuração otimizada das espessuras da face da placa circular suportada a espessura é maior no centro desta com valores reduzidos ao longo do contorno suportado. A tabela 23 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da placa sanduíche circular. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 21,3 % do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Larangeanas ficou em 88,27 % nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 28,5 %, ou seja, uma remoção de 71,5 % de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,1 mm, apresenta uma remoção de 71,5 % da massa total da placa sanduíche circular apoiada. Mostrando que a configuração otimizada em ambos os casos espessura poucas espessuras estão abaixo da mínima ou igual a mesma. Outro aspecto a ser salientado é que a forma final da configuração otimizada deste caso não apresenta a "suavidade" apresentada nos outros. Este fato será explorado no final do capítulo.

5.2.9 Exemplo 9. Placa trapezoidal "delta wing"

Neste exemplo uma placa sanduíche de formato trapezoidal é sujeita a otimização. A configuração inicial da placa é dada na figura 5.33, a geometria e materiais utilizados são fornecidos na tabela 25.

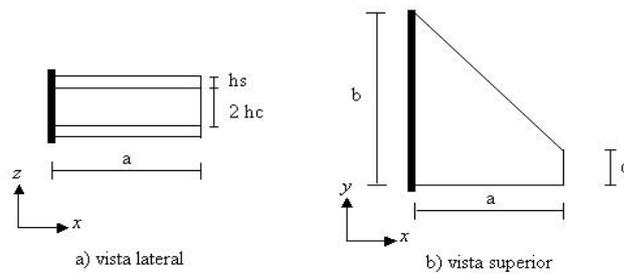


Figura 5. 33 – Configuração inicial para placa sanduíche trapezoidal

Tabela 16 - Dados de geometria e materiais para placa trapezoidal.

$hs = 0,0025$ m	$a = 1,0$ m
$hc = 0,0225$ m ; $h = 2hc + 2hs = 0,05$ m	$b = 1,25$ m ; $c = 0,25$ m
$\rho_s = 2680$ kg/m ³	$b/h = 25$
$\rho_c = 35$ kg/m ³	$G_{xz} = 13,0 \cdot 10^7$ N/m ²
$\nu = 0,34$	$G_{yz} = 13,0 \cdot 10^7$ N/m ²
$\Omega = 471,2$	$E = 68,9 \cdot 10^9$ N/m ²

A malha de elementos finitos utilizada para este exemplo está mostrada na figura 5.34. Os elementos em destaque são aqueles cujas espessuras são apresentadas na tabela 27.

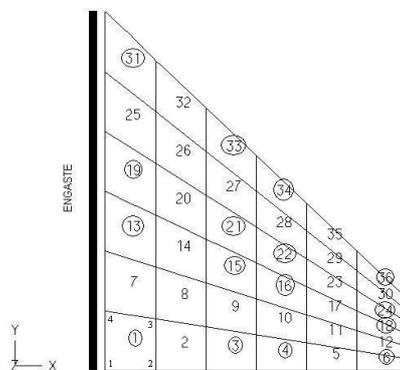


Figura 5.34 – Malha de elementos finitos físicos e matemáticos

Os resultados obtidos ao longo do processo iterativo estão colocados no gráfico volume x iterações (Figura 5.35) e na tabela 26 histórico do processo de otimização.

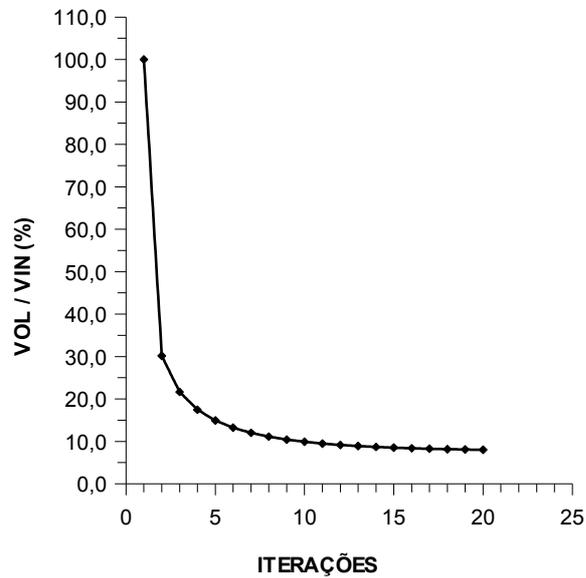


Figura 5.35 – Gráfico volume x iterações para placa trapezoidal

Tabela 26 – Histórico do processo iterativo para placa trapezoidal

ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)	ITER.	$\frac{VOL}{VIN}$ (%)	\bar{L} (%)
1	100,0	182,5	11	9,5	247,9
2	30,2	216,8	12	9,2	252,2
3	21,7	223,2	13	8,9	257,4
4	17,5	227,1	14	8,7	263,7
5	14,9	230,1	15	8,5	271,5
6	13,2	232,7	16	8,4	281,3
7	12,0	235,3	17	8,3	294,2
8	11,1	238,0	18	8,2	311,6
9	10,4	240,9	19	8,1	336,2
10	9,9	244,2	20	8,0	372,9

Os resultados obtidos da otimização estão mostrados na tabela 26 com as espessuras nodais, e na figura 5.36 com a distribuição de espessuras na face da placa.

Tabela 27 – Espessuras nodais na configuração otimizada da placa trapezoidal

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3	NÓ 4
1	6,52E-04	4,53E-04	4,15E-04	6,11E-04
3	3,38E-04	1,92E-04	1,73E-04	2,95E-04
4	1,92E-04	7,35E-05	7,11E-05	1,73E-04
6	1,51E-05	5,97E-07	7,05E-07	1,61E-05
13	4,55E-04	3,43E-04	2,37E-04	2,49E-04
15	2,40E-04	1,44E-04	1,27E-04	1,94E-04
16	1,44E-04	6,42E-05	5,99E-05	1,27E-04
18	1,63E-05	7,11E-07	7,44E-07	1,68E-05
19	2,49E-04	2,37E-04	1,49E-04	1,15E-04
21	1,94E-04	1,27E-04	1,20E-04	1,58E-04
22	1,27E-04	5,99E-05	5,81E-05	1,20E-04
24	1,68E-05	7,44E-07	8,04E-07	1,69E-05
31	6,20E-05	9,79E-05	6,98E-05	5,38E-05
33	1,36E-04	1,20E-04	1,03E-04	1,06E-04
34	1,20E-04	5,97E-05	4,91E-05	1,03E-04
36	1,69E-05	7,88E-07	3,60E-07	8,89E-06

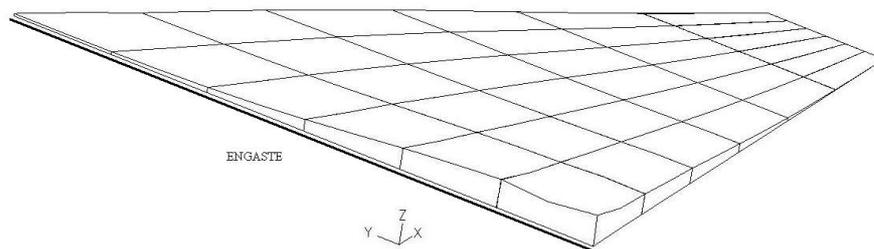


Figura 5.36 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa trapezoidal

A figura 5.36 mostra que a configuração otimizada das espessuras da face da placa trapezoidal engastada num só lado tem a mesma tendência da placa em balanço só que a espessura máxima foi deslocada mais para o canto desta. A tabela 23 apresenta em termos numéricos a redução de volume conseguido para as faces da placa sanduíche trapezoidal. Os valores mostrados indicam a estabilização do volume mínimo em 8,0% do volume inicial de referência. O desvio padrão das energias Lagrangeanas ficou em 372,9% nesta iteração. Em termos de massa total da placa otimizada em relação a massa total da placa sanduíche inicial, obteve-se o valor de 17,1 %, ou seja, uma remoção de 82,9 % de massa da placa. O mesmo exemplo analisado com restrição de espessura mínima igual a 0,5 mm, apresenta uma remoção de 71,5 % da massa total da placa trapezoidal engastada.

5.3 Exemplos adicionais

Todos os exemplos apresentados até agora utilizam a mesma discretização tanto para o problema de vibrações como para o problema de otimização. Para exemplificar as possibilidades de utilização do método, são mostrados a seguir alguns casos onde o número de elementos finitos físicos é diferente do número de elementos matemáticos.

O primeiro caso apresenta a configuração otimizada da placa engastada em um só lado, exemplo 5.2.4, placa em balanço, com o emprego de funções lineares para a interpolação da espessura. A interpolação quadrática para o cálculo dos modos de vibração fica mantida. A redução da massa conseguida neste exemplo foi de 84,1 %, mostrando o mesmo valor alcançado pela interpolação quadrática após 20 iterações, tabela 11. Observando-se as figuras 5.16 e 5.37 nota-se que ambas configurações são quase idênticas.

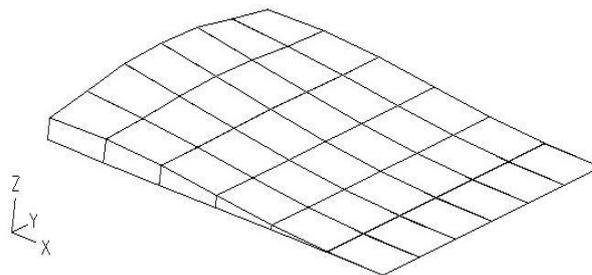


Figura 5.37 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço com interpolação linear na espessura.

Ainda, para o mesmo tipo de placa, são apresentados a seguir dois casos onde o número de elementos físicos é diferente do número de elementos matemáticos. Um deles mostra a configuração otimizada com o emprego de 9 elementos físicos com 4 elementos matemáticos cada e funções lineares para a espessura, figura 5.38 e figura 5.39. No outro caso, a continuidade da distribuição de espessura é desconsiderada e utiliza-se apenas uma espessura em cada elemento físico, figura 5.40. Os valores de redução da massa estão apresentados nos títulos das figuras. São apresentados gráficos da redução do volume das faces das placas em função do número de iterações, figura 5.41, para facilitar a comparação da convergência do método nos 4 casos de placa em balanço analisados.

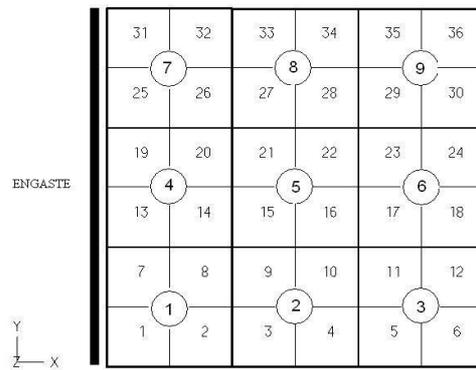


Figura 5.38 – Malha com 9 elementos finitos físicos e 36 elementos matemáticos para o caso da placa em balanço.

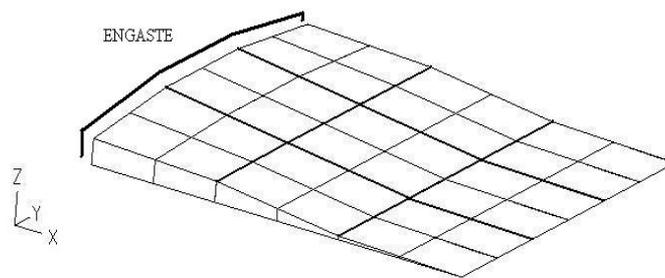


Figura 5.39 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço com 9 elementos físicos e 36 elementos matemáticos. Interpolação linear na espessura. Redução de massa 84,0%

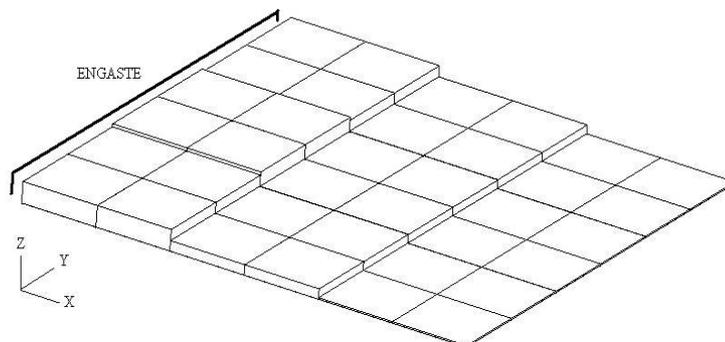
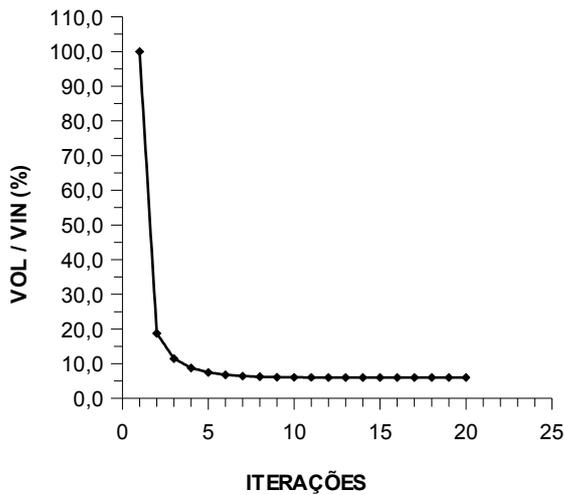
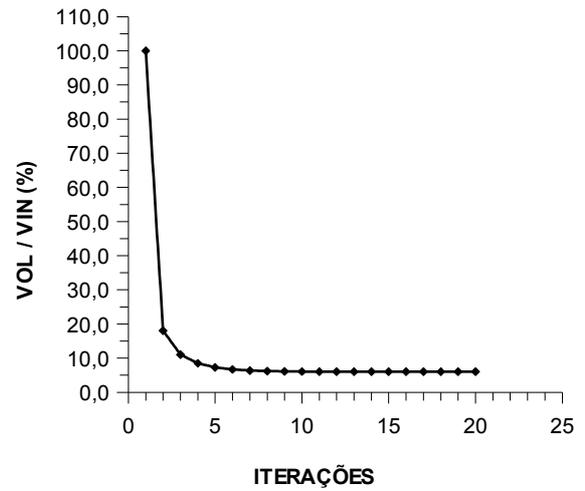


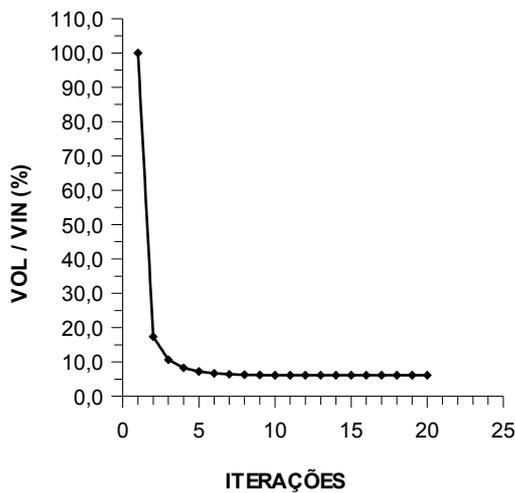
Figura 5.40 – Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço. Espessura constante em cada elemento físico. Redução de massa 83,1 %



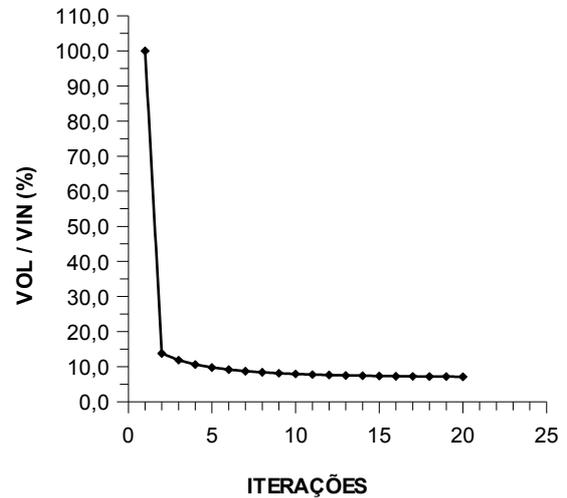
a) caso interpolação 9 nós



b) caso interpolação 4 nós



c) interpolação 4 nós, 9 elementos físicos



d) espessuras constantes, 9 elementos físicos

Figura 5.41 - Convergência para o ótimo. Placa em balanço com diferentes interpolações e número de elementos físicos.

Analisando-se os gráficos acima verifica-se que não existe diferença entre os casos a,b e c, apresentados na figura 5.41, indicando que uma quantidade menor de elementos físicos parece afetar muito pouco o resultado da otimização, com a vantagem da redução do tamanho do problema.

Com relação a capacidade do método de levar em consideração restrições nas espessuras, além dos resultados citados nos exemplos de 1 a 9, para exemplificar visualmente este aspecto, é apresentada na figura 5.42, a configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço com 9 elementos físicos e com restrição de espessura mínima de 0,5 mm .

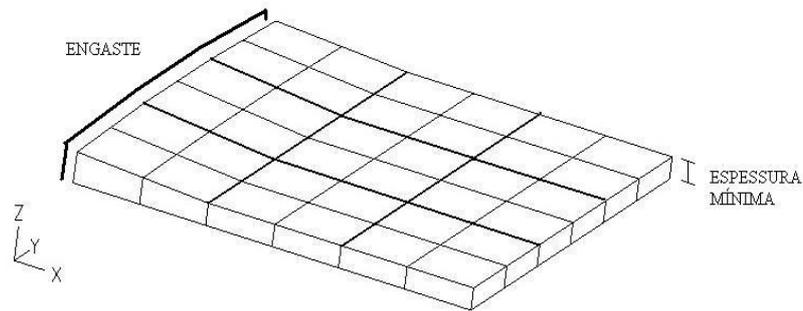


Figura 5.42 - Configuração otimizada das espessuras da face da placa em balanço com 9 elementos físicos. Espessura mínima de 0,5 mm. Redução de massa 69,4 % .

No último exemplo é utilizada uma malha com 8 elementos finitos físicos e 32 elementos matemáticos para o caso da placa circular engastada, figura 5.43. A interpolação é linear para a espessura nos elementos físicos. Observando-se a figura 5.44 percebe-se que cada grupo de 4 elementos matemáticos mantém a mesma inclinação em todos seus elementos, isto porque apenas 4 valores nodais de espessura definem a superfície de cada elemento físico. A redução foi de 86,5 % da massa inicial, valor muito próximo ao encontrado no exemplo 5, placa circular engastada com 32 elementos físicos e matemáticos, que apresentou redução de 86,9 % da massa inicial.

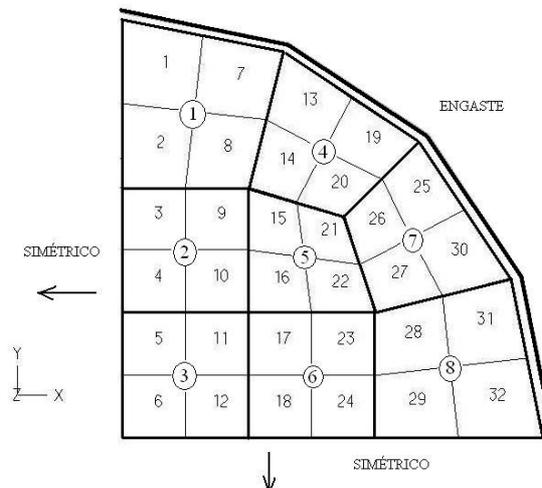


Figura 5.43 – Malha com 8 elementos físicos e 32 matemáticos para o caso de placa circular engastada.

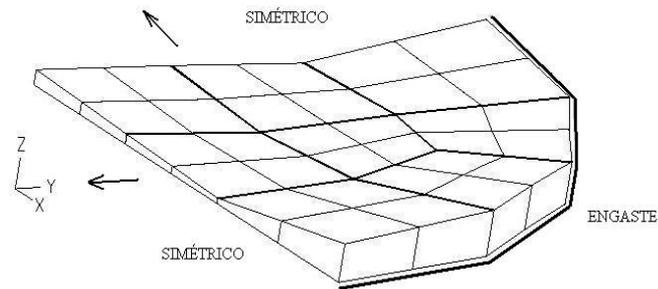


Figura 5.44 – Configuração otimizada das espessuras da face para placa circular engastada com 8 elementos físicos. Interpolação linear. Redução de 86,5 % da massa.

5.4 – Conclusões do capítulo

Os resultados apresentados neste capítulo servem para dar uma ideia geral de como se comporta o método de otimização estrutural empregado e qual as características que as placas sanduíche assumem para o problema de minimização de peso, ou massa, com restrição na frequência fundamental de vibração.

Dentre os diversos aspectos possíveis de serem analisados a ênfase foi dada na influência que a variedade de formatos geométricos e condições de contorno provoca na otimização de placas sanduíche, e ainda, alguns poucos casos mostram a influência de diferentes discretizações e interpolações para estas placas. Em cada um dos exemplos procurou-se mostrar a redução de massa ocorrida nas placas sanduíche como um todo, o desvio na satisfação das condições de ótimo e a configuração final da placa otimizada. A tabela 28 apresenta um resumo dos valores alcançados. Os exemplos apresentados tem limite de espessura mínima praticamente igual a zero.

Tabela 28 – Redução da massa total e desvio padrão percentual das energias Lagrangeanas para os diversos tipos de placas sanduíche e condições de contorno

EXEMPLO	REDUÇÃO DE MASSA%	$\left \frac{\bar{\Gamma}}{L_M} \right $
1 - viga em balanço	83,1	14,3
4 - placa quadrada em balanço	84,1	10,8
10 - placa em balanço com interpolação linear	84,1	338,0
11 - placa em balanço com 9 elementos físicos	84,0	4657,0

12 - placa em balanço com elemento físico constante	83,1	167,8
9 - placa trapezoidal engastada de um lado	82,9	372,9
2 - viga bi-engastada	79,1	59,9
5 - placa quadrada engastada nos 4 Lados	86,9	36,2
7 - placa circular engastada	86,8	21,7
13 - placa circular engastada com 8 elementos físicos	86,5	40,5
6 - placa quadrada simplesmente apoiada	77,1	62,3
8 - placa circular simplesmente apoiada	71,5	88,3

A partir dos resultados obtidos neste capítulo pode-se concluir:

Com relação ao volume otimizado, os melhores valores conseguidos são para os casos de placa quadrada e circular engastadas, exemplos 5, 7 e 13. As menores reduções de massa ocorrem para placa retangular e placa circular com o contorno simplesmente apoiado, exemplos 6 e 8. Este fato sugere que a Energia Lagrangeana média das placas simplesmente apoiadas, com espessura constante, é mais igualmente distribuída, portanto não se consegue grande diminuição do peso devido a uma certa proximidade entre a configuração ótima e a configuração inicial.

Observando os quatro exemplos da placa em balanço 4,10,11 e 12 e conclui-se que o valor conseguido para o peso mínimo é pouco influenciado pelo tipo de discretização e interpolação. Este fato favorece a utilização de uma quantidade menor de elementos físicos, ganhando-se em tempo computacional. Muito embora a quantidade de resultados apresentados não permita uma conclusão segura, pode-se afirmar que a tendência é se conseguir valores menores para o peso mínimo com malhas mais refinadas de elementos físicos e com variação de espessura em cada um deles, esse ganho em precisão deve ser contrastado com o aumento do número de variáveis.

Com relação ao desvio padrão percentual, (desvio padrão da configuração otimizada \bar{L} dividido pela média das energias Lagrangeanas L_M da configuração otimizada) verificou-se que todos os exemplos apresentaram a redução desses valores, mostrando que as condições de ótimo tendem a ser satisfeitas em todos os exemplos. Embora, em alguns casos esses valores pareçam elevados, a redução dos mesmos é drástica, mesmo para pequenas variações de espessuras nota-se grande variação no valor desses desvios. Outro aspecto é que a diminuição do desvio não é linear, em alguns casos o valor sobe bastante antes de diminuir drasticamente.

Esses comportamentos do desvio padrão das energias pode ser observado nas tabelas do histórico do processo iterativo em cada exemplo. Embora a maioria dos exemplos apresentados não apresente a solução completa das condições de ótimo, seja pela convergência mais lenta comparada com a das espessuras, ou seja pela limitação de espessura mínima que impede a satisfação completa das mesmas, os resultados mostram a tendência tanto de um possível valor para o peso mínimo como para a configuração ótima fornecendo uma boa orientação para o projeto otimizado.

Com relação à configuração otimizada, observa-se que a influência da condição de contorno na forma final é decisiva. Todas as placas com a mesma condição de contorno mas com geometrias diferentes apresentam um mesmo tipo de perfil para a distribuição de espessura. Os casos de engaste em um só lado apresentam a espessura maior na região do engaste, com diminuição gradual desta nas extremidades livres. Os casos de engaste nas extremidades e em todo contorno apresentam a tendência de uma configuração ondulada com a espessura maior nos cantos e no centro das placas. Os casos de apoio simples da placa retangular e circular mostram as espessuras maiores próximo aos cantos e menores no centro da placa. O caso da viga apoiada não será usada para comparação pois esse exemplo não termina o processamento com a densidade do núcleo igual a $35,0 \text{ Kg/m}^2$. O sistema não converge para uma solução.

Outro aspecto a ser comentado é com relação ao exemplo 8, placa circular apoiada, que apresentou configurações de volume menor, durante o processo iterativo, do que a configuração otimizada após convergência. Nenhum outro exemplo apresentou tal comportamento. Em virtude desse aspecto ter ocorrido somente ao final da elaboração desse trabalho um aprofundamento no assunto não foi possível. Uma primeira investigação sugerida seria no sentido de verificar a existência de configurações sub ótimas e ótimos locais.

Um fato importante a ser salientado é a de que em todos os exemplos observa-se que a tendência da solução ótima é dada logo nas primeiras iterações, tanto no valor do peso mínimo como na configuração ótima. Isto permite que para um problema de maior porte apenas as iterações iniciais sejam efetuadas, ganhando-se tempo de processamento em troca de uma maior precisão.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

6.1 Resumo do trabalho

O presente trabalho procura dar seqüência ao estudo e aplicação do método de otimização estrutural desenvolvido por Barcelos (1977). O método é utilizado para deduzir as condições de ótimo de placas homogêneas semi-espessas e placas sanduíche com limitação na frequência natural de vibração. Vários exemplos de placas sanduíche otimizadas são testados e os aspectos de peso mínimo, convergência e dependência da configuração ótima com relação às condições de contorno são analisadas.

No Capítulo 1 é apresentado um pequeno histórico do desenvolvimento dos métodos de otimização estrutural com vantagens e desvantagens de cada abordagem, e focaliza-se a atenção no método proposto por Barcellos (1977). No Capítulo 2 a teoria matemática, os conceitos e fundamentos do método empregado são definidos. O Capítulo 3 utiliza o procedimento de otimização para deduzir as condições de ótimo de minimização de massa de placas homogêneas e placas sanduíche com restrição na primeira frequência natural de vibração. Os aspectos de implementação numérica do procedimento e programa de elementos finitos são apresentadas no Capítulo 4. No Capítulo 5 diversos exemplos numéricos de placas sanduíche otimizadas com vários formatos e condições de contorno são mostrados.

6.2 Conclusões

As conclusões do trabalho podem ser divididas em dois aspectos. Conclusão quanto a aplicabilidade do método ao problema de otimização de placas. Conclusão quanto ao comportamento das diversas placas diante da otimização. As principais conclusões quanto ao comportamento das placas já foram apresentadas no final do capítulo V. As conclusões quanto a aplicabilidade do método são as seguintes:

a) Conforme previsto, pelo aspecto teórico o método se mostrou aplicável também ao problema de minimização da massa estrutural de placas homogêneas semi-espessas e placas sanduíche além dos casos já testados de haste, vigas, colunas e placas finas. Para o caso de placas homogêneas semi-espessas somente as condições de ótimo foram obtidas, pois a implementação numérica neste caso oferece dificuldades na utilização das fórmulas de recorrência para atualização das espessuras. Cheng e Olhoff (1981) citam que este tipo de problema ocorre devido a rigidez de flexão ser função cúbica da espessura, enquanto que para

o caso de placas sanduíche a rigidez é função linear das espessuras da face, sendo assim é necessário uma análise mais cuidadosa da atualização das espessuras para o caso de placas homogêneas.

b) Uma das principais características dos métodos de Critério de Otimalidade é a independência entre o número de variáveis de projeto e o número de iterações necessárias para se atingir o mínimo. Este fato pode ser observado nas curvas de volume versus iterações. Todos os gráficos mostram a mesma tendência de uma rápida diminuição da quantidade otimizada nas primeiras iterações (4 ou 5) e lenta diminuição ou estabilização nas iterações finais.

c) A taxa de convergência e a satisfação total das condições de ótimo são afetadas por vários fatores: forma da placa, condições de contorno, limitação de espessura mínima, discretização, relação entre as densidades do núcleo e da face, e relação entre as espessuras da face e do núcleo. Analisando-se os históricos dos processos iterativos pode-se observar as diferenças de evolução, na satisfação das condições de ótimo, entre os diversos exemplos apresentados. Este aspecto, apesar de ter sido observado, não foi suficientemente estudado e analisado a ponto de se fornecer explicações detalhadas e convincentes do por quê de tais diferenças.

6.3 Recomendações para trabalhos futuros

a) Deduzir equações de ótimo e implementar exemplos numéricos para minimização de peso com restrição na frequência natural para cascas homogêneas ou sanduíche.

b) Estender o método para resolver problemas de minimização de peso envolvendo restrições nos níveis de tensões, deslocamentos, flambagem, etc.

c) Análise mais detalhada dos fatores que influenciam a satisfação total das condições de ótimo.

d) Implementação de um programa mais eficiente para melhora da flexibilidade na escolha da malha de elementos finitos físicos.

e) A otimização das espessuras do núcleo, com espessuras das faces constantes ou não, é um problema interessante também a ser analisado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AHMED, K.M. **Static and Dynamic Analysis of Sandwich Structures by The Method of Finite Elements**. Journal of Sound and Vibration, 18(1), 1971, pp.75-91.
- [2] AL-KAABI, S.A. e AKSU, G. **Free Vibration Analysis of Mindlin Plates with Parabolically Varyng Thickness**. Computers and Structures. Vol. 34, nº 3, 1989, pp. 395-399.
- [3] BALASUBRAMANIAN, B., SVOBODA, M., BAUER, W. **Structural Optimization of I. C. Engines Subject to Mechanical and Termal Loads**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 89, 1991, pp. 337-360.
- [4] BHAT, R. B., LAURA, P. A. A., GUTIERREZ, R. G., CORTINEZ, V. H. e SANZI, H.C. **Numerical Expirements on the Determination of Natural Frequencies of Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non-Uniform Thickness**, Journal of Sound and Vibrations, 138(2), 1990, 205-219.
- [5] BARCELLOS, C. S. **A Strutural Optimization Method Combining Finite Element and Control Theory Techniques**, Tese de Doutorado Universidade de Minnesota, 1977, pp. 145.
- [6] BENDSOE, M. P. e KIKUCHI, N. **Generating Optimal Topologies in Strutural Design Using a Homogenization Method**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, 1988, pp. 197-224.
- [7] BECKER, E. B., CAREY, G. F. e ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, Vol. 1, 1981, pp. 258.
- [8] CESARI, L. **Optimization with Partial Differencial Equations in Dieudonné-Rashevsky Form and Conjugate Problems**, A. R. M. A., 33, 1969, 5.
- [9] DING, Y. **Shape Optimization of Structures: A Literature Survey**, Computer and Structures, Vol. 24, nº 6, 1986, pp. 985-1004.
- [10] DYM, C. L. e SHAMES, I. H. **Solid Mechanics: A Variational Approach**, Mc Graw-Hill Series in Advanced Engineering, 1973, pp. 556.
- [11] FLEURY, C. e SCHMIT, L. A. **Dual Methods and Aproximation Concepts in Structural Synthesis**, NASA CR 3226, 1980.
- [12] Ha, K. H. **Finite Element Analysis of Sandwich Plates: An Overview**, Computers and Structures, Vol. 37, nº 4, 1990, pp. 397-403.
- [13] HAFTKA, R. T. **Simultaneous Analysis and Design**, A. I. A. A. Journal, Vol. 23, nº 7, 1985, pp. 1.099-1.103.
- [14] HAFTKA, R. T., GRANDHI, R. V. **Structural Shape Optimization - A Survey**, Computer Methods in Apllied Mechanics and Engineering, 57, 1986, pp. 91-106.

- [15] KHOT, N. S. e BERKE, L. **Structural Optimization Using Optimality Criteria Methods**. New Directions in Optimum Strutural Design, editado por E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragdill, e O. C. Zienkiewicz, Wiley, New York, 1984, pp. 47-87
- [16] KIM, Y. e NAGAO, H. **Optimum Design of a Sandwich Plate with a Hole or Notch**, J. S. M. E. International Journal, Series I, Vol. 31, n° 2, 1988, pp. 215-219.
- [17] KOLMOGOROV, A. N. e FOMIN, S. V. **Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis**, Graylock Press, Rochester, N. Y. Vol. 1, 1957, pp. 129, Vol. 2, pp. 128.
- [18] LUENBERGER, D.G. **Optimization by Vector Space Methods**, John Wiley & Sons, Inc. Copyright 1969
- [19] LIU, W. H. e CHANG, I. B. **Somes Studies on the Free Vibration of cantiliver Plates with Uniform and Non-Uniform Thickness**, Journal of Sound and Vibration, Vol. 130(2), 1989, pp. 337-341.
- [20] NOOR, A. K. e ALTURI, S. N. **Advances and Trends in Computational Structural Mechanics**, A. I. A. A. Journal, Vol. 25, n° 7, 1987, 977-995.
- [21] ODEN, J. T. e REDDY, J. N. **An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements**, A Wiley Interciesce Publication, John Wiley & Sons, 1976, pp. 429.
- [22] OLHOFF, N., BENDSOE, M. P. e RASMUSEN, J. **On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, 1991, pp. 259-279.
- [23] OLHOFF, N. e CHENG, K. T. **An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates**, Int. Journal Solids Structures, Vol. 17, 1981, pp. 305-323.
- [24] PRAGER, W. e TAYLOR, J. E. **Problem of Optimal Structural Design**, Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, n° 1, 1968, pp. 102-105.
- [25] RAJAGOPAL, S. V., SINGH, G., SADASIVA RAO, Y. V. K. e NARAYANAN, S. **Non-Linear Vibrations of Sandwich Plates**, Journal of Sound and Vibration 110(2), 1986, pp. 261-269.
- [26] ROZVANY, G. I. N. e MROZ, Z. **Analytical Methods in Structural Optimization**, Applied Mechanics Review, Vol. 30, Nov., 1977, pp. 1461-1470.
- [27] SCHMIT, L. A. **Structural Synthesis - It's Genesis and Development**, A. I. A. A. Journal, Vol. 19, n° 10, 1981, pp. 1249-1263.
- [28] SCHMIT, L. A. **Strutural Optimization - Some Key Ideas and Insights**, New Directions in Optimum Strutural Design, editado por E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragdill, e O. C. Zienkiewicz, Wiley, New York, 1984, pp. 1-45.
- [29] SCHMIT, L. A. e FARSHI, B. **Some Aproximation Concepts for Structural Synthesis**, A. I. A. A. Journal, Vol. 12, n° 5, 1974, pp. 692-699.

- [30] SONZONI, V. E. e IDELSOHN, S. R. **Free Vibrations of Rectangular Plates of Exponentially Varying Thickness and with a Free Edge**, Journal of Sound and Vibration, Vol. 140(3), 1990, pp. 513-522.
- [31] VANDERPLAATZS, G. N. **Structural Optimization - Past, Presente and Future**, A. I. A. A. Journal, Vol. 20, n° 7, 1981, pp. 992-1000.
- [32] VINSON, J. R. **Optimum Design of Composite Honeycomb Sandwich Panels Subjected to Uniaxial Compression**, A. I. A. A. Journal, Vol. 24, n° 10, 1986, pp. 1690-1696.
- [33] WILLIAM, L. K. **Structural Properties of Superplastically Formed, Diffusion-Bonded orthogonally corrugated Core Sandwich Plates**, A.I.A.A. Journal, Vol. 20, n° 4, 1982, pp. 536-543.