

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

**APLICAÇÃO DE ALGORITMOS HEURÍSTICOS PARA
A RACIONALIZAÇÃO DE ROTEIROS NA COLETA DE
MALOTES DOS CORREIOS.**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA**

JOSÉ APARECIDO CANASSA.

Florianópolis

Santa Catarina - Brasil

Novembro - 1996

**APLICAÇÃO DE ALGORITMOS HEURÍSTICOS PARA
A RACIONALIZAÇÃO DE ROTEIROS NA COLETA DE
MALOTES DOS CORREIOS.**

JOSÉ APARECIDO CANASSA.

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE “MESTRE EM ENGENHARIA”,
ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E APROVADA EM SUA
FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.
COORDENADOR DO PROGRAMA

APRESENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA DOS
PROFESSORES:



Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.
ORIENTADOR



Prof. Antônio Galvão Novaes, Dr.



Prof. Edgar Augusto Lanzer, Ph.D.

DEDICO ESTE TRABALHO

**A meus pais Antônio Canassa e
Josephina Campagnolo Canassa,
aos meus filhos Line Fernanda e
Ricardo e especialmente à minha
esposa Neli Sílvia.**

AGRADECIMENTOS

Aos professores SÉRGIO MAYERLE e EDGAR LANZER pelas eficientes orientações e estímulos.

Aos colegas PASINI , ODACIR , VALMIR e LEANDRO pelo apoio e colaboração na realização deste trabalho.

À EMPRESA BRASILEIRA DE CORREIOS E TELÉGRAFOS pelas facilidades que me foram concedidas durante a realização do curso.

RESUMO

No presente trabalho é proposta uma metodologia de racionalização de roteiros na coleta de malotes executados pela EMPRESA BRASILEIRA de CORREIOS e TELÉGRAFOS (ECT).

A racionalização de roteiros constitui-se num problema clássico nos estudos da área de transporte, que envolve inúmeras atividades comerciais e industriais e ainda um conjunto significativo de organizações.

Para o caso particular dos CORREIOS (ECT), as atividades de transporte, em especial a definição dos roteiros, exige um volume significativo de recursos e está diretamente relacionada à qualidade dos serviços prestados aos clientes.

Para a otimização dos roteiros foi apresentado um conjunto de algoritmos exatos e heurísticos. Dentre os algoritmos testados, aqueles que apresentaram os melhores resultados foram o GENÉTICO e o 3-OPT.

Pelos resultados verificados na aplicação piloto da cidade de JOINVILLE / SC, recomenda-se que a metodologia seja estendida a todas as localidades.

ABSTRACT

In the present work it is proposed a methodology to rationalise the vehicle routing in the collection of the mail done at EMPRESA BRASILEIRA DE CORREIOS E TELÉGRAFOS (ECT).

The rationalisation of the route is a classic problem in the study of vehicle route problem (VRP), involving a numberless commercial activities, manufacturing and also an important organisation set.

For the particular case of ECT, the related activities of transport, in special the definition of the routes, demands a relevant amount of resources and it is directly related to the quality of the service applicable to the customer.

In the optimisation of the route a set of heuristics and exact algorithms are introduced. Among the algorithms researched, the best result was obtained by Genetic Algorithm and 3-OPT.

The results of the pilot application in JOINVILLE / SC (city) recommend that the methodology will generalise to all localities.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	x
------------------------	---

LISTA DE TABELAS	x
------------------------	---

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

1.1. Origem	01
-------------------	----

1.2. Objetivos	02
----------------------	----

1.3. Importância	03
------------------------	----

1.4. Limitações	03
-----------------------	----

1.5. Estrutura	05
----------------------	----

CAPÍTULO II

2. MODELOS BÁSICOS PARA O ROTEAMENTO DE VEÍCULOS

2.1. Considerações iniciais	06
-----------------------------------	----

2.2. Tipos de problemas de roteamento	07
---	----

2.2.1. Classificação dos problemas	07
--	----

2.2.2. Problemas de cobertura de arestas / arcos.....	08
2.2.3. Problemas de cobertura de vértices.....	08
2.3. Métodos de solução para o problema do caixeiro viajante (PCV).....	09
2.3.1. Métodos exatos.....	09
2.3.2. Métodos heurísticos.....	13
2.4. Método de solução para o problema do carteiro chinês (PCC).....	29
2.4.1. Construção de um circuito euleriano.....	30
2.4.2. Algoritmo de solução do PCC.....	30
2.5. Considerações finais.....	31

CAPÍTULO III

3. ALGUMAS EXTENSÕES DO MODELO BÁSICO DE COBERTURA DE VÉRTICE

3.1. Considerações iniciais.....	33
3.2. Caracterização do problema de coleta de malotes na ECT.....	34
3.3. Formulação de modelos matemáticos.....	36
3.3.1. Modelo de Fisher e Jaikumar.....	36
3.3.2. Modelo de Golden.....	39
3.3.3. Outros modelos.....	40
3.4. Técnica de decomposição hierárquica.....	42
3.4.1. Justificativa para a decomposição do problema.....	42
3.4.2. Técnicas heurísticas para composição de distritos.....	43
3.4.3. Roteamento dos distritos.....	45
3.5. Considerações finais.....	46

CAPÍTULO IV

4. APLICAÇÃO PILOTO NA CIDADE DE JOINVILLE / SC

4.1. Considerações iniciais.....	48
4.2. Caracterização e justificativas da escolha da cidade de Joinville / SC.....	48

4.3.	Distritamento	49
4.4.	Determinação das matrizes de distâncias entre clientes de cada distrito	51
4.5.	Determinação dos roteiros dos distritos	51
4.6.	Análise dos resultados	54
4.6.1.	Tempo de processamento	54
4.6.2.	Análise econômica dos resultados	55
4.7.	Considerações finais	57

CAPÍTULO V

5. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

5.1.	Conclusão	58
5.2	Recomendações.....	59

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62
----------------------------------	----

BIBLIOGRAFIA.....	65
-------------------	----

ANEXOS

Anexo 01 - Revisão básica sobre a Teoria dos Grafos	70
Anexo 02 - Mapa da cidade de Joinville	80

LISTA DE FIGURAS

Fig. 01.	Rotas em grafos.....	09
Fig. 02.	Método de economia de Clark e Wright.....	15
Fig. 03.	Trocas heurísticas 2-OPT.....	20
Fig. 04.	Trocas heurísticas 3-OPT.....	20
Fig. 05.	Esquema para solução do PCV.....	28
Fig. 06.	Problema básico de VRP.....	38
Fig. 07.	Técnica de varredura de vértices.....	44
Fig. 08.	Técnica de partição da rota gigante.....	44
Fig. 09.	Agrupamento de vértices.....	46

LISTA DE QUADROS

Tab. 1.	Comparação do crescimento de funções polinomiais e exponenciais.....	32
Tab. 2.	Desempenho dos algoritmos.....	55
Tab. 3.	Custo de distribuição de malotes.....	56

CAPÍTULO I

1) INTRODUÇÃO

1.1) ORIGEM

O aumento da concorrência entre as empresas a partir da década de 1970 e a busca constante da melhoria da qualidade na elaboração de produtos e prestação de serviços, vêm exigindo cada vez mais, das organizações, um aperfeiçoamento no desenvolvimento e na realização de suas atividades

Não é permitido às empresas o desperdício na utilização dos seus recursos , pois se isto ocorrer ela terá sérias dificuldades de ser competitiva e assegurar a sua sobrevivência a longo prazo.

Neste sentido, a utilização de modelos que buscam a racionalização, e se possível, a otimização no emprego dos recursos necessários ao desenvolvimento de suas atividades são indispensáveis. Não há mais lugar para improvisações.

A utilização de técnicas gerenciais adequadas e o emprego de ferramentas matemáticas para melhorar o processo decisório e alocar de forma devida os recursos envolvidos na realização das atividades de uma empresa, visa, certamente, melhorar a satisfação dos clientes internos e externos, bem como assegurar uma melhoria da produtividade dos diversos processos que compõem a organização. Aumentar a

produtividade dos processos é produzir cada vez mais e melhor com cada vez menos recursos.

Num contexto industrial, o complexo operacional é responsável por grande parte na formação do custo de um produto ou serviço. É necessário portanto, a adoção de um sistema logístico completo que compreende desde o transporte da matéria prima às fábricas até a entrega do produto final ao cliente.

O elo final do sistema, isto é, o transporte do centro de distribuição ou depósito ao cliente, demanda um volume de recursos representativos na formação do custos operacionais.

Para que função transporte seja organizada de forma satisfatória e a sua execução seja realizada de maneira eficiente, é indispensável que as atividades envolvidas no sistema de transporte de uma empresa sejam devidamente planejadas na sua globalidade e em todos aos aspectos econômicos que se faz presente.

1.2) OBJETIVOS

Dentre os objetivos que se pretende atingir neste trabalho destacam-se:

- a) desenvolver uma metodologia para a racionalização do serviço de distribuição e coleta de malotes pela EMPRESA BRASILEIRA DE CORREIOS E TELÉGRAFOS - ECT - para melhorar a utilização dos veículos disponíveis, reduzir e melhorar a utilização dos recursos humanos e reduzir os custos de manutenção da frota, bem como os investimentos na aquisição de novos veículos;
- b) demonstrar as vantagens na utilização de modelos matemáticos no âmbito da empresa;

- c) discutir e avaliar alguns algoritmos de roteirização.

1.3) IMPORTÂNCIA

A ECT realizou um faturamento da ordem de US\$2,0 bilhões em 1995. No que concerne às despesas relativas ao transporte, é consumido em torno de 15% sobre o total faturado, a qual é provocada pela utilização de 6623 veículos e aeronaves de diferentes tipos.

Esta empresa, em SANTA CATARINA, apresenta os seguintes dados:

- ◆ 162 veículos;
- ◆ 184.000 Km percorridos mensalmente (em média);
- ◆ US\$ 5,0 milhões ao mês de faturamento (deste total verifica-se uma despesa de 15% com transporte).

Pelo exposto, observa-se que o sistema de transporte constitui-se numa das atividades fundamentais na prestação de serviços pela ECT. O volume de recursos envolvidos nesta atividade é muito representativo e a implantação de métodos matemáticos, que visem a racionalização no emprego da frota, é indispensável e certamente provocará uma redução nos custos operacionais com melhoria na produtividade da organização.

1.4) LIMITAÇÕES

Os problemas de roteamento de veículo, e suas soluções, buscam obter rotas para uma frota de capacidade conhecida, atendendo a percursos fechados e limitados,

partindo de depósitos de distribuição e entregando quantidades bem definidas de cargas a clientes específicos e conhecidos.

O critério de otimalidade mais freqüentemente utilizado é o da minimização dos custos variáveis de transporte (combustível, pneus, lubrificantes, manutenção e etc.), e de forma secundária se consegue, ainda, uma redução nos custos fixos (aquisição de novos veículo, substituição da frota etc.). Pode ocorrer também uma redução concomitante dos dois tipos de custos.

Na categoria de roteamento de veículos é conveniente considerar duas grandes subdivisões: roteamento de veículos por vértice e roteamento de veículos por arcos. No roteamento de veículos por vértice, cada cliente representa um vértice de uma rota a ser percorrida por pelo menos um veículo da frota e a sua demanda deve ser totalmente satisfeita. Uma aplicação típica deste tipo de roteamento são os serviços de entrega e coleta de mercadorias a clientes geograficamente dispersos (como exemplo a coleta e a entrega de malotes pela ECT).

O outro tipo de roteamento de veículos consiste na cobertura de um conjunto de arcos de uma rede pré-estabelecida, utilizando para isto os veículos que compõem a frota (como exemplos tem-se a coleta de lixo, entrega de gás etc.).

Dado estas características inerentes à roteirização de veículos e a escolha do problema a ser resolvido no presente trabalho, algumas limitações se faz necessárias para que os objetivos pretendidos sejam alcançados. Dentre as restrições existentes, cabem destacar:

- a) o modelo será aplicado na cidade de JOINVILLE/SC, mas poderá ser estendido à qualquer localidade;

- b) no conjunto de serviços oferecidos pela ECT, que demanda a utilização de uma frota de veículos, o modelo proposto se restringirá à roteirização da coleta de malotes;
- c) a metodologia proposta e utilizada levará em consideração as disponibilidades dos recursos existentes, bem como o seu atual estágio tecnológico (computadores, veículos, recursos humanos, etc.).

1.5) ESTRUTURA

O presente trabalho é composto por cinco capítulos, divididos em itens e sub-itens. No primeiro capítulo é apresentado a origem do problema a ser resolvido, os objetivos a serem alcançados, bem com a sua importância e limitações.

No segundo capítulo são apresentados os diferentes tipos de problemas de roteamento, como o problema de cobertura de arestas e o problema de cobertura de vértices.

No terceiro capítulo foi realizado a caracterização do problema de coleta e entrega de malotes da ECT, e ainda, a apresentação dos modelos e técnicas para a solução desse tipo de problema. No capítulo seguinte, é realizada uma aplicação piloto na cidade de Joinville, onde os modelos e as técnicas anteriormente discutidas são utilizadas. Os resultados obtidos são analisados sob os aspectos de eficiência dos algoritmos e dos ganhos econômicos. Com base nos resultados e nas análises efetivadas, no quinto capítulo são apresentadas as conclusões e recomendações.

CAPÍTULO II

2) MODELOS BÁSICO PARA O ROTEAMENTO DE VEÍCULOS.

2.1) CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em um sistema logístico a determinação da quantidade de veículos com suas respectivas rotas, constituem-se nas variáveis mais importante na busca da racionalização e otimização dos custos envolvidos na coleta e entrega de mercadoria ou na prestação de serviços. O uso adequado da frota, com rotas devidamente dimensionadas, irão contribuir significativamente na redução dos gastos com combustível, manutenção e ampliação da frota.

Outro fato a se destacar, é que na execução das atividades de coleta e entrega de mercadorias ou na prestação de serviços, com o emprego de rotas otimizadas, possibilitará a empresa a realização de serviço com uma qualidade superior, (manutenção de um padrão de coleta e entrega de malotes) satisfazendo assim, de forma mais apropriada os seus clientes.

Neste capítulo será realizada uma breve revisão bibliográfica de problemas de roteamento de veículos.

2.2) TIPOS DE PROBLEMAS DE ROTEAMENTO

2.2.1) CLASSIFICAÇÃO DOS PROBLEMAS

O problema básico de roteamento de veículos consiste no estabelecimento de rotas de distribuição ou coleta de mercadoria, a partir de um depósito central, a fim de atender a um conjunto de clientes, cuja demanda é previamente conhecida e tendo como objetivo minimizar o total da distância percorrida pela frota.

Cabe ressaltar que os veículos que compõem uma determinada frota possuem limitações físicas, quanto a capacidade em peso e volume, bem como o tempo máximo disponível para executar as atividades de coleta e entrega de mercadorias.

As inúmeras variações do modelo supracitado, quanto às restrições apresentadas ou no objetivo da busca da minimização do número de veículos de uma frota, podem ser encontradas em **BELHOT** [1981], **GOLDEN** et alii [1971] e **GALVÃO** [1967].

Fundamentalmente são adotadas três abordagens básicas para o roteamento de veículos de acordo com **DASKIN** [1985].

- a) modelos de cobertura de arestas / arcos;
- b) modelos de cobertura de vértices; e
- c) vértice de destino (O-D).

Observa-se que a abordagem O-D pode ser considerada um caso particular do Problema de Cobertura de Vértice, onde a demanda do cliente corresponde à utilização de um veículo. Assim sendo, as abordagens acima apresentadas podem ser resumidas em dois tipos a saber:

- a) problemas de cobertura de arcos / arestas;
- b) problemas de cobertura de vértices.

2.2.2) PROBLEMAS DE COBERTURA DE ARESTAS / ARCOS.

Em um dado grafo G , onde os custos das arestas são positivos, o problema do carteiro chinês - PCC (*Chinese Postman Problem* - CPP) consiste em encontrar um circuito que passe por todas as arestas do grafo, pelo menos uma vez, e o custo total pela distância percorrida seja o mínimo.

Se o grafo G possui um circuito Euleriano, tal circuito representa uma solução para o problema. A aplicação dos conceitos do PCC tem sido empregados na solução de vários problemas práticos tais como: coleta de lixo, roteamento de carteiros, manutenção em redes, dentre outros.

A condição necessária e suficiente para que um determinado grafo G seja Euleriano é que todos os vértices tenham grau par. No entanto, através da criação de arestas artificiais entre os vértice de grau ímpar possibilitará a todo e qualquer grafo tornar-se Euleriano. Essas arestas criadas artificialmente tem custos iguais aos das arestas reais em paralelo.

Assim procedendo, ao grafo artificialmente formado, determina-se um circuito Euleriano de custo mínimo, sendo esta a solução do problema do carteiro chinês.

2.2.3) PROBLEMA DE COBERTURA DE VÉRTICE.

Uma outra categoria de problema de roteamento de veículos consiste na cobertura de vértice, também conhecido como o problema do caixeiro viajante - PCV (*Travelling Salesman Problem* - TSP), cujo objetivo é percorrer todos os vértices ao menos uma vez, realizando para isto um dispêndio mínimo.

Este tipo de problema é considerado um dos mais complexo na teoria dos grafos. Não se conhece para o problema do caixeiro viajante nenhum algoritmo com complexidade de tempo polinomial que o resolva. Mais adiante esta discussão será retomada.

Na figura 01 são apresentadas dois tipos de rotas que são solucionadas pelos algoritmos.

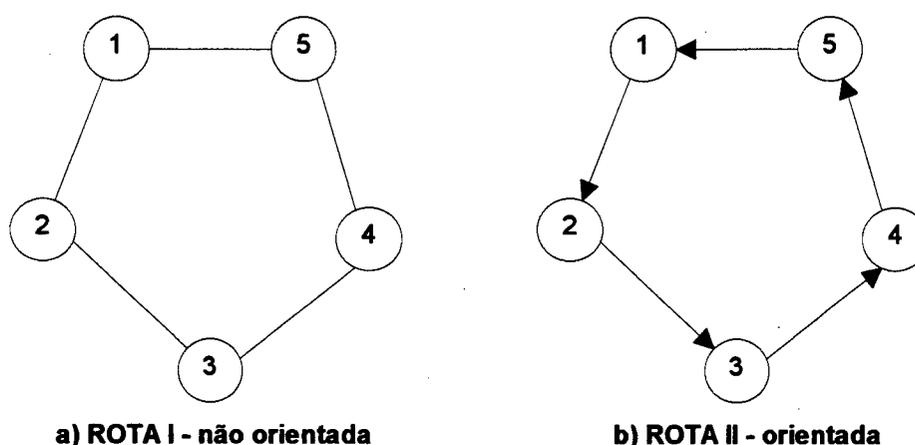


FIGURA 01 - Rotas em Grafos: a) não orientados; b) orientados.

2.3) MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE (PCV).

A solução para o problema do caixeiro viajante se divide em dois métodos : métodos exatos e métodos heurísticos.

2.3.1) MÉTODOS EXATOS

Dado um grafo G , para que seja possível encontrar a solução otimizada, é indispensável estabelecer um circuito hamiltoniano de mínimo custo. É possível encontrar todos os circuitos hamiltonianos de um grafo empregando o algoritmo de **ROBERT** e **FLORES**, e ainda, o algoritmo dos caminhos múltiplos de **SELBY**.

Dentre os algoritmos com a finalidade de encontrar o circuito hamiltoniano de menor custo, destacam-se a programação dinâmica de **BELLMANN** [1962], a programação inteira de **DANTIZIG et alii** [1954] e a técnica de busca em árvore de **LITTLE** [1963].

O método dos caminhos múltiplos de **SELBY**, conforme analisado por **CRISTOFIDES** [1975], demonstra ser o mais eficiente entre os métodos existentes para a obtenção de todos os caminhos hamiltonianos, sobretudo à medida em que o número de vértices e a esparsidade do grafo aumentam. O método original foi desenvolvido para grafos não dirigidos, no entanto apresentar-se-á uma versão modificada para grafos dirigidos.

O método vem a ser um processo de enumeração implícito, que considera um caminho de cada vez, o qual é continuamente estendido até que :

- a) um circuito hamiltoniano é obtido; ou
- b) se torna evidente que o caminho não irá levar a um circuito hamiltoniano.

O caminho em formação é modificado sistematicamente, assegurando que ao final deste processo todas as possibilidades foram analisadas. Neste procedimento, os circuitos hamiltonianos são encontrados um de cada vez e a memória necessária para a busca pode ser considerada pequena.

A formação de um caminho parcial S_0 , no processo de construção de um circuito hamiltoniano, implica em outros caminhos S_1, S_2, \dots, S_n em outras partes do grafo. Esses caminhos implicados ou ajudam a complementar um circuito hamiltoniano mais rapidamente, ou apontam para o fato que não existe nenhum circuito hamiltoniano que contenha o caminho S_0 como uma parte, e neste caso, a busca deve ser revisada

através de um processo do tipo *backtrack*, que deve ocorrer imediatamente. Este procedimento passa a ser descrito a seguir de forma mais detalhada.

Suponha que num certo estágio da busca formou-se um caminho S_0 e que os caminhos S_1, S_2, \dots, S_n estão implicados.

Considerando que qualquer vértice do “meio” de um destes caminhos (entenda-se por “meio” qualquer vértice que não seja inicial ou final) está ligado ao respectivo caminho por dois arcos, então todos os outros arcos em direção a, ou partindo de tal vértice podem ser removidos do grafo.

Para qualquer vértice inicial dos caminhos acima, todos os arcos emanados de tal vértice, exceto aquele que o liga ao caminho, podem ser removidos. Para o vértice final de quaisquer dos caminhos, todos os arcos terminados nele, exceto aquele que o liga ao caminho, também podem ser removidos.

Além disso, exceto para o caso em que exista apenas um caminho e que passa através de todos os vértices de grafo G , quaisquer arcos existentes levando do fim de qualquer caminho até o vértice inicial do mesmo caminho podem ser removidos, já que tais arcos fechariam circuitos não hamiltonianos.

A retirada de todos esses arcos deixará o grafo G com muitos de seus vértices (todos os vértices do “meio” dos caminhos) tendo o grau de entrada e saída igual a unidade. Todos esses vértices do “meio” e os arcos neles incidentes são removidos de G e em vez deles um único arco é introduzido para cada caminho de seu vértice inicial ao seu vértice final, resultando no grafo parcial $G_k = (X_k, \Gamma_k)$, onde k é o índice do estágio de busca.

Considere, agora, a extensão do caminho S_0 , o qual encontra-se representado no grafo G_k por um vértice contraído $e(S_0)$, através do acréscimo de um outro vértice $x_j \in \Gamma_k(e(S_0))$. As conseqüências de se adicionar x_j a S_0 são as seguintes:

Passo 1 Primeiro retire de G_k todos os arcos desnecessários, ou seja:

- I) todos os arcos terminados em x_j ou emanados de $e(S_0)$, exceto o arco $(e(S_0), x_j)$;
- II) qualquer arco de x_j ao vértice $e(S_0)$, mesmo nos casos em que x_j é um vértice contraído $e(S_j)$ que representa o caminho S_j no grafo G_k .

Passo 2 Considere o grafo parcial $G'_k = (X_k, \Gamma_k)$ formado após as eliminações de arcos desnecessários realizadas no passo 1. Se existir um vértice $x_j \in X_k$ que não é o fim de qualquer dos caminhos S_0, S_1, S_2, \dots etc. e o qual possui como resultado das deleções de arco um grau de entrada igual a um, isto é $|\Gamma_k^{-1}(x_j)| = 1$, então elimine todos os arcos emanados do vértice $v \in \Gamma_k^{-1}(x_j)$, com exceção do arco (v, x_j) .

Se existir um vértice de $x_j \in X_k$ que não é o início de qualquer caminho e para o qual, como um resultado das deleções de arco, tem-se um grau de saída igual a um, ou seja, $|\Gamma_k(x_j)| = 1$, então elimine todos os arcos incidentes em $v \in \Gamma_k(x_j)$, com exceção do arco (x_j, v) .

Atualize todos os caminhos e retire, dos caminhos em formação, quaisquer arcos de vértices finais para vértices iniciais de um mesmo caminho.

Repita o passo 2 até que não se possa remover mais arcos.

Passo 3 Contraia os caminhos S_j formados no grafo $G'_k = (X_k, \Gamma_k)$, substituindo-os pelos vértices contraídos $e(S_j)$. Denomine o grafo reduzido assim formado por $G_{k+1} = (X_{k+1}, \Gamma_{k+1})$.

Passo 4 Se para algum $x_j \in X_{k+1}$ tem-se que $|\Gamma_{k+1}(x_j)| = 0$ ou $|\Gamma_{k+1}^{-1}(x_j)| = 0$, então não existe um circuito hamiltoniano que possa ser obtido considerando o caminho S_0 em formação. Neste caso, a busca sofre um procedimento de *backtrack*, no qual o vértice x_j escolhido para incrementar o caminho S_0 é rejeitado, e um novo vértice é escolhido.

Este procedimento tem continuidade até que todas as possibilidades tenham sido testadas. Para a realização do processo de *backtrack*, deve-se manter as informações necessárias à reconstrução do grafo $G_k = (X_k, \Gamma_k)$ a partir do grafo $G_{k+1} = (X_{k+1}, \Gamma_{k+1})$.

2.3.2) MÉTODOS HEURÍSTICOS.

Conforme PAPANIMITRIOU e STEIGLITZ [1976], o problema do caixeiro viajante é considerado NP-completo. Dado esta condição muitas heurísticas foram desenvolvidas para encontrar soluções satisfatórias ao PCV.

Os métodos de solução podem ser agrupados, de acordo com GOLDEN et alii [1980], BODIN et alii [1983] e CRISTOFIDES [1985] em três categorias:

- a) heurísticas que constroem rotas;
- b) heurísticas que melhoram rotas; e
- c) procedimentos compostos.

2.3.2.1) Métodos heurísticos que constroem rotas

Entre os métodos heurísticos que constroem rotas, tem-se:

a) Método de Clark e Wright

Este procedimento é conhecido também como método de economia de **CLARK** e **WRIGHT** [1964], sendo inclusive o mais intensamente empregado. Neste método o pressuposto inicial é que deve haver uma rota para atender clientes, de modo que a distância total percorrida, no caso de grafos não orientados, seja obtida pela seguinte expressão:

$$DT = 2 \sum_{i=1}^n d_{oi}$$

onde d_{oi} é a distância entre o depósito "o" e o cliente "i" e a quantidade de rotas é igual ao número de clientes.

O passo seguinte consiste em agrupar as rotas duas a duas, de modo a verificar as possíveis reduções nas distâncias percorridas. Assim, considerando o caso de grafos orientados, tem-se que, para atender os clientes "i" e "j" em duas rotas distintas, os custos seriam:

$$DT = d_{oi} + d_{io} + d_{oj} + d_{jo}$$

enquanto para atendê-los por uma única rota ter-se-ia:

$$DT' = d_{oi} + d_{ij} + d_{jo}$$

e portanto, a opção de unir as duas rotas para atender os clientes "i" e "j" provoca um ganho de:

$$S_{ij} = DT - DT' = d_{io} + d_{oj} - d_{ij}$$

conforme pode ser observado na figura 02.

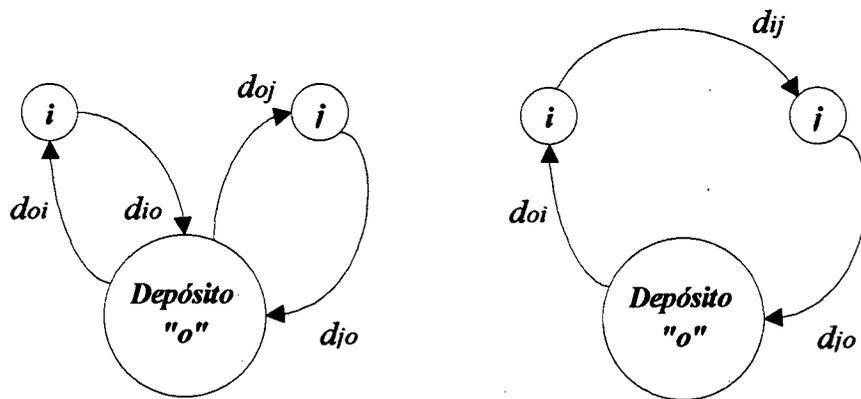


FIGURA 02 - Método da economia de Clark e Wright

Em suma tem-se que:

- ◆ escolher um vértice como depósito central denominado "o";
- ◆ calcular todos os ganhos $S_{ij} = DT - DT' = d_{io} + d_{oj} - d_{ij}$;
- ◆ ordenar os ganhos de forma decrescente;
- ◆ selecionar um par (i, j) com o maior ganho e acrescentar ao roteiro $(o - i - j - o)$.
- ◆ repetir este processo até que todos os vértices estejam incluídos.

b) Método de inserção do vizinho mais próximo (Insertion Procedure)

Este método promove inclusão do vizinho mais próximo a partir do vértice selecionado para a formação do roteiro. As etapas seguidas neste método são as seguintes:

- ◆ iniciar com um roteiro elementar composto pelo vértice “ i ”.
- ◆ procurar o vértice “ k ” tal que d_{ik} seja mínimo, formando o roteiro parcial $(i - k - i)$;
- ◆ Etapa de seleção: dado um roteiro parcial; encontrar o vértice “ k ”, não pertence ao roteiro, situado o mais próximo de qualquer vértice do roteiro parcial.
- ◆ Etapa de inserção: encontrar a aresta ou arco (i, j) do roteiro parcial que torne mínimo $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ e inserir “ k ” entre “ i ” e “ j ”;
- ◆ Repita as etapas de seleção e inserção até conseguir um roteiro hamiltoniano completo.

c) Método de inserção do vizinho mais distante (Farthest Insertion)

Este método promove a inclusão do vizinho mais distante a partir do vértice selecionado para a formação do roteiro. A seguir o método é apresentado:

- ◆ iniciar com um roteiro elementar, composto apenas por um vértice “ i ”;
- ◆ procurar o vértice “ k ” tal que d_{ik} seja o máximo formado o roteiro parcial $(i - k - i)$;

- ◆ **Etapa de seleção:** dado um roteiro parcial encontrar o vértice “ k ”, não pertencente ao roteiro, situado o mais distante de qualquer vértice do roteiro parcial;
- ◆ **Etapa de inserção:** encontrar a aresta ou arco (i, j) no roteiro parcial que torne mínimo $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$. Incluir “ k ” entre “ i ” e “ j ”;
- ◆ voltar à etapa de seleção até conseguir um roteiro hamiltoniano.

d) Método da Envoltória Convexa (Convex Hull)

Este método promove a inclusão dos vértices a partir da formação de uma envoltória inicial. As etapas deste método são as seguintes:

- ◆ estabelecer a envoltória convexa do conjunto de vértice, sendo esta o roteiro inicial;
- ◆ para cada vértice “ k ” não contido no roteiro parcialmente formado, procurar a aresta ou arco (i, j) do roteiro, tal que $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ seja o mínimo e calcule:

$$\alpha_{ijk} = \frac{d_{ij} + d_{kj}}{d_{ij}}$$

- ◆ entre todos os vértices “ k ”, determine aquele cujo α_{ijk} seja mínimo, inserindo-o entre os respectivos vértices “ i ” e “ j ”;
- ◆ repetir o processo acima até a inclusão de todos os vértices.

e) Heurística de CRISTOFIDES

Nesta heurística a busca da solução do problema se dá através da formação de uma árvore. A seguir o método é apresentado.

- ◆ encontrar uma árvore de extensão mais curta “ T ” do grafo G ;
- ◆ identificar os vértices de grau ímpar, combiná-los 2 a 2, encontrando o grafo de mínima extensão;
- ◆ obter um roteiro Euleriano;
- ◆ remover polígonos com grau > 2 transformando o grafo num roteiro hamiltoniano.

2.3.2.2) *Heurísticas que melhoram rotas.*

a) r -Ótimo

Os métodos heurísticos baseados no conceito r -ótimo proposto por LIN [1965] e LIN & KERNIGHAN [1973] tem a sua aplicação realizada no contexto do problema do caixeiro viajante. Dentre tais heurísticas se encontra o método de CRISTOFIDES e ETTON [1969] cujo procedimento consiste, essencialmente, em criar rotas arbitrárias, dividindo-as em “ r ” caminhos e testando em seguida as possíveis permutas na seqüência destes caminhos. Este método tem conseguido um grande sucesso, pois o seu resultado se aproxima da solução ótima do problema do caixeiro viajante - PCV. A seguir o referido método é descrito:

- ◆ encontrar um ciclo hamiltoniano H , definindo uma rota inicial para o PCV;
- ◆ eliminar “ r ” arestas de H , produzindo “ r ” caminhos desconexos, podendo tais caminhos serem compostos por vértices isolados;
- ◆ reconectar esses os “ r ” caminhos de forma a obter uma nova rota para o PCV, denotada por H' , usando arestas diferentes das que foram removidas de H . Logo H

e H' são diferentes entre si, em exatamente " r " arestas; as $(n - r)$ arestas restantes são comuns;

- ◆ calcular o comprimento total $d(H')$ da rota H' ; se $d(H') < d(H)$ troque H por H' e repita o processo;
- ◆ se $d(H') \geq d(H)$, selecionar outro conjunto de " r " arestas de H para proceder a troca;
- ◆ continuar essas trocas até que não haja nenhuma economia a ser conseguida com a troca de " r " arestas.

A solução final, sobre a qual não é possível realizar melhorias pela troca de " r " arestas, é denominada de solução r -ótimo ou r -opt, e corresponde a um ótimo local, não necessariamente global.

Em princípio, quanto maior o valor de " r " neste procedimento de trocas, melhor será a solução encontrada. O custo computacional, por outro lado, cresce muito rapidamente com o valor de " r ". Conforme GOLDEN et alii [1971] a solução 3-opt é melhor que a solução 2-opt. Entretanto, a melhoria obtida pela solução 4-opt em relação a solução 3-opt não justifica a sua utilização, considerando neste caso o dispêndio com o processamento computacional.

Cabe esclarecer, ainda, que este método de melhoramentos sucessivos em rotas pela troca de " r " arestas pode ser empregado tanto para problemas simétricos como assimétricos.

Nas figuras 03 e 04 são demonstrados os seqüenciamentos 2-opt e 3-opt, aplicados em grafos não direcionados.

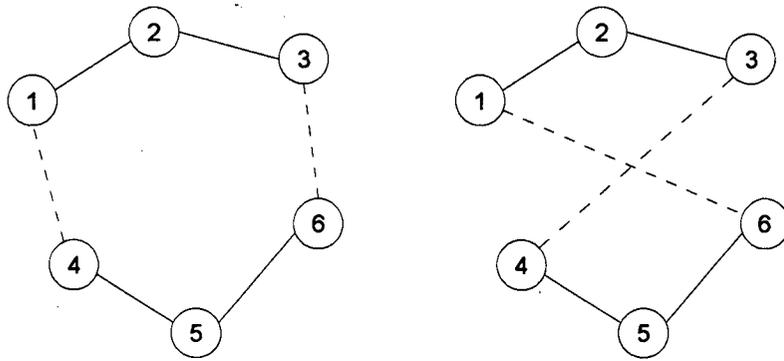


FIGURA 03 - Trocas heurísticas 2-opt

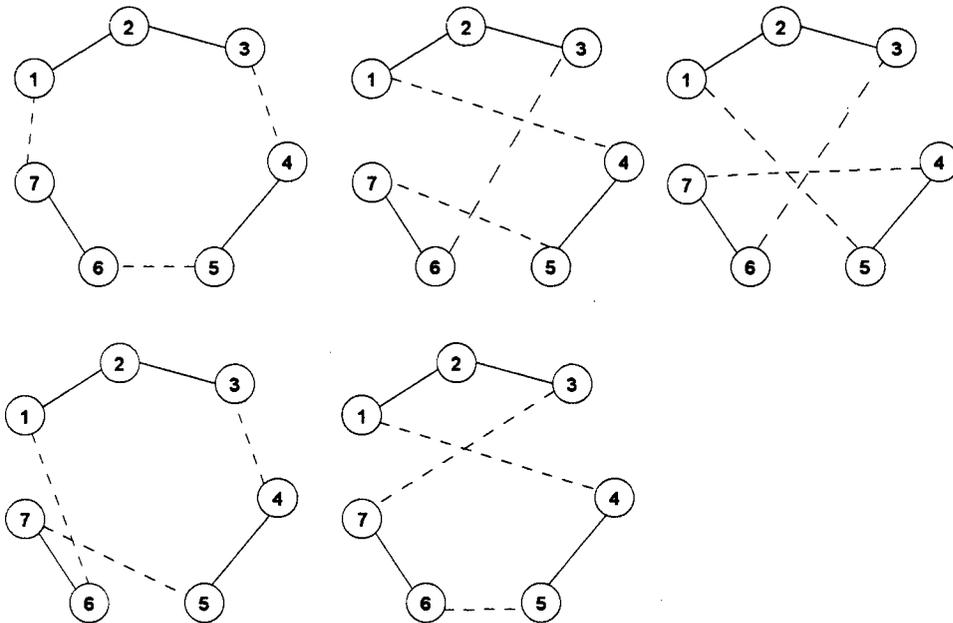


FIGURA 04 - Trocas heurísticas 3-opt

b) Algoritmo Genético: (GA) (Genetic Algorithms)

O algoritmo genético é um método de otimização de funções, cujo mecanismo de busca toma emprestado as idéias do processo evolutivo conforme a concepção de Darwin.

Essa busca de pontos ótimos de funções exige uma codificação das possíveis soluções através de uma cadeia de bits, denominada genes. Através de um processo de reprodução e seleção natural o algoritmo encontrará, após algumas gerações, soluções que se aproximam do ponto ótimo da função objetivo.

Nos **GA**, verifica-se algumas características peculiares, tais como o fato de trabalhar com populações de soluções, e não uma única solução. Outro fato interessante é a possibilidade de ocorrerem mutações aleatórias em qualquer gene da população.

Os **GA** como são conhecidos hoje foram inicialmente descritos por John Holland em 1960 e desenvolvido mais adiante entre 1960 e 1970, por Holland, seus estudantes e colegas da Universidade de Michigan. No livro *Adaptation in Natural and Artificial Systems* de 1975, Holland apresenta o **GA** como uma abstração da evolução biológica.

Conforme Holland, **GA** consiste num método de movimentação de uma população de cromossomos (isto é, strings de bits representando organismos ou candidatos à solução do problema) para uma nova população, usando a seleção junto com um operador genético de *crossover*, mutação e inversão. Cada cromossomo consiste de genes formado pelas combinações binárias “0” e “1”. Através da escolha desses cromossomos da população, sobre o qual será realizado um processo de reprodução, serão gerados filhos que passarão fazer parte da nova população.

Pelo processo de reprodução têm-se a realização das seguintes operações:

- a) **Crossover**: troca de sub-partes de dois cromossomos.
- b) **Mutação**: mudanças randômicas do valor de alguns bits nos cromossomos.
- c) **Inversão**: inverte a ordem de uma seção continua do cromossomo

O processo como um todo, resume-se a:

- a) Criar, através de um processo aleatório, uma população de cromossomos (futuro candidatos à solução do problema).

- b) Calcular o *fitness* (resultados, valor) de cada cromossomo da população.
- c) Aplicar um processo de seleção e reprodução através de um operador genético (*crossover*, mutação, inversão) na população antiga com o objetivo de criar uma nova população.
- d) Eliminar os cromossomos da nova população com os piores "*fitness*", mantendo a população constante.

Para uma melhor compreensão do funcionamento de um GA será apresentado, a seguir, um pequeno exemplo.

Exemplo

Seja a função objetivo definida como $f(x) = x^2 - x + 1$, onde x é um inteiro do intervalo entre 0 e 31.

Representação da solução

Dentre as possíveis soluções, uma população inicial seria dada pela representação binária como segue:

```
0 0 1 0
1 1 0 1
1 0 1 1
1 0 1 0
```

Essa cadeia de bits corresponde ao genótipo dos indivíduos da população. Ao genótipo está associado um fenótipo, que neste caso consiste na conversão dos valores binários entre 0000 e 1111 em valores inteiros entre 0 e 31. Tem-se, assim:

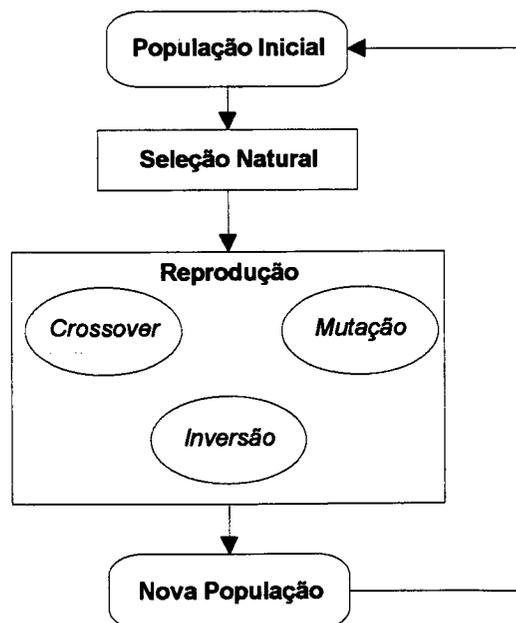
GENÓTIPO	FENÓTIPO
0 0 1 0	02
1 1 0 1	13
1 0 1 1	11
1 0 1 0	10

Uma vez estabelecido o fenótipo, o passo seguinte será calcular o *fitness* dos indivíduos, isto é o valor da função objetivo.

GENÓTIPO	FENÓTIPO	FITNESS
0 0 1 0	02	03
1 1 0 1	13	157
1 0 1 1	11	111
1 0 1 0	10	91

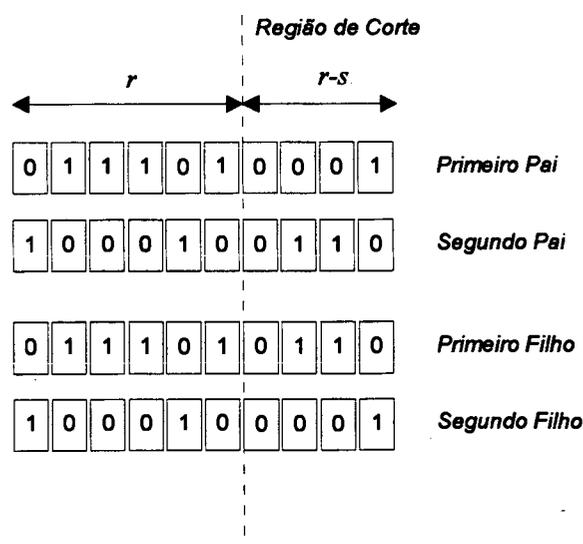
Pelos valores acima, o melhor *fitness* encontrado é dado pelo resultado 157.

Conforme já exposto, a idéia é utilizar apenas os melhores elementos da população para gerar uma nova população, pois é muito provável que os melhores adaptados possam deixar aos seus descendentes as características que possibilitariam a otimização da função objetivo. Esquemáticamente têm-se:



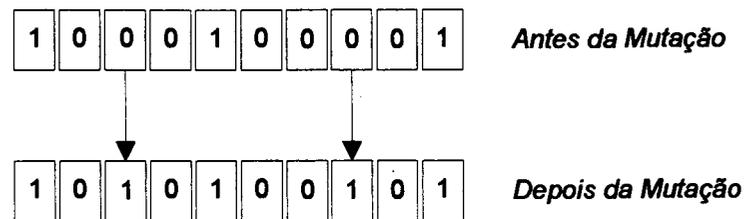
Processo de Seleção Natural: dentre os indivíduos da população, através de um critério de seleção, são escolhidos aqueles que irão gerar os indivíduos da nova população. A seleção é feita por uma roleta ponderada, ou seja, os indivíduos com os melhores fitness possuem uma maior probabilidade de serem escolhidos. Esta condição visa acelerar a busca da otimalidade da função objetivo.

Crossover: o processo de crossover utiliza um par de indivíduos previamente selecionados a fim de gerar os novos indivíduos (filhos) da nova população que está sendo formada. A ocorrência do crossover está associada a uma probabilidade, e caso o crossover não seja efetivado para um par de indivíduos em particular, estes também farão parte da nova população de indivíduos. Na ocorrência do crossover haverá um sorteio para estabelecer o local de corte dos indivíduos (cromossoma). Dado que o comprimento da cadeia de bits dos pais é " r ", então o número aleatório " s " entre 1 e $r-1$ será gerado. O primeiro filho será formado pelos primeiros " s " bits do primeiro pai e os $r-s$ últimos bits do segundo pai. Já o segundo filho terá o genótipo formado pelos " s " primeiros bits do segundo pai e os $r-s$ bits do primeiro pai.



A cada novo indivíduo da população (filho) está associado um *fitness* que será calculado de acordo com a função objetivo.

Mutação: consiste na troca aleatória de um bit de “1” para “0” ou vice-versa, com uma probabilidade muito pequena. Assim tem-se :



Pela ilustração acima verifica-se que ocorreram mutações nas posições 3 e 8 do bit “pai”. Da mesma forma que o processo de *crossover*, a cada novo indivíduo da população será calculado o seu *fitness*.

Pelo exemplo a seguir será ilustrado o funcionamento das proposições acima.

GENÓTIPO	FENÓTIPO	FITNESS
0 0 1 0	02	03
1 1 0 1	13	157
1 0 1 1	11	111
1 0 1 0	10	91
		<u>362</u>

Dado uma probabilidade de mutação $p_m = 0,05$ e de *crossover* $p_c = 0,70$, o primeiro passo consiste na escolha de dois indivíduos da população para o cruzamento. Dado que o somatório dos *fitness* é igual a 362, é possível estabelecer uma probabilidade associada a cada indivíduo (cromossoma) que será dada pelo quociente entre o *fitness* do indivíduo dividido pelo somatório dos *fitness*.

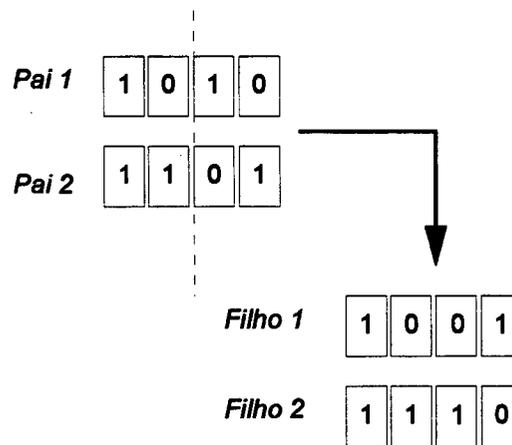
GENÓTIPO	FENÓTIPO	FITNESS	PROB. (%)
0 0 1 0	02	03	0.83
1 1 0 1	13	157	43.37
1 0 1 1	11	111	30.66
1 0 1 0	10	91	25.14

Pelo sorteio, suponha que os casais escolhidos fossem:

Casal 01	1 1 0 1	1 0 1 1
Casal 02	1 0 1 0	1 1 0 1

Suponha que para o casal 01 não ocorra o *crossover*, e portanto a nova população continuará com esses mesmos indivíduos.

Para o casal 02, considere que ocorra *crossover*, e portanto o corte se dará entre um valor inteiro compreendido entre 1 e 3. Neste exemplo será admitido que o *crossover* ocorrerá na posição 2. Assim tem-se:



Uma vez realizado o *crossover*, dá-se o início do processo de mutação, que no exemplo ocorre com a probabilidade de 0,05. A título de ilustração admite-se que apenas o terceiro bit do primeiro filho, formado a partir do cruzamento do segundo casal, sofra um processo de mutação, isto é passe de 1001 → 1011. Com a finalização do processo de *crossover* e mutação tem-se :

GENÓTIPO	FENÓTIPO	FITNESS
1 1 0 1	13	157
1 0 1 1	11	111
1 0 1 1	11	111
1 1 1 0	14	183
		<u>562</u>

Verifica-se que houve uma melhora do resultado, pois o somatório do *fitness* atual é superior ao anterior.

O critério de parada nesta busca, pode ser um tempo de processamento previamente estabelecido, respeitando as características do problema.

2.3.2.3) *Procedimentos Compostos*

A partir de uma solução inicial obtida através de heurísticas que constroem rotas, pode-se aplicar procedimentos que melhoram rotas. De acordo com o proposto por **GOLDEN** et alii [1971] um procedimento que provoca boas melhorias no resultado final é o que segue :

- ◆ Obter um resultado inicial através dos métodos de construção já expostos ;
- ◆ Melhorar o resultado final obtido com a aplicação do método 2-opt;
- ◆ Melhorar o resultado final obtido com a aplicação do método 3-opt.

Pelos métodos já expostos para a solução do problema do caixeiro viajante é possível estabelecer um esquema conforme elaborado por **GRACIOLLI** [1994] que aponte os possíveis caminhos de solução do PCV.

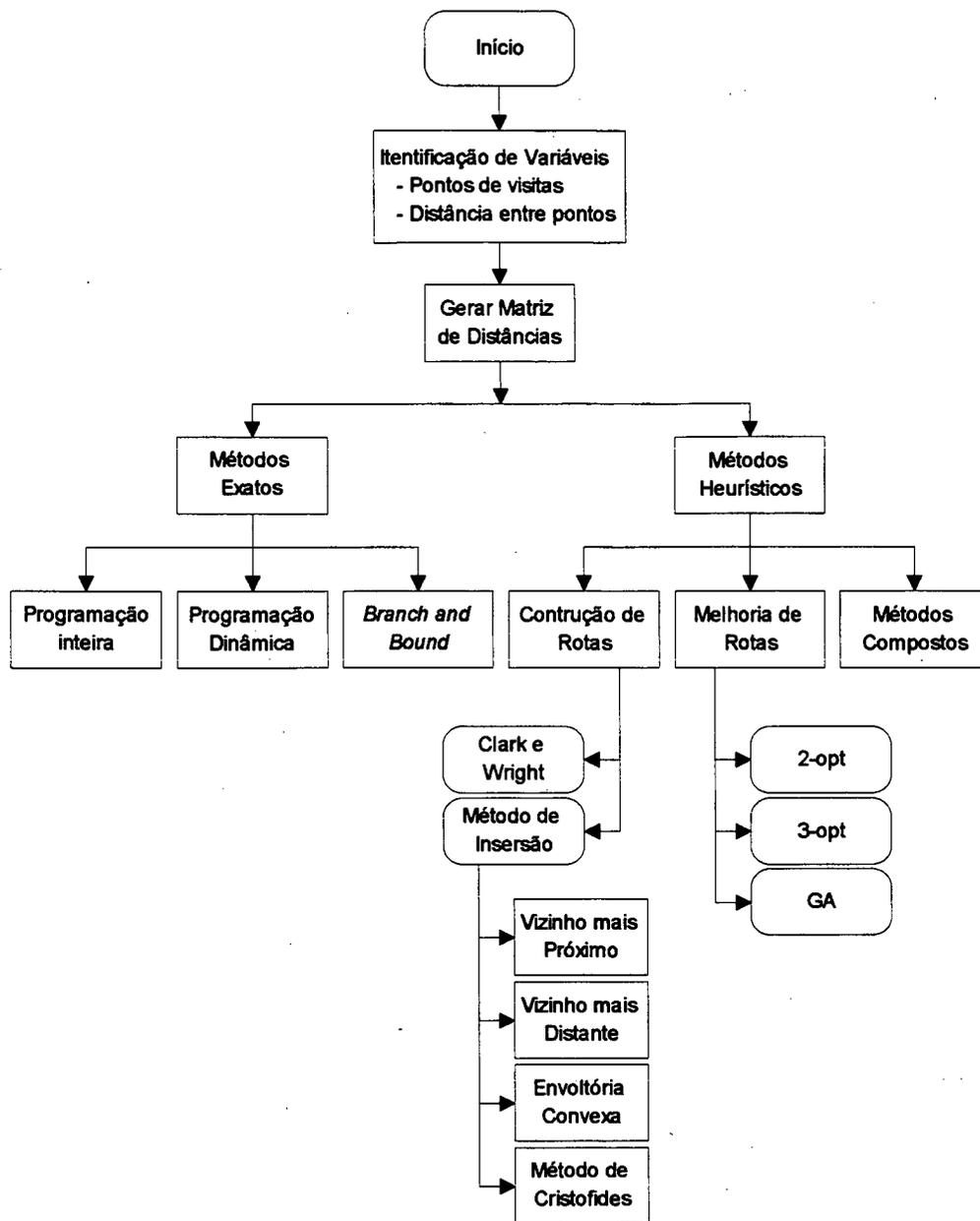


FIGURA 05 - Esquema de caminhos para solução do PCV, proposto por GRACIOLLI e adaptado por CANASSA.

Cabe salientar que além dos algoritmos mencionados, outros métodos foram desenvolvidos para a solução do problema do caixeiro viajante PCV, sobretudo para os PCV assimétricos, como os propostos por VANDER CRUYSSSEN e RIJCKART [1978], KARP [1979], AKL [1980], KRANELAKIS e PAPADIMITRIOU [1980], FRIEZE et alii [1992], BODIN et alii [1983], LAPORTE et alii [1986], PEKNI e

MILLER [1992]. Ultimamente tem se desenvolvido pesquisas para a solução do problema do caixeiro viajante PCV através de Redes Neurais conforme apresentado em **LOOI et alii** [1992], **BURKE e DAMAY** [1992].

A escolha de um determinado método para a solução de um problema real vai depender de suas peculiaridades, que poderá resultar numa maior ou menor eficiência.

2.4) MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS (PCC)

Na solução de problemas reais de cobertura de arestas e arcos as resoluções são dificultadas devido às restrições adicionais tais como: limite de capacidade dos veículos, limitação do cumprimento da rota, limitação do tempo disponível para a execução da rota.

Um maior aprofundamento sobre o assunto pode ser encontrado em **EDMONDS e JOHN SOM** [1973], **LEEBMAN et al** [1975], **MALTE e LEEBMAN** [1978], **BANEGAS** [1985] e **CANASSA** [1992] onde se discute a cobertura de arestas e arcos para o planejamento de roteiros de veículos na coleta de resíduos sólidos (lixo).

Em **LAPORTE** [1993] encontra-se um método para coleta e entrega de malotes em bancos. **MINIEKA** [1979], **MATION** [1978], **BODIN et al** [1983], **NOVAES** [1989] e **DASKIN** [1985] apresentam modelos para a aplicação em problemas de cobertura de aresta e arco.

2.4.1) CONSTRUÇÃO DE UM CIRCUÍTO EULERIANO

Para a construção de um circuito euleriano em um grafo euleriano poderá ser utilizado o algoritmo de Fleury, que se encontra apresentado a seguir:

- Passo 1** Selecionar um vértice qualquer V como sendo o vértice inicial do circuito;
- Passo 2** A partir do vértice escolhido percorra as arestas do grafo, apagando aquelas que foram visitadas. Nunca percorra uma aresta, se neste momento específico a remoção da mesma dividir o grafo em duas componentes conexas. Repetir este processo até que todas as arestas tenham sido percorridas.

2.4.2) ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PCC

Este algoritmo heurístico é utilizado para construir um grafo euleriano de mínimo custo, a partir de um grafo dado, a fim de que se possa aplicar o algoritmo de Fleury, apresentado anteriormente.

- Passo 1** Seja $C = [C_{ij}]$ a matriz de custos das arestas adjacentes do grafo G . Usando o algoritmo de Floyd construa a matriz de $D = [D_{ij}]$, onde D_{ij} é custo do caminho mínimo entre um vértice X_i e o vértice X_j .
- Passo 2** Construa a matriz de distância, conforme passo 1, somente com os vértices que possuem grau ímpar.
- Passo 3** Procure o menor valor na matriz de distância obtida no passo 2 (exceto o valor zero correspondente à D_{ij} , onde $i = j$). Retire desta matriz as linhas e as colunas correspondentes a estes índices, obtendo uma nova matriz. Repita este passo até não existirem mais vértices.

Passo 4 Introduza arestas artificiais no grafo original G , sendo que cada uma destas corresponde a cada menor valor determinado no **passo 3** (com isto todos os vértices de grau ímpar passarão a ter grau par).

Passo 5 No grafo obtido com a inclusão das arestas artificiais aplica-se o algoritmo de Fleury. O circuito assim obtido corresponde à solução do Problema do Carteiro Chinês.

2.5) CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelo exposto neste capítulo verifica-se um número significativo de modelos que se propõem a resolver o problema de roteamento de veículos.

O propósito deste trabalho é apresentar um modelo heurístico de cobertura de vértice para a coleta de malotes pela ECT. A escolha do modelo heurístico decorre da complexidade que as soluções exatas impõem para estes tipos de problema. Conforme AHO et alii [1974]. O tempo exigido por um algoritmo é expresso em função do tamanho do problema, ou seja, a quantidade de dados de entrada. Uma idéia que vem ganhando aceitação nos últimos anos é classificar um algoritmo como eficiente, se no pior caso, a complexidade é limitada a uma função polinomial do número de vértices. Em caso contrário define-se a complexidade como uma função exponencial.

Na tabela 01, é feita uma comparação entre algumas funções exponenciais e polinomiais, demonstrando a dificuldade de se aplicar algoritmos não-polinomiais, na solução de problemas de natureza combinatorial.

FUNÇÕES	VALORES APROXIMADOS			CLASSIFICAÇÃO
n	10	100	1.000	Polinomial
$n \log n$	33	664	996	Polinomial
n^3	1.000	1.000.000	10^9	Polinomial
$10^6 n^8$	10^{14}	10^{22}	10^{30}	Polinomial
2^n	1024	$1,27 \times 10^{30}$	$1,05 \times 10^{301}$	Exponencial
$n^{\log n}$	2099	$1,93 \times 10^{13}$	$7,98 \times 10^{29}$	Exponencial
$n!$	3.628.800	10^{158}	$4,00 \times 10^{2567}$	Exponencial

Tabela 01: Comparação do crescimento de algumas funções polinomiais e funções exponenciais. (Fonte: JOHNSON e PAPADIMITRIOU [1985]).

Verifica-se que na medida em que aumenta o tamanho do problema (valor de “n”) o número de operações para resolver uma determinada instância deste problema cresce muito rapidamente para os algoritmos exponenciais. Assim, pode-se classificar um algoritmo em bom ou ruim se a solução do problema, no pior caso, exigir uma função de complexidade de tempo polinomial ou exponencial, respectivamente.

O problema do caixeiro viajante é considerado NP-completo, pois não se conhecem algoritmos polinomiais exatos para a sua solução, o que faz com que seja mais apropriado a utilização de algoritmos heurísticos, principalmente em se tratando de problemas de maior porte, encontrados no mundo real.

No capítulo seguinte será apresentado e discutido o problema de roteamento de veículo e como este pode ser entendido como uma extensão do PCV.

CAPÍTULO III

3) ALGUMAS EXTENSÕES DO MODELO BÁSICO DE COBERTURA DE VÉRTICE

3.1) CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Conforme já mencionado, os problemas de roteamento visam obter rotas para uma determinada frota. Estas apresentam características bem definidas (limite de peso, volume, velocidade, etc.), a partir da identificação dos clientes a serem visitados, cuja demanda também é conhecida.

A finalidade do roteamento consiste em atender aos percursos previamente conhecidos e limitados, partindo de depósitos determinados para a distribuição e coleta de uma dada quantidade de mercadorias.

As inclusões de novas restrições, para atender às peculiaridades reais, impõem algumas extensões ao PCV clássico, tais como:

- a) problema de múltiplos caixeiros viajantes (M-PCV) partindo de um único depósito ou garagem;
- b) problema de múltiplos caixeiros viajantes partindo de vários depósitos ou garagens;
- e

c) problema do caixeiro com rotas de demandas estocásticas ;

Cabe frisar que a solução do problema de roteamento de veículos busca a minimização dos custos variáveis de transportes. Todavia é possível reduzir também os custos fixos, ou ainda, uma combinação dos dois tipos de custos.

Nos problemas de roteamento de veículos existem duas grandes subdivisões: roteamento de vértice e roteamento de arcos. No roteamento por vértices, cada cliente representa um vértice, que deverá ser atendido ao menos por um veículo da frota, efetuando a coleta e a entrega de mercadorias, como por exemplo em bancos, caixa de correspondência dos correios, etc. No roteamento de arcos, a frota deve cobrir um conjunto de arcos de uma rede pré-determinada, como ocorre com a coleta de lixo, manutenção de redes, etc.

3.2) CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA DE COLETA E ENTREGA DE MALOTES NA ECT

Na ECT, o serviço de coleta e entrega de malotes é realizado mediante a celebração de um contrato prévio entre a empresa e o cliente (pessoa jurídica). Neste contrato ficam definidos, além dos preços a serem cobrados, os endereços de coleta e entrega, as respectivas frequências (diário ou não), o limite de peso e ainda a faixa horária em que os malotes serão coletados ou entregues. Em geral, a entrega de malotes ocorre entre 8:00 e 12:00 horas e a coleta entre 13:00 e 17:00 horas.

A fixação da faixa horária de coleta, por parte da ECT, depende da localização da unidade operacional (depósito) e dos meios de transportes disponíveis que irão levar estas cargas aos seus destinos. Cabe frisar que existe a possibilidade do cliente

fixar o horário de coleta dos malotes. No entanto, esta modalidade de serviço é muito pouca representativa e com tendência a ser reduzida.

Pelo exposto, verifica-se que o serviço de coleta e entrega de malotes possui endereços de distribuição e coleta previamente definidos, a frequência determinada e o peso dos malotes estabelecidos. Assim, as demandas dos clientes são bem conhecidas, não existindo aleatoriedade neste processo.

Conforme já citado, se o cliente fixar o horário de coleta e entrega dos malotes, a rota a qual pertence este cliente, teria que ser racionalizada através da aplicação de modelos com janela de tempo, onde é possível resolver este tipo de problema.

Para o presente caso, o modelo escolhido será aquele que se aplica em quase a totalidade dos contratos realizados entre a ECT e seus clientes, isto é, a coleta e entrega de malotes em endereços previamente conhecidos, caracterizando portanto como um problema clássico de cobertura de vértices.

O objetivo do modelo é encontrar rotas para uma frota de veículos com capacidade conhecida, partindo de uma unidade operacional (depósito), com a finalidade de atender a uma demanda previamente estabelecida. Estas características são aquelas apresentadas para o problema básico de roteamento de veículos.

Ao buscar as melhores rotas, visando a minimização dos custos variáveis de transportes, indiretamente obtém-se, também, uma redução nos custos fixos referentes a ampliação e renovação da frota.

Isto posto, pode-se afirmar que o modelo de roteamento de veículos a ser aplicado na ECT, deve atender as seguintes condições:

- ◆ minimizar o custo de transporte, através da redução da distância total a ser percorrida pela frota;
- ◆ distribuir e coletar os malotes a partir de um único depósito;
- ◆ considerar o limite máximo de clientes que poderão ser atendidos pela rota coberta por um veículo, tendo em vista o tempo disponível para executá-la;
- ◆ realizar a coleta ou a entrega em operações exclusivas;
- ◆ considerar o tempo de parada em cada cliente, conforme previsto em contrato, o qual costuma ser de no máximo em 3 minutos;

3.3) FORMULAÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS.

3.3.1) MODELO DE FISHER E JAIKUMAR

No problema de roteamento de veículo (*Vehicle Routing Problem - VRP*) os clientes são indexados por $i = 2, 3, \dots, n$ e os veículos são indexados por $k = 1, 2, 3, \dots, m$; para o depósito é atribuído $i = 1$.

Isto posto, tem-se:

- ◆ a cada cliente “ i ” está associada uma demanda q_i ;
- ◆ o custo da viagem entre o cliente “ i ” e o cliente “ j ” é c_{ij} ;
- ◆ a capacidade do veículo “ k ” é Q_k .

Na formulação de Fisher e Jaikumar [1978] tem-se:

$$\text{Min} \quad \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_k y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 2, \dots, n \\ m & \text{se } i = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_i q_i y_{ik} \leq q_k \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_j x_{ijk} = \sum_j x_{jik} = y_{ik} \quad \forall i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{ij \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad \forall k = 1, \dots, m, S \subseteq \{2, 3, \dots, n\} \quad (5)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (7)$$

onde:
$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se o veiculo } k \text{ visita o cliente } j \text{ apos o cliente } i \\ 0 & \text{em caso contrario} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se veiculo } k \text{ visita o cliente } i \\ 0 & \text{em caso contrario} \end{cases}$$

No modelo acima tem-se:

- ◆ a restrição (2) assegura que todo cliente é alocado em algum veículo;
- ◆ a restrição (3) é relativa ao limite da capacidade do veículo;
- ◆ a restrição (4) assegura que um veículo com visita num cliente, também deixa aquele cliente; e
- ◆ a restrição (5) garante a eliminação das sub-rotas na formação de um circuito hamiltoniano.

A aplicação do modelo de Fisher e Jaikumar determina a solução para o problema de roteamento, dividindo o conjunto de clientes em rotas, sendo que cada uma destas rotas corresponde a um veículo da frota, conforme apresentado na figura 07. Este tipo de problema pode ser visto como múltiplos problemas do caixeiro viajante no qual são consideradas restrições adicionais de capacidade dos veículos.

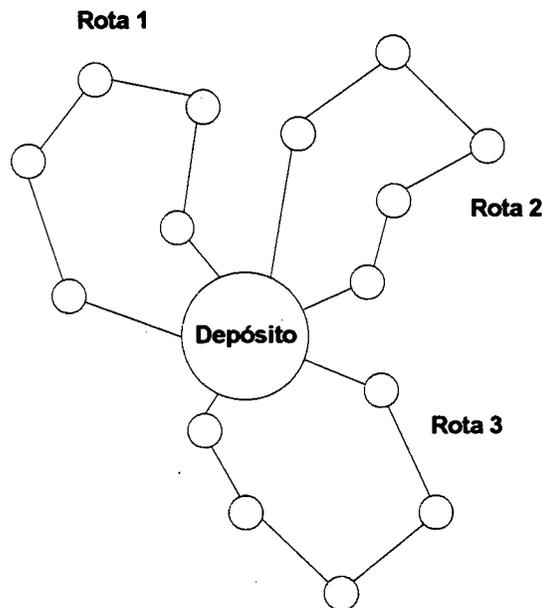


FIGURA 06 - Problema básico do VRP.

Este modelo, apesar de garantir a solução do problema de roteamento nas situações com múltiplos veículos de capacidade limitada, ignora uma diversidade de restrições adicionais, tais como tempo de parada do veículo para carga e descarga, demanda aleatória, tempo máximo de execução da rota, etc. Outra situação que pode ocorrer, no entanto de pouca importância prática, é a existência de um conjunto de depósitos, conhecida como problema de roteamento com múltiplos depósitos.

Alguns modelos mais completos são encontrados na literatura, entretanto exigem uma demanda de tempo computacional muito elevada, tornando praticamente inviável a sua aplicação para a solução de problemas reais.

3.3.2) MODELO DE GOLDEN

Uma formulação genérica para o problema de rotas, conforme proposto por

GOLDEN et alii [1971], é apresentada abaixo:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^{NV} c_{ij}^v x_{ij}^v \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^{NV} x_{ij}^v = 1 \quad \forall j = 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^{NV} x_{ij}^v = 1 \quad \forall i = 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ip}^v - \sum_{j=1}^n x_{pj}^v = 0 \quad \forall p = 1, \dots, n, v = 1, \dots, NV \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^v \right) \leq K_v \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n TP_i^v \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^v \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n TD_{ij}^v x_{ij}^v \leq T_v \quad \forall v = 1, \dots, NV \quad (6)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{ij}^v \leq 1 \quad \forall v = 1, \dots, NV; i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$\sum_{i=2}^n x_{ij}^v \leq 1 \quad \forall v = 1, \dots, NV; j = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$X \in S \quad (9)$$

$$x_{ij}^v \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; v = 1, \dots, NV \quad (10)$$

onde: n número de vértices;

NV número de veículos;

K_v capacidade do veículo "v";

T_v tempo máximo alocado para a realização de uma rota do veículo "v";

d_i demanda do vértice "i";

TP_i^v tempo de carga e descarga do veículo "v" no vértice "i";

TD_{ij}^v tempo de deslocamento do veículo "v" do vértice "i" ao vértice "j";

c_{ij}^v custo do veículo "v" para realizar o percurso entre os vértices "i" e "j";

$$x_{ij}^v = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } v \text{ visita o cliente } j \text{ após o cliente } i \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

X é a matriz $[x_{ij}^v]$ correspondente a conexão a ser feita por tipo de veículo.

Ainda segundo Golden et alii, para os problemas com múltiplos depósitos, a solução pode ser encontrada através de pequenas adequações do modelo acima.

3.3.3) OUTROS MODELOS

Cabe apresentar, ainda, os problemas de roteirização com demandas estocásticas (SVRP), que constitui numa adequação do VRP.

As modificações a serem feitas sobre o modelo VRP devem levar em consideração os seguintes aspectos:

- a) a demanda dos clientes é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida;
- b) a definição das rotas deve ser estabelecidas antes da demanda atual tornar-se conhecida;

- c) o objetivo é minimizar a expectativa da distância a ser percorrida, acrescido de outros custos que serão contraídos se algum cliente não puder ser atendidos em uma rota em particular.

A existência de não linearidade nas restrições e na função objetivo, causada pelas demandas probabilísticas, podem ampliar as dificuldades para a solução do problema. Dado esta condição, somente soluções com métodos heurísticos tem sido considerado nesses problemas.

Um aprofundamento sobre o assunto pode ser encontrado em **TILLMAN** [1969], **STEWART** [1976], **GOLDEN** and **STEWART** [1976] , **GOLDEN** e **YEE** [1979] , **COOK** e **RUSSEL** [1978]. Em algumas destas pesquisas o SVRP tem sido transformado em VRP para posterior obtenção da solução.

A formulação do SVRP, apresentada abaixo, considera que a demanda de cada cliente, denotada por d_i , é uma variável aleatória com função de probabilidade conhecida. Neste modelo, o parâmetro α é a máxima probabilidade permitida para alguma rota falhar. Assim tem-se:

$$\text{Min} \quad \sum_k \sum_{ij} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \quad \text{Prob} \left(\sum_{ij} d_i x_{ijk} \leq Q \right) \geq 1 - \alpha \quad \forall k = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$X = [x_{ijk}] \in S \quad (3)$$

onde: m quantidade de veículos;

Q capacidade de cada veículo;

c_{ij} custo para realizar o percurso entre os vértices “ i ” e “ j ”;

S conjunto de solução do M-TPS;

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } i \text{ e } j \text{ são conectados na rota } k \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

3.3.4) CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os modelos apresentados possibilitam a solução do problema de roteamento de veículo com as diversas peculiaridades e limitações, no entanto, a sua aplicação em problemas reais é praticamente inviável face ao tempo necessário para encontrar a solução ótima do problema. Assim sendo, recomenda-se a utilização de algoritmos heurísticos.

3.4) TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO HIERÁRQUICA

3.4.1) JUSTIFICATIVAS PARA A DECOMPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Na solução dos problemas reais, em geral, a quantidade de dados de entrada é muito grande. Para a cidade de JOINVILLE / SC a rede que representa o sistema de coleta de malotes é representada por um grafo com aproximadamente 500 nós.

Para a obtenção de uma solução em tempo de não comprometer a operacionalização do sistema, é necessário, além da utilização de algoritmos heurísticos, a realização de uma decomposição hierárquica do problema.

Assim sendo, um problema de roteirização que envolva uma grande quantidade de clientes pode ser dividido, inicialmente, num conjunto de distritos, nos quais aplicam-se algoritmos de roteirização, de forma independente e isolada.

A quantidade de distritos de uma cidade ou região vai depender das características do problema. Contudo, a principal regra a ser seguida constitui-se em criar distritos que exigem a ocupação de um veículo da frota, respeitando o padrão de qualidade e produtividade da empresa.

3.4.2) Técnicas Heurísticas para Composição de Distritos

Basicamente, as técnicas para composição de distritos são as seguintes:

- a) técnica de varredura
- b) técnica de partição da rota gigante;

Na *técnica da varredura*, os vértices existentes na rede são inicialmente agrupados em subconjuntos, para posterior roteirização. A partir de um ponto específico (um vértice depósito, por exemplo), faz-se girar uma semi-reta que irá cobrir um conjunto de vértices. A inclusão de um vértice não poderá ultrapassar os limites de tempo pré-estabelecidos para as rotas, e as capacidades dos veículos (peso e volume) utilizados.

Uma vez atendida estas restrições, tem-se formado um distrito a ser atendido por um veículo. Procedendo desta forma em relação aos demais vértices do grafo, formam-se os demais distritos.

O passo seguinte é buscar, em cada um dos diversos distritos formados, o melhor percurso a ser seguido. Nas figuras a seguir é exemplificada a aplicação desta técnica de composição de distritos.

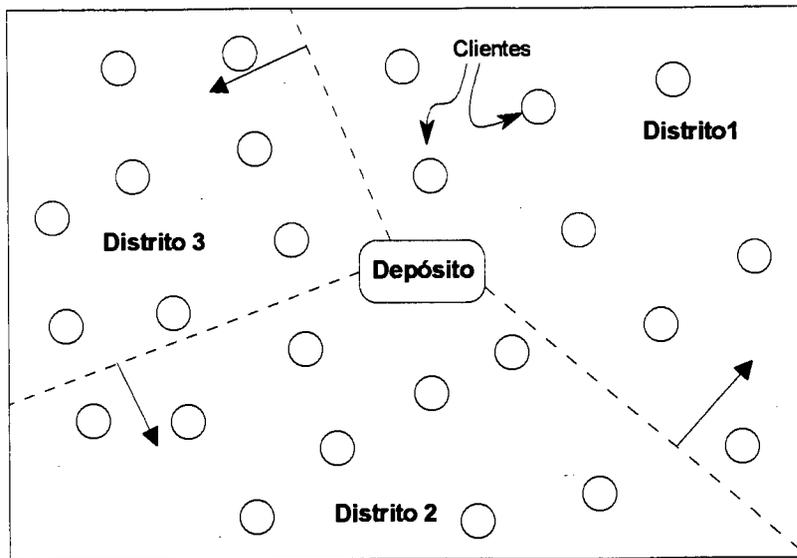


FIGURA 07 - Técnica de Varredura de Vértices

A técnica, devido a **GOLDEN** et alii [1971], também conhecida como *técnica de partição da rota gigante*, consiste, como o próprio nome sugere, em primeiro lugar gerar uma rota inicial que contém todos os nós, empregando os métodos de solução do PCV, para, em seguida, particioná-la em sub-rotas ligadas ao depósito, conforme mostra a figura 08.

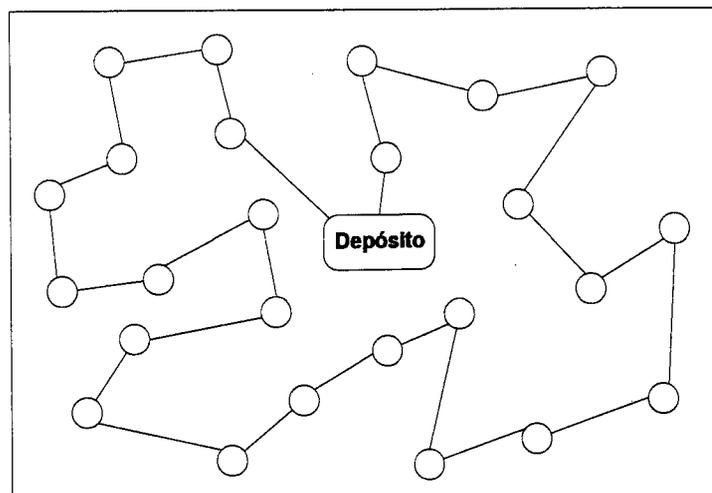


FIGURA 08.a - Técnica de partição da rota gigante - Rota gigante inicial

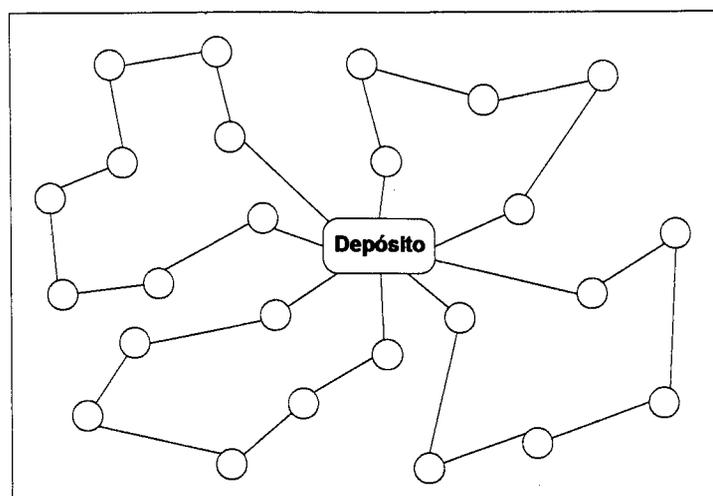


FIGURA 08.b - Técnica de partição da rota gigante - Rota gigante particionada

De acordo com **PAESSENS [1988]** a utilização de um determinado método depende das características das rotas a ser percorridas. Para problemas com poucas rotas e muitos pontos a serem visitados, recomenda-se a técnica de varredura. Para muitas rotas com pouco pontos a ser atendido, recomenda-se o método de partição da rota gigante.

3.4.3) ROTEAMENTO DOS DISTRITOS

Na composição dos distritos em problemas reais, é conveniente adotar alguns procedimentos de simplificação na disposição espacial dos clientes.

Conforme a figura abaixo, existem regiões urbanas em que a concentração de clientes é elevada existindo, uma proximidade entre eles. Quando isso ocorre, clientes vizinhos poderão ser agrupados, sem prejuízo de resolução do roteiro. Com esta providência, reduz-se o tamanho do problema, o que possibilita a solução a ser encontrada mais rapidamente.

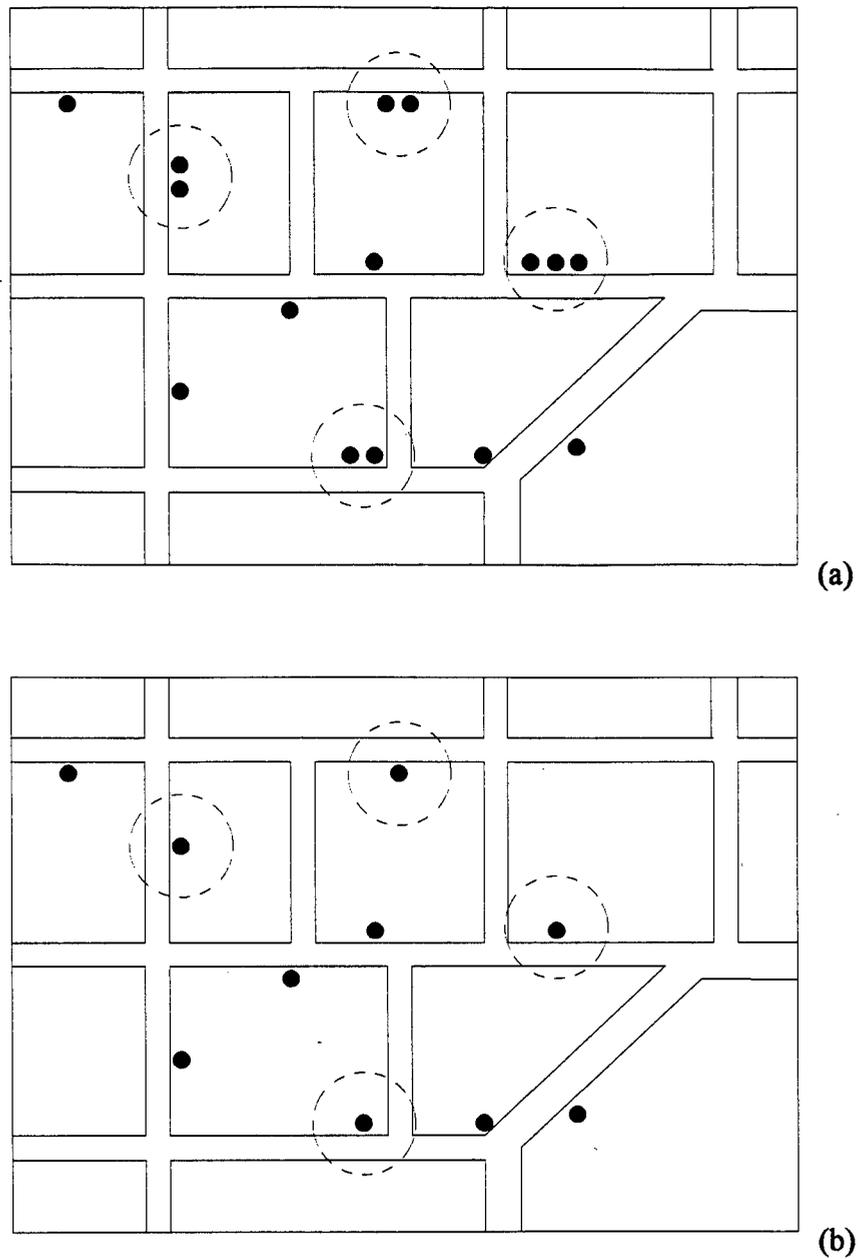


FIGURA 09 - Agrupamento de vértices em um distrito: (a) situação original; (b) situação após agrupamento.

3.5) CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Conforme descrito no início deste capítulo, a solução exata para o problema de roteamento de veículo, em situações reais, é praticamente inviável face ao tempo computacional necessário para a sua obtenção.. Esta dificuldade decorre em função do

tamanho dos problema e da complexidade dos algoritmos exatos, e tendo em vista a frequência com que as rotas sofrem alterações e o pouco tempo disponível para o processamento, a escolha de algoritmos heurísticos é a alternativa que melhor se adapta.

CAPÍTULO IV

4) APLICAÇÃO PILOTO NA CIDADE DE JOINVILLE / SC

4.1) CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo será realizado a roteirização do serviço de coleta de malotes na cidade de JOINVILLE / SC, aplicando as técnicas já descritas e utilizando ALGORITMO s heurísticos e exatos para o estabelecimento das rotas. Com base nos resultados apresentados, serão feitas análises econômicas e de eficiência dos ALGORITMO s, e ainda uma rápida comparação com o modelo que vem sendo utilizado pela empresa.

4.2) CARACTERIZAÇÃO E JUSTIFICATIVAS DA ESCOLHA DA CIDADE DE JOINVILLE / SC

A escolha da cidade de JOINVILLE / SC decorre do fato desta ser uma das principais cidades de Santa Catarina, em termos econômicos e postais. Em JOINVILLE os CORREIOS realizam a coleta de malotes para aproximadamente 500 clientes. Outras características secundárias que reforçam na escolha desta cidade foram:

- a) a sua topografia relativamente plana;

- b) a sua edificação ser basicamente horizontal;
- c) o seu sistema viário ser composto de diversos eixos principais e ligações secundárias para todos os bairros; e
- d) a existência de um plano diretor de ocupação e construção.

A definição dos roteiros, 04 realizados com veículos motorizados (Kombi) e 05 realizados através de bicicletas, é feita atualmente de forma empírica, o que certamente provoca desperdícios de recursos, tanto de veículos como de pessoal, como poderá ser verificado pelos resultados obtidos.

É interessante, para o cliente, que a entrega do seu malote seja feita o mais cedo possível, enquanto que a coleta seja feita o mais tardar possível. A entrega, que é realizada no período compreendido entre 9:00 e 12:00 horas, é estabelecido em função do horário de chegada da carga procedente das demais regiões do Brasil, e da racionalização na utilização dos recursos humanos e veículos disponíveis. O período de coleta, compreendido entre 13:30 e 16:00 horas, é imposto pela necessidade de redespachar a carga colhida na região, para as demais localidades do Brasil, até às 17:00 horas.

4.3) DISTRITAMENTO

Para compor os distritos, é indispensável identificar os elementos necessários para a realização do serviço de coleta e entrega de malotes, que são os seguintes:

- a) endereço, localização geográfica (com o emprego de um mapa da cidade) e definição do grafo formado pelos clientes;

- b) localização, no mapa, e inclusão no grafo, da unidade operacional da ECT (depósito);
- c) demanda dos clientes;
- d) frequência com que o serviço de malote será executado (dias da semana);
- e) tipo de veículo que será utilizado¹;
- f) tempo máximo para a coleta e a entrega em cada rota.

Uma vez realizado os procedimentos supracitados, aplica-se a técnica da varredura que realizará a composição dos distritos. Com esta técnica é possível respeitar as peculiaridades topográficas da região em estudo (morros, rios, pontes, etc), e ainda o sistema viário da cidade (avenidas, eixos viários, etc). Também é possível realizar algumas simplificações, onde a separação dos distritos não precisa ser necessariamente uma reta longitudinal em relação ao depósito. Pode-se utilizar avenidas, rios, morros, entre outros elementos físicos, para determinar os limites entre os distritos. Esta simplificação não traz prejuízos à solução do problema de definição das rotas, e ainda, possibilita uma melhor aceitação da equipe de trabalho da unidade operacional quando da realização de coleta e entrega de malotes nos distritos.

No mapa em anexo pode-se observar os procedimentos acima mencionados.

¹ Para o serviço de malote os atuais veículos utilizados, com capacidade de 500 kg, não representa nenhuma restrição quanto a peso e volume das rotas. A grande dificuldade consiste no tempo de viagem

4.4) DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE DISTÂNCIA ENTRE CLIENTES DE CADA DISTRITO

Para estabelecer as distâncias entre os vértices (clientes), pode-se empregar dois métodos: o método das coordenadas e o método das distâncias reais.

- a) *método das coordenadas*: a distância entre os vértices é estabelecida trigonometricamente (distâncias euclidianas), pressupondo a existência de ligações lineares entre quaisquer pares de pontos. Esta condição impõe algumas diferenças que provocará distorções nas distâncias reais. Para corrigir estas distorções é possível utilizar um fator de ajuste sobre as distâncias calculadas, e que, de acordo com as características da região, assume valores entre 1,20 e 1,35;
- b) *método das distâncias reais*: neste método, cada cliente representa um ponto, que é plotado no mapa. Em seguida, realizando ligações entre os vértices adjacentes, é possível medir, com a utilização de um curvímeter, as distâncias reais entre os mesmos, respeitando o sistema viário existente. Com base nestas distâncias, aplica-se o ALGORITMO de FLOYD para obtenção da menor distância entre todos os pares de vértices do distrito.

No caso deste trabalho empregou-se o método das distâncias reais, conforme sugerido acima.

4.5) DETERMINAÇÃO DOS ROTEIROS DOS DISTRITOS

A seguir serão apresentados os roteiros propostos para a coleta de malotes na cidade de JOINVILLE, para os distritos nos quais são utilizados veículos a motor. Para obtenção destes roteiros, foram utilizados os ALGORITMOS 3-OPT e GA.

DISTRITO 06

a) ALGORITMO GENÉTICO

População: 100

Roteiro: 01-03-02-23-22-20-19-21-18-16-17-13-14-
15-12-11-10-09-08-07-05-06-04-01

Custo: 33.800 metros.

b) ALGORITMO 3-OPT

Roteiro: 01-04-05-06-07-08-09-10-11-12-13-14-15-
16-17-18-20-21-19-22-23-02-03-01

Custo: 34.300 metros.

DISTRITO 07

a) ALGORITMO GENÉTICO

População: 100

Roteiro: 01-02-12-13-11-04-05-06-07-10-09-08-03-
41-42-43-44-40-39-33-19-14-17-15-16-18-
20-21-22-23-25-26-27-28-24-29-30-31-32-
35-36-37-38-34-01

Custo: 34.900 metros

b) ALGORITMO 3-OPT

Roteiro: 01-12-02-04-11-13-05-06-03-07-08-09-10-
14-19-17-15-40-41-42-43-44-39-16-18-20-
21-22-23-25-26-27-28-24-29-30-33-31-32-
35-36-37-38-34-01

Custo: 33.090 metros.

DISTRITO 08

a) ALGORITMO GENÉTICO

População: 100

Roteiro: 01-04-03-02-05-12-13-14-15-16-19-22-27-
28-29-30-31-32-33-34-26-23-24-25-35-36-
06-07-08-09-10-11-21-20-17-18-01

Custo: 25.140 metros.

b) ALGORITMO 3-OPT

Roteiro: 01-02-03-04-05-06-07-08-09-10-11-12-13-
20-21-14-15-16-17-18-19-22-27-28-29-30-
31-32-33-34-35-36-24-25-26-23-01

Custo: 23.360 metros.

DISTRITO 09

a) ALGORITMO GENÉTICO

População: 100

Roteiro: 01-26-25-30-29-28-33-32-31-27-24-05-06-
09-11-07-02-03-04-08-10-19-21-20-18-22-
23-17-12-13-14-15-16-01

Custo: 16.750 metros.

b) ALGORITMO 3-OPT

Roteiro: 01-15-16-17-12-05-06-04-02-03-08-07-09-
11-10-19-20-21-18-22-24-27-31-32-33-28-
29-30-25-26-23-13-14-01

Custo: 16.890 metros.

4.6) ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.6.1) TEMPO DE PROCESSAMENTO

Na aplicação dos algoritmos 3-OPT, GENÉTICO e BRANCH and BOUND, para a obtenção das rotas do distritos em JOINVILLE / SC obteve-se os resultados, conforme tabela a seguir:

Distrito	Número de Vértices	Algoritmo						Método
		Branch and Bound (*)		3-OPT		Genético		Manual
		Valor	Tempo CPU	Valor	Tempo CPU	Valor	Tempo CPU	Valor
6	23	36650	16:00:00,00	34300	00:00:00,49	33800	00:00:54,27	38600
7	44	37260	18:00:00,00	33090	00:00:08,24	34900	00:01:06,01	39046
8	36	27210	14:00:00,00	23360	00:00:01,59	25140	00:00:08,45	28966
9	33	16180	02:24:48,00	16890	00:00:04,18	16790	00:00:08,15	21540

(*) Na resolução dos três primeiros distritos o processamento foi suspenso, antes da obtenção da solução ótima.

Equipamento: microcomputador 486 DX 33 MHz

Valor = distância em metros; Tempo de CPU = HH:MM:SS,CC

TABELA 2 - Desempenho dos algoritmos

Pelos dados da tabela verifica-se que:

- a) a aplicação do ALGORITMO BRANCH and BOUND é inviável, considerando os equipamentos disponíveis na empresa e o tempo de processamento;
- b) conforme esperado, os algoritmos 3-OPT e Genético apresentaram bons resultados e com um tempo de processamento compatível com as necessidades operacionais;
- c) confirma para os algoritmos heurísticos a vasta recomendação na literatura sobre a solução do PCV e a não recomendação da utilização de algoritmos exatos.

4.6.2) ANÁLISE ECONÔMICA DOS RESULTADOS

Pelo lado econômico, a aplicação dos algoritmos heurísticos possibilitam uma redução de custo na coleta de malotes em JOINVILLE / SC bastante significativa.

Na tabela a seguir são apresentados os dados:

Distrito	Número de Vértices	Método Manual Valor	Algoritmos Propostos			
			Algoritmo 3-OPT		Algoritmo Genético	
			Valor	Diferença	Valor	Diferença
6	23	38600	34300	12.54%	33800	14.20%
7	44	37260	33090	12.60%	34900	6.76%
8	36	27210	23360	16.48%	25140	8.23%
9	33	21540	16890	27.53%	16790	28.29%

TABELA 3: Custo de distribuição de malotes (em metros).

Pelo exposto, observa-se que o emprego de modelos quantitativos de racionalização, no presente caso os algoritmos 3-OPT e Genético, possibilitaram ganhos significativos nos processos produtivos de coleta de malotes em JOINVILLE.

Os ganhos apontados no quadro supracitado refere-se aos valores de um roteiro nos distritos. Em média são realizadas 02 (duas) percorridas por dia.

A título de exemplo, considere os dados relativos ao distrito número 09.

- a) a distância obtida pelo método manual foi de 21540 m;
- b) a distância proposta pelo modelo 3-OPT foi de 16890 m;
- c) a redução no percurso do distrito foi de 4650 m;
- d) no decorrer de um mês tem-se, em média, a realização de 50 vezes o roteiro no distrito.

Assim, verifica-se um dispêndio desnecessário de 232 km ao mês, somente para o distrito 09 da cidade de Joinville / SC. Para a cidade como um todo, a economia mensal seria da ordem de 856 Km / mês.

Pelos dados acima é fácil compreender a possibilidade de redução de custo com transporte em todo país, pois somente em Santa Catarina a frota da distribuição domiciliária percorre em torno de 184.000 Km ao mês.

4.7) CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelo exposto, verifica-se que a aplicação de modelos matemáticos, com as devidas adequações e simplificações ao tipo de problema a ser tratado é perfeitamente possível para situações reais e com ganhos nada desprezíveis.

A metodologia empregada, bem como os algoritmos utilizados são de fáceis execução não exigindo muito esforço ou investimentos. Assim é possível afirmar que a proliferação na utilização de modelos matemáticos nas empresas é recomendável.

CAPÍTULO V

5) CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

5.1) CONCLUSÃO

Conforme comentado no início do presente trabalho, o aumento da concorrência tem exigido das empresas uma busca constante no aperfeiçoamento dos processos operacionais. Esse aperfeiçoamento visa, sobretudo, a racionalização no uso dos recursos disponíveis como forma de reduzir os seus custos.

Na formação do preço de um determinado produto ou serviço, o custo de sua realização constitui-se numa das variáveis mais importante, e por isso, é uma preocupação constante das empresas.

Com a redução dos custos, as empresas ficam mais produtivas, considerando que a produtividade, em termos macro, pode ser estabelecida como sendo a relação entre faturamento e custos. Essa lógica é válida para qualquer tipo de empresa, não importando a sua natureza ou o seu tamanho.

A racionalização na utilização dos recursos envolvidos na execução de um determinado serviço ou na elaboração de um bem deve ser o primeiro passo a ser dado por uma empresa que busca uma minimização dos seus custos. Pode-se afirmar que

custo menores permitem a empresa tornar-se mais competitiva e garantir a sua sobrevivência a longo prazo.

A ECT é basicamente uma empresa de “transporte” de mercadorias, correspondências e informações, e está sujeita à concorrência crescente do mercado que busca qualidade e preços vantajosos.

No macro processo dos CORREIOS, uma parte muito importante dos custos é devida a entrega a domicílio aos seus clientes e, para viabilizar essa função, a empresa utiliza um conjunto significativo de recursos, tais como veículos e outros equipamentos, pessoas, benfeitorias, etc.

Conforme já exposto, os CORREIOS possuem um número elevado de diferentes tipos de veículos para cumprir a sua função de entrega a domicílio. Assim sendo, é indispensável a utilização de modelos logísticos que racionalizem a utilização dessa frota. O emprego dos algoritmos 3-OPT e Genético, na determinação dos roteiros de coleta e entrega do serviço de malotes, possibilitam a racionalização das rotas na execução dos distritos.

5.2) RECOMENDAÇÕES

O trabalho apresentado não esgota o assunto, e algumas recomendações podem ser realizadas:

- a) na composição dos distritos a técnica da varredura poderia ser utilizada concomitantemente com o emprego da técnica de repartição da rota gigante. É possível esperar uma melhor formação dos distritos;

b) utilização do Algoritmo Genético para composição dos distritos, conforme procedimentos a seguir:

- ◆ os clientes estão distribuídos dentro de uma região geográfica;
- ◆ dado as limitações das rotas, quer pelas restrições da capacidade do veículo ou do tempo disponível para executá-la, define-se a *priori* a quantidade de distritos adequada para atender a demanda dos clientes da região;
- ◆ em seguida, utilizando - se dos conceitos do Algoritmo Genético, desenvolve um processo combinatório entre todos os clientes de tal forma que ao final destas combinações cada cliente estará associado a um distrito (respeitando a quantidade máxima e mínima de clientes em cada distrito previamente definidas);
- ◆ realizada a distribuição dos clientes em seus respectivos distritos, calcula-se o *fitness* que esta proposição representa e compara com o *fitness* da proposição anterior. Se o resultado atual é pior que o anterior abandona esta solução e busca uma nova combinação de clientes e distritos. Se o resultado atual é melhor que o anterior, abandona este e armazena a nova configuração proposta. Repetir este processo até que a convergência de melhoria do *fitness* seja pouca significativa.
- ◆ ao final dos procedimentos acima, estariam todos os distritos definidos com os seus clientes.

Cabe salientar que foram realizados alguns testes com a metodologia acima, que observou promissora, mas apresentou algumas dificuldades de convergência na melhoria da solução bem como na distribuição espacial dos clientes junto ao seu distrito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHO, O., HOPEROFT, I. and ULMAN, J. The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison Wesley, 1974.
- AKL, S. The Minimal Directed Spanning Graph Combinatorial Optimisation. Austral Comput, J., 1980, vol. 12, n. 4, p. 132 - 136.
- BELLMAN, R. Dynamic Programming Treatment Salesman Problem, J. ACM, 1962, p. 61-63.
- BURKE, L. I. and DAMAY, P. The Guilty Net for the Travelling Salesman Problem, Computer and Operations Research, 1992, vol. 19, n. 3/4, p. 255- 265.
- CHEN, Y. L. and CHIN, Y. H. The Guiltiest Path Problem, Computers and Operations Research, 1990, vol. 17, n. 2, p. 153-161.
- COOK, T. and RUSSEL, R. A Simulation and Statistical Analysis of Stochastic Vehicle Routing Timing Constraints, Decision bci 9, 1978, p. 673- 687.
- DANTIZIG, G. B., FULKERSON, D. R. and JOHSON, S. M. Solution of Large Scale Travelling Salesman Problem, Operation Research, 1954, vol. 2, p. 393-410.
- DAVIS, L. Handbook of Genetic Algorithms, Published by Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

- EDMONDS, J. and JOHNSON, E. L. Matching, Euler Tours and the Chinese Postman,
Mathematical Programming, 1973, vol. 5, n. 1, p. 88-124.
- FISHER, M. L. and JAIKUMAR, R. A Decomposition Algorithm for Large Scale
Vehicle Routing, Department of Decision Sciences, The Wharton School,
University of Pennsylvania, Philadelphia, 1978.
- FORREST, S. and MITCHELL, M. Genetic Algorithms and Artificial life, Santa Fé
Institute. Santa Fé and Department of Computer Science University of New
Mexico, 1993.
- FRIEZE, A. M., BALBIATI, G. and MAFIOLLI, F. On the Worst Case Performance of
Some Algorithms for the Asymmetric Travelling Salesman, Networks, 1992, vol.
12, p. 23-39.
- GOLDEN, B. and STEWART, W. Vehicle Routing with Probabilistic Demand,
Computer Science and Statistics: Tenth Annual Symposium (Edited by D. Hogben
and D. FIFE), NBS special publication, 1978, p. 252-259.
- GOLDEN, B. and YEE, J. A Framework of Probabilistic Vehicle Routing, AIKE
TRANS., 1979, 11 (2), p. 109-112.
- HOMAIFAR, A. and LIEPINS, G. E. A New Approach on the Travelling Salesman
Problem by Genetic Algorithms, Department of Electrical Engineering North
Carolina, State University Greensboro, North Carolina, 1993.
- LAPORTE, G., MERCURI, H. and NORBERT, Y., An Exact Algorithm for the
Asymmetric Capacitated Vehicle Routing Problem, Networks, 1986, vol. 16, p.
33-46.

- LEEBMAN, J. C., MALE, J. W. and WATHME, M. Minimum Cost Residential Refuse Vehicle Route, Journal of the environmental Engineering Division, 1975, p. 339-412.
- LITTLE, J. D. C., MURTY, K., SWEENEY, D. and KAREC, C. An Algorithm for the Travelling Salesman Problem, Operations Research, 1963, vol. 11, n. 6, p. 191-208.
- LOOI, C. K. Neural Net work Methods in Combinatorial Optimisation, Journal of computer and Operations Research, 1992, vol. 19, n. 3/4, p. 191-208.
- MATION, H. Caminho Euleriano de Mínimo Custo em Grafos Orientados, Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1982, p. 483-492.
- MAYERLE, S. F. Um Algoritmo Genético para a Solução do Problema do Caixeiro Viajante, UFSC / CTC / EPS, Florianópolis/ SC, 1995.
- SERRÃO, J. B. F. and MIZRAHI, S. E, Um Sistema Computacional para Roteamento de Veículos em Computadores de pequeno porte, Anais XX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1987.
- SYSLO, M. M., DEO, N. and KOWALIK, J. J. Discrete Optimisation Algorithms - with Pascal Programs, 1983, p. 343- 392.

BIBLIOGRAFIA

BELHOT, R. V. A Formação de Rotas de Veículos na Distribuição Física: Modelos e Métodos de Solução, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PCV, Rio de Janeiro, 1981.

BOAVENTURA NETO, P. O. Teoria e Modelos de Grafos, Edgard Blucher LTDA, 1979.

BODIN, L. D., GOLDEN, B., ASSAD, A. and BALL, M. Routing and Scheduling of Vehicles and Crews - the state of art Journal of Computer and Operations Research, 1983, vol. 10, n 2.

CANASSA, E. M. Planejamento de Roteiro dos Veículos Coletores de Resíduos Sólidos Urbanos, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós - Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 1992.

CHAVES Jr., Banegas. Uma Metodologia para o Problema do Carteiro Chinês em Rede Mistas, Dissertação de Mestrado em Engenharia - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC - Florianópolis, 1985, 88 p.

- CLARK, G. and WRIGHT, J.-W. Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number Delivery Points, Operations Research, 1964, vol. 12, p. 568-581.
- CRISTOFIDES, N. and EILON, S. An Algorithm for the Vehicle Despatching Problem, Operational Research Quarterly, 1969, vol. 20, p. 309-318.
- CRISTOFIDES, N. Graph Theory - An Algorithm Approach, Academic Press, 1975.
- CRISTOFIDES, N. Vehicle Routing, the Travelling Salesman Problem - a Guide Tour of Combinatorial Optimisation, John Willy e Bons LTDA, 1985, p. 431-448.
- DASKIN, M. S. Logistic: an Overview of State of the Art and Perspectives on Future Research, Transp. Res., 1985, vol. 19 A, n. 5/6, p. 383-398.
- FORREST, S. Genetic Algorithms - Proceeding of the Fifth International Conference on- Norgan Kaufmann Publisher, Inc, San Natio California, 1993.
- GALVÃO, R. D. O Problema de Roteamento de Veículos - Caracterização e Métodos de Solução, Atas do XIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro, 1967, p. 390-402.
- GOLDEBERG, D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimisation and Machine Learning, University of Alabama, 1989.
- GOLDEN, B. L., BODIN, L., DOYLE, T. and STEWART Jr., W. Approximate Travelling Salesman Algorithm, Operations Research, 1980, vol. 28, n. 3, part. II, p. 431-448.
- GOLDEN, B. L., BODIN, MAGNANTI, T. L. and NGUYEN, H. Q. Implementing Vehicle Routing Algorithms, Network, 1971, vol. 7, p. 113-148.

- GONDRAM, M. and MINIOUX, M. Graphs and Algorithms, Great Britain, John Wiley e Sons LTDA, 1984.
- GONDRAM, M. Graphs and Algorithms, New York, John Wiley e Sons LTDA, 1984.
- GRACIOLLI, O. D. Planejamento de Roteiros de Veículos Coletores de Resíduos Sólidos de Serviço de Saúde - Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 1994.
- JOHNSON, D. S. and PAPADIMITROU, C. H. The Travelling Salesman Problem - Computational Complexity, Edited by E. L. LAURELER, J. K. LENSTRA, A. H. G. RINOOY and D. B. SHMOYS, Ed. John Wiley e Sons, 1993, p. 37-82.
- KANELLARIS, P. and PAPADIMITRIOU, N. C. Local Search for the Asymmetric Traveling Salesman Problem, *Operation Research*, 1980, vol. 28, n. 5, p. 1086-1099.
- KARP, R. A Patching Algorithm for the Nonsymmetric Travelling Salesman Problem, *SIAM, J. Compo*, 1979, n. 8, p. 561 - 573.
- LAPORTE, G., LAMBERT, V. and LOUVEAUX, F. Designing Collection Soutes Though Bank Branches, *Computer and Operations Research*, 1993, vol. 20, n. 7, p. 783-791.
- LIN, S. and KERNIGHAN, B., An Effective Heuristic of the TSP, *Operations Research*, 1973, vol. 21, p. 498-516.
- LIN, S. Computer Solution of the TSP, *Bell SYSTEMS Technical Journal*, 1965, vol. 44, p. 2245-2269.

- MALE, J. W. and LEEBMAN, J. C. Districting and Routing for Solid Waste Collection, Journal of the Environmental Engineering Division, p. 1-14, 1978.
- MINIEKA, E. The Chinese Postman Problem for Mixed Networks, Management Science, 1979, vol. 25, n. 7, p. 642-648.
- NOVAES, A. G. Sistemas Lógicos: Transporte, Armazenagem e Distribuição Física de Produtos, Edgar Blucher LTDA, 1989.
- PAESSENS, H. The Saving Algorithm for the Vehicle Routing Problem, European Journal of Operational Research, 1988, vol. 34, p. 336-344.
- PENKY, J. F. and MILLER, D. L. A Parallel Branch and Bound Algorithm for Solving Large Asymmetric Travelling Salesman Problem, Mathematical Programming, 1992, vol. 55, p. 17-33.
- POTVIN, J. Y., SHEN, V. and ROUSSEAU, J. M. Neural Networks for Automated Vehicle Dispatching, Computer and Operations Research, 1992, vol. 19, n.3/4, p. 267-276.
- RABUSQUE, M. A. Introdução a Teoria dos Grafos, Ed. UFSC, Florianópolis, 1992.
- STEWART, W. The Delivery Truck Routing Problem with Stochastic Demand, Paper Presented at the ORSA/ TIMS joint national meeting, Miami Beach, Florida, 1976.
- TILLMANN, F. The Multiple Delivery Problem with Probabilistic Demands, Transportation SCI, 1969, p. 192-204.
- VAN DER CRUISSEN, P. and RIJCKART, M. J. Heuristic for the Asymmetric Travelling Salesman Problem, Journal of the Operational Research Society, 1978, vol. 29, n. 7, p. 697-701.

ANEXOS

ANEXO 01

REVISÃO BÁSICA SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS

1) INTRODUÇÃO

Neste anexo serão apresentados os conceitos básicos da teoria dos grafos que foram utilizados nos capítulos anteriores. Um maior aprofundamento sobre as definições e conceitos poderão ser encontrados em **CRISTOFIDES** [1975], **BOAVENTURA NETO** [1979], **GONDRAN e MINOUX** [1984], e **RABUSKE** [1992].

2) DEFINIÇÕES

Definição 1

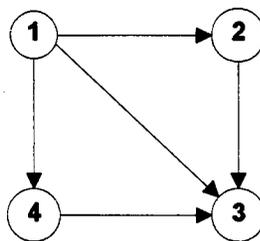
Um *grafo* G é definido como um par $G = (X, A)$, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto finito e não vazio, de elementos denominados vértices ou nós, e $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ é um conjunto de elementos do produto cartesiano $X \times X$, chamados de ligações (arcos ou arestas).

Quando a ligação de dois vértices possui uma orientação, normalmente indicada por seta, essa linha é denominada de arco. Se não houver orientação na ligação

de dois vértices, essa linha é denominada de aresta. A quantidade de vértices é denotada por “ n ” e estabelece a ordem de um grafo.

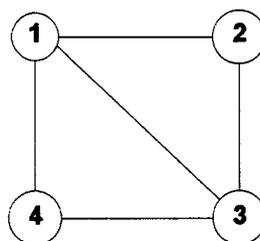
Definição 2

Um grafo é dito **grafo orientado**, se todas as suas ligações tem orientação, e são representadas por uma setas. Neste caso, tais ligações são chamadas de arcos **CRISTOFIDES [1975]**, conforme pode ser observado na figura abaixo.



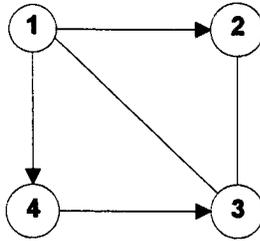
Definição 3

Um grafo é dito **não-orientado**, se todas as suas ligações não possuírem uma direção. Neste caso, tais ligações são denominadas de arestas, conforme pode ser observado na figura abaixo.



Definição 4

Um grafo é dito **misto** se existirem linhas ligando dois vértices com e sem orientação, isto é se o grafo possuir arcos e arestas. **MINIEKA [1979]**, conforme pode ser observado na figura a seguir.

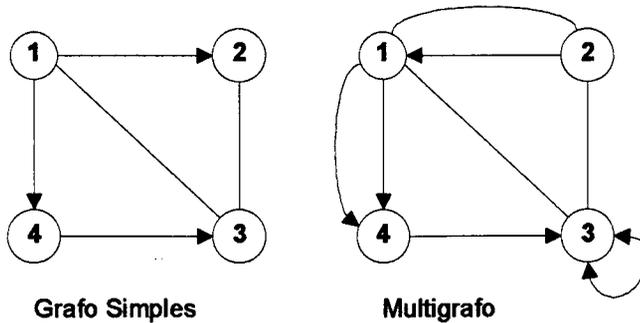


Definição 5

Um grafo é denominado de **multigrafo** se uma ou mais condições abaixo forem observadas:

- a) possuir laços em paralelo;
- b) possuir arestas em paralelo;
- c) possuir arcos em paralelo

Em caso contrário, o grafo é dito **simples**. Nas figuras abaixo podem ser observados estes dois conceitos.



Definição 6

Um **grafo simples**, em que cada par de vértices é adjacente, é denominado de **grafo completo**. Um grafo completo de “*n*” vértices é normalmente representado por

K_n , e é denominado de clique. O grafo completo não orientado de “ n ” vértices possui C_2^n arestas.

Definição 7

Um grafo é dito *valorado* se existirem uma ou mais funções relacionando X e/ou A com um conjunto de números. BOAVENTURA NETO [1979], isto é:

$$f: X \rightarrow P \text{ ou } x_i \rightarrow p_i \text{ ou seja } p_i \rightarrow f(x_i)$$

$$g: A \rightarrow Q \text{ ou } a_i \rightarrow q_i \text{ ou seja } q_i \rightarrow g(a_i)$$

Definição 8

O grafo $G = (X, A)$ é considerado *bipartido* se o conjunto de vértices X for dividido em dois subconjuntos disjuntos X_1 e X_2 , tal que cada um dos arcos / arestas tenha um ponto extremo em X_1 e outro ponto extremo em X_2 CHEN [1990].

Definição 9

Um vértice x_j é denominado *sucessor* de um vértice x_i se existir o arco ou a aresta (x_i, x_j) . O conjunto de todos os vértices sucessores do vértice x_i é denominado por $\Gamma^+(x_i)$.

Definição 10

Um vértice x_i é denominado *predecessor* de um vértice x_j se existir um arco ou aresta (x_i, x_j) . O conjunto de todos os vértices predecessores de x_j é denominado por $\Gamma^-(x_j)$. Isto posto, o conjunto de vizinhos do vértice x_i pode ser denotado como $\Gamma(x_i) = \Gamma^+(x_i) \cup \Gamma^-(x_i)$.

Definição 11

Em um grafo orientado define-se como *semi-grau de entrada* de um vértice x_i , e representa-se como $dg^-(x_i)$ o número total de arcos que tem o vértice x_i como seu vértice final. CHEN [1990].

Definição 12

Em um grafo orientado define-se como *semi-grau de saída* de um vértice x_i , e representa-se como $dg^+(x_i)$ o número de arcos que tem o vértice x_i como seu vértice inicial. CRISTOFIDES [1975].

Definição 13

O *grau do vértice* x_i é determinado pelo número de arestas / arcos que possuem x_i como um de seus pontos extremos. Emprega-se a notação $dg(x_i)$ para representar o grau do vértice x_i .

Definição 14

Todo vértice x_i de um grafo orientado que possua o semi-grau de entrada maior do que o semi-grau de saída é denominado de *vértice fonte*.

Definição 15

Um *caminho* de um grafo orientado é qualquer seqüência de arcos, onde o vértice final de um arco é o vértice inicial do próximo CRISTOFIDES [1975].

Definição 16

Denomina-se *circuito* um caminho simples no qual o vértice inicial e final se coincidem BOAVENTURA NETO [1979].

Definição 17

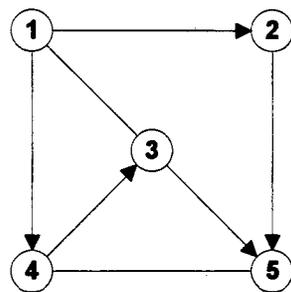
Um *percurso euleriano* é o percurso que utiliza todas as arestas da rede uma única vez. Um grafo conexo G é um grafo Euleriano se, e somente se, todos os seus vértices são de grau par. **BOAVENTURA NETO** [1979].

Definição 18

Um grafo é denominado *conexo* se para todos os vértices x_i e x_j existe um caminho ligando x_i a x_j **GONDRAN** [1984].

Definição 19

A matriz de adjacência de um grafo G é denotado por $A = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = 1$, se o arco (x_i, x_j) existe em G , e $a_{ij} = 0$ em caso contrário **CRISTOFIDES** [1975]. Na figura abaixo é apresentado um exemplo de grafo com a respectiva matriz de adjacência.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

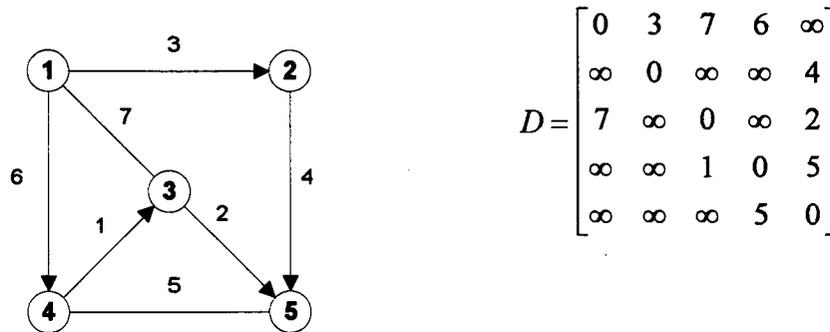
Definição 20

Para um grafo valorado a *matriz de custo* $D = [d_{ij}]$ é obtida a partir dos valores associados aos arcos e arestas. Os valores d_{ij} representam, normalmente,

grandezas físicas, como tempo, distância, etc. A definição da matriz $D = [d_{ij}]$ é dada por:

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{custo do arco ou aresta se } (x_i, x_j) \in A \\ \infty \text{ se } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

Na figura abaixo está representado um grafo com sua respectiva matriz de custo.



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 & 6 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 4 \\ 7 & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição 21

Um grafo é chamado *hamiltoniano*, se possuir um *circuito hamiltoniano*, isto é, se existe um caminho simples fechado que passa por todos os vértices do grafo uma e somente uma vez, exceto para o vértice inicial que é considerado também como o vértice final.

2) ALGORÍTMOS PARA BUSCA DE CAMINHOS MÍNIMOS

Nesta seção serão apresentados os algoritmos que foram utilizados na solução do problema de otimização de circuitos.

Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra foi desenvolvido para determinar o caminho mínimo entre dois vértices $x_s, x_t \in X$, em grafos nos quais a cada arco $a_r = (x_i, x_j)$ está associado um custo de transposição dado por $c_{ij} \geq 0$.

Seja (p_i, l_i, s_i) um rótulo associado a cada vértice $x_i \in X$, onde:

p_i é o vértice predecessor de $x_i \in X$ no caminho de custo mínimo entre x_s e x_i ;

l_i é o custo acumulado associado ao caminho mínimo entre x_s e x_i ;

s_i é a situação do vértice $x_i \in X$, que pode ser N (não-rotulado), R (rotulado) ou P (processado).

Algoritmo propriamente dito

Passo 1 Rotule o vértice inicial x_s com $(p_s, l_s, s_s) = (\phi, 0, R)$, e os demais vértices com $(p_i, l_i, s_i) = (\phi, +\infty, N)$.

Passo 2 Seja $\Psi = \{x_i \in X \mid s_i = R\}$.

Se $\Psi = \emptyset$, então PARE, pois não existe caminho que conecta x_s a x_t .

Se $\Psi \neq \emptyset$, então determine $x_k \in \Psi$ tal que:

$$l_k = \min_{x_i \in \Psi} l_i$$

Passo 3 Se $x_k = x_t$, então PARE (o custo do caminho mínimo é l_k , e a seqüência de vértices do caminho é definida pelos predecessores). Em caso contrário, vá ao passo 4.

Passo 4 Para cada $x_j \in \Gamma(x_k)$, calcule: $v = l_k + c_{kj}$ e se $v < l_j$, então rotule novamente o vértice x_j com $(p_j, l_j, s_j) = (x_k, v, R)$.

Passo 5 Rotule novamente x_k com $(p_k, l_k, s_k) = (p_k, l_k, P)$ e volte ao passo 2.

Algoritmo de Floyd

Este algoritmo determina o caminho mínimo entre todos os pares de vértices $x_i, x_j \in X$, em grafos nos quais a cada arco $a_r = (x_i, x_j)$ está associado um custo de transposição dado por $-\infty < c_{ij} < \infty$.

Seja $C^0 = [c_{ij}^0]$ a matriz de custos, onde $c_{ij}^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ c_{ij} & \text{se } i \neq j \text{ e } (x_i, x_j) \in A \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$

Seja $\theta^0 = [\theta_{ij}^0]$ a matriz de predecessores, onde $\theta_{ij}^0 = x_i, \forall i, j$, e indica o predecessor do vértice x_j no caminho de custo mínimo entre os vértices x_i e x_j .

Algoritmo propriamente dito

Passo 1 Monte as matrizes $C^0 = [c_{ij}^0]$ e $\theta^0 = [\theta_{ij}^0]$. Faça $k = 0$.

Passo 2 Faça $k = k + 1$.

Passo 3 Para todo $i \neq k$ e $j \neq k$ calcule

$$c_{ij}^k = \min(c_{ij}^{k-1}, c_{ik}^{k-1} + c_{kj}^{k-1})$$

Se $c_{ij}^k < c_{ij}^{k-1}$ então faça $\theta_{ij}^k = \theta_{kj}^{k-1}$. Em caso contrário faça $\theta_{ij}^k = \theta_{ij}^{k-1}$

Passo 4 a) se existir algum $c_{ii}^k < 0$, então PARE. O grafo tem um circuito de custo negativo;

- b) se $k = n$ e $c_{ii}^k \geq 0, \forall i$, então PARE. Os caminhos mínimos são dados pela matriz $\theta^k = [\theta_{ij}^k]$, e os custos destes caminhos são dados pela matriz $c^k = [c_{ij}^k]$.
- c) se $k < n$ e $c_{ii}^k \geq 0, \forall i$, então volte ao passo 2.

ANEXO 03

MAPA DA CIDADE DE JOINVILLE

(Envelope na contracapa)



PLANTA DA CIDADE 1992
PREFEITURA MUNICIPAL
DE JOINVILLE

SECRETARIA DE PLANEJAMENTO
 E COORDENAÇÃO

- CURVAS DE NÍVEL
- ELEMENTOS HIDROGRÁFICOS
- RODOVIA FEDERAL
- LÍNEA FERROVIÁRIA
- SISTEMA VIÁRIO

ESC. 1/20.000