Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Existência e Estabilidade de "Solitons" de Sistemas Hamiltonianos de Dimensão Infinita

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Florianópolis
Agosto de 1998

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Existência e Estabilidade de "Solitons" de Sistemas Hamiltonianos de Dimensão Infinita

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Florianópolis

Agosto de 1998

Existência e Estabilidade de "Solitons" de Sistemas Hamiltonianos de Dimensão Infinita

por

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Esta Dissertação foi julgada para obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

....

Celso Melchiades Doria

Coordenador

Comissão Examinadora

....

Prof. Dr. Felipe Linares (IMPA)

....

Prof. Dr. Eduardo Arbieto A. (UFSC Orientador)

....

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira (UFSC)

....

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

Florianópolis, 13 de Agosto de 1998

A meus pais Maglorio e Susana. A minha esposa Filomena e a minha filhinha Daiana.

Agradecimentos

À CAPES pelo suporte econômico durante a realização deste trabalho. Ao Prof. Eduardo Arbieto Alarcón pela sua orientação e amizade no decorrer da elaboração do presente trabalho. Aos Professores Cesar Camacho, pela motivação em fazer o mestrado e ao professor J.M. Pereira pela ajuda na elaboração da versão final. Aos companheiros do mestrado, pela sua amizade. Aos meus amigos Marcos Calçada, Fátima Barbosa e Felix Quispe, por seu apoio e comunicação permanente. A todos aqueles que contribuiram de alguma forma na conclusão deste trabalho. Porém, meu agradecimento todo especial é para minha família pelo apoio moral na distância.

Florianópolis, 13 de Agosto de 1998

Sumário

Notações

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial_x}$; $\partial_t = \frac{\partial}{\partial_t}$

$Y \hookrightarrow X$: o conjunto (espaço) Y esta imerso denso e continuamente em X

$\mathcal{B}(Y, X)$: o espaço dos operadores limitados de Y em X.

$\mathcal{B}(X)$: o espaço dos operadores limitados de X em X.

$\rho(A)$: o conjunto resolvente do operador A

$\sigma(A)$: o conjunto espectral do operador A

$\sigma_e(A)$: o espectro essencial do operador A

$\sigma_d(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$: O espectro discreto do operador A

$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix\xi} dx$: Transformada de Fourier.

$\check{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{ix\xi} dx$: Inversa da Transformada de Fourier.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:espaço de Schwartz em $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$: O dual do espaço de Schwartz em $\mathbb{R}^n$.

$H^s(\mathbb{R}^n) = L^2_s(\mathbb{R}^n)$: espaço de Sobolev de ordem s com base em $L^2(\mathbb{R}^n)$

$C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$: espaço das funções f: $\mathbb{R}^n \to C($ ou$\mathbb{R})$ de classe C^k que satisfazen

$\lim_{|x|\to\infty} |\partial^\alpha f(x)| = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq k$.

$H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s'}(\mathbb{R}^n)$: produto cartesiano dos espaços de Sobolev de ordem s, s'

$\|\cdot\|_{s \times s'} = \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s'}(\mathbb{R}^n)} = (\|\cdot\|_s^2 + \|\cdot\|_{s'}^2)^{\frac{1}{2}}$: norma de $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s'}(\mathbb{R}^n)$.

$$C_{s,n} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos uma teoria de existência e estabilidade no sentido orbital para soluções do tipo ondas solitárias (solitons) de sistemas hamiltonianos de dimensão infinita da forma

$$\frac{du}{dt} = J\,E'(u),$$

onde a função $u\colon t \to u(t)$ tem imagem num espaço de Hilbert X, J é um operador linear fechado, densamente definido no dual de X, com valores em X e a funcional não linear E é o hamiltoniano do sistema.

Consideramos aplicações à equação de ondas não linear, a equações do tipo KdV e a sistemas dispersivos não lineares incluindo o sistema Gear-Grimshaw.

Abstract

In this work we develop a theory of existence and orbital stability of solitary wave solutions (solitons) of infinite dimensional Hamiltonian systems of the form

$$\frac{du}{dt} = J\,E'(u),$$

where the function $u\colon t \to u(t)$ takes values in a Hilbert space X, J is a closed linear operator from X^* to X with dense domain in X^*, and the nonlinear functional E is the Hamiltonian of the system.

We consider applications to the nonlinear wave equation, to equations of KdV type and to nonlinear dispersive systems including the Gear-Grimshaw system.

Introdução

A primeira observação de uma onda solitária foi feita por John Scott Russell em agosto de 1834, no canal de navegação Edinburh-Glasgow, na Escócia. Este fato levou Russell a desenvolver alguns experimentos em laboratório para produzir ondas solitárias. O resultado deste trabalho foi registrado em 1844 e publicado em 1845 num artigo extenso, onde o termo *onda solitária* foi introduzido para se referir a uma onda que se propaga sem mudar sua forma e velocidade. Russell, com seu trabalho em laboratório conseguiu empiricamente resultados relevantes, entre eles, a fórmula para velocidade c da onda solitária

$$c = g(h + a) \tag{1}$$

onde a é a amplitude da onda, h a profundidade da água não perturbada e g a aceleração da gravidade. Esta surpreendente descoberta posteriormente foi colocada numa base científica sólida por Boussinesq (1871) e Rayleigh (1876). Estes autores, deduziram a partir das equações de movimento do fluído incompressível a fórmula (1) e mostraram que o perfil de onda $\xi(x,t)$ era dado por

$$\xi(x,t) = a\, sech^2(b(x - ct)) \tag{2}$$

onde $b^{-2} = 4h^2(h+a)/3a$ para qualquer $a > 0$, sendo $a/h << 1$. Entretanto, a dedução de uma equação simples para $\xi(x,t)$, tendo (2) como solução foi feita por Korteweg e de Vries em 1895. Esta equação é conhecida hoje como a *equação de Korteweg-de Vries (KdV)*. Escolhendo coordenadas apropriadas esta equação pode ser escrita na forma

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

a qual possui uma família de ondas solitárias $u_c(x,t) = \phi_c(x-ct)$, onde

$$\phi_c(x) = 3c\, sech^2(\frac{\sqrt{c}x}{2})$$

sendo c uma constante positiva.

Apesar disso, durante muito tempo pouca atenção foi dada à onda solitária, sendo esta situação mudada completamente a partir de 1960 com o trabalho de Gardner e Morikawa. Estes autores obtiveram a equação de Korteweg-de Vries como um modelo de propagação de ondas em magneto-hidrodinâmica. Outro trabalho que merece destaque é o de Zabusky e Kruskal (1965), no qual foi provado que ondas solitárias da KdV preservavam sua forma após interação. Isto levou-os a denominarem tais soluções de *solitons*.

Após esta redescoberta da onda solitária, muitos sistemas e equações que admitem este tipo de solução foram descobertos em várias áreas da Física além de hidrodinâmica e partículas elementares.

Uma vez tendo ondas solitárias, um tipo de problema que pode ser considerado é o de descrever o comportamento de soluções do modelo em questão quando as perturbações são consideradas suficientemente "próximas" da onda solitária. Esta questão nos leva ao conceito de ***estabilidade orbital*** que estudaremos neste trabalho.

A formulação precisa e a prova da estabilidade de ondas solitárias para a equação da Korteweg-de Vries foi feita por Benjamin (1972)[6] e Bona (1975)[11]. Desde então contribuições importantes para a teoria de estabilidade de ondas solitárias tem surgido, como por exemplo, os trabalhos de Cazenave-Lions [16], Grillakis-Shatah-Strauss [21], Bona-Souganidis-Strauss [13], M. Weinstein [38], J. Albert e Bona [1], R. L. Pego e M. Weinstein [33], entre outros.

Neste trabalho, seguindo o artigo de Grillakis-Shatah-Strauss [21], fazemos uma apresentação da teoria de estabilidade de ondas solitárias (solitons) para sistemas hamiltonianos da forma

$$\frac{du}{dt} = JE'(u)$$

que são localmente bem postos no espaço de Hilbert X.

No capítulo 3 aplicamos a teoria à equação de ondas não linear [seção 3.2] e, mediante modificações apropriadas nas condições de Grillakis-Shatah-Strauss, apresentamos aplicações a equações do tipo KdV [seções 3.3 e 3.4] e a outros modelos dispersivos não lineares [seções 3.5 e 3.6]. Para a existência de solitons usamos resultados do trabalho de H. Berestycki e P.L. Lions [9] e um lema provado pelo autor [lema 3.1.2]. Finalmente, na seção 3.7 fazemos uma breve discussão da existência e estabilidade de ondas solitárias multidimensionais para a equação de Benjamin-Bona-Mahony, onde para a existência utilizamos a teoria de compacidade concentrada de P.L. Lions.

Capítulo 1

Resultados Básicos

1.1 Operadores Lineares em Espaços de Hilbert

Definição 1.1.1 (Identifição Canônica). Sejam X espaço de Hilbert real com produto interno $(.,.)_X$, e sejaX^* o seu dual. O *isomorfismo natural* $G\colon X \to X^*$, é definido por

$$< Gu, v >_{X^*} = (u, v)_X, \quad \forall u, v \in X$$

onde $< .,. >_{X^*}$ denota a dualidade entre X e X^*. Usaremos G de maneira explícita e identificaremos X com X^{**}(bidual) de maneira natural.

Quando nos referirmos ao adjunto de um operador linear este será em relação a $< .,. >_{X^*}$ e não $(.,.)_X$ (usando analogia com o teorema de Ritz se $f \in X^*$ e $x \in X$ então escreveremos $f(x) =< f, x >_{X^*}$).

Definição 1.1.2 (Operador linear Fechado). Sejam Dom (A) um subespaço do espaço de Hilbert H_1 e $A\colon \text{Dom}(A) \to H_2$ é um operador linear no espaço de Hilbert H_2. A é chamado *fechado* se o gráfico de A, $G(A) = \{(x, Ax)\colon x \in \text{Dom}(A)\}$ é um subespaço fechado de $H_1 \times H_2$.

Definição 1.1.3 (Operador densamente definido). Sejam X, Y dois espaços vetoriais normados e seja $A\colon \text{Dom}(A) \subseteq X \to Y$ um operador linear. Se $\overline{\text{Dom}(A)} = X$ então diz-se que A é um *operador densamente definido* em X.

Definição 1.1.4 (Operador linear adjunto e auto-adjunto). Sejam X, Y espaços de Hilbert e sejam $A: X \to Y$ e $B: Y^* \to X^*$ operadores lineares. A e B são ditos adjuntos um do outro se

$$< v, Au >_{Y^*} = < Bv, u >_{X^*}, \quad u \in \mathrm{Dom}\,(A), \quad v \in \mathrm{Dom}\,(B). \qquad (1.1)$$

Para cada operador $A: X \to Y$, existem geralmente muitos operadores de Y^* a X^*, que são adjuntos de A. Mas, se A é densamente definido, então existe um único operador máximal A^* adjunto de A. Isto significa que A^* é adjunto de A e nenhum outro adjunto B de A é uma restrição de A^*. O operador A^* é chamado *adjunto* de A.
No caso de $X = Y$ e $A = A^*$ dizemos que A é *auto-adjunto.*

Definição 1.1.5 (Operador Unitário). Seja X um espaço de Hilbert. Um operador $A: X \to X$ é unitário se A é sobre e para cada $u \in X$, tem-se que $\|A\,u\| = \|u\|$

Definição 1.1.6 (Operador Normal). Seja X um espaço de Hilbert. $A \in \mathcal{B}(X)$ é *normal* se, e só se,

$$AA^* = A^*A \qquad (1.2)$$

Definição 1.1.7 (Operador Simétrico). Seja X um espaço de Hilbert com, produto interno $(,)_X$. Um operador $A: \mathrm{Dom}\,(A) \to X$ Hilbert é *simétrico* se, e só se, $(A\,u, v)_X = (\,u, A\,v)_X$, para $u,\ v \in \mathrm{Dom}\,(A)$.

Definição 1.1.8 (Operador Linear Anti-simétrico). Um operador linear fechado $A: \mathrm{Dom}\,(A) \subset X^* \to X$, densamente definido é chamado *anti-simétrico* se

$$\langle Au, v\rangle_{X^*} = -\langle u, Av\rangle_{X^*} \qquad u,\ v \in \mathrm{Dom}\ (A)$$

Definição 1.1.9 (Operador não-negativo). Um operador $A: \mathrm{Dom}\, A \subset X \to X$ auto-adjunto é *não-negativo*, denotado por $A \geq 0$, se, $(A\,u,\ u)_X \geq 0$ para todo $u \in \mathrm{Dom}\,(A)$.

Definição 1.1.10 (Unitariamente Equivalente). Dados X e Y espaços de Hilbert e $A\colon \mathrm{Dom}\,(A) \subset X \to X$, $B\colon \mathrm{Dom}\,(B) \subset Y \to Y$ operadores lineares, Dizemos que A e B são *unitariamente equivalentes* se existe um ope-rador unitário $U\colon X \to Y$, chamado *operador entrelaçante*, tal que $U\,\mathrm{Dom}\,(A) = \mathrm{Dom}\,(B)$ e $B\,U\,v = U\,A\,v$, para todo $v \in \mathrm{Dom}\,(A)$.

Definição 1.1.11 (A-limitado). Sejam A e B operadores lineares no espaço de Hilbert X. Dizemos que B é A-limitado se $\mathrm{Dom}\,(B) \supseteq \mathrm{Dom}\,(A)$ e existem constantes não-negativas α e β tais que:

$$\|Bu\|_X \leq \alpha\,\|Au\|_X + \beta\,\|u\|_X\,, \qquad \forall\, u \in \mathrm{Dom}\ (A). \tag{1.3}$$

A A-cota de B é por definição

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \geq 0;\ \text{existe}\ \beta \geq 0\ \text{satisfazendo (1.3)}\} \tag{1.4}$$

Observação 1.1.1. Se B limitado e A um operador tal que Dom $A \subseteq$ Dom B, então B tem A-cota zero. Com efeito, como B é limitado, então $\|Bv\|_X \leq c\,\|v\|_X$, $\forall\, v \in$ Dom B; em particular $\forall v \in$ Dom A. Como

$$\|Bv\|_X \leq c\,\|v\|_X + b\,\|Av\|_X\,, \quad \forall b \geq 0, \tag{1.5}$$

então $0 = \inf\{b \geq 0,$ existe $c \geq 0$ satisfazendo (1.5) $\}$. Portanto B é A-limitado com A-cota 0.

Definição 1.1.12 (A-compacto). Sejam A e B operadores lineares como anteriormente. Dizemos que B é A-compacto se Dom $(B) \supseteq$ Dom (A) e, para qualquer sequência $(u_n)_{n\geq 1}$ em Dom (A) tal que $(u_n)_{n\geq 1}$ e $(Au_n)_{n\geq 1}$ sejam limitadas em X, existe subsequência $(u_{n_j})_{j\geq 1}$ tal que $(Bu_{n_j})_{j\geq 1}$ converge em X.

Teorema 1.1.13 (Kato-Rellich). *Sejam A um operador linear auto-adjunto no espaço de Hilbert X e $B\colon \mathrm{Dom}\,(A) \to X$ um operador linear simétrico A-limitado com A-cota $\alpha_0 < 1$. Então:*

i) *$A + B\colon \mathrm{Dom}\,(A) \to X$ é auto-adjunto.*

ii) *$A+B$ é essencialmente auto-adjunto em $V \subseteq \mathrm{Dom}(A)$ se e somente se A é essencialmente auto-adjunto em V.*

Prova. ver [37], pág 219. □

Teorema 1.1.14 (Weyl). *Sejam A e B operadores auto-adjuntos no espaço de Hilbert X, tais que:*

1) $\mathrm{Dom}\ A = \mathrm{Dom}\ B$ *como conjuntos.*

2) $A - B\colon \mathrm{Dom}(A) \to X$ *é um operador compacto.* ($\mathrm{Dom}(A)$ *com a norma do gráfico*).

Então $\sigma_e(A) = \sigma_e(B)$.

Prova. Ver [37], pág. 134. □

Definição 1.1.15 (Grupo unitário a um paramêtro). Seja X um espaço de Hilbert. Uma função $T\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ é um grupo unitário a um parâmetro se,

i) Se para cada $\eta \in X$, $t \longrightarrow T(t)\eta$ é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em X;

ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \qquad T(0) = I.$

iii) $T(t)$ é um operador unitário para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.16 (Gerador Infinitesimal). O operador $T'(0)$ de domínio

$$\mathrm{Dom}\,(T'(0)) = \{\eta \in X \mid \frac{1}{h}[T(h)\,\eta - \eta] \quad \text{possui limite quando} \quad h \to 0\}$$

definido por

$$\begin{aligned} T'(0)\eta &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}[T(0+h)\eta - T(0)\eta] \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}[T(h)\eta - \eta] \end{aligned}$$

é chamado o *gerador infinitesimal* do grupo T.

Em outras palavras, $\eta \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$ se, e somente se : $t \to T(t)\eta$ é uma função diferenciável em 0.

Exemplo. Seja A um operador auto-adjunto em X. Então: $\{\exp\ itA\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo unitário em X cujo gerador infinitesimal é iA.

Com efeito pelo teorema espectral (1.4.12) podemos supor $A = \mathcal{M}_g$ agindo num espaço $L^2_\mu(\mathcal{X})$. Então

$$\exp itM_g = \mathcal{M}_{\exp itg}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Como $|\exp itg| = 1$ q.t.p., segue-se que $\exp it\mathcal{M}_g$ é unitário.

A verificação de $ii)$ é imediata. Vamos provar $i)$. Se $\psi \in L^2_\mu(\mathcal{X})$ e $t \in \mathbb{R}$, então

$$|\exp itg(w)\psi(w)| = |\psi(w)|, \qquad q.t.p.$$

e, para cada w, t$\to \exp itg(w)\psi(w)$ é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Logo, pelo teorema da convergência dominada (1.2.14),

$$t \mapsto \exp itg\psi$$

é contínua de $\mathbb{R}$ em $L^2_\mu(\mathcal{X})$.

Finalmente vejamos o gerador infinitesimal do grupo $\{\exp it\mathcal{M}_g\}_{t\in\mathbb{R}}$. Seja B o gerador infinitesimal do grupo $\{\exp it\mathcal{M}_g\}_{t\in\mathbb{R}}$. Verifiquemos primeiro que $B \subseteq i\mathcal{M}_g$. Se $\psi \in \text{Dom}\,(B)$ então, para toda sequência $h_n \to 0$, temos que

$$h_n^{-1}[\exp ih_n\mathcal{M}_g - 1]\psi \to B\psi$$

em $L^2_\mu(\mathcal{X})$. Logo, existe uma subsequência $\{h'_n\}$ tal que

$$h_n'^{-1}[\exp ih'_ng(w) - 1]\psi(w) \to [B\psi](w), \qquad q.t.p.$$

Portanto, $ig(w)\psi(w) = [B\psi](w)$, q.t.p. .

Disto concluímos que $\psi \in \text{Dom}\ \mathcal{M}_g \quad e \quad i\mathcal{M}_g\psi = B\psi$. Isto é, $B \subseteq i\mathcal{M}_g$.

Para provar que $i\mathcal{M}_g \subseteq B$ é suficiente provar que $\text{Dom}\,(i\mathcal{M}_g) \subseteq \text{Dom}\,(B)$. Suponhamos que $\psi \in \text{Dom}\,(\mathcal{M}_g)$. Como

$$|\partial_t \exp itg(w)\psi(w)| = |g(w)\exp itg(w)\psi(w)| = |g(w)\psi(w)|,$$

então pelo teorema da diferenciação dominada, que $t \to \exp itg\psi$ é diferenciável de $\mathbb{R}$ em $L^2_\mu(\mathcal{X})$. Logo, $\psi \in \text{Dom}\,(B)$.

Proposição 1.1.17. *Seja $T'(0)$ o gerador infinitesimal do grupo unitário $\{T(s) : s \in \mathbb{R}\}$. Então* $\operatorname{Dom}(T'(0))$ *é invariante pelos operadores $T(s)$, e para cada $\eta \in \operatorname{Dom}(T'(0))$, a aplicação $s \longmapsto T(s)\eta$ é uma função diferenciável, satisfazendo a equação*

$$\frac{d}{dt}[T(s)\eta]|_{s=s_0} = T'(0)T(s_0)\eta. \tag{1.6}$$

Prova. Sejam $\eta \in \operatorname{Dom}(T'(0))$ e s_0, $h \in \mathbb{R}$. Então,

$$h^{-1}[T(h) - I]T(s_0)\eta = T(s_0)\{h^{-1}[T_h - I]\eta\} \longrightarrow T_{s_0}T'(0)\eta$$

quando $h \longrightarrow 0$, pois $T(t_0)$ é contínuo. Segue-se disto que $T(s_0)\eta \in \operatorname{Dom}(T'(0))$. Pela definição de $T'(0)$ temos que

$$h^{-1}[T(s_0 + h) - T(s_0)]\eta = h^{-1}[T_h - I]T(s_0)\eta \longrightarrow T'(0)T(s_0)\eta$$

quando $h \longrightarrow 0$

Logo (1.6) se verifica. □

Teorema 1.1.18 (Stone). *Seja $\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ um grupo unitário a um parâ-metro no espaço de Hilbert X, e seja $T'(0)$ seu gerador infinitesimal . Então $A = -iT'(0)$ é um operador auto-adjunto e $T(t) = \exp itA$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Prova. Ver [37], pág. 142. □

Lema 1.1.19. *Se o operador T verifica que $T^*(s)G = GT(-s)$ para $s \in \mathbb{R}$, e $T^*(s)\colon X^* \to X$. Então T é unitário.*

Prova. Como $T^*(s)G = GT(-s) \;\Rightarrow T^*(s)GT(s) = GT(-s)T(s)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow < [T^*(s)GT(s)]\phi, \phi > = < G\phi, \phi > \\
&\Rightarrow < GT(s)\phi, T(s)\phi > = (\phi, \phi) = \|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in X \\
&\Rightarrow (T(s)\phi, T(s)\phi) = \|\phi\|^2 \\
&\Rightarrow \|T(s)\phi\|^2 = \|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in X.
\end{aligned}$$

Portanto $T(s)$ é unitário. □

1.2 Distribuições Temperadas

Vejamos algumas definições e alguns espaços a serem usados.

Definição 1.2.1 (Espaços L^P). Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^1(\Omega)$ ao espaço das funções integráveis no sentido de Lebesgue sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$. Se $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; define-se

$$L^p(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.2.2 (Espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). É definido como o conjunto de funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ rapidamente decrescentes, i.é, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)| < \infty$ para qualquer par de multi-índices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (Z^+)^n$ $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in (Z^+)^n$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está naturalmente munido da família enumerável de semi-normas

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|. \tag{1.7}$$

Pode-se provar que assim ele é metrizável e completo (ou seja, é um espaço de Fréchet) com a métrica

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|} \frac{1}{2^{(|\alpha|+|\beta|)}} \frac{\|\varphi-\psi\|_{\alpha,\beta}}{(1+\|\varphi-\psi\|_{\alpha,\beta})} \tag{1.8}$$

e temos a seguinte definição de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

Definição 1.2.3. $\{\varphi_m\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \|\varphi_m - \varphi\|_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow \infty$, qualquer que seja o par de multi-índices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (Z^+)^n$ $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in (Z^+)^n$. Notação: $\varphi_w \xrightarrow{S} \varphi$.

Definição 1.2.4 (Distribuições Temperadas). O conjunto das distribuições - temperadas, $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, é o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ munido da topologia acima. Em outras palavras, $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f$ é linear e $\varphi_w \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow f(\varphi_w) \longrightarrow f(\varphi)$. Notação.

Como é usual, dada $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$, escrevemos quase sempre $< f, \varphi >$ em lugar de $f(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ está naturalmente munido da topologia fraca* (convergência ponto a ponto), o que nos dá a seguinte definição de convergência em $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.2.5. $\{f_m\} \subset \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ converge a $f \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se $< f_m, \varphi > \longrightarrow < f, \varphi >$ quando $m \longrightarrow \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Notação: $f_m \xrightarrow{\mathcal{S}^*} f$.

Definição 1.2.6 (A transformada de Fourier em $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$). Seja f $\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. A trasformada de Fourier de f é a função $\mathcal{F}f = \hat{f}$ definida por

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi.x} dx, \tag{1.9}$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$x.\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j \tag{1.10}$$

é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.7. *A transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}. \tag{1.11}$$

Em particular, a aplicação $f \longrightarrow \hat{f}$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Mas ainda, vale o lema de Riemann-Lebesgue i.é.,

$$\lim_{|\xi| \longrightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0. \tag{1.12}$$

Prova. Ver [23], pág. 303. □

Teorema 1.2.8. *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Este teorema permitenos definir a transformada inversa pela fórmula

$$\overset{\vee}{f}(x) = (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{i\xi x}d\xi, \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.2.9. *A transformada de Fourier*

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longrightarrow \widehat{F} = \mathcal{F}f$$

definida como a única extensão linear da transformada em $S(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um operador unitário. Em particular vale a seguinte propiedade importante

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

conhecida como a "identidade de Parseval".

Definição 1.2.10 (Produto convolução). Se f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a convolução de f e g é a função definida pela fórmula

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \tag{1.13}$$

Teorema 1.2.11 (Desigualdade de Young). *Sejam p, q, $r \in [1,\infty]$ tais que $p^{-1}+q^{-1} = 1+r^{-1}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$, então a convolução $f*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Prova. Ver [23], pág. 307, ou [19]. □

Teorema 1.2.12. *Sejam f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Prova. Ver [23], pág. 308. □

Teorema 1.2.13. *A transformada de Fourier*

$$\mathcal{F}\colon S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$$

deixa o $L^2(\mathbb{R}^n)$ invariante e

$$\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

é um operador linear unitário (ou seja, preserva norma e é sobre). O mesmo vale para a transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}$.

Teorema 1.2.14 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis e g uma função integrável sobre ω aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $f_n \overset{q.t.p.}{\longrightarrow} f$ e $|f_n| \le g$ em q.t.p. para todo n, então f é integrável e*

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

Prova. Ver [18], pág. 75. □

Teorema 1.2.15 (Teorema de Fubini). *Sejam Ω_1, Ω_2 subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad e \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dx \in L^1_x(\Omega_1).$$

Igualmente, para quase todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad e \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Teorema 1.2.16 (Desigualdade de Holder). *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \le p \le \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $f.g \in L^1$ e*

$$\int |fg| \le \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{1.14}$$

Prova. Ver [14], pág. 56. □

Exemplo. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Então $f^p \in L^2(\mathbb{R})$, *se* $p \in \mathbb{N}$. Com efeito, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} f^{2p} dx = \int_{\mathbb{R}} f^{2p-2} f^2 dx \leq \left\| f^{2p-2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left\| f^2 \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

Definição 1.2.17 (Espaço de Sobolev). Seja $s \in \mathbb{R}$. *Os espaços de Sobolev* (com base em $L^2(\mathbb{R}^n)$) em $\mathbb{R}^n$ são os seguintes subconjuntos de $S^*(\mathbb{R}^n)$:

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in S^*(\mathbb{R}^n) \colon (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle f, h \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

A norma correspondente é evidentemente

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Em particular, tem-se que $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, no sentido da indentificação com as distribuições.

Teorema 1.2.18. *Sejam* $s, s' \in \mathbb{R}$. *Então*

i) $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ *se* $s \geq s'$.

ii) $S(\mathbb{R})$ *é denso em* $H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, *no sentido que toda "função"* f *em* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *pode ser aproximada por uma sequência* $\{f_k\}_{k\geq 1}$ *em* $S(\mathbb{R}^n)$ *na norma de* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

iii) *Seja* $m \in \mathbb{N}$. *Então* $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ *se e só se* $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *para todo multi-índice* α *tal que* $|\alpha| \leq m$, *onde as derivadas são calculadas no sentido das distribuições. Além disso vale*

$$\|\partial^\alpha f\|_{m-|\alpha|} \leq \|f\|_m$$

iv) *Se* $s > n/2$ *então* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é uma álgebra de Banach com respeito ao produto de funções, isto é, se* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *então* $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$\|fg\|_s \leq C_{s,n} \|f\|_s \|g\|_s, \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Prova. Ver [23], pág. 337. □

É interessante e extremamente útil observar que se s é suficientemente grande então os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ são funções contínuas. Mais precisamente, vale o teorema de Sobolev:

Teorema 1.2.19 (Sobolev). *Seja* $s > n/2$. *Então* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está continuamente imerso em* $C_\infty(\mathbb{R}^n)$, *o espaço das funções contínuas de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{C}$ *que tendem a zero quando* $|x| \to \infty$ *e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C_{s,n} \|f\|_s$$

Prova. Ver [23], pág. 340. □

Outro resultado útil é a seguinte estimativa

Teorema 1.2.20. *Sejam* $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\|[J^t, f]g\|_0 \leq C\big(\|\nabla f\|_A \|g\|_{t-1} + \|\nabla f\|_{t-1} \|g\|_A \big), \quad \forall t \geq 1,$$

onde $\|g\|_A = \|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *e* $J^s = (1-\Delta)^{s/2}$.

Prova. Ver [24]. □

Finalmente mais um teorema que nos será útil é o seguinte.

Teorema 1.2.21. *Seja* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. *Então o operador* $(1-\Delta)^{s/2}$ *é uma isometria sobrejetiva de* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *onde*

$$\operatorname{Dom}((1-\Delta)^{s/2}) = H^s(\mathbb{R}^n)$$

$$(1-\Delta)^{s/2} = \mathcal{F}^{-1}((1+M_0)^{s/2})\mathcal{F}$$

$$e \quad \operatorname{Dom}(M_0) = \{ g \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi|^2 g \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$$

$$(M_0 g)(\xi) = |\xi|^2 g(\xi).$$

Teorema 1.2.22 (Rellich). *Sejam $s > 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e*

$$V = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \; u|_{\mathbb{R}^n - \Omega} = 0\}.$$

Então a inclusão $i \colon V \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é compacta.

1.3 Cálculo Diferencial em Espaços de Banach

Definição 1.3.1 (Derivada de Fréchet). Sejam X e Y espaços de Banach e $U \subset X$ um aberto. $f \colon U \to Y$ é *diferenciável, no sentido de Fréchet*, em $x_0 \in U$, se existe $L \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + \omega(h),$$

onde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\omega(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$. Nesse caso, denotamos $f'(x_0) = L$ a derivada de Fréchet de f em x_0.

Definição 1.3.2 (Derivada direcional). Sejam X um espaço de Banach, $f \colon U \subset X \to \mathbb{R}$, U aberto e $x_0 \in U$. A *derivada direcional* de f, na direção $h \in X$ em x_0 é definido por

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\Big[f(x_0 + t\,h) - f(x_0)\Big], \quad \text{se existe este limite em } X$$

Definição 1.3.3 (Derivada de Gâteaux). Sejam X, um espaço de Banach, $f \colon U \subset X \to \mathbb{R}$, U aberto e $x_0 \in U$. f é *diferenciável no sentido de Gâteaux* em x_0 se $\exists\, x^* \in X^*$ tal que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\Big[f(x_0 + t\,h) - f(x_0)\Big] = x^*(h),$$

para todo $h \in X$. Neste caso x^*, é denotado por $D\,f(x_0)$, e é chamado o *gradiente* ou *G-gradiente* de f em x_0.

Teorema 1.3.4 (Teorema da função implícita). *Sejam X, Y e Z três espaços de Banach, f uma aplicação de classe C^1 num subconjunto aberto U de $X \times Y$ em*

Z. Seja (x_0, y_0) um ponto de U tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e que a derivada parcial $D_2 f(x_0, y_0)$ seja um homeomorfismo linear de Y sobre Z. Então, existe uma vizinhança V_0 de x_0 em X tal que , para cada vizinhança conexa aberta V de x_0, contida em V_0, existe uma única aplicação contínua v de V em Y tal que $v(x_0) = y_0$, $(x, v(x)) \in U$ e $f(x, v(x)) = 0$, para cada $x \in V$. Além disso, v é continuamente diferenciável em V e sua derivada é dada por

$$v'(x) = -(D_2 f(x, v(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, u(x))).$$

Prova. Ver [17], pág. 265. □

1.4 Teoria Espectral para Operadores Auto-adjuntos

Antes de enunciar o teorema espectral que caracteriza os operadores auto-adjuntos, veremos algumas definições e fatos sobre o operador multiplicação

Definição 1.4.1 (O espectro). Sejam X um espaço de Hilbert e $A\colon \mathrm{Dom}\,(A) \to X$ um operador linear. O *espectro* de A é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que o operador $A - \lambda I\colon \mathrm{Dom}\,(A) \subset X \to X$ não possui uma inversa limitada. Denotaremos o espectro de A por $\sigma(A)$.

Definição 1.4.2 (Espectro essencial). Seja A um operador auto-adjunto, definido num espaço de Hilbert X. O espectro essencial de A é o subconjunto $\sigma_e(A)$ do espectro de A $(\sigma(A))$ formado pelos pontos que, ou são pontos de acumulação de $\sigma(A)$, ou são autovalores isolados de multiplicidade infinita.

Como todo ponto isolado de $\sigma(A)$ é um autovalor de A, então segue-se que $\sigma_d(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$, onde $\sigma_d(A)$ denota o *espectro discreto* de A.

Na sequência enunciaremos o teorema de separação do espectro de um operador fechado A.

Teorema 1.4.3 (Separação do espectro). *Sejam X um espaço de Banach, A : $\mathrm{Dom}\,(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com espectro $\sigma(A)$. Se o espectro de A é separado em duas partes σ_1 e σ_2 ($\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$), de tal forma que, σ_1 está contido no interior de uma curva simples, fechada Γ e σ_2 esta contido no exterior de Γ, então, existe uma decomposição de A associada a uma decomposição do espaço X, $X = M_1 \oplus M_2$ ($A|_{M_1} \subset M_1$, $A|_{M_2} \subset M_2$), tal que os espectros das restrições $A|_{M_1}$, $A|_{M_2}$ coincide com σ_1, σ_2, respectivamente e $A|_{M_1} \in \mathcal{B}(M_1)$.*

Prova. Ver [24], pág. 178 □

Observe que o espectro pode ser separado em mais de duas partes no sentido do teorema (1.4.3).

Definição 1.4.4 (O operador multiplicação $\mathcal{M}_g$). Seja (X,μ) um espaço de medida (separável e $\sigma-$finito) e seja g: $X \to \mathbf{C}$ uma função mensurável. Definimos o *operador de multiplicação por g* da seguinte forma

$$\mathrm{Dom}\ \mathcal{M}_g = \{\psi \in L^2_\mu(\mathcal{X}) : g\psi \in L^2_\mu(\mathcal{X})\}.$$

$$\mathcal{M}_g\psi = g.\psi, \quad \forall\psi \in \mathrm{Dom}\,\mathcal{M}_g$$

$\mathcal{M}_g$ é um operador linear densamente definido e fechado. Na sequência definiremos a transformada de Cayley que nos ajudará para verificar que o operador multiplicação é auto-adjunto.

Definição 1.4.5 (Tranformada de Cayley). Seja A um operador linear simétrico densamente definido no espaço de Hilbert X. A tranformada de Cayley de A é o operador $W = W(A)$ definido por

$$W\colon [A+i]\eta \mapsto [A-i]\eta, \qquad \eta \in \mathrm{Dom}\,(A);$$

$$Im[A+i] \to Im[A-i].$$

W(T) está bem definido e é um operador linear isométrico. Como A é simétrico,

$$\|[A \pm i]\eta\|_X^2 = \|A\eta\|_X^2 \pm \langle A\eta, i\eta\rangle \mp \langle i\eta, A\eta\rangle + \|\eta\|_X^2 = \|A\eta\|_X^2 + \|\eta\|_X \,.$$

Logo, $[A + i]\eta = 0$ implica $[A - i]\eta = 0$. W é portanto um operador linear bem definido. Como

$$\|W[A + i]\eta\|_X^2 = \|[A - i]\|_X^2 = \|[A + i]\eta\|_X^2 \,,$$

então W é isométrico.

Definição 1.4.6 (Isometria Parcial). Seja X um espaço de Hilbert. Um operador $A\colon \mathrm{Dom}(A) \subseteq X \to X$ tal que $\|Au\|_X = \|u\|_X$, para $u \in \mathrm{Dom}(A)$ é chamado uma isometria parcial.

Definição 1.4.7 (Essencialmente auto-adjunto). Um operador A definido - num espaço de Hilbert X é essencialmente auto-adjunto se ele possui uma única extensão auto-adjunta.

Observação 1.4.1. A é essencialmente auto-adjunto $\Longleftrightarrow$ Dom $W(T)$ e Im $W(A)$ são densos $\Longleftrightarrow n_+ = \mathit{dim}\,\mathrm{Dom}\ W(A)^\perp = n_- = \mathit{dim}\,\mathrm{Im}\ W(A)^\perp = 0$.

Teorema 1.4.8. *Seja W a transformada de Cayley de A. Então*

i) $A \mapsto W(A)$ *é uma bijeção entre o conjunto dos operadores simétricos A densamente definidos em X espaço de Hilbert, e as isometrias parciais U tais que* $\mathrm{Im}\,(I - U)$ *seja denso.*

2) *A é auto-adjunto se, e só se, $W(A)$ é unitário.*

Prova. Ver [37], pág. 109 □

Proposição 1.4.9. *Seja $(\mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida e seja $g : \mathcal{X} \to I\!R$ uma função mensurável. Então*

i) *A transformada de Cayley de $\mathcal{M}_g$ é o operador $\mathcal{M}_z$, onde $z : \mathcal{X} \to \tilde{C} = \{z \in$* $\mathbf{C} : |z| = 1\}$ *é a função*

$$z(w) = [g(w) - i][g(w) + i]^{-1}.$$

ii) $\mathcal{M}_g$ *é auto-adjunto.*

Prova. Para (i) veja [37], pág. 115. Vejamos a prova de (ii). Como z é uma função com valores em $\tilde{C}$, $\mathcal{M}_z$ é unitário portanto por (i) e pelo teorema (1.4.8) parte 2 concluimos que $\mathcal{M}_g$ é auto-adjunto. □

Lema 1.4.10. *Seja $\mathcal{M}_g$ o operador de multiplicação por g. Então*

i) *Se $(\mathcal{X}, \nu)$ é um espaço de medida e $g : \mathcal{X} \to \mathbf{C}$ é uma função mensurável. Então o espectro de $\mathcal{M}_g$, agindo em $L^2_\nu(\mathcal{X})$, é o suporte da medida $g_*\nu$. Em outras palavras, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{M}_g)$ se, e só se, existe uma vizinhança V de λ tal que $g_*\nu(V) = 0$.*

ii) *Se $(\mathcal{X}, \mu)$ é um espaço de medida e $g : \mathcal{X} \to I\!R$ é uma função mensurável, então $\mathcal{M}_g \geq 0$ se, e só se, $g \geq 0$ q.t.p..*

Prova. Provemos primeiro a seguinte afirmação: $\mathcal{M}_g$ é invertível (ou seja, $0 \notin \sigma(\mathcal{M}_g)$), se , e só se, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(w)| \geq \delta, \qquad q.t.p..$$

Se $0 \notin \sigma(\mathcal{M}_g)$, então existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$S\mathcal{M}_g\psi = \psi, \quad \forall \psi \in \text{Dom } \mathcal{M}_g.$$

Em particular,

$$\|\psi\| \leq \|S\| \, \|\mathcal{M}_g\| \, , \quad \forall \psi \in \text{Dom } \mathcal{M}_g.$$

Disto conclui-se facilmente que $|g(w)| \geq \|S\|^{-1}$ *q.t.p.*. Também tem-se que se $|g(w)| > \delta$, *q.t.p.*, então $|g^{-1}| \leq \delta^{-1}$ *q.t.p.* e $S = \mathcal{M}_{g^{-1}}$ é evidentemente uma inversa limitada para $\mathcal{M}_g$.

Por outro lado, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{M}_g) \iff 0 \notin \sigma[\mathcal{M}_g - \lambda] = \sigma[\mathcal{M}_{g-\lambda}] \iff$ existe $\delta > 0$ tal que $|g(w) - \lambda| \geq \delta$ *q.t.p.* $\iff$ existe $\delta > 0$ tal que $\nu\{w : |g(w) - \lambda| < \delta\} = 0$, como $\{w : |g(w) - \lambda| < \delta\} = (g^{-1}B(\lambda, \delta))$ e por definição $\nu(g^{-1}B(\lambda, \delta)) = g * \nu B(\lambda, \delta)$ temos que $g * \nu B(\lambda, \delta) = 0 \iff \lambda \notin Supp\, g * \nu$.

Para ii), seja $g \geq 0$. Como

$$\langle \mathcal{M}_g \psi, \psi \rangle = \langle g\psi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{X}} g(w)|\psi|^2 d\mu(w) \geq 0,$$

então $\mathcal{M}_g \geq 0$. Para provar a implicação recíproca, seja $E \subseteq \mathcal{X}$ um conjunto mensurável de medida finita. Para todo $n > 0$, $\psi_n = \chi_{E \cap \{w : |g(w)| \leq n\}} \in \text{Dom}\ \mathcal{M}_g$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq (\mathcal{M}_g \phi_n, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathcal{X}} g(w)|\psi_n(w)|^2 d\mu(w) \\ &= \int_{E \cap \{w : |g(w)| \leq n\}} g(w) d\mu(w). \end{aligned}$$

Logo, para todo mensurável $E \subseteq \mathcal{X}$ de medida finita,

$$\int_E g(w) d\mu(w) \geq 0.$$

Daí, conclui-se que $g \geq 0$ q.t.p.. □

Proposição 1.4.11. *Um operador auto-adjunto A, no espaço de Hilbert X, é não negativo se, e só se, $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$.*

Prova. Ver [37], pág. 129. □

Agora enunciaremos o teorema espectral,

Teorema 1.4.12 (Teorema Espectral). *Seja X um espaço de Hilbert. Uma condição necessária e suficiente para que um operador $A \colon \text{Dom}\,(A) \subseteq X \to X$ seja auto-adjunto é que ele seja unitariamente equivalente a um operador de multiplicação $\mathcal{M}_g$, onde g é uma função mensurável real.*

Prova. Ver [37], pág. 114. □

Teorema 1.4.13 (Weyl-Von Neumann). *Seja H um operador auto-adjunto - num espaço de Hilbert separável X. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um operador auto-adjunto $A \in \mathcal{B}(X)$ com $\|A\| < \varepsilon$, tal que $H + A$ tem um espectro puramente pontoal.*

1.5 O Operador de Schrödinger

Vejamos o que temos até agora sobre o operador multiplicação $\mathcal{M}_g$ com $g(w) = w^2 + \alpha$.

1) Pela parte 2 do lema (1.4.10) e pela proposição (1.4.9) temos que $\mathcal{M}_g$ é não-negativo e auto-adjunto.

2) Pela proposição (1.4.11) temos que $\sigma(\mathcal{M}_g) \subseteq [0, +\infty)$.

3) Mais ainda pela parte 1 do lema (1.4.10) com $g(w) = \alpha + w^2$, temos que $\sigma(\mathcal{M}_g) = [\alpha, \infty)$. Com efeito,

$\lambda \in \sigma(\mathcal{M}_g) \Leftrightarrow \lambda \in supp\, g * \nu \Leftrightarrow |g(w) - \lambda| < \delta, \quad \forall \delta > 0 \Leftrightarrow -\delta + (\lambda - \alpha) < w^2 < \delta + (\lambda - \alpha) \Leftrightarrow \lambda > \alpha - \delta, \quad \forall \delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \alpha.$

Agora estamos em condições de fazer a aplicação do teorema espectral no estudo dos operadores $A = -\partial_x^2 + \alpha \quad e \quad \mathcal{L}_\alpha = -\partial_x^2 + \alpha - \gamma\phi^q$. Primeiramente estudaremos o espectro do operador A. Para isto precisamos ver qual é o operador unitário para provar a equivalência unitária entre A e o operador de multiplicação $\mathcal{M}_g$, onde g é definido por $g(\xi) = \xi^2 + \alpha$.

Lema 1.5.1. *Os operadores* A: Dom $(A) = H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}, dx) \to L^2(\mathbb{R}, dx)$ *e* $\mathcal{M}_g \colon L^2(\mathbb{R}, d\xi) \to L^2(\mathbb{R}, d\xi)$ *são unitariamente equivalentes, onde o operador entrelaçante é dado pela transformada de Fourier* $\mathcal{F} \colon L^2(\mathbb{R}, dx) \to L^2(\mathbb{R}, d\xi)$, *tal que*

$$\mathcal{F}(H^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R}, (1 + \xi^2)d\xi)$$

Prova. Primeiro verifiquemos que $\mathcal{F}(\mathrm{Dom}\,(A)) = \mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_g)$. Esta verificação será feita em duas etapas

1) $\mathcal{F}(\mathrm{Dom}\,(A)) \subseteq \mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_g)$: Seja $\phi \in \mathcal{F}(\mathrm{Dom}\,(A))$. Então $\phi \in H^2(\mathbb{R})$ é tal que

$(1+\xi^2)\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$. Devemos provar que $g.\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |g(\xi).\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (\xi^2+\alpha)^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\frac{\xi^2+\alpha}{1+\xi^2})^2 (1+\xi^2)^2 |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\{(\frac{\xi^2+\alpha}{1+\xi^2})^2\} \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^2 (\hat{\phi}(\xi))^2 d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\phi \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_g)$.

2) Por outro lado, seja $\psi \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_g)$ e provemos que existe um $\phi \in \mathrm{Dom}\,(A)$ tal que $\hat{\phi} = \psi$. Como $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ então $\check{\psi} \in L^2(\mathbb{R}, dx)$. Então tomando $\phi = \check{\psi}$. Obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^2 |\psi|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^2 (\frac{\alpha+\xi^2}{\alpha+\xi^2}) |\psi|^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} (\frac{1+\xi^2}{\alpha+\xi^2})^2 \int_{\mathbb{R}} (\alpha+\xi^2)^2 |\psi|^2 d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, de 1) e 2) temos que $\mathcal{F}(H^2(\mathbb{R})) = \mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_q)$.

Além disso, se $\eta \in \mathrm{Dom}\,(A)$, então $\mathcal{F}(-\partial_x^2 + \alpha)\eta = (\xi^2+\alpha)\hat{\eta}$ e $\mathcal{M}_g \mathcal{F}\eta = (\alpha+\xi^2)\hat{\eta}$. Portanto, $\mathcal{M}_g \mathcal{F}\eta = \mathcal{F} A\eta, \quad \forall \eta \in \mathrm{Dom}\,(A)$. $\square$

Vejamos o que podemos concluir para o operador A a partir do operador $\mathcal{M}_g$:

Lema 1.5.2. *Para os operadores A e $\mathcal{M}_g$ definidos anteriormente temos que*

1) A é auto-adjunto ,

2) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$,

3) A é não-negativo em $L^2(\mathbb{R})$,

4) $\sigma(A) \subset [0,\infty)$.

5) $\sigma(A) = [\alpha,\infty)$ para $\alpha > 0$.

Prova. Primeiramente temos que A é unitariamente equivalente a $\mathcal{M}_g$ e g é real. Logo, pelo teorema espectral (1.4.12) tem-se que A é auto-adjunto. A parte 2 é imediata pois os operadores auto-adjuntos possuem no seu espectro valores reais.

Para 3 tem-se

$$\begin{aligned} \langle A\psi, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} (-\partial_x^2\psi, \alpha\psi)\psi d\psi, \qquad \psi \in H^2(\mathbb{R}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_x\psi)^2 + \alpha\psi^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo A é não-negativo em $L^2(\mathbb{R})$. 4 é imediato de 3.

Finalmente, $\lambda \notin \sigma(A) \Leftrightarrow (A-\lambda)$ tem inversa limitada em $\mathrm{Dom}\,(A)$ logo, $\mathcal{F}(A-\lambda)$ tem inversa limitada em $\mathcal{F}(\mathrm{Dom}\,(A)) = \mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_g) \Leftrightarrow (\mathcal{M}_g - \lambda)$ tem inversa limitada em $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{M}_g - \lambda) \Leftrightarrow 0 \notin \sigma(\mathcal{M}_g - \lambda) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(\mathcal{M}_g) = [\alpha, \infty)$. Portanto $\sigma(A) = [\alpha, \infty)$ para $\alpha > 0$. □

A seguir estudaremos o operador linear, auto-adjunto e não limitado dado por

$$\mathcal{L}_\alpha = -\partial_x^2 + \alpha - \gamma\phi^q, \tag{1.15}$$

onde $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ e ϕ é a solução da equação elítica $-\phi'' + \alpha\phi - \beta\phi^{q+1}$, que é dada explicitamente por $\phi = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{q}} \frac{(q+2)}{2} sech^{\frac{2}{q}}(\sqrt{\alpha}\frac{q}{2}x)$, como provaremos no lema (3.1.2).

Podemos escrever $\mathcal{L}_\alpha = A + B$, onde A e B são os seguintes operadores de $L^2(\mathbb{R})$: $\mathrm{Dom}\,(A) = \mathrm{Dom}\,(B) = H^2(\mathbb{R})$, $Av = -\partial_x^2 + \alpha v$, $v \in \mathrm{Dom}\,(A)$, $Bv = -\gamma\phi^q v$, $\forall v \in \mathrm{Dom}\,(B)$.

Lema 1.5.3. *Sejam A e B como definimos acima. Então B é A-limitado com A-cota zero e simétrico.*

Prova. Temos que

$$\|Bv\| = \|-\gamma\phi^q v\| \leq \gamma|\phi|_\infty^q \|v\|, \qquad \forall\, v \in \mathrm{Dom}\,(A), \tag{1.16}$$

Da observação da definição de A-limitado e por (1.16) temos que B é A-limitado A-cota $b_0 = 0$.

A verificação da simetria de B é imediata. □

Observação 1.5.1. Do lema (1.5.3) e como A é auto-adjunto, usando o teorema de Kato-Rellich (1.1.13) obtemos que $\mathcal{L}_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha - \gamma\phi^q$ é auto-adjunto.

Observação 1.5.2. Seja $\psi(x) = -\gamma\phi_\alpha^q$, $\forall x \in I\!R$, onde $c > 0$; $p \geq 1$. Observemos pelo teorema das imersões de Sobolev (1.2.19) que $\psi \in L^p(I\!R)$, $\forall p \geq 2$, pois $\psi_\alpha \in H^2(I\!R)$ e $n = 1$.

Lema 1.5.4. *O operador B considerado de $H^2(I\!R)$ em $L^2(I\!R)$ é compacto.*

Prova. Seja $(\psi_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $C_0^\infty(I\!R)$ tal que $\psi_n \to \psi$ em $H^2(I\!R)$. Para cada n, consideremos o operador $B_n : H^2(I\!R) \to L^2(I\!R)$ definido por $B_n u = \psi_n u$, $\forall u \in H^2(I\!R)$. Usando a desigualdade de Holder (1.2.16) e as Imersões $H^2(I\!R) \hookrightarrow L^\infty(I\!R)$, temos que

$$\begin{aligned} \|B_n u - Bu\|_{L^2(I\!R)} &= \|(\psi_n - \psi)u\|_{L^2(I\!R)} \leq \|\psi_n - \psi\|_{L^\infty(I\!R)} \|u\|_{L^2(I\!R)} \\ &\leq K \|\psi_n - \psi\|_{H^2(I\!R)} \|u\|_{L^2(I\!R)}, \end{aligned}$$

onde $K > 0$ é constante. Então B_n converge para B nos espaços dos operadores lineares limitados de $H^2(I\!R)$ em $L^2(I\!R)$ e, como B é limitado, para concluir que B é compacto, é suficente provar que cada B_n é compacto. Fixemos $n \geq 1$ e seja $R > 0$ tal que

$$supp\, \phi_n \subset B(0, R) = \{x \in I\!R;\ |x| < R\}.$$

Seja $(u_m)_{m\geq 1}$ sequência limitada em $H^2(I\!R)$. Então $v_m = \phi_n u_m$ satisfaz

$$supp\, v_m \subset B(0; R); v_m \in H^1(B(0; R)), \qquad \forall m \geq 1,$$

e $(v_m)_{m\geq 1}$ é limitada em $H^1(B(0; R))$. Pelo teorema de Rellich (1.2.22) segue-se que existe uma subsequência $(v_{m_j})_{j\geq 1}$, de $(v_m)_{m\geq 1}$, convergente em $L^2(I\!R)$, isto é, $(B_n u_{m_j})_{j\geq 1}$ converge em $L^2(I\!R)$. Isto prova que B_n é compacto. $\square$

Lema 1.5.5. *B é um operador A-compacto.*

Prova. Seja $(v_n)_{n\geq 1}$ sequência em $\mathrm{Dom}\,(A)$ tal que (v_n) *e* $(Av_n)_{n\geq 1}$ sejam limitadas em $L^2(I\!R)$; digamos $\|v_n\| \leq K$, $\|Av_n\| \leq K$, $\forall n \geq 1$. Então,

$$\left\| -\frac{d^2}{dx^2} v_n \right\| \leq K + \|\alpha v_n\| \leq K + \alpha K, \qquad \forall n \geq 1.$$

Via transformada de Fourier concluimos que $(v_n)_{n\geq 1}$ é limitada em $H^2(\mathbb{R})$. Como B considerado como operador de $H^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ é compacto pelo lema (1.5.4), segue-se que existe subsequência $(v_{n_j})_{j\geq 1}$ de $(v_n)_{n\geq 1}$ tal que $(Bv_{n_j})_{j\geq 1}$ converge em $L^2(\mathbb{R})$. Isto prova que B é A-compacto. □

Finalmente vejamos o lema que nos dá o espectro essencial do operador $\mathcal{L}_\alpha$.

Lema 1.5.6. *Sejam A, B e $\mathcal{L}_\alpha$ os operadores definidos acima. Então*

$$\sigma_e(\mathcal{L}_\alpha) = \sigma_e(A) \quad \textit{e, mais ainda,} \quad \sigma_e(\mathcal{L}_\alpha) = [\alpha, +\infty) \quad \alpha > 0.$$

Prova. Sejam $A_1 = A$, $B_1 = \mathcal{L}_\alpha \Rightarrow A_1 - B_1 = \gamma\phi^q = -B$, logo do lema (1.5.2) parte 1 temos que A é auto-adjunto e pela observação do lema (1.5.3) temos que $\mathcal{L}_\alpha$ é auto-adjunto então A_1 e B_1 são auto-adjuntos, além disso tem-se que Dom (A_1) = Dom $(B_1) = H^2(\mathbb{R})$, e B A_1-compacto, logo $-B = A_1 - B_1$ é $A_1 - compacto$. Portanto, usando o teorema de Weyl (1.1.14), temos que

$$\sigma_e(\mathcal{L}_\alpha) = \sigma_e(A) \tag{1.17}$$

Por outro lado, como A e $\mathcal{M}_g$ com $g(\xi) = \alpha + \xi^2$ são unitariamente equivalentes (via transformada de Fourier) vemos que $\sigma_e(A) = \sigma_c(A) = [\alpha, +\infty)$. Portanto, de (1.17), obtemos

$$\sigma_e(\mathcal{L}_\alpha) = \sigma_e(A + B) = \sigma_e(A) = [\alpha, +\infty).$$

□

Na sequência para completar o estudo do espectro $\mathcal{L}_\alpha$, veremos a teoria de Sturm Lioville.

1.6 Teoria de Sturm Liouville

Continuando com a análise espectral vejamos algums lemas da teoria de Sturm-Liouville nos quais veremos o que acontece com o espectro dos operadores auto-adjuntos da forma $-\partial_x^2 + V(x)$, onde $V(x)$ é o potencial. consideremos a equação diferencial da forma,

$$H_1 y \equiv -y'' + V(x)y = 0, \tag{1.18}$$

onde o potencial $V(x)$ é contínuo e toma valores reais.

Comecemos pelo teorema de comparação de Sturm.

Teorema 1.6.1. *Sejam y_1, y_2 soluções não nulas das equações diferenciais:*

$$-y_1'' + V_1(x)y_1 = 0, \qquad -y_2'' + V_2(x)y_2 = 0. \tag{1.19}$$

Se $V_1(x) \geq V_2(x)$ em $[a,b]$ e $y_1(a) = y_1(b) = 0$, então existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $y_2(x_0) = 0$. Em outras palavras, entre dois zeros quasquier de y_1 existe um zero de y_2. Se supusermos que $V_1(x) > V_2(x)$ em algum subconjunto $M \subset [a,b]$, com medida de Lebesgue positiva, então um ponto x_0 tal que $y_2(x_0) = 0$ pode ser encontrado em (a,b), entre dois zeros da função $y_1(x)$.

Prova. Suponhamos que não existem zeros de y_1 e $y_1 > 0$ em (a,b). Então $y_1'(a) > 0$ e $y_1'(b) < 0$ (por exemplo, $y_1'(a) = 0$ então $y_1 \equiv 0$ pelo teorema de unicidade). Além disso, suponhamos também que em $[a,b]$, $y_2(x)$ não tenha nenhum zero e que $y_2(x) > 0$ para x$\in$ [a,b]. Multiplicando a primeira equação por y_2 e a segunda por y_1 em (1.19) e integrando em $[a,b]$ a diferença da equação obtida, obtemos

$$\int_a^b (y_1 y_2'' - y_1'' y_2)dx + \int_a^b (V_1 - V_2)y_1 y_2 \, dx = 0,$$

logo,

$$\int_a^b (y_1' y_2 - y_1 y_2')' dx = \int_a^b (V_1 - V_2)y_1 y_2 \, dx.$$

Então, por hipótese,

$$\int_a^b (y_1' y_2 - y_1 y_2')' dx = y_1'(b)y_2(b) - y_1'(a)y_2(a) \geq 0. \tag{1.20}$$

Mas as suposições feitas acima implicam que o termo central de (1.20) deve ser negativo. Esta contradição prova a primeira parte do teorema.

Suponhamos agora que $y_1(a) = y_1(b) = 0$, $y_1(x) > 0$ *e* $y_2(x) > 0$ para cada x $\in$ (a,b) e que $V_1 > V_2$ em um subconjunto de medida positiva de $[a, b]$. Como acima, encontramos das equações que

$$y_1'(b)y_2(b) - y_1'(a)y_2(a) > 0$$

Mas, como $y_1'(a) > 0$, $y_2(a) \geq 0$, $y_1'(b) < 0$ e $y_2(b) \geq 0$, então temos que

$$y_1'(b)y_2(b) - y_1'(a)y_2(a) \leq 0.$$

Esta contradição mostra a segunda parte do teorema. □

Corolário 1.6.2. *Se $V(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$ em (1.18) , então qualquer solução não nula tem no máximo um zero em $[a, b]$.*

Prova. Utilizando o teorema (1.6.1), comparamos a equação (1.18) com $-y'' = 0$. Basta considerar sua solução $y \equiv 1$, que evidentemente não tem zeros. Logo verifica-se o corolário. □

Consideremos a seguir V em (1.18) satisfazendo a condição

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = a, \tag{1.21}$$

com $a > 0$. Desta forma , temos a seguinte proposição:

Proposição 1.6.3. *Se y é uma solução não nula de (1.18), onde V satisfaz (1.21), então o conjunto de zeros de $y(x)$ é finito (possivelmente vazio).*

Prova. Primeiro, pelo teorema de unicidade das equações diferenciais, todos os zeros de y são isolados. A seguir, seja $R > 0$ tal que $V(x) \geq 0$, para $|x| \geq R$. Então y tem no máximo um zero em cada um dos intervalos $(-\infty, -R)$ e $(R, +\infty)$ pelo corolário (1.6.2) e, como $[-R, R]$ é compacto e os zeros são isolados então $[-R, R]$ contém um número finito de zeros. Portanto o conjunto de zeros de $y(x)$ é finito. □

Corolário 1.6.4. *Seja $\lambda < a$ um autovalor do operador $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, com autofunção y. Então o conjunto de zeros de $y(x)$ é finito (possivelmente vazio).*

Prova. Como λ é autovalor de H_1 com auto-função y então $-y'' + V(x)y = \lambda y$; ou, $-y'' + (V(x) - \lambda)y = 0$. Considerando $V_1(x) = V(x) - \lambda$, temos que $V_1(x) \to a - \lambda$ e $a - \lambda > 0$. Então pela proposição (1.6.3) obtemos a afirmação. $\square$

A seguir obtemos um resultado importante relacionado com os zeros das soluções de (1.18), que usaremos para provar a unicidade do autovalor negativo do operador H_1.

Teorema 1.6.5. *Sejam y_1, $y_2 \in L^2(\mathbb{R})$ autofunções de H_1 com autovalores λ_1, $\lambda_2 < a$ e número de seus zeros n_1, n_2, respectivamente. Então $\lambda_2 > \lambda_1$ implica $n_2 > n_1$.*

Prova. Suponhamos que $n_1 > 0$. Sejam $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n_1}$ todos os zeros de y_1. Pelo teorema (1.6.1), existe um zero de y_2 em cada um dos intervalos abertos (α_i, α_{i+1}), $i = 1, 2, ..., n_1 - 1$. A seguir mostraremos que pelo menos um zero pode ser encontrado em cada um dos intervalos $(-\infty, \alpha_1)$ e $(\alpha_{n_1}, +\infty)$. Em outras palavras, só necessitamos generalizar a afirmação do teorema de separação de Sturm para uma semi-reta.

Consideremos o intervalo $(\beta, +\infty)$, com $\beta = \alpha_{n_1}$, e suponhamos que $y_2(x) > 0$ para $x \in (\beta, +\infty)$, $y_1(\beta) = 0$. Podemos supor também, sem perda de generalidade, que $y_1(x) > 0$ para $x \in (\beta, +\infty)$. Da mesma forma como na prova do teorema (1.6.1), temos que

$$\int_\beta^N (y_1 y_2' - y_1' y_2)' dx + \int_\beta^N (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 dx = 0, \qquad \forall N > \beta.$$

Ou,

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \Big|_\beta^N + \int_\beta^N (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 dx = 0.$$

Agora, das suposições temos que, se $\alpha \equiv y_1(\beta) y_2'(\beta) - y_1'(\beta) y_2(\beta)$ e $\epsilon \equiv \int_\beta^{\beta+1} (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 \, dx$ então $\alpha \leq 0$ e $\epsilon > 0$. Além disso, para $N \geq \beta + 1$,

$$y_1(N) y_2'(N) - y_1'(N) y_2(N) = \alpha - \epsilon - \int_{\beta+1}^N (\lambda_2 - \lambda_1) y_1 y_2 \, dx \leq -\epsilon < 0. \qquad (1.22)$$

Como y_1, $y_2 \in L^2(\mathbb{R})$ e são funções positivas então $y_1(x)$, $y_2(x) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y_1'(N) \leq 0$, $y_2'(N) \leq 0$ para $N \geq N_0$. Logo (1.22) implica que

$$y_1(N)y_2'(N) \leq -\epsilon < 0, \qquad \forall N > N_0,$$

o que é impossível, pois $y_1(N) \to 0$, $y_2'(N) \to 0$, quando $N \to +\infty$.

O caso no qual $n_1 = 0$ segue-se imediatamente do fato que, por serem y_1 e y_2 ortogonais, as duas não podem preservar seu sinal. □

Observe que devido a (1.21) e as hipóteses sobre V, o domínio natural de H_1 é Dom $(H_1) = H^2(\mathbb{R})$. Ainda mais, H_1 é um operador auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R})$.

Vejamos agora, um teorema sobre o complemento do espectro essencial que inclui o caso do operador $\mathcal{L}_\alpha$ estudado anteriormente, onde o potencial é $V(x) = \alpha + \gamma\phi^q$, com α e $\gamma > 0$.

Teorema 1.6.6. *Se o potencial V satisfaz (1.21), então $H_1 y = -y'' + V(x)y$ é limitado inferiormente e tem um espectro discreto em $(-\infty, a)$, isto é, para qualquer $b < a$, o espectro do operador H_1 em $(-\infty, b)$ consiste de um número finito de autovalores de multiplicidade finita.*

Prova. A primeira parte prova-se seguindo o roteiro feito para a prova do lema (1.5.6) sobre o espectro essencial do operador $(\mathcal{L}_\alpha)$ e a prova de ser limitado inferiormente é como segue:

$$\begin{aligned}
(H_1 y, y)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-y'' + V(x)y)y\,dx \qquad y \in H^2(\mathbb{R}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-y''y + V(x)y^2)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y')^2\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} V(x)y^2\,dx
\end{aligned}$$

Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|V(x) - a| < \varepsilon$, $\forall |x| > M$. Então, tomando $\varepsilon = \frac{a}{2}$, obtemos $V(x) > \frac{a}{2} > 0$, $\forall |x| > M$. Além disso, pela continuidade de V, $V(x) \geq \inf_{x\in[-M,M]} V(x) = \beta$, de modo que $V(x)y^2 \geq \beta y^2 \quad \forall x \in [-M, M]$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
(H_1 y, y)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y')^2}{2}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} V(x) y^2\, dx \\
&\geq \int_{|x|>M} V(x) y^2\, dx + \int_{-M}^{M} V(x) y^2\, dx \\
&\geq \frac{a}{2} \int_{|x|>M} y^2\, dx + \int_{-M}^{M} \beta y^2\, dx \\
&\geq \min\{\frac{a}{2}, \beta\} \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, dx = C\, \|y\|^2
\end{aligned}$$

Outra prova usando princípios variacionais pode ser vista em [3] pág. 94. □

Teorema 1.6.7. *Suponhamos que o potencial V satisfaz a condição (1.21) e λ_0 é o menor autovalor do operador H_1 com $\lambda_0 < a$. Então λ_0 é simples e a auto-função correspondente $\psi(x)$ pode ser escolhida positiva para todo x.*

Prova. Ver [10], [35]. □

Teorema 1.6.8. *Suponhamos novamente que o potencial V satisfaz a condição (1.21) e que o operador $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ possui um autovalor zero simples com autofunção ϕ' que muda de sinal e que possui um único zero. Então o operador H_1 tem exatamente um autovalor negativo simples λ_0 e existe um $\delta > 0$ tal que $\lambda > \delta$, para todo $\lambda \in \sigma(H_1) - \{\lambda_0, 0\}$.*

Prova. Pelo teorema (1.6.6) H_1 é limitado inferiormente e como zero é autovalor de H_1 satisfazendo $0 < a$, então $\lambda_0 \leq 0$. mais por hipótese temos que a auto-função associada ao autovalor zero muda de sinal logo pelo teorema (1.6.7) temos que auto-função associada ao menor autovalor λ_0 pode ser escolhida positiva para todo x , logo $\lambda_0 \neq 0$, portanto existe $\lambda_0 < 0$, e ele é simples pois $\lambda_0 < a$.

Vejamos agora que não existe nenhum autovalor de H_1 em $(\lambda_0, 0)$. Suponhamos que existe $\lambda \in (\lambda_0, 0)$ tal que $H_1\psi_1 = \lambda\psi_1$, para $\psi_1 \in \mathrm{Dom}\,(H_1) - \{0\}$. Então, pelo teorema (1.6.5), aplicado ás funções ψ_1, ϕ', obtemos que ϕ' deve ter pelo menos dois zeros. Isto é absurdo pois por hipótese tem-se que ϕ' possui um único zero. Isto verifica a primeira parte do teorema. A segunda parte, sobre a existência de um número positivo δ, segue-se imediatamente do teorema (1.6.6). □

Observação 1.6.1. Os resultados acima sobre a teoria de Sturm-Lioville serão usados em cada uma das aplicações para verificar uma das hipóteses importantes que chamaremos de hipótese 3.

O estudo do espectro do operador $\mathcal{L}_\alpha$, pode também ser feito usando os seguintes lemas. Estos ajudarão a calcular explicitamente o seu espectro ($\sigma(\mathcal{L}_\alpha)$).

Lema 1.6.9. *Sejam $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ quaisquer e $\theta \in I\!R - \{0\}$. Então o operador dilatação T_θ, definido por $(T_\theta f)(x) = f(\theta x)$, satisfaz:*

1) $\phi^q_{\alpha_0} = \theta(T_{\sqrt{\theta}}\phi^q_{\alpha_1})$,

2) $\mathcal{L}_{\alpha_0} = \theta(T_{\sqrt{\theta}}\mathcal{L}_{\alpha_1}T^{-1}_{\sqrt{\theta}})$, *para* $\theta = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$.

Prova. Como $\phi^q_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{q+2}{2}\right) sech^2(\frac{\sqrt{\alpha} q x}{2})$, então

$$T_{\sqrt{\theta}}\phi^q_{\alpha_1} = \left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)\left(\frac{q+2}{2}\right) sech^2(\frac{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\theta}\, q\, x}{2}).$$

Logo

$$\theta T_{\sqrt{\theta}}\phi^q_{\alpha_1} = \theta\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)\left(\frac{q+2}{2}\right) sech^2(\frac{\sqrt{\alpha_0}\, q\, x}{2}) = \phi^q_{\alpha_0}.$$

Isto prova 1). Para 2), lembrando que $\mathcal{L}_\alpha = -\partial^2_x + \alpha - \gamma\phi^q_\alpha$ temos que

$$\begin{aligned} T_{\sqrt{\theta}}\mathcal{L}_{\alpha_1}T^{-1}_{\sqrt{\theta}}f &= T_{\sqrt{\theta}}(-\partial^2_x + \alpha_1 - \gamma\phi^q_{\alpha_1})T^{-1}_{\sqrt{\theta}}f \\ &= T_{\sqrt{\theta}}(-\partial^2_x)T^{-1}_{\sqrt{\theta}}f + T_{\sqrt{\theta}}(\alpha_1)T^{-1}_{\sqrt{\theta}}f - \gamma T_{\sqrt{\theta}}, \phi^q_{\alpha_1}T_{\sqrt{\theta}}T^{-1}_{\sqrt{\theta}}f \\ &= -\frac{1}{\theta}\partial^2_x f + \frac{\alpha_0}{\theta}f - \gamma\,\phi^q_{\alpha_0} f. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta(T_{\sqrt{\theta}}\mathcal{L}_{\alpha_1}T^{-1}_{\sqrt{\theta}}) = \mathcal{L}_{\alpha_0}.$$

□

Lema 1.6.10. *Sejam* $\alpha_0, \alpha_1 > 0$. *Então, para* $\mathcal{L}_{\alpha_0}$ *tem-se que* 0 *é autovalor simples, e um único autovalor simples negativo se, e só se estas mesmas propriedades são satisfeitas para* $\mathcal{L}_{\alpha_1}$.

Prova. A prova é imediata observando-se que o operador $A_\theta = \sqrt{|\theta|}T_\theta$ é uma isometria em $L^2(\mathbb{R})$. Ver detalhes no lema 6. de [2], pág. 358. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Estabilidade

Sejam X espaço de Hilbert real, munido de produto interno $(.,.)$ e com norma induzida $\|.\|$; $J\colon X^* \to X$ um operador linear fechado, anti-simétrico e sobrejetivo, $E\colon X \to \mathbb{R}$ uma funcional de classe C^2 em X chamado de energia. Denotemos por $E'\colon X \to X^*$ a derivada de Gâteaux de E.

Definição 2.0.11 (Sistema Hamiltoniano). Um *sistema hamiltoniano* é uma e-quação de evolução da forma

$$\partial_t u = J\,E'(u(t)) \tag{2.1}$$

onde $u(t)$ é uma aplicação definida em algum intervalo $[0,T]$, com valores em X.

Seja T uma representação unitária de $\mathbb{R}$ sobre X tal que E é invariante por T.

Definição 2.0.12 (Soliton). Define-se como um *soliton* uma solução de (2.1) da forma

$$u(t) = T(ct)\phi \tag{2.2}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e $\phi \in X$, para todo $t \geq 0$.

Definição 2.0.13 (Vizinhança Tubular). Seja $\varepsilon > 0$. O conjunto

$$U_\varepsilon = \{u \in X / \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u - T(s)\phi\| < \varepsilon\} \tag{2.3}$$

é conhecido como uma vizinhança tubular da órbita $\{T(s)\phi \colon s \in I\!R\}$

Definição 2.0.14 (Estabilidade Orbital). A ϕ_c-órbita $\{T(ct)\phi_c \colon t \in I\!R\}$ é estável se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ com a seguinte propriedade :
Se $\|u_0 - \phi_c\| < \delta$ e $u(t)$ é solução do sistema hamiltoniano (2.1) em algum intervalo $[0, t_0)$ com $u(0) = u_0$, então u(t) pode ser estendida a uma solução em $0 \leq t < \infty$ e

$$\sup_{0<t<\infty} \inf_{s \in I\!R} \|u(t) - T(s)\phi_c\| < \varepsilon.$$

No caso contrário ϕ_c-órbita chama-se instável (i.e $\exists\ \varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: $\forall \delta > 0, \exists \quad u_0 \in X$ sendo $\|u_0 - \phi_c\|_X < \delta$ e u(t) solução de (2.1), com $u(0) = u_0$, tal que $\inf_{s \in I\!R} \|u(t) - T(s)\phi_c\|_X \geq \varepsilon$, para algum $t > 0$)

Proposição 2.0.15. *Seja $E \colon X \to I\!R$, um funcional de classe C^2 definido em todo X com derivadas no sentido de Fréchet ($E' \colon X \to X^*$ e $E'' \colon X \to \mathcal{B}(X, X^*)$) e suponhamos que E é invariante sob T.*
i.e.

$$E(T(s)u) = E(u) \qquad \forall s \in I\!R \text{ e } u \in X. \tag{2.4}$$

Então

a) $T^*(s)E'(T(s)u) = E'(U)$ *e* $T^*(s)E'(T(s)u)T(s) = E''(u)$

b) $< E'(u), T'(0)u >= 0$ *para* $u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$

Prova. Primeiramente, derivando (2.4) com respeito a u temos que

$$< E'(T(s)u), T(s)\phi >=< E'(u), \phi >, \ \ \forall \ \phi$$

$$< T^*(-s)E'(T(s)u), \phi >=< E'(u), \phi >$$

Então

$$T^*(s)E'(T(s)u) = E'(u). \tag{2.5}$$

Novamente derivando (2.4) com respeito a u obtemos

$$T^*(s)E'(T(s)u)T(s) = E''(u). \tag{2.6}$$

Para provar b), derivamos agora (2.4) com respeito a s e avaliando em $s = 0$ para obter

$$< E'(T(s)u), T'(s)u > |_{s=0} =< 0, u > |_{s=0} = 0.$$

Portanto

$$< E'(u), T'(0)u >= 0 \quad \text{para} \quad u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0)) \tag{2.7}$$

□

Proposição 2.0.16. *Suponhamos que J comuta com T no sentido que*

$$T(s)J = JT^*(-s) \tag{2.8}$$

i.e. o diagrama seguinte é comuntativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T(s)"] & X \\ X^* \arrow[u, "J"] \arrow[r, "T^*(-s)"'] & X^* \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

Então:

a) $T(s)JT^*(s) = J$

b) $JGT(s) = T(s)JG$

c) $T^*(s)[\mathrm{Dom}\,(J)] = \mathrm{Dom}\,(J)$

d) $T'(0)J = J(T'(0))^*$

e) $J^{-1}T'(0) = -(T'(0))^*J^{-1} = (J^{-1}T'(0))^*$

Prova. Se $\phi \in X^*$ então

$$\begin{aligned} J(\phi) &= JT^*(-s)T^*(s)(\phi) \\ &= T(s)JT^*(s)(\phi) \qquad \text{(por (2.8))} \end{aligned}$$

Logo

$$J = T(s)JT^*(s).$$

Para b) temos que

$$\begin{aligned} T(s)JG &= JT^*(-s) \\ &= JGT(s) \quad \text{pelo lema (1.1.19).} \end{aligned}$$

Por outro lado como $T(-s)J = JT^*(s)$ então

$$Im(T^*(s)) \subseteq \text{Dom}\,(J) \quad e \quad \text{Dom}\,(J) \subseteq X^*.$$

Logo

$$T^*(s)(\text{Dom}\,(J)) \subseteq \text{Dom}\,(J). \tag{2.9}$$

Aplicando $T^*(-s)$ em (2.9) obtemos

$$T^*(-s)T^*(s)[\text{Dom}\,(J)] \subseteq T^*(-s)[\text{Dom}\,(J)].$$

Então

$$\text{Dom}\,(J) \subseteq T^*(s)[\text{Dom}\,(J)] \tag{2.10}$$

Portanto de (2.9) e (2.10) temos que

$$T^*(s)[\text{Dom}\,(J)] = \text{Dom}\,(J).$$

Vejamos a prova de d). Por (2.8) tem-se $T(s)J = JT*(-s)$.

Então

$$T'(s)J = JT^*(-s)(-1).$$

Avaliando em $s = 0$ obtemos

$T'(0)J = -JT^*(-0)$ pois $(T'(0))^* = (T^*(0))'$ e $T^*(0) = -T(0)$.

Finalmente, como

$$T'(0)J = -J(T'(0))^* \Rightarrow T'(0) = -J(T'(0))^*$$

e como

$$J^{-1} = -(J^{-1})^* \text{ e } (T'(0))^*(J^{-1}T'(0))^*,$$

então

$$T'(0) = J(J^{-1}T'(0))^*.$$

Portanto

$$J^{-1}T'(0) = (J^{-1}T'(0))^* \tag{2.11}$$

$(J^{-1}T'(0))^* = (T'(0))^*(J^{-1})^* = (T'(0))^*(-J^{-1}) = -(T'(0))^*J^{-1}$

Logo

$$(J^{-1}T'(0))^* = -(T'(0))^*J^{-1} \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) tem-se

$$J^{-1}T'(0) = -(T'(0))^*J^{-1} = (J^{-1}T'(0))^*$$

□

Proposição 2.0.17. *Dado o operador linear limitado e auto-adjunto $B\colon X \to X^*$, com a propriedade que JB é uma extensão de $T'(0)$, definamos o funcional $Q\colon X \to \mathbb{R}$ pela relação*

$$Q(u) = \frac{1}{2} < Bu, u > . \tag{2.13}$$

Então verificam-se:

a) *Q é invariante sob T i.e. $Q(T(s)u) = Q(u)$,* $\qquad \forall s \in \mathbb{R}, u \in X$

b) $Q'(u) = Bu$ *e* $Q''(u) = B, \ \forall u \in X$

c) *Também verificam-se os ítens seguintes:*

1. $T(s)^* Q'(T(s)u) = Q'(u)$
2. $T(s)^* BT(s) = B$
3. $BT'(0) = -T'(0)^* B$
4. $B[\mathrm{Dom}\,(T'(0))] = \mathrm{Dom}\,(T'(0)^*)$

Prova. Como a prova de a) é equivalente a provar que $Q(T(s)u) = Q(T(0)u)$ i.e $Q(T(s)u)$ é constante, verificaremos que $\frac{dQ}{ds}(T(s)u) = 0$

Temos que $\frac{d}{ds}(T(s)u) = T'(0)T(s)u$ para $u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$ e $\mathrm{Dom}\,(T'(0))$ é denso em X.

Portanto

$$\frac{dQ}{ds}(T(s)u) = T'(0)T(s)u \text{ para } u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0)), s \in \mathbb{R}.$$

Como $Q'(w)(v) =< Bw, v >$ e $T'(0) = JB$ em $\mathrm{Dom}\,(T'(0))$ então

$$\begin{aligned} Q'(T(s)u)T'(0)T(s)u &= < BT(s)u, T'(0)T(s)u > \\ &= < BT(s)u, JBT(s)u > \\ &= 0 \quad \text{(pois } J \text{ é anti-simétrico).} \end{aligned}$$

Portanto

$$Q(T(s)u) = Q(u), \qquad \forall s \in \mathbb{R}, u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0)).$$

Para completar a prova em todo X usaremos a densidade do $\mathrm{Dom}\,(T'(0))$ em X.

Dado c $\in X$, seja $c_n \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$ tal que $c_n \to c$ em X. Como $Q(T(s)c_n) = Q(c_n)$ e Q é linear limitado.

Então $Q(T(s)c) = Q(c)$

Portanto

$$Q(T(s)u) = Q(u) \qquad \forall s \in \mathbb{R}, u \in X.$$

Agora provaremos b) em duas partes; primeiro que $Q'(u) = Bu \quad \forall\, u \in X$, isto é

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{\|v\|}\|Q(u+v) - Q(u) - < Bu, v > \| = 0.$$

Observe que

$$\frac{1}{\|v\|}\|Q(u+v) - Q(u) - < Bu, v > \|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|v\|}\|\frac{1}{2}(< B(u+v), u+v > - < Bu, u >) - < Bu, v > \| \\
&= \frac{1}{\|v\|}\|\frac{1}{2}(< Bu, u > + < Bu, v > + < Bv, u >) + < Bv, v >) \\
&- (\frac{1}{2} < Bu, u > + < Bu, v >)\| \\
&= \frac{1}{\|v\|}\left\|\frac{< Bv, v >}{2}\right\| \leq \frac{1}{\|v\|}\frac{\|Bv\|\,\|v\|}{2} \leq \frac{\|B\|\|v\|}{2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$0 \leq \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{\|v\|}\|Q(u+v) - Q(u) - < Bu, v > \| \leq \frac{\|B\|}{2} \lim_{\|v\|\to 0} \|v\| = 0$$

ou seja,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{\|v\|}\|Q(u+v) - Q(u) - < Bu, v > \| = 0.$$

Portanto

$$Q'(u) = Bu$$

Verifiquemos agora a segunda parte; $Q''(u) = B, \ \forall u \in X$.

Como

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|B(u+h) - B(u) - Bh\| = 0$$

e

$$\|B(u+h) - B(u) - Bh\| = \|Q'(u+h) - Q'(u) - Bh\|$$

então

$$Q''(u) = B, \ \forall u \in X.$$

c) (1) Como $Q(T(s)u) = Q(u)$,

então $< Q'(T(s)u)\phi, T(s)\phi > = < Q'(u)\phi, \phi >, \quad \forall \phi$

$\Rightarrow \quad < T(s)^*Q'(T(s)u)\phi, \phi > = < Q'(u)\phi, \phi > \quad \forall\phi.$

Logo

$$T(s)^*Q'(T(s)u) = Q'(u) \tag{2.14}$$

Para (2) de (1) temos que $T(s)^*Q'(T(s)u) = Q'(u)$. Logo

$T(s)^*Q''(T(s)u)T(s) = Q''(u)$ e, como $Q''(u) = B, \quad \forall u \in X$, então

$$T(s)^*BT(s) = B \tag{2.15}$$

(3) Isto é equivalente a mostrar que $BT'(0)\phi = T'(0)^*B\phi$, $\forall\phi \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$.

Como $T'(0) = JB \quad \forall\phi \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$, então

$$BT'(0) = BJB \;\; e \;\; -T'(0)^*B = -(JB)^*B = -B^*J^*B = BJB.$$

Portanto

$$BT'(0) = -T'(0)^*B \tag{2.16}$$

Finalmente o ítem (4) é imediato pela definição. □

No lema seguinte provaremos que os funcionais E e Q são conservados ao longo do fluxo de (2.1).

Lema 2.0.18. *Os funcionais E e Q são conservativos sobre a órbita isto é*

$$\frac{dE(u)}{dt} = 0 \;\; e \;\; \frac{dQ(u)}{dt} = 0$$

Prova. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{dE(u)}{dt} = < E'(u), \frac{du}{dt} > &= < E'(u), JE'(u) > \\ &= -< JE'(u), E'(u) > \\ &= -< E'(u), JE'(u) > \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dE(u)}{dt} = 0, \quad \forall u \in X.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{dQ(u)}{dt} =< Q'(u), \frac{du}{dt} > &= < Bu, JE'(u) > \\ &= - < JBu, E'(u) > \\ &= - < E'(u), T'(0)(u) >, \text{ se } u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))\end{aligned}$$

e, por (2.7), $< E'(u), T'(0)u >= 0$ para $u \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$.

Portanto pela densidade segue-se que

$$\frac{dQ(u)}{dt} = 0, \quad \forall u \in X.$$

□

Vejamos uma caraterização da definição de *soliton*.

Lema 2.0.19. *Se $\psi \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$ satisfaz a equação "estacionária "*

$$E'(\psi) = cQ'(\psi) \tag{2.17}$$

então $T(ct)\psi$ é um soliton do sistema hamiltoniano dado pela equação (2.1).

Prova. Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T(ct)\phi) &= cT'(0)T(ct)\phi = cJBT(ct)\phi \\ &= cJT^*(-ct)Q'(\phi) && (\text{pois } Q'(u) = T^*(s)Q'(T(s)u)) \\ &= JT'(-ct)E'(\phi) && (\text{por hipóteses}) \\ &= JT^*(-ct)T^*(c(t))E'(T(ct)\phi) && (\text{por } (2.6)) \\ &= JE'(T(ct)\phi)\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}(T(ct)\phi) = JE'(T(ct)\phi)$$

Logo $T(ct)\phi$ é um *soliton* de (2.1). □

Definamos uma função escalar e um operador que serão usados nos teoremas, principais 1 e 2: $\quad d(.) : X \longrightarrow I\!R$ tal que

$$d(c) = E(\phi_c) - cQ(\phi_c) \tag{2.18}$$

e $\quad H_c\colon X \to X^*$ tal que

$$H_c = E''(\phi_c) - cQ''(\phi_c) \tag{2.19}$$

Observe que H_c é auto-adjunto no sentido que $H_c^* = H_c$ e $G^{-1}H_c$ é um operador auto-adjunto limitado em X no sentido standard

$$(G^{-1}Hu, v) =< Hu, v >=< Hv, u >= (G^{-1}Hu, v) \tag{2.20}$$

H_c é auto-adjunto pois E é de classe C^2 disto tem-se que $E''(\phi_c)$ é uma forma bilinear simétrica em X, como consequência disto $E''(\phi_c)$ é auto-adjunto e por outro lado temos que $Q''(\phi_c) = B = B^*$ logo Q'' também é auto-adjunto, logo tem-se que H_c é auto-adjunto. Mas ainda por (2.20) temos que $G^{-1}H_c$ é auto-adjunto.

Na sequência vejamos o espectro do operador H_c.

Lema 2.0.20. *Se ϕ_c é um soliton então $T'(0)\phi_c$ é um autovetor de H_c associado ao autovalor* 0.

Prova. Temos $E'(\phi_c) = cQ'(\phi_c)$ por ser ϕ_c *soliton.*
Logo, por (2.5) e (2.14),

$$E'(T(s)\phi_c) - cQ'(T(s)\phi_c) = T^*(-s)[E'(\phi_c) - cQ'(\phi_c)] = 0 \tag{2.21}$$

Derivando (2.21) em relação a s obtemos

$$E''(T(s)\phi_c)T'(0)T(s)\phi_c - cQ''(T(s)\phi_c)T'(0)T(s)\phi_c = 0$$

Então, avaliando em $s = 0$ temos

$$E''(\phi_c)T'(0)\phi_c - cQ''(\phi_c)T'(0)\phi_c = 0,$$

i.e

$$H_c(T'(0)\phi_c) = 0 = 0T'(0)\phi_c. \tag{2.22}$$

Portanto $T'(0)\phi_c$ é um autovetor associado ao autovalor zero, i.e, $\quad 0 \in \sigma(H_c)$. $\square$

Definição 2.0.21 (Solução Fraca). Uma solução fraca de (2.1) num intervalo de tempo $\mathcal{I}$ é uma função $u \in \mathcal{C}(\mathcal{I}; X)$ contínua com valores em X, tal que:

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), \psi \rangle = \langle E'(u(t)), -J\psi \rangle \tag{2.23}$$

em $\mathcal{S}^*(\mathcal{I})$, $\quad \forall \psi \in \operatorname{Dom}(J) \subset X^*$.

2.1 Teoremas Principais

Para o estudo da estabilidade, trabalharemos sobre o espaço de Hilbert real X tomando as seguintes hipóteses:

Hipotese 1 (Existência de Soluções). Para cada $u_0 \in X$ existe um $t_0 > 0$ que depende somente de μ , onde $\|u_0\| \leq \mu$, e existe uma solução da equação (2.1) no intervalo $\mathcal{I} = [0, t_0)$ tal que:

(a) $u(0) = u_0$

(b) $E(u(t)) = E(u_0)$, $\quad Q(u(t)) = Q(u_0)$ para $t \in \mathcal{I}$.

Observação 2.1.1. Note que se $u(t)$ é solução de (2.1), então $T(s)u(t)$ também é para todo $s \in I\!R$.

Com efeito, como $u(t)$ é solução de (2.1) então $u(t)$ satisfaz (2.23). Logo

$$< E'(T(s)u(t)), -J\psi > = < T^*(-s)E'(u), -J\psi >$$

pois $T^*(s)E'(T(s)u(t)) = E'u(t)$.

Então

$$\begin{aligned}
E'(T(s)u(t)) &= T^*(-s)E'(u(t)) \\
&= < E'(u), -T(-s)J\psi > \\
&= < E'(u), -JT^*(s)\psi > \qquad \text{(pois} \quad T(s)J = JT^*(-s)) \\
&= \frac{d}{dt} < u(t), T^*(s)\psi > \\
&= \frac{d}{dt} < T(s)u(t), \psi >, \quad \forall \psi \in \operatorname{Dom}(J).
\end{aligned}$$

Portanto

$$< E'(T(s)u(t)), -J\psi >= \frac{d}{dt} < T(s)u(t), \psi >, \quad \forall \psi \in \mathrm{Dom}\,(J).$$

Como conclusão, $T(s)u(t)$ também é solução de (2.1) $\forall s \in I\!R$.

Hipótese 2 (Existência de Solitons). Existem números reais $c_1 < c_2$ e uma aplicação de $I\!R$ em X satisfazendo

(a) $c \to \phi_c$ do intervalo aberto $(c_1, c_2) \subset I\!R$ em X é de classe C^1 para cada $c \in (c_1, c_2)$,

(b) $E'(\phi_c) = cQ'(\phi_c)$,

(c) $\phi_c \in \mathrm{Dom}\,(T'(0)^3) \cap D(JGT'(0)^2)$,

(d) $T'(0)\phi_c \neq 0$.

Lema 2.1.1. *Se $d''(c) > 0$ então H_c tem pelo menos algum elemento negativo no seu espectro.*

Prova. Diferenciando (2.17) em relação a c, temos que

$$H_c\phi_c' = Q'(\phi_c) \qquad \phi_c' = \frac{d\phi_c}{dc}. \tag{2.24}$$

Diferenciando agora duas vezes (2.18) temos

$$d'(c) = -Q'(\phi_c) \tag{2.25}$$

e

$$d''(c) = -\langle Q'(\phi_c), \phi_c' \rangle = -\langle H\phi_c', \phi_c' \rangle \tag{2.26}$$

Portanto $\langle H\phi_c', \phi_c' \rangle < 0$ se $d''(c) > 0$. □

Hipótese 3. Para cada $c \in (c_1, c_2) \subset I\!R$, H_c possui exatamente um autovalor negativo o qual é simples, $Ker H_c = span\{T'(0)\phi_c\}$ e o resto do espectro é positivo e limitado inferiormente. Além disso, existe $\delta > 0$ tal que $\inf(\sigma(H_c) \cap (0, \infty)) \geq \delta$.

Prosseguindo veremos alguns lemas que usaremos para provar os dois teoremas principais.

Lema 2.1.2. *Com as hipoteses 2 e 3, temos:*

(i) $T(s)\phi = \phi$ *para algum* $s > 0$ *ou*

(ii) $T(s_n)\phi \to \phi$ *implica* $s_n \to 0$.

Prova. Consideremos o conjunto de pontos críticos de $L = E - cQ$ em uma vizinhança de ϕ. Se u é um ponto crítico então: $L'(u) = 0$; logo, usando o desenvolvimento de Taylor para $L'(u)$ temos que

$$0 = L'(u) - L'(\phi) = H(u - \phi) + 0(\|u - \phi\|^2)$$

onde $H = L''(\phi)$. Temos que o conjunto de pontos críticos de L é localmente isomorfo ao $Ker(H)$. Por (2.21), como ϕ é um ponto crítico então para cada s, $T(s)\phi$ é também ponto crítico. Portanto existem uma vizinhança V de ϕ e um número $\delta > 0$ tais que

$$\{u \in V : L'(u) = 0\} = \{T(r)\phi : |r| < \delta\}.$$

Suponhamos agora que (ii) é falso. Então existe uma sequência $|s_n| \geq \delta$ com $T(s_n)\phi \in V$. Fixado n, provamos justamente que existe $|r_n| < \delta$ com $T(s_n)\phi = T(r_n)\phi$. Logo $T(s_n - r_n)\phi = \phi$, mediante o qual (i) é valido. □

O lema seguinte fala sobre o fator exterior do grupo de ação dentro da vizinhança tubular no sentido que $T(s)u$ é ortogonal a $T'(0)\phi$ para algum $s = s(u)$. Alguns detalhes que aparecem na prova são como os apresentados no lema 4.2 de [31].

Lema 2.1.3. *Dadas as hipóteses* 2 *e* 3, *existem* $\varepsilon > 0$ *e uma aplicação* α *de classe* C^2, $\alpha : U_\varepsilon \to I\!R$ *(*$I\!R|$ *período, se a orbita é períodica), tais que, para todo* $u \in U_\varepsilon$ *e todo* $s \in I\!R$,

i) $\|T(\alpha(u))u - \phi\| \leq \|T(s)u - \phi\|$,

ii) $(T(\alpha(u))u, T'(0)\phi) = 0,$

iii) $\alpha(T(s)u) = \alpha(u) - s$, *módulo ou período se a orbita é periódica,*

iv) $\alpha'(u) = \frac{GT(-\alpha(u))T'(0)\phi}{(T'(0)^2\phi, T(\alpha(u))u)}$,

v) α' *aplica* U_ε *em* $\mathrm{Dom}(J)$ *e* $J\alpha' \colon U_\varepsilon \to X$ *é* C^1.

Prova. A idéia é escolher $\alpha(u)$ que minimiza $g(s) = \|T(s)u - \phi\|^2$. para u próximo da órbita $\{T(s)\phi, s \in \mathbb{R}\}$. Seja

$$g'(s) = N(u,s) = 2(T(s)u - \phi, T'(0)T(s)u) = 2(T(s)u, T'(0)\phi) \quad u \in X,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Vamos resolver a equação $N(u,s) = N(\phi, 0) = 0$ para $s = s(u)$, usando o teorema da função implícita. Temos que N é C^2 por ser composta de aplicações C^2. De fato, $N = \rho \ o\ \beta$, onde $\rho \colon X \times X \to \mathbb{R}$ e $\beta \colon X \times \mathbb{R} \to X \times X$ são definidas por $\rho(u,v) = 2(u.v)$, $\beta(u,s) = (u, T(-s)T'(0)\phi)$. Observemos que ρ é bilinear, $\beta_1(u,s) = u$ é linear, logo C^2 e $\beta_2(u,s) = T(-s)T'(0)\phi$ é C^2, sendo β_2' e β_2'' dadas por

$$< \beta_2'(u,s), (h,\mu) >= -\mu T(-s)T'(0)^2\phi, \qquad < \beta_2''(u,s), (h,\mu) >= \xi\mu T(-s)T'(0)^3\phi.$$

Como $g''(s) = -2(T'(0)T(s)u, T'(0)\phi) = 2(T(s)u, T(0)^2\phi)$.
Então

$$\frac{\partial N}{\partial s}(\phi, 0) = 2(\phi, T'(0)^2\phi) = 2\,\|T'(0)\phi\|^2 > 0$$

Pelo teorema da função implícita, existe um aberto Ω_1 de X, com $\phi \in \Omega_1$, um intervalo aberto I_1 contendo o zero e uma função α de classe C^2, $\alpha \colon \Omega_1 \to I_1$, tais que

$$N(u, s(u)) = N(\phi, 0) = 0, \qquad \forall u \in \Omega_1.$$

Isto é

$$(T(s(u))u, T'(0)\phi) = 0, \qquad \forall u \in \Omega_1. \tag{2.27}$$

Pela continuidade de $\frac{\partial N}{\partial s}$ em $(\phi, 0)$, existem abertos $\Omega_2 \subset \Omega_1$ e um intervalo $I_2 \subset I_1$, tal que

$$\frac{\partial N}{\partial s}(u,s) > 0, \qquad \forall u \in \Omega_2, \qquad \forall s \in I_2. \tag{2.28}$$

Agora pelo lema (2.1.2), podemos escolher $\delta > 0$ e $\eta(\delta) > 0$, tais que:

$$\begin{aligned}
(-\delta,\delta) \subset I_2,\ \Omega &= \{v \in X \colon \|v - \phi\| < \frac{\eta(\delta)}{2}\} \subset s^{-1}((-\delta,\delta)) & (2.29)\\
\text{e}\ \ \|T(s(u))u - \phi\| &< \eta(\delta) \Rightarrow |s| < \delta & (2.30)
\end{aligned}$$

e (2.27), (2.28) ainda sejam válidos para Ω, $(-\delta,\delta)$ e $\alpha \colon \Omega \to (-\delta,\delta)$. Então, dado $u \in \Omega$, $s = \alpha(u)$ é o único mínimo de $g(s)$ em $(-\delta,\delta)$. Portanto,

$$\|T(\alpha(u))u - \phi\| \le \|T(s)u - \phi\|, \qquad \forall u \in \Omega, \quad \forall s \in (-\delta,\delta). \tag{2.31}$$

Vamos provar que (2.31) ainda é válida $\forall u \in \Omega$ e $s \in I\!R$. Suponhamos que existam $u \in \Omega$ e $s \in I\!R$ $|s| \ge \delta$, tais que $\|T(\alpha(u))u - \phi\| > \|T(s)u - \phi\|$. Então, por (2.31), temos

$$\begin{aligned}
\|T(s)\phi - \phi\| &\le \|T(s)\phi - T(s)u\| + \|T(s)u - \phi\|\\
&< \|\phi - u\| + \|T(\alpha(u))u - \phi\|\\
&\le \|\phi - u\| + + \|T(0)u - \phi\|\\
&= 2\|u - \phi\| < \eta(\delta).
\end{aligned}$$

Por (2.29) segue-se que $|s| < \delta$, que é uma contradição.

Portanto,

$$\|T(\alpha(u))u - \phi\| \le \|T(s)u - \phi\|, \quad \forall u \in \Omega, \quad \forall s \in I\!R. \tag{2.32}$$

Para provar (iii) em Ω, agora de (2.32), temos

$$\begin{aligned}
\|T(\alpha(u) - s)\phi - \phi\| &\le \|T(\alpha(u))T(-s)\phi - T(\alpha(u))u\| + \|T(\alpha(u))u - \phi\|\\
&\le 2\|T(s)u - \phi\|, \quad \forall\, u \in \Omega, \quad \forall\, s \in I\!R.
\end{aligned}$$

Assim, se $u \in \Omega$ e $s \in I\!R$ são tais que $T(s)u \in \Omega$, então

$$\alpha(u) - s \in (-\delta, \delta), \quad (T(\alpha(T(s)u))T(s)u, T'(0)\phi) = 0,$$

e

$$(T(\alpha(u) - s)T(s)u, T'(0)\phi) = (T(\alpha(u))u, T'(0)\phi) = 0.$$

Pela unicidade garantida pelo teorema da função implícita, obtemos:

$$\alpha(T(s)u) = \alpha(u) - s, \qquad \forall u \in \Omega, \quad \forall s \in I\!R, \text{ tais que } T(s)u \in \Omega. \tag{2.33}$$

Com efeito. Seja $\tilde{\Omega} = \{v \in \Omega \colon T(s)v \in \Omega\}$. $\tilde{\Omega}$ é aberto em X e $u \in \tilde{\Omega}$; logo existe $\delta_1 > 0$ tal que $T(s)B(u;\delta_1) \subset \Omega$, onde $B(u;\delta_1) = \{v \in X; \|v - u\| < \delta_1\}$. Definindo $\tilde{\alpha} \colon T(s)B(u;\delta_1) \to (-\delta, \delta)$ por $\tilde{\alpha}(T(s)v) = \alpha(v) - s$, $\forall v \in B(u;\delta_1)$, pelo teorema da função implícita obtemos $\tilde{\alpha} = \alpha$ em $T(s)B(u;\delta_1)$. Em particular, $\alpha(T(s)u) = \alpha(u) - s$.

Vamos estender agora (2.27), (2.32) e (2.33) para uma vizinhança tubular U_ε da órbita $\{T(s)\phi,\ s \in I\!R\}$. Seja $\varepsilon = \frac{\eta(\delta)}{2}$. Dado $u \in U_\varepsilon$, existe $s_0 \in I\!R$ tal que $\|u - T(s_0)\phi\| < \varepsilon$. Então $T(-s_0)u \in \Omega$. Definimos $\alpha(u) = \alpha(T(-s_0)u) - s_0$. Esta definição independe da escolha de s_0. De fato, suponhamos que existam s_0, s_1 em $I\!R$ tais que $\|U - T(s_0)\phi\| < \varepsilon$ e $\|u - T(s_1)\phi\| < \varepsilon$. Então $T(-s_0)u \in \Omega$, $T(-s_1)u \in \Omega$ e, por (2.33),

$$\alpha(T(-s_0)u) = \alpha(T(s_1 - s_0)T(-s_1)u) = \alpha(T(-s_1)u) - (s_1 - s_0).$$

Ou seja, $\alpha(T(-s_0)u) - s_0 = \alpha(T(-s_1)u) - s_1$.

Para provar que α é C^2 em U_ε é suficiente mostrar que para cada $u \in U_\varepsilon$, existe uma vizinhança $B_u \subset U_\varepsilon$, $u \in B_u$, tal que a restrição de s a B_u é C^2.

Dado $u \in U_\varepsilon$, seja $s_0 \in I\!R$ tal que $\|u - T(s_0)\phi\|_X < \varepsilon$. Pela continuidade da aplicação $v \to \|v - T(s_0)\phi\|$ em $v = u$, existe vizinhança $B_u \in U_\varepsilon$, $u \in B_u$, tal que $\|v - T(s_0)\phi\| < \varepsilon$, $\forall v \in B_u$. Portanto, $\alpha(u) = \alpha(T(-s_0)v) - s_0$, $\forall v \in B_u$, sendo $v \to \alpha(T(-s_0)v) - s_0$, C^2 em B_u.

Assim, para $u \in U_\varepsilon$ e $s \in \mathbb{R}$, usando a definição de α em U_ε e (2.32), (2.27), e (2.33) obtemos,

$$\begin{aligned} \|T(\alpha(u))u - \phi\| &= \|T(\alpha(T(-s_0)u) - s_0) - \phi\| \\ &= \|T(\alpha(T(-s_0)u))T(-s_0)u - \phi\| \leq \|T(s+s_0)T(-s_0)u - \phi\| \\ &= \|T(s)u - \phi\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T(\alpha(u))u, T'(0)\phi) &= (T(\alpha(T(-s_0)u) - s)u, T'(0)\phi) \\ &= (T(\alpha(T(-s_0)u))T(-s_0)u, T'(0)\phi) = 0. \text{ Que verifica } (ii) \end{aligned}$$

Fixados $u \in U_\varepsilon$ e $s \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(s)u - T(s_0)\phi\| < \varepsilon$. Então, $T(s-s_0)u \in \Omega$ e

$$\begin{aligned} \alpha(T(s)u) &= \alpha(T(-s_0)T(s)u) - s_0 \\ &= \alpha(T(s-s_0)u) - s_0 \\ &= \alpha(u) - (s - s_0) - s_0 = \alpha(u) - s. \end{aligned}$$

Para provar (iv), consideremos, as aplicações $m\colon X \times X \to \mathbb{R}$ e $\psi\colon X \to X \times X$ definidas para $m(u,v) = (u,v)$, $\psi(u) = (u, T(-s(u))T'(0)\phi)$. Temos

$$< m'(u,v) = (w_1, w_2) >= (w_1, v)_X + (u, w_2),$$

e

$$< \phi'(u), h >= (h, [-T(-s(u))T'(0)^2\phi] < \alpha'(u), h >),$$

$\forall w_1$, w_2, e h em X. Como

$$(m \; o \; \phi)(u) = (u, T(-\alpha(u))T'(0)\phi) = 0 \qquad \forall\, u \in U_\varepsilon,$$

segue-se

$$\begin{aligned} 0 &= < m'(\phi(u)), \phi'(u).h > \\ &= (h, T(-\alpha(u))T'(0)^2\phi) + < s'(u), h > (u, T(-\alpha(u))T'(0)^2\phi), \end{aligned}$$

de onde obtemos:

$$< \alpha'(u), h >= \frac{(T(\alpha(u))h, T'(0)\phi)}{(T(\alpha(u))u, T'(0)^2\phi)}.$$

Finalmente provemos (v). A aplicação $J \circ s'\colon U_\varepsilon \to X$ é de classe C^1 por ser uma composição de aplicações de classe C^1. De fato, $J\colon \mathrm{Dom}\,(J) \subset X^* \to X$ é C^1 por ser linear e $\alpha'\colon U_\varepsilon \to \mathrm{Dom}\,(J)$ é C^1 por ser a composta das seguintes aplicações C^1, $\alpha' = \xi \circ (\sigma, \theta)$, onde

$$\xi\colon I\!R \times \mathrm{Dom}\,(J) \to \mathrm{Dom}\,(J), \qquad \sigma\colon U_\varepsilon \to I\!R,$$

$$\theta\colon U_\varepsilon \to \mathrm{Dom}\,(J) \ \text{ e } \ (\sigma,\theta)\colon U_\varepsilon \to I\!R \times \mathrm{Dom}\,(J),$$

são definidas por $\xi(t,\varphi) = t\varphi$,

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \frac{1}{(u, T(-\alpha(u))T'(0)^2\Phi)_X}, \\ \theta(u) &= GT(-\alpha(u))T'(0)\Phi, \\ (\sigma,\theta)(u) &= (\sigma(u), \theta(u)). \end{aligned}$$

$\square$

Novamente sob as hipóteses 2 e 3 com o parâmetro c fixo, denotemos X=$\mathcal{X}_c$ o autovetor associado ao autovalor negativo de H:

$$H_c\mathcal{X}_c = -\lambda_c^2 G_{\mathcal{X}_c}, \qquad \|\mathcal{X}_c\| = 1 \tag{2.34}$$

Denotemos por $P = P_c$ o subespaço positivo de X. Então existe um $\delta = \delta_w > 0$ tal que:

$$\langle Hp, p\rangle \geq \delta\, \|p\|^2 \ \text{ para } \ p \in P \tag{2.35}$$

Para efeito de simplificação na notação escreveremos H, ϕ, L em lugar de H_c, ϕ_c, L_c, respectivamente.

Lema 2.1.4. *Dadas as hipóteses 2,3 e seja $d''(c) > 0$. Se $\langle Q'(\phi), y\rangle = (T'(0)\phi, y) = 0$ e $y \neq 0$, então $\langle Hy, y\rangle > 0$.*

Prova. Por (2.26) temos que $\langle H\phi', \phi'\rangle < 0$. Consideremos a decomposição espectral $\phi' = a_0\mathcal{X} + b_0T'(0)\phi + p_0$, onde $p_0 \in P$. Então $\langle Ha_0\mathcal{X} + b_0T'(0)\phi + p_0, a_0\mathcal{X} +$

$b_0T'(0)\phi + p_0\rangle < 0$, de onde $-a_0^2\lambda^2 + \langle Hp_0, p_0\rangle < 0$. Por outro lado, seja $y \in X$ com $\langle Q'(\phi), y\rangle = 0$ e $(T'(0)\phi, y) = 0$. Façamos a decomposição

$$y = a\mathcal{X} + p \text{ com } p \in P.$$

Por (2.26) temos que

$$\langle H\phi', y\rangle = -a_0 a\lambda^2 + \langle Hp_0, p\rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle Hy, y\rangle &= -a^2\lambda^2 + \langle Hp, p\rangle \geq -a^2\lambda^2 + \frac{\langle Hp, p_0\rangle^2}{\langle Hp_0, p_0\rangle} \\
&> -a^2\lambda^2 + \frac{(a_0 a\lambda^2)^2}{a_0^2\lambda^2} = 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.5. *Dadas as hipóteses 2 e 3, se $d''(c) > 0$, então existem $k > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$E(u) - E(\phi) \geq k \left\|T(\alpha(u))u - \phi\right\|^2$$

para $u \in U_\varepsilon$, com $Q(u) = Q(\phi)$.

Prova. Seja $q = G^{-1}Q'(\phi)$ e consideremos a descomposição

$$T(\alpha(u))u - \phi = aq + y,$$

onde $(y, q) = 0$ e a é um escalar. Então, usando o teorema de Taylor, temos que

$$\begin{aligned}
Q(\phi) = Q(u) &= Q(T(\alpha(u))u) \\
&= Q(\phi) + \langle Q'(\phi), T(\alpha(u))u - \phi\rangle + O\left\|T(\alpha(u))u - \phi\right\|^2) \\
&= Q(\phi) + \langle q, aq + y\rangle + (\left\|T(\alpha(u))u - \phi\right\|^2) \\
&= Q(\phi) + a\left\|q\right\|^2 + O\left\|T(\alpha(u))u - \phi\right\|^2).
\end{aligned}$$

Logo $a = \left\|T(\alpha(u))u - \phi\right\|^2)$.

Seja agora, $L(u) = E(u) - cQ(u)$. Usando novamente a expansão de Taylor obtemos

$$L(u) = L(T(\alpha(u))u) = L(\phi) + \langle L'(\phi), v\rangle + \frac{1}{2}\langle L''(\phi)v, v\rangle + o(\|v\|^2)$$

onde $v \equiv T(\alpha(u))u - \phi = aq + y$. Como $Q(\phi) = Q(u)$, $L'(\phi) = 0$ e $L''(\phi) = H$, segue que,

$$\begin{aligned} E(u) - E(\phi) &= \frac{1}{2}\langle Hv, v\rangle + o(\|v\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + O(a^2) + O(|a|\,\|v\|) + o(\|v\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + o(\|v\|^2). \end{aligned}$$

Agora, de (ii) do lema (2.1.3) e do fato que $\langle G^{-1}Q'(\phi), T'(0)\phi\rangle = 0$, temos

$$(y, T'(0)\phi) = (T(\alpha(u))u - \phi - aq, T'(0)\phi) = 0.$$

Pelo lema (2.1.4) temos que se $\langle Q'(\phi), y\rangle = 0$, então $\langle Hy, y\rangle \geq k\,\|\Pi y\|^2$, para algum $k > 0$, onde Π é a projeção ortogonal sobre $[T'(0)\phi]^{\perp}$. Portanto

$$E(u) - E(\phi) \geq k\,\|y\|^2 + o(\|v\|^2).$$

Finalmente, como

$$\|y\| = \|v - aq\| \geq \|v\| - |a|\,\|q\| \geq \|v\| - O(\|v\|^2),$$

temos que para $\|v\|$ suficientemente pequeno

$$E(u) - E(\phi) \geq k\,\|v\|^2 = k\,\|T(\alpha(u))u - \phi\|^2,$$

como queríamos provar. □

Teorema 2.1.6 (Teorema 1, [21], pág. 167). *Dadas as hipóteses 1 e 2, se o operador H tem seu núcleo gerado por $T'(0)\phi$ e o resto do espectro é positivo (contínuo), tal que existe $\delta > 0$ com $\inf(\sigma(H) \cap (0, \infty)) \geq \delta$, então a $\phi-$órbita é estável.*

Prova. Esta prova será feita por contradição e será dividida em 3 partes: Primeiramente, das hipóteses 1 e 2 existe uma constante $k > 0$ tal que para todo $y \in [kerH]^{\perp}$ temos que

$$< Hy, y > \geq k\,\|y\|^2 \tag{2.36}$$

De fato, das hipóteses temos, $KerH = span\{\ T'(0)\phi\ \}$ tal que $0 \in \sigma(H)$ é simples e existe um $a > 0$ tal que $(\sigma(H) - \{0\}) \subset [a, \infty)$. Sejam $X_1 = Ker\ H$ e $X_2 = (KerH)^{\perp}$, logo $X = X_1 \oplus X_2$ pois X_1 é fechado, sejam também $H_1 = H|_{X_1}$ e $H_2 = H|_{X_2}$, Então $\sigma(H_1) = \{0\}$ e pelo teorema de separação do espectro (1.4.3) temos que $\sigma(H_2) = \sigma(H) - \{0\}$. Então, todo $x \in X$ pode-se escrever da forma:

$$x = \alpha T'(0)\phi + y, \quad y \in X_2 = [KerH]^{\perp},$$

e H_2 definido em X_2 é um operador positivo limitado inferiormente ($H_2 \geq \delta$) isto é existe $\delta > 0$ tal que $\langle H_2 y, y\rangle \geq \delta \|y\|^2, \quad \delta \leq \inf \sigma(H_2) \quad \forall y \in [KerH]^{\perp}$. com o qual concluimos a prova.

Por outro lado, das hipóteses 1 e 2 temos que existem $k > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que:

$$E(u) - E(\phi) \geq k \|T(\alpha(u))u - \phi\|^2, \tag{2.37}$$

para $u \in U_\varepsilon = \{u \in X : \inf_{s \in \mathbb{R}} \|u - T(s)u\| < \varepsilon\}$, e $Q(u) = Q(\phi)$.
Com efeito. Fazemos $T(\alpha(u))u - \phi = aT'(0)\phi + y$, onde $y \in [KerH]^{\perp}$, pelo lema (2.1.3) parte (ii) temos que $(T(\alpha(u))u - \phi, T'(0)\phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$, logo $T(\alpha(u))u - \phi \in [KerH]^{\perp}$.
Por outro lado, seja $L(u) = E(u) - cQ(u)$, usando uma expansão de Taylor temos que

$$L(u) = L(T(\alpha(u))u) = L(\phi) + \langle L'(\phi), v\rangle + \frac{1}{2}\langle L''(\phi)v, v\rangle + o(\|v\|^2),$$

onde $v = T(\alpha(u))u - \phi$. Como $Q(u) = Q(\phi)$, $L'(\phi) = 0$ e $L''(\phi) = H$ então

$$\begin{aligned} L(u) - L(\phi) &= E(u) - cQ(u) - E(\phi) + cQ(\phi) \\ &= E(u) - E(\phi) \\ &= \frac{1}{2}\langle Hv, v\rangle + o(\|v\|^2). \end{aligned}$$

Como $v \in [KerH]^{\perp}$, pelo que foi provado acima temos que

$$\begin{aligned} E(u) - E(\phi) &\geq \frac{k}{2}\|v\|^2 + o(\|v\|^2) \\ &= (\frac{k}{2} + \frac{o(\|v\|^2)}{\|v\|^2})\|v\|^2 \geq \|v\|^2 (k') \\ &= k' \|T(s(u)) - \phi\| . \end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos que ϕ—órbita não é estável. Então existem uma sequência de dados iniciais $u_n(0)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\inf_{s\in \mathbb{R}} \|u_n(0) - T(s)\phi\| \to 0 \quad \text{e} \quad \sup_{t>0} \inf_{s\in \mathbb{R}} \|u_n(t) - T(s)\phi\| \geq \delta$$

onde $u_n(t)$ é uma solução com dado inicial $u_n(0)$. Pela continuidade de u_n em t, existe uma sequência t_n de tempos, tais que:

$$\inf_{s\in \mathbb{R}} \|u_n(t_n) - T(s)\phi\| = \delta, \tag{2.38}$$

sendo que estas soluções existem pelo menos no intervalo $[0, t_n]$ para n suficientemente grande. Também temos que

$$\inf_{s\in \mathbb{R}} \|u_n(0) - T(s)\phi\| = \inf_{s\in \mathbb{R}} \|T(-s)u_n(0) - \phi\| = \|T(-\alpha(u_n(0))) - \phi\| ,$$

logo $T(-\alpha(u_n(0))) \to \phi$. Pela hipótese 1, a continuidade e invariância de E e Q temos que

$$E(T(-\alpha(u_n(0)))) = E(u_n(0)) = E(u_n(t_n)) \to E(\phi)$$

$$Q(T(-\alpha(u_n(0))) = Q(u_n(0)) = Q(u_n(t_n)) \to Q(\phi),$$

seja agora, uma sequência $v_n \in U_\varepsilon$ tal que $Q(v_n) = Q(\phi)$ e $\|v_n - v_n(t_n)\|_X \to 0$. Então pela continuidade de E ($E(v_n) \to E(\phi)$) e (2.37), temos que

$$0 \leftarrow E(v_n) - E(\phi) \geq k \|T(\alpha(v_n))v_n - \phi\|^2 = k \|v_n - T(-\alpha(v_n))\phi\|^2 .$$

Logo $\|u_n(t_n) - T(-\alpha(v_n))\phi\| \to 0$, pois $\|u_n(t_n) - T(-\alpha(v_n))\phi\| \leq \|u_n(t_n) - v_n\| + \|v_n - T(-\alpha(v_n))\phi\|$. Isto contradiz a equação (2.38). Portanto ϕ_c-órbita é estável.

□

Teorema 2.1.7 (Teorema 2, [21], pág. 167). *Suponha as hipóteses 1, 2, e 3 válidas, e $c_1 < c < c_2$. Então a ϕ_c-órbita é estável se e somente se a função $d(.)$ é convexa numa vizinhança de c.*

Prova. Como em nosso caso estudamos a estabilidade para $d(.) > 0$, provaremos somente o caso em que $d(.)$ estritamente convexa numa vizinhança de c implica que a ϕ_c-órbita é estável.

Pelo lema (2.1.5) temos que, existem $k > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$E(u) - E(\phi) \geq k \left\|T(\alpha(u))u - \phi\right\|^2 \tag{2.39}$$

para $u \in U_\varepsilon$, com $Q(u) = Q(\phi)$.

Por outro lado, suponhamos que ϕ_c–órbita não é estável. Então existem uma sequência de dados iniciais $u_n(0)$ e $\delta > 0$ tais que

$$\inf_{s\in\mathbf{R}} \|u_n(0) - T(s)\phi\| \to 0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{t>0} \inf_{s\in\mathbf{R}} \|u_n(t) - T(s)\phi\| \geq \delta$$

onde $u_n(t)$ é uma solução com dado inicial $u_n(0)$. Pela continuidade de u_n em t, existe uma sequência t_n de tempos, tais que:

$$\inf_{s\in\mathbf{R}} \|u_n(t_n) - T(s)\phi\| = \delta, \tag{2.40}$$

sempre que estas soluções existem pelo menos no intervalo $[0, t_n]$ para n suficientemente grande.

Também temos que

$$\inf_{s\in\mathbf{R}} \|u_n(0) - T(s)\phi\| = \inf_{s\in\mathbf{R}} \|T(-s)u_n(0) - \phi\| = \|T(-\alpha(u_n(0))) - \phi\|,$$

logo $T(-\alpha(u_n(0))) \to \phi$. Pela hipótese 1, a continuidade e a invariância de E e Q temos que

$$E(T(-\alpha(u_n(0)))) = E(u_n(0)) = E(u_n(t_n)) \to E(\phi)$$

$$Q(T(-\alpha(u_n(0)) = Q(u_n(0)) = Q(u_n(t_n)) \to Q(\phi).$$

Seja agora, uma sequência $v_n \in U_\varepsilon$ tal que $Q(v_n) = Q(\phi)$ e $\|v_n - v_n(t_n)\|_X \to 0$. Então pela continuidade de E $(E(v_n) \to E(\phi))$ e (2.39), temos

$$0 \leftarrow E(v_n) - E(\phi) \geq k \, \|T(\alpha(v_n))v_n - \phi\|^2 = k \, \|v_n - T(-\alpha(v_n))\phi\|^2 .$$

Logo $\|u_n(t_n) - T(-\alpha(v_n))\phi\| \to 0$, pois $\|u_n(t_n) - T(-\alpha(v_n))\phi\| \leq \|u_n(t_n) - v_n\| + \|v_n - T(-\alpha(v_n))\phi\|$. Isto contradiz a equação (2.40). Portanto ϕ_c-órbita é estável.

A prova do caso $d''(.) = 0$ numa vizinhança de c implica a estabilidade da ϕ_c-órbita é feita basicamente seguindo as ideias da prova do caso $d''(.) > 0$, usando os teoremas 5.2 e corolário 5.3 de [21]. E a prova da suficiência é feita por contradição usando o teorema 5.4 de [21]. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Lemas sobre existência de solitons

Nesta seção provamos primeiramente um lema para garantir a existência de *solitons* da primeira aplicação, logo verificamos um lema que nos permitirá o cálculo explícito dos *solitons* das aplicações e finalmente provamos um lema que será usado nas aplicações para verificar que as soluções são de classe $C^1(\mathcal{I}; H^1(\mathbb{R}))$.

Lema 3.1.1 (Existência e Unicidade [21], pág. 186). *Seja $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo:*

(i) $f'(0) > 0$

(ii) *$\exists\, \nu$ tal que $F(\nu) < 0$. (Consequentemente, de (i), $F(u)$ possui pelo menos um zero)*

(iii) *Se $u_0 = \min\{|u| \neq 0 \,/\, F(u) = 0\}$ então $f(u_0) \neq 0$,*
onde $F(u) = \int\limits_0^u f(s)ds$.

Então a equação

$$-p_{xx} + f(p) = 0 \qquad u \in C^2(\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

Possui uma única solução $p \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo

(a) $p(x) > 0$, $p(x) = p(-x)$, $p(0) = u_0$.

(b) $p(x)$ *decai exponencialmente de mesmo modo que* $e^{-c|x|}$ *com* $c > 1$.

Prova. Faremos um esboço da demonstração usando basicamente as idéias de [9], págs. 328-332 e 335-337.

Sob as hipóteses dadas, a solução p de (3.1) pode ser obtida como uma solução do problema de valor inicial

$$-p_{xx} + f(p) = 0 \quad \text{em} \quad I\!R, \tag{3.2}$$

$p(0) = u_0$, $p_x(0) = 0$.

As outras soluções são obtidas por translações, isto é são da forma $v(x) = p(x + C$, sendo C uma constante real.

Denotemos por p a solução de (3.2). Esta solução existe e é única num certo intervalo máximal $(-\bar{x}, \bar{x})$. Multiplicando por p_x a equação em (3.2) e integrando obtemos

$$-\frac{1}{2}p_x(x)^2 - F(p(x)) = 0, \qquad |x| < \bar{x}. \tag{3.3}$$

Observe que:

(a) $p(x) > 0$, $|x| < \bar{x}$. De fato, caso contrário, existiria x_0 com $p(x_0) = 0$. Mas por (3.3), $p_x(x_0) = 0$, e pela unicidade de soluções do problema de valor inicial (3.2), $p \equiv 0$, que é impossivel. E obviamente tem-se que $p(-x) = p(x)$, $|x| < \bar{x}$ e $p(0) = p_0$. A parte (b) do decaimento exponencial segue as ideias da secção 4 págs 328-332 de [9]. $\square$

Lema 3.1.2 (Cálculo explícito de solitons). *Sejam* α, β *constantes positivas quaisquer,* q *enteiro positivo, e* ϕ, ϕ', ϕ'' *suaves que decaem no infinito. Então a equação*

$$-\phi'' + \alpha\phi - \beta\phi^{q+1} = 0 \;\; com \;\; \phi'(0) = 0 \tag{3.4}$$

Possui uma solução dada por

$$\phi_q(x) = (\frac{\alpha}{2\beta}(q+2))^{\frac{1}{q}} sech^{\frac{2}{q}}(\sqrt{\alpha}\frac{qx}{2}) \tag{3.5}$$

Prova. Faremos uma mudança de variável de tal maneira que desapareçam os coeficientes α e β da equação (3.4), da forma

$$\phi = Av(Bx) \text{ onde } A \text{ e } B \text{ estão dadas em função de } \alpha \text{ e } \beta \tag{3.6}$$

Derivando duas vezes (3.6) temos que $\phi'' = AB^2 v(Bx)$. Logo, substituindo em (3.4) obtemos

$$-AB^2 v'' + \alpha A v - \beta A^{q+} v^{q+1} = 0$$

Portanto devemos ter $AB^2 = \alpha A = \beta A^{q+1}$ isto é, $A = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{q}}$ e $B = \sqrt{c}$. Então, substituindo $\phi = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{q}} v(\sqrt{c}x)$, em (3.4) obtemos,

$$v'' = v - v^{q+1} \tag{3.7}$$

Agora, multiplicamos (3.7) por v' e integrando temos que

$$(v')^2 = v^2 - 2\frac{1}{q+2} v^{q+2} \tag{3.8}$$

Fazendo a mudança de variável $v = w^{-\frac{2}{q}}$ em (3.8) obtemos

$$\frac{4}{q^2} w^{-2(\frac{q+2}{q})}(w')^2 = w^{-\frac{4}{q}} - \frac{2}{q+2} w^{-2(\frac{q+2}{q})} \tag{3.9}$$

Simplificando e derivando obtemos a equação linear,

$$w'' - \frac{q^2}{4} w = 0,$$

Aplicando o método do polinômio caraterístico temos que $w = A_1 e^{\frac{q}{2}x} + A_2 e^{-\frac{q}{2}x}$. Como $\phi'(0) = 0 \Rightarrow v'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2 = A$, então

$$w = 2A cosh(\frac{q}{2}x),$$

Logo $v = (2A)^{-\frac{2}{q}} sech^{\frac{2}{q}}(\frac{q}{2}x)$ e, consequentemente

$$\phi_q = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{q}} (2A)^{\frac{2}{q}} sech^{\frac{2}{q}}(\frac{\sqrt{\alpha}qx}{2}) \tag{3.10}$$

$$\phi(0)^q = (\frac{\alpha}{\beta})(2A)^2 \tag{3.11}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.4) por ϕ' e integrando temos

$$-\frac{(\phi')^2}{2} + \alpha\frac{\phi^2}{2} - \beta\frac{\phi^{q+2}}{q+2} = 0 \Rightarrow \alpha\frac{\phi^2(0)}{2} = \beta\frac{\phi^{q+2}(0)}{q+2}$$

Então

$$\phi(0)^q = (\frac{\alpha}{\beta})(\frac{q+2}{2}) \tag{3.12}$$

Portanto, de (3.11) e (3.12) temos que

$$2A = 2^{-\frac{1}{2}}(q+2)^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente obtemos

$$\phi_q(x) = (\frac{\alpha}{2\beta}(q+2))^{\frac{1}{q}} sech^{\frac{2}{q}}(\sqrt{\alpha}\frac{qx}{2}) \tag{3.13}$$

□

Observação 3.1.1. Se $f \in C^3(\mathbb{R})$ e f função par (i.e. $f(x) = f(-x)$). Então pelo lema 2 de [9] para $n = 1$, existem constantes positivas K e δ tais que,

$$|\partial_\gamma f(x)| \leq K e^{-\delta|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ e\ \gamma = 0,1,2. \tag{3.14}$$

Lema 3.1.3. *Sejam $f \in C^3(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ função par, $\phi_\alpha(x) = \mu(\alpha) f(\nu(\alpha)x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$, tais que*

1) *para cada $x \in \mathbb{R}$ a função $s \to f(\nu(s)x)$ de $(0,\infty)$ em $\mathbb{R}$ é de classe C^2.*

2) *μ e ν ambas crescentes e de classe C^2 em $(0,\infty)$, tal que μ' decrescente.*

Se $\Lambda(\alpha) = \phi_\alpha$, $\quad \forall\, \alpha > 0$, então

$$\Lambda \in C^1((0,\infty); H^1(\mathbb{R})) \cap C((0,\infty); H^2(\mathbb{R})).$$

Prova. Usaremos alguns argumentos do Teorema 2.2 de [31]. Seja $w_\alpha = \mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)+ \mu(\alpha)\nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por (3.14) para $n = 1$ e $\gamma = 1 < 2$ temos que $w_\alpha \in H^1(\mathbb{R})$. Vamos provar que $\Lambda'(\alpha) = w_\alpha$, i.e., que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\Lambda(\alpha+h)-\Lambda(\alpha)}{h} - w_\alpha\right\|_1 = 0.$$

Para isto é suficiente provar que

(i) $\left\|\frac{\Lambda(\alpha+h)-\Lambda(\alpha)}{h} - w_\alpha\right\|_1 \to 0$, quando $h \to 0$;

(ii) $\left\|\frac{1}{h}(\frac{d}{dx}\Lambda(\alpha+h) - \frac{d}{dx}\Lambda(\alpha)) - \frac{\partial w_\alpha}{\partial x}\right\|_1 \to 0$, quando $h \to 0$.

Prova de (i).

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\Lambda(\alpha+h)-\Lambda(\alpha)}{h} - w_\alpha\right\|_1^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\mu(\alpha+h)f(\nu(\alpha+h)x)-\mu(\alpha)f(\nu(\alpha)x)}{h} - w_\alpha(x)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\mu(\alpha+h)f(\nu(\alpha+h)x)-\mu(\alpha)f(\nu(\alpha)x)}{h}\right. \\
&- \left.\mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)-\mu(\alpha)\nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\mu(\alpha+h)f(\nu(\alpha+h)x)-\mu(\alpha)f(\nu(\alpha)x}{h}\right. \\
&+ \frac{\mu(\alpha)f(\nu(\alpha+h)x)-\mu(\alpha)f(\nu(\alpha+h)x)}{h} \\
&- \left.(\mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)+\mu(\alpha)\nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x))\right|^2 dx \\
&\le 2\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h}f(\nu(\alpha+h)x)-\mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)\right|^2 dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}}\left|\mu(\alpha)\right|^2\left|\frac{f(\nu(\alpha+h)x)-f(\nu(\alpha)x)}{h} - \nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)\right|^2 dx
\end{aligned}$$

Seja

$$\psi_h(x) = \left|\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h}f(\nu(\alpha+h)x)-\mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)\right|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tal que $-\frac{\alpha}{2} < h < 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ fixo, a função $s \to f(\mu(s)x)$ de $(0,\infty)$ em $\mathbb{R}$ é contínua, logo $f(\nu(\alpha+h)x) \to f(\nu(\alpha)x)$ quando $h \to 0$. Como μ

é diferenciável, segue-se que $\psi_h(x) \to 0$, quando $h \to 0$. Além disso, pelo teorema do valor médio, existe $0 < \beta < 1$ tal que $\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h} = \mu'(c+\beta h)$. Por outro lado da hipótese 1) e (3.14) temos que $|f(\nu(\alpha+h)x)|$ e $|f(\nu(\alpha)x)|$ são $\leq Ke^{-2\delta\nu(\frac{\alpha}{2})|x|}$, de modo que obtemos

$$|\psi_h(x)| \leq \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \quad -\frac{\alpha}{2} < h < 1,\ h \neq 0,$$

onde

$$\psi(x) = 4K^2 \left| \mu'\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right|^2 e^{-2\delta\nu(\frac{\alpha}{2})|x|}.$$

Como $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue concluimos que $\int_{\mathbb{R}} \psi_h(x)dx \to 0$, quando $h \to 0$.

Agora, seja

$$\xi_h(x) = \left| \frac{f(\nu(\alpha+h)x) - f(\nu(\alpha)x)}{h} - \nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x) \right|^2,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\alpha}{2} < h < 1, \quad h \neq 0$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, usando a diferenciabilidade da função $s \to f(\nu(s)x)$ de $(0,\infty)$ em $\mathbb{R}$, concluimos que $\xi_h(x) \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, usando novamente o teorema de valor médio, encontramos $0 < \theta < 1$ tal que

$$\frac{f(\nu(\alpha+h)x) - f(\nu(\alpha)x)}{h} = \nu'(\alpha+\theta h)x.f'(\nu(\alpha+\theta h)x).$$

Logo, usando novamente (3.14) obtemos $|\xi_h(x)| \leq \xi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\alpha}{2} < h < 1$, $h \neq 0$, onde

$$\xi(x) = 4K^2 N \nu'\left(\frac{\alpha}{2}\right)|x|^2 e^{-2\delta\nu(\frac{\alpha}{2})|x|}.$$

Como $\xi \in L^1(\mathbb{R})$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue concluimos que $\int_{\mathbb{R}} \xi_h(x)dx \to 0$ quando $h \to 0$. Portanto disto concluimos a prova de (i).

Prova de (ii): Similarmente ao caso (i) temos

$$\left\| \frac{1}{h}\left(\frac{d}{dx}\Lambda(\alpha+h) - \frac{d}{dx}\Lambda(\alpha)\right) - \frac{d}{dx}w_\alpha \right\|_1^2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{h}\left(\frac{d}{dx}(\mu(\alpha+h)f(\nu(\alpha+h)x)) - \frac{d}{dx}(\mu(\alpha)f(\nu(\alpha)x))\right)\right. \\
&- \left.\frac{d}{dx}(\mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)) - \frac{d}{dx}(\mu(\alpha)\nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x))\right|^2 dx \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx}\left[\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h} f(\nu(\alpha+h)x) - \mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)\right]\right|^2 dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx}\left[\mu(\alpha)\left(\frac{f(\nu(\alpha+h)x) - f(\nu(\alpha)x)}{h} - \nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)\right]\right|^2 dx \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dx}\left[\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h} f(\nu(\alpha+h)x) - \mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)\right]\right|^2 dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d\mu(x)}{dx}\right|^2 \left| \frac{f(\nu(\alpha+h)x) - f(\nu(\alpha)x)}{h} - \nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)\right|^2 dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}} \left|\mu(x)\right|^2 \left| \frac{d}{dx}\left[\frac{f(\nu(\alpha+h)x) - f(\nu(\alpha)x)}{h} - \nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)\right]\right|^2 dx
\end{aligned}$$

Portanto, como em (i) tomemos

$$\psi_h(x) = \left|\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h} f(\nu(\alpha+h)x) - \mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)\right|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\zeta_h(x) = \left| \frac{d}{dx}\left[\frac{\mu(\alpha+h)-\mu(\alpha)}{h} f(\nu(\alpha+h)x) - \mu'(\alpha)f(\nu(\alpha)x)\right]\right|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e$$

$$\eta_h(x) = \left| \frac{d}{dx}\left[\frac{f(\nu(\alpha+h)x) - f(\nu(\alpha)x)}{h} - \nu'(\alpha)x.f'(\nu(\alpha)x)\right]\right|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por (i) temos que $\int_{\mathbb{R}} \psi_h(x)dx \to 0$ quando $h \to 0$, e fazendo cálculos análogos, usando novamente os teoremas do valor médio e teorema da convergência dominada de Lebesgue concluimos a prova de (ii).

Finalmente, usando argumentos análogos provamos que a aplição $\alpha \to \Lambda(\alpha)$ de $(0,\infty)$ em $H^1(\mathbb{R})$ é contínua e que $\Lambda \in C((0,\infty); H^2(\mathbb{R}))$. $\square$

3.2 Ondas Viajantes para a Equação da Onda Não-linear

Uma versão não-linear da equação da onda é dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0 \quad em \quad I\!R \tag{3.15}$$

$$u(x,0) = u_0, \quad \partial_t u(x,0) = u_1.$$

A equação em (3.15) pode ser escrita na forma (2.1), onde $U = (u,v) \in X = H^1(I\!R) \times L^2(I\!R)$.

Teorema 3.2.1 (Problema de Valor Inicial e Invariantes). *Seja f um polinômio de grau ≥ 2, sem termos constante e linear. Então, para todo $(u_o, u_1) \in H^k(I\!R^n) \times H^{k-1}(I\!R^n)$, com $k \in Z^+$, $k > n/2+2$, existe $T = T(f, \|u_o\|_k, \|u_1\|_{k-1}) > 0$ e uma unica solução $u = u(x,t)$ do problema* (3.15)*, definida em $(x,t) \in I\!R^n \times [-T,T]$ satisfazendo*

$$u \in \cap_{j=0}^{2} C^j([-T,T] : H^{k-j}(I\!R^n)).$$

Além disso, a equação (3.15) *possui os seguintes invariantes*

$$E(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{v^2}{2} + \frac{(u_x)^2}{2} + F(u))dx \qquad e$$

$$Q(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x v dx$$

onde $v = u_t$.

Prova. Para o PVI veja [34], pág. 38.

Calculemos agora os funcionais E e Q, que são conhecidos na física como energia e momento respectivamente. Faremos este cálculo usando a técnica dos multiplicadores.

Cálculo de $E(u,v)$: Fazendo $v = u_t$ em (3.15) obtemos

$$\begin{cases} v_t = u_{xx} - f(u) \\ u(0) = u_0 \quad e \quad u_t(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.16) por $v = u_t$, integrando em $I\!R$ e integrando por partes temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} vv_t dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u_t f(u) dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{2} dx = u_t u_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x u_{xt} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u_t f(u) dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{2} dx = -\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u_x)^2}{2} dx - \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u) dx,$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.

Ou ainda

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{v^2}{2} + \frac{(u_x)^2}{2} + F(u))dx\right) = 0,$$

Logo $E(u, u_t) = E(u_0, U_1)$, $\forall t$, onde

$$E(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{v^2}{2} + \frac{(u_x)^2}{2} + F(u))dx$$

Para o cálculo de $Q(u, v)$, multiplicamos (3.16) por u_x e integramos em $I\!R$ e usando integração por partes para obter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x v_t dx &= \frac{(u_x)^2}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x f(u) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) u_x dx \\ &= \lim_{M\to\infty} [-F(u(M)) + F(u(-M))] = 0 \end{aligned}$$

logo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x v_t dx = 0$$

De

$$\frac{d}{dt}(u_x v) = u_{xt} v + u_x v_t \Rightarrow u_x v_t = \frac{d}{dt}(u_x v) - u_{xt} v \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x v_t \, dx &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x v dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xt} v \, dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x v \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2}\right)' dx \end{aligned}$$

Então

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x v dx - \lim_{M\to\infty} [\frac{u_t(M)}{2} - \frac{u_x(-M)}{2}] = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x v dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_x v dx = const.$$

Portanto

$$Q(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x v dx \,.$$

Na sequência calcularemos as derivadas de Gâteaux: $\frac{\partial E}{\partial V}(u_1,u_2)$ e $\frac{\partial Q}{\partial V}(u_1,u_2)$, onde $U=(u_1,u_2)$ e $V=(v_1,v_2)$ pertencem a $X = H^1(I\!R)\times L^2(I\!R)$ e verificaremos que estas coincidem com as derivadas de Fréchet dadas por.

$$\langle E'(U),V\rangle \text{ e } \langle Q'(U),V\rangle$$

onde $U=(u_1,u_2)$ e $V=(v_1,v_2)$ pertencem a $X = H^1(I\!R)\times L^2(I\!R)$ e calcularemos $E'(U)$ e $Q'(U)$ explícitamente. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial V}(u_1,u_2) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[E(U+\varepsilon V)-E(U)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{2}(u_2+\varepsilon v_2)^2+\frac{1}{2}((u_1+\varepsilon v_1)_x)^2+F(u_1+\varepsilon v_1)]dx\right) \\
&- \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{u_2^2}{2}+\frac{(u_{1_x})^2}{2}+F(u_1)]dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 v_2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{1_x} v_{1_x} dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(u_1+\varepsilon v_1)-F(u_1)}{\varepsilon}dx,
\end{aligned}$$

De

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(u_1+\varepsilon v_1)-F(u_1)}{\varepsilon}dx =< v_1, \nabla F(u_1) >= v_1 F'(u_1) = v_1 f(u_1),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial V}(u_1,u_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(u_2 v_2 + u_{1_x} v_{1_x} + f(u_1) v_1)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}((-u_{1_{xx}}+f(u_1))v_1 + u_2 v_2) dx \,.
\end{aligned}$$

Então $\partial E_1 = -u_{1_{xx}} + f(u_1)$, $\partial E_2 = u_2$ e portanto

$\frac{\partial E}{\partial V}(u_1,u_2) = DE(U,V)$, pois $\frac{\partial E}{\partial V}(U) \in H^{-1}(I\!R)\times L^2(I\!R)$.

Verifiquemos a equivalência das derivadas de Gâteaux e Fréchet i.é:

$$\frac{1}{\|V\|_X}|E(U+V)-E(U)-DE(U,V)| \longrightarrow 0 \text{ quando } \|V\|_X \to 0.$$

Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\|V\|_X}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{(u_2+v_2)^2}{2}+\frac{1}{2}(u_{1_x}+v_{1_x})^2 \\
+F(u_1+v_1)]dx &- \int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{2}u_2^2+\frac{1}{2}(u_{1_x})^2+F(u_1)]dx \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty}[u_2v_2+u_{1_x}v_{1_x}+F'(u_1)v_1]dx\Big| \\
&= \frac{1}{\|V\|_X}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{v_2^2}{2}+\frac{(v_{1_x})^2}{2}]dx\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\,\|V\|_X}\left[\|v_2\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\|v_{1_x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq \frac{1}{2\,\|V\|_X}\left[\|v_2\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\|v_1\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\,\|(v_1,v_2)\|_X \to 0
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
< E'(U), V >= DE(U,V) = \int_{-\infty}^{+\infty}((-u_{1_{xx}}+f(u_1))v_1+u_2v_2)dx \tag{3.17}
$$

Ou seja

$$
E'(U) = \begin{pmatrix} -u_{1_{xx}}+f(u_1) \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3.18}
$$

Por outro lado, calculemos primeiro $\frac{\partial Q}{\partial V}(u_1,u_2)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial V}(u_1,u_2) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[Q(U+\varepsilon V)-Q(U)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x(u_1+\varepsilon v_1)(u_2+\varepsilon v_2)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x u_1u_2dx\right) \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x v_1u_2+\partial_x u_1v_2)dx
\end{aligned}
$$

Como $\partial_x u_2 \in H^{-1}(\mathbb{R})$ e $\partial_x u_1 \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$
DQ(U,V) = -\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x v_1u_2+\partial_x u_1v_2)dx
$$

Provemos agora que

$$
\frac{1}{\|V\|_X}|Q(U+V)-Q(U)-DQ(U,V)| \to 0 \text{ quando } \|V\|_X \to 0
$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|V\|_X}\bigg|\int_{-\infty}^{+\infty} & (\partial_x u_1 u_2 + \partial_x u_1 v_2 + \partial_x v_1 u_2 + \partial_x v_1 v_2 - \partial_x u_1 u_2)\, dx \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x v_1 u_2 + \partial_x u_1 v_2)\, dx \bigg| \\
& = \frac{1}{\|V\|_X}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x v_1 v_2\, dx\right| \\
& \leq \frac{1}{\|V\|_X} \|\partial_x v_1\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v_2\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
& \leq \frac{1}{\|V\|_X} \|v_1\|_{H^1(\mathbb{R})} \|v_2\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
& \leq \frac{1}{\|V\|_X} \left[\|v_1\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_2\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right] \\
& \leq \|(v_1, v_2)\|_X \to 0
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
< Q'(U), V >= DQ(U,V) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x v_1 u_2 + \partial_x u_1 v_2)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (-\partial_x u_2 v_1 + \partial_x u_1 v_2)\, dx
\end{aligned}$$

Isto é,

$$Q'(U) = \begin{pmatrix} -\partial_x u_2 \\ \partial_x u_1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

□

Em $X = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, consideraremos o grupo das translações $\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$, definido por: $T(s)u = (u_1(.-s), u_2(.-s))$, $\forall u = (u_1, u_2) \in X$. Temos

Lema 3.2.2. *$\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ é um grupo de operadores unitários em $X = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, fortemente contínuo, cujo gerador infinitesimal é o operador $T'(0)$ de X, definido por*

$$\mathrm{Dom}\,(T'(0)) = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}), \quad T'(0) = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{bmatrix}.$$

Prova. Usaremos argumentos do lema 3.1 de [31]. A verificação de $\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ ser grupo unitário é imediato, verifiquemos que $\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ é C^0, Seja $(u_1, u_2) \in X$.

Dado $\varepsilon > 0$, sejam ϕ_1, ϕ_2 funções em $C_0^\infty(I\!R)$ tais que $\|(\phi_1, \phi_2) - (u_1, u_2)\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$. Como ϕ_1, $\partial_x\phi_1$ e ϕ_2 são uniformemente contínuas em $I\!R$, existe $0, \delta = \delta(\varepsilon) < 1$ tal que $|\phi_1(x-s) - \phi_1(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$, $|\partial_x\phi_1(x-s) - \partial_x\phi_1| < \frac{\varepsilon}{K}$ e $|\phi_2(x-s) - \phi_2(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$, $\forall |s| < \delta$, $\forall x \in I\!R$, onde $K = 3[3(2\rho+2)]^{\frac{1}{2}}$ e $\rho > 0$ é escolhido de modo que $\operatorname{supp}\phi_1$, $\operatorname{supp}\phi_2$ e $\operatorname{supp}\partial_x\phi_1$ estejam contidos em $[-\rho, \rho]$. Então

$$
\begin{aligned}
\|T(s)(\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, \phi_2)\|_X^2 &= \int_{-\rho-1}^{\rho+1} \left|\partial_x\phi_1(x-s) - \partial\phi_1(x)\right|^2 dx \\
&+ \int_{-\rho-1}^{\rho+1} \left|\phi_1(x-s) - \phi_1(x)\right|^2 dx \\
&+ \int_{-\rho-1}^{\rho+1} \left|\phi_2(x-s) - \phi_2(x)\right|^2 dx \\
&< \frac{3\varepsilon^2(2\rho+2)}{K^2}, \qquad \forall |s| < \rho.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $|s| < \rho$

$$
\begin{aligned}
\|T(s)(u_1, u_2) - (u_1, u_2)\|_X &\leq \|T(s)(u_1, u_2) - T(s)(\phi_1, \phi_2)\|_X \\
&+ \|T(s)(\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, \phi_2)\|_X \\
&+ \|(\phi_1, \phi_2) - (u_1, u_2)\|_X < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como (u_1, u_2) é arbitrário, concluimos que $\{T(s)\}_{s\in I\!R}$ é C^0. Finalmente verifiquemos que $T'(0)$ é o gerador infinitesimal de $\{T(s)\}_{s\in I\!R}$. Seja $A\colon \operatorname{Dom}(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de $\{T(s)\}_{s\in I\!R}$. Vamos provar que $A = T'(0)$. Seja $(u_1, u_2) \in \operatorname{Dom}(A)$. Então existe

$$
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[T(h)(u_1, u_2) - (u_1, u_2)] = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in X.
$$

Isto implica

$$
\frac{1}{h}[u_1(.-h) - u_1] \to \bar{u}_1 \text{ em } H^1(I\!R) \text{ e } \frac{1}{h}[u_2(.-h) - u_2] \to \bar{u}_2 \text{ em } L^2(I\!R). \tag{3.20}
$$

Dada $\phi \in C_0^\infty(I\!R)$, denotando por $\langle , \rangle$ a dualidade entre o espaço das funções-teste $S(R)$ e o espaço das distribuições $S^*(I\!R)$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle \frac{1}{h}(u_1(.-h) - u_1), \phi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h}(u_1(.-h) - u_1(x))\phi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h}(\phi(x+h) - \phi(x))u_1(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h}(\phi(x+h)-\phi(x))u_1(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\phi(x)u_1(x)\,dx = \langle \partial_x, \phi\rangle,$$

quando $h \to 0$, isto é,

$$\frac{1}{h}[u_1(.-h)-u_1] \to \partial_x u_1 \quad \text{em} \quad S'(\mathbb{R}).$$

De (3.20) concluimos que $\bar{u}_1 = \partial_x u_1$. Portanto $u_1 \in H^2(\mathbb{R})$. Analogamente, $\bar{u}_2 = \partial_x u_2$, de modo que $u_2 \in H^1(\mathbb{R})$. Logo $(u_1, u_2) \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$. Além disso,

$$A(u_1,u_2) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[T(h)(u_1,u_2)-(u_1,u_2)] = (\partial_x u_1, \partial_x u_2) = T'(0)(u_1,u_2).$$

Por outro lado, suponhamos agora que $(u_1, u_2) \in \mathrm{Dom}\,(T'(0))$. Então, u_1, $\partial_x u_1$ e u_2 são funções contínuas e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}[\partial_x u_1(x-h)-\partial_x u_1(x)] &= \frac{1}{h}\int_x^{x-h} \partial_x^2 u_1(\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^1 \partial_x^2 u_1(x-sh)\,ds,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}(\partial_x u_1(x-h)-\partial_x u_1(x))-\partial_x^2 u_1(x)\right| &= \left|\int_0^1 \partial_x^2 u_1(x-sh)\,ds + \int_0^1 \partial_x^2 u_1(x)\,ds\right| \\
&\leq \left(\int_0^1 \left|\partial_x^2 u_1(x-sh)+\partial_x u_1(x)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left|\frac{1}{h}[u_1(x-h)-u_1(x)]-\partial_x u_1\right| \leq \left(\int_0^1 \left|\partial_x u_1(x-sh)+\partial_x u_1(x)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\frac{1}{h}[u_2(x-h)-u_2(x)]-\partial_x u_2\right| \leq \left(\int_0^1 \left|\partial_x u_2(x-sh)+\partial_x u_2(x)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando o teorema de Fubini (1.2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}[T(h)(u_1,u_2)-(u_1,u_2)]-(\partial_x u_1,\partial_x u_2)\right\|_X^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{h}[\partial_x u_1(x-h)-\partial_x u_1(x)]-\partial_x^2 u_1(x)\right|^2 dx \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{h}[u_1(x-h)-u_1(x)]-\partial_x u_1(x)\right|^2 dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{h}[u_2(x-h) - u_2(x)] - \partial_x u_2(x) \right|^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \|T(-sh)(u_1,u_2) - (u_1,u_2)\|_X^2 \, ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h \|T(\xi)(u_1,u_2) - (u_1,u_2)\|_X^2 \, d\xi \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $h \to 0$, pela continuidade de $\xi \to T(\xi)u$. Portanto $(u_1,u_2) \in \mathrm{Dom}\,(A)$. Isto prova o lema. □

3.2.1 Existência de soluções e solitons

Consideraremos soluções suaves da equação (3.15) que decaem no infinito, da forma $(u(t,x)) = (\phi_c(x-ct))$ com $c > 0$.

Fixado $c > 0$ escrevemos por simplicidade, ϕ ao invés de ϕ_c. Substituindo u na equação dada em (3.15) e supondo que $\phi(\xi)$, $\phi''(\xi) \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$ obtemos

$$-(1-c^2)\phi'' + f(\phi) = 0 \text{ com } \psi = c\phi' \tag{3.21}$$

onde $'' \prime '' = \frac{d}{d\xi}$, com $\xi = x - ct$.

Para ver a existência de *solitons* suponhamos que a função f de (3.21) verifica as 3 hipóteses do teorema (3.1.1). Logo

$$-p_{xx} + f(p) = 0$$

Possui uma única solução que satisfaz:

(a) $p\,(x) > 0$, $p\,(x) = p\,(-x)$, $p\,(0) = u_0$.

(b) $p\,(x)$ decai exponencialmente do mesmo modo que $e^{-c|x|}$ com $c > 1$.

Tomando $\phi_c(x) = p\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)$, $c \in (-1,1)$ temos que ϕ_c satisfaz (3.21) e portanto obtemos um *soliton* não trivial da eq. de (3.15)

Observemos por exemplo um caso particular da existência das soluções usando o lema (3.1.1).

Tomando $f(\phi) = (1-c^2)(\alpha\phi - \beta\phi^q)$, para $c \in (-1,1)$, na equação (3.21) temos $-(1-c^2)\phi'' + (1-c^2)(\alpha\phi - \beta\phi^q) = 0$, com α e β constantes positivas e $q \in I\!N - \{0,1\}$, que é equivalente a

$$-\phi'' + \alpha\phi - \beta\phi^q = 0 \text{ com } \alpha \text{ e } \beta \text{ constantes positivas e } q \in I\!N - \{0\}. \quad (3.22)$$

Portanto tomando $\phi(x) = p(x)$ em (3.22)temos

$$f(p) = \alpha p - \beta p^q \text{ com } \alpha \text{ e } \beta \text{ constantes positivas e } q \in I\!N - \{0, 1\}.$$

Vejamos que f verifica as hipóteses do lema (3.1.1).

(i) $f'(p) = \alpha - q\beta p^{q-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha > 0$.

Como $f(p) = \alpha p - \beta p^q \Rightarrow F(p) = \frac{\alpha p^2}{2} - \frac{\beta p^{q+1}}{q+1} = p^2(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta p^{q-1}}{q+1})$ note-se que se $p > (\frac{\alpha(q+1)}{2\beta})^{\frac{1}{q-1}} \quad \Rightarrow \quad F < 0$, logo

(ii) $\exists \nu \quad \nu > (\frac{\alpha(q+1)}{2\beta})^{\frac{1}{q-1}}$ tal que $F(\nu) < 0$, e como $F(u) = 0 \Leftrightarrow p = 0$ ou $p = (\frac{\alpha(q+1)}{2\beta})^{\frac{1}{q-1}}$ então se $u_0 = (\frac{\alpha(q+1)}{2\beta})^{\frac{1}{q-1}}$ temos:

(iii) $f((\frac{\alpha(q+1)}{2\beta})^{\frac{1}{q-1}}) \neq 0$

Portanto pelo lema (3.1.1) temos que

$$-p_{xx} + \alpha p - \beta p^q \text{ com } \alpha, \beta \text{ positivos e } q \in I\!N - \{0, 1\}$$

possui solução. Mas ainda, como provamos no lema (3.1.2) ela possui o *soliton* explícito dado por

$$\phi = \left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{(q+2)}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \cosh^{-\frac{2}{q}}(\frac{\sqrt{\alpha}\, xq}{2})$$

Por outro lado, pelo lema (2.0.19) tem-se que se $\Phi \in \text{Dom}\,(T'(0)) = H^2(I\!R) \times H^1(I\!R)$, satisfaz a equação estacionária,

$$E'(\Phi) = cQ'(\Phi), \text{ onde } \Phi = (\phi\,\psi)^T \text{ e } c > 0$$

então $T(ct)\Phi$ é um *soliton* da equação (2.1) e tem-se também a equivalência de

$$E'(\Phi) - cQ'(\Phi) = 0 \quad e \quad \{-(1 - c^2)\phi_{xx} + f(\phi) = 0 \text{ com } \psi = c\phi_x\} \qquad (3.23)$$

Observação 3.2.1. Sabendo que G é a identificação canônica (natural) entre X e X^* dada por $< Gu, v >= (u, v)_X$ e que nosso caso $X = H^1(I\!R) \times L^2(I\!R)$ temos

$< GU, V >= (U,V)_X$ se $GU = W$, $W = (w_1, w_2) \Rightarrow U = G^{-1}W \Rightarrow (U,V)_X = (G^{-1}W, V)_X$ onde $V = (v_1, v_2) \in X$

Para esta aplicação temos:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então:

$$\mathbf{G^{-1}} = \begin{pmatrix} (-\partial_x^2 + 1)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(G^{-1}W, V)_X = (((-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1, w_2), (v_1, v_2))_X.$$

De

$$(U,V)_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{1_x} v_{1_x} + u_1 v_1 + u_2 v_2)\, dx$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
&(((-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1, w_2), (v_1, v_2))_X \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x(-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1 \partial_x v_1 + (-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1 v_1 + w_2 v_2) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (-\partial_x^2(-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1 v_1 + (-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1 v_1 + w_2 v_2) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ((-\partial_x^2 + 1)(-\partial_x^2 + 1)^{-1} w_1 v_1 + w_2 v_2) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} w_1 v_1 + w_2 v_2\, dx \ \text{ pois } \ (-\partial_x^2 + 1)(-\partial_x^2 + 1)^{-1}\phi = \phi, \ \phi \in X
\end{aligned}$$

portanto:

$$(G^{-1}W, V)_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (w_1 v_1 + w_2 v_2)\, dx \tag{3.24}$$

Observação 3.2.2. Agora introduzimos o operador J. Seja ρ: $L^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \to H^{-1}(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ a identificação definida por,

$$< \rho(u), v >= \int_{-\infty}^{+\infty} (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx$$

$\forall\, U = (u_1, u_2) \in L^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ e $(v_1, v_2) \in X = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

Definimos J da seguinte maneira

$$\text{Dom } (J) = \rho(L^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})), J\rho(u_1, u_2) = (u_2, -u_1), \quad \forall\, (u_1, u_2) \in \text{Dom } (J)$$

$$\begin{aligned} < E'(u_1,u_2),(v_1,v_2) > &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u_2v_2 + \partial_x u_1 \partial_x v_1 + f(u_1)v_1)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-\partial_x^2 u_1 v_1 + f(u_1)v_1 + u_2 v_2)\,dx \\ &= < \rho(-\partial_x^2 u_1 + f(u_1), u_2), (v_1,v_2) > \end{aligned}$$

Logo:

$$E'(u_1,u_2) = \rho(-\partial_x^2 u_1 + f(u_1), u_2)$$

Aplicando J obtemos,

$$JE'(u_1,u_2) = J\rho(-\partial_x^2 u_1 + f(u_1), u_2) = (u_2, \partial_x^2 u_1 - f(u_1)) = (\partial_t u_1, \partial_t u_2) = \partial_t U$$

i.e

$$JE'(U(t)) = \partial_t U.$$

3.2.2 Estabilidade do soliton

Como o operador linear de (3.21) é dado por:

$$L_c = -(1-c^2)\partial_x^2 + f'(\phi_c), \tag{3.25}$$

usando o teorema de Weyl verificaremos primeiramente que $\sigma_e(L_c) = (f'(0), \infty)$. Com efeito, temos que

$$L_c = -(1-c^2)\partial_x^2 + f'(\phi_c) \text{ para } c \in (-1,1).$$

Seja

$$L = -\partial_x^2 + \frac{f'(\phi_c)}{1-c^2} = -\partial_x^2 + \frac{f'(0)}{1-c^2} + \frac{f'(\phi_c)}{1-c^2} - \frac{f'(0)}{1-c^2}.$$

Tomando $A = -\partial_x^2 + \frac{f'(0)}{1-c^2}$ e $B = \frac{f'(\phi_c)}{1-c^2} - \frac{f'(0)}{1-c^2}$ temos:

1.) A é auto-adjunto, pois basta tomar o operador $\mathcal{M}_g$ onde $g(\xi) = \alpha + \xi^2$ com $\alpha = \frac{f'(0)}{1-c^2}$ e aplicar o teorema espectral (1.4.12).

2.) B é A-limitado A-cota zero, pois temos que B é limitado e pela observação da definição de A-limitado, tem-se que B é limitado A-cota $\alpha_0 = 0$.

3.) De 1.) e 2.) e do teorema de Kato-Rellich (1.1.13), temos que $A+B$: Dom $(A) \to H^1(I\!R)$ é auto-adjunto (i,e L é auto-adjunto).

4.) $\sigma_e(L) = \sigma_e(A)$. Com efeito sejam $A_1 = A \quad B_1 = L \Rightarrow A_1 - B_1 = -B$, logo, como A e L são auto-adjuntos por 1.) e 3.) respectivamente então A_1 e B_1 são auto-adjuntos. Temos também que $\mathrm{Dom}\,(A_1) = \mathrm{Dom}\,(B_1)$ como conjuntos.

Por outro lado, como $A_1 - B_1 = -B = -\frac{f'(\phi_c)}{1-c^2} + \frac{f'(0)}{1-c^2}$, temos que $-B$ é um operador compacto $-B\colon \mathrm{Dom}\,(A_1) \to H^1(I\!R)$ ($\mathrm{Dom}\,(A_1)$ com a norma do gráfico), em outras palavras $-B$ é A_1-compacto, como pode-se ver na última parte da prova do lema 5.8 pág 304 de [24].

Portanto usando o Teorema de Weyl (1.1.14) temos $\sigma_e(A_1) = \sigma_e(B_1)$ e portanto $\sigma_e(A) = \sigma_e(L)$. Mais ainda, $\sigma_e(L) = [\frac{f'(0)}{1-c^2}, \infty)$, pois pelo que foi feito na secção 1.1.6 para o operador multiplicação $\mathcal{M}_g$, onde $g(\xi) = \alpha + \xi^2$ com $\alpha > 0$ tínhamos que $\sigma(\mathcal{M}_g) = [\alpha, \infty)$. Então para $\alpha = \frac{f'(0)}{1-c^2} > 0$ teremos que $\sigma(\mathcal{M}_g) = [\frac{f'(0)}{1-c^2}, \infty)$.

Por outro lado observe-se que se $\alpha = f'(0)$ teriamos que $\sigma(\mathcal{M}_g) = [f'(0), \infty)$.

Lema 3.2.3. *Com os operadores A e B definidos anteriormente temos que $\sigma_e(L_c) = [f'(0), \infty)$*

Prova. De 4.) acima temos que $\sigma_e(L) = \sigma_e(A)$, como $L_c = (1 - c^2)L$ para $c \in (-1, 1)$ teremos

$$\sigma_e(L_c) = \sigma_e(-(1 - c^2)\partial_x^2 + f'(0)), \tag{3.26}$$

e como $-(1 - c^2)\partial_x^2 + f'(0)$ é unitariamente equivalente ao operador multiplicação $\mathcal{M}_g$ com $g(\xi) = f'(0) + (1 - c^2)\xi^2$ via o operador entrelaçante, transformada de Fourier $\mathcal{F}\colon L^2(I\!R, d\xi) \to L^2(I\!R, d\xi)$ tal que $\mathcal{F}(H^2(I\!R)) = L^2(I\!R, (1 + \xi^2)d\xi)$. Que pode-se verificar analogamente ao lema (1.5.1).

Finalmente usando a roteiro da prova de 5 no lema (1.5.2) teremos que $\sigma_e(-(1 - c^2)\partial_x^2 + f'(0)) = [f'(0), \infty)$ e por (3.26) concluimos que $\sigma_e(L_c) = [f'(0), \infty)$. $\square$

Por outro lado temos que $ker(L_c) = span(\partial_x \phi_c)$. Além disso, como $\partial_x \phi_c$ possui um zero simples em $x = 0$, usando a teoria de Sturm-Liouville seção 1.5 teremos que L_c terá exatamente um autovalor estritamente negativo.

Com efeito, mais uma vez como L_c é equivalente a L definido acima, tomando $V(x) = \frac{f'(\phi_c)}{1-c^2}$ tem-se que $V(x)$ verifica (1.21) e como o auto-valor zero de L é simples com auto-vetor ϕ' que possui um único zero em $x = 0$, mas que muda de sinal, então pelo teorema (1.6.8) temos que L tem exatamente um autovalor estritamente negativo. Logo o mesmo ocorre para L_c. Seja $-\alpha^2$, o auto-valor negativo de L_c com o auto-vetor $\mathcal{X}_c$, de modo que

$$L_c \mathcal{X}_c = -\alpha_c^2 \mathcal{X}_c. \tag{3.27}$$

Na sequência verificaremos a hipótese 3 da teoria apresentada no capítulo 2. Para isto calculemos primeiro o operador H_c para em seguida estudar seu espectro.

Derivando $E'(\Phi)$ e $Q'(\Phi)$ temos que

$$\mathbf{E}''(\Phi) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + f'(\phi_c) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{Q}''(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix}$$

Logo:

$$H_c = E''(\Phi_c) - cQ''(\Phi_c) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + f'(\phi_c) & -c\partial_x \\ c\partial_x & 1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Lema 3.2.4. *O espectro do operador H_c é como segue*

(1) *Possui um único autovalor negativo simples.*

(2) $Ker(H_c) = span(T'(0)\phi_c)$.

(3) *O espectro positivo de H_c é inferiormente limitado. Além disso existe $\delta > 0$ tal que* $\inf(\sigma(H_c) \cap (0, +\infty)) \geq \delta$.

Prova. Para

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$$

temos

$$\langle H_c\Psi, \Psi\rangle = \langle L_c\psi_1, \psi_1\rangle + \langle \psi_2 - c\partial_x\psi_1, \psi_2\rangle$$

Seja agora χ_1 o autovetor associado ao autovalor negativo de L_c, e seja $\chi_2 = c\partial_x\chi_1$ e $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$
Então

$$\langle H_c\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + f'(\phi_c) & c\partial_x \\ -c\partial_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ c\partial_x\chi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi_1 \\ c\partial_x\chi_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} L_c\chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi_1 \\ c\partial_x\chi_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle L_c\chi_1, \chi_1\rangle = -\alpha_c^2 \|\chi_1\|^2 < 0.$$

H_c possui também o autovetor

$$\begin{pmatrix} \partial_x\phi_c \\ c\partial_x^2\phi_c \end{pmatrix}$$

associado ao autovalor zero. Com efeito:

$$\begin{pmatrix} -\partial_x^2 + f'(\phi_c) & c\partial_x \\ -c\partial_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x\phi_c \\ c\partial_x^2\phi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-c^2)\partial_x^3\phi_c + f'(\phi_c)\partial_x\phi_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_c(\partial_x\phi_c) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, para qualquer vetor $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ tal que $\langle \psi_1, \chi_1\rangle = \langle \psi_1, \partial_x\phi\rangle = 0$ teremos: $\langle H_c\Psi, \Psi\rangle \geq \delta \|\Psi\|^2$ para algum $\delta > 0$.

Comm efeito, como $\langle \psi_1, \chi_1 \rangle = \langle \psi_1, \partial_x \phi \rangle = 0$ então $\psi_1 \in P$ subespaço positivo de $H^1(I\!R)$. Logo existe um $\delta > 0$ tal que $\langle L_c \psi_1, \psi_1 \rangle \geq \delta \|\psi_1\|^2$ e portanto $\langle H_c \Psi, \Psi \rangle \geq \delta \|\Psi\|^2$, para algum $\delta > 0$. □

Como H_c satisfaz as hipóteses do teorema 2, então a estabilidade da onda viajante é determinada pelo sinal de $d''(c)$. Observe que

$$d'(c) = -Q(\Phi) = -c \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x \phi_c|^2 dx = c(\sqrt{1-c^2}) \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x p|^2 dx$$

e

$$d''(c) = -\frac{1-2c^2}{\sqrt{1-c^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x p|^2 dx > 0, \quad \text{para } c \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1).$$

Portanto o *soliton* é estável para $c \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

3.3 A Equação KdV

Na sequência estudaremos aplicações para sistemas hamiltonianos mais gerais usando basicamente as ideias anteriores. Para isto vejamos algumas variações das definições feitas na teoria abstrata.

Definição 3.3.1. Definimos como sistema hamiltoniano a equação dada por

$$U_t = JE'(U) \tag{3.29}$$

onde $U \in X$ espaço de Banach reflexivo, também consideramos o espaço de Banach reflexivo Y tal que

$$X^* \subset Y^*, \qquad \text{com } X^* \text{ denso em } H^*.$$

O símbolo $\langle \, , \, \rangle$ é usado como parêntese de dualidade para os pares (X, X^*), (X^*, X), (Y, Y^*) e (H^*, H) indistintamente.

Introduzimos as condições seguintes para os funcionais E, J,

H1 **(i)** $E \in C(Y, I\!R)$.

(ii) $E' \in C(Y, Y^*)$.

(H2) $J \in \mathcal{B}(Y^*, X) \cap \mathcal{B}(X^*, H)$, anti-simétrico, no sentido:

$$\langle Jx, y\rangle = -\langle x, Jy\rangle \quad \text{para } x \in X^*,\ y \in Y^*.$$

E' denota a derivada de Gâteaux.

Como no caso de Grillakis-Shatah-Strauss, E é conhecido como o invariante energia do sistema, ou seja , $\frac{dE(u(t))}{dt} = 0$, para $t \geq 0$.

Em cada aplicação será verificada que os *solitons* satisfazem a chamada equação estacionária: $E'(\Phi) - cQ'(\Phi) = 0$, onde Q é também um invariante como E. Como no caso anterior estes invariantes são calculados usando-se multiplicadores.

O operador H_c e a função escalar $d(.)$ definidos na teoria de Grillakis-Shatah-Strauss pelas equações (2.19), (2.18) respectivamente e as definições dadas para estabilidade orbital (2.0.14), são também válidas para este caso. Assim, se $d''(c) > 0$ então H_c tem ao menos um autovalor negativo, (lema (2.1.1)).

Como falamos na introdução o primeiro *soliton* descoberto na Escócia por J. Scott Russel foi o da KdV. Na sequência determinaremos uma solução tipo *soliton* da KdV clássica.

$$u_t + u_x u + u_{xxx} = 0 \tag{3.30}$$

e estudaremos sua estabilidade orbital.

Teorema 3.3.2 (Problema de Valor Inicial e Invariantes [26]). *O PVI para a equação* (3.15) *é localmente bem posto em* $X = H^s(\mathbb{R})$ *para* $s > \frac{-3}{4}$, *i.e. satisfaz:*

(i) *Dado* $u_0 \in X$, *existe* $T = T(\|u_0\|_X)$ *e uma única solução do problema* (3.15) *com* $u \in C([0,T] : X) \cap C^1([0,T] : Y) = \mathcal{X}(T)$

(ii) *Existe um* $r = r(\|u_0\|) > 0$ *e uma função contínua não-decrescente* $F(.) = F(., \|u_0\|_X)$, *com* $F(0) = 0$, *tal que a aplicação* $v_0 \to v_t$ *do conjunto* $\{v_0 \in X\colon \|v_0 - u_0\|_X < r\}$ *em* $\mathcal{X}(T)$ *satisfaz* $\|v_t - u_t\|_{\mathcal{X}(T)} \leq F(\|v_0 - u_0\|_X)$.

Os invariantes E E Q são dados por

$$E(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2})\, dx \quad e$$

$$Q(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{2}\, dx$$

Prova. Para o problema de Cauchy veja [26]. Calculemos agora os invariantes $E(u)$, $Q(u)$ e suas derivadas no sentido de Gâteaux para escrever (3.30) como um sistema hamiltoniano.

Cálculo do invariante energia E(u) e suas derivadas de Gâteaux:

Primeiro temos que a equação (3.30) pode ser escrita como

$$u_t + (\frac{u^2}{2} + u_{xx})_x = 0. \tag{3.31}$$

Multiplicando (3.31) por $M_1 = (\frac{u^2}{2} + u_{xx})$ e integrando em $I\!R$ temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(\frac{u^2}{2} + u_{xx})\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (M_1)_x M_1\, dx = 0,$$

Logo, usando o fato que $u(.,t)$ é uma função suave que decaem no infinito juntamente com $\partial_x u$ e $\partial_x^2 u$ obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (M_1)_x M_1\, dx = 0 \ \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t \frac{u^2}{2} + u u_{xx}) dx &= \frac{d}{dt}[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^3}{6}] + u_t u_x|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x u_{xt} dx \\ &= \frac{d}{dt}[\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}) dx] = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$E(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}) dx \tag{3.32}$$

Calculemos agora a derivada de Gâteaux de $E(u)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(u)}{\partial v} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[E(u+\varepsilon v)-E(u)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(u+\varepsilon v)^3}{6}-\frac{(u+\varepsilon v)_x^2}{2}\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^3}{6}-\frac{u_x^2}{2}\right)dx\right] \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^2v}{2}+\partial_x^2uv\right)dx
\end{aligned}$$

Portanto, como $u\in H^1(I\!R)$ e $\partial_x^2 u\in H^{-1}(I\!R)$ temos que
$\frac{\partial E(u)}{\partial v}=E'(u)v=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^2v}{2}+\partial_x^2uv\right)dx$. Ou seja,

$$E'(u)=-\frac{u^2}{2}-\partial_x^2u. \tag{3.33}$$

Logo temos que

$$\partial_t u=JE'(u)=\partial_x(-\frac{u^2}{2}-\partial_x^2u). \tag{3.34}$$

Cálculo de $E''(u)$:

$$\begin{aligned}
E''(u)vw &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[E'(u+\varepsilon w)v-E'(u)v] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{(u+\varepsilon w)^2v}{2}+\partial_x^2(u+\varepsilon v)v\right)dx\right] \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^2v}{2}+\partial_x^2uv\right)dx\right]
\end{aligned}$$

Portanto

$$E''(u)=-\partial_x^2-u \tag{3.35}$$

Para o cálculo do invariante momento $Q(u)$ e suas derivadas de Gâteaux multipliquemos (3.30) por $M_2=u$ e integrando em $I\!R$ obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(uu_t+u^2u_x+u\partial_x^3u)\,dx=\frac{d}{dt}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{2}dx]+\int_{-\infty}^{+\infty}u^2u_xdx+u\partial_x^2u|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2u\partial_xu\,dx$$

Logo, usando novamente o fato que $u(.,t)$, $\partial_x u$, $\partial_x^2 u$ decaem no infinito temos que

$$Q(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{2} dx. \tag{3.36}$$

Calculemos agora $Q'(u)$.

$$\frac{\partial Q(u)}{\partial v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[Q(u+\varepsilon v) - Q(u)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big(-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u+\varepsilon v)^2}{2}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{2}\, dx \Big)$$

Portanto, como $u \in H^1$ temos que

$$Q'(u) = -u \tag{3.37}$$

Cálculo da segunda derivada de Gâteaux de Q :

$$Q''(u)vw = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[Q(u+\varepsilon w)v - Q'(u)v] = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} (u+\varepsilon w)v\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} uv\, dx \Big)$$

Portanto

$$Q''(u) = -1 \tag{3.38}$$

□

3.3.1 Existência de Solitons

As soluções tipo *soliton* procuradas são da forma $u = \phi(x - ct)$ suaves tais que decaem no infinito com $c > 0$. Como c é fixo escrevemos ϕ ao invés de ϕ_c. Deste modo, substituindo ϕ em (3.30) e integrando assumindo que $\phi(\xi)$, $\phi'(\xi), \phi''(\xi) \to 0$ quando $|\xi| = |x - ct| \longrightarrow \infty$ obtemos

$$-\phi'' + c\phi - \frac{\phi^2}{2} = 0 \tag{3.39}$$

Como a equação (3.39) é da forma forma (3.4) com $\alpha = c$, $\beta = -\frac{1}{2}$, e $q = 1$, então pelo lema (3.1.2) temos que

$$\phi_c(x) = 3c\, sech^2(\frac{\sqrt{c}x}{2}) \tag{3.40}$$

é um *soliton* explícito da KdV (3.30).

3.3.2 Estabilidade

Será importante para a estabilidade, caracterizar ϕ_c em termos dos funcionais E e Q. Mais precisamente, ϕ_c é um ponto crítico do funcional $E-cQ$ pela caracterização da definição lema (2.0.19). De fato, usando (3.33) e (3.37) temos que $E'(\phi_c) = -\frac{\phi_c^2}{2} - \partial_x^2(\phi_c)$ e $Q'(\phi_c) = -\phi_c$; logo, de (3.39), obtemos

$$(E - cQ)'(\phi_c) = 0. \tag{3.41}$$

Outro operador importante a ser considerado é o operador linearizado H_c de $E' - cQ'$ ao redor de ϕ_c, isto é,

$$Hc \equiv E''(\phi_c) - cQ''(\phi_c) = -\partial_x^2 - \phi_c + c \tag{3.42}$$

H_c é um operador auto-adjunto, no sentido que, se definimos $G = 1 - \partial_x^2$, com $G\colon X \to X^*$, então o operador limitado $G^{-1}H_c\colon X \to X$ é auto-adjunto em X. Segue também pela substituição de u por $\phi_c(x - ct)$ em (3.30) que

$$H_c(\frac{d}{dx}\phi) = 0 \tag{3.43}$$

Observemos que (3.41) caracteriza ϕ_c como um ponto crítico com vínculo $Q(u) = Q(\phi_c)$. Assim, definindo $d\colon I\!R^+ \to I\!R$ por

$$d(c) = E(\phi_c) - cQ(\phi_c) \tag{3.44}$$

veremos no lema (3.3.5) que a convexidade da função $d(.)$ determina que ϕ_c é um ponto de mínimo de E.

Na sequência verificaremos as seguintes hipóteses

Hipótese 1. (Existência de Soluções)

Para cada $u_0 \in X \equiv H^1(I\!R)$ existe $T > 0$, T dependendo de $\|u_0\|_X$, tal que o sistema hamiltoniano (3.29), tem uma solução $u \in C([0,T];X)$ com $u(0) = u_0$ e $E(u(t)) = E(u_0)$, $Q(u(t)) = Q(u_0)$ para todo $t \in [0,T]$.

De fato, pelo teorema (3.3.2) a hipótese 1 está provada.

Hipótese 2. (Existência de ondas solitárias)

Para cada $c \geq 1$ temos que

(a) Existe uma solução da equação (3.41),

(b) $\frac{d^2}{dx^2}\phi_c \in H^1(\mathbb{R})$,

(c) a função $c \in \mathbb{R}^+ \to \phi_c \in H^1(\mathbb{R})$ é de classe C^1,

(d) $\phi_c \notin Ker(\frac{d}{dx})$.

Pelo feito na seção (3.3.1) de existência temos que o *soliton* explícito dado por (3.40), verifica diretamente (a) e (d). Pela observação da desigualdade de Holder (1.2.16), verifica-se (b) e, finalmente, tomando $\mu(\alpha) = 3c$ e $f(v(\alpha)x) = sech^2(\frac{\sqrt{c}x}{2})$ no lema (3.1.3) verifica-se (c).

Hipótese 3. (Espectro do operador H_c). Para $c \in \mathbb{R}^+$, $H_c \equiv (E'' - cQ'')(\phi_c)$ tem exatamente um autovalor negativo o qual é simples, tem seu núcleo gerado por $\partial_x\phi_c$ e o resto do espectro é positivo. Além disso existe $\delta > 0$ tal que inf $\sigma(H_c) \cap (0, +\infty) \geq \delta$.

De fato, de (3.43) temos que $\lambda = 0$ pertence ao espectro de H_c, com $\partial_x\phi_c$ em seu núcleo. Por outro lado verifiquemos que para um $g \in Ker(H_c)$ existe um α tal que $g = \alpha\partial_x\phi_c$. Desta forma, considerando $g \in H^1(\mathbb{R})$ obtemos de (3.42) e (3.39) que se $H_c(g) = 0$, então usando o Wronskiano verifica-se que $span\{\partial_x\phi\}$ gera o $ker\, H_c$.Como

$$H_c = -\partial_x^2 + c - \phi_c \text{ com } c > 0$$

pode-se ver que ele é um caso particular do operador $\mathcal{L}_\alpha$ definido pela equação (1.15), para isto basta tomar $\alpha = c, \quad q = 1$ e $\gamma = 1$, logo pelo feito na seção (2.1.1) do lema (1.5.6) temos

$$\sigma_e(H_c) = [c, +\infty)$$

Por outro lado tomando $V(x) = c - \phi_c$ tem-se que $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = c > 0$, ou seja verifica-se (1.21) e, como ϕ' é auto-função associada ao auto-valor simples zero e ϕ' anula-se unicamente em $x = 0$, e muda de sinal. Então pelo lema (1.6.8) tem-se que

$$H_c = -\partial_x^2 + c - 3c\, sech(\frac{\sqrt{c}\,x}{2}),$$

possui um único autovalor negativo simples λ_0 e existe um $\delta > 0$ tal que $\forall\ \lambda \in \sigma(H_c) - \{\lambda_0, 0\}, \quad \lambda > \delta$.

Em resumo verifica-se a hipótese 3.

Observação 3.3.1. Outro jeito da verificação deste fato empregando o *soliton* explícito é usando as ideias da teoria dada em [32], páginas 633-634, é como segue, dado que nosso operador H_c em forma explícita com o *soliton* explícito dado por (3.40) é:

$$H_c = -\partial_x^2 - 3c\,\cosh^{-2}(\frac{\sqrt{c}x}{2}) + c \tag{3.45}$$

logo λ_m serão seus autovalores se $H_c(\psi) = \lambda_m \psi$, portanto temos que $-\partial_x^2\psi - [(\lambda_m - c) + 3c\,\cosh^{-2}(\frac{\sqrt{c}x}{2})]\psi = 0$ ou $\partial_x^2\psi + [(\lambda_m - c) + 3c\,\cosh^{-2}(\frac{\sqrt{c}x}{2})]\psi = 0$

Pela teoria de [32] pág. 633-634. Precisamos ter um operador na forma

$$\partial_x^2\psi - [\tilde{\lambda}_m + n(n+1)\,\cosh^{-2}(x)]\psi = 0 \tag{3.46}$$

onde $\tilde{\lambda}_m = -m^2$ e $n \geq m$ com n, m naturais.

Portanto comparando os operadores (3.45) e (3.46) obtemos as seguintes relações $\frac{\sqrt{c}}{2} = 1 \Rightarrow c = 4$ e $3c = n(n+1) \Rightarrow n = 3$ portanto $m = 0, 1, 2, 3$ além disto como $\tilde{\lambda}_m = \lambda_m - c = \lambda - 4$ temos que os autovalores $\lambda_m = 4 - m^2$. Portanto, $\lambda_m = -5, 0, 3$ e $[4, +\infty)$ isto é

$$\sigma(H_4) = \{-5, 0, 3\} \cup [4, +\infty) \tag{3.47}$$

Mas ainda pelos lemas (1.6.9) e (1.6.10) temos que como existe um $c = 4 > 0$ tal que verifica-se a hipótese 3. Então, ele também verifica-se para qualquer $c > 0$. Logo, o espectro de H_c, com $c > 0$ qualquer satisfaz a hipótese 3.

Estabeleceremos a seguir o teorema para garantir a estabilidade de ondas solitárias para a KdV.

Teorema 3.3.3. *Considere as hipóteses* (1) $\to$ (3) *e suponha que* $c \in (0,\infty)$. *Então a onda solitária* ϕ_c *é estável se*

$$d''(c) > 0, \tag{3.48}$$

onde $d(c) = (E - cQ)(\phi_c)$.

Note que por (3.41) e (2.26) a condição (3.48) é equivalente a $-\frac{d}{dc}Q(\phi_c) > 0$. O roteiro que seguiremos será o seguinte: provaremos primeiro o teorema (3.3.3) e depois verificaremos (3.48). A prova do teorema (3.3.3) é baseada essencialmente nas idéias dos resultados abstratos de estabilidade provados nas secções 2.2 e 2.3.

A seguir suporemos que a velocidade $c \in (0,\infty)$ está fixada e escreveremos, por simplicidade, ϕ e H ao invés de ϕ_c e H_c. Provaremos primeiro os três lemas abaixo. O primeiro deles fala sobre o fator exterior do grupo de ação dentro da vizinhança tubular no sentido que $T(s)u$ é ortogonal a $T'(0)\phi$ para algum $s = s(u)$. O segundo mostra que o hiperplano $Q'(\phi)^{\perp}$ não intersecta o cone $\{y \in H^1(\mathbb{R})\colon \langle Hy, y\rangle < 0\}$ e o terceiro que $E(u)$ é minimizado em $u = \phi$, com a restrição $Q(u) = Q(\phi)$.

Lema 3.3.4. *Existem* $\varepsilon > 0$ *e uma única função* C^1, $\alpha : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$, *tais que, para cada* $u \in U_\varepsilon$ *e* $r \in \mathbb{R}$, *temos o seguinte*

1) $\langle u(. + \alpha(u)), \partial_x\phi\rangle_X = 0,$

2) $\alpha(u(. + r)) = \alpha(u) - r,$

3) $\alpha(\phi) = 0.$

Prova. Consideremos o funcional F definido em $X \times \mathbb{R} = H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ para u, dado por

$$F(u,r) \equiv \langle T(r)u, \partial_x\phi\rangle_{H^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+r)\partial_x\phi(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u(x+r)\partial_x^2\phi(x)\,dx.$$

Como

$$F(\phi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \phi'\phi(x)''dx = \frac{\phi^2(x)}{2}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{(\phi'(x))^2}{2}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

e

$$\begin{aligned} D_2F(u,r) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{\infty} (u(x+r+h)\phi'(x) + \frac{d}{dx}(u(x+r+h))\phi''(x))\,dx\right) \\ &- \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{-\infty}^{\infty} (u(x+r)\phi'(x) + \frac{d}{dx}(u(x+r))\phi''(x))\,dx\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}u(x+r)\phi'(x) + \frac{d^2}{dx}u(x+r)\phi''(x)\right)dx, \end{aligned}$$

então

$$D_2F(\phi,0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi'(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\phi''|^2 dx = \left\|\frac{d}{dx}\phi(x)\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \neq 0.$$

Portanto, pelo teorema da função implícita (1.3.4) existe um aberto ao redor de ϕ, $B \equiv B(\phi;\varepsilon)$ e uma única função $\beta\colon B \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que para cada $u \in B$,

$$\langle T(\beta(u))u, \phi'\rangle_X = \langle u(.+\beta(u)), \phi'\rangle_X = 0.$$

Agora, considerando aqueles $r \in \mathbb{R}$ tais que para $u \in B$, $T(r)u \in B$, temos que

$$\beta(T(r)u) = \beta(u) - r. \tag{3.49}$$

De fato, como $F(T(r)u, \beta(u) - r) = F(u, \beta(u)) = 0$, a unicidade de β implica que $\beta(T(r)u) = \beta(u) - r$.

Por outro lado, definamos a vizinhança tubular

$$U_\varepsilon = \{T(s)v\colon s \in \mathbb{R},\ v \in B(\phi;\varepsilon)\},$$

e seja $\alpha\colon U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(T(s)v) \equiv \beta(v) - s.$$

Em vista de (3.49) é claro que α está bem definida. Além disso, α satisfaz (1) $\to$ (3) pois β possui essas propriedades. A unicidade segue de (2). Isto completa a prova do lema. $\square$

Observação 3.3.2. Pela hipótese 3 existem $\chi = \dfrac{1}{\left\|\chi_{\lambda_0}\right\|}\chi_{\lambda_0}$ e $\lambda > 0$ $(-\lambda^2 = \lambda_0 \left\|\chi_{\lambda_0}\right\|)$ tais que,

$$G^{-1}H\chi = -\lambda^2\chi, \qquad \|\chi\|_X = 1.$$

Denotando por $P = \{p \in H^1(I\!R) : \langle G^{-1}Hp, p\rangle_{H^1(I\!R)} > 0\} \cup \{0\}$ o subespaço positivo de H, obtemos que

$$\langle Hp, p\rangle \geq \delta \left\|p\right\|_X^2, \text{ para } p \in P, \quad \delta > 0. \tag{3.50}$$

Observe que $G^{-1}H(P) \subset P$.

Lema 3.3.5. *Seja $d''(c) > 0$. Se $y \in H^1(I\!R)$, $y \neq 0$ é ortogonal a $G^{-1}Q'(\phi)$ e a $\frac{d}{dx}\phi$, então $\langle Hy, y\rangle > 0$. Além disso, y satisfaz (3.50).*

Prova. De (2.24), (2.25) e (2.26), obtemos que $0 < d''(c) = -\langle H(\frac{d}{dc}\phi), \frac{d}{dc}\phi\rangle$. Agora, fazendo uma decomposição espectral de $H^1(I\!R)$ na forma

$$H^1(I\!R) = span\langle\chi\rangle \oplus span\langle\partial_x\phi\rangle \oplus P,$$

temos que

$$\frac{d}{dc}\phi = a_0\chi + b_0\partial_x\phi + p_0, \qquad p_0 \in P.$$

Portanto, seguindo as idéias da prova do teorema (2.1.7), concluimos a prova do lema. $\square$

Lema 3.3.6. *Sejam $X = H(I\!R)$ e $d''(c) > 0$. Então existem $k > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$E(u) - E(\phi) \geq k \left\|u(. + \alpha(u)) - \phi\right\|_X^2 \tag{3.51}$$

para $u \in U_\varepsilon$ satisfazendo $Q(u) = Q(\phi)$.

Prova. Usando as idéias da prova do teorema (2.1.7) obtemos

$$E(u) - E(\phi) = \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + o(\|v\|_X^2).$$

Logo, da parte (1) do lema (3.3.4) e do fato que $\langle G^{-1}Q'(\phi), \frac{d}{dx}\phi\rangle_X = 0$, temos que

$$\langle y, \partial_x\phi\rangle_x = \langle u(. + \alpha(u)) - \phi - aq, \partial_x\phi\rangle_X = 0.$$

Portanto, do lema (3.3.5)

$$E(u) - E(\phi) \geq k\,\|y\|_X^2 + o(\|v\|_X^2).$$

Finalmente, como

$$\|y\|_X = \|v - aq\|_X \geq \|v\| - |a|\,\|q\|_X \geq \|v\|_X - O(\|v\|_X^2),$$

então temos que para $\|v\|_X$ suficientemente pequeno,

$$E(u) - E(\phi) \geq k\,\|v\|_X^2\,,$$

como queríamos provar. □

Prova do teorema (3.3.3): Dos 3 últimos lemas e de maneira análoga à prova feita na primeira parte do teorema (2.1.7) temos que a positividade da função escalar $d(.)$ implica a estabilidade da onda solitária $\phi_c = 3c\,sech(\frac{\sqrt{cx}}{2})$.

Na sequência veremos a estabilidade do *soliton* dado em (3.40), usando o sinal de $d''(c)$, como foi provado no teorema (3.3.3).

Teorema 3.3.7. *Seja ϕ_c com $c > 0$. Então o soliton dado por (3.40) é $H^1(\mathbb{R})$-estável*

Prova. Por definição temos que $d(c) = E(\phi_c) - cQ(\phi)$. Então

$$\begin{aligned} d'(c) &= \; < E'(\phi_c) - cQ'(\phi_c) / \frac{d}{dc}\phi_c > -Q(\phi) \\ &= -Q(\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi_c^2}{2} dx \qquad (\text{por} \quad (3.36)) \end{aligned}$$

Logo

$$d'(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_c^2 dx = \frac{3c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^4(\frac{\sqrt{c}\xi}{2}) d\xi.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \frac{\sqrt{c}\xi}{2}$ obtemos

$$d'(c) = \frac{6c^{\frac{1}{2}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} sech^4(x) dx,$$

e

$$d''(c) = \frac{3}{2c^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} sech^4(x)\, dx.$$

Portanto, $d''(c) > 0$ *pois* $c > 0$.

Logo, pelo Teorema (3.3.3) concluimos que o *soliton* dado explicitamente em (3.40) é $H^1(\mathbb{R})$-estável. □

3.4 A KdV Generalizada

Na sequência estudaremos a KdV-generalizada dada pela equação

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.52}$$

Teorema 3.4.1 (Problema de Valor Inicial e Invariantes [26]). *O PVI para a equação* (3.52) *é localmente bem posto em X, i.e, satisfaz*

(i) *Dado $u_0 \in X$, existe $T = T(\|u_0\|_X)$ e uma única solução do problema* (3.15) *com $u \in C([0,T] : X) \cap C^1([0,T] : Y) = \mathcal{X}(T)$*

(ii) *Existe um $r = r(\|u_0\|) > 0$ e uma função contínua não-decrescente $F(.) = F(., \|u_0\|_X)$, com $F(0) = 0$, tal que a aplicação $v_0 \to v_t$ do conjunto $\{v_0 \in X : \|v_0 - u_0\|_X < r\}$ em $\mathcal{X}(T)$ satisfaz $\|v_t - u_t\|_{\mathcal{X}(T)} \leq F(\|v_0 - u_0\|_X)$,*

onde:

$X = H^s(\mathbb{R})$ *com* $s > \frac{1}{4}$, *se* $p = 2$,

$X = H^s(\mathbb{R})$ *com* $s > \frac{1}{2}$, *se* $p = 3$,

$X = H^s(\mathbb{R})$ com $s > 0$ se $p = 4$ e

$X = H^s(\mathbb{R})$ com $s > \frac{p-4}{2p}$ se $p > 4$.

Além disso, os invariantes E e Q são dados por

$$E(U) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{u_x^2}{2}\right) dx$$

e

$$Q(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2}{2} dx.$$

Prova. Para o PVI veja [26]. Calculemos os invariantes $E(u)$, $Q(u)$ e suas derivadas no sentido de Gâteaux para então escrever (3.52) como o um sistema hamiltoniano.

Cálculo do invariante energia $E(u)$ e suas derivadas de Gâteaux: escrevemos a equação (3.52) como

$$u_t + \partial_x\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + \partial_x^2 u\right) = 0. \tag{3.53}$$

Multiplicando (3.53) por $M_1(u) = (\frac{u^{p+1}}{p+1} + \partial_x^2 u)$ e integrando em $\mathbb{R}$ temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + u_{xx}\right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(M_1)M_1 \, dx = 0.$$

Logo, usando o fato que $u(.,t)$ é uma função suave que decai no infinito juntamente com $\partial_x u$ e $\partial_x^2 u$ obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(M_1)M_1 \, dx = 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(u_t \frac{u^{p+1}}{p+1} + u u_{xx}\right) dx &= \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\right] + u_t u_x\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u_x u_{xt} dx \\
&= \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{u_x^2}{2}\right) dx\right] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$E(u) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \frac{u_x^2}{2}\right) dx. \tag{3.54}$$

Calculemos agora a derivada de Gâteaux de $E(u)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(u)}{\partial v} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[E(u+\varepsilon v)-E(u)]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[-\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{(u+\varepsilon v)^{p+2}}{(p+1)(p+2)}+\frac{(u+\varepsilon v)_x^2}{2})\,dx\Big]\\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}+\frac{u_x^2}{2})dx\Big]\\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{u^{p+1}v}{p+1}+u_{xx}v)\,dx
\end{aligned}$$

Como $u\in H^1(I\!R)$ e $\partial_x u\in H^{-1}(I\!R)$ então

$$E'(u)=-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\partial_x^2 u. \tag{3.55}$$

Portanto

$$\partial_t u = JE'(u)=\partial_x(-\frac{u^{p+1}}{p+1}-\partial_x^2 u). \tag{3.56}$$

Cálculo de $E''(u)$

$E''(u)vw=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[E(u+\varepsilon w)v-E'(u)v]$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big[-\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{(u+\varepsilon w)^{p+1}v}{p+1}+(u+\varepsilon w)_{xx}v)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{u^{p+1}v}{p+1}+u_{xx}v)\,dx\Big]$$

Logo

$$E''(u)=-\partial_x^2-u^p. \tag{3.57}$$

Cálculo do invariante momento $Q(u)$ e suas derivadas de Gâteaux:

Multiplicando (3.52) por $M_2(u)=u$ e integrando em $I\!R$ temos que
$\int_{-\infty}^{+\infty}(uu_t+u^{p+1}u_x+uu_{xxx})dx=\frac{d}{dt}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{2}dx]+\int_{-\infty}^{+\infty}u^{p+1}u_xdx+uu_{xx}|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}u_{xx}u_xdx.$
Logo, usando novamente o fato que $u(.,t)$, $\partial_x u$, $\partial_x^2 u$ decaem no infinito, obtemos

$$Q(u)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^2}{2}dx \tag{3.58}$$

Como Q é o mesmo funcional do caso da KdV então $Q'(u)$ e $Q''(u)$ também serão os mesmo, i.e,

$$Q'(u) = -u \tag{3.59}$$

e

$$Q''(u) = -1 \tag{3.60}$$

□

3.4.1 Existência de Solitons

Novamente as soluções tipo *soliton* procuradas são da forma $u = \phi(x - ct)$, com decaimento no infinito e $c > 0$. Como c é fixo escrevemos ϕ ao invés de ϕ_c. Deste modo, substituindo ϕ em (3.52) e integrando em $\mathbb{R}$, assumindo que $\phi(\xi)$, $\phi'(\xi)$, $\phi''(\xi) \to 0$ quando $|\xi| = |x - ct| \to \infty$ temos

$$-\phi'' + c\phi - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} = 0. \tag{3.61}$$

Usando um argumento análogo ao da KdV, isto é, como a equação para os solitons da KdV-generalizada dada por (3.61) é claramente da forma (3.4) então, pelo lema (3.1.2), com $\alpha = c$, $\beta = \frac{1}{p+1}$ e, $q = p$ temos que

$$\phi_c(x) = (\frac{c(p+1)(p+2)}{2})^{\frac{1}{p}} sech^{\frac{2}{p}}(\frac{p\sqrt{c}x}{2}) \tag{3.62}$$

3.4.2 Estabilidade

Será importante para a estabilidade caracterizar ϕ_c em termos dos funcionais E e Q. Mais precisamente, que ϕ_c é um ponto crítico do funcional $E - cQ$. Usando (3.55) e (3.59) temos que

$$E'(\phi_c) = -\frac{\phi_c^{p+1}}{p+1} - (\phi_c)_{xx}$$

e

$$Q'(\phi_c) = -\phi_c$$

Logo, de (3.61), obtemos (3.41).

Outro operador importante a ser considerado é o operador linearizado H_c de $E' - cQ'$ ao redor de ϕ_c, isto é,

$$Hc \equiv E''(\phi_c) - cQ''(\phi_c) = -\partial_x^2 - \phi_c^p + c \tag{3.63}$$

Novamente H_c é um operador auto-adjunto, no sentido que, se definimos $G\colon X \to X^*$, então o operador limitado $G^{-1}H_c\colon X \to X$ é auto-adjunto em X. Segue-se também pela substituição de u por $\phi_c(x - ct)$ em (3.52) que

$$H_c(\partial_x \phi) = 0. \tag{3.64}$$

Observemos que (3.41) caracteriza ϕ_c como um ponto crítico de $E(u)$ com vínculo $Q(u) = Q(\phi_c)$. Assim, como no caso da KdV definimos $d : I\!R^+ \to I\!R$ por

$$d(c) = E(\phi_c) - cQ(\phi_c). \tag{3.65}$$

Na sequência verificaremos as seguintes hipóteses

Hipótese 1. (Existência de Soluções)

Para cada $u_0 \in X \equiv H^1(I\!R)$ existe $T > 0$, T dependendo de $\|u_0\|_X$, tal que o sistema hamiltoniano (3.29) tem uma solução $u \in C([0,T]; X)$ com $u(0) = u_0$ e $E(u(t)) = E(u_0)$, $Q(u(t)) = Q(u_0)$ para todo $t \in [0,T]$.

De fato, pelo teorema (3.4.1), verifica-se a hipótese 1.

Hipótese 2. (Existência de ondas solitárias)

Para cada $c \geq 1$ temos que

(a) Existe uma solução da equação (3.41),

(b) $\frac{d^2}{dx^2}\phi_c \in H^1(I\!R)$

(c) A função $c \in I\!R^+ \to \phi_c \in H^1(I\!R)$ é de classe C^1,

(d) $\phi_c \notin Ker(\frac{d}{dx})$.

Pelo que foi feito na secção (3.4.1) para existência de solitons temos que o *soliton* explícito dado por (3.62) verifica diretamente (a) e (d). Pela observação da desigualdade de Holder (1.2.16), verifica-se (b) e, finalmente, tomando $\mu(\alpha) =$

$(\frac{c(p+1)(p+2)}{2})^{\frac{1}{p}}$, $f(v(\alpha)x) = sech^{\frac{2}{p}}\left(\frac{p\sqrt{cx}}{2}\right)$ no lema (3.1.3) verifica-se (c).

Hipótese 3. (Espectro do operador H_c). Para $c \in I\!R^+$, $H_c \equiv (E'' - cQ'')(\phi_c)$ tem exatamente um autovalor negativo o qual é simples; seu núcleo é gerado por $\frac{d}{dx}\phi_c$ e o resto do espectro é positivo. Além disso, existe $\delta > 0$ tal que inf $\sigma(H_c) \cap (0, +\infty) \geq \delta$. De fato, é importante observar de (3.64) que $\lambda = 0$ pertence ao espectro de H_c, com $\frac{d}{dx}\phi_c$ em seu núcleo. Por outro lado verifiquemos que para um $g \in Ker(H_c)$ existe um α tal que $g = \alpha\partial_x\phi_c$. Desta forma, considerando $g \in H^1(I\!R)$ obtemos de (3.63) e (3.61) que se $H_c(g) = 0$, então usando novamente o Wronskiano verifica-se que $span\{\partial_x\phi\}$ gera o $ker\, H_c$. Como

$$H_c = -\partial_x^2 + c - \phi_c^p \text{ com } c > 0$$

pode-se ver que ele é um caso particular do operador $\mathcal{L}_\alpha$, definido pela equação (1.15), sendo para isto suficiente tomar $\alpha = c, \quad q = p$ e $\gamma = 1$. Logo, pelo lema (1.5.6) da seção (2.1.1) temos

$$\sigma_e(H_c) = [c, +\infty).$$

Por outro lado, tomando $V(x) = c - \phi_c^p(x)$ tem-se que $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = c > 0$, ou seja, verifica-se (1.21) e, como ϕ' é auto-função associada ao auto-valor simples zero, ϕ' anula-se unicamente em $x = 0$ e muda de sinal, então pelo lema (1.6.8) tem-se que

$$H_c = -\partial_x^2 - \frac{c(p+1)(p+2)}{2} sech^2(\frac{\sqrt{c}px}{2}) + c,$$

possui um único autovalor negativo simples λ_0 e existe um $\delta > 0$ tal que $\forall\ \lambda \in \sigma(H_c) - \{\lambda_0, 0\}, \quad \lambda > \delta$.

Em resumo verifica-se a hipótese 3.

Observação 3.4.1. Outra maneira de verificar a hipótese 3, como no caso da KdV é usando a fórmula explícita do soliton e uma generalização das idéias da teoria dada em [32], páginas 633-634, juntamente com as séries hipergeométricas.

Por outro lado estabeleceremos a seguir um teorema para garantir a estabilidade da KdV-Generalizada.

Teorema 3.4.2. *Considere as hipóteses* (1) $\to$ (3) *e suponha que* $c \in (0, \infty)$. *Então a onda solitária* ϕ_c *de* (3.61) *é estável se*

$$d''(c) > 0, \tag{3.66}$$

onde $d(c) = (E - cQ)(\phi_c)$.

Prova. A prova deste teorema é idêntica ao caso da KdV, usando os lemas (3.3.4), (3.3.5) e (3.3.6). E de forma análoga à prova feita na primeira parte do teorema (2.1.7) temos que a positividade da função escalar $d(.)$ implica a estabilidade da onda solitária $\phi_c = 3c\,sech(\frac{\sqrt{c}x}{2})$. $\square$

Na sequência veremos a estabilidade do *soliton* dado em (3.62), usando o sinal de $d''(c)$, como foi provado no teorema (3.4.2).

Teorema 3.4.3. *Seja* ϕ_c *com* $c > 0$. *Então o soliton dado por (3.62) é* $H^1(\mathbb{R})$-*estável para* $p < 4$.

Prova. Por definição tem-se $d(c) = E(\phi_c) - cQ(\phi)$. Então

$$\begin{aligned} d'(c) &= \; < E'(\phi_c) - cQ'(\phi_c) / \frac{d}{dc}\phi_c > -Q(\phi) \\ &= -Q(\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi_c^2}{2} dx \qquad \text{(por} \quad (3.36)) \end{aligned}$$

Logo

$$d'(c) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_c^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{c(p+1)(p+2)}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^{\frac{4}{p}}\left(\frac{p\sqrt{c}\xi}{2}\right) d\xi,$$

e, fazendo a mudança de variável $x = \frac{p\sqrt{c}\xi}{2}$, tem-se que

$$d'(c) = \frac{1}{p\sqrt{c}}\left(\frac{c(p+1)(p+2)}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} sech^{\frac{4}{p}}(x) dx,$$

e

$$d''(c) = \frac{((p+1)(p+2))^{\frac{2}{p}}}{2^{\frac{1}{p}} p}\left(\frac{4-p}{2p}\right) c^{\frac{4-3p}{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} sech^{\frac{4}{p}}(x)\, dx.$$

Portanto, $d''(c) > 0$ para $p < 4$ pois $c > 0$.

Logo concluimos que o soliton dado explicitamente em (3.62) é $H^1(\mathbb{R})$-estável para $p < 4$. $\square$

3.5 Sistemas de equações de evolução não-lineares

Nesta seção consideraremos o sistema

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + (u^p v^{p+1})_x &= 0 \\ v_t + v_{xxx} + (u^{p+1} v^p)_x &= 0 \end{cases} \tag{3.67}$$

com $x, t \in \mathbb{R}$, $u,\ v \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ $u(x,0) = u_0(x)$, $v(x,0) = v_0(x)$ e $p \geq 1$ inteiro.

Este sistema pode ser interpretado como um acoplamento de equações Korteweg-de Vries generalizadas da forma

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + f(u,v)_x &= 0 \\ v_t + v_{xxx} + g(u,v)_x &= 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

com f e g satisfazendo $f(u,v) = H_u(u,v)$ e $g(u,v) = H_v(u,v)$, para uma função suave H.

O sistema da forma (3.68) é de muito interesse na Física pois, por exemplo, para uma função H da forma:

$$H(u,v) = \frac{b_2}{6}u^3 + \frac{1}{6}v^3 + \frac{a_2 b_2}{2}u^2 v + \frac{a_1 b_2}{2}uv^2$$

Obtemos o sistema de Gear-Grimshaw [20] que modela interação forte de ondas fracamente não lineares, que estudaremos na seção 3.6. Vejamos primeiramente o problema de valor inicial para o sistema (3.67)

Teorema 3.5.1 (Problema de Valor Inicial e Invariantes [4]). *O PVI para a equação (3.67) é localmente bem posto em X, i.e. satisfaz:*

(i) *Dado* $u_0 \in X$, *existe* $T = T(\|u_0\|_X)$ *e uma única solução do problema* (3.15) *com* $u \in C([0,T]:X) \cap C^1([0,T]:Y) = \mathcal{X}(T)$

(ii) *Existe um* $r = r(\|u_0\|) > 0$ *e uma função contínua não-decrescente* $F(.) = F(., \|u_0\|_X)$, *com* $F(0) = 0$ *tal que a aplicação* $v_0 \to v_t$ *do conjunto* $\{v_0 \in X\colon \|v_0 - u_0\|_X < r\}$ *em* $\mathcal{X}(T)$ *satisfaz* $\|v_t - u_t\|_{\mathcal{X}(T)} \le F(\|v_0 - u_0\|_X)$,

onde, para o caso local temos que $X = H^s(I\!R) \times H^s(I\!R)$ *com* $s \geq 1$.
E é bem posto em $X = H^s(I\!R) \times H^s(I\!R)$ *sob as seguintes condições*

a) *para* $p = 1$ *vale para todo dado inicial,*

b) *para* $p = 2$, $\|v_0\|_X$ *não pode ser muito grande,*

c) *para* $p > 2$ *só vale para dados pequenos.*

Além disso, os invariantes E *e* Q *são dados por*

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} [(u_x)^2 + (v_x)^2 - \frac{2}{p+1}u^{p+1}v^{p+1}]dx$$

$$Q(u,v) == -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2)dx$$

Prova. A existência de soluções é estudada em [4]. Vamos calcular os invariantes E e Q e suas derivadas de Gatêaux.

Observemos que o sistema(3.67) pode ser escrita na forma matricial seguinte

$$U_t + U_{xxx} + (\nabla H(U))_x = 0 \tag{3.69}$$

onde

$$U = (u\,v)^T \text{ e } H(U) = \frac{1}{p+1}u^{p+1}v^{p+1}.$$

Da equação (3.69) temos

$$U_t + (U_{xx} + \nabla H(U))_x = 0 \tag{3.70}$$

Fazendo o produto na equação (3.70) pelo multiplicador $M_1(U) = (U_{xx}+\nabla H(U))^T$ e integrando em $\mathbb{R}$ obtemos o invariante que chamaremos energia do sistema $E(U)$, como segue:

$$M_1 U_t + M_1(U_{xx} + \nabla H(U))_x = 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} (M_1 U_t + M_1(U_{xx} + \nabla H(U))_x)dx = 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} M_1 U_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} M_1 M_{1x}^T dx = 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} (U_{xx}^T U_t + (\nabla H(U))^T U_t)dx = 0$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} U_{xx}^T U_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla H(U))^T U_t dx = 0$$

$$\iff -\int_{-\infty}^{+\infty} U_{xt}^T U_x dx + \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} H(U)dx = 0$$

$$\iff \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_{-\infty}^{+\infty} (-U_x^T U_x + 2H(U))dx) = 0$$

Logo

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 + v_x^2 - \frac{2}{1+p}u^{p+1}v^{p+1})dx = Cte$$

Portanto

$$E(U) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 + v_x^2 - \frac{2}{1+p}u^{p+1}v^{p+1})dx \tag{3.71}$$

Ou

$$E(U) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (U_x^T U_x - 2H(U))dx \tag{3.72}$$

A seguir calcularemos o invariante Q chamado momento, usando o multiplicador $M_2(U) = U^T$,

multiplicando a equação (3.70) por $M_2(U)$ temos

$$U^T U_t + U^T(U_{xx} + \nabla H(U))_x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} U^T U_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} U^T U_{xxx} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} U^T (\nabla H(U))_x dx = 0$$

Integrando por partes temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^T U_t dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (uu_t + vv_t) dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^T (\nabla H(U))_x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [pu^p v^{p+1} u_x + (p+1) u^{p+1} v^p v_x + (p+1) u^p v^{p+1} + pu^{p+1} v^p v_x] dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(2p+1) u^p v^{p+1} u_x + (2p+1) u^{p+1} v^p v_x] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [-(2p+1) u^{p+1} v^p v_x + (2p+1) u^{p+1} v^p v_x] dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^T (\nabla H(U))_x dx = 0,$$

e obtem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2) dx = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2) dx = Cte$$

Portanto o invariante Q é dado por

$$Q(U) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2) dx \tag{3.73}$$

Ou

$$Q(U) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} U^T U dx. \tag{3.74}$$

Na sequência calcularemos as derivadas de Gâteaux: $E'(U)W$ e $Q'(U)W$ onde $U = (u, v)$ e $W = (w_1, w_2)$ pertencem a $X = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$. Calculemos primeiramente a derivada direcional $\frac{\partial E}{\partial V}(U)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial W}(U) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[E(U+\varepsilon W)-E(U)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[(U_x^T+\varepsilon W_x^T)(U_x+\varepsilon W_x)-2G(U+\varepsilon W)]\,dx\right) \\
&- \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[U_x^T U_x-2H(U)]\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[U_x^T+\varepsilon W_x^T U_x+\varepsilon^2 W_x^T W_x+\varepsilon U_x^T W_x]\,dx\right) \\
&- \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[2H(U+\varepsilon W)+U_x^T U_x-2H(U)]\,dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(W_x^T U_x-\nabla H(U)W)\,dx
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial W}(U) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(W_x^T U_x-\nabla H(U)W)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}[(u_{xx}+H_u)w_1+(v_{xx}+H_v)w_2]dx
\end{aligned}$$

Logo, como $u_{xx}+H_u$ e $v_x x+H_v \in H^{-1}(\mathbb{R})$ tem-se que

$$E'(U) = -\begin{pmatrix} u_{xx}+u^P v^{p+1} \\ v_{xx}+u^{p+1}v^p \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Ou

$$E'(U) = -(U_{xx}+\nabla H) \tag{3.76}$$

Para Q:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial W}(u,v) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[Q(U+\varepsilon W)-Q(U)] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[-(u+\varepsilon w_1)^2(v+\varepsilon w_2)2+u^2+v^2]dx\right] \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}(uw_1+vw_2)dx
\end{aligned}$$

Portanto, como

$$Q'(U,W) = -\int_{-\infty}^{+\infty}U^T W dx \tag{3.77}$$

então

$$Q'(U) = -U. \tag{3.78}$$

□

Observação 3.5.1. Escrevendo o sistema vetorial (3.70) da forma hamiltoniana com $J = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}$ tem-se,

$$\begin{aligned} U_t = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} E'(U) &= JE'(U) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{xx} - u^p v^{p+1} \\ -v_{xx} - u^{p+1} v^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{xx} - u^p v^{p+1} \\ -v_{xx} - u^{p+1} v^p \end{pmatrix}.$$

3.5.1 Existência de soluções tipo solitons

Como nós consideraremos as soluções suaves da equação (3.67) que decaem no infinito da forma $(u(t,x), v(x,t)) = (\phi_c(x-ct), \psi_c(x-ct))$, com $c > 0$ e como c é fixo escrevemos $\Phi = (\phi, \psi)$ ao invés de $\Phi_c = (\phi_c, \psi_c)$. Deste modo, substituindo Φ em (3.67) e assumindo que $\phi(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\phi(\xi)''$, $\psi(\xi)'' \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$ temos que

$$\begin{cases} -\phi''' + c\phi' - (\phi^p \psi^{1+p})' &= 0 \\ -\psi''' + c\psi' - (\phi^{1+p} \psi^p)' &= 0 \end{cases} \tag{3.79}$$

Restringindo ao caso $\psi = \phi$ obtemos a equação elíptica não-linear:

$$-\phi'' + c\phi - \phi^{2p+1} = 0 \tag{3.80}$$

onde $'' \prime '' = \frac{d}{d\xi}$, com $\xi = x - ct$,

Por outro lado, pela teoria apresentada no lema (2.0.19) tem-se que se $\Phi \in D(T'(0)) =$

$H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ satisfaz a equação estacionária

$$E'(\Phi) = cQ'(\Phi), \text{ onde } \Phi = (\phi\,\psi)^T \text{ e } c > 0$$

então $T(ct)\Phi$ é um *soliton* da equação (**2.1**) e tem-se também a equivalência entre

$$E'(\Phi) - cQ'(\Phi) = 0 \quad e \quad \{-\phi'' + c\phi - \phi^{2p+1} = 0 \text{ com } \psi = \phi\} \tag{3.81}$$

Observemos que a equação elíptica não linear dada por (3.80) tem a forma da equação (3.4). Portanto tomando $\alpha = c \quad \beta = 1$ e $q = 2p$, pelo lema (3.1.2) obtemos um *soliton* explícito para (3.80) dado por

$$\phi_c(\xi) = (c(p+1))^{\frac{1}{2p}} sech^{\frac{1}{p}}(p\sqrt{c}\xi) \tag{3.82}$$

3.5.2 Estabilidade de solitons

Prosseguindo veremos a estabilidade do sistema. Similarmente ao caso da KdV as hipótese 1 e 2 são:

Hipótese 1. (Existência de Soluções)

Para cada $u_0 \in X \equiv H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, existe $T > 0$ dependendo de $\|u_0\|_X$, tal que o sistema hamiltoniano (3.29) tem uma solução $u \in C([0,T];X)$ com $u(0) = u_0$ e $E(u(t)) = E(u_0)$, $Q(u(t)) = Q(u_0)$, para todo $t \in [0,T]$.

De fato, esta hipótese é verificada pelo teorema (3.5.1).

Hipótese 2. (Existência de ondas solitárias)

Para cada $c \geq 1$, temos que

(a) Existe uma solução da equação (3.80),

(b) $\frac{d^2}{dx^2}\phi_c \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$,

(c) a função $c \in \mathbb{R}^+ \to \phi_c \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ é de classe C^1,

(d) $\phi_c \notin Ker(\frac{d}{dx})$.

Pelo que foi feito na secção (3.5.1) sobre existência de solitons temos que o *soliton* explicíto dado por (3.82) verifica diretamente (a) e (d). Pela observação da desigualdade de Holder (1.2.16), verifica-se (b) e, finalmente, tomando $\mu(\alpha) = (c(p+1))^{\frac{1}{2p}}$ e $f(v(\alpha)x) = sech^{\frac{1}{p}}(p\sqrt{c}\xi)$ no lema (3.1.3) verifica-se (c).

Também para verificar a hipótese 3 precisaremos dos seguintes lemas

Lema 3.5.2. *$H_c(\Phi_x) = 0$ para $\Phi = (\phi\,\psi)^T$*

Prova. Como H_c é definido por $H_c = E''(\Phi) - cQ''(\Phi)$ com $\Phi = (\phi\psi)^T$ então derivando $E'(\Phi)$ e $Q'(\Phi)$ temos

$$E''(\Phi) = -\begin{pmatrix} \partial_x^2 + p\phi^{p-1}\psi^{p+1} & (p+1)\phi^p\psi^p \\ (p+1)\phi^p\psi^p & \partial_x^2 + p\phi^{p+1}\phi^{p-1} \end{pmatrix}$$

$$Q''(\Phi) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo

$$H_c = -\begin{pmatrix} \partial_x^2 + p\phi^{p-1}\psi^{p+1} - c & (p+1)\phi^p\psi^p \\ (p+1)\phi^p\psi^p & \partial_x^2 + p\phi^{p+1}\phi^{p-1} - c \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} H_c(\Phi_x) &= -\begin{pmatrix} \partial_x^2 + p\phi^{p-1}\psi^{p+1} - c & (p+1)\phi^p\psi^p \\ (p+1)\phi^p\psi^p & \partial_x^2 + p\phi^{p+1}\phi^{p-1} - c \end{pmatrix} (\phi_x\,\psi_x)^T \\ &= -\begin{pmatrix} \phi_{xxx} + (\phi^p\psi^{p+1})_x - c\phi_x \\ \psi_{xxx} + (\phi^{p+1}\psi^p)_x - c\psi_x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e por (3.79), obtemos

$$H_c(\Phi_x) = 0. \tag{3.83}$$

□

Observação 3.5.2. Como $\phi = \psi$, então H_c pode ser escrita como

$$H_c = -\begin{pmatrix} \partial_x^2 + p\phi^{2p} - c & (p+1)\phi^{2p} \\ (p+1)\phi^{2p} & \partial_x^2 + p\phi^{2p} - c \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

Lema 3.5.3. *O espectro do operador H_c é como segue:*

(1) *$\sigma(H_c)$ possui um único autovalor negativo simples,*

(2) $Ker(H_c) = span(T'(0)\phi_c)$ *e*

(3) *o espectro positivo de H_c é inferiormente limitado e existe $\delta > 0$ tal que* $\inf(\sigma(H_c) \cap (0, +\infty)) \geq \delta$.

Prova. Seja $\Psi = (\psi_1, \psi_2) \in X$ tal que $H_c((\psi_1\ \psi_2)^T) = 0$. Então, por (3.84) temos que

$$-\partial_x^2\psi_1 - p\phi^{2p}\psi_1 + c\psi_1 - (p+1)\phi^{2p}\psi_2 = 0 \tag{3.85}$$

$$-\partial_x^2\psi_2 - p\phi^{2p}\psi_2 + c\psi_2 - (p+1)\phi^{2p}\psi_1 = 0. \tag{3.86}$$

Somando e subtraindo as equações (3.85) e (3.86) obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_x^2(\psi_1+\psi_2) - (2p+1)\phi^{2p}(\psi_1+\psi_2) + c(\psi_1+\psi_2) & = & 0, \\ -\partial_x^2(\psi_1-\psi_2) + \phi^{2p}(\psi_1-\psi_2) + c(\psi_1-\psi_2) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.87}$$

Portanto, desde que $(\psi_1 + \psi_2)(\xi) \to 0$ com $|\xi| \to \infty$ é a única solução para o problema

$$-\frac{d^2}{d\xi^2}h + \phi^{2p}h + ch = 0 \qquad h \in H^1(I\!R), \tag{3.88}$$

é $h \equiv 0$, desde (3.87) e a teoria de equações diferenciais ordinárias (ver[16]) tem-se $\psi_1 + \psi_2 = k\phi', \quad k \in I\!R$ e $\psi_1 = \psi_2$. disto obtemos que $(\psi_1\ \psi_2)^T = \frac{k}{2}(\phi'\ \phi')^T$. Isto e o lema(3.5.2) prova que o núcleo do operador H_c é unidimensional.

Novamente seja $\Psi = (\psi_1\ \psi_2)^T \in X$ tal que $H_c((\psi_1\ \psi_2)^T) = \lambda(\psi_1\ \psi_2)^T$, para $\lambda < 0$. Então, de (3.84) temos

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_x^2(\psi_1+\psi_2) - (2p+1)\phi^{2p}(\psi_1+\psi_2) + c(\psi_1+\psi_2) & = & \lambda(\psi_1+\psi_2), \\ -\partial_x^2(\psi_1-\psi_2) + \phi^{2p}(\psi_1-\psi_2) + c(\psi_1-\psi_2) & = & \lambda(\psi_1-\psi_2). \end{array}\right. \tag{3.89}$$

Considerando o operador, $L_c = -\frac{d^2}{d\xi^2} - (2p+1)\phi^{2p} + c$, obtemos a partir do lema (3.5.2) que $L_c(\phi') = 0$. Desde que ϕ' possui um único zero, pelo feito nas secções

secções 1.4, 1.5 e 1.6 da teoria espectral para operadores auto-adjuntos, o operador de Schödinger e a teoria de Sturm-Lioville respectivamente, veremos que L_c possui um único autovalor simples negativo β, com autofunção positiva $\mathcal{X}_c$. isto é $L_c\mathcal{X}_c = \beta\mathcal{X}_c$ com $\mathcal{X}_c \in H^\infty(\mathbb{R})$, disto e de (3.89) teremos $\lambda = \beta$, $\psi_1+\psi_2 = k_1\mathcal{X}_c$ e $\psi_1 = \psi_2$. Além disso, usando o fato que $\inf\{\ \gamma$ tal que $\gamma \in \sigma(L_c) - \{0,\beta\}\} > \eta > 0$ temos que L_c verifica a hipotese 3. Finalmente usando argumentos análogos da prova do lema(3.2.4) (generalização das propriedades do operador linearizado L_c ao operador Hessiano H_c do sistema) da primeira aplicação concluimos a prova do lema. □

Portanto, como H_c satisfaz a hipótese 3, então a estabilidade dos *solitons* para este sistema será determinado pelo sinal positivo de $d''(c)$. Como o *soliton* explícito do sistema está dado por (3.82) temos:

Teorema 3.5.4. *Sejam* $p \geq 1$, $\Phi = (\phi_c, \phi_c)$ *e* $c > 0$. *Tem-se:*

i) Se $p = 1$, *então o soliton* Φ *é* $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$*-estável.*

Prova. Por definição tem-se que $d(c) = E(\Phi_c) - cQ(\Phi)$,

então

$$\begin{aligned} d'(c) &= < E'(\Phi_c) - cQ'(\Phi_c)/\frac{d}{dc}\Phi_c > -Q(\Phi) \\ &= -Q(\Phi) = -Q(\phi_c, \phi_c) \text{ pois } \psi_c = \phi_c \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_c^2 dx \text{ de (3.95).} \end{aligned}$$

Logo $d'(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_c^2 d\xi = [(1+p)c]^{\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^{\frac{2}{p}}(p\sqrt{c}\xi)d\xi$.

Fazendo a mudança de variável $x = p\sqrt{c}\xi$ obtemos

$d'(c) = \frac{[(1+p)c]^{\frac{1}{p}}}{p\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^{\frac{2}{p}}(x)dx$

e $d''(c) = \frac{d}{dc}\{\frac{[(1+p)c]^{\frac{1}{p}}}{p\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^{\frac{2}{p}}(x)dx\}$

$= \frac{(p+1)^{\frac{1}{p}}}{p}(\frac{2-p}{2p})c^{\frac{2-3p}{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^{\frac{2}{p}}(x)dx.$

Portanto, $d''(c) > 0$ se $p < 2$, e $d''(c) < 0$ se $p > 2$.

Logo verifica-se a afirmação. □

3.6 O Sistema Gear-Grimshaw

Nesta aplicação estudamos um sistema de duas equações que modela o problema físico de interações fortes internas de ondas solitárias ou ondas viajantes. Este sistema foi deduzido por Gear e Grimshaw [20] em 1984 e pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + a_1 v v_x + a_2 (uv)_x & = 0 \\ b_1 v_t + v v_x + v_{xxx} + b_2 a_3 u_{xxx} + b_2 a_2 u u_x + b_2 a_1 (uv)_x + r v_x & = 0 \end{cases}$$

onde a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 e r são constantes reais com b_1, b_2 positivas e u e v são funções reais das variáveis reais x e t.

Primeiramente vejamos o teorema do problema de valor inicial e dos invariantes do sistema.

Teorema 3.6.1 (Problema de Valor Inicial e Invariantes [28]). *O PVI para a equação* (3.90) *é localmente bem posto em* $X = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ *para* $b_2 . a_3^2 \neq 1$, *i.e. Satisfaz*

(i) *Dado* $u_0 \in X$ *existe* $T = T(\|u_0\|_X)$ *e uma única solução do problema* (3.15) *com* $u \in C([0,T] : X) \cap C^1([0,T] : Y) = \mathcal{X}(T)$

(ii) *Existe um* $r = r(\|u_0\|) > 0$, *e uma função contínua não-decrescente* $F(.) = F(., \|u_0\|_X)$, *com* $F(0) = 0$ *tal que a aplicação* $v_0 \to v_t$ *do conjunto* $\{v_0 \in X\colon \|v_0 - u_0\|_X < r\}$ *para* $\mathcal{X}(T)$. *Satisfaz* $\|v_t - u_t\|_{\mathcal{X}(T)} \leq F(\|v_0 - u_0\|_X)$.

Com invariantes dados por

$$E(U) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_x^2 + v_x^2 - \frac{u^3}{3} - \frac{v^3}{3} - a_1 u v^2 - a_2 u^2 v) dx$$

$$Q(U) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + v^2) dx$$

Prova. Para o PVI ver [28]. Como estudamos o caso $a_3 = 0$ e $b_1 = b_2 = 1$, então o sistema reduz-se a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t + uu_x + u_{xxx} + a_1 vv_x + a_2(uv)_x & = & 0 \\ v_t + vv_x + v_{xxx} + a_2 uu_x + a_1(uv)_x & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.90}$$

Escrevendo (3.90) na forma vetorial obtemos

$$U_t + U_{xxx} + (\nabla H(U))_x = 0 \tag{3.91}$$

onde

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad e \quad H(U) = \frac{u^3}{6} + \frac{v^3}{6} + \frac{a_1 uv^2}{2} + \frac{a_2 vu^2}{2}$$

Como nosso objetivo é estudar a estabilidade orbital das soluções tipo *soliton* do sistema, o qual será estudado com as idéias da KdV, precisamos conhecer os invariantes como na aplicação anterior.

Da equação (3.91) temos

$$U_t + (U_{xx} + \nabla H(U))_x = 0. \tag{3.92}$$

Fazendo o produto da equação (3.92) pelo multiplicador $M_1(U) = (U_{xx} + \nabla H(U))^T$ e integrando em $\mathbb{R}$ obtemos o invariante que chamaremos energia do sistema E(U), como segue

$$M_1 U_t + M_1(U_{xx} + \nabla H(U))_x = 0$$

$$\begin{aligned} \iff & \int_{-\infty}^{+\infty} (M_1 U_t + M_1(U_{xx} + \nabla H(U))_x) dx = 0 \\ \iff & \int_{-\infty}^{+\infty} M_1 U_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} M_1 M_{1x}^T dx = 0 \\ \iff & \int_{-\infty}^{+\infty} (U_{xx}^T U_t + (\nabla H(U))^T U_t) dx = 0 \\ \iff & \int_{-\infty}^{+\infty} U_{xx}^T U_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla H(U))^T U_t dx = 0 \\ \iff & -\int_{-\infty}^{+\infty} U_{xt}^T U_x dx + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} H(U) dx = 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(-U_x^T U_x + 2H(U))dx = 0$$

Portanto

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(u_x^2 + v_x^2 - \frac{u^3}{3} - \frac{v^3}{3} - a_1 uv^2 - a_2 u^2 v)dx = Cte$$

Logo $\quad E(U(t)) = E(U(0)) \quad$ e

$$E(U) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(u_x^2 + v_x^2 - \frac{u^3}{3} - \frac{v^3}{3} - a_1 uv^2 - a_2 u^2 v)dx \tag{3.93}$$

Ou

$$E(U) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(U_x^T U_x - 2H(U))dx. \tag{3.94}$$

A seguir calcularemos o invariante Q usando o multiplicador $M_2(U) = U^T$. Multiplicando a equação (3.92) por $M_2(U)$ temos

$$U^T U_t + U^T(U_{xx} + \nabla H(U))_x = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} U^T U_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} U^T U_{xxx} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} U^T(\nabla H(U))_x dx = 0.$$

Observe que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^T U_t dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(uu_t + vv_t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2 + v^2)dx,$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} U^T(\nabla H(U))_x dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[u^2 u_x + a_1 uvv_x + ua_2(uv)_x + v^2 v_x\right]dx \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[a_2 vuu_x + a_1 v(uv)_x\right]dx.\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_x dx = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 v_x dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_1 uvu_x dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} a_1 v(uv)_x dx \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 uvv_x + a_1 v(uv)_x)\, dx = 0,$$

e analogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a_2 u(uv)_x + a_2 uvu_x)\, dx = 0,$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^T(\nabla H(U))_x dx = 0.$$

Logo obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2+v^2)dx = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2+v^2)dx = -Q(U(t)) = -Q(U(0)).$$

Portanto o outro invariante que chamaremos momento é dado por

$$Q(U) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u^2+v^2)dx \tag{3.95}$$

Ou

$$Q(U) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} U^T U dx. \tag{3.96}$$

Calculemos agora as derivadas de Gâteaux $E'(U)$ e $Q'(U)$ na forma explícita.

Para o invariante E: Como $E(U) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (U_x^T U_x - 2H(U))dx$ tem a forma matricial similar à aplicação anterior (3.72), então fazendo cálculos analogos ao caso anterior obtemos $E'(U)W = \int_{-\infty}^{+\infty} (W_x^T U_x - \nabla H(U)W)dx$.
Logo a derivadas de Gâteaux em $X = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ é dada por

$$E'(U) = -(U_{xx} + \nabla H(U)) \tag{3.97}$$

Ou

$$E'(U) = -\begin{pmatrix} u_{xx} + \frac{1}{2}u^2 + a_1\frac{v^2}{2} + a_2 uv \\ v_{xx} + \frac{v^2}{2} + a_1 uv + a_2\frac{u^2}{2}. \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

Para o invariante Q: Como o invariante Q da aplicação anterior dado pela equação (3.74) é igual ao invariante deste sistema Gear-Grimshaw dado pela equação (3.96), então os cálculos feitos na aplicação anterior também valem para este sistema. Portanto, a derivada direcional e de Gâteaux $Q'(U)$ é dada por

$$Q'(U) = -\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -U. \tag{3.99}$$

□

Observação 3.6.1. Escrevendo o sistema vetorial (3.92) na forma hamiltoniana com $J = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix}$ obtemos

$$U_t = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} E'(U) = JE'(U)$$

$$U_t = JE'(U)$$

$$U_t = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{xx} - \frac{u^2}{2} - a_1\frac{v^2}{2} - a_2uv \\ -v_{xx} - \frac{v^2}{2} - a_2\frac{u^2}{2} - a_1uv \end{pmatrix}$$

i.e

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{xx} - \frac{u^2}{2} - a_1\frac{v^2}{2} - a_2uv \\ -v_{xx} - \frac{v^2}{2} - a_2\frac{u^2}{2} - a_1uv \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, derivando $E'(U)$ e $Q'(U)$ com $a_1 = a_2 = a$ temos que

$$E''(U) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - u - av & -a(u+v) \\ -a(u+v) & -\partial_x^2 - v - au \end{pmatrix}, \tag{3.100}$$

e

$$Q''(U) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.101}$$

Como $H_c\colon X \to X^*$ é definido por $H_c = E''(\Phi) - cQ''(\Phi)$ com $c > 0$ então

$$H_c = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \phi - a\psi + c & -a(\phi + \psi) \\ -a(\psi + \phi) & -\partial_x^2 - \psi - a\phi + c \end{pmatrix}$$

e tomando $\psi = \phi$, obtemos

$$\mathbf{H_c} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - (1+a)\phi + c & -2a\phi \\ -2a\phi & -\partial_x^2 - (1+a)\phi + c \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

Observação 3.6.2. Se considerarmos o isomorfismo natural $G\colon X \to X^*$ tal que $\langle GU, V\rangle = (U, V)_X$, definido por

$$\begin{pmatrix} 1 - \partial_x^2 & 0 \\ 0 & 1 - \partial_x^2 \end{pmatrix}$$

obtemos o operador linear $G^{-1}H_c\colon X \to X$, onde

$$\mathbf{G^{-1}} = \begin{pmatrix} (1 - \partial_x^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1 - \partial_x^2)^{-1}, \end{pmatrix}$$

o qual satisfaz

$$\langle G^{-1}H_c(u,v)/(y,z)\rangle_X = \langle H_c(u,v)/(y,z)\rangle = \langle (u,v)/G^{-1}H_c(y,z)\rangle_X$$

i.e, verifica que é auto-adjunto.

3.6.1 Existência de solitons

Vejamos agora o *soliton* do sistema Gear-Grimshaw. Como consideraremos soluções suaves da equação (3.91) que decaem no infinito da forma $(u(t,x), v(x,t)) = (\phi_c(x - ct), \psi_c(x - ct))$, com $c > 0$ e como c é fixo escreveremos $\Phi = (\phi, \psi)$ ao invés de $\Phi_c = (\phi_c, \psi_c)$. Deste modo, substituindo Φ em (3.91) e assumindo que $\phi(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\phi(\xi)''$, $\psi(\xi)'' \longrightarrow 0$ quando $|\xi| \longrightarrow \infty$ temos que

$$-\Phi''' + c\Phi' - (\nabla H(\Phi))' = 0$$

Ou

$$\begin{cases} -\phi''' + c\phi' - (\frac{\phi^2}{2} + \frac{a_1}{2}\psi^2 + a_2\phi\psi)' = 0 \\ -\psi'''' + c\psi' - (\frac{\psi^2}{2} + a_1\phi\psi + \frac{a_2}{2}\phi^2)' = 0 \end{cases} \tag{3.103}$$

Integrando (3.103) e restringindo o sistema (3.103) ao caso $\psi = \phi$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} -c\phi + \phi'' + (\frac{1}{2} + \frac{a_1}{2} + a_2)\phi^2 = 0 \\ -c\phi + \phi'' + (\frac{1}{2} + \frac{a_2}{2} + a_1)\phi^2 = 0 \end{cases} \tag{3.104}$$

Mas ainda, para que ambas as equações do sistema (3.104) sejam iguais devemos ter $a_1 = a_2$. Portanto, fazendo $a_1 = a_2 = a \in \mathbb{R}$ em (3.104), obtemos a equação elíptica não-linear dada por

$$-\phi'' + c\phi - \frac{1}{2}(1+3a)\phi^2 = 0 \tag{3.105}$$

onde $"\prime" = \frac{d}{d\xi}$, com $\xi = x - ct$.

Por outro lado, pela teoria apresentada no lema (2.0.19) tem-se que se $\Phi \in \mathrm{Dom}\,(T'(0)) = H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$ satisfaz a equação estacionária

$$E'(\Phi) = cQ'(\Phi), \quad \text{onde} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \quad e \quad c > 0,$$

então $T(ct)\Phi$ é um *soliton* da equação (**2.1**) e tem-se também que obter o *soliton* do sistema (3.91) para $a_1 = a_2 = a$ é equivalente a obter a solução da EDO

$$-\phi'' + c\phi - \frac{1}{2}(1+3a)\phi^2 = 0 \text{ com } \psi = \phi.$$

Continuando provaremos a existência de um *soliton* para (3.105). Assim como nas aplicações anteriores temos que a equação (3.105) tem a forma da equação (3.4), portanto, tomando $\alpha = c$, $\beta = \frac{(1+3a)}{2} > 0$ e $q = 1$, pelo lema (3.1.2) obtemos o *soliton* explícito dado por

$$\phi_c(x) = \frac{3c}{(1+3a)}\cosh^{-2}(\frac{\sqrt{c}x}{2}) \qquad a > -\frac{1}{3} \tag{3.106}$$

3.6.2 Estabilidade de solitons

Prosseguindo veremos a estabilidade dos *solitons* do sistema Gear-Grimshaw. Similarmente a KdV, tem-se para este caso as hipóteses 1 e 2 como seguem:

Hipótese 1. (Existência de Soluções)

Para cada $u_0 \in X \equiv H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ existe $T > 0$ dependendo de $\|u_0\|_X$, tal que o sistema hamiltoniano (3.29) tem uma solução $u \in C([0,T];X)$ com $u(0) = u_0$ e $E(u(t)) = E(u_0)$, $Q(u(t)) = Q(u_0)$, para todo $t \in [0,T]$.

De fato, pelo teorema (3.6.1) a hipótese 1 está provada.

Hipótese 2. (Existência de ondas solitárias)

Para cada $c \geq 1$, temos que

(a) Existe uma solução da equação (3.105),

(b) $\frac{d^2}{dx^2}\phi_c \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$,

(c) a função $c \in \mathbb{R}^+ \to \phi_c \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ é de classe C^1,

(d) $\phi_c \notin Ker(\frac{d}{dx})$.

Pelo que foi feito na secção (3.6.1) sobre existência de solitons temos que o *soliton* explícito dado por (3.106) verifica diretamente (a) e (d). Pela observação da desigualdade de Holder (1.2.16), verifica-se (b) e, finalmente, tomando $\mu(\alpha) = \frac{3c}{1+3a}$ e $f(v(\alpha)x) = sech^2(\frac{\sqrt{c}x}{2})$ no lema (3.1.3) verifica-se (c).

Também precisaremos verificar os seguintes lemas com relação a hipótese 3.

Lema 3.6.2. *$H_c(\Phi_x) = 0$ para $\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix}$.*

Prova. Por (3.102) temos que

$$H_c(\Phi_x) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - (1+a)\phi + c & -2a\phi \\ -2a\phi & -\partial_x^2 - (1+a)\phi + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_x \\ \psi_x \end{pmatrix}$$

$$H_c(\Phi_x) = -\begin{pmatrix} \phi_{xxx} + \frac{(1+a)}{2}\phi_x^2 - c\phi_x + 2a\phi\psi_x \\ \psi_{xxx} + (1+a)\phi_x^2\psi_x - c\psi_x - a\phi_x^2 \end{pmatrix}$$

Logo fazendo $\psi = \phi$ e usando (3.105) obtemos

$$H_c(\Phi_x) = 0$$

□

Lema 3.6.3. *O espectro do operador H_c é como segue:*

(1) *$\sigma(H_c)$ possui um único autovalor negativo o qual é simples;*

(2) *$Ker(H_c) = span(T'(0)\phi_c)$;*

(3) *O espectro positivo de H_c é limitado inferiormente e existe $\delta > 0$ tal que $\inf(\sigma(H_c) \cap (0, +\infty)) \geq \delta$.*

Prova. Seja $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in X$ tal que $H_c \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0$. Então, por (3.84) temos que

$$-\partial_x^2\psi_1 - (1+a)\phi\psi_1 + c\psi_1 - 2a\phi\psi_2 = 0 \tag{3.107}$$

$$-\partial_x^2\psi_2 - (1+a)\phi\psi_2 + c\psi_2 - 2a\phi\psi_1 = 0. \tag{3.108}$$

Somando e subtraindo as equações (3.107) e (3.108) obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_x^2(\psi_1+\psi_2) - (1+3a)\phi(\psi_1+\psi_2) + c(\psi_1+\psi_2) &=& 0, \\ -\partial_x^2(\psi_1-\psi_2) + (a-1)\phi(\psi_1-\psi_2) + c(\psi_1-\psi_2) &=& 0. \end{array}\right. \tag{3.109}$$

Portanto, como $(\psi_1+\psi_2)(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$ e a única solução do problema

$$-\frac{d^2}{d\xi^2}h + c_1\phi h + ch = 0 \qquad h \in H^1(\mathbb{R}), \text{ e } c_1 > 0 \tag{3.110}$$

é $h \equiv 0$, então pela teoria de equações diferenciais ordinárias (ver [16]) tem-se que $\psi_1 + \psi_2 = k\phi'$, $\quad k \in \mathbb{R}$, e $\psi_1 = \psi_2$. Disto obtemos que $(\psi_1\ \psi_2)^T = \frac{k}{2}\begin{pmatrix} \phi' \\ \phi' \end{pmatrix}$. Isto e o lema(3.6.2) provam que o núcleo de H_c é unidimensional.

Novamente seja $\Psi = (\psi_1\ \psi_2)^T \in X$ tal que $H_c((\psi_1\ \psi_2)^T) = \lambda(\psi_1\ \psi_2)^T$, para $\lambda < 0$. Então, de (3.107) temos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\partial_x^2(\psi_1+\psi_2) - (1+3a)\phi(\psi_1+\psi_2) + c(\psi_1+\psi_2) &=& \lambda(\psi_1+\psi_2), \\ -\partial_x^2(\psi_1-\psi_2) + (a-1)\phi(\psi_1-\psi_2) + c(\psi_1-\psi_2) &=& \lambda(\psi_1-\psi_2). \end{array}\right. \tag{3.111}$$

Considerando o operador $L_c = -\frac{d^2}{d\xi^2} - (1+3a)\phi + c$, obtemos a partir do lema (3.6.2) que $L_c(\phi') = 0$. Como ϕ' possui um único zero, pelo feito nas secções 1.4, 1.5 e 1.6 da teoria espectral para operadores auto-adjuntos, o operador de Schödinger e a teoria de Sturm-Lioville respectivamente, veremos que L_c possui um único autovalor simples negativo β, com autofunção positiva $\mathcal{X}_c$, isto é $L_c\mathcal{X}_c = \beta\mathcal{X}_c$ com $\mathcal{X}_c \in H^\infty(\mathbb{R})$, disto e de (3.111) temos que $\lambda = \beta$, $\psi_1 + \psi_2 = k_1\mathcal{X}_c$ e $\psi_1 = \psi_2$. Além disso, usando o fato que $\inf\{\ \gamma$ tal que $\gamma \in \sigma(L_w) - \{0,\beta\}\} > \eta > 0$ teremos que L_c verifica a hipotese 3. Finalmente usando argumentos análogos da prova do lema(3.2.4) (generalização das propriedades do operador linearizado L_c ao operador Hessiano H_c do sistema) da primeira aplicação concluimos a prova do lema. $\square$

Portanto, como H_c satisfaz as 3 hipóteses, então a estabilidade dos *solitons* para este sistema será determinado pelo sinal positivo de $d''(c)$ como no caso das aplicações anteriores.

Teorema 3.6.4. *Sejam $\Phi = (\phi_c, \phi_c)$, $c > 0$ e $a > -\frac{1}{3}$. Então o soliton Φ dado por (3.106) é $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$-estável.*

Prova. Por definição tem-se $d(c) = E(\Phi_c) - cQ(\Phi_c)$. Devemos provar que $d''(c) > 0$. Observando que $\psi_c = \phi_c$ obtem-se

$$\begin{aligned} d'(c) &= \ < E'(\Phi_c) - cQ'(\Phi_c)\, , \frac{d}{dc}\Phi_c > -Q(\Phi_c) \\ &= -Q(\Phi_c) = -Q(\phi_c, \phi_c) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_c^2\, dx \end{aligned}$$

Logo, de (3.95) fazendo a mudança de variável $x = \frac{\sqrt{c}\xi}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} d'(c) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_c^2 d\xi = (\frac{3c}{1+3a})^2 \int_{-\infty}^{+\infty} sech^4(\frac{\sqrt{c}\xi}{2}) d\xi \\ &= \frac{18c^{\frac{3}{2}}}{(1+3a)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} sech^4 x dx \end{aligned}$$

e, consequentemente

$$d''(c) = \frac{27c^{\frac{1}{2}}}{(1+3a)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} sech^4(x)dx.$$

Logo, $d''(c) > 0$ pois $c > 0$ e $a > -\frac{1}{3}$. □

3.7 Outras Aplicações

Outra equação que possui solitons orbitalmente estaveis é a equação de Benjamin-Bona-Mahony estudada em [7]. A seguir faremos uma discussão breve da existência e estabilidade de solitons para a equação de Benjamin-Bona-Mahony multidimensional

$$u_t(x,t) - \Delta u_t(x,t) + Div\ g(u(x,t)) = 0 \text{ em } I\!R^n \times I\!R, \tag{3.112}$$

onde g é uma aplicação de classe $C^1(I\!R; I\!R^n)$, com coordenadas g_j, $j = 1, ..., n$ e $Div\ g(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} g_j(u)$.

Este problema Foi estudado em [31], onde o autor prova que uma família de soluções do tipo *soliton* de (3.112) são estáveis. A existência dos solitons é feita usando-se o teorema de compacidade concentrada de P.L. Lions. Como veremos a seguir, prova-se também que as soluções do tipo solitons de (3.112) pertence à classe $C^1((1,\infty); H^1(I\!R^n)) \cap C((1,\infty); H^2(I\!R^n))$.

Um *soliton* da equação (3.112) é uma solução da forma:

$$u(x,t) = \phi(x - \vec{k}t) \tag{3.113}$$

onde $\phi \not\equiv 0$ tal que $\lim_{|\xi| \longrightarrow \infty} \phi(\xi) = 0$ *e* $\vec{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ é um vetor fixo de $I\!R^n$. Para achar *solitons* de (3.112), substituimos (3.113) em (3.112), supondo ϕ de classe C^3. Para que ϕ defina um *soliton* temos que impor as seguintes condições para $\vec{k}$ e g : $\vec{k} = (k, ..., k)$, $k > 1$ e $g_j(s) = s + \frac{s^{p+1}}{p+1}$, $\forall j = 1, ..., n$, onde $p \geq 1$ é um número inteiro. Para esta escolha, (3.112) reduz-se a

$$k\Delta\phi - k\phi + \phi + \frac{\phi^{p+1}}{p+1} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,\ \phi \not\equiv 0,\ \phi \in C^3(\mathbb{R}^N) \text{ e } \lim_{|\xi|\longrightarrow\infty} \phi(\xi) = 0. \tag{3.114}$$

Fazendo a mudança de variável

$$\phi_c = (c-1)^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}v\left(\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\xi\right) \tag{3.115}$$

em (3.114) obtemos o problema elíptico não-linear

$$-\Delta v + v - v^{p+1} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \quad v \not\equiv 0, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^n). \tag{3.116}$$

A existência de uma solução radialmente simétrica de (3.116) é obtida a partir do seguinte problema de minimização sem vínculo:

Determinar $\xi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\xi \not\equiv 0$ tal que

$$\mathcal{N}(\xi) = \inf_{v \not\equiv \in H^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{N}(v) \tag{3.117}$$

onde $\mathcal{N}$ é o funcional não-linear

$$\mathcal{N}(v) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx + \int_{-\mathbb{R}^N} v^2 dx}{2\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p+2} dx\right)^{\frac{2}{p+2}}} \tag{3.118}$$

definido em $H^1(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ sob as seguintes restrições sobre p e n:

$$1 \leq p < \infty, \text{ se } n \leq 2, \text{ e } 1 \leq p \leq \frac{2}{n-2}, \text{ se } n > 2. \tag{3.119}$$

Como $\mathcal{N}(\lambda v) = \mathcal{N}(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, então o problema (3.117) reduz-se ao seguinte problema:

Determinar $\varpi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\varpi \not\equiv 0$, tal que

$$M(\varpi) = \inf\{M(w) :\ w \in H^1(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} |w|^{p+2} dx = 1\}, \tag{3.120}$$

onde M é definido em $H^1(\mathbb{R}^n)$ por

$$M(w) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |w''|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx \tag{3.121}$$

O problema (3.120) é resolvido usando-se o teorema de compacidade concentrada de P.L.Lions [24].

Teorema 3.7.1 (M. Weinstein [38]). *O problema (3.117) tem uma solução* $\xi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *possuindo as seguintes propriedades:*

(i) $\xi > 0$,

(ii) ξ *é radialmente simétrica, isto é,* $\xi(x) = \xi(-x)$,

(iii) ξ *é estritamente decrescente como o raio, isto é,* $\xi(x_2) = \xi(-x_2) < \xi(x_1) = \xi(-x_1)$, *se* $|x_1| < |x_2|$,

(vi) $v = \varphi_0^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}\xi$, *onde*

$$\varphi_0 = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \xi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \xi^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \xi^{p+2} dx}$$

é solução do problema (3.116).

Observação 3.7.1. Sob as condições (3.119), usando resultados conhecidos de regularidade elíptica ([14], pág. 181) e as imersões de Sobolev (1.2.19):

$$H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \tag{3.122}$$

onde

a) $2 \leq q < \infty$, *se* $2m = n$,

b) $2 \leq q < \frac{2n}{n-2m}$, se $2m < n$ e

c) $q = \infty$, se $2m > n$.

$$H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n), \text{ se } m > \frac{n}{2} + k, \tag{3.123}$$

concluimos que $v \in C^3(\mathbb{R}^n)$.

Obviamente a equação (3.115) é uma solução do problema (3.114) por ser uma mudança de variável.

Observação 3.7.2. Desde que $v \in C^3(\mathbb{R}^n)$ e v é radialmente simétrica, pelo lema 2 de [9], existem constantes positivas K e γ tais que:

$$|D^\gamma v(x)| \leq K e^{-\delta |x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall |\gamma| \leq 2. \tag{3.124}$$

Usando as idéias da prova do lema (3.1.3), como uma espécie de generalização para $\mathbb{R}^n$, aplicado a equação (3.112), verifiquemos o lema seguinte

Lema 3.7.2. *Se* $\Lambda(c) = \phi_c = (c-1)^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{1}{p}}v((\frac{c-1}{c})^{\frac{1}{2}}\xi)$, $\forall c > 1$, *então* $\Lambda \in C^1((1,\infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C((1,\infty); H^2(\mathbb{R}^n))$.

Prova. Seja $\nu(c) = (\frac{c-1}{c})^{\frac{1}{2}}$. Como $v \in C^3(\mathbb{R}^n)$ e $k > 1$, então $\phi_k \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Seja $w_c = \mu'(c)v(\nu(c)x) + \mu(\nu(c)x).\nabla v(\nu(c)x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, onde $\mu(c) = ((c-1)p+1))^{\frac{1}{p}}$, $\forall c > 1$. Por (3.124) $w_c \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Vamos provar que $\Lambda'(c) = w_c$, i.e., que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\Lambda(c+h)-\Lambda(c)}{h} - w_c\right\|_1 = 0.$$

Para isto é suficiente provar que:

(i) $\left\|\frac{\Lambda(c+h)-\Lambda(c)}{h} - w_c\right\| \to 0$, quando $h \to 0$;

(ii) $\forall j = 1,2,...,N$, $\left\|\frac{1}{h}(\frac{\partial}{\partial x_j}\Lambda(c+h) - \frac{\partial}{\partial x_j}\Lambda(c)) - \frac{\partial w_c}{\partial x_j}\right\| \to 0$, quando $h \to 0$.

Novamente como os argumentos usados na prova de (i) e (ii) são os mesmos, provaremos somente (i).

Temos:

$$\left\|\frac{\Lambda(c+h)-\Lambda(c)}{h} - w_c\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\mu(c+h)v(\nu(c+h)x) - \mu(c)v(\nu(c)x)}{h} - w_c(x) \right|^2 dx$$

$$\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\mu(c+h)-\mu(c)}{h}v(\nu(c+h)x) - \nu'(c)v(\nu(c)x)\right|^2 dx +$$

$$+2\int_{\mathbb{R}^N} |\mu(c)|^2 \left|\frac{v(\nu(c+h)x) - v(\nu(c)x)}{h} - \nu'(c)x.\nabla v(\nu(c)x)\right|^2 dx$$

Seja

$$\psi_h(x) = \left|\frac{\mu(c+h)-\mu(c)}{h}v(\nu(c+h)x) - \mu'(c)v(\nu(c)x)\right|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tal que $-\frac{c-1}{2} < h < 1$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, a função $s \to v(\mu(s)x)$ de $(1,\infty)$ em $\mathbb{R}$ é contínua, logo $v(\nu(c+h)x) \to v(\nu(c)x)$ quando $h \to 0$. Como μ é diferenciável, segue-se que $\psi_h(x) \to 0$, quando $h \to 0$. Além disso,

pelo teorema do valor médio, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\frac{\mu(c+h)-\mu(c)}{h} = \mu'(c+\alpha h)$.
Usando este fato e (3.124) obtemos

$$|\psi_h(x)| \leq \psi(x), \qquad \forall x \in I\!R^n,\ \forall\ -\frac{c-1}{2} < h < 1,\ h \neq 0,$$

onde

$$\phi(x) = 4K^2 \left|\mu'\left(\frac{c+1}{2}\right)\right|^2 e^{-2\delta\nu(\frac{c+1}{2})|x|}.$$

Como $\psi \in L^1(I\!R^n)$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue concluimos que $\int\limits_{I\!R^N} \psi_h(x)dx \to 0$, quando $h \to 0$.
Agora, seja

$$\xi_h(x) = \left|\frac{v(\nu(c+h)x) - v(\nu(c)x)}{h} - \nu'(c)x.\nabla\, v(\nu(c)x)\right|^2,$$

$\forall\, x \in I\!R^n$ e $-\frac{c-1}{2} < h < 1, \quad h \neq 0$. Para cada $x \in I\!R$, usando a diferenciabilidade da função $s \to v(\nu(s)x)$ de $(1,\infty)$ em $I\!R$, concluimos que $\xi_h(x) \to 0$ quando $h \to 0$. Além disso, usando novamente o teorema de valor médio, encontramos $0 < \theta < 1$ tal que

$$\frac{v(\nu(c+h)x) - v(\nu(c)x)}{h} = \nu'(c+\theta h)x.\nabla\, v(\nu(c+\theta h)x).$$

Logo, usando novamente (3.124) obtemos $|\xi_h(x)| \leq \xi(x)$, $\forall x \in I\!R^n$ e $-\frac{c-1}{2} < h < 1,\ h \neq 0$, onde

$$\xi(x) = 4K^2 n\nu'\left(\frac{c+1}{2}\right)|x|^2 e^{-2\delta\nu(\frac{c+1}{2})|x|}.$$

Como $\xi \in L^1(I\!R^n)$, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue concluimos que $\int\limits_{I\!R^n} \xi_h(x)dx \to 0$ quando $h \to 0$. Portanto disto concluimos a prova de (i).

Finalmente usando argumentos análogos provamos que a aplição $\alpha \to \Lambda(\alpha)$ de $(1,\infty)$ em $H^1(I\!R^n)$ é contínua e que $\Lambda \in C((1,\infty); H^2(I\!R^n))$. $\square$

Alguns solitons são também conhecidos como *bound states*, como é o caso das equações que são invariantes sobre fases de transformações que possuem soluções *bound states*. Estas soluções são geradas pelo grupo padrão $T(s)u = e^{is}u$. A estabilidade destas soluções foi estudada em [36] para a equação não linear de Klein-Gordon ($u_{tt} - \Delta u + g(|u|^2)u = 0, \quad x \in I\!R^n$) e a equação não linear de Schrödinger ($-iu_t - \Delta u + g(|u|^2)u = 0, \quad x \in I\!R^n$).

Bibliografia

[1] Albert, J.P., Bona, J.L., *Total positivity and stability of internal waves in stratified fluids of finite depth*, IMA J. Appl. Math. 46, pp 1-19, (1991).

[2] Albert, J.P., Bona, J.L., Henry, D.B., *Sufficient conditions for stability of solitary-wave solutions of model equations for long waves*, Physica D **24**, 343-366, North-Holland. Amsterdam. (1986).

[3] Angulo, P.J., *O problema de cauchy para um sistema dispersivo de ondas longas*, Tese de Doutorado, IMPA, RJ-Brasil, (1994).

[4] Angulo, P.J., Arbieto, A.E., Montenegro, F.J., *Stability and instability of solitary waves for a nonlinear dispersive system*, a aparecer em Nonlinear Analysis, TMA.

[5] Bona, J.L., *Positive operator theory in Fréchet spaces, with applications to problems arising in hidrodinamics*, Fundação Universidade de Brasília, Trabalho Nro 191, (1982).

[6] Benjamin, T.B., *The stability of solitary wave*, Proc. R. Soc. Lond. A **328**, 153-183, (1972).

[7] Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J., *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Royal Soc. London A **272**, 47-78, (1972).

[8] Bennett, D., Bona, J.L., Brown, R., Stansfield, S., Stroughair J., *The stability of internal waves*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 94, 351, (1983).

[9] Berestycki, H., Lions, P.L., *Nonlinear scalar field equations I, existence of a ground state*, Arch. Rat. Mech. Anal. **82**, 313-345 (1983).

[10] Berezin F., Shubin M., *The Schrodinger equation*, Mathematics and its Application. Kluwer Academic (1991).

[11] Bona, J.L., *On the stability theory of solitary waves*, Proc. Soc. Lond. A **344**, 363-374, (1975).

[12] Bona, J.L., Ponce,G., Saut, J.C., and Tom, M.M.. *A model system for strong interaction between internal solitary waves*, Comm. Math. Phys. **143**, 287-313, (1992).

[13] Bona, J.L., Souganidis, P., and Strauss, W., *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type equation*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **411**, 395-412, (1987).

[14] Brézis, H., *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid-España (1984).

[15] Cazenave, T., Lions, P.L., *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **85** no. 4, 549-561, (1982).

[16] Coddington E., Levison N., *Theory of ordinary diferential equations*, McGraw-Hill, New York (1955).

[17] Dieudonné, J., *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York, (1960)

[18] Fernandez, P., *Medida e integração, Projeto Euclides*, IMPA, RJ-Brasil,(1976).

[19] Folland, G. B., *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press and University of Tokyo, Press, Princeton, New Jersey, (1976).

[20] Gear, J.A., Grimshaw, R., *Weak and strong interaction between internal solitary waves*, Studies in Appl. Math. **70**, 235-258,(1984).

[21] Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Funct. Analysis **74**, 160-197 (1987).

[22] Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W., *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Funct. Analysis **94**, 308-348 (1990).

[23] Iório, J.R., Magalhães, I.V., *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Projeto Euclides, IMPA, R.J-Brasil, (1988).

[24] Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin, Hei-delberg, New York, Tokyo (1984).

[25] Kato, T., *On the cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies in Appl. Math. **8**, 33-69, (1983).

[26] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.* Communications on pure and applied mathematics. Vol. XLVI, 527-620 (1993).

[27] Lions, P.L., *The concentration compactness principle in the calculus of variations: the locally compact case*, parts 1 and 2, Ann. I.H.P. Analyse Nonlinéaire, vol. 1, 2, 109-145 (1984).

[28] Marshall, J., Cohen, J., and Wang, G., *On strongly interacting internal solitary waves*, The Jornal of Fourier Analysis and Applications. Vol. 2, **5**, (1996).

[29] Milla, M.M., Medeiros, L.A., *Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais*, textos de métodos matemáticos **25**, IM-UFRJ R.J-Brasil, (1993).

[30] Montenegro, B.J., *Sistemas de equações de evolução não-lineares. Estudo local, global e estabilidadede ondas solitárias*, Tese de doutorado, IMPA, RJ, (1994).

[31] Morais Pereira, J., *Estabilidade ou instabilidade de ondas viajantes para alguns modelos não lineares de evolução*, Tese de doutorado IM-UFRJ, (1991).

[32] Morse, M.P., Feshbach. H., *Methods of theoretical physics*, Ap. Vol. I, New York (1953).

[33] Pego, R.L., Weinstein, M.I., *Eigenvalues, and instabilities of solitary waves*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **340**, 47-94, (1992).

[34] Ponce, G., *Notas Sobre el problema de valores iniciales asociado a la ecuación de onda.* III Escuela de Verano en Geometría dif., Eq. Dif. Parciales y Análisis Numérico. Universidade de los Andes(1995).

[35] Reed S., Simon B., *Methods of modern mathematical physics IV. Analysis of operators*, New York, Academic Press, (1975).

[36] Shatah, J., Strauss, W., *Instability of nonlinear bound states.* Comm. Math. Phys. **100**, 173-190 (1985).

[37] Thayer, J., *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, IMPA, R.J -Brasil, (1987).

[38] Weinstein, M.I., *Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation*, Comm. P.D.E. **12**, 1133-1173, (1987).