

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Física

**ANÁLISE NÃO PERTURBATIVA DAS  
PROPRIEDADES DA MATÉRIA DE NÊUTRONS**

Dissertação

Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física

da Universidade Federal de Santa Catarina

para obtenção do grau de

**MESTRE EM FÍSICA**

Andréa Fátima Giacomet

Florianópolis, Dezembro 1997

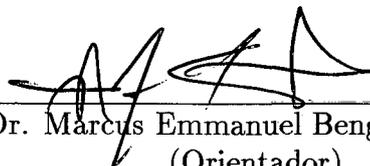
# ANÁLISE NÃO PERTURBATIVA DAS PROPRIEDADES DA MATÉRIA DE NÊUTRONS

Andréa Fátima Giacomet

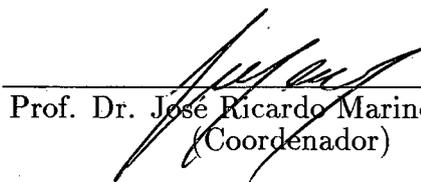
Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

**MESTRE EM FÍSICA**

especialidade Física Teórica e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto - UFSC  
(Orientador)



Prof. Dr. José Ricardo Marinelli - UFSC  
(Coordenador)

Banca examinadora



Profa. Dra. Débora Peres Menezes - UFSC



Prof. Dr. José Carlos Brunelli - UFSC



Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini - UFSC (Suplente)

À minha grande família.

# Conteúdo

<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>vi</b>
<b>RESUMO</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>viii</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 O MODELO DE WALECKA</b>	<b>5</b>
<b>2 A APROXIMAÇÃO RELATIVÍSTICA DE HARTREE</b>	<b>10</b>
<b>3 A EXPANSÃO <math>\delta</math></b>	<b>25</b>
3.1 O Método . . . . .	25
3.2 O Modelo de Walecka Interpolado . . . . .	29
<b>4 CÁLCULO E RENORMALIZAÇÃO DA AUTO-ENERGIA BARIÔNICA</b>	<b>34</b>
4.1 Cálculo da Auto-Energia Bariônica . . . . .	35
4.1.1 Cálculo da Auto-Energia no Vácuo . . . . .	35
4.1.2 Cálculo da Auto-Energia no Meio Denso . . . . .	41

4.2	Renormalização da Auto-Energia Bariônica . . . . .	46
<b>5</b>	<b>CÁLCULO E RENORMALIZAÇÃO DA DENSIDADE DE ENERGIA</b>	<b>51</b>
5.1	Cálculo da Densidade de Energia . . . . .	52
5.2	Renormalização da Densidade de Energia . . . . .	57
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>DERIVAÇÃO DAS REGRAS DE FEYNMAN PARA UM MODELO SIMPLES INTERPOLADO</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>INTEGRAIS EM <math>2\omega</math> DIMENSÕES, MÉTRICA E DEFINIÇÕES</b>	<b>84</b>
B.1	Integrais em $2\omega$ dimensões . . . . .	84
B.2	Métrica e Definições . . . . .	86
B.3	Matrizes de Pauli . . . . .	87
B.4	Matrizes de Dirac . . . . .	87
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>89</b>

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer

ao Marcus, por ter me apresentado ao problema,

ao Sérgio, Daniel e Tarragô, pela amizade e pela constante troca de idéias,

ao Philippe, por toda a atenção dispensada,

à Débora, pelo auxílio na parte burocrática e pela orientação na graduação,

aos professores da graduação e pós-graduação, pelo conhecimento transmitido nas aulas,

aos colegas e amigos da pós-graduação,

à Capes, pelo suporte financeiro.

# RESUMO

Neste trabalho, calculamos a auto-energia e a densidade de energia para a matéria de nêutrons com o auxílio da *expansão  $\delta$  otimizada*, uma aproximação não perturbativa utilizada em teoria de campos que combina técnicas de teoria de perturbação e o princípio variacional.

Utilizamos para descrever a matéria de nêutrons em altas densidades um modelo relativístico, o *Modelo de Walecka*.

No estudo da densidade de energia, consideramos somente os termos diretos, provenientes tanto do vácuo quanto do meio, e encontramos dois resultados. Um deles reproduz exatamente a solução obtida com a aproximação relativística de Hartree (RHA), e o outro dá origem a um estado altamente denso para a matéria de nêutrons.

# ABSTRACT

We use the *optimized  $\delta$  expansion* to evaluate the self-energy and the energy density for the neutron matter. This is a nonperturbative approach for field theoretical models which combines the techniques of perturbation theory and the variational principle.

The relativistic *Walecka Model* is used to describe neutron matter at high density.

Vacuum effects on self-energies and the energy density of neutron matter are studied up to  $O(\delta^2)$ . When exchange diagrams are neglected, the traditional relativistic Hartree approximation (RHA) results are exactly reproduced and, using the same set of parameters that saturate nuclear matter in the RHA, a new stable, tightly bound state at high density is found.

# INTRODUÇÃO

O estudo das possíveis modificações das propriedades dos hádrons no meio denso é um dos problemas centrais em física nuclear. Diversos fenômenos dessa natureza, envolvendo altas energias ou alta transferência de momento, são tratados com sucesso através da teoria fundamental das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD). O mesmo não acontece quando as escalas de energia são mais baixas (típicas da física nuclear), pois em QCD ocorre o que chamamos de *liberdade assintótica*. Este fenômeno, que é proveniente das interações entre os glúons, faz com que a constante de acoplamento não seja realmente “constante”, mas varie com a distância. Devido a esse fato, a constante da QCD é baixa para pequenas distâncias (menores do que o tamanho do nucleon) e alta para grandes distâncias (características da física nuclear). Portanto, quando tratamos de fenômenos envolvendo altas energias, podemos tranquilamente utilizar métodos perturbativos fazendo uma expansão em potências da constante de acoplamento. Mas se as energias envolvidas forem mais baixas, esta constante terá um valor muito grande para que qualquer técnica perturbativa possa ser aplicada, e para resolver esse problema precisamos fazer uso de métodos ditos *não perturbativos*, como por exemplo a Aproximação Relativística de Hartree (RHA), o método de Hartree-Fock (HF) e a expansão  $1/N$ . Apesar de muito utilizados, estes métodos apresentam algumas dificuldades, principalmente no que se refere à renormalização não perturbativa de

termos divergentes provenientes de contribuições de densidade nula (vácuo). Por esse motivo, nestas aproximações os cálculos que envolvem termos de vácuo são simplificados. Na RHA [1], por exemplo, as contribuições provenientes tanto do vácuo quanto do meio são consideradas, mas os termos de troca são desprezados. Já a aproximação de Hartree-Fock [2] leva em conta termos diretos e de troca em seus cálculos, mas elimina deles as contribuições provenientes do vácuo. Estes métodos, por trabalharem de maneira auto-consistente, também envolvem esforço computacional numérico.

Um novo método, proposto com o objetivo de tratar fenômenos de natureza não perturbativa que se manifestam em teoria de campos, é conhecido como *expansão  $\delta$*  [3]. A expansão  $\delta$  pode ser formulada de duas diferentes maneiras, como expansão  $\delta$  logarítmica [3] e como expansão  $\delta$  linear [4, 5, 6]. Neste trabalho, estaremos usando a expansão  $\delta$  linear.

A idéia básica do método consiste em interpolar uma teoria qualquer, descrita por uma densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$ , através da introdução de um parâmetro de expansão artificial ( $\delta$ ), ausente originalmente nesta teoria. Para isso,  $\mathcal{L}$  é reescrita como

$$\mathcal{L}(\delta) = \delta\mathcal{L} + (1 - \delta)\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 + \delta(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \quad ,$$

onde  $\mathcal{L}_0$  representa uma teoria livre arbitrária (quadrática nos campos). Podemos observar que a densidade lagrangeana interpola entre  $\mathcal{L}_0$ , cuja solução exata é possível (quando  $\delta = 0$ ), e  $\mathcal{L}$ , a teoria original (quando  $\delta = 1$ ). O próximo passo para a implementação da expansão  $\delta$  diz respeito ao cálculo de uma quantidade física desejada, que é realizado considerando-se o termo  $\delta(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)$  como uma perturbação cuja ordem é determinada por  $\delta$ . O parâmetro  $\delta$  é igualado à unidade no final, fazendo com que a dependência com relação ao mesmo desapareça. É importante ainda salientar que o termo  $\mathcal{L}_0$  possui parâmetros arbitrários com

dimensão de massa, necessários para mantê-lo dimensionalmente correto. Esses parâmetros, que não pertencem à teoria original, devem ser fixados de alguma forma, e faremos isto posteriormente utilizando um método variacional.

Nos próximos capítulos - mais especificamente no capítulo referente ao cálculo da auto-energia bariônica - veremos que, com o auxílio da expansão  $\delta$ , é possível ir além dos métodos não perturbativos convencionais. Nessa aproximação, a seleção dos diagramas de Feynman é feita de maneira essencialmente perturbativa, e pelo fato de lidarmos com poucos diagramas, podemos incluir em nossos cálculos contribuições provenientes de termos diretos e de troca tanto do meio quanto do vácuo, pois o trabalho de renormalização fica simplificado. Também o esforço numérico do método é menor, devido à ausência de procedimentos auto-consistentes.

Neste trabalho, nos dedicaremos ao cálculo e renormalização da densidade de energia para a matéria de nêutrons com o uso da expansão  $\delta$ . Para isso, calcularemos a auto-energia bariônica até  $O(\delta^2)$  de maneira que o propagador do nêutron fique “vestido”, e após, usando este propagador, obteremos a densidade de energia. Como demonstrado na Ref.[7], podemos incluir, no cálculo da auto-energia bariônica, as contribuições do vácuo provenientes de termos de troca de maneira relativamente fácil. Entretanto, para o caso da densidade de energia, apesar da renormalização a ser feita com a expansão  $\delta$  não ser mais complicada do que a renormalização usual na expansão em *loops*, esta ainda permanece como uma tarefa difícil. Neste trabalho, somente termos diretos serão incluídos na derivação da densidade de energia.

A apresentação desta dissertação está dividida da seguinte maneira: no capítulo 1, apresentamos um resumo das características do modelo utilizado para descrever a matéria de nêutrons, o Modelo de Walecka. O capítulo seguinte se refere ao cálculo da auto-energia

bariônica e da densidade de energia com o uso da RHA. Os detalhes referentes à derivação destas quantidades não são apresentados explicitamente neste ponto, pois o objetivo do capítulo é proporcionar ao leitor a referência para uma futura comparação do modo como funcionam a expansão  $\delta$  e a aproximação de Hartree, das dificuldades envolvidas em cada caso, bem como dos resultados obtidos com os dois métodos. No capítulo 3, a expansão  $\delta$  é discutida mais detalhadamente, sendo feita a interpolação da densidade lagrangeana do modelo de Walecka. No quarto capítulo, calculamos a auto-energia bariônica com a auxílio da densidade lagrangeana interpolada, obtendo dessa maneira o propagador vestido do nucleon. No capítulo 5, o cálculo da densidade de energia para a matéria de nêutrons é realizado com o uso do propagador vestido, considerando-se somente os termos diretos. No capítulo seguinte aplicamos o método variacional - mais especificamente o Princípio da Mínima Sensibilidade (PMS), à densidade de energia, e os resultados obtidos são discutidos. Finalmente, apresentamos as conclusões gerais do trabalho.

# CAPÍTULO 1

## O MODELO DE WALECKA

Para avaliar as características de objetos estelares frios e altamente condensados, como estrelas de nêutrons [8], necessitamos de uma equação de estado que descreva a matéria nuclear em qualquer densidade, desde a comumente observada nos elementos conhecidos até densidades nucleares muito superiores. Os cálculos convencionais não relativísticos para problemas de muitos corpos que descrevem a interação nucleon-nucleon em termos de um potencial estático - eliminando assim os graus de liberdade mesônicos - são de validade duvidosa para densidades ainda pouco maiores do que a nuclear. Uma descrição feita em termos de um potencial deste tipo não leva em consideração fatores relevantes em altas energias, como a cinemática relativística e efeitos de retardamento. Também é inadequada para descrever possíveis novos estados para a matéria cuja existência dependa dos campos mesônicos explicitamente [2].

Em 1974 foi proposto por J. D. Walecka [9] um modelo com o objetivo de descrever o comportamento relativístico da matéria em altas densidades. Neste modelo, conhecido como *Modelo de Walecka*, a interação entre os nucleons se dá através da troca de mésons escalares ( $\sigma$ ) e vetoriais ( $\omega$ ).

A densidade lagrangeana do modelo pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \bar{\psi}(i \not{\partial} - m + g_s \phi - g_v \gamma^\mu V_\mu) \psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu - U(\phi, V) + \mathcal{L}_{ct} \quad , \end{aligned} \quad (1. 1)$$

onde  $\psi$  representa o campo do nucleon,  $\phi$  e  $V_\mu$  representam respectivamente os campos dos mésons escalar e vetorial e  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ . O termo  $U(\phi, V)$  descreve as auto-interações entre os mésons, e no modelo original de Walecka foi igualado a zero para minimizar os efeitos de muitos corpos. Neste trabalho, o mesmo procedimento será adotado.

Este modelo, também conhecido como Modelo Hadrônico Quântico-I (QHD-I), é uma das formas mais simples na tentativa da descrição da força nuclear. Nele, as interações entre mésons e nucleons são do tipo Yukawa, e as constantes de acoplamento escalar e vetorial são dadas respectivamente por  $g_s$  e  $g_v$ . Os mésons escalares são responsáveis pelo caráter atrativo da força nuclear a longas distâncias, e os vetoriais pelo caráter repulsivo a curtas distâncias.

Processos físicos envolvendo teoria de campos podem ser descritos em termos de *diagramas de Feynman*. Cada teoria possui um conjunto próprio de *regras de Feynman*, que permite que os diagramas utilizados na descrição dos processos sejam calculados. Os elementos básicos para um tratamento diagramático são os vértices entre mésons e bárions e os propagadores não interagentes da teoria. Para o modelo de Walecka, estes propagadores são dados por

$$\Delta_s^0(k) = \frac{1}{k^2 + m_s^2 + i\epsilon} \quad , \quad (1. 2)$$

$$D_{\mu\nu}^0(k) = \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_v^2} \right] \frac{1}{k^2 - m_v^2 + i\epsilon} \quad , \quad (1.3)$$

e

$$S^0(k) = S_F^0(k) + S_D^0(k) \quad , \quad (1.4)$$

onde

$$S_F^0(k) = \frac{\gamma_\mu k^\mu + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad , \quad (1.5)$$

e

$$(\gamma_\mu k^\mu + m) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (1.6)$$

sendo  $E^0(k) = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$  e  $k_F$  o momento de Fermi. Note que, no caso do propagador vetorial, o termo  $k_\mu k_\nu$  não contribui para quantidades físicas, pois o méson vetorial se acopla à corrente bariônica conservada. Este termo portanto não será escrito explicitamente de agora em diante. Observe também que o propagador do nucleon possui dois termos,  $S_F(k)$  e  $S_D(k)$ . O termo  $S_F(k)$  descreve a propagação de nucleons e anti-nucleons virtuais, e está portanto relacionado com a contribuição do vácuo. É chamado propagador de Feynman. Já o termo  $S_D(k)$  descreve a propagação de nucleons reais no mar de Dirac (contribuição do meio), e é chamado de propagador de Dirac.

A derivação detalhada das regras de Feynman pode ser encontrada em diversos textos, como por exemplo na Ref.[10]. No Apêndice A, foram derivadas as regras para um modelo simplificado e interpolado, com interação do tipo Yukawa. A densidade lagrangeana utilizada

naquele caso não foi a do modelo original de Walecka, mas os resultados obtidos podem ser generalizados para o problema atual. Podemos então escrever as regras de Feynman para o modelo de Walecka da seguinte maneira:

- A cada linha associamos um fator ( $i$ ) vezes um dos propagadores  $\Delta_s^0$ ,  $D_{\mu\nu}^0$  ou  $S^0$ ;
- Ao vértice escalar associamos um fator  $ig_s$ , e ao vetorial um fator  $-ig_v\gamma_\mu$ ;
- A cada *loop* fermiônico associamos um fator  $-tr \int d^4q/(2\pi)^4$ , onde  $q$  é o momento interno do *loop* e o traço é tomado sobre o espaço de Dirac e de isospin.

Neste ponto, é importante observar que os *loops* dos diagramas de Feynman são descritos por integrais, que podem divergir ao serem calculadas utilizando-se o propagador bariônico no vácuo. Estas mesmas integrais, avaliadas com o uso do propagador no meio, serão sempre finitas devido à presença da função degrau  $\theta$ , que é escrita em termos do *cut-off* natural  $k_F$ . Devido às dificuldades impostas pelas divergências provenientes de termos do vácuo, várias aproximações eliminam de seus cálculos contribuições de termos deste tipo, ainda que a inclusão destas correções seja importante para testar o limite de validade de modelos efetivos, como o modelo de Walecka.

Em  $3 + 1$  dimensões, as constantes de acoplamento são adimensionais, e embora tenhamos um campo massivo de spin 1, este se acopla a uma corrente conservada (corrente bariônica). Portanto, este modelo é renormalizável [11].

O termo  $\mathcal{L}_{ct}$  contém todos os contra-termos necessários para tornar finitos os resultados finais. Os contra-termos têm a mesma forma dos termos originais, mas diferem destes por uma constante multiplicativa. Cada contra-termo é dividido em duas partes, uma que diverge e é ajustada de modo a eliminar completamente eventuais divergências, e outra que é finita e

arbitrária. Existem diferentes prescrições na literatura [10, 12, 11] para fixar a parte finita, cada prescrição correspondendo a um tipo diferente de *esquema de renormalização*. Como exemplo, podemos citar o esquema da *Camada de Massa* e o esquema da *Subtração Mínima* (MS). Todas as diferentes prescrições prevêm o completo cancelamento das divergências, mas interpretam os parâmetros originais de maneira diversa. No esquema da camada de massa, por exemplo, as partes finitas dos contra-termos são fixadas de tal maneira que as massas e as constantes de acoplamento presentes na lagrangeana original representem as “verdadeiras” quantidades físicas, as quantidades que, a princípio, podem ser medidas. Diferentemente, o esquema da subtração mínima propõe que as partes finitas dos contra-termos sejam nulas, ou seja, esse método remove apenas os pólos. Assim, os parâmetros originais são interpretados simplesmente como parâmetros, não representando quantidades físicas, porém são ajustados de maneira que reproduzam resultados físicos.

Estas considerações serão utilizadas nos capítulos que se seguem, mais especificamente quando tratarmos da renormalização da auto-energia e da densidade de energia para a matéria de nêutrons.

## CAPÍTULO 2

### A APROXIMAÇÃO

### RELATIVÍSTICA DE HARTREE

Neste capítulo serão apresentados, de maneira sucinta, os cálculos referentes à auto-energia e à densidade de energia com o uso da aproximação relativística de Hartree (RHA). O objetivo neste caso é mostrar, em linhas gerais, o modo como a aplicação da RHA funciona. Detalhes relativos à avaliação destas quantidades - bem como dos procedimentos de regularização e renormalização adotados - foram omitidos neste ponto, mas serão melhor discutidos nos capítulos que se seguem. Cálculos análogos aos apresentados aqui podem ser encontrados nos capítulos 5 e 6, onde a auto-energia e a densidade de energia são calculadas detalhadamente com o auxílio da expansão  $\delta$ .

No centro de qualquer problema que envolva muitos corpos está o cálculo da densidade de energia ou da equação de estado que descreva o sistema. Para obtenção destas quantidades, podemos utilizar o tensor energia-momento, cujos elementos de matriz determinam a densidade de energia, pressão e outras quantidades termodinâmicas. Neste caso, por estarmos lidando com quantidades observáveis, é necessário fazer uso dos *propagadores interagentes*. O operador tensor energia-momento, que é definido por

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L}_W + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_W}{\partial(\partial q_i/\partial x_\mu)} \quad , \quad (2.1)$$

pode ser dividido em três partes para o presente modelo:

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \hat{T}_b^{\mu\nu} + \hat{T}_s^{\mu\nu} + \hat{T}_v^{\mu\nu} \quad , \quad (2.2)$$

onde

$$\hat{T}_b^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \quad , \quad (2.3)$$

$$\hat{T}_s^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\partial_\sigma\phi\partial^\sigma\phi - m_s^2\phi^2]g^{\mu\nu} + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \quad (2.4)$$

e

$$\hat{T}_v^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\partial_\sigma V_\lambda\partial^\sigma V^\lambda - m_v^2 V_\sigma V^\sigma]g^{\mu\nu} - \partial^\mu V_\lambda\partial^\nu V^\lambda \quad . \quad (2.5)$$

Na derivação da Eq.(2.3), utilizamos a equação de movimento do bárion, e na obtenção da Eq.(2.5) usamos o fato de que a corrente bariônica se conserva, o que implica que  $\partial_\mu V^\mu = 0$ .

Os valores esperados de  $\hat{T}_b^{\mu\nu}$ ,  $\hat{T}_s^{\mu\nu}$  e  $\hat{T}_v^{\mu\nu}$  no estado fundamental da matéria bariônica interagente ( $|\Psi\rangle$ ) podem agora ser expressos em termos dos propagadores exatos da teoria, e assim

$$\langle \Psi | \hat{T}_b^{\mu\nu} | \Psi \rangle = -itr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^\mu S(k)] k^\nu, \quad (2.6)$$

$$\langle \Psi | \hat{T}_s^{\mu\nu} | \Psi \rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{2} (k^2 - m_s^2) g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right] \Delta_s(k) \quad (2.7)$$

e

$$\langle \Psi | \hat{T}_v^{\mu\nu} | \Psi \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{2} (k^2 - m_v^2) g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \right] D_\sigma^\sigma(k). \quad (2.8)$$

Aqui, vale ressaltar que, por estarmos tratando de uma teoria quântica de campos relativística, as expressões acima podem divergir. Por isso, para obtermos resultados físicos (finitos), necessitamos fazer uso de um processo de renormalização, que consiste nas seguintes etapas:

- Primeiro, renormalizamos os propagadores interagentes no vácuo ( $k_F = 0$ ) através da inclusão de contra-termos adequados à densidade lagrangeana original, gerando assim  $\mathcal{L}_{ct}$ , que por sua vez determina um grupo correspondente de contra-termos no tensor energia-momento ( $\hat{T}_{ct}^{\mu\nu}$ ).
- Quando  $k_F \neq 0$ , contribuições adicionais ao valor esperado do tensor energia-momento são geradas por estes contra-termos ( $CTC$ ):

$$CTC = \langle \Psi | \hat{T}_{ct}^{\mu\nu} | \Psi \rangle. \quad (2.9)$$

Estas contribuições devem ser incluídas às Eqs.(2.6)-(2.8).

- Definimos então o tensor *físico*  $T^{\mu\nu}$  subtraindo o valor esperado no vácuo ( $VEV$ ) do tensor total  $\hat{T}^{\mu\nu} + \hat{T}_{ct}^{\mu\nu}$ :

$$VEV = \lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} + \hat{T}_{ct}^{\mu\nu} | \Psi \rangle \quad (2. 10)$$

Assim:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} + \hat{T}_{ct}^{\mu\nu} | \Psi \rangle - \lim_{k_F \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} + \hat{T}_{ct}^{\mu\nu} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{T}^{\mu\nu} | \Psi \rangle + CTC - VEV \quad . \end{aligned} \quad (2. 11)$$

Nosso ponto de partida é o cálculo da contribuição dos diagramas diretos de segunda ordem ao propagador bariônico - lembre que na RHA somente termos diretos são considerados. Estes diagramas podem ser vistos na Fig(2.1). Com o auxílio das regras de Feynman, podemos escrever

$$iS^{(2)}(q) = iS^0(q)\Sigma^{(2)}S^0(q) \quad , \quad (2. 12)$$

onde

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma_s^{(2)} - \gamma_\mu \Sigma_v^{(2)\mu} \quad (2. 13)$$

é a auto-energia em segunda ordem:

$$\Sigma_s^{(2)} = -ig_s^2 \Delta_s^0(0) tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S^0(k) + \Sigma_{ct}^s \quad (2. 14)$$

e .

$$\Sigma_v^{(2)\mu} = ig_v^2 D^{0\mu\nu}(0) tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\nu S^0(k) \quad . \quad (2. 15)$$

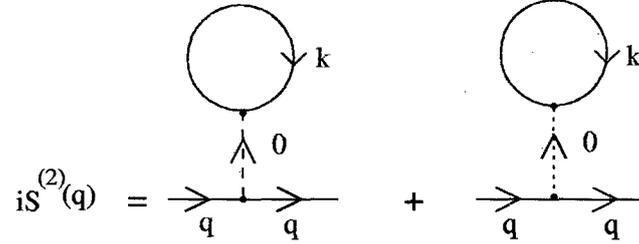


Figura 2.1: Contribuições de diagramas diretos de segunda ordem ao propagador bariônico.

Incluimos também as contribuições de diagramas diretos aos propagadores mesônicos, mostrados na Fig.(2.2):

$$\begin{aligned} i\Delta_s^{(2)}(q) &= i\Delta_s^0(q) \left\{ i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) \left[ g_s tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^0(k) \right]^2 \right\} \Delta_s^0(q) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) [\Sigma_s^{(2)}]^2 / g_s^2 \end{aligned} \quad (2. 16)$$

e

$$iD_{\mu\nu}^{(2)}(q) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q) [\Sigma_{v\mu}^{(2)} \Sigma_{v\nu}^{(2)}] / g_v^2 \quad . \quad (2. 17)$$



O caráter divergente de  $\alpha_1$  aparece agora como um pólo da função  $\Gamma$  quando  $\epsilon = 0$ . O efeito do contra-termo  $\alpha_1\phi$  é fixar o valor esperado de  $\phi$  no vácuo em zero, ou seja

$$\langle \phi \rangle_{k_F=0} = 0, \quad (2.20)$$

que serve para manter a estabilidade do vácuo.

Com a introdução do contra-termo,  $\Sigma_s$  é agora dada por

$$\Sigma_s = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} S_D^0(k) = - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{m}{(k^2 + m^2)^{1/2}}, \quad (2.21)$$

e pode ser representada através da figura abaixo:

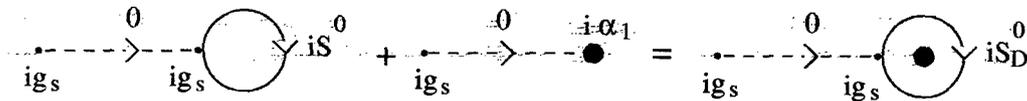


Figura 2.4: Auto-energia escalar renormalizada.

Para o caso da auto-energia vetorial obtemos, por integração simétrica, um resultado nulo para o diagrama direto vetorial calculado no vácuo, e portanto não há necessidade de renormalização. Assim,  $\Sigma_v^\mu$  se reduz a

$$\Sigma_v^\mu = i \frac{g_v^2}{m_v^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S_D^0(k) = - \frac{g_v^2}{m_v^2} \frac{k_F^3}{3\pi^2} \delta^{\mu 0}. \quad (2.22)$$

Os resultados em segunda ordem para  $\Sigma$  podem agora ser somados em todas as ordens *auto-consistentemente* com o auxílio da equação de Dyson

$$S^H(k) = S^0(k) + S^0(k) \Sigma_H S^H(k), \quad (2.23)$$

onde também a auto-energia é calculada utilizando-se os propagadores interagentes. Esta expressão é representada diagramaticamente por

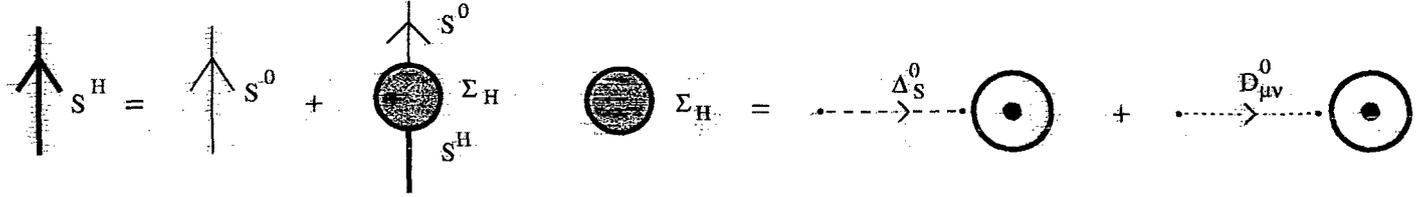


Figura 2.5: Representação gráfica do propagador bariônico vestido obtido através da RHA. As linhas mais escuras representam o propagador bariônico de Hartree.

A Eq.(2.23) pode ser resolvida formalmente, dando como resultado

$$[S^H(k)]^{-1} = [S^0(k)]^{-1} - \Sigma_H = \gamma_\mu k^\mu - m - \Sigma_H \quad , \quad (2.24)$$

e obtemos então para o propagador bariônico

$$\begin{aligned} S^H(k) &= (\gamma_\mu k^{\mu*} + m^*) \left[ \frac{1}{k^{*2} - m^{*2} + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}^*|) \right] \\ &\equiv S_F^H(k) + S_D^H(k) \quad , \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo

$$k^{\mu*} = k^\mu + \Sigma_H^{\mu} \quad , \quad m^* = m + \Sigma_H^s \quad , \quad (2.26)$$

$$E^*(k) = (\mathbf{k}^{*2} + m^{*2})^{1/2} \quad , \quad E(k) = E^*(k) - \Sigma_H^{v0} \quad . \quad (2.27)$$

Os propagadores mesônicos também devem ser calculados usando-se  $S^H$ , e temos então

$$\Delta_s^H(k) = \Delta_s^0(k) - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) (\Sigma_s^H)^2 / g_s^2 \quad (2.28)$$

e

$$D_{\mu\nu}^H = D_{\mu\nu}^0(k) - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) (\Sigma_{H\mu}^v \Sigma_{H\nu}^v) / g_v^2 \quad (2.29)$$

Estes resultados, que serão utilizados no cálculo de  $T^{\mu\nu}$ , podem ser vistos na Fig.(2.6).

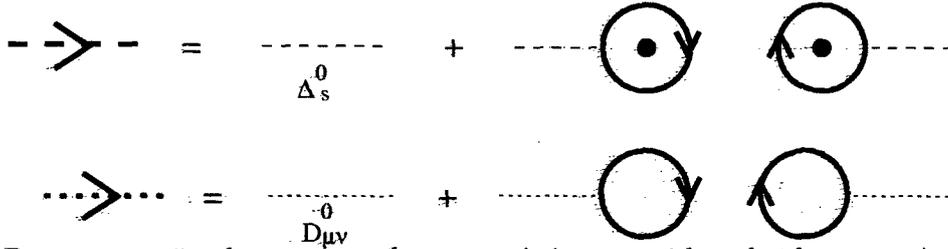


Figura 2.6: Representação dos propagadores mesônicos vestidos obtidos através da RHA

A auto-consistência é assegurada calculando-se novamente a auto-energia com a utilização do propagador de Hartree  $S^H(k)$  e reobtendo  $\Sigma_s$  e  $\Sigma_v^\mu$ .

Para  $\Sigma_v^\mu$ , este procedimento é dado por

$$\Sigma_{H\nu}^\mu = i \frac{g_v^2}{m_v^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S^H(k) \quad (2.30)$$

Novamente, o termo proveniente do vácuo desaparece por integração simétrica, e a auto-energia vetorial se reduz a

$$\begin{aligned} \Sigma_{H\nu}^\mu &= i \frac{g_v^2}{m_v^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S_D^H(k) \\ &= -\frac{g_v^2}{m_v^2} \frac{k_F^3}{3\pi^2} \delta^{\mu 0} \end{aligned} \quad (2.31)$$

O resultado acima é análogo ao obtido com o uso do propagador nu [Eq.(2.22)], e assim  $\Sigma_v^\mu$  não é afetada, satisfazendo a condição de auto-consistência de Hartree automaticamente.

No caso escalar,

$$\Sigma_H^s = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^H(k) + \Sigma_s^{ct} \quad , \quad (2.32)$$

e utilizando o propagador no meio, obtemos

$$\Sigma_H^s = - \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{4\pi^3} \frac{m^*}{E^*(k)} \quad . \quad (2.33)$$

Para o cálculo de  $\Sigma_s$  no vácuo, inicialmente somamos as contribuições dos diagramas diretos escalares em todas as ordens na Eq.(2.23):

$$S^H(k) = S^0(k^*) + S^0(k^*) \Sigma_H^s S^H(k) \quad . \quad (2.34)$$

Agora,  $S^H$  é expandido em uma série de potências em função de  $\Sigma_H^s$  renormalizada resolvendo-se a Eq.(2.34) iterativamente, e obtemos

$$S^H(k) = \sum_{m=0}^{\infty} [S^0(k^*)]^{m+1} [\Sigma_H^s]^m \quad . \quad (2.35)$$

A inserção desta expressão na Eq.(2.32) dá como resultado a seguinte equação implícita para a auto-energia escalar:

$$\Sigma_H^s = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{m=0}^{\infty} [S_F^0(k^*)]^{m+1} [\Sigma_H^s]^m + \Sigma_s^{ct} + \text{termos finitos} \quad . \quad (2.36)$$

Os termos finitos são os termos provenientes do meio, que se anulam em densidade zero e por isso são irrelevantes no trabalho de renormalização.

Fica claro, por contagem de potências, que os termos com  $0 \leq m \leq 4$  na Eq.(2.36) são divergentes. Estas divergências devem ser removidas incluindo-se a densidade lagrangeana de contra-terminos

$$\mathcal{L}_{ct} = \alpha_1\phi + \frac{1}{2!}\alpha_2\phi^2 + \frac{1}{3!}\alpha_3\phi^3 + \frac{1}{4!}\alpha_4\phi^4 \quad (2.37)$$

na densidade lagrangeana (1.1) e incorporando estas novas contribuições em  $\Sigma_{ct}^s$ . Os diagramas de Feynman relacionados à Eq.(2.37) podem ser vistos na Fig.(2.7). Estes diagramas contribuem para a auto-energia escalar, gerando os contra-terminos mostrados na Fig.(2.8) e descritos analiticamente por

$$\Sigma_{ct}^s = \sum_{m=0}^3 \frac{1}{m!} \left( \frac{-g_s}{m_s^2} \right) \left( -\frac{\Sigma_H^s}{g_s} \right)^m \alpha_{m+1} \quad (2.38)$$

Note que o lado direito da equação acima envolve a *auto-energia escalar renormalizada*  $\Sigma_H^s$ , pois os contra-terminos devem ser incluídos em todas as ordens.

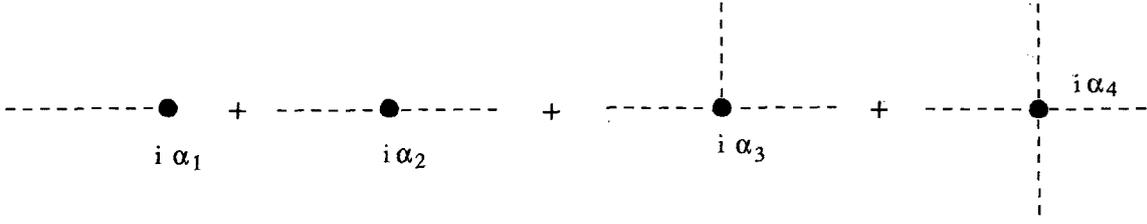


Figura 2.7: Diagramas de Feynman relacionados à  $\mathcal{L}_{ct}$ .

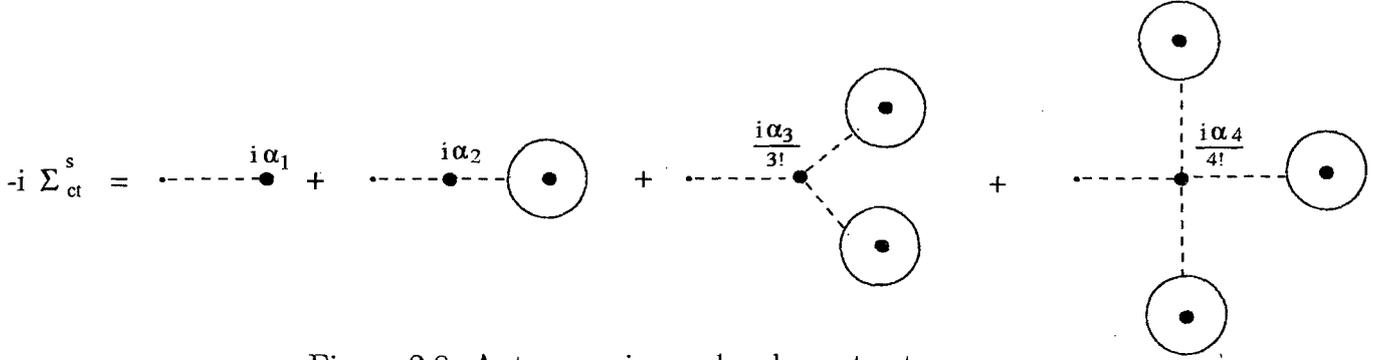


Figura 2.8: Auto-energia escalar de contra-termos.

Para determinar os coeficientes  $\alpha_m$ , inicialmente reescrevemos a Eq.(2.36) usando a identidade  $\partial S_F^0(k)/\partial m = [S_F^0(k)]^2$ , obtendo assim

$$\Sigma_H^s = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} (\Sigma_H^s)^m \left[ \frac{\partial^m}{\partial m^m} S_F^0(k) \right] \right\} + \Sigma_{ct}^s + \text{termos finitos} \quad (2.39)$$

Comparando agora a equação acima com a Eq.(2.38), podemos cancelar os 4 termos divergentes nesta expressão definindo  $\alpha_m$  como

$$\alpha_m = -i(-g_s)^m \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{\partial^{m-1}}{\partial m^{m-1}} S_F^0(k) \right], \quad (2.40)$$

onde  $1 \leq m \leq 4$ . O resultado final (finito) para a auto-energia escalar renormalizada escrito em termos do propagador de Hartree  $S^H(k)$  então fica

$$\Sigma_H^s = i \frac{g_s^2}{m_s^2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^H(k) + \sum_{m=0}^3 \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{g_s^{1-m}}{m_s^2} \alpha_{m+1} (\Sigma_H^s)^m \quad (2.41)$$

Para computar a equação acima explicitamente, calculamos os contra-termos definidos em (2.40) e a integral definida acima com o auxílio de técnicas de regularização dimensional, obtendo como resultado a seguinte condição de auto-consistência para a auto-energia escalar renormalizada na aproximação relativística de Hartree:

$$\Sigma_H^s = m^* - m = -\frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{4\pi^3} \frac{m^*}{E^*(k)} + \Delta m^* \quad , \quad (2.42)$$

onde

$$\Delta m^* = \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{2\pi^2} \left[ m^{*3} \ln\left(\frac{m^*}{m}\right) - m^2(m^* - m) - \frac{5}{2}m(m^* - m)^2 - \frac{11}{6}(m^* - m)^3 \right] \quad . \quad (2.43)$$

Conhecendo-se  $\Sigma_v$  e  $\Sigma_s$  (ou  $m^*$ ), o propagador  $S^H$  fica completamente determinado. Podemos então partir para o cálculo da densidade de energia. Para este fim, consideraremos inicialmente as contribuições provenientes dos mésons, utilizando as Eqs.(2.7) e (2.8). Os propagadores mesônicos são dados por (2.28) e (2.29), e as auto-energias são representadas pelas Eqs.(2.31) e (2.42). As contribuições à densidade de energia mesônica provenientes de  $\Delta_s^0(k)$  e  $D_{\mu\nu}^0(k)$  são independentes da densidade, e podem ser eliminadas através da subtração do valor esperado no vácuo [veja Eq.(2.11)]. Assim, temos como resultado

$$\varepsilon_s = \langle \Psi | \hat{T}_s^{00} | \Psi \rangle - \varepsilon_s^{vev} = \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} \Sigma_s^2 \quad (2.44)$$

e

$$\varepsilon_v = \langle \Psi | \hat{T}_v^{00} | \Psi \rangle - \varepsilon_v^{vev} = -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left( \frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 \quad . \quad (2.45)$$

Para o cálculo da contribuição bariônica, cuja expressão é dada pela Eq.(2.6), temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_b &= \langle \Psi | \hat{T}_b^{00} | \Psi \rangle = -itr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^0 S^H(k)] k^0 - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \\
&= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k E^*(k) + \frac{g_v^2}{m_v^2} \left( \frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 \\
&\quad - 4i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^0 - g_v V_0) k^0}{(k^0 - g_v V_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^{*2} + i\epsilon} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \quad , \quad (2.46)
\end{aligned}$$

onde

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \left( \frac{k_F^3}{3\pi^2} \right) \quad . \quad (2.47)$$

A última integral na Eq.(2.46) representa a soma sobre os nucleons no mar de Dirac, e contém divergências. Para isolá-las, resolvemos a integral utilizando técnicas de regularização dimensional, e obtemos

$$\begin{aligned}
&-4i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k^0 - g_v V_0) k^0}{(k^0 - g_v V_0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^{*2} + i\epsilon} \\
&= -\frac{2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi}{m^{*2}} \right)^\epsilon m^{*4} \Gamma(\epsilon - 2) (3 - 2\epsilon) \quad . \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , vemos que cinco termos apresentam pólos em  $\epsilon = 0$ . O primeiro termo, que é completamente independente da densidade, é cancelado pela subtração do valor esperado no vácuo, indicado em (2.46). Os quatro pólos restantes são eliminados pelos contra-termos definidos previamente, dados pela Eq.(2.37). Neste caso, a contribuição dos contra-termos (*CTC*) é o valor esperado do tensor energia-momento gerado por  $\mathcal{L}_{ct}$

$$CTC = \langle T_{ct}^{\mu\nu} \rangle = \alpha_1 \langle \phi \rangle + \frac{1}{2} \alpha_2 \langle \phi^2 \rangle + \frac{1}{3!} \alpha_3 \langle \phi^3 \rangle + \frac{1}{4!} \langle \phi^4 \rangle \quad . \quad (2.49)$$

Assim, a correção finita à densidade de energia devido à “flutuação do vácuo” fica

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{VF} = & \varepsilon_{vac}(m^*) - \varepsilon_{vac}(m) - \varepsilon_{ct} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ -m^{*4} \ln\left(\frac{m^*}{m}\right) + m^3(m^* - m) \right. \\ & \left. + \frac{7}{2}m^2(m^* - m)^2 + \frac{13}{3}(m^* - m)^3 + \frac{25}{12}(m^* - m)^4 \right] , \end{aligned} \quad (2. 50)$$

e a densidade de energia na aproximação relativística de Hartree é dada por

$$\varepsilon_{RHA} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left( \frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (m^* - m)^2 + \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\mathbf{k}^2 + m^*)^{1/2} + \Delta\varepsilon_{VF} . \quad (2. 51)$$

# CAPÍTULO 3

## A EXPANSÃO $\delta$

### 3.1 O Método

Na Introdução, apresentamos um breve resumo do funcionamento da expansão  $\delta$ . Para ilustrar melhor essa discussão, vamos utilizar como exemplo a teoria escalar  $\lambda\phi^4$ . A densidade lagrangeana desta teoria é dada por

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad , \quad (3. 1)$$

onde  $\phi$  representa o campo escalar e  $m_s$  representa a massa deste campo. Seguindo a prescrição para a interpolação dada na Introdução, podemos definir a densidade lagrangeana livre arbitrária  $\mathcal{L}_0$  como

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \Omega_s^2\phi^2) \quad , \quad (3. 2)$$

sendo  $\Omega_s^2 = m_s^2 + \mu_s^2$  e  $\mu_s$  o parâmetro arbitrário de massa. Assim, o modelo interpolado fica

$$\mathcal{L}(\delta) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}(m_s^2 + \mu_s^2)\phi^2 - \delta \left( \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - \frac{1}{2}\mu_s^2\phi^2 \right) . \quad (3. 3)$$

A maneira como o método funciona fica mais clara através da análise das novas regras de Feynman geradas pela densidade lagrangeana interpolada.

A regra  $-i\lambda$  referente ao vértice original  $\lambda\phi^4$  é agora escrita como  $-i\delta\lambda$ , indicando que a expansão é feita com relação ao parâmetro artificial  $\delta$ , e não mais com relação à constante de acoplamento original  $\lambda$ . Mais importante são as modificações geradas pela introdução do termo quadrático arbitrário. O propagador, que originalmente é descrito por

$$i\Delta_s(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} , \quad (3. 4)$$

após a interpolação fica

$$\begin{aligned} i\Delta_s^\delta(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m_s^2 - \mu_s^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} \left[ 1 - \frac{\mu_s^2}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} \right]^{-1} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} (-i\mu_s^2) \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} \\ &+ \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} (-i\mu_s^2) \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} (-i\mu_s^2) \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} + \dots , \end{aligned} \quad (3. 5)$$

indicando que o termo  $\mu_s^2\phi^2$  proveniente de  $\mathcal{L}_0$  entra na teoria de maneira não perturbativa.

Temos também outra regra,  $(i\delta\mu_s^2)$ , derivada do termo de interação  $\frac{1}{2}\delta\mu_s^2\phi^2$ , que é tratada de maneira perturbativa.

Neste momento, é importante notar que somente um cálculo que envolvesse todas as ordens em  $\delta$  poderia compensar o número infinito de inserções  $i\mu_s^2$  presentes no propagador, e a necessidade de truncar a série em alguma ordem faz com que tenhamos sempre uma dependência tanto em  $\mu_s$  quanto em  $\delta$ . Como já mencionado anteriormente na Introdução,

podemos eliminar a dependência em  $\delta$  igualando-o à unidade no final, pois este é o valor para o qual a teoria original é retomada. Mas temos ainda a dependência em  $\mu_s$ . Existem diferentes métodos para eliminar esta dependência [3, 4, 5, 6, 13, 14], entre eles o *Princípio da Mínima Sensibilidade* (PMS) [13]. Este princípio se baseia na idéia de que o valor de uma quantidade física  $P(\mu)$ , calculado até uma certa ordem em  $\delta$ , deve ser aquele para o qual a quantidade física seja menos sensível a pequenas variações com relação a  $\mu$ , ou seja,

$$\left. \frac{\partial P(\mu)}{\partial \mu} \right|_{\bar{\mu}} = 0. \quad (3.6)$$

Este processo variacional produz resultados não perturbativos, pois, uma vez fixado,  $\mu$  torna-se função dos parâmetros originais, incluindo a constante de acoplamento. A expansão  $\delta$  utilizada juntamente com o princípio variacional é conhecida como *expansão  $\delta$  otimizada* [4]. Uma prova da convergência da expansão  $\delta$  otimizada é dada na Ref.[15] para um problema em mecânica quântica. As diversas formas da expansão  $\delta$  foram aplicadas com sucesso a diferentes problemas em mecânica quântica [15, 16], teoria de partículas [17, 18], física estatística [19] e teoria de campos [5, 6, 13, 20, 18, 19, 21, 22]. As muitas aplicações mostram que é possível obter os mesmos resultados conseguidos através de métodos não perturbativos tradicionais ainda nas ordens mais baixas de  $\delta$ .

As diversas aproximações não perturbativas utilizam diferentes prescrições na seleção dos diagramas de Feynman a serem utilizados na teoria, e a expansão  $\delta$  possui vantagens nesse sentido sobre as outras técnicas. A principal delas é que a expansão  $\delta$  trabalha com um número reduzido de diagramas, pois a seleção destes é feita de maneira essencialmente perturbativa. O fato de lidarmos com poucos diagramas facilita enormemente o trabalho de renormalização. Nos métodos não perturbativos tradicionais, precisaríamos somar um

número infinito de diagramas de um determinado sub-grupo escolhido para levar em conta todas as ordens da constante de acoplamento. Este procedimento gera problemas tanto na inclusão de diagramas que possuam ordens mais altas quanto na renormalização não perturbativa a ser feita. Podemos citar também como vantagem sobre os outros métodos a ausência de auto-consistência da aproximação, o que reduz em muito o esforço computacional numérico. Além disso, vale notar que o cálculo feito usando diagramas em uma determinada ordem em  $\delta$  pode conter diagramas que pertenceriam a diferentes ordens se estivéssemos usando outras aproximações.

Existem diferentes maneiras de abordar um mesmo problema usando a expansão  $\delta$ . O procedimento padrão diz respeito a expandir a quantidade física de interesse em ordens de  $\delta$  a partir da densidade lagrangeana interpolada  $\mathcal{L}(\delta)$ . Por exemplo, se a quantidade física a ser calculada for a densidade de energia ( $\varepsilon$ ), usamos  $\mathcal{L}(\delta)$  para obter  $\varepsilon$ , e utilizando o propagador “nu” dado pela Eq.(3.5), *calculamos  $\varepsilon$  ordem a ordem perturbativamente*. Alternativamente, podemos partir de uma expressão exata para  $\varepsilon$  derivando o tensor energia-momento ( $T^{\mu\nu}$ ) a partir da densidade lagrangeana original  $\mathcal{L}$ . Se optarmos por este caminho, a expansão  $\delta$  entra nos nossos cálculos através dos propagadores e vértices “vestidos”, isto é, que levam em conta as interações. Usando como exemplo a teoria  $\lambda\phi^4$ , o propagador vestido seria

$$i\Delta_s^*(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_s^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon} \quad , \quad (3.7)$$

onde  $\Sigma(p^2)$  representa a auto-energia. Neste caso, para implementar a expansão  $\delta$ , *calculamos a auto-energia perturbativamente em ordens de  $\delta$* , e o propagador vestido fica então definido da seguinte maneira:

$$i\Delta_s^{\delta^*}(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_s^2 - \Sigma^\delta(p^2) + i\epsilon} \quad (3. 8)$$

Neste trabalho estaremos utilizando o segundo meio de implementação da expansão  $\delta$ , que foi também o meio utilizado na Ref. [7].

### 3.2 O Modelo de Walecka Interpolado

A expansão  $\delta$  foi aplicada ao modelo de Walecka primeiramente em [7] e posteriormente em [23].

A densidade lagrangeana do modelo, segundo a Eq.(1.1), é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & \bar{\psi}(i \not{\partial} - m + g_s\phi - g_v\gamma^\mu V_\mu)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}m_v^2V_\mu V^\mu + U(\phi, V) + \mathcal{L}_{ct} \quad . \end{aligned} \quad (3. 9)$$

Agora, para implementar a expansão  $\delta$ , definimos  $\mathcal{L}_0$  como

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - \Omega)\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m_s^2\phi^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2V_\mu V^\mu \quad , \quad (3. 10)$$

onde  $\Omega = m + \mu$ , e então a densidade lagrangeana interpolada fica

$$\mathcal{L}_W(\delta) = \mathcal{L}_0 + \delta(-g_v\bar{\psi}\gamma_\mu V^\mu\psi + g_s\bar{\psi}\phi\psi + \mu\bar{\psi}\psi) \quad . \quad (3. 11)$$

No presente trabalho, a quantidade física de interesse é a densidade de energia para a matéria de nêutrons, a qual é descrita pela componente 00 do tensor energia-momento. Para o modelo de Walecka, este tensor pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L}_W + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}_W}{\partial(\partial q_i/\partial x_\mu)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \partial^\nu V_\lambda F^{\lambda\mu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_W \quad . \quad (3. 12)$$

Note que, diferentemente da derivação do tensor feita no Cap.2, a equação de movimento do nucleon não foi utilizada. A explicação para este fato ficará mais clara mais adiante. As equações de movimento para os mésons escalar e vetorial são respectivamente

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_s^2)\phi = g_s\bar{\psi}\psi \quad (3. 13)$$

e

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_v^2)V^\nu = g_v\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad , \quad (3. 14)$$

e para obtenção da segunda equação usamos o fato de que a corrente bariônica se conserva, o que significa que  $\partial_\mu V^\mu = 0$ . Integrando as Eqs.(3.13) e (3.14), obtemos

$$\phi(x) = \phi^0(x) - g_s \int d^4y \Delta_s(x-y)\bar{\psi}(y)\psi(y) \quad (3. 15)$$

e

$$V_\mu(x) = V_\mu^0(x) - g_v \int d^4y D_\sigma^\mu(x-y)\bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y) \quad , \quad (3. 16)$$

onde  $\phi^0$  e  $V_\mu^0$  são as soluções das equações homogêneas e

$$\Delta_s(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_s^2 + i\epsilon} \exp^{-ikx} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_s(k^2) \exp^{-ikx} \quad , \quad (3. 17)$$

$$D_\sigma^\sigma(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_v^2 + i\epsilon} \exp^{-ikx} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_\sigma^\sigma(k^2) \exp^{-ikx} \quad (3. 18)$$

Escrevemos agora o valor esperado do tensor energia-momento como

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \langle \Psi | T^{\mu\nu} | \Psi \rangle - VEV + CTC \quad (3. 19)$$

Substituindo as Eqs.(3.15) e (3.16) na Eq.(3.12), e calculando  $\langle T^{\mu\nu} \rangle$  com o auxílio das Contrações de Wick, obtemos

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = -i \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} (\not{k} - m)] S^*(k) + \langle T^{\mu\nu} \rangle_s + \langle T^{\mu\nu} \rangle_v \quad , \quad (3. 20)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle_s &= \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S^*(k) \right]^2 g^{\mu\nu} - g_s^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [S^*(q+k) S^*(q)] \Delta_s(k^2) \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2} (k^2 - m_s^2) \Delta_s(k^2) - 1 \right] g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu \Delta_s(k^2) \right\} \end{aligned} \quad (3. 21)$$

e

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle_v &= -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S^*(k) \right] \left[ \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S^*(k) \right] g^{\mu\nu} \\ &+ g_v^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\gamma_\lambda S^*(q+k) \gamma^\lambda S^*(q)] D^{\mu\nu}(k^2) \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2} (k^2 - m_v^2) D_\sigma^\sigma(k^2) - 1 \right] g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu D_\sigma^\sigma(k^2) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (3. 22)$$

sendo  $S^*(k)$  o propagador vestido do nucleon e  $\Delta_s(k^2)$  e  $D_{\mu\nu}(k^2)$  os propagadores mesônicos não interagentes. É importante salientar que na derivação dos tensores acima foram desprezados termos cujas contribuições dariam origem a correções às auto-energias mesônicas e aos

vértices, ou seja, termos de ordens superiores a  $\delta^2$ . Observe que os propagadores mesônicos utilizados no Cap.2 eram propagadores vestidos, e por isso, naquele caso, precisávamos calcular também a auto-energia mesônica [veja Eqs.(2.16) e (2.17)].

Note que, na lagrangeana (3.11), somente os termos bariônicos foram interpolados, pois, ao integrarmos as equações de movimento dos mésons, estes ficaram escritos em função do propagador do nucleon, o que fez com que os campos mesônicos fossem automaticamente interpolados. A equação de movimento do nucleon não foi utilizada na derivação do tensor energia-momento, pois desta maneira já estaríamos utilizando um método variacional e minimizando a densidade de energia, e faremos isto posteriormente ao aplicarmos o PMS.

A densidade de energia para matéria de nêutrons então fica

$$\varepsilon_W = \varepsilon_b + \varepsilon_s + \varepsilon_v \quad , \quad (3. 23)$$

onde

$$\varepsilon_b = -i \operatorname{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \gamma^0 k^0 - (\not{k} - m) \right] S^{\delta*}(k) + \varepsilon_b^{ct} - \varepsilon_b^{vev} \quad , \quad (3. 24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ \operatorname{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^{\delta*}(k) \right]^2 - g_s^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ S^{\delta*}(k+q) S^{\delta*}(q) \right] \Delta_s(k^2) \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2}(k^2 - m_s^2) \Delta_s(k^2) - 1 \right] - (k^0)^2 \Delta_s(k^2) \right\} + \varepsilon_s^{ct} - \varepsilon_s^{vev} \end{aligned} \quad (3. 25)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ \operatorname{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^0 S^{\delta*}(k) \right]^2 + g_v^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \gamma_\lambda S^{\delta*}(k+q) \gamma^\lambda S^{\delta*}(q) \right] D_\sigma^\sigma(k^2) \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2}(k^2 - m_v^2) D_\sigma^\sigma(k^2) - 1 \right] - (k^0)^2 D_\sigma^\sigma(k^2) \right\} + \varepsilon_v^{ct} - \varepsilon_v^{vev} \quad . \end{aligned} \quad (3. 26)$$

onde  $S^{\delta*}$  é o propagador bariônico interagente calculado com o uso da expansão  $\delta$ , dado por

$$iS^{\delta*}(k) = \frac{i}{\not{k} - (m + \Sigma^{\delta}) + i\epsilon} . \quad (3. 27)$$

Este propagador será avaliado no próximo capítulo, e no capítulo seguinte calcularemos a densidade de energia.

## CAPÍTULO 4

# CÁLCULO E RENORMALIZAÇÃO DA AUTO-ENERGIA BARIÔNICA

Neste capítulo calcularemos, com o uso da expansão  $\delta$ , a auto-energia bariônica renormalizada. Com ela, podemos determinar a forma do propagador vestido, que será utilizado posteriormente na derivação de quantidades físicas de interesse. Este processo já foi realizado no Cap.2, onde utilizamos como método para obter a auto-energia a aproximação relativística de Hartree. Com o uso da expansão  $\delta$ , veremos que é possível ir além do resultado obtido através da RHA e incluir na derivação da auto-energia também as contribuições provenientes dos diagramas de troca. Este método seleciona os diagramas de maneira perturbativa, de modo que o número de diagramas envolvidos no processo de renormalização fica reduzido. As diferenças entre os dois métodos ficarão mais claras no decorrer do texto.

## 4.1 Cálculo da Auto-Energia Bariônica

Usando a densidade lagrangeana interpolada do modelo de Walecka, dada pelas Eqs.(3.10) e (3.11), vamos calcular a auto-energia bariônica. Este processo será feito considerando-se contribuições até  $O(\delta^2)$ .

Em  $O(\delta)$ , temos a contribuição do termo  $\delta\bar{\psi}\mu\psi$ , dada por

$$\Sigma^{(\delta=1)} = -\delta\mu. \quad (4.1)$$

Já em  $O(\delta^2)$ , temos a contribuição de termos diretos (também chamados de *tadpoles*, ou girinos) e de troca.

Podemos expressar diagramaticamente todos os termos que contribuem para a auto-energia até segunda ordem da seguinte maneira:

$$iS^{(2)}(q) = \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5}$$

Figura 4.1: Contribuições de diagramas de Feynman ao propagador bariônico até  $O(\delta^2)$ . O primeiro diagrama representa a contribuição em  $O(\delta)$ . O segundo e o terceiro são diagramas diretos, e os dois últimos de troca.

Para uma maior clareza, calcularemos a contribuição à a auto-energia proveniente destes diagramas usando inicialmente o propagador no vácuo ( $S_F$ ) e posteriormente no meio ( $S_D$ ).

### 4.1.1 Cálculo da Auto-Energia no Vácuo

O propagador bariônico no vácuo é dado por

$$S_F(k) = \frac{\not{k} + \Omega}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \quad , \quad (4. 2)$$

e, para o diagrama direto escalar, temos

$$-i\Sigma_s^{dir} = -(i\delta g_s)^2 \frac{i}{l^2 - m_s^2 + i\epsilon} tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + \Omega)}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4. 3)$$

Por conservação de momento,  $l$  (o momento do méson) é nulo. Tomando o traço da equação acima, obtemos

$$-i\Sigma_s^{dir} = \frac{(\delta g_s)^2}{m_s^2} 4\Omega \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4. 4)$$

Passando agora a equação do espaço de Minkowski para o espaço Euclideano (rotação de Wick) fazendo  $k_0 = ik_0^E$  e  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_E$ , a expressão para  $\Sigma_s^{dir}$  fica

$$\Sigma_s^{dir} = \frac{(\delta g_s)^2}{m_s^2} 4\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + \Omega^2} \quad . \quad (4. 5)$$

A auto-energia escrita desta forma diverge, e é preciso então renormalizá-la. Necessitamos para isso aplicar algum método para *regularizar* a integral, ou seja, precisamos encontrar uma maneira de manipular formalmente as divergências. Existem diferentes métodos de regularização, tais como o *Método do Cut-off*, em que o limite divergente da integral é substituído por um *cut-off*  $\Lambda$  removido de maneira sistemática do resultado final, fazendo com que as previsões tenham valores finitos de acordo com os valores experimentais. Outro método - que vem sendo utilizado no decorrer deste trabalho - é o *Método da Regularização Dimensional*, proposto em 1972 por t'Hooft e Veltman e também por Bollini e Giambiagi [24, 25]. Neste método, ao invés de 4, trabalhamos em  $2\omega$  dimensões, onde  $2\omega = 4 - 2\epsilon$ .

Desta maneira, o resultado da integral fica expresso em termos de funções gama, que são então expandidas em função de  $\epsilon$ , apresentando pólos quando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  é tomado. Para que a equação fique dimensionalmente correta, precisamos ainda definir um novo parâmetro ( $\eta$ ) que possui dimensão de massa. Assim, a constante de acoplamento em  $2\omega$  dimensões escrita em termos da constante original fica

$$\widehat{\delta g}_s = \delta g_s (\eta)^{2-\omega} \quad (4.6)$$

Aqui, vale salientar que, se neste trabalho utilizássemos como esquema de *renormalização* o método da Subtração Mínima, que simplesmente remove os pólos, o parâmetro  $\eta$  estaria presente no resultado final, e seria fixado de maneira que os resultados físicos fossem reproduzidos. Diferentemente, o *Método da Camada de Massa* (que será o método utilizado) remove da teoria tanto os pólos quanto as contribuições finitas provenientes da renormalização, incluindo o parâmetro  $\eta$ . Neste caso, não há necessidade de que  $\eta$  seja escrito explicitamente.

Reescrevendo então a auto-energia em  $2\omega$  dimensões, obtemos

$$\Sigma_s^{dir} = 4\Omega \frac{(\delta g_s)^2}{m_s^2} \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{k_E^2 + \Omega^2} \quad (4.7)$$

Substituindo a Eq.(B.1) na Eq.(4.7) e resolvendo a integral resultante com a auxílio da Eq.(B.6), temos

$$\Sigma_s^{dir} = \frac{4(\delta g_s)^2 \Omega \Gamma(1-\omega)}{m_s^2 (4\pi)^\omega (\Omega^2)^{1-\omega}} \quad (4.8)$$

Como  $\omega = 2 - \epsilon$ , a auto-energia fica

$$\Sigma_s^{dir} = \frac{4(\delta g_s)^2 \Omega^3}{m_s^2 (4\pi)^2} \exp \left[ \epsilon \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^2} \right) \right] \Gamma(\epsilon - 1) \quad . \quad (4.9)$$

Substituindo agora as expressões para a função gama dadas pelas Eqs.(B.2) e (B.3) na Eq.(4.9) e expandindo a exponencial até  $O(\epsilon)$ , obtemos a expressão regularizada da contribuição para a auto-energia proveniente do diagrama direto escalar:

$$\Sigma_s^{dir} = -\frac{4(\delta g_s)^2 \Omega^3}{m_s^2 (4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^2} \right) + (1 - \gamma) \right\} \quad . \quad (4.10)$$

Para o diagrama direto vetorial:

$$-i\Sigma_v^{dir} = -(-i\delta g_v \gamma^\mu) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{l^2 - m_v^2 + i\epsilon} \right) tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i\delta g_v \gamma^\nu) \frac{i(\not{k} + \Omega)}{(k^2 - \Omega^2 + i\epsilon)} \quad . \quad (4.11)$$

Sabendo que  $l = 0$  e tomando o traço da Eq.(4.11), obtemos

$$-i\Sigma_v^{dir} = -4 \left( \frac{\delta g_v}{m_v} \right)^2 \gamma_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4.12)$$

Fazendo uma rotação de Wick e passando de 4 para  $2\omega$  dimensões, resolvemos a integral com o auxílio da Eq.(B.8), obtendo um resultado nulo para  $\Sigma_v^{dir}$ .

A contribuição do diagrama de troca escalar é dada por

$$-i\Sigma_s^{troca} = (\delta g_s)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k} + \Omega)}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k - q)^2 - m_s^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4.13)$$

Fazendo uma rotação de Wick e passando de 4 para  $2\omega$  dimensões:

$$\begin{aligned} \Sigma_s^{troca} &= -(\delta g_s)^2 \left[ \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_E}{(k_E^2 + \Omega^2)[(k_E - q_E)^2 + m_s^2]} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\Omega}{(k_E^2 + \Omega^2)[(k_E - q_E)^2 + m_s^2]} \right] \quad . \quad (4.14) \end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação como

$$\Sigma_s^{troca} = A \not{q}_E + B\Omega \quad , \quad (4. 15)$$

onde  $A \not{q}_E$  se refere à primeira integral e  $B\Omega$  à segunda.

Para resolver a parte em  $\Omega$ , reescrevemos  $B\Omega$  fazendo uso da parametrização de Feynman [veja Eq.(B.10)]. Assim, após fazermos algumas manipulações no denominador, obtemos

$$B\Omega = -(\delta g_s)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega} k'}{(2\pi)^{2\omega} [k'^2 + a^2(x)]^2} \quad , \quad (4. 16)$$

onde  $k' = k_E - q_E(1-x)$ ,  $a^2(x) = q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x$  e  $x$  é o parâmetro de Feynman.

Resolvendo a integral em  $k'$  com o auxílio da Eq.(B.7),  $B\Omega$  fica

$$B\Omega = -(\delta g_s)^2 \Omega \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega [a^2(x)]^{2-\omega}} \quad . \quad (4. 17)$$

Substituindo  $\omega = 2 - \epsilon$ :

$$B\Omega = -\left(\frac{\delta g_s}{4\pi}\right)^2 \Omega \int_0^1 dx \Gamma(\epsilon) \exp\left[\epsilon \ln\left(\frac{4\pi}{a^2(x)}\right)\right] \quad . \quad (4. 18)$$

Sabendo que  $\Gamma(\epsilon) = 1/\epsilon - \gamma$  e expandindo a exponencial até  $O(\epsilon)$ , obtemos a expressão final para  $B\Omega$ :

$$B\Omega = -\left(\frac{\delta g_s}{4\pi}\right)^2 \Omega \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi}{m_s^2}\right) - \int_0^1 dx \ln\left[\frac{q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_s^2}\right] \right\} \quad . \quad (4. 19)$$

Para o cálculo de  $A \not{q}_E$ , multiplicamos ambos os lados da equação por  $\not{q}_E$ , e assim

$$A = - \left( \frac{\delta g_s}{q_E} \right)^2 \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_E q_E}{(k_E^2 + \Omega^2)[(k_E - q_E)^2 + m_s^2]} \quad (4. 20)$$

Utilizando a parametrização de Feynman e reescrevendo novamente a integral em termos de  $a^2(x)$  e  $k'$ , temos

$$A = - \left( \frac{\delta g_s}{q_E} \right)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega} k'}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k' q_E + q_E^2(1-x)}{[k'^2 + a^2(x)]^2} \quad (4. 21)$$

Para resolver a integral em  $k'$ , utilizamos as Eqs.(B.7) e (B.8), e a expressão acima então fica

$$A = -(\delta g_s)^2 \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\omega)(1-x)}{(4\pi)^\omega [a^2(x)]^{2-\omega}} \quad (4. 22)$$

Substituindo  $\omega = 2 - \epsilon$ , obtemos

$$A = - \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 \int_0^1 dx (1-x) \Gamma(\epsilon) \exp \left[ \epsilon \ln \left( \frac{4\pi}{a^2(x)} \right) \right] \quad (4. 23)$$

e expandindo a exponencial até  $O(\epsilon)$ ,  $A q_E$  fica

$$\begin{aligned} A q_E &= - \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 q_E \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_s^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_s^2} \right] \right\} \quad (4. 24) \end{aligned}$$

Assim, a contribuição para a auto-energia proveniente do diagrama de troca escalar é

dada por

$$\Sigma_s^{troca} = - \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 q_E \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_s^2} \right) - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_s^2} \right] \right\}$$

$$- \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 \Omega \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_s^2} \right) - \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_s^2} \right] \right\} \quad (4.25)$$

Para o caso do diagrama de troca vetorial, temos

$$-i\Sigma_v^{troca} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i\delta g_v \gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + \Omega)}{k^2 - \Omega^2 + i\epsilon} (-i\delta g_v \gamma^\nu) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k-q)^2 - m_v^2 + i\epsilon} \right) \quad (4.26)$$

$$= -(\delta g_v)^2 \left[ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \not{k}^\lambda \gamma_\lambda \gamma^\nu g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Omega^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m_v^2 + i\epsilon]} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Omega \gamma^\mu \gamma^\nu g_{\mu\nu}}{(k^2 - \Omega^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m_v^2 + i\epsilon]} \right], \quad (4.27)$$

e usando a relação de anti-comutação  $\{\gamma_\lambda, \gamma_\mu\} = 2g_{\lambda\mu}$ :

$$-i\Sigma_v^{troca} = -(\delta g_v)^2 \left[ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2 \not{k}}{(k^2 - \Omega^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m_v^2 + i\epsilon]} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4\Omega}{(k^2 - \Omega^2 + i\epsilon)[(k-q)^2 - m_v^2 + i\epsilon]} \right] \quad (4.28)$$

Aqui, temos novamente uma equação do tipo  $A \not{k} + B\Omega$ , onde  $A \not{k}$  se refere à primeira integral e  $B\Omega$  à segunda. O procedimento para a resolução destas equações é análogo ao utilizado no caso do diagrama de troca escalar. Portanto

$$\Sigma_v^{troca} = - \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \not{k} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_v^2} \right) - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_v^2} \right] \right\} + 4\Omega \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_v^2} \right) - \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_v^2} \right] \right\} \quad (4.29)$$

### 4.1.2 Cálculo da Auto-Energia no Meio Denso

O propagador bariônico no meio é dado por

$$S_D(k) = (\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (4. 30)$$

onde  $E^0(k) = (\mathbf{k}^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Substituindo esta equação na expressão para a auto-energia proveniente do diagrama direto escalar, temos

$$-i\Sigma_s^{dir} = -(i\delta g_s)^2 \frac{i}{(l^2 - m_s^2 + i\epsilon)} tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i(\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (4. 31)$$

e portanto

$$\Sigma_s^{dir} = - \left( \frac{\delta g_s}{m_s} \right)^2 \frac{\Omega}{4\pi^3} \int dk^0 \int d^3 k \frac{\delta(k^0 - E^0(k))}{E^0(k)} \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad (4. 32)$$

$$= - \left( \frac{\delta g_s}{m_s} \right)^2 \frac{\Omega}{\pi^2} \int_0^{k_F} d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}^2}{(\mathbf{k}^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \quad (4. 33)$$

Para o caso do diagrama direto vetorial:

$$\begin{aligned} -i\Sigma_v^{dir} &= -(-i\delta g_v \gamma^\mu) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{l^2 - m_v^2 + i\epsilon} \right) \\ &\times tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i\delta g_v \gamma^\nu) i(\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (4. 34) \end{aligned}$$

Tomando o traço, a equação fica:

$$\Sigma_v^{dir} = \left( \frac{\delta g_v}{m_v} \right)^2 \frac{1}{4\pi^3} \int dk_0 \int d^3 k \frac{(\gamma_0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}) \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)} \quad , \quad (4. 35)$$

e portanto

$$\Sigma_v^{dir} = \frac{(\delta g_v)^2 \gamma^0 k_F^3}{\pi^2 m_v^2 3} \quad (4.36)$$

Calcularemos agora a contribuição referente ao diagrama de troca escalar, dada por

$$-i\Sigma_s^{troca} = (i\delta g_s)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-q)^2 - m_s^2 + i\epsilon} i(\not{k} + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (4.37)$$

ou

$$\Sigma_s^{troca} = -(\delta g_s)^2 \pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma^0 k_0 - \gamma \cdot \mathbf{k} + \Omega) \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k) \{ [E^0(k) - E^0(q)]^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 - m_s^2 \}} \quad (4.38)$$

Reescrevendo o denominador da equação como  $\Delta_s(k, q) + 2kq \cos \theta$ , onde  $\Delta_s(k, q) = [E^0(k) - E^0(q)]^2 - k^2 - q^2 - m_s^2$ , e resolvendo cada integral separadamente, temos então para a primeira integral

$$I_1 = -\frac{\gamma^0 (\delta g_s)^2}{16\pi^3} \int d^3 k \frac{E^0(k) \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k) [\Delta_s + 2kq \cos \theta]} \quad (4.39)$$

$$= -\frac{\gamma^0 (\delta g_s)^2}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{k_F} dk d\theta d\phi k^2 \sin \theta \frac{1}{[\Delta_s + 2kq \cos \theta]} \quad (4.40)$$

$$= -\frac{\gamma^0 (\delta g_s)^2}{16\pi^2} \int_0^{k_F} d\mathbf{k} \frac{k}{q} \Theta_s(k, q), \quad (4.41)$$

onde  $\Theta_s(k, q) = \ln [(\Delta_s + 2kq)/(\Delta_s - 2kq)]$ .

Para a segunda integral:

$$I_2 = \frac{(\delta g_s)^2}{16\pi^3} \int d^4 k \frac{\gamma \cdot \mathbf{k} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k) [\Delta_s + 2kq \cos \theta]} \quad (4.42)$$

$$= \frac{(\delta g_s)^2}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{k_F} dk d\theta d\phi k^2 \sin \theta \frac{\gamma \cdot \mathbf{k}}{E^0(k) (\Delta_s + 2kq \cos \theta)} \quad (4.43)$$

Substituindo  $\gamma \cdot \mathbf{k} = \gamma k(\sin \alpha \sin \phi \sin \theta + \cos \theta \cos \alpha)$  na Eq.(4.43), onde  $\cos \alpha = \gamma \cdot \mathbf{q} / \gamma q$ , obtemos

$$I_2 = \frac{(\delta g_s)^2 \gamma \cdot \mathbf{q}}{8\pi^2 q^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{E^0(k)} \Phi_s(k, q) \quad , \quad (4.44)$$

e  $\Phi_s(k, q) = (1 - \Delta_s \Theta_s(k, q) / 4kq)$ .

Finalmente, para a terceira integral, temos:

$$I_3 = -\frac{(\delta g_s)^2 \Omega}{16\pi^3} \int d^4 k \frac{\delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)(\Delta_s + 2kq \cos \theta)} \quad (4.45)$$

$$= -\frac{(\delta g_s)^2 \Omega}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{k_F} dk d\theta d\phi k^2 \sin \theta \frac{1}{E^0(k)(\Delta_s + 2kq \cos \theta)} \quad . \quad (4.46)$$

Logo

$$I_3 = -\frac{(\delta g_s)^2 \Omega}{16\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k}{q E^0(k)} \Theta_s(k, q) \quad , \quad (4.47)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_s^{troca} &= I_1 + I_2 + I_3 = -\left(\frac{\delta g_s}{2\pi}\right)^2 \left\{ \gamma^0 \int_0^{k_F} dk \frac{k}{q} \Theta_s(k, q) \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{\gamma \cdot \mathbf{q}}{q^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{E^0(k)} \Phi_s(k, q) + \Omega \int_0^{k_F} dk \frac{k}{q E^0(k)} \Theta_s(k, q) \right\} \quad . \quad (4.48) \end{aligned}$$

Para o caso do diagrama de troca vetorial:

$$\begin{aligned} -i\Sigma_v^{troca} &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i\delta g_v \gamma^\mu) i(k + \Omega) \frac{i\pi}{E^0(k)} \delta(k^0 - E^0(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) (-i\delta g_v \gamma^\nu) \\ &\quad \times \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{(k - q)^2 - m_v^2 + i\epsilon} \right) \quad , \quad (4.49) \end{aligned}$$

ou

$$\Sigma_v^{troca} = \frac{(\delta g_v)^2}{16\pi^3} \int d^3k \frac{\gamma^\mu [E^0(k)\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} + \Omega] \gamma_\mu \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)[\Delta_v + 2kq \cos \theta]} , \quad (4.50)$$

onde  $\Delta_v = [E^0(k) - E^0(q)]^2 - k^2 - q^2 - m_v^2$ .

Resolvendo novamente cada integral separadamente, obtemos

$$I_1 = \frac{(\delta g_v)^2}{16\pi^3} \int d^3k \frac{\gamma^\mu E^0(k)\gamma^0 \gamma_\mu \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)[\Delta_v + 2kq \cos \theta]} \quad (4.51)$$

$$= -\frac{2\gamma^0(\delta g_v)^2}{16\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{k_F} dk d\theta d\phi \frac{k^2 \sin \theta}{\Delta_v + 2kq \cos \theta} \quad (4.52)$$

Logo

$$I_1 = -\frac{(\delta g_v)^2 \gamma^0}{8\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k}{q} \Theta_v(k, q) , \quad (4.53)$$

onde  $\Theta_v(k, q) = \ln [(\Delta_v + 2kq)/(\Delta_v - 2kq)]$ .

$$I_2 = -\frac{(\delta g_v)^2}{16\pi^3} \int d^3k \frac{\gamma^\mu (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) \gamma_\mu \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)[\Delta_v + 2kq \cos \theta]} \quad (4.54)$$

$$= -\frac{(\delta g_v)^2}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{k_F} dk d\theta d\phi \frac{k^2 \sin \theta (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{k})}{E^0(k)[\Delta_v + 2kq \cos \theta]} \quad (4.55)$$

O procedimento para a resolução de  $I_2$  é análogo ao adotado na resolução da segunda integral para o caso escalar, e assim

$$I_2 = -\frac{(\delta g_v)^2 \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}}{4\pi^2 q^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{E^0(k)} \Phi_v(k, q) , \quad (4.56)$$

onde  $\Phi_v(k, q) = (1 - \Delta_v \Theta_v(k, q)/4kq)$ .

Para  $I_3$ , temos

$$I_3 = \frac{(\delta g_v)^2}{16\pi^3} \int d^3k \frac{\gamma^\mu \Omega \gamma_\mu \theta(k_F - |\mathbf{k}|)}{E^0(k)[\Delta_v + 2kq \cos \theta]} \quad (4.57)$$

$$= \frac{(\delta g_v)^2}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{k_F} dk d\theta d\phi \frac{\Omega \mathbf{k}^2 \sin \theta}{E^0(k)[\Delta_v + 2kq \cos \theta]} \quad (4.58)$$

e portanto

$$I_3 = \frac{(\delta g_v)^2 \Omega}{4\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{\mathbf{k}}{E^0(k)} \Theta_v(k, q) \quad (4.59)$$

Assim, a contribuição total do diagrama de troca vetorial é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_v^{troca} &= I_1 + I_2 + I_3 = \frac{(\delta g_v)^2}{8\pi^4} \left\{ -\gamma^0 \int_0^{k_F} dk \frac{\mathbf{k}}{q} \Theta_v(k, q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\gamma \cdot \mathbf{q}}{q^2} \int_0^{k_F} dk \frac{\mathbf{k}^2}{E^0(k)} \Phi_v(k, q) + \frac{2\Omega}{q} \int_0^{k_F} dk \frac{\mathbf{k}}{E^0(k)} \Theta_v(k, q) \right\} \quad (4.60) \end{aligned}$$

## 4.2 Renormalização da Auto-Energia Bariônica

Tendo como referência as expressões renormalizadas obtidas na seção 4.1.1 para a auto-energia bariônica, podemos dar início ao processo de renormalização. As divergências que aparecem no decorrer dos cálculos são provenientes de termos diretos e de troca, e são dadas respectivamente por

$$\Sigma^{(2)dir} = -\frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{\delta g_s}{m_s} \right)^2 \Omega^3 \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^2} \right) \right\} \quad (4.61)$$

e

$$\Sigma^{(2)troca} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\delta g_s}{m_s} \right)^2 q_E \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_s^2} \right) - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_s^2} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 \Omega \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_s^2} \right) - \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_s^2} \right] \right\} \\
& - \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 q_E \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_v^2} \right) - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_v^2} \right] \right\} \\
& + 4 \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \Omega \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{4\pi}{m_v^2} \right) - \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{q_E^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x}{m_v^2} \right] \right\} \quad , \quad (4. 6)
\end{aligned}$$

onde

$$\Psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \quad . \quad (4. 63)$$

A densidade lagrangeana completa de contra-termos, para o modelo de Walecka, é escrita como

$$\mathcal{L}_{ct} = -\frac{1}{2} \zeta_s \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi + \sum_{n=1}^4 \frac{\alpha_n}{n!} \phi^n + m_c \bar{\psi} \psi - \zeta_b \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi + \gamma_s \phi \bar{\psi} \psi \quad . \quad (4. 64)$$

No nosso caso, os únicos contra-termos necessários para a renormalização da auto-energia são os seguintes:

$$\alpha_1 \phi + m_c \bar{\psi} \psi - \zeta_b \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \quad , \quad (4. 65)$$

que podem ser representados diagramaticamente através da figura abaixo.

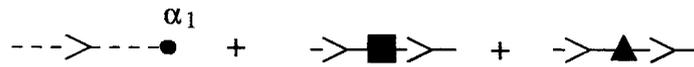


Figura 4.2: Contra-termos necessários para renormalizar a auto-energia bariônica

Calculando a contribuição à auto-energia proveniente destes contra-termos, obtemos

$$\Sigma_{ct} = -\alpha_1 \left( \frac{\delta g_s}{m_s^2} \right) - m_c + \zeta_b (\not{q} - \Omega) \quad , \quad (4. 66)$$

mostrados na Fig(4.3).

Cada contra-termo, como já mencionamos no Cap.1, é composto por uma parte infinita (que elimina a totalmente divergência) e por uma parte finita arbitrária, que é ajustada posteriormente conforme o método de renormalização utilizado. Neste trabalho, estaremos utilizando o método da Camada de Massa, no qual os contra-termos removem tanto as contribuições divergentes quanto as contribuições finitas devido às correções do *loop* às amplitudes mensuráveis. Desta maneira, os parâmetros da teoria ( $g_s, g_v, m_s, m_v$  e  $m$ ) são tratados como as massas e constantes de acoplamento *físicas*.

$$-i \Sigma_{ct} = \text{---} \bullet \text{---} \overset{\alpha_1}{\quad} + \text{---} \blacksquare \text{---} \overset{im_c}{\quad} + \text{---} \blacktriangle \text{---} \overset{-i \zeta_b (\not{q} - \Omega)}{\quad}$$

Figura 4.3: Auto-energia proveniente dos contra-termos

Assim, obtemos

$$\alpha_1 = -\frac{(\delta g_s) \Omega^3}{4\pi^2 \epsilon} + F_1 \quad ; \quad (4. 67)$$

$$m_c = \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 + 3 \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{\Omega}{\epsilon} + F_c \quad ; \quad (4. 68)$$

$$\zeta_b = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 + \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \right] \frac{1}{\epsilon} + F_b \quad , \quad (4. 69)$$

onde  $F_1, F_c$  e  $F_b$  são os parâmetros finitos arbitrários mencionados anteriormente. Para fixá-los, usamos as condições de renormalização dadas por

$$S_{FR}^{-1}|_{q=m} = 0 \quad (4.70)$$

e

$$\left. \frac{\partial S_{FR}^{-1}}{\partial q} \right|_{q=m} = 1 \quad , \quad (4.71)$$

sendo  $m$  a massa física do bárion. A expressão para o propagador bariônico vestido e renormalizado -  $S_{FR}$  - é obtida fazendo-se uso do inverso da Equação de Dyson [veja Eq.(2.24)] de modo que:

$$S_{FR}^{-1} = q - \Omega - (\Sigma + \Sigma_{ct}) \quad , \quad (4.72)$$

onde  $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2) tad} + \Sigma^{(2) troca}$ .

Lembre que, para conservar a estabilidade do vácuo, o diagrama direto escalar deve ser nulo, portanto  $F_1$  é escrito de maneira que qualquer contribuição proveniente deste diagrama seja *completamente* eliminada. Logo,

$$F_1 = -\frac{\delta g_s}{4\pi^2} \Omega^3 \left\{ \Psi(2) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^2} \right) \right\} \quad . \quad (4.73)$$

Utilizando as condições de renormalização mencionadas acima, e voltando para o espaço original de Minkowski ( $q_E^2 \rightarrow -q^2 = -m^2$ ), obtemos então a expressão final para o inverso do propagador vestido e renormalizado:

$$\begin{aligned} S_{FR}^{-1} = q - m & - \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 q \int_0^1 dx (1-x) \ln \left( \frac{-q^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{-m^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x} \right) \\ & + \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 \Omega \int_0^1 dx \ln \left( \frac{-q^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x}{-m^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 q \int_0^1 dx (1-x) \ln \left( \frac{-q^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x}{-m^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x} \right) \\
& + \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 m(q-m) \int_0^1 dx \frac{2mx(1-x)^2}{-m^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x} \\
& + \left( \frac{\delta g_s}{4\pi} \right)^2 \Omega(q-m) \int_0^1 dx \frac{2mx(1-x)}{-m^2 x(1-x) + m_s^2(1-x) + \Omega^2 x} \\
& + 4 \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \Omega(q-m) \int_0^1 dx \frac{2mx(1-x)}{-m^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x} \\
& + 2 \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 m(q-m) \int_0^1 dx \frac{2mx(1-x)^2}{-m^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x} \\
& - 4 \left( \frac{\delta g_v}{4\pi} \right)^2 \Omega \int_0^1 dx \ln \left( \frac{-q^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x}{-m^2 x(1-x) + m_v^2(1-x) + \Omega^2 x} \right) \quad (4.74)
\end{aligned}$$

Aqui, algumas considerações são importantes: note que, como mencionado anteriormente, com o uso da expansão  $\delta$  pudemos ir além do resultado obtidos através da RHA para a auto-energia, e incluir *também as contribuições provenientes de termos de troca* a esta quantidade, pois o número de diagramas envolvidos no processo de renormalização ficou reduzido. Essa característica do uso da expansão  $\delta$  pôde ser claramente observada na quantidade de contra-termos necessários para a renormalização da auto-energia proveniente do diagrama direto escalar. Neste caso, necessitamos renormalizar somente um termo, enquanto que no Cap.2, onde aplicamos a RHA, 4 termos foram renormalizados.

## CAPÍTULO 5

# CÁLCULO E RENORMALIZAÇÃO DA DENSIDADE DE ENERGIA

Poderíamos ter partido, no capítulo anterior, para o cálculo da auto-energia em ordens mais altas de  $\delta$ , incluindo assim outras importantes correções, como por exemplo a correção ao vértice ou aos propagadores mesônicos. Mas, ao invés de levarmos em conta termos de ordem mais alta na expansão da auto-energia, direcionamos nossa atenção ao cálculo de observáveis físicos. Neste capítulo, estaremos nos dedicando ao cálculo e renormalização da densidade de energia para a matéria de nêutrons. Esta densidade é descrita em termos de diagramas diretos e de troca, e como demonstrado no capítulo anterior, a inclusão de termos de troca no cálculo da auto-energia é facilitada pelo uso da expansão  $\delta$ . Apesar dessa vantagem, a renormalização destes termos para o caso da densidade de energia continua sendo uma tarefa extremamente trabalhosa, embora factível. Por esse motivo, neste trabalho, consideraremos somente as contribuições provenientes de diagramas diretos em nossos cálculos, de maneira a simplificá-los.

## 5.1 Cálculo da Densidade de Energia

Para o cálculo da densidade de energia, precisamos inicialmente definir o propagador bariônico vestido, que será utilizado nas Eqs.(3.24)-(3.26). Para isso, reescrevemos a auto-energia na forma

$$\Sigma(k) = \Sigma_s^{(2)}(k) - \gamma_\mu \Sigma_v^{(2)\mu}(k) \quad , \quad (5. 1)$$

onde agora  $\Sigma^s$  e  $\Sigma_v^\mu$  são as contribuições ao propagador bariônico provenientes de termos diretos até  $O(\delta^2)$  calculadas com o uso da expansão  $\delta$  [veja Eqs.(4.1), (4.33) e (4.36)].

Substituindo estes resultados em (2.24), obtemos o propagador bariônico interagente, dado por

$$S^*(k) = S_F^*(k) + S_D^*(k) \quad , \quad (5. 2)$$

onde

$$S_F^*(k) = \frac{1}{\not{k}^* - \Omega^*(k) + i\epsilon} \quad (5. 3)$$

e

$$S_D^*(k) = i\pi \frac{\not{k}^* + \Omega^*(k)}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (5. 4)$$

sendo  $E(k)$  a energia da partícula que satisfaz  $E(k) = [E^*(k) - \Sigma^0(k)]_{k^0=E(k)}$ .

As quantidades auxiliares definidas nas Eqs.(2.26) e (2.27) são agora descritas da seguinte maneira:

$$\Omega^* = \Omega - \delta\mu - \left(\frac{\delta g_s}{m_s}\right)^2 \frac{\Omega}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{1}{E_\mu^0(k)} , \quad (5.5)$$

$$k^{0*} = k^0 - \left(\frac{\delta g_v}{m_v}\right)^2 \frac{k_F^3}{3\pi^2} , \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{k} , \quad (5.6)$$

e o propagador vestido que será utilizado no cálculo da densidade de energia fica então completamente determinado.

A expressão para  $\varepsilon_b$ , obtida no Cap.3, é dada por

$$\varepsilon_b = -i \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\gamma^0 k^0 - (\not{k} - m)] S^*(k) - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} . \quad (5.7)$$

Calculando primeiramente a densidade de energia usando o propagador no vácuo, temos

$$\varepsilon_b^{vac} = -i \operatorname{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\gamma \cdot \mathbf{k} + m) \frac{k^* + \Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2} + i\epsilon} . \quad (5.8)$$

Tomando então o traço da equação acima:

$$\varepsilon_b^{vac} = -4i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{\mathbf{k}^2}{k^{*2} - \Omega^{*2} + i\epsilon} + \frac{m\Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2} + i\epsilon} \right) . \quad (5.9)$$

Resolvendo cada integral separadamente, após fazermos uma rotação de Wick e passar de 4 para  $2\omega$  dimensões, a primeira integral fica

$$I_1 = -4 \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_i k_j}{k_E^2 + \Omega^{*2}} , \quad (5.10)$$

cuja solução pode ser obtida com o auxílio da Eq.(B.9), e assim

$$I_1 = -\frac{2(2\omega - 1)\Gamma(-\omega)}{(4\pi)^\omega (\Omega^{*2})^{-\omega}} . \quad (5.11)$$

Reescrevendo então a equação com  $\omega = 2 - \epsilon$ , obtemos

$$I_1 = -\frac{2}{(4\pi)^2} \exp \left[ \epsilon \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \Omega^{*4} \Gamma(\epsilon - 2)(3 - 2\epsilon) \quad . \quad (5. 12)$$

Substituindo a Eq.(B.4) na expressão acima, e expandindo a exponencial até  $O(\epsilon)$ , obtemos a expressão final para  $I_1$ , dada por

$$I_1 = -\frac{3\Omega^{*4}}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(3) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] + \frac{\Omega^{*4}}{8\pi^2} \quad . \quad (5. 13)$$

A segunda integral pode ser escrita como

$$I_2 = -4 \int \frac{d^{2\omega} k_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m\Omega^*}{(k_E^{*2} + \Omega^{*2})} \quad , \quad (5. 14)$$

onde já foi realizada a rotação de Wick e a alteração nas dimensões.

Substituindo então a Eq.(B.1) na Eq.(5.14), e resolvendo a integral resultante com o auxílio da Eq.(B.6), obtemos

$$I_2 = -\frac{4m\Omega^*\Gamma(1 - \omega)}{(4\pi)^\omega (\Omega^{*2})^{1-\omega}} \quad . \quad (5. 15)$$

Reescrevendo  $I_2$  com  $\omega = 2 - \epsilon$ ,

$$I_2 = -\frac{4m\Omega^{*3}}{(4\pi)^2} \exp \left[ \epsilon \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \Gamma(\epsilon - 1) \quad , \quad (5. 16)$$

e expandindo a exponencial até  $O(\epsilon)$ , obtemos a expressão final para a segunda integral:

$$I_2 = \frac{m\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right\} \quad . \quad (5. 17)$$

Calculando agora  $\epsilon_b$  utilizando o propagador no meio, temos:

$$\varepsilon_b^{meio} = tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\gamma \cdot \mathbf{k} + m) \pi \frac{(k^* + \Omega^*)}{E^*(k)} \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (5. 18)$$

$$\varepsilon_b^{meio} = \frac{1}{16\pi^3} \int d^4 k \left( \frac{4\mathbf{k}^2 + 4m\Omega^*}{E^*(k)} \right) \delta(k_0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \quad , \quad (5. 19)$$

$$\varepsilon_b^{meio} = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3 k \left( \frac{\mathbf{k}^2 + m\Omega^*}{E^*(k)} \right) \quad . \quad (5. 20)$$

A expressão final para a densidade de energia bariônica pode ser então escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= \varepsilon_b^{vac} + \varepsilon_b^{meio} = -\frac{3\Omega^{*4}}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(3) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] + \frac{m\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3 \mathbf{k} \left( \frac{\mathbf{k}^2 + m\Omega^{*2}}{E^*(k)} \right) + \frac{\Omega^{*4}}{8\pi^2} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \quad . \end{aligned} \quad (5. 21)$$

Para o caso da densidade de energia escalar, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S^*(k) \right]^2 - g_s^2 tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [S^*(k+q) S^*(q)] \Delta_s(k^2) \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2} (k^{*2} - m_s^2) \Delta_s(k^2) - 1 \right] - (k^0)^2 \Delta_s(k^2) \right\} - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct} \quad , \end{aligned} \quad (5. 22)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é um termo direto e os outros são termos de troca.

Calculando somente o termo direto da equação acima, e utilizando inicialmente o propagador no vácuo, temos

$$\varepsilon_s^{vac} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ i tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^* + \Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2} + i\epsilon} \right]^2 \quad . \quad (5. 23)$$

Tomando o traço e fazendo uma Rotação de Wick,

$$\varepsilon_s^{vac} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ - \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{4\Omega^*}{k_E^{*2} + \Omega^{*2}} \right]^2 \quad . \quad (5. 24)$$

A resolução da equação acima é similar à resolução da Eq.(5.14), e o resultado final então fica

$$\varepsilon_s^{vac} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ \frac{\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right\} \right]^2 \quad (5. 25)$$

Utilizando agora o propagador no meio para calcular  $\varepsilon_s$ , temos:

$$\varepsilon_s^{meio} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \pi \frac{k^* + \Omega^*}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right]^2 \quad (5. 26)$$

Tomando o traço e resolvendo a integral em  $k^0$ , a equação acima fica

$$\varepsilon_s^{meio} = -\frac{1}{2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ \frac{\Omega^*}{4\pi^*} \int_0^{k_F} d^3 k \frac{1}{E^*(k)} \right]^2, \quad (5. 27)$$

e a expressão final para  $\varepsilon_s$  é então dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \varepsilon_s^{vac} + \varepsilon_s^{meio} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{g_s}{m_s} \right)^2 \left\{ \frac{\Omega^{*3}}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) \right] + \frac{\Omega^*}{4\pi^3} \int_0^{k_F} d^3 \mathbf{k} \frac{1}{E^*(k)} \right\}^2 - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct} \end{aligned} \quad (5. 28)$$

A densidade de energia vetorial pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^0 S^*(k) \right]^2 + g_v^2 tr \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \gamma_\lambda S^*(k+q) \gamma^\lambda S^*(k) \right] D_\sigma^\sigma(k^2) \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2} (k^{*2} - m_v^2) D_\sigma^\sigma(k^2) - 1 \right] - (k^0)^2 D_\sigma^\sigma(k^2) \right\} - \varepsilon_v^{vev} + \varepsilon_v^{ct}, \end{aligned} \quad (5. 29)$$

onde novamente o primeiro termo é um termo direto e os seguintes são termos de troca.

Utilizando o propagador no vácuo para calcular o termo direto, temos

$$\varepsilon_v^{vac} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^0 i \left( \frac{k^* + \Omega^*}{k^{*2} - \Omega^{*2}} \right) \right]^2 \quad (5.30)$$

Tomando o traço e resolvendo a integral, obtemos

$$\varepsilon_v^{vac} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4k^0}{k^{*2} - \Omega^{*2}} \right]^2 = 0 \quad (5.31)$$

Calculando agora  $\varepsilon_v$  usando o propagador no meio:

$$\varepsilon_v^{meio} = -\frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^0 \left( i\pi \frac{k^* + \Omega^*}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right) \right]^2 \quad (5.32)$$

Tomando o traço e resolvendo a integral em  $k^0$ , a expressão fica

$$\varepsilon_v^{meio} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left[ \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 k \theta(k_F - |\mathbf{k}|) \right]^2 \quad (5.33)$$

Resolvendo então a integral em coordenadas esféricas, obtemos para  $\varepsilon_v^{meio}$

$$\varepsilon_v^{meio} = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left( \frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 \quad (5.34)$$

## 5.2 Renormalização da Densidade de Energia

Podemos notar que novas divergências aparecem nos termos calculados com o uso do propagador no vácuo [Eqs.(5.13), (5.17) e (5.25)], e, para que os resultados finais obtidos para a densidade de energia sejam finitos, precisamos novamente renormalizar estes termos.

A Eq.(5.21) é do tipo

$$\varepsilon_b = a\Omega^{*4} + b\Omega^{*3} + \text{termo finito} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} \quad (5.35)$$

Expandindo  $\Omega^{*4}$  e  $\Omega^{*3}$  [veja Eq.(5.5)], e substituindo na Eq(5.21), temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ m^4 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right) \right] + m^3 \Sigma_s - 3m^2 \Sigma_s^2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{1}{2} - \gamma \right] \right. \\ & - 4m \Sigma_s^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{4} - \gamma \right] + \Sigma_s^4 \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right) \right] \left. \right\} \\ & + \textit{ termo finito} - \varepsilon_b^{vev} + \varepsilon_b^{ct} . \end{aligned} \quad (5. 36)$$

Este resultado pode ser representado diagramaticamente da seguinte maneira:

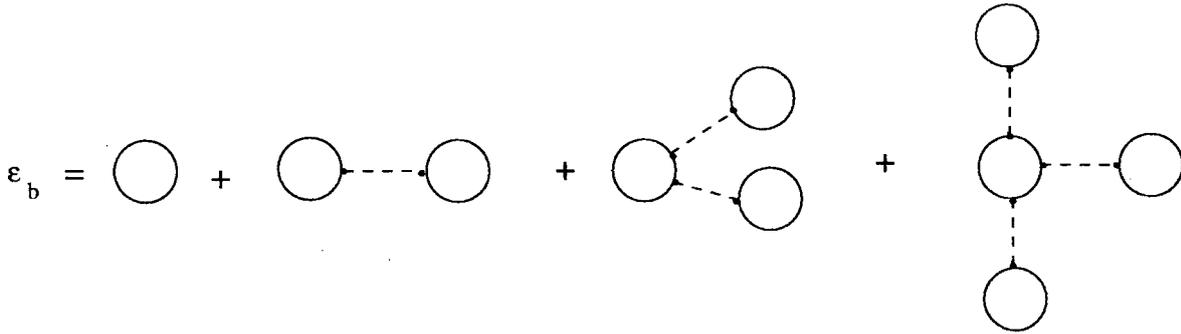


Figura 5.1: Diagramas de Feynman para a densidade de energia bariônica.

Note que, neste ponto, o parâmetro  $\delta$  foi igualado à unidade. Note também que a densidade de energia deve ser nula no vácuo ( $k_F = 0$ ), e, para satisfazer esta condição, eliminamos o primeiro termo do lado direito da equação através do termo de subtração do valor esperado no vácuo, pois não existe nenhum contra-termo na langrangeana que elimine um termo deste tipo. Assim

$$\varepsilon_b^{vev} = \frac{m^4}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{m^2} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right) \right] , \quad (5. 37)$$

e

$$\varepsilon_b - \varepsilon_b^{vev} = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ -m^4 \ln \left( \frac{\Omega^*}{m} \right) + m^3 \Sigma_s - 3m^2 \Sigma_s^2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{1}{2} - \gamma \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - 4m\Sigma_s^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{4} - \gamma \right] + \Sigma_s^4 \left[ -\frac{3}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{3}{2} - \gamma \right) \right] \\
& + \text{ termo finito } + \varepsilon_b^{ct} .
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Para renormalizar os termos restantes, utilizamos os seguintes contra-termos:

$$\varepsilon_b^{ct} = \frac{\alpha_2}{2} \phi^2 + \frac{\alpha_3}{3!} \phi^3 + \frac{\alpha_4}{4!} \phi^4 , \tag{5.39}$$

que podem ser descritos diagramaticamente por

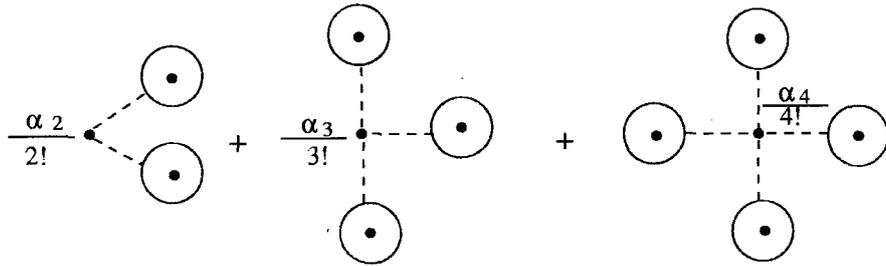


Figura 5.2: Diagramas dos contra-termos de  $\varepsilon_b^{ct}$

Para escrever  $\alpha_n$  explicitamente, partimos da expressão dada pela Eq.(2.40) e obtemos

$$\alpha_n = -g_s \frac{d\alpha_{(n-1)}}{dm} . \tag{5.40}$$

O valor esperado de  $\phi$  pode ser escrito em termos do diagrama direto escalar - lembre que  $\Sigma_s$  deve ser nula para manter a estabilidade do vácuo. Assim:

$$\langle \phi \rangle = -\frac{1}{g_s} \Sigma_s . \tag{5.41}$$

Na renormalização do terceiro termo da Eq.(5.38), utilizamos o contra-termo  $\alpha_2 \phi^2 / 2!$ , dado por

$$\frac{\alpha_2 \phi^2}{2!} = \frac{3}{8\pi^2} m^2 \Sigma_s^2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{4\pi}{\Omega^{*2}} \right) + \frac{1}{3} - \gamma \right] , \tag{5.42}$$

onde, para a derivação de  $\alpha_2$ , utilizamos a expressão para  $\alpha_1$  obtida no Cap.4 [Eqs.(4.67) e (4.73)].

Assim, somando a expressão encontrada para o contra-termo ao termo a ser renormalizado, obtemos

$$-\frac{3}{8\pi^2}m^2\Sigma_s^2\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) + \frac{1}{2} - \gamma\right] + \alpha_2\frac{\phi^2}{2!} = -\frac{3}{8\pi^2}m^2\Sigma_s^2\left[-2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) + \frac{1}{6}\right] \quad (5. 43)$$

Para renormalizar o termo proporcional a  $\Sigma_s^3$  da Eq.(5.38), utilizamos o contra-termo  $\alpha_3\phi^3/3!$ , descrito por

$$\frac{\alpha_3}{3!}\phi^3 = \frac{1}{4\pi^2}m\Sigma_s^3\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) - \frac{2}{3} + \gamma\right] \quad , \quad (5. 44)$$

e então

$$-\frac{1}{2\pi^2}m\Sigma_s^3\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) + \frac{3}{4} - \gamma\right] + 2\frac{\alpha_3}{3!}\phi^3 = -\frac{1}{2\pi^2}m\Sigma_s^3\left[-2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) + \frac{17}{12}\right] \quad (5. 45)$$

Na renormalização do último termo da Eq.(5.38), utilizamos o contra-termo  $\alpha_4\phi^4/4!$ , dado por

$$\frac{\alpha_4}{4!}\phi^4 = \frac{1}{16\pi^2}\Sigma_s^4\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) - \frac{8}{3} + \gamma\right] \quad (5. 46)$$

Logo,

$$-\frac{3}{16\pi^2}\Sigma_s^4\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) + \frac{5}{6} - \gamma\right] + 3\frac{\alpha_4}{4!}\phi^4 = -\frac{3}{16\pi^2}\Sigma_s^4\left[-2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) + \frac{21}{6}\right] \quad (5. 47)$$

Substituindo então as expressões renormalizadas acima na Eq.(5.21), obtemos para a densidade de energia bariônica

$$\begin{aligned} \varepsilon_b = & \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) (3\Omega^{*4} - 4m\Omega^{*3}) + m^3(\Omega^* - m) - \frac{1}{2}m^2(\Omega^3 - m)^2 \right. \\ & \left. - \frac{17}{3}m(\Omega^* - m)^3 - \frac{21}{4}(\Omega^* - m)^4 \right\} + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_F} d^3k \frac{\mathbf{k}^2 + m\Omega^*}{E^*(k)} \quad (5. 48) \end{aligned}$$

Para o caso da densidade de energia escalar, temos

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2m_s^2} \left\{ -\frac{\Omega^{*3}}{4\pi^2} g_s \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] + \text{termo finito} \right\}^2 - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct} \quad (5. 49)$$

Substituindo a expressão para  $\Omega^{*3}$  na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = & \frac{1}{2m_s^2} \left\{ -\frac{1}{4\pi^2} g_s m^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] - \frac{3}{4\pi^2} g_s m^2 \Sigma_s \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] \right. \\ & - \frac{3}{4\pi^2} g_s m \Sigma_s^2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] - \frac{1}{4\pi^2} g_s \Sigma_s^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] \\ & \left. + \text{termo finito} \right\}^2 - \varepsilon_s^{vev} + \varepsilon_s^{ct} \quad (5. 50) \end{aligned}$$

Podemos representar esse resultado diagramaticamente através da Fig.(5.3). Os contra-termos necessários para renormalizar  $\varepsilon_s$  são análogos aos utilizados anteriormente, com uma das pernas externas (campo  $\phi$ ) amputada. Logo

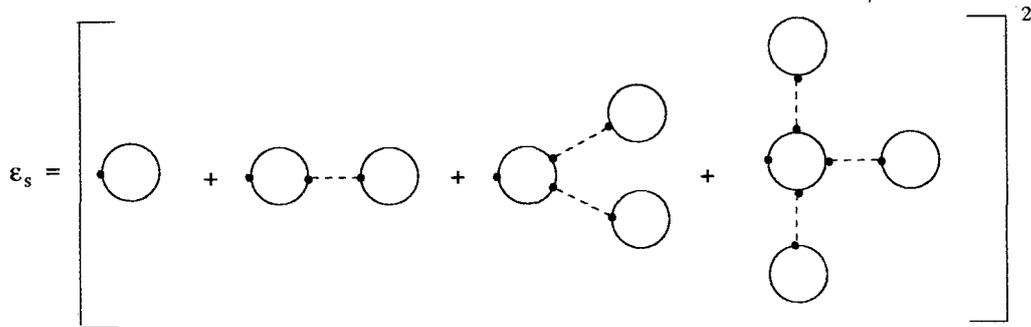


Figura 5.3: Representação diagramática dos termos diretos da densidade de energia escalar.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_s^{ct} &= \frac{d}{d\phi}(\alpha_1\phi) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha_2}{2!}\phi^2\right) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha_3}{3!}\phi^3\right) + \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\alpha_4}{4!}\phi^4\right) \\
 &= \alpha_1 + \alpha_2\phi + \frac{\alpha_3}{2!}\phi^2 + \frac{\alpha_4}{3!}\phi^3 .
 \end{aligned} \tag{5. 51}$$

Subtraindo então os contra-termos das expressões divergentes de  $\varepsilon_s$ , obtemos

$$-\frac{1}{4\pi^2}g_s m^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{m^2}\right) \right] - \alpha_1 = -\frac{1}{4\pi^2}g_s m^3 \left[ -2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] , \tag{5. 52}$$

$$-\frac{3}{4\pi^2}g_s m^2 \Sigma_s \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] - \alpha_2\phi = -\frac{3}{4\pi^2}g_s m^2 \Sigma_s \left[ \frac{2}{3} - 2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] , \tag{5. 53}$$

$$-\frac{3}{4\pi^2}g_s m \Sigma_s^2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] - \frac{\alpha_3}{2!}\phi^2 = -\frac{3}{4\pi^2}g_s m \Sigma_s^2 \left[ \frac{5}{3} - 2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] \tag{5. 54}$$

e

$$-\frac{1}{4\pi^2}g_s \Sigma_s^3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(2) + \ln\left(\frac{4\pi}{\Omega^{*2}}\right) \right] - \frac{\alpha_4}{3!}\phi^3 = -\frac{1}{4\pi^2}g_s \Sigma_s^3 \left[ \frac{11}{3} - 2\ln\left(\frac{\Omega^*}{m}\right) \right] . \tag{5. 55}$$

Assim, a densidade de energia escalar pode ser finalmente escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = & \frac{1}{2} \left( \frac{m_s}{g_s} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_s^2}{m_s^2} \left[ \Omega^{*3} \ln \left( \frac{\Omega^*}{m} \right) - m^2 (\Omega^* - m) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5}{2} m (\Omega^* - m)^2 - \frac{11}{6} (\Omega^* - m)^3 \right] - \frac{1}{4\pi^3} \Omega^{*3} \left( \frac{g_s}{m_s} \right)^2 \int_0^{k_F} d^3\mathbf{k} \frac{1}{E^*(k)} \right\}^2. \quad (5. 56) \end{aligned}$$

Note a diferença de estrutura entre as equações encontradas no Cap.2 com o uso da RHA e as obtidas utilizando-se a expansão  $\delta$ . No próximo capítulo, estas expressões para a densidade de energia serão minimizadas, e o parâmetro artificial restante ( $\mu$ ) será fixado.

# CAPÍTULO 6

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, aplicaremos o Princípio da Mínima Sensibilidade à densidade de energia calculada no capítulo anterior, obtendo assim um resultado de caráter não perturbativo. Neste processo, devido ao fato do caminho de renormalização escolhido ser o da camada de massa, as constantes de acoplamento  $g_s$  e  $g_v$ , e as massas  $m$ ,  $m_s$  e  $m_v$  presentes na densidade lagrangeana original possuem seus valores físicos.

Para fixar o parâmetro  $\mu$  introduzido na teoria pela expansão  $\delta$ , utilizamos a condição dada pelo PMS

$$\frac{d\varepsilon}{d\mu} = \frac{d\varepsilon}{d\Omega^*} \frac{d\Omega^*}{d\mu} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{d\Omega^*} = 0 \quad , \quad (6. 1)$$

pois  $d\Omega^*/d\mu \neq 0$ . Note que a equação acima pode ser resolvida de maneira numérica ou analítica. Neste trabalho, optamos por resolvê-la numericamente. Contudo, para facilitar melhor a comparação entre os resultados encontrados com a RHA e a expansão  $\delta$ , apresentamos também a resolução obtida de maneira analítica, feita na Ref.[7].

A diferenciação da densidade de energia com relação a  $\Omega^*$  leva à seguinte equação

auto-consistente para a massa efetiva do nucleon:

$$\left[ (m - \Omega^*) - 2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Omega^*}{E^*(k)} - \Delta_s \right] \left[ 2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{E^*(k)} - \frac{d\Delta_s}{d\Omega^*} \right] = 0 \quad , \quad (6. 2)$$

onde

$$\Delta_s = \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{1}{2\pi^2} \left[ \Omega^{*3} \ln \left( \frac{\Omega^*}{m} \right) - m^2(\Omega^* - m) - \frac{5}{2} m(\Omega^* - m)^2 - \frac{11}{6} (\Omega^* - m)^3 \right] \quad . \quad (6. 3)$$

Para chegar a este resultado, foi usada a seguinte identidade:

$$\frac{d\Delta_b}{d\Omega^*} = (\Omega^* - m) \frac{m_s^2}{g_s^2} \frac{d\Delta_s}{d\Omega^*} \quad . \quad (6. 4)$$

Podemos observar que a Eq.(6.2) apresenta duas soluções. O primeiro termo entre colchetes, quando substituído na equação da densidade de energia obtida no capítulo anterior leva a

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{g_v^2}{m_v^2} \left( \frac{k_F^3}{3\pi^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{g_s^2} (m^* - m)^2 + \int_0^{k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\mathbf{k}^2 + m^*)^{1/2} + \Delta\varepsilon_{VF} \quad , \quad (6. 5)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{VF} &= \varepsilon_{vac}(m^*) - \varepsilon_{vac}(m) - \varepsilon_{ct} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ -m^{*4} \ln \left( \frac{m^*}{m} \right) + m^3(m^* - m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{2} m^2(m^* - m)^2 + \frac{13}{3} (m^* - m)^3 + \frac{25}{12} (m^* - m)^4 \right] \quad . \quad (6. 6) \end{aligned}$$

*Note que este resultado é idêntico ao obtido no Cap.2 com o uso da RHA para a densidade de energia [Eqs.(2.50) e (2.51)].*

Utilizando então os parâmetros apresentados na Ref.[2] para a RHA, dados por  $g_s^2 = 62.89$ ,  $g_v^2 = 79.78$ ,  $m_s = 550$  MeV,  $m_v = 783$  MeV e  $m = 939$  MeV, encontramos uma energia de ligação para a matéria de nêutrons da ordem de 0.4 MeV, em torno de  $k_F = 1.63$  fm<sup>-1</sup> [veja Fig.(6.1)].

A segunda solução para a Eq.(6.2) é dada por

$$\frac{d\Delta_s}{d\Omega^*} = 2 \frac{g_s^2}{m_s^2} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{E^{*3}}(k) \quad . \quad (6.7)$$

Note que os resultados desta equação são independentes dos parâmetros do modelo - a massa efetiva do nucleon  $\Omega^*$  depende somente de  $m$  e  $k_F$ . A solução numérica da expressão acima dá como resultado uma massa efetiva *crescente* com relação à densidade nuclear [Fig.(6.3)]. Além disso, se substituirmos este resultado na equação para a densidade de energia com os mesmos parâmetros utilizados em RHA, encontraremos um novo ponto de saturação para a matéria de nêutrons em torno de  $k_F = 5$  fm<sup>-1</sup>. Este resultado corresponde a uma densidade aproximadamente 30 vezes maior do que a densidade normal da matéria de nêutrons, com uma energia de ligação da ordem de 153 MeV por nucleon [Fig.(6.2)]. Obviamente, estes valores são muito altos, e já estão fora dos limites de validade do modelo. Mas é preciso levar em conta que termos de troca não foram considerados na derivação da densidade de energia, e investigações preliminares feitas por Chin [1] mostram que a inclusão de termos de troca pode baixar a densidade de saturação da matéria, embora estas contribuições não tenham sido calculadas de uma maneira completamente consistente.

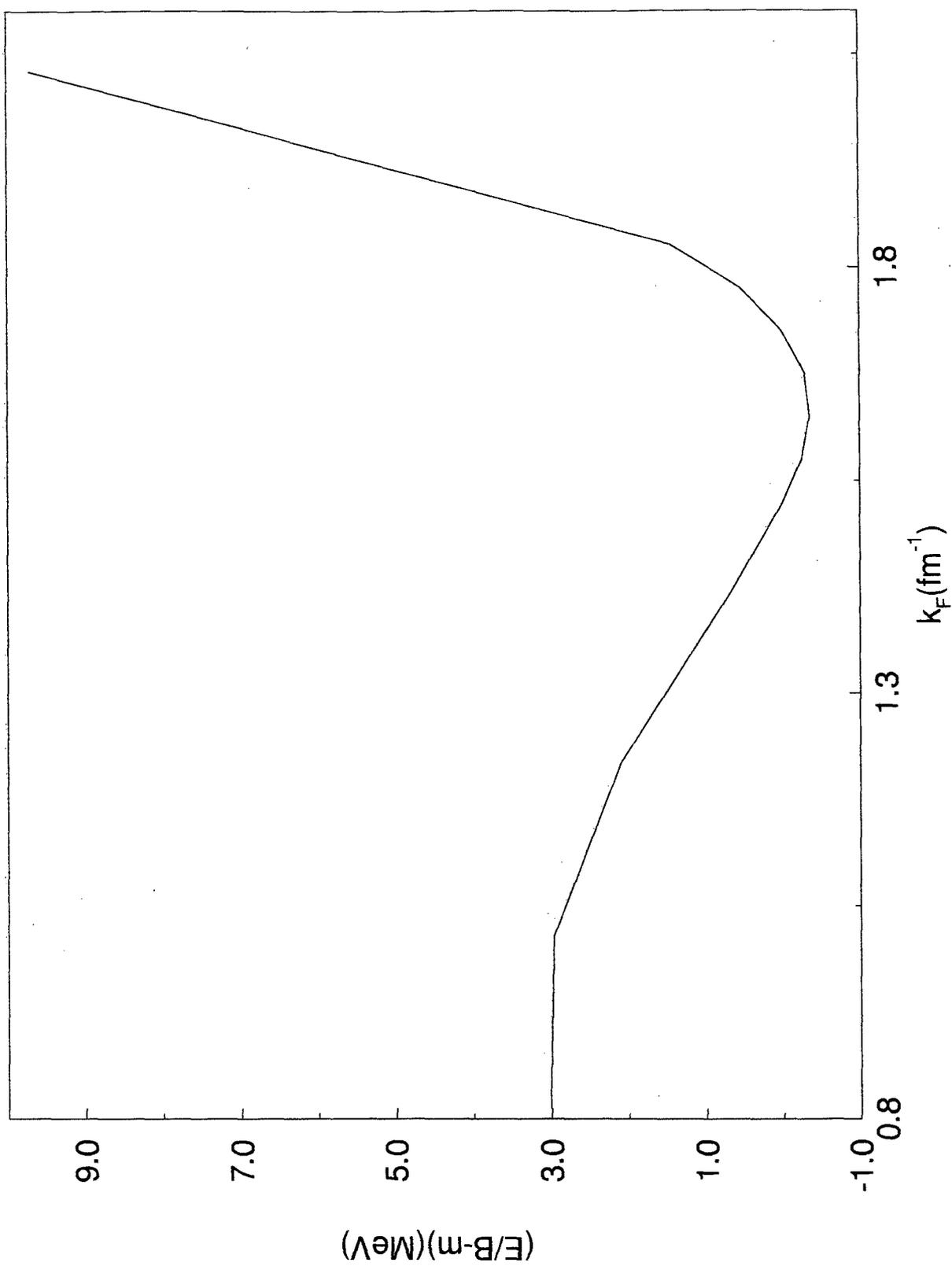


Figura 6.1: Curva de saturação para a matéria de nêutrons obtida a partir da primeira solução.

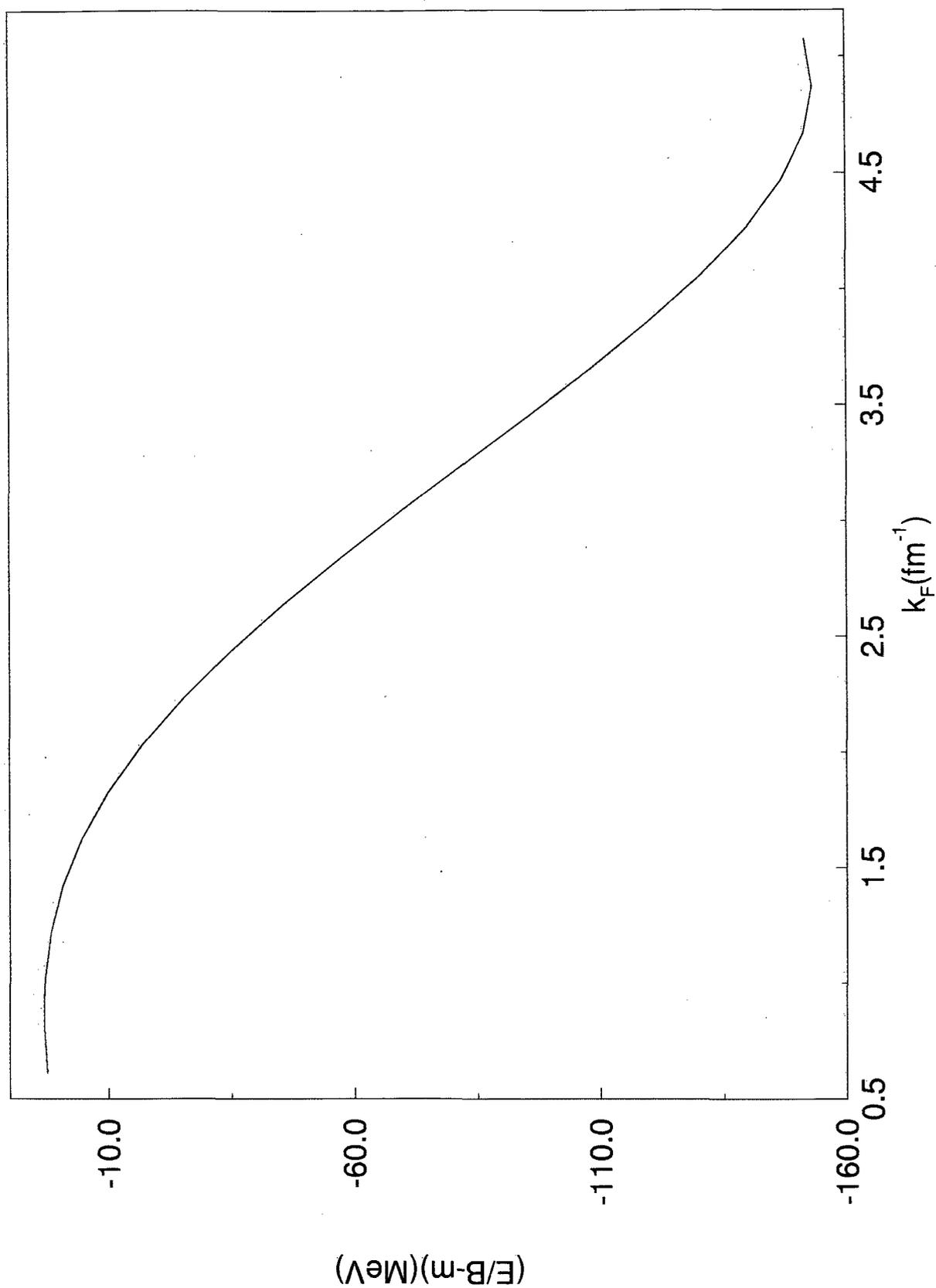


Figura 6.2: Curva de saturação para a matéria de nêutrons obtida a partir da segunda solução.

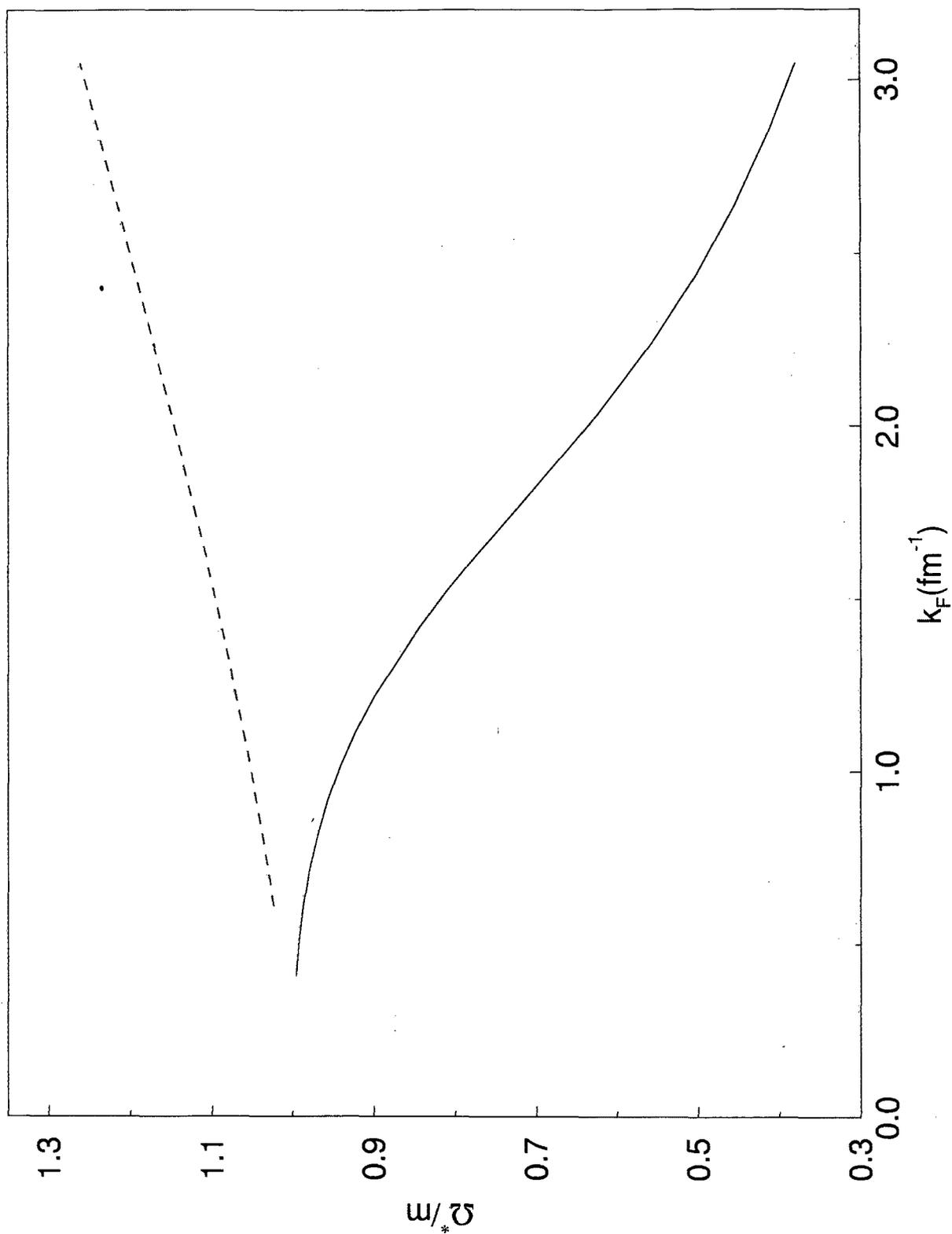


Figura 6.3: Curvas de massa. A linha cheia representa o resultado obtido para a primeira solução, e a linha tracejada para a segunda.

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

No decorrer deste trabalho, pudemos analisar as vantagens do uso da expansão  $\delta$  sobre outros métodos não perturbativos, e em especial sobre a RHA.

As aproximações não perturbativas usuais, como a RHA, envolvem uma soma infinita de termos de um determinado sub-grupo escolhido para levar em conta todas as ordens da constante de acoplamento. Este procedimento implica em um trabalho de renormalização também não perturbativo. Ao aplicarmos a RHA ao cálculo da auto-energia, onde foi feita uma soma infinita sobre todos os diagramas diretos de segunda ordem, esta característica pôde ser observada claramente, pois precisamos renormalizar os 4 termos divergentes que apareceram no decorrer dos cálculos.

Comparativamente, a expansão  $\delta$  se mostrou um método mais eficiente e mais econômico do que a RHA, devido ao fato da seleção dos diagramas utilizados nesta aproximação ser feita de maneira perturbativa, o que torna possível lidarmos com um número reduzido destes, facilitando o processo de renormalização. Assim, ao invés de somarmos um número infinito de diagramas diretos na avaliação da auto-energia, fizemos uma aproximação onde foram considerados somente os termos até  $O(\delta^2)$ , o que reduziu o número de diagramas diretos a

dois, sendo que somente um destes era divergente. Devido a esta característica da expansão  $\delta$ , pudemos ir além dos resultados obtidos com a RHA e incluir na auto-energia bariônica também os diagramas de troca.

Apesar da inclusão destes termos no cálculo da auto-energia ter sido facilitada pelo uso da expansão  $\delta$ , não estendemos essa aplicação à densidade de energia. Isso se deve ao fato de que, neste caso, embora o cálculo envolvendo termos de troca divergentes não seja mais complicado do que a expansão usual em *loops*, ainda assim permanece como uma tarefa difícil, embora factível. Por isso, somente termos diretos foram levados em consideração na derivação da densidade de energia.

Assim, após calcularmos a densidade de energia e efetuarmos a aplicação do PMS, encontramos uma equação apresentando duas soluções possíveis para esta quantidade. A primeira solução corresponde ao resultado obtido através da RHA, e mostramos dessa maneira que é possível reproduzir os mesmos resultados encontrados através do uso de métodos não perturbativos convencionais ainda nas ordens mais baixas de  $\delta$ . A segunda solução representa um estado altamente denso, que só aparece se levarmos em consideração os termos provenientes do vácuo. Esta solução corresponde a uma densidade aproximadamente 30 vezes maior do que a densidade normal da matéria de nêutrons, uma região de energia em que o modelo efetivo perde sua validade, e os graus de liberdade relevantes são os quarks e glúons. A motivação para a análise dessa segunda solução se deve ao fato que Chin [1] mostrou que a inclusão de termos de troca pode baixar a densidade em que a saturação é alcançada.

A expansão  $\delta$  também é um método que oferece menor esforço computacional numérico, por não envolver procedimentos auto-consistentes.

Um próximo passo, dando continuidade a esse trabalho, seria o cálculo da pressão, que juntamente com a densidade de energia, nos fornece a equação de estado para as estrelas de nêutrons. Devemos também incluir em nossos cálculos os diagramas de troca, que foram ignorados na derivação da densidade de energia.

A expectativa na continuidade do estudo da segunda solução é que a inclusão de termos de troca baixe o ponto de saturação da matéria para cerca de 10 vezes a densidade normal, e neste caso teríamos um comportamento intermediário entre a descrição obtida através da RHA e a segunda solução encontrada utilizando-se somente termos diretos. Esse resultado então apareceria como candidato à explicação de conhecidos objetos estelares estáveis, compostos por nêutrons, com densidades muito superiores às encontradas ordinariamente em estrelas de nêutrons.

# Apendice A

## DERIVAÇÃO DAS REGRAS DE FEYNMAN PARA UM MODELO SIMPLES INTERPOLADO

Considerando somente campos escalares e fermiônicos, podemos escrever a densidade lagrangeana de uma modelo simples com interações do tipo Yukawa como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i \not{\partial} - m]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) + g_s\bar{\psi}\phi\psi \quad . \quad (\text{A. 1})$$

Seguindo a prescrição para a interpolação apresentada na Introdução, definimos uma densidade lagrangeana livre arbitrária do tipo

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}[i \not{\partial} - \Omega]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2\phi^2) \quad , \quad (\text{A. 2})$$

onde  $\Omega = m + \mu$ , e a densidade lagrangeana interpolada então fica:

$$\mathcal{L}_\delta = \bar{\psi}[i \not{\partial} - \Omega]\psi + \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2] + \delta[g_s \phi + \mu] \bar{\psi} \psi \quad . \quad (\text{A. 3})$$

O gerador funcional para uma lagrangeana desta forma é do tipo

$$W[J, \sigma, \bar{\sigma}] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_\delta + J\phi + \sigma\bar{\psi} + \bar{\sigma}\psi) \right\} \quad , \quad (\text{A. 4})$$

onde  $J(x)$ ,  $\sigma(x)$  e  $\bar{\sigma}(x)$  são as fontes externas associadas com a criação e aniquilação de partículas escalares ( $\phi$ ) e fermiônicas ( $\bar{\psi}$  e  $\psi$ ), respectivamente, e  $N$  é tal que  $W[0] = 1$ .

Primeiramente, iremos considerar o campo escalar se propagando sem sofrer interações.

O gerador funcional escrito no espaço euclidean que descreve esta situação é:

$$W_0^s[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int d^4\bar{x} \frac{1}{2} (\bar{\partial}_\mu \phi \bar{\partial}_\mu \phi - m_s^2 \phi^2) + J\phi \right\} \quad , \quad (\text{A. 5})$$

onde  $\bar{x} = (ix_0, \mathbf{x}_i)$ .

Usando a quadridivergência de Gauss

$$\int d^4x \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) = \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \int d^4x \phi \square \phi = 0 \quad , \quad (\text{A. 6})$$

temos que:

$$\int d^4\bar{x} \bar{\partial}_\mu \phi \bar{\partial}_\mu \phi = - \int d^4\bar{x} \phi \square_E \phi \quad , \quad (\text{A. 7})$$

onde  $\square_E = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$  é o d'Alambertiano no espaço de Euclides.

Reescrevendo então a Eq.(A.5), obtemos:

$$W_0^s[J] = N \int \mathcal{D}\phi(\bar{x}) \int \mathcal{D}\phi(\bar{x}') \exp \left\{ \int d^4\bar{x}' \int d^4\bar{x} \left[ \frac{1}{2} \phi(\bar{x}') (\bar{\partial}_{\mu'} \bar{\partial}_\mu - m_s^2) \phi(\bar{x}) \delta(\bar{x} - \bar{x}') \right] \right\}$$

$$+ \int d^4\bar{x} J(\bar{x})\phi(\bar{x}) \} . \quad (\text{A. 8})$$

Usando novamente a quadridivergência de Gauss

$$\int d^4\bar{x} \bar{\partial}_\mu [\phi(\bar{x})\delta(\bar{x} - \bar{x}')] = 0 \quad , \quad (\text{A. 9})$$

temos que

$$\int d^4\bar{x} \bar{\partial}_\mu \phi(\bar{x})\delta(\bar{x} - \bar{x}') = - \int d^4\bar{x} \bar{\partial}_\mu \delta(\bar{x} - \bar{x}')\phi(\bar{x}) \quad . \quad (\text{A. 10})$$

Assim:

$$\begin{aligned} W_{0E}^s[J] &= N \int \mathcal{D}\phi(\bar{x}') \int \mathcal{D}\phi(\bar{x}) \exp \left\{ \int d^4\bar{x}' \int d^4\bar{x} \left[ -\frac{1}{2} \phi(\bar{x}')(\bar{\partial}_\mu' \bar{\partial}_\mu + m_s^2) \delta(\bar{x} - \bar{x}') \phi(\bar{x}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int d^4\bar{x} J(\bar{x}) \phi(\bar{x}) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

A expressão acima é análoga a uma do tipo

$$\int \mathcal{D}\phi(\bar{x}) \int \mathcal{D}\phi(\bar{x}') \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4\bar{x} \int d^4\bar{x}' \phi(\bar{x}') A(\bar{x}', \bar{x}) \phi(\bar{x}) + \int d^4\bar{x} \rho(\bar{x}) \phi(\bar{x}) \right\} \quad , \quad (\text{A. 12})$$

cuja solução é:

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr} \ln A\right) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4\bar{x} \int d^4\bar{x}' \rho(\bar{x}') A^{-1}(\bar{x}', \bar{x}) \rho(\bar{x}) \right\} \quad . \quad (\text{A. 13})$$

Então:

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = (\square_E + m_s^2)\delta(\bar{x} - \bar{x}') \quad , \quad (\text{A. 14})$$

$$\rho(\bar{x}) = J(\bar{x}) \quad (\text{A. 15})$$

e

$$W_0^s[J] = N \exp \frac{1}{2} \int d^4 \bar{x}' \int d^4 \bar{x} J(\bar{x}') A^{-1}(\bar{x}', \bar{x}) J(\bar{x}) \quad , \quad (\text{A. 16})$$

sendo  $N$  tal que  $W_0^s[0] = 1$ .

Definimos agora  $\Delta_F^E(\bar{x}' - \bar{x}) = A^{-1}(\bar{x}', \bar{x})$  como sendo o propagador de Feynman no espaço euclideano.

Para calcular  $A^{-1}$ , fazemos uma transformada de Fourier tomando a representação integral da função  $\delta$ . Assim:

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \exp[i\bar{p}(\bar{x} - \bar{x}')] (\bar{p}^2 + m_s^2) \quad , \quad (\text{A. 17})$$

e, desse modo, podemos escrever  $A^{-1}$  como:

$$A^{-1}(\bar{x}', \bar{x}) = \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \exp[i\bar{p}(\bar{x}' - \bar{x})] (\bar{p}^2 + m_s^2)^{-1} \quad , \quad (\text{A. 18})$$

ou

$$\Delta_F^E(\bar{x}' - \bar{x}) = \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \exp[i\bar{p}(\bar{x}' - \bar{x})] \tilde{\Delta}_F^E(\bar{p}) \quad , \quad (\text{A. 19})$$

onde

$$\tilde{\Delta}_F^E(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}^2 + m_s^2} \quad . \quad (\text{A. 20})$$

Voltando agora para o espaço de Minkowski:

$$W[J] = N \exp \left\{ \frac{-i}{2} \int d^4x' \int d^4x J(x') \Delta_F(x' - x) J(x) \right\} , \quad (\text{A. 21})$$

$$\Delta_F(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x' - x)] \tilde{\Delta}_F(p) , \quad (\text{A. 22})$$

sendo que

$$\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{1}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} \quad (\text{A. 23})$$

é definido como o propagador de Feynman para campos escalares no espaço de Minkowski.

Agora que já calculamos o gerador funcional para o campos escalar livre, podemos avaliar as funções de Green correspondentes.

Usando

$$\left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \right|_{J=0} = i^n \mathcal{G}^{(n)}(x_1 \dots x_n) , \quad (\text{A. 24})$$

temos, para  $n = 2$ :

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) = i \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (\text{A. 25})$$

Aplicando uma transformada de Fourier às funções de Green, obtemos para função de 2 pontos:

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(2)}(p_1, p_2) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \exp[i(p_1 x_1 + p_2 x_2)] \mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2) . \quad (\text{A. 26})$$

Então:

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} = i\tilde{\Delta}_F(p) \quad . \quad (\text{A. 27})$$

Podemos representar este resultado diagramaticamente, usando uma linha tracejada para simbolizar  $i\tilde{\Delta}_F(p)$ . Assim:

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(2)}(p_1, p_2) = i\tilde{\Delta}_F(p) :$$

Consideraremos agora o caso em que o campo que se propaga é um campo fermiônico livre. O gerador funcional neste caso fica:

$$W_0^f[\sigma, \bar{\sigma}] = N \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp i \int d^4x [\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - \Omega)\psi(x) + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi] \quad , \quad (\text{A. 28})$$

onde  $\sigma(x)$  e  $\bar{\sigma}(x)$  são variáveis de Grassman que representam fontes externas, e  $N$  é tal que  $W_0^f[0, 0] = 1$ .

A integral acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$N \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int d^4x' \int d^4x \bar{\psi}(x') B(x', x) \psi(x) + i \int d^4x [\bar{\psi}(x)\sigma(x) + \bar{\sigma}(x)\psi(x)] \right\} \quad , \quad (\text{A. 29})$$

com  $B(x', x) = (-i\gamma^\mu\partial_\mu - \Omega)\delta^4(x' - x)$ .

O resultado desta expressão é dado por

$$\exp -i \int d^4x' \int d^4x \bar{\sigma}(x') B^{-1}(x' - x) \sigma(x) \quad . \quad (\text{A. 30})$$

Chamando agora  $S_F(x', x) = B^{-1}(x', x)$ , temos o propagador para o campo de Dirac.

Podemos calcular  $B^{-1}(x', x)$  aplicando uma transformada de Fourier utilizando a expressão integral para a função  $\delta$  de Dirac. Então:

$$B(x', x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x' - x)](\not{p} - \Omega) \quad , \quad (\text{A. 31})$$

e

$$B^{-1}(x', x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x' - x)] \frac{(\not{p} + \Omega)}{p^2 - \Omega^2} \quad . \quad (\text{A. 32})$$

Assim

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[-ip(x' - x)] \tilde{S}_F(p) \quad , \quad (\text{A. 33})$$

onde

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{(\not{p} + \Omega)}{p^2 - \Omega^2 + i\epsilon} = (\not{p} - \Omega + i\epsilon)^{-1} \quad (\text{A. 34})$$

As funções de Green estão relacionadas ao gerador funcional por

$$i^{2n} \mathcal{G}^{(2n)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{\delta^{(2n)} W_0^f[\sigma, \bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(x_1) \dots \delta \bar{\sigma}(x_n) \delta \sigma(y_1) \dots \delta \sigma(y_n)} \Big|_{\sigma = \bar{\sigma} = 0} \quad , \quad (\text{A. 35})$$

e  $\mathcal{G}^{(2n)}$  é antisimétrica nos índices  $x_i$  e  $y_i$  (o que é apropriado para os férmions). Portanto, para função de 2 pontos temos:

$$\mathcal{G}^{(2)}(x', x) = i S_F(x' - x) \quad . \quad (\text{A. 36})$$

Aplicando novamente uma transformada de Fourier às funções de Green, obtemos:

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(2)}(p', p) = \frac{i}{\not{p} - \Omega + i\epsilon} = i\tilde{S}_F(p) \quad , \quad (\text{A. 37})$$

e então a cada fator  $i(\not{p} - \Omega + i\epsilon)^{-1}$  associamos uma linha com momento  $p$ .

Até o momento consideramos somente os termos da lagrangeana livre, e pudemos assim obter o gerador funcional de maneira exata. No caso de campos interagentes, o melhor que podemos fazer é desenvolver uma série perturbativa para  $W[J, \sigma, \bar{\sigma}]$ . Assim, para campos escalares e fermiônicos que interagem entre si, temos:

$$W[J, \sigma, \bar{\sigma}] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \quad . \quad (\text{A. 38})$$

Separando agora  $\mathcal{L}$  em uma parte livre e uma parte que contém a interação, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \exp i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) &= \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_i(\phi, \psi, \bar{\psi}) \right) \\ &\times \exp \left( i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \right) \quad . \quad (\text{A. 39}) \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) = i\phi(x) \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \quad , \quad (\text{A. 40})$$

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)} \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) = i\psi(x) \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \quad , \quad (\text{A. 41})$$

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) = -i\bar{\psi}(x) \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \quad , \quad (\text{A. 42})$$

podemos então expandir

$$\begin{aligned}
\exp i \int d^4x \mathcal{L}_i(\phi, \psi, \bar{\psi}) &= \exp i \int d^4x \mathcal{L}_i \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x)}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)}, \frac{i\delta}{\delta \sigma(x)} \right) \\
&= 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_i \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x)}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)}, \frac{i\delta}{\delta \sigma(x)} \right) + \frac{i^2}{2!} \int \int d^4x d^4y \mathcal{L}_i \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x)}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)}, \frac{i\delta}{\delta \sigma(x)} \right) \\
&\quad \times \mathcal{L}_i \left( \frac{-i\delta}{\delta J(y)}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\sigma}(y)}, \frac{i\delta}{\delta \sigma(y)} \right) + \dots \quad (\text{A. 43})
\end{aligned}$$

Assim, tomando o resultado da expansão em primeira ordem:

$$\begin{aligned}
W[J, \sigma, \bar{\sigma}] &= N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp i \int d^4x \mathcal{L}_i \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x)}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)}, \frac{i\delta}{\delta \sigma(x)} \right) \\
&\quad \times \left( \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J(\phi) + \bar{\psi}\sigma + \bar{\sigma}\psi) \right) \\
&= \exp i \int d^4x \mathcal{L}_i \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x)}, \frac{-i\delta}{\delta \bar{\sigma}(x)}, \frac{i\delta}{\delta \sigma(x)} \right) W_0[J, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (\text{A. 44})
\end{aligned}$$

Para uma interação do tipo  $\mathcal{L}_i = \delta g_s \phi \bar{\psi} \psi$ , temos:

$$\begin{aligned}
W[J, \sigma, \bar{\sigma}] &= W_0[J, \sigma, \bar{\sigma}] + \delta g_s \int d^4x \int \int \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\
&\quad \times i\Delta_F(x - x_1) J(x_1) \bar{\sigma}(x_2) iS_F(x_2 - x) iS_F(x - x_3) \sigma(x_3) W_0[J, \sigma, \bar{\sigma}] \quad (\text{A. 45})
\end{aligned}$$

e as funções de Green podem ser escritas como:

$$i^{(3n)} \mathcal{G}^{(3n)} = \frac{\delta^{(3n)} W[J, \sigma, \bar{\sigma}]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_{1n}) \delta \bar{\sigma}(x_2) \dots \delta \bar{\sigma}(x_{2n}) \delta \sigma(x_3) \dots \delta \sigma(x_{3n})} \Big|_{J=\sigma=\bar{\sigma}=0} \quad (\text{A. 46})$$

Assim, para  $n = 1$ , obtemos:

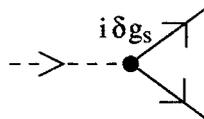
$$\mathcal{G}^{(3)} = i\delta g_s \int d^4x i\Delta_F(x - x_1) iS_F(x_2 - x) iS_F(x - x_3) \quad , \quad (\text{A. 47})$$



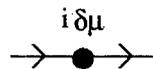
$$\frac{i}{\not{p} - m + i \epsilon} : \begin{array}{c} p \\ \rightarrow \end{array}$$

- Para os vértices:

– A cada vértice de Yukawa associamos um fator  $i\delta g_s$ :



– A cada vértice bilinear fermiônico associamos um fator  $i\delta\mu$ :



- Temos também outra regra, que diz que cada *loop* fermiônico contribui com  $-1 \times \text{tr}\{ \int d^4q / (2\pi)^4 \}$ , onde  $q$  é o momento interno do *loop* e o traço é tomado sobre os espaços de Dirac e de isospin.

## Apendice B

# INTEGRAIS EM $2\omega$ DIMENSÕES, MÉTRICA E DEFINIÇÕES

### B.1 Integrais em $2\omega$ dimensões

- Elemento de volume em  $2\omega$  dimensões:

$$d^{2\omega}k_E = 2\omega \frac{\pi^\omega}{\Gamma(\omega + 1)} |k_E|^{2\omega-1} d|k_E| \quad . \quad (\text{B. 1})$$

- Funções Gama:

$$\Gamma(\epsilon) = \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \quad , \quad (\text{B. 2})$$

onde  $\gamma = 0,577$  é a constante de Euler-Mascheroni.

$$\Gamma(\epsilon - 1) \sim -(1 + \epsilon)\Gamma(\epsilon) \quad . \quad (\text{B. 3})$$

$$\Gamma(\epsilon - 2) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \Psi(3) \right] , \quad (\text{B. 4})$$

onde

$$\Psi(n + 1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma . \quad (\text{B. 5})$$

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{m-1}}{(t + a^2)^n} = \frac{1}{(a^2)^{m+n}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n - m)}{\Gamma(n)} . \quad (\text{B. 6})$$

• Integrais de Feynman em  $2\omega$  dimensões :

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(m^2 - p^2)^{A-\omega}} . \quad (\text{B. 7})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(l^2 + m^2 + 2l \cdot p)^A} = -\frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{p_\mu}{(m^2 - p^2)^{A-\omega}} . \quad (\text{B. 8})$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 + m^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \times \left[ p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(A - \omega)}{(m^2 - p^2)^{A-\omega}} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A - 1 - \omega)}{(m^2 - p^2)^{A-1-\omega}} \right] . \quad (\text{B. 9})$$

- Parametrização de Feynman:

$$\frac{1}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} \cdots D_k^{a_k}} = \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_k)} \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_1 \cdots dx_k \frac{\delta(1 - x_1 - \cdots - x_k) x_1^{a_1-1} \cdots x_k^{a_k-1}}{(D_1 x_1 + \cdots + D_k x_k)^{a_1 + \cdots + a_k}} \quad (\text{B. 10})$$

## B.2 Métrica e Definições

- Tensor Métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B. 11})$$

- Coordenadas contravariantes:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \quad (\text{B. 12})$$

- Coordenadas covariantes:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -x, -y, -z) = (t, -\mathbf{x}) \quad (\text{B. 13})$$

- Produto escalar:

$$A.B = A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A}.\mathbf{B} \quad . \quad (\text{B. 14})$$

- Derivadas:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad , \quad (\text{B. 15})$$

onde

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad . \quad (\text{B. 16})$$

- Quadri-divergência de Gauss:

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} - \vec{\nabla}.\mathbf{A} \quad . \quad (\text{B. 17})$$

### B.3 Matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{B. 18})$$

### B.4 Matrizes de Dirac

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad \gamma_\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \quad . \quad (\text{B. 19})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{B. 20})$$

onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  são as matrizes de Pauli, e

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{B. 21})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I \quad , \quad \gamma^\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu . \quad (\text{B. 22})$$

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad , \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3) . \quad (\text{B. 23})$$

# Bibliografia

- [1] S. S. Chin. *Ann. Phys.*, **108**:301, 1977.
- [2] B. D. Serot and J. D. Walecka. *Adv. Nucl. Phys.*, **16**:1, 1986.
- [3] C. M. Bender, K. A. Milton, M. Moshe, S. S. Pinsky, and L. M. Simmons Jr. *Phys. Rev. Letters*, **58**:2615, 1987.
- [4] A. Okopińska. *Phys. Rev. D*, **35**:1835, 1987.
- [5] A. Duncan and M. Moshe. *Phys. Letters B*, **215**:352, 1988.
- [6] S. K. Gandhi, H. F. Jones, and M. B. Pinto. *Nucl. Phys. B*, **359**:429, 1991.
- [7] G. Krein, D. P. Menezes, and M. B. Pinto. *Phys. Letters B*, **370**:5, 1996.
- [8] J. I. Kapusta. *Finite Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [9] J. D. Walecka. *Ann. Phys.*, **83**:491, 1974.
- [10] C. Bailin and A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory*. Institute of Physics Publishing, London, 1993.
- [11] T. P. Cheng and L. F. Li. *Elementary Particle Physics*. Oxford University Press Inc, New York, 1994.

- [12] P. Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*, volume 74 of *Lecture Note Series*. Allan M. Wylde, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981.
- [13] P. M. Stevenson. *Phys. Rev. D*, **23**:2916, 1981.
- [14] C. M. Bender, K. A. Milton, M. Moshe, S. S. Pinsky, and L. M. Simmons Jr. *Phys. Rev. D*, **37**:1472, 1988.
- [15] I. Buckley, A. Duncan, and H. F. Jones. *Phys. Rev. D*, **47**:2554, 1993.
- [16] F. Cooper and P. Roy. *Phys. Letters A*, **143**:202, 1990.
- [17] M. B. Pinto. *Phys. Rev. D*, **50**:7673, 1994.
- [18] D. Gromes. *Z. für Phys. C*, **71**:347, 1996.
- [19] S. K. Gandhi and A. J. McKane. *Nucl. Phys. B*, **419**:424, 1994.
- [20] S. K. Gandhi and M. B. Pinto. *Phys. Rev. D*, **49**:4528, 1994.
- [21] I. Buckley and H. F. Jones. *Phys. Rev. D*, **45**:654, 1992.
- [22] J. O. Akeyo, H. F. Jones, and C. S. Parker. *Phys. Rev. D*, **51**:1298, 1995.
- [23] G. Krein, R. S. Marques de Carvalho, D. P. Menezes, M. Nielsen, and M. B. Pinto. *Z. für Phys. A*, 1997.
- [24] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman. *Nucl. Phys. B*, **44**:189, 1972.
- [25] Bollini and Giambiagi. *Phys. Letters B*, **40**:566, 1972.