

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA  
COMPUTAÇÃO**

**SELEÇÃO DE ÁREAS PARA POLOS  
AGROFLORESTAIS UTILIZANDO SISTEMAS DE  
INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS COM CRITÉRIOS  
DE DECISÃO DIFUSA**

por

**VALMIR SARAIVA DE OLIVEIRA**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação

Prof. ROGÉRIO CID BASTOS, Dr.  
Orientador

Florianópolis, Outubro/2000.

# SELEÇÃO DE ÁREAS PARA POLOS AGROFLORESTAIS UTILIZANDO SISTEMAS DE INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS COM CRITÉRIOS DE DECISÃO DIFUSA

VALMIR SARAIVA DE OLIVEIRA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **Mestre em Ciência da Computação** na área de concentração **Sistemas de Conhecimento** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

---

Prof. Fernando Ostuni Gauthier, Dr.  
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

---

Prof. Rogério Cid Bastos, Dr.  
Orientador

---

Prof. Luiz Fernando J. Maia, Dr.  
Membro

---

Prof.<sup>a</sup> Anita Maria da R. Fernandes, Dra.  
Membro

---

Prof. Júlio Sancho L. T. Militão, Dr.  
Membro

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Federal do Acre – UFAC pela oportunidade e às Universidades Federais de Santa Catarina – UFSC e de Rondônia – UNIR, que através do Programa de Pós-Graduação Interinstitucional tornaram possível a concretização deste objetivo.

Agradeço ainda:

- Ao Professor Doutor Rogério Cid Bastos que, apesar de todos os seus afazeres, dispoe-se a ser meu orientador, o que foi motivo de muito orgulho para mim;

- Ao Professor Foster Brown, do Parque Zoobotânico da UFAC, e ao Prof. Nildo da UNIR, por todo apoio e incentivo;

- Ao Instituto do Meio Ambiente do Acre – IMAC, pelo material básico cedido, o qual foi de fundamental importância;

- À minha esposa Valcimeiri e aos meus filhos: Hudson, Herwal e Samantha, pelo apoio, carinho e paciência que tiveram comigo;

- À minha mana Vânia, pela hospedagem, apoio e carinho durante o período que passei em Porto Velho;

- Ao Professor Aroldo Cardoso Chefe do Departamento de Matemática e Estatística e à Administração Superior da UFAC, nas pessoas dos Professores: Carlito Cavalcanti (Reitor), Jair Vicente (Pró-Reitor de Adimistração) e Fátima Bigi (Pró-Reitora de Pós-Graduação), que não mediram esforços para a realização deste evento;

- Aos colegas de mestrado do Grupo Acre: Haroldo, Laura, Luiz Carlos e Wilker, pelo convívio salutar durante a primeira fase do mestrado.

## RESUMO

O mundo de hoje, cada vez mais informatizado, globalizado e da alta tecnologia, requer a cada instante mais refinamento das informações com o objetivo de tornar mais coerentes e eficientes as tomadas de decisão. Em Sistemas de Informações Geográficas – SIG, tal fato não é diferente. Assim sendo, é imprescindível que cada processo de tomada de decisão seja acompanhado de um método computacional de análise dos dados e alternativas deste processo.

Este trabalho descreve uma aplicação SIG que define as melhores áreas de uma determinada região para realizar determinada ação governamental levando em consideração os aspectos de uso da terra. Posteriormente utiliza-se um método chamado MCDM difuso baseado nos conceitos de pontos ideal e anti-ideal, de (Liang, 1999) transformando aspectos socio-econômicos em critérios, para analisar o Conjunto de Decisão e resolver o problema de **Incerteza** na tomada de decisão sobre a melhor alternativa a ser efetivada.

Logicamente, os resultados obtidos visam tratar apenas os aspectos técnicos, longe de ser uma posição definitiva, já que não leva em consideração os aspectos políticos, muito menos, a política de governo. Além disso, os mapas foram trabalhados em uma escala muito baixa, não permitindo estudos mais detalhados como composição química do solo.

**Palavras Chave:** SIG e MCDM Difuso.

## **ABSTRACT**

*The world now, each day more computerized, globalized and of high technology, demands more and more refined information in order to render the process of decision making more coherent and efficient. In the realm of Geographical Information Systems – GIS, the demands are similar. Thus, it is mandatory that each process of decision making should be backed by a computation method of data analysis and alternatives of the process itself.*

*This work describes one application of GIS which defines the best areas of a determined region to be used in a government project, focusing on relevant aspects of land use. This GIS application is followed by the fuzzy MCDM method based on the concepts of ideal points and anti-ideal points of Gin-Shuh Liang, through which socio-economic aspects are transformed into criteria to analyze the Set of Decisions and solve the Uncertainty problem in decision making in order to reach the best alternative to be chosen.*

*The achieved results were used to evaluate only the technical aspects, not intended as a final answer, since it was not taken into account into the political aspects and government policy. Moreover, the maps were draw in a very low scale, which does not allow more detailed studies such as those related to the chemical composition of the soil.*

**Key Words:** *GIS and Fuzzy MCDM.*

## SUMÁRIO

Lista de Figuras .....	viii
Lista de Tabelas .....	ix
CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Apresentação .....	1
1.2. Importância .....	3
1.3. Objetivos .....	4
1.3.1. Objetivo Geral .....	4
1.3.2. Objetivos Específicos .....	5
1.4. Limitações .....	5
1.5. Descrição do Problema .....	6
1.5.1. O Zoneamento Ecológico-Econômico do Acre .....	6
1.5.2. Um Pólo Agroflorestal .....	8
1.6. Estrutura do Trabalho .....	9
CAPÍTULO II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	11
2.1. Suporte a Decisão .....	11
2.2. Análise de Estratégia de Decisão .....	12
2.2.1. Introdução .....	12
2.2.2. Definições .....	13
2.3. O Tratamento da Incerteza .....	15
2.3.1. Incerteza na Evidência .....	16
2.3.2. Incerteza na Relação .....	17
2.3.3. Incerteza no Conjunto de Decisão .....	19
2.3.4. Regra de Decisão de Incerteza .....	20
2.4. Teoria dos Conjuntos Difusos .....	22
2.4.1. Operações com Conjuntos Difusos .....	24
2.4.2. Forma Geral de um Número Difuso .....	26

2.4.3. Operações Aritméticas com Intervalos Difusos .....	28
2.4.4. Propriedades de Conjuntos Difusos .....	30
2.4.5. Operações Aritméticas com Números Difusos .....	32
2.4.6. Lógica Difusa .....	34
2.4.7. Aplicações .....	35
2.5. Arc/Info e ArcView .....	36
2.5.1. Suporte a Decisão em Arc/Info .....	37
2.5.2. Um Tratamento Difuso em Arc/Info (Fuzzy Tolerance) .....	37
2.6. MCDM (Multicriteria Decision Making) .....	38
CAPÍTULO III – DESENVOLVIMENTO DO MODELO .....	41
3.1. Procedimentos .....	42
3.1.1. Para Encontrar o Conjunto de Decisão .....	42
3.1.2. Para Tratar a Incerteza sobre a Melhor Alternativa .....	45
3.2. Os Dados do Problema .....	57
3.3. As Ferramentas de Análise .....	58
3.4. A Implementação .....	59
CAPÍTULO IV – APLICAÇÃO DO MODELO E ANÁLISE DO RESULTADO	
4.1. Aplicação do Modelo .....	60
4.1.1. Fase 1 .....	60
4.1.2. Fase 2 .....	74
4.2. Análise do Resultado .....	74

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	76
5.1. Conclusões .....	76
5.2. Recomendações .....	77
GLOSSÁRIO .....	79
BIBLIOGRAFIAS .....	83
BIBLIOGRAFIAS DA INTERNET .....	88
ANEXO I .....	90
ANEXO II .....	100

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Exemplo de um número difuso.....	23
Figura 02 – Gráfico do complementar difuso.....	25
Figura 03 – União difusa entre um conjunto e seu complementar.....	25
Figura 04 – Interseção difusa entre um conjunto e seu complementar.....	26
Figura 05 – Formas trapezoidais e triangulares de números difusos.....	27
Figura 06 – Formas simplificadas de números difusos do tipo 1.....	28
Figura 07 – Formas simplificadas de números difusos do tipo 2.....	28
Figura 08 – Número difuso a ser utilizado na Fase 2.....	46
Figura 09 – Mapa Fundiário do Estado do Acre.....	60
Figura 10 – Mapa Fundiário da Regional Tarauacá/Envira.....	61
Figura 11 – Áreas Discriminadas Pelo INCRA.....	62
Figura 12 – Mapa R1 (Res. do Cruzamento Mapa Fundiário X Mapa de Solos)....	63
Figura 13 – Mapa R2(R1 Cruzado Com Limite de 10 km Para Terras Indígenas).64	
Figura 14 – Mapa RF (Resultado Final).....	65
Figura 15 – Mapa RF34. Resultado da Aplicação dos Critérios 3 e 4.....	69
Figura 16 – Mapa RF12. RF34 mais Aplicação dos Critérios 1 e 2.....	71
Figura 17 – Mapa Final da Fase 1.....	72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 01 – Operações difusas .....	24
Tabela 02 – Exemplos de operações difusas .....	24
Tabela 03 – Operações aritméticas com intervalos difusos .....	29
Tabela 04 – Arquivos utilizados no desenvolvimento da Fase 1 .....	43
Tabela 05 – Número difuso trapezoidal obtido pela razão do anterior.....	67
Tabela 06 – Número difuso estab. para os critérios 3 e 4 da Fase 1.....	68
Tabela 07 – Tabela de possibilidades de uso de acordo com a aptidão.....	70
Tabela 08 – Banco de dados final da Fase 1.....	73
Tabela 09 – Banco de dados correspondente ao Mapa RF.....	90

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Apresentação

A evolução acelerada da tecnologia e da informática nos últimos anos permitiu o desenvolvimento de tarefas até bem pouco tempo inimagináveis.

O desenvolvimento de satélites cada vez mais potentes aliado às ferramentas computacionais deixam à disposição do homem enormes facilidades para tratar, de forma mais racional, informações que vão desde o monitoramento de focos de queimadas na Amazônia até implicações do El Niño para o ecossistema terrestre.

Técnicas desenvolvidas mais recentemente com base em informações de uma rede de satélites chamada GPS (*Geographic Positioning System*), que pode armazenar em máquinas agrícolas sofisticadas, diversas informações de localização baseadas em latitude e longitude. Tal tecnologia está revolucionando a agricultura mundial e foi chamada de Agricultura de Precisão. O nome é sugestivo pois a técnica permite a distribuição não-linear de adubos (com base na análise de solos), aplicação de defensivos somente onde é necessário, monitoramento para controle de pragas, padrão de água, etc.

Os sistemas aplicativos para tratar os dados e emitir os resultados estão em um pacote denominado SIG – Sistema de Informações Geográficas. Pode-se definir SIG como sendo uma coleção organizada de hardware, software, dados geográficos e pessoal capacitado para eficientemente capturar, guardar, atualizar manipular, analisar e mostrar todas as formas de informações geograficamente referenciadas (ESRI, 1991).

SIG é basicamente uma ferramenta de análise que pode criar mapas em diferentes escalas, em diferentes projeções geográficas e em diferentes cores. Além disso, permite

identificar as relações espaciais entre os elementos dos mapas. Dentre os softwares aplicativos existentes pode-se destacar *Spring*, *GRASS*, *ReGIS*, *ArcInfo*, *ArcView* e *Idrisi*.

A idéia aqui é trabalhar um problema real do Zoneamento Ecológico Econômico do Acre – ZEE-AC, utilizando seus Mapas originais digitalizados em *Arc/Info*, simular uma situação onde se tenha uma Tomada de Decisão e, em seguida, analisar as incertezas da mesma.

Assim para trabalhar o problema da Tomada de Decisão, envolvendo o conjunto de decisão foi utilizado um conjunto de software SIG (*Arc/Info* e *ArcView*) que apresenta um Sistema de Suporte a Decisão – SSD baseado em lógica difusa e para trabalhar com Incerteza no conjunto de decisão far-se-á uso do método baseado nos conceitos de ideal e anti-ideal difuso, já que o conjunto obtido sugere uma regra de decisão de incerteza com evidência direta. Tem-se ainda as regras de decisão de incerteza com evidência indireta no conjunto decisão, as quais são melhor tratadas por duas outras teorias: a de Probabilidade Baiesiana e a de Evidência de Dempster-Shafer.

Deve-se salientar que, para a parte relacionada à tomada de decisão pode ser escolhido qualquer outro software SIG que possua um SSD, como por exemplo o *Idrisi* (Escada, 1998). A escolha do conjunto de software *Arc/Info* e *ArcView*, para o desenvolvimento dessa proposta deveu-se apenas ao fato de que os mapas originais já estavam digitalizados em *Arc/Info* e a migração para outra ferramenta poderia causar perda de informação no banco de dados.

A Incerteza causa uma Decisão de Risco e a avaliação de qual alternativa, do conjunto de decisão, é a melhor, deve ser realizada através de um modelo de dados, pois é fundamental para a correta tomada de decisão.

## 1.2. Importância

Apesar de todos os principais SIG, em uso atualmente, trazerem módulos que possibilitam tratar a incerteza e fazer a análise de risco, infelizmente quase nunca vê-se esta parte em produtos gerados pelos SIG. O que torna o produto incompleto do ponto de vista de uma análise criteriosa de tomada de decisão.

Este trabalho mostrará a importância do tratamento da incerteza no processo de tomada de decisão, vislumbrando apresentar uma informação com muito maior qualidade, já que os mapas de incerteza fornecerão informações quantitativas preciosas sobre os riscos assumidos ao se tomar decisões apoiadas nos mapas finais inferidos. Na prática, o trabalho tem como grande vantagem para a seleção de áreas o fato de que, ao aplicar o método com aspectos consistentes definidos e avaliados como critérios, tem-se definido uma única área para a realização de estudos mais detalhados visando a implantação do que se propõe.

Segundo Eastman (1997), a abordagem *fuzzy* é a que melhor se aplica quando tem-se uma regra de decisão de incerteza com evidência direta, ou seja, um relacionamento direto entre a instância e o conjunto de decisão, como será o exemplo que vai-se desenvolver.

Logicamente, existem regras de decisão de incerteza que não são bem tratadas pela lógica *fuzzy*, que são aquelas ditas de evidência indireta no conjunto de decisão. Neste caso, deve-se estabelecer o que pode ser chamado de uma função de confiança que evidencia a implicação da pertinência no conjunto decisão. Este tipo de incerteza é melhor tratada por duas outras ferramentas, que são: a Teoria de Probabilidade Baiesiana e a Teoria de Evidência de Dempster-Shafer (Eastman, 1997).

### **1.3. Objetivos**

#### **1.3.1. Objetivo Geral**

O suporte a decisão é um fator fundamental no tratamento de qualquer nível de informação. Em SIG existem várias ferramentas com a finalidade de atender à tomada de decisão.

Entretanto, na maioria das vezes, essa tomada de decisão é feita sem levar em consideração uma estratégia de análise mais acurada, como por exemplo, tratar a incerteza no processo de decisão.

Assim, o objetivo central desse trabalho é explicitar um modelo que trabalhe o processo de tomada de decisão e, em seguida, realize um tipo particular de tratamento de incerteza neste processo.

### **1.3.2. Objetivos Específicos**

São objetivos específicos deste trabalho:

- Descrever um problema envolvendo SIG onde seja colocado a questão de tomada de decisão;

- Aplicar um processo, utilizando um modelo SIG, que possibilite criar alternativas para a tomada de decisão, que formam o Conjunto de Decisão;

- Avaliar o Conjunto de Decisão, utilizando a lógica difusa, de tal forma a efetuar o tratamento da incerteza em relação a qual é a melhor alternativa a seguir.

### **1.4. Limitações**

O que mais limitou o desenvolvimento do trabalho foi a falta de conhecimentos mais profundos sobre características e aspectos de solos e condições ambientais. Além da falta de material (mapas) em uma escala adequada ao desenvolvimento da pesquisa, já que a escala 1 : 1.000.000 é muito pequena para avaliar uma área reduzida de terra.

Outro Fator limitante deste trabalho foi a impossibilidade de ser criado um Comitê real de Tomadores de Decisão, para que este Comitê definisse os critérios, os valores das avaliações lingüísticas e os pesos dos mesmos, no desenvolvimento da Fase 2.

## 1.5. Descrição do Problema:

“Estabelecer as melhores áreas de uma região para instalação de um Polo Agroflorestal atendendo as expectativas do Zoneamento Ecológico-Econômico do Acre e em seguida escolher, dentre elas, a melhor”.

### 1.5.1. O Zoneamento Ecológico-Econômico do Acre

#### - Estruturação Legal e Institucional

O Decreto nº 503 de 06/04/1999 instituiu o Programa Estadual de Zoneamento Ecológico-Econômico, vinculado ao Gabinete Civil do Governador, sob a coordenação da Secretaria Estadual de Planejamento, tendo como Secretaria Executiva a Secretaria Estadual de Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente e como órgãos executores o Instituto do Meio Ambiente e a Fundação de Tecnologia do Acre.

O mesmo Decreto constituiu ainda a Comissão Estadual de Zoneamento Ecológico-Econômico – CEZEE como instância máxima de deliberação e definição das diretrizes do ZEE. Com 34 instituições organizadas em câmaras representativas de órgãos públicos estaduais, trabalhadores, empresários, sociedade civil, órgãos públicos federais, outras esferas governamentais e entidades públicas de pesquisa.

#### - Etapas do Zoneamento

A metodologia de execução do ZEE-Acre considerou quatro etapas: articulação política (ampla consulta a diferentes representações da sociedade sobre suas expectativas em relação ao programa); Diagnóstico (elaborado em dois momentos distintos, primeiro foram gerados os produtos temáticos em cima de dois eixos principais: Meio Biofísico – clima, hidrografia, geomorfologia, flora, fauna, solos e aptidão florestal; e, Sócio-Economia e Ocupação Territorial – abrangendo aspectos culturais, políticos e econômicos. Num segundo momento foram elaborados os produtos síntese, que representam uma análise integrada de produtos temáticos e outras informações relevantes, com o objetivo de caracterizar diferentes regiões do Estado em termos de suas respectivas dinâmicas de ocupação, problemas socio-ambientais, potencialidades e limitações para diferentes alternativas de uso do território); Prognóstico e Implementação.

Em razão de existir uma necessidade urgente do Governo concluir etapas do ZEE, não houve um detalhamento final de todas as áreas que estavam previstas originalmente, ficando por exemplo, as áreas para criação de pólos agro florestais para um estudo posterior. Assim sendo, utilizando modelos diferentes foram desenvolvidas atividades semelhantes às que foram implementadas para encontrar áreas indicativas para a criação de Reservas Extrativistas e Projetos de Assentamentos Extrativistas, áreas indicativas para criação de florestas de manejo sustentável madeireiro, áreas indicativas para criação de novas unidades de conservação de uso indireto, etc.

### 1.5.2. Um Polo Agroflorestal

A partir da década de 70 os incentivos do governo federal ao setor agropecuário na Amazônia, aliado à construção de grandes rodovias (como a Br-364 e a Transamazônica), associados ao declínio das atividades exercidas nos seringais (borracha e castanha), trouxe para a periferia das cidades enorme quantidade de seringueiros, que passaram a viver à margem da sociedade.

Passados alguns anos (talvez uma década ou mais) ações isoladas do governo federal, através do INCRA, tentaram através dos Projetos de Assentamentos Dirigidos – PADs, levar novamente o homem para o ‘campo’. No entanto, por falta de estrutura básica, este tipo de ação não surtiu o efeito esperado, mesmo porque o homem da periferia já sabia que existiam alguns serviços básicos, muito embora na maioria das vezes não tivesse acesso a eles.

Paralelo a essa ação surgiu a luta de Chico Mendes pela manutenção da floresta e do homem no seu meio *habitat*, surgindo então as Reservas Extrativistas como um novo modelo de fixação do homem no ‘campo’. No entanto, até o momento não se tem estudos de que as reservas garantam produção suficientes para sua sustentabilidade durante todo o ano.

Além de outras alternativas que surgiram no Estado do Acre, como o Projeto RECA (Reflorestamento Consorciado Adensado), uma iniciativa implementada pela Prefeitura de Rio Branco entre 1993-96 mereceu destaque e hoje faz parte das novas ações do Governo do Estado sob a coordenação da Secretaria de Produção, que são os Polos Agroflorestais.

Os Polos Agroflorestais têm como objetivo proporcionar a inversão do processo de êxodo rural, buscando manter as famílias nas áreas de assentamento, pois visam diversificar as culturas, tais como: frutíferas, hortaliças, leguminosas, essências florestais, culturas

temporárias e criação de pequenos animais. A diversificação de culturas garante produção e distribuição de mão-de-obra durante o ano todo.

Além disso, um Polo Agroflorestal pode ser implantado em áreas relativamente pequenas (para nossa região), em média 300 hectares para atender 40 famílias, tocando 7,5 hectares para cada módulo. As características a serem estudadas para implantação de um Polo Agroflorestal são: solos (profundidade efetiva, textura, permeabilidade, declividade e erosão), uso atual e outros fatores. (IMAC, 1999).

## **1.6. Estrutura do Trabalho**

No Capítulo 1 tem-se uma introdução mostrando a importância que têm os sistemas de software SIG, em especial na tomada de decisão, para o uso correto e satisfatório da terra. Além disso, destaca-se a importância que tem o tratamento da incerteza no processo de tomada de decisão.

No Capítulo 2 serão descritos os conteúdos que darão suporte à resolução do problema envolvido no trabalho. Falar-se-á da teoria que envolve o assunto, como: Suporte a Decisão, Análise de Estratégia de Decisão, Tratamento da Incerteza, Teoria de Conjuntos Difusos, *Arc/Info* e *ArcView* e MCDM.

No Capítulo 3 será apresentado o desenvolvimento do modelo com base na revisão bibliográfica; além de ser descrito um critério particular para aplicar ao problema, MCDM com o conceito de ideal e anti-ideal que serve para dar suporte à tomada de decisão no caso de Incerteza no Conjunto de Decisão.

No Capítulo 4, utilizar-se-á o que foi trabalhado nos Capítulos 2 e 3, e o conjunto de ferramentas para efetuar a análise de informações geográficas *Arc/Info* e *ArcView*, com vistas ao processo de tomada de decisão e aplicar-se-á o critério estabelecido no Capítulo 3

para fazer um tratamento da incerteza sobre qual das alternativas obtidas no Conjunto de Decisão é a melhor. Será efetuado uma análise do resultado e questionado se o mesmo foi satisfatório.

No Capítulo 5, serão estabelecidas as conclusões e descritas algumas recomendações para complementar e melhorar o trabalho.

## CAPÍTULO II

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica foi efetuada com base em cinco pontos envolvidos no trabalho:

1. Tomada de Decisão – Onde foram descritos aspectos, definições e regras observadas pelos tomadores de decisão.
2. Tratamento de Incerteza – Onde descreveu-se os vários tipos de incerteza que estão envolvidos em um processo de tomada de decisão.
3. Conjuntos Difusos – Descrição da teoria básica de conjuntos difusos.
4. *Arc/Info* e *ArcView* – Descrição de alguns aspectos básicos e funções deste conjunto de software que serão utilizados no desenvolvimento da Fase 1 do estudo de caso.
5. MCDM (*Multicriteria Decision Making*) – Onde descreveu-se alguns métodos MCDM.

#### **2.1. Suporte a Decisão**

Os mecanismos de suporte a decisão, em especial aqueles ligados ao uso da terra, são extremamente complexos e requerem tarefas que controlem de forma efetiva o processo de forma a reduzir a faixa de incerteza. Some-se a isso, o ambiente dinâmico e os impactos complexos da intervenção humana. Todos estes fatores são preponderantes no processo de

tomada de decisão para o que é chamado de incerteza e o conseqüente risco para o tomador de decisão.

Deve-se salientar que incerteza aqui não é simplesmente um problema com dados, mas sim, um problema inerente ao próprio processo de tomada de decisão. Além disso, necessita-se reconhecer a incerteza não como uma falha para ser regredida ou talvez ignorada, mas sim como um fato do processo de tomada de decisão que necessita ser compreendido e gerenciado.

Assim, o Gerenciamento da Incerteza assume importância central no efetivo processo de tomada de decisão e embora seja tratado como um fator importante em todos os sistemas de software que suportam SIG, no caso presente, será realizado um outro tipo de tratamento na busca da melhor alternativa obtida no conjunto de decisão (Eastman, 1997).

## **2.2. Análise de Estratégia de Decisão**

### **2.2.1. Introdução**

A Teoria da Decisão diz respeito a uma lógica pela qual pode-se fazer escolha entre alternativas. Essas alternativas variam de um problema para outro. Elas podem ser alternativas de ações, alternativas de hipóteses sobre fenômenos, alternativas de objetos para incluir em um conjunto, e assim por diante. (FAO, 1996).

No contexto de SIG, essa teoria é útil para distinguir entre a política de decisão e os recursos de alocação de decisão. Este último envolve decisões que afetam diretamente a utilização de recursos (por exemplo, o uso da terra), enquanto que o primeiro é entendido somente por influenciar no comportamento da decisão.

Em relação à política de decisão, SIG é mais utilizado para informar o tomador de decisão. Muito embora, exista perspectiva de ter um grande potencial como uma ferramenta de modelagem de processo. Na verdade, avaliação e alocação de terra é uma das atividades mais fundamentais dos recursos em desenvolvimento (Rosenthal, 1985). Entretanto, deve-se ressaltar que, procedimentos e ferramentas para o desenvolvimento de regras de decisão e modelagem ainda são objetivos raros e que necessitam de muita pesquisa para evoluir. Em razão disso é que, no presente caso, a incerteza será tratada fora do SIG.

### 2.2.2. Definições:

Baseado em Eastman (1997), tem-se as seguintes definições:

- **Decisão:** É uma escolha entre alternativas. As alternativas podem representar diferentes cursos de ações, diferentes hipóteses sobre o caráter de um traço, diferentes classificações, etc. Este conjunto de alternativas é chamado de frame de decisão. O conjunto dos indivíduos sobre os quais a decisão será aplicada é chamado conjunto candidato. Finalmente, Conjunto de Decisão é aquele formado por todos os indivíduos que pertencem a uma alternativa específica do conjunto chamado frame de decisão.

- **Critério:** É algo básico, para uma decisão que pode ser medido e avaliado. Ele é a evidência sobre a qual um indivíduo pode ser atribuído ao conjunto decisão. Critérios podem ser de dois tipos: *fatores* e *restrições*, os quais podem ter os atributos próprios do indivíduo ou do conjunto decisão como um todo. Um fator é um critério que valoriza ou diminui a importância de uma alternativa específica para a atividade sob consideração. Enquanto, uma restrição serve para limitar as alternativas sob consideração.

- **Regra de Decisão:** O procedimento pelo qual critérios são selecionados e combinados para chegar a uma avaliação particular, e através do qual avaliações são

comparadas e interpretadas, é conhecido como uma regra de decisão. Uma regra de decisão pode ser tão simples como a aplicação de um critério simples ou tão complexo como uma que envolva a comparação de várias avaliações de multi-critérios. Pode-se citar dois tipos básicos de regra de decisão: função de escolha, que fornece os meios matemáticos de comparação de alternativas e heurística de escolha, a qual especifica um procedimento a ser seguido através do qual uma função será avaliada.

- **Objetivo:** Regras de decisão são estruturadas no contexto de um objetivo específico. A natureza desse objetivo, e como ele é visto pelos tomadores de decisão (isto é, seus motivos) servirão como um forte guia no desenvolvimento de uma regra de decisão específica. Um objetivo é assim uma perspectiva que serve para guiar a estruturação de regras de decisão.

- **Avaliação:** O processo de aplicação da regra de decisão é chamado de avaliação. Pode-se destacar dois conceitos básicos no processo de avaliação: Multi-Critérios de Avaliação, (Voogd, 1983; Carver, 1991) que são os procedimentos em que vários critérios são necessários para avaliar e encontrar os parâmetros de um objetivo específico. Muitas vezes esses procedimentos, apesar de bem definidos em SIG, levam a resultados diferentes. Isso ocorre especialmente em razão de que eles formam sentenças muito diferentes sobre como cada critério será avaliado. O outro conceito é o de Avaliação de Multi-Objetivos.

Enquanto algumas decisões podem ser efetuadas levando-se em consideração um único objetivo, muitas delas devem satisfazer a vários objetivos. Existem dois tipos de avaliações sobre objetivos múltiplos: um envolve Objetivos Complementares nos quais uma mesma área de terra pode pertencer a mais de um conjunto decisão, e o outro diz respeito a Objetivos Conflitantes, (Carver, 1991) onde a mesma área de terra pode ser usada por um ou outro objetivo, mas não por ambas. Este último tipo de objetivo ainda não é bem trabalhado em SIG, sendo melhor tratado por programação matemática (Fiering, 1986) ou programação de metas (Ignizio, 1985).

### 2.3. O Tratamento da Incerteza

A incerteza é algo inevitável no processo de tomada de decisão. Em SIG comumente, o tratamento da incerteza tem recebido considerável interesse (Goodchild; Gopal, 1989), entretanto, a atenção tem sido focada, particularmente na mensuração de erro, tais como: a expressão do erro (Burrough, 1986; Lee, et Al., 1987; Maling, 1989; Stoms, 1987), avaliação do erro (Congalton, 1991), propagação do erro (Burrough, 1986) e o reflexo do erro na qualidade dos dados (Moellering, et. Al., 1988; Slonecker; Tosta, 1992). Além disso, tem existido algum interesse em outras formas de incerteza, tais como as que são expressas por conjuntos difusos (Fisher, 1991). Entretanto, não tem sido dada a devida atenção para, por exemplo, incertezas que afetam o processo de decisão combinado com a decisão de risco.

Incerteza inclui qualquer tipo de erro (conhecido ou não), ambigüidade ou variação tanto no banco de dados como na regra de decisão, aspectos considerados no modelo, etc. Assim, incerteza pode surgir de alguns elementos tais como: mensuração de erro, variabilidade herdada, instabilidade, ambigüidade conceitual, alta abstração, ou simplesmente ignorância de importantes parâmetros do modelo (Eastman, 1997).

Considerando-se o processo de tomada de decisão como um problema de pertinência ao conjunto, é fundamental entender a fonte e o papel da incerteza na tomada de decisão. Assim, ter-se-á um frame de decisão que contém todas as alternativas (ou hipóteses) sob consideração, e a evidência, que é a informação através da qual o mede-se o grau de pertinência da alternativa no conjunto de decisão. Assim, o processo de tomada de decisão contém três elementos básicos sobre os quais a incerteza pode ocorrer: a evidência, o conjunto de decisão e a relação que associa os dois. (Eastman, 1997).

### 2.3.1. Incerteza na Evidência

A incerteza na Evidência aparece quando examina-se a evidência para decidir quais elementos são candidatos ao conjunto de alternativas que deverão ser escolhidas (conjunto de decisão). (Eastman, 1997).

Neste tipo de incerteza é feita uma avaliação das qualidades e características dessas entidades como representada no Banco de Dados. Entretanto, existe também um significativo interesse com a mensuração do erro e como ele se propaga na regra de decisão.

Segundo Eastman (1997) a incerteza na evidência é usualmente representada por (*root mean square error*), no caso de dados quantitativos, ou (*proportional error*), no caso de dados qualitativos e utiliza a teoria clássica de probabilidade e a inferência estatística para sua avaliação e propagação.

### 2.3.2. Incerteza na Relação

De acordo com Eastman (1997), o segundo elemento básico de uma decisão é a especificação do relacionamento entre a evidência e o conjunto decisão. Aqui a incerteza surge de uma das três fontes abaixo:

1ª) A definição de um critério (em termos de sua medição). Conjuntos com atributos claramente definidos são conhecidos como conjuntos *crisp* e são um assunto da lógica de conjuntos clássicos. Por exemplo, o conjunto de áreas que serão inundadas pelo aumento do nível do mar é claramente definido. Já que desprezando a medição do erro, se uma área é mais baixa que o nível projetado do mar, ele é ambigualmente um membro do conjunto.

Entretanto, nem todos os conjuntos são claramente definidos assim. Seja, por exemplo, considerar o conjunto de áreas com diferentes níveis de declividade. O que constitui um nível de declividade? Se for definido que a declividade é íngreme quando se tem um gradiente maior ou igual a 10%, isto significa que a declividade de 9.99999% não é íngreme? Claramente isto não é um limite bem definido. Tais situações são tratadas por conjuntos chamados difusos (Zadeh, 1965) e são tipicamente definidos por uma função de pertinência, o que será detalhado mais adiante. O reconhecimento do conceito de conjuntos difusos é algo novo em SIG, mas é bastante claro que tais conjuntos são fundamentais em tomadas de decisão sobre alocação de terras.

2ª) É o caso onde a evidência não implica diretamente e perfeitamente no conjunto de decisão sob consideração. Nos exemplos de inundação de terras ou declividade íngreme, existe um relacionamento direto entre a evidência e o conjunto sob consideração. Entretanto, existem também casos onde a evidência somente pode ser citada de forma imperfeita e indireta. Por exemplo, pode-se ter conhecimento que corpos na água absorvem radiação *infrared*. Assim, pode-se utilizar a evidência de baixa reflectância de *infrared* em um sensoriamento remoto de imagem como uma afirmação de confiança de que a área é ocupada por um profundo espaço de água. Entretanto, isso é apenas uma crença devido a outros materiais também absorverem *infrared*.

A afirmação de confiança no grau para o qual a evidência implica no conjunto de pertinência é muito similar à função de pertinência de conjunto difuso. Entretanto, não existem definições do conjunto citado, mas simplesmente a afirmação de que o grau em que a evidência sugere a presença do conjunto (como definido). Assim, a lógica difusa não é apropriada para o caso, mas sim as teorias de Bayes e Dempster-Shafer.

3ª) A terceira área onde a incerteza pode ocorrer em uma especificada relação entre a evidência e o conjunto decisão é mais frequentemente chamado de Modelo de Especificação de Erro (Alonso, 1968). Em algumas instâncias, decisões podem está baseadas em um critério simples, mas comumente vários critérios são requeridos para definir o conjunto decisão. Assim, por exemplo, primeiro pode-se definir áreas adequadas

para expansão como aquelas de baixa declividade e próximo à estrada. Duas questões são de interesse aqui: são estes critérios adequados para definir áreas apropriadas? Ter-se-á agregado propriamente a evidência desses critérios? Se o grau de pertinência indicado pela declividade é 0.6 e proximidade da estrada é 0.7, qual é a pertinência no conjunto decisão? Ele é os 0.42 da probabilidade, os 0.6 de conjunto difuso, os 0.78 de Bayes, os 0.88 de Dempster-Shafer, ou os 0.65 da combinação linear? Além disso, como melhor fazer este valor agregado prever verdadeiramente o grau em que a alternativa sob consideração verdadeiramente pertença ao conjunto decisão? Claramente, a construção da regra de decisão pode ter um enorme impacto no valor deduzido no conjunto de pertinência.

### 2.3.3. Incerteza no Conjunto de Decisão

A área final de interesse com respeito a incerteza no processo de tomada de decisão diz respeito ao conjunto final deduzido. Como dito anteriormente, o processo de desenvolvimento do conjunto de decisão consiste em converter a evidência para cada critério em uma afirmação elementar do conjunto, e então agregar essas sentenças em um simples resultado que incorpore todos os critérios considerados.

Claramente, incerteza aqui é algum agregado das incertezas que surgiram na aquisição da evidência e na especificação do relacionamento entre esta evidência e o conjunto de decisão. Entretanto, na presença da incerteza sobre o grau em que qualquer candidato pertença ao conjunto final (como um resultado colhido da evidência ou de suas implicações sobre o conjunto de pertinência), algumas ações adicionais são requeridas em ordem para desenvolver o conjunto final – um tipo de incerteza necessitará ser estabelecida para determinar em qual ordem as alternativas serão incluídas no conjunto de decisão. (Eastman, 1997).

Essa ordenação, implica em que alguma probabilidade que a decisão tomada esteja errada ou que o conjunto obtido não satisfaça ainda aquilo que foi proposto. Por exemplo, dado um grupo de locais para os quais existe a probabilidade de estarem abaixo do nível projetado e um novo nível do mar tiver que ser avaliado, a decisão final sobre quais locais serão assumidos como alagados será resolvido pelo estabelecimento de um tipo de probabilidade.

#### 2.3.4. Regra de Decisão de Incerteza

O segundo maior elemento de incerteza identificado (após a medição do erro) é aquele especificado no relacionamento entre a evidência e o conjunto de decisão final. Este aspecto pode ser chamado de regra de decisão de incerteza, e é uma área onde muita pesquisa ainda necessita ser feita. Entretanto, já existem algumas ferramentas em software SIG para facilitar o tratamento dessa forma de incerteza. (Eastman, 1997).

Todas essas ferramentas dizem respeito à incerteza inerente ao estabelecimento de que, uma entidade pertença ao conjunto final de decisão, e assim, dentro da categoria geral de incerteza estabelecer a expressão do conjunto de pertinência, conhecida como uma medida *fuzzy* (Dubois; Prade, 1982).

Entretanto, no caso do problema proposto, necessita-se de algo mais, ou seja, além de saber se uma alternativa pertence ou não ao conjunto de decisão, existe a necessidade de saber também o grau de pertinência.

Um tratamento comum de medidas *fuzzy* é que elas seguem as Leis de DeMorgan na construção da interseção e da união de operadores (Bonissone; Decker, 1986), descrita dentro de aplicações de conjuntos difusos, e a partir daí, estabelecer as regras básicas de propagação da incerteza na agregação da evidência.

Os exemplos sobre T-Norma e T-CoNorma descritos em 2.4.4, mostram que estão disponíveis uma faixa de operações para medidas *fuzzy* de agregação, e portanto, critérios de agregação no processo de tomada de decisão. Em relação a estes diferentes operadores pode-se destacar como maiores extremos (no sentido de resultado numérico extremo sobre agregação) os operadores mínimo T-Norma e máximo T-CoNorma. Estes operadores são utilizados como operadores de agregação para conjuntos difusos. (Eastman, 1997)

De acordo com Eastman (1997), atualmente as três maiores lógicas que estão em uso para expressar uma regra de decisão de incerteza são: Teoria de Conjuntos Difusos, Estatística Baiesiana e Teoria de Dempster-Shafer. Cada uma dessas teorias é distinta e têm conjuntos de decisão muito diferentes em relação aos operadores T-Norma/T-CoNorma.

Como já foi dito anteriormente, este trabalho tratará um tipo de incerteza no conjunto de decisão que envolve o tratamento de outros aspectos mais específicos de cada alternativa, visando obter, de maneira concisa, o grau de pertinência ao conjunto, e por este motivo tratar-se-á o conjunto de decisão de maneira muito mais rigorosa, com o objetivo de obter uma ordem para as alternativas do conjunto. Para tanto, será utilizado o MCDM difuso baseado no conceito de pontos ideal e anti-ideal. (Liang, 1999). Além disso, como o escopo do trabalho trata apenas de um modelo *fuzzy* como forma de avaliar a tomada de decisão e tratar a incerteza, vai-se descrever alguns detalhes tão somente da Teoria de Conjuntos Difusos, não traçando maiores detalhes sobre a Estatística Baiesiana e a Teoria de Dempster-Shafer.

Antes do detalhamento torna-se necessário que fique claro mais dois fatos relacionados ao escopo deste trabalho:

1º) Uma determinada situação pode ser difusa apenas no sentido de ser ambígua. Entretanto, ao ser examinada de forma mais acurada ela pode tornar-se um ponto bem definido. Por exemplo, um pixel em um mapa pode ter, a princípio, um valor aproximadamente real (difuso), ao avaliar as coordenadas de latitude e longitude com, por exemplo, um GPS o ponto será perfeitamente definido. (Eastman, 1997).

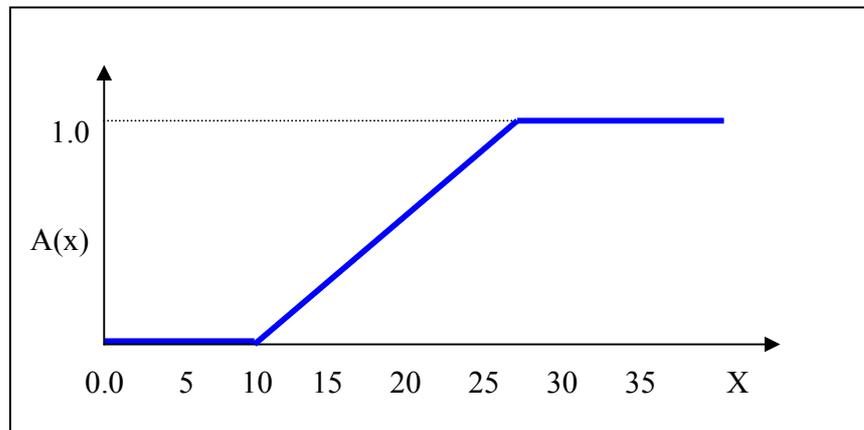
2º) Pode ocorrer uma situação em que o conjunto estudado é realmente difuso, no sentido de inconclusivo, no entanto, a evidência não permite uma avaliação direta no conjunto de pertinência. Esta situação deve ser tratada pela Teoria Baiesiana ou pela Teoria de Dempster-Shafer. Como exemplo pode-se citar o processo de classificação supervisionada na análise de sensoriamento remoto de imagem (Eastman, 1997).

Estes dois fatos, apesar de, de certa forma, envolverem a idéia *fuzzy*, não serão tratados por este trabalho, o qual tratará da lógica difusa envolvendo evidência direta no conjunto de decisão (difuso).

## 2.4. Teoria de Conjuntos Difusos

Pode-se definir um conjunto difuso através de uma função, chamada função de pertinência,  $A : X \rightarrow [0,1]$ . Assim, pode-se ainda caracterizar um conjunto difuso pelo grau de pertinência difuso que está na faixa de 0.0 a 1.0, o qual indica um incremento contínuo que vai da não pertinência à pertinência completa (Zadeh, 1965; Schmucker, 1982).

Por exemplo: Na avaliação de que uma declividade é íngreme, poder-se-á definir uma função de pertinência difusa, representada pela Figura – 01, tal que a declividade de até 10% tenha uma pertinência 0.0 e a declividade de 25% em diante tenha declividade 1.0. Entre 10% e 25% a pertinência difusa da declividade cresce gradual e continuamente na escala de 0.0 a 1.0.



**Figura 01 – Exemplo de um número difuso.**

Observe-se que existe uma faixa em  $X$ ,  $[10,25]$ , onde a questão “apresenta ou não declividade” (binário), não funciona, o que leva à idéia difusa de levemente inclinado, acentuadamente inclinado, etc.

Pode-se citar como outro exemplo difuso, o conceito de “distância” que não pode ser definida apenas pela idéia de próximo e distante. Já que, se fosse considerado que para uma cidade está próxima a outra a distância teria que ser de 20 km, ocorreria que outra cidade a 21 km seria considerada distante, o que não é verdadeiro. Assim sendo, o conceito de “distância” só pode ser avaliado através da teoria de conjuntos difusos.

### 2.4.1. Operações com Conjuntos Difusos

Considerando o conjunto universo  $X$  e dois conjuntos difusos  $A$  e  $B$  definidos em  $X$ . Klir; et Al (1997) define as operações difusas, para todo  $x \in X$ , conforme a Tabela-01:

Operação	Expressão
UNIÃO	$(A \cup B)(x) = \max [A(x), B(x)]$
INTERSEÇÃO	$(A \cap B)(x) = \min [A(x), B(x)]$
COMPLEMENTAR	$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$

**Tabela 01 – Operações Difusas.**

Exemplo: Considere-se uma área de terra  $X$ , dividida em  $n$  lotes, catalogados com os números 1, 2, ...,  $n$ . Sejam os conjuntos difusos  $A$  e  $B$  em  $X$  com as seguintes características:  $A = \{\text{lotes com declividade acentuada}\}$ ,  $B = \{\text{lotes com alta drenagem}\}$ . A representação do que caracteriza as operações difusas é descrita através da Tabela - 02:

Lotes de Terra	A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$\bar{A}$
1	0.3	0.7	0.7	0.3	0.7
2	0.8	0.5	0.8	0.5	0.2
3	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0
...	...	...	...	...	...
n	0.1	0.2	0.2	0.1	0.9

**Tabela 02 – Exemplo das operações difusas.**

A idéia gráfica do complementar difuso para, por exemplo, um terreno A com declividade acentuada é dada através da Figura - 02:

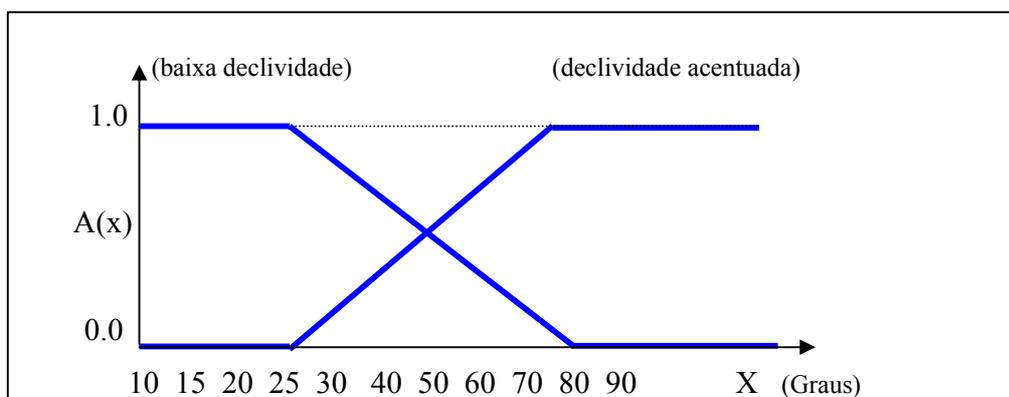


Figura 02 – Gráfico do complementar difuso.

Nota-se que, para um  $x = 30$  graus, por exemplo, a pertinência em A é aproximadamente 0.3, enquanto que a pertinência em  $\bar{A}$  aproxima-se de 0.7.

Uma observação importante sobre as operações de união e de interseção de conjuntos difusos em relação ao complementar acima definido, é que não valem as leis do meio excluído e da contradição, que valem na teoria de conjuntos clássicos, ou seja, que  $A \cup \bar{A} = X$  e  $A \cap \bar{A} = \phi$ . Estes fatos estão representados Através das Figuras 03 e 04, respectivamente.

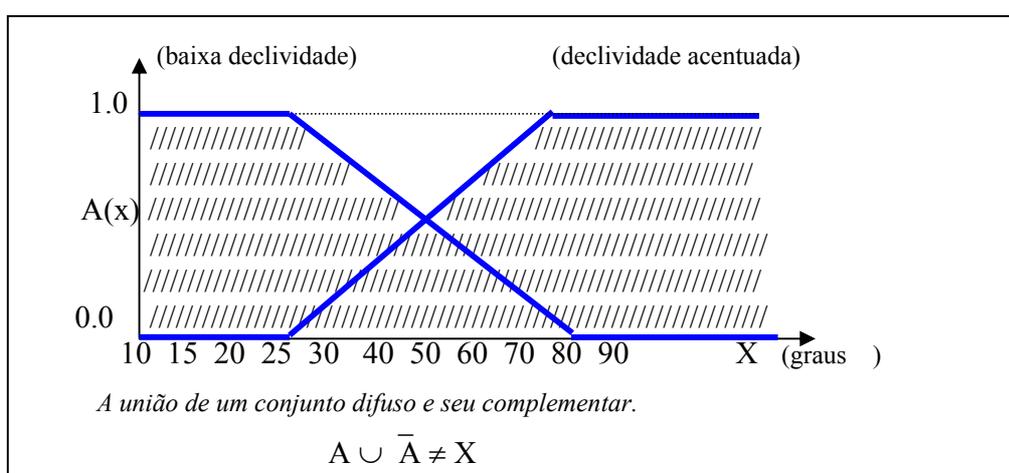
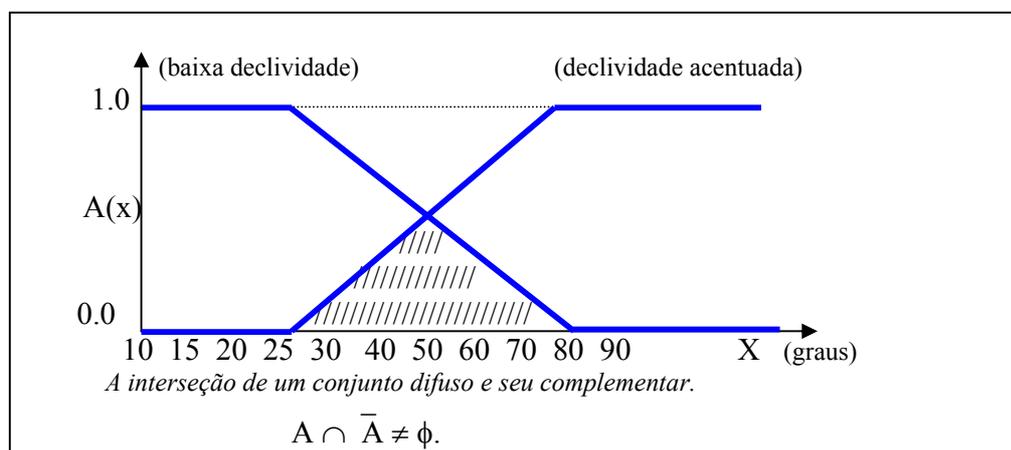


Figura 03 – União difusa entre um conjunto e seu complementar.



**Figura 04 – Interseção difusa entre um conjunto e seu complementar**

No entanto, a maioria das propriedades de conjuntos clássicos, como a comutatividade, a associatividade, a idempotência, a distributividade e as leis de De Morgan, valem para conjuntos difusos.

#### 2.4.2. Forma Geral de um Número Difuso

Pode-se estabelecer uma forma mais geral, uma das quais será utilizada neste trabalho, para o conceito de número difuso baseado na idéia de funções sobre intervalos:

$$A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{para } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{para } b \leq x \leq c, \\ g(x), & \text{para } c \leq x \leq d \text{ e} \\ 0, & \text{para } x < a \text{ e } x > d, \text{ onde } a \leq b \leq c \leq d. \end{cases}$$

Em algumas formas temos  $b = c$ , o que não invalida a definição acima.

Dentre as inúmeras funções de pertinência, serão descritos alguns tipos, como exemplos, através das Figuras 05, 06 e 07:

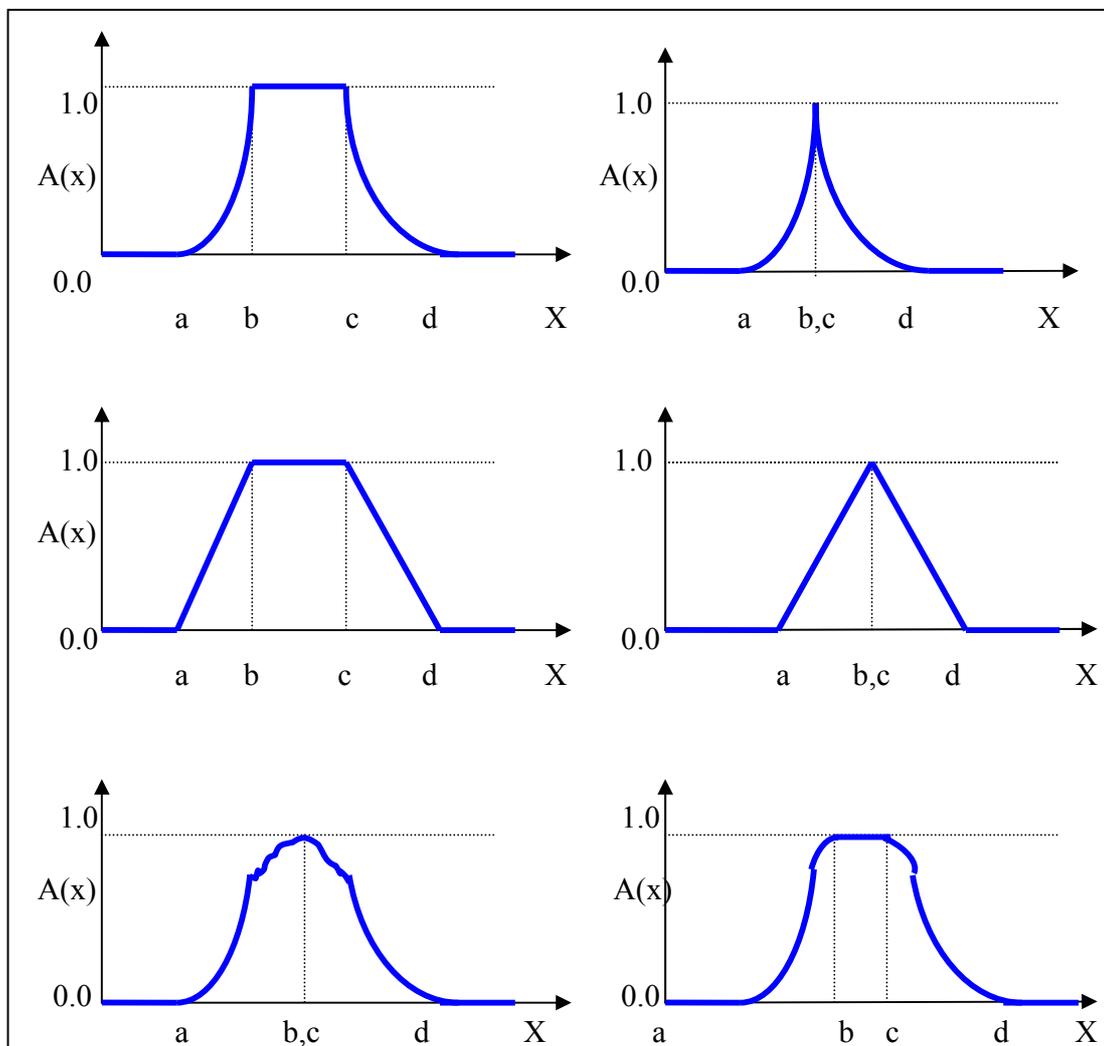


Figura 05 – Formas trapezoidais e triangulares de números difusos.

Existem formas mais simplificadas de representação, como por exemplo:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x < a \\ f(x), & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{para } x > b. \end{cases}$$

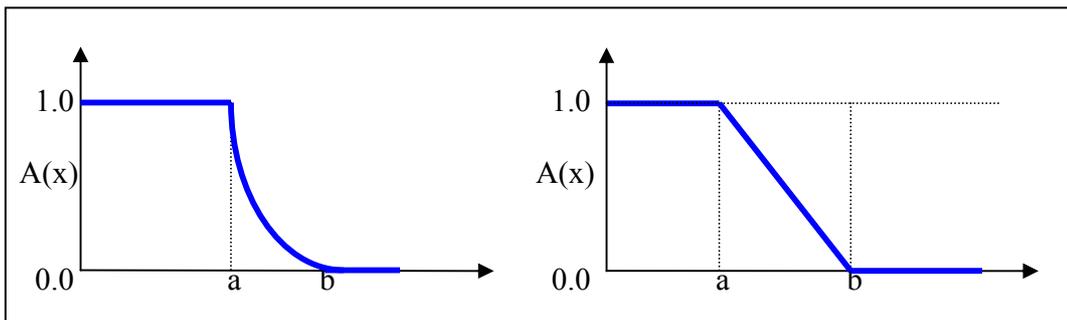


Figura 06 – Formas simplificadas de números difusos do tipo 1.

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < a \\ f(x), & \text{para } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{para } x > b. \end{cases}$$

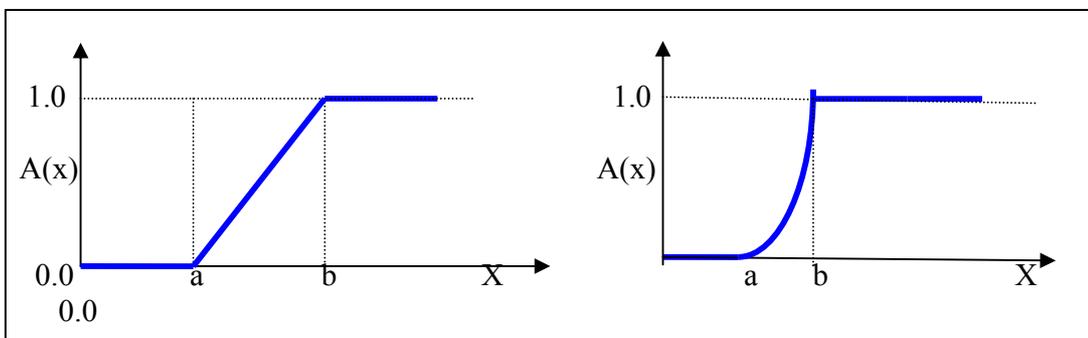


Figura 07 – Formas simplificadas de números difusos do tipo 2.

### 2.4.3. Operações Aritméticas com Intervalos Difusos

Em algumas aplicações intervalos de números reais permitem descrever a incerteza sobre o valor atual de uma variável numérica. Esta incerteza pode ser causada, por

exemplo, pela resolução limitada de um instrumento de medição ou pela precisão limitada da computação. Na tomada de decisão, intervalos são freqüentemente utilizados para a especificação de valores aceitáveis e não aceitáveis de relevantes variáveis numéricas.

Para definir as quatro operações aritméticas básicas, deve-se considerar dois intervalos fechados  $[a,b]$  e  $[c,d]$ , onde os pontos extremos dos intervalos são os números reais  $a, b, c, d$ , para os quais  $a \leq b$  e  $c \leq d$ . Além disso, o resultado de qualquer uma das quatro operações aritméticas sobre esses intervalos é definido como o conjunto de números reais obtido pela realização da operação, em cada par ordenado de números reais, no produto cartesiano  $[a,b] \times [c,d]$ , exceto a divisão,  $[a,b] / [c,d]$ , que não é definida quando  $0 \in [c,d]$ .

Assim, serão introduzidas as quatro operações aritméticas básicas sobre dois intervalos,  $[a,b]$  e  $[c,d]$ , em termos de seus pontos extremos como segue:

Operação	Expressão	Exemplo
ADIÇÃO	$[a,b] + [c,d] = [a+c,b+d]$	$[-2,5] + [3,-4] = [1,1]$
SUBTRAÇÃO	$[a,b] - [c,d] = [a-d,b-c]$	$[2,5] - [3,1] = [1,2]$
MULTIPLICAÇÃO	$[a,b] \cdot [c,d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$	$[-1,1] \cdot [-2,0.5] = [-2,2]$
DIVISÃO	$[a,b] / [c,d] = [a,b] \cdot [1/d,1/c] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$	$[-1,1] / [-2,-0.5] = [-2,2]$

**Tabela 03 – Operações aritméticas com intervalos difusos.**

#### 2.4.4. Propriedades de Conjuntos Difusos

##### - $\alpha$ -Cortes de Conjuntos Difusos

Deve-se salientar que a introdução dos conceitos de  $\alpha$ -cortes tornou-se necessário pelo fato de que no desenvolvimento da aplicação da Fase 2 existe um produto de dois números difusos trapezoidais em que a função de pertiência é obtida segundo Liang (1999), apenas invocando o Princípio da Extensão. No entanto, depois de muita pesquisa foi verificado que por traz daquelas deduções estavam também os  $\alpha$ -cortes, conforme foi aplicado no trabalho.

Um dado conjunto  $X$  está associado com uma família de subconjuntos *crisp* de  $X$ . Cada um destes subconjuntos consistem de todos os elementos de  $X$  cujo grau de pertinência no conjunto difuso está restrito a algum dado subconjunto *crisp* de  $[0,1]$ .

Um caminho para restringir o grau de pertinência é particularmente importante. É a restrição do grau de pertinência que é maior ou igual a algum dado valor de  $\alpha$  em  $[0,1]$ . Quando essa restrição é aplicada a um determinado conjunto  $A$ , nós obtemos um subconjunto *crisp*  ${}^{\alpha}A$  do conjunto universo  $X$ , que é chamado de  $\alpha$ -cortes de  $A$ , cuja fórmula é:  ${}^{\alpha}A = \{x \in X / A(x) \geq \alpha\}$ .

##### - O Princípio da Extensão

No desenvolvimento computacional de conjuntos difusos nós necessitamos encontrar um caminho para tratar as tradicionais funções *crisp* e fuzificá-las. O princípio

para fuzificação de funções *crisp* é chamado de Princípio da Extensão, cujo teor é o seguinte:

Seja uma dada função  $f: X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são conjuntos *crisp* finitos. Duas funções podem ser induzidas de  $f$ . Uma denotada por  $\bar{f}$ , é uma função de  $\mathfrak{Z}(X)$  em  $\mathfrak{Z}(Y)$ . A outra, denotada  $\bar{f}^{-1}$ , é uma função de  $\mathfrak{Z}(Y)$  em  $\mathfrak{Z}(X)$ . Estas funções são definidas por

$$[\bar{f}(A)](y) = \max_{x/y=f(x)} A(x) \text{ para qualquer } A \in \mathfrak{Z}(X) \text{ e } y \in Y, \text{ e}$$

$$[\bar{f}^{-1}(B)](x) = B(f(x)) \text{ para qualquer } B \in \mathfrak{Z}(Y) \text{ e } x \in X.$$

#### - T-Norma e T-CoNorma

As Leis de DeMorgan estabelecem um relacionamento triangular entre os operadores de interseção, união e negação, tais como seguem:

$T(a,b) = \sim S(\sim a, \sim b)$ , onde  $T$  é a interseção(AND) chamada de T-Norm,  $S$  é união(OR), chamada de T-CoNorma e  $\sim$  é a negação(NOT).

Uma T-Norma pode ser definido como (Yager, R., 1988), uma função

$T: [0,1] * [0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que:

$$T(a,b) = T(b,a) \quad (\text{comutativa})$$

$$T(a,b) \geq T(c,d) \text{ se } a \geq c \text{ e } b \geq d \quad (\text{monotônica})$$

$$T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c) \quad (\text{associativa})$$

$$T(1, a) = a.$$

Dentre os exemplos de T-Norma podemos destacar o operador interseção de conjuntos difusos  $\min(a,b)$ . Além de outros como:  $a*b$ ,  $\max(0,a+b-1)$ , etc.

Da mesma forma, definimos T-CoNorma por:

S:  $[0,1]*[0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que:

$$S(a,b) = S(b,a) \quad (\text{comutativa})$$

$$S(a,b) \geq S(c,d) \text{ se } a \geq c \text{ e } b \geq d \quad (\text{monotônica})$$

$$S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c) \quad (\text{associativa})$$

$$S(0,a) = a .$$

Dentre os exemplos de T-CoNorma podemos destacar o operador união de conjuntos difusos  $\max(a,b)$ . Além de outros como:  $a+b-a*b$ ,  $\min(1,a+b)$ , etc.

#### 2.4.5. Operações Aritméticas com Números Difusos

Para formular qualquer uma das quatro operações aritméticas básicas com números difusos será utilizado a idéia de representar os números por seus  $\alpha$ -cortes e depois empregar as operações aritméticas em intervalos para os  $\alpha$ -cortes. Para explicar como isso é feito, considera-se dois números difusos arbitrários A e B, e ‘\*’ como um símbolo para representar qualquer uma das quatro operações aritméticas sob intervalo. Então, para cada  $\alpha \in (0,1]$ , os  $\alpha$ -cortes de  $A*B$  é definido em termos dos  $\alpha$ -cortes de A e B pela fórmula:

${}^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B$ . Não sendo aplicado quando ‘\*’ representa a divisão e  $0 \in {}^{\alpha}B$ . Após os  $\alpha$ -cortes de  ${}^{\alpha}(A * B)$  serem determinados, encontra-se o resultado do número difuso  $A * B$  através da fórmula  $A * B = \cup_{} {}^{\alpha}(A * B)$ .

Por exemplo: Considera-se dois números difusos A e B dados na forma triangular através de suas fórmulas:

$$A(x) = \begin{cases} (x + 1) / 2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ (3 - x) / 2, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{qualquer outro valor.} \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} (x - 1) / 2, & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ (5 - x) / 2, & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{qualquer outro valor.} \end{cases}$$

Considerando agora, dois intervalos tais que  ${}^\alpha A = [{}^\alpha a_1, {}^\alpha a_2]$  e  ${}^\alpha B = [{}^\alpha b_1, {}^\alpha b_2]$ . Assim,  $A({}^\alpha a_1) = ({}^\alpha a_1 + 1) / 2 = \alpha$  e  $A({}^\alpha a_2) = (3 - {}^\alpha a_2) / 2 = \alpha$

$\Rightarrow {}^\alpha a_1 = 2\alpha - 1$  e  ${}^\alpha a_2 = 3 - 2\alpha$ . Da mesma forma,

$$B({}^\alpha b_1) = ({}^\alpha b_1 - 1) / 2 = \alpha \quad \text{e} \quad B({}^\alpha b_2) = (5 - {}^\alpha b_2) / 2 = \alpha$$

$\Rightarrow {}^\alpha b_1 = 2\alpha + 1$  e  ${}^\alpha b_2 = 5 - 2\alpha$ .

Portanto,  ${}^\alpha A = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$  e  ${}^\alpha B = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$ . Assim:

${}^\alpha(A * B) = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] * [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$ . Em seguida é só aplicar a operação específica para este intervalo. É importante observar que as operações de multiplicação e divisão não preservam a forma original (seja triangular ou trapezoidal), havendo a necessidade de ser aplicado o Princípio da Extensão. Assim, neste exemplo:

$$(A \otimes B)(x) = \begin{cases} [3 - (4 - x)^{1/2}] / 2, & \text{se } -5 \leq x < 0 \\ (1 + x)^{1/2} / 2, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ [4 - (1 + x)^{1/2}] / 2, & \text{se } 3 \leq x \leq 15 \\ 0, & \text{qualquer outro valor.} \end{cases}$$

#### 2.4.6. Lógica Difusa

A Lógica difusa tem sua fundamentação na lógica multivalorada, especialmente em relação aos princípios abaixo, de duas assertivas  $p$  e  $q$ :

$$p = p - 1$$

$$p \wedge q = \min(p,q)$$

$$p \vee q = \max(p,q)$$

$$p \Rightarrow q = \min(1, 1-p+q)$$

$$p \Leftrightarrow q = 1 - |p-q|. \text{ (Klir; et Al., 1997)}$$

A base fundamental foram as lógicas trivaloradas de Lukasiewicz, Bochvar e Kleene. As quais colocam uma terceira situação com valor  $\frac{1}{2}$ , fazendo com que alternativas deixem de ser apenas 0 e 1. No entanto, segundo Klir; et Al. (1997), a lógica difusa traz um conceito bem mais abrangente e pode valorar termos lingüísticos tais como:

- Predicados difusos (jovem, pequeno, normal);
- Valores verdades difusos (falso, bastante verdadeiro, muito verdadeiro);
- Probabilidades difusas (provável, não provável, altamente provável);
- Quantificadores difusos (alguns, poucos, muitos, quase todos).

#### 2.4.7. Aplicações:

Segundo Klir; et Al. (1997), existem hoje em todo o Mundo vários tipos de aplicações práticas, em diversas áreas do conhecimento, relacionados à teoria difusa, conforme pode-se observar a seguir:

- Controladores difusos: Desenvolvidos com base no conhecimento de operadores humanos. Esses controladores vão desde os mais simples, como a máquina de lavar roupa, com controles difusos: alto, médio e baixo, até controladores complexos, como o controle de helicóptero baseado em instruções em linguagem natural.
- Tomadas de decisão: Especialmente aquelas que envolvem o uso da terra, em razão da teoria difusa ter sido acoplada a todos os principais software SIG, como um SSD. O detalhamento de aplicações desse tipo podem ser vistas em (Kickert, 1978; Zimmermann, 1987).
- Ciência da computação: As aplicações aqui são principalmente, bancos de dados difusos, sistemas de recuperação de informações difusas e sistemas especialistas difusos. Sendo a principal vantagem do uso de conjuntos difusos em sistemas baseados em computador, a capacidade de representação e manipulação de informações e conhecimentos expressos em linguagem natural.
- Projetos de engenharia: Em que os projetistas observam as restrições de projeto para avaliar melhor as alternativas para a tomada de decisão.
- Outras áreas: A teoria difusa abrange hoje praticamente todas as grandes áreas do conhecimento, com aplicações concretas em Medicina, Educação, Economia, etc.

## 2.5. *Arc/Info e ArcView*

*Arc/Info e ArcView* é um conjunto de software, considerado uma das mais antigas ferramentas de Sistemas de Informações Geográficas – SIG, tendo passado por várias versões com o objetivo de acompanhar a evolução dos computadores e softwares dos últimos anos.

Desenvolvidos pela *Environmental Systems Research Institute (ESRI)*, apesar de terem até algumas funções semelhantes, o *Arc/Info* tem como função maior a digitalização e o armazenamento dos dados, enquanto o *ArcView* funciona como complementar, tendo seu potencial em visualizar, explorar, consultar e analisar dados espaciais.

Apesar de ser possível exportar dados digitalizados em *Arc/Info* para outros softwares SIG, a grande vantagem de utilizar o conjunto é que neste caso para o *ArcView* o manuseio destes dados é direto e transparente.

*ArcView* pode ser usado por qualquer pessoa que queira trabalhar espacialmente. Entre suas facilidades pode-se destacar: carregar dados tabulares, tais como arquivos dBASE e dados de servidores de banco de dados, para dentro do *ArcView* para que se possa mostrar, consultar, sumarizar e organizar esses dados geograficamente.

Além disso, pode-se efetuar manipulações no próprio mapa, como corte e seleção de áreas; cruzamento de mapas; e, aplicação de critérios no banco de dados que afetem o mapa.

### 2.5.1. Suporte a Decisão em Arc/Info

Enquanto não está estabelecido uma definição de Sistema de Suporte a Decisão – SSD, pode-se dizer que um SSD é um conjunto de ferramentas que dão suporte aos tomadores de decisão, tornando essas decisões mais efetivas e eficientes.

Como já falado anteriormente, um Sistema de Suporte a Decisão Espacial integra modelos formais com a intuição humana. Fica claro que diferentes parâmetros (pensamentos) estabelecidos podem levar a modelos de alocação diferentes. No entanto, fica bastante claro também que os tomadores de decisão ficam bem mais fundamentados com a apresentação de cenários (gráficos e mapas), do que trabalhar apenas com relatórios de dados.

O SSD que compõe o Arc/Info 7.1.2 apresenta como elementos: *Overview*: que cria os cenários; *Scenario*: que descreve geograficamente um ponto naquele momento ou sob certas condições; *An alternative*: que faz uma seleção de centros e a designação de demanda para aqueles centros; e, *Scoring an alternative* que faz a mensuração de um conjunto de metas e objetivos. O principal produto gerado são gráficos, os quais são úteis para fazer comparações entre uma variedade de alternativas.

### 2.5.2. Um Tratamento Difuso em Arc/Info 7.1.2 (Fuzzy Tolerance)

A resolução de cobertura de um ponto é influenciada pela tolerância difusa, a qual representa a distância mínima que separa todos os arcos coordenada (nós e vértices) em

uma cobertura. Por definição isso define também a distância que uma coordenada pode se mover durante certas operações. A tolerância difusa é de tamanho extremamente pequeno (sua faixa de valores default é de 1/10.000 a 1/1.000.000) e serve basicamente para resolver problemas de interseções inexatas de localizações devido à limitada precisão aritmética dos computadores.

A tolerância difusa é especificada como um argumento de alguns comandos do Arc/Info, como: *CLEAN*, *CLIP*, *BUFFER*, *ERASE*, *INTERSECT*, *IDENTITY*, *SPLIT*, *UNION E UPDATE*, e seu valor pode ser especificado ou ser utilizado o valor default do arquivo de tolerância de cobertura. Deve-se ter muito cuidado quando o valor for especificado, para que este não seja muito pequeno pois as interseções de arco podem não ser criadas, nem muito grande para não causar desperdício de áreas de interseção.

A tolerância difusa para uma digitalização tem a precisão de 0.002 polegadas, calculada da seguinte maneira: (denominador da escala / número de polegadas por unidade de cobertura) \* 0.002. Por exemplo, uma mapa na escala 1:250.000 em unidades de cobertura de pés produzidos, tem  $(250000/12)*0.002 = 41.66$  pés ou 12.7 metros.

## **2.6. MCDM (*Multicriteria Decision Making*)**

MCDM's são métodos criados com a finalidade de oferecer aos tomadores de decisão subsídios científicos capazes de tornar o julgamento mais rápido e eficiente.

Assim, os métodos MCDM's representam importante papel na tomada de decisão, devido a oferecer aos julgadores diferentes alternativas de cenários para, por exemplo, selecionar a melhor alternativa.

Os métodos MCDM's podem ser multicritérios com múltiplos objetivos ou com objetivo único. Em qualquer dos tipos, o estudo de MCDM torna-se cada vez mais

importante para analisar vários aspectos, tais como, incorporar visões reais dos tomadores de decisão; tratar a incerteza na avaliação de dados do método; tornar o método simples e sistemático, reduzindo o trabalho computacional.

Pode-se citar como exemplo de MCDM com múltiplos objetivos, o conjunto de métodos chamados *Multi Attribute Utility Theory* (MAUT) combinado com a extensão estocástica do PROMETHEE-2, chamado *STOPROM-2* que seleciona a melhor distribuição. (Raju; Pillai, 1997).

O exemplo de MCDM com objetivo único que pode ser citado é aquele que será trabalhado para desenvolver a Fase 2 deste trabalho, ou seja, o MCDM difuso baseado nos conceitos de ideal e anti-ideal (Liang, 1999), o qual consta dos seguintes passos:

1. Forme um comitê de tomadores de decisão e, então, selecione os critérios de avaliação e identifique as prováveis alternativas.
2. Divida os critérios de avaliação entre as categorias subjetiva e objetiva.
3. Identifique a preferência apropriada na escala de avaliação do conjunto para estabelecer os pesos de importância dos critérios e das alternativas em relação aos critérios.
4. Tabule os pesos para os critérios estabelecidos pelos tomadores de decisão, e então use-os para fazer a agregação  $W_t$ .
5. Tabule as avaliações preferidas atribuídas às alternativas pelos tomadores de decisão, para obter assim a avaliação difusa agregada ( $X_{it}$ ) da alternativa  $A_i$  sob o critério subjetivo  $C_t$ .
6. Tabule os custos/benefícios associados com as diferentes alternativas e então atribua as avaliações ( $R_{it}$ ) da alternativa  $A_i$  para o critério objetivo  $C_t$ .
7. Construa a apropriada matriz de decisão  $D$ .
8. Calcule a solução ideal positiva  $I^+$  e a solução ideal negativa  $I^-$ .
9. Calcule a distância das diferentes alternativas para  $I^+$  e  $I^-$ , respectivamente.
10. Calcule o valor relativo de aproximação das diferentes alternativas com  $I^+$ .
11. Escolha a alternativa com o maior valor de aproximação.

No Mundo de hoje tem-se notado uma evolução cada vez mais crescente deste tipo de método de apoio à tomada de decisão, tanto a nível algorítmico como a nível computadorizado. Dentre estes trabalhos pode-se citar alguns que foram consultados, como: Inferências e Estimativas de Incertezas utilizando Técnicas de Krigeagem Não-Linear; *Reserve Design for Species Preservation*; *On an Approach to the Modelling of Problems connected with Conflicting Economic Interests*; Aplicação de Técnica *Fuzzy* em SIG como alternativa para o ZEE-RO; e, Alocação de um Distrito Industrial Utilizando SIG Idrisi e Sistema de Suporte à Decisão Participativo.

### CAPÍTULO III

#### DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Os Sistemas de Informações Geográficas – SIG integrados a Sistemas de Suporte a Decisão – SSD fazem com que o processo de tomada de decisão seja realizado de forma mais fundamentada, pois o agente de decisão tem à sua disposição dados/informações mais prontamente acessíveis, mais facilmente combinadas e modificadas, além de utilizar argumentos mais claros para a decisão (Eastman; et Al., 1993), já que estas informações são apresentadas na forma de imagens e mapas.

O primeiro objetivo deste trabalho foi a confecção do Mapa da Regional Tarauacá/Envira que indicou as melhores áreas para a instalação de um Pólo Agroflorestal. Para obter o conjunto de decisão foram utilizados mapas de informações geográficas, cada um representando um critério, os quais sobrepostos forneceram o conjunto de decisão com as alternativas possíveis, correspondentes às melhores áreas para instalar o Pólo na região estudada.

Posteriormente, em razão das áreas obtidas estarem separadas (dispersas) e sem obedecer a nenhuma ordenação, cada área foi marcada como uma alternativa do conjunto de decisão para outra análise. Para tratar a incerteza sobre qual das alternativas do conjunto de decisão é a melhor, ou seja, analisar o grau de pertinência ao conjunto. Para tanto foi utilizado o MCDM (*Multiple Criteria Decision Making*) baseado no conceito de pontos ideal e anti-ideal de Liang (1999). Este critério é extremamente interessante do ponto de vista de determinado tipo de tomada de decisão, especialmente por ser um método totalmente calculado algebricamente.

Pode-se citar ainda como méritos do MCDM baseado nos conceitos de ideal e anti-ideal: o emprego de termos lingüísticos fáceis de entendimento; a disponibilidade de

formas úteis para combinar critérios quantitativos e critérios qualitativos, tanto os vagamente definidos como os precisamente definidos; a complexidade da análise não ser grandemente afetada pelo número de critérios; e, pelo estabelecimento do ideal poder ser estimulado a criatividade e a invenção de novos caminhos alternativos (Liang, 1999).

Nas duas situações este é considerado um problema de único objetivo e múltiplos critérios.

### **3.1. Procedimentos**

#### **3.1.1. Obtenção do Conjunto de Decisão**

Utilizou-se, no primeiro momento, o Mapa Fundiário de Estado do Acre, digitalizado em *Arc/Info* 7.1.2 na escala 1 : 1.000.000, cedido pelo ZEE-AC. Em seguida foram efetuados os cortes para obter a região a ser estudada; os cruzamentos com o Mapa de Pedologia de solos; e, as restrições com os limites de terras indígenas. Por último, foram aplicados os critérios para estabelecer as áreas da Fase 1.

#### **- Passos executados no sistema operacional e programas:**

Para o desenvolvimento dos trabalhos dessa Fase 1 foram realizados alguns procedimentos operacionais com o Windows NT, como criação de diretórios e cópia de arquivos. Em seguida foi aplicado o conjunto de software aplicativo em cima dos arquivos constantes da Tabela - 04:

Tipo de Arquivo	Nome	Contéudo em rel. ao Estado do Acre
Cobertura poligonal	Regional	limites regionais
Cobertura linear	Rios	hidrografia linear
Cobertura linear	Rodovias	estradas
Cobertura poligonal	Projincra	Projetos de Assentamento, de Assent. Agro-Extrativista e de Colonização
Cobertura poligonal	Particular e Abranco	áreas sem estudo de discriminação
Cobertura poligonal	Mun	limites municipais
Cobertura poligonal	Hilp	hidrografia poligonal
Cobertura poligonal	Desmat	desmatamento de 1996
Cobertura poligonal	Adiscrim	áreas discriminadas
Cobertura poligonal	Aarrecad	áreas arrecadadas
Cobertura de pontos	Sedes	localização das sedes de municípios
Cobertura poligonal	Ti	Terras Indígenas
Cobertura poligonal	Ucs	Unidades de Conservação
Cobertura de pontos	Aeroportos	localizações de Aeroportos e Aeródromos
Cobertura poligonal	Solos	dados de solos do Estado do Acre
Cobertura de pontos	Ptos_np	localizações de Núcleos Populacionais

**Tabela 04 – Arquivos utilizados no desenvolvimento da Fase 1.**

Em seguida foram realizados os seguintes passos:

1. Feito uma cópia dos arquivos que foram usados da mapoteca para uma pasta chamada Valmir o comando utilizado pelo *ArcInfo* foi:

***COPY*** d:\mapoteca\base\geografica\250\regional d:\valmir\regional

2. Após ter copiado todos os arquivos para a pasta de trabalho (WorkSpace), foi feito a projeção das coberturas que estavam em Geográfica para Policônica, pois a projeção geográfica não permite trabalhar com área. O comando utilizado pelo *ArcInfo* é:

***PROJECT COVER*** regional poly\regionalpoly geopoly-10.prj\*

3. Feito as projeções de todos os arquivos de geográfica para policônica, foi necessário utilizar um comando do *ArcInfo* para refazer as topologias, pois quando se projeta um arquivo se perde a topologia, o comando é:

**BUILD** d:\valmir\poly\regional POLY

4. O próximo passo foi separar a regional trabalhada (Tarauacá/Envira) das demais, o comando do *ArcInfo* é:

**RESELECT** d:\valmir\poly\regionalpoly d:\valmir\poly\taraucaenvira (Instrução SQL) POLY # POLY

5. Selecionado a regional, foi utilizado um comando para copiar o resultado para uma nova pasta chamada “Resultado”. O comando do *ArcInfo* é:

**COPY** d:\valmir\poly\taraucaenvira d:\valmir\poly\resultado\regional

6. Com a cobertura poligonal “Regional”, projetada em policônica, selecionada somente a regional de trabalho e em uma nova pasta, foi necessário interseccionar as outras coberturas com a “Regional” o comando do *ArcInfo* é:

**INTERSECT** d:\valmir\poly\adiscrimpoly d:\valmir\poly\resultado\regional  
d:\valmir\adiscrim POLY # Join

\* Arquivo escrito com parâmetros de projeção de geográfica para policônica.

No *ArcView* foram usados as ferramentas de consultas ao Banco de Dados, ferramenta *Measure* (medição de distâncias), e montado as vistas e layouts.

O conjunto de software *Arc/Info*, *ArcView* foi escolhido como mecanismo de resolução da Fase 1 do problema, em razão dos mapas originais já estarem digitalizados com este software, sendo que suas conversões para outro software traria alguns problemas como perda de informações do banco de dados.

### 3.1.2. Tratamento da Incerteza

Este é um problema de incerteza no conjunto de decisão (2.3.3), já que ao encontrar o conjunto  $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ , não está estabelecido nenhuma prioridade de ordenação dessas áreas segundo aqueles critérios. Assim sendo, tornou-se necessário estabelecer novos critérios com o objetivo de obter o grau de pertinência da alternativa ao conjunto.

Deve-se salientar que existem outras ferramentas para realizar este tipo de análise no conjunto de decisão, tais como: Inferências e Estimativas de Incertezas Utilizando Técnicas de Krigeagem não-linear (Felgueiras, s/data); *Multicriterion decision making in performance evaluation of na irrigation system* (Raju; Pillai, 1997); Aplicação de Técnica *Fuzzy* em SIG como alternativa para o Zoneamento Econômico Ecológico – ZEE (Escada, 1998); e até método informatizado, que está sendo aperfeiçoado dentro do *Idrisi*, utilizando o módulo MOLA e os comandos RANK e RECLASS (Hamada, et Al., Internet: 22/11/1999). A utilização do MCDM foi uma maneira de estabelecer uma nova alternativa e testar o método, o qual mostrou-se altamente eficiente.

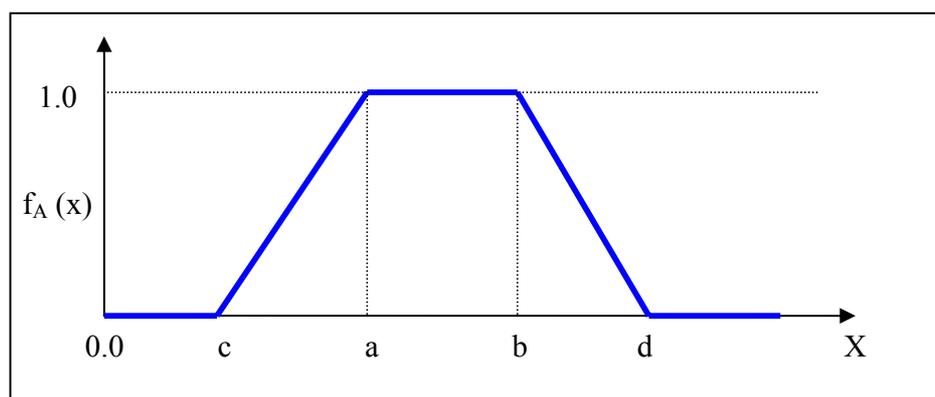
#### - Tipo de Número Difuso Utilizado

Para utilizar o critério MCDM com o conceito de pontos ideal e anti-ideal, foi utilizado o conceito de números difusos trapezoidal definidos de acordo com a função de pertinência abaixo:

$f_A : R \rightarrow [0,1]$  tal que:

$$f_A(x) = \begin{cases} (x-c)/(a-c), & \text{se } c \leq x \leq a, \\ 1, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ (x-d)/(b-d), & \text{se } b \leq x \leq d, \\ 0, & \text{qualquer outro } x, \text{ com } -\infty < c \leq a \leq b \leq d < \infty. \end{cases}$$

Um número difuso trapezoidal pode ser denotado pela quádrupla  $(c,a,b,d)$ , onde  $x$  no intervalo  $[a,b]$  dá o grau máximo de  $f_A(x)$ , isto é,  $f_A(x) = 1$ . Que é o valor mais provável da avaliação de dados.  $c$  e  $d$  são os limites inferior e superior da área disponível para a avaliação de dados. Graficamente, este número está representado na Figura – 08.



**Figura 08 – Número difuso a ser utilizado na Fase 2.**

A soma difusa e a multiplicação por um número real são preservadas, ou seja, estas operações envolvendo números trapezoidais difusos têm como resultado números trapezoidais difusos. Assim, se  $A_1 = (c_1, a_1, b_1, d_1)$  e  $A_2 = (c_2, a_2, b_2, d_2)$  e  $k$  é um número real, então

$$A_1 + A_2 = (c_1+c_2, a_1+a_2, b_1+b_2, d_1+d_2) \text{ e } k A_1 = (kc_1, ka_1, kb_1, kd_1).$$

Além disso, foi necessário o conceito de subconjunto difuso discreto de um número difuso, o qual foi definido a seguir:

Considere-se  $X$  como sendo o universo de um número difuso  $B$ , que é definido pela função de pertinência  $f_B(x)$  e seja  $P_x$  uma partição de  $X$ , isto é, assumindo que  $X = [0,1]$ , então  $P_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset [0,1]$  tal que  $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p = 1$ , é uma partição de  $X$ .

Um subconjunto difuso discreto do número difuso B é definido como um conjunto difuso (A) em  $P_x$  de tal maneira que para cada  $x$  em  $P_x$ , ele tem o mesmo grau de pertinência em X, isto é,  $A = \{(x, f_B(x)) / x \in P_x\}$ .

- Selecionar os critérios:

De acordo com Liang (1999) diversos aspectos podem ser considerados como critérios num problema de multi-critérios de avaliação. Tais critérios são identificados levando em consideração os requerimentos específicos do problema. Os critérios podem ser classificados em duas categorias: critérios subjetivos, que têm definição qualitativa (lingüística), exemplo condições climáticas; critérios objetivos, que são definidos em termos quantitativos (monetário), exemplo custo de investimento.

- Escolher o sistema de avaliação preferido:

Duas avaliações foram utilizadas: valores lingüísticos e números difusos. Os valores lingüísticos foram representados subjetivamente pelos números difusos trapezoidais e foram utilizados para avaliar a importância dos critérios bem como a adequação das alternativas com os critérios subjetivos. Enquanto isso, os números difusos trapezoidais foram usados para representar os termos quantitativos. Por exemplo, aproximadamente igual a 300 pode ser representado por (295, 300, 300, 305); aproximadamente entre 360 e 400 pode ser representado por (355, 360, 400, 408), o número *crisp* 500 pode ser representado por (500, 500, 500, 500). Além disso, a sentença “muito importante” pode ser representada por (0.7, 1, 1, 1).

- Agregar a importância das avaliações sobre os critérios de pesos:

Assumiu-se que existe um comitê de  $n$  tomadores de decisão ( $D_1, D_2, \dots, D_n$ ). Estes tomadores de decisão foram os responsáveis para avaliar a adequação das  $m$  alternativas ( $A_1, A_2, \dots, A_m$ ) sob cada um dos  $k$  critérios ( $C_1, C_2, \dots, C_k$ ), bem como a importância dos critérios.

Considerando  $W_{tj} = (c_{tj}, a_{tj}, b_{tj}, d_{tj})$ , com  $0 \leq c_{tj} \leq a_{tj} \leq b_{tj} \leq d_{tj} \leq 1$ ;  $t = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , para ser a lingüística dos pesos dados para os critérios subjetivos  $C_1, C_2, \dots, C_h$  e critérios objetivos  $C_{h+1}, C_{h+2}, \dots, C_k$  pelo tomador de decisão  $D_j$ , respectivamente. Definiu-se  $W_t = (1/n) \otimes (W_{t1} \oplus W_{t2} \oplus \dots \oplus W_{tn})$ , com  $t = 1, 2, \dots, k$ .

Sendo  $c_t = \sum c_{tj} / n$ ,  $a_t = \sum a_{tj} / n$ ,  $b_t = \sum b_{tj} / n$  e  $d_t = \sum d_{tj} / n$ , então

$$W_t = (c_t, a_t, b_t, d_t), t = 1, 2, \dots, k. \quad (1)$$

- Agregar a adequação das alternativas versus os vários critérios

Considerou-se  $X_{itj} = (q_{itj}, o_{itj}, p_{itj}, r_{itj})$ , com  $0 \leq q_{itj} \leq o_{itj} \leq p_{itj} \leq r_{itj} \leq 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, h$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , como sendo a avaliação lingüística designada para a alternativa  $A_i$  pelo tomador de decisão  $D_j$  em relação ao critério subjetivo  $C_t$ . Assim, Definiu-se  $X_{it} = (1/n) \otimes (X_{it1} \oplus X_{it2} \oplus \dots \oplus X_{itn})$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, h$ , onde  $X_{it}$  é indicado para ser a média das avaliações lingüísticas da alternativa  $A_i$  para o critério subjetivo  $C_t$ .

Tomando  $q_{it} = \sum q_{itj} / n$ ,  $o_{it} = \sum o_{itj} / n$ ,  $p_{it} = \sum p_{itj} / n$  e  $r_{it} = \sum r_{itj} / n$ , obteve-se então,  $X_{it} = (q_{it}, o_{it}, p_{it}, r_{it})$ , com  $t = 1, 2, \dots, h$ . (2)

Para fazer a compatibilização entre custo/benefício (difuso ou não difuso) de critério objetivo com avaliações lingüísticas de critérios subjetivos, o custo/benefício foi convertido para índices dimensionáveis. A alternativa com o custo mínimo (máximo benefício) teve avaliação máxima. Baseado no princípio descrito acima, foi feito  $T_{it} = (e_{it}, f_{it}, g_{it}, s_{it})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = h+1, h+2, \dots, k$ , para denotar o custo/benefício total designado para a alternativa  $A_i$  pelo critério objetivo  $C_t$ , assim a avaliação da alternativa  $A_i$  versus critério objetivo  $C_t$  foi definido pelo relacionamento direto:

$$RT_{it} = (e_{it} / (\sum s_{it}), f_{it} / (\sum g_{it}), g_{it} / (\sum f_{it}), s_{it} / (\sum e_{it})), \text{ com } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

$$RT_{it} = (s_{it}^{-1} / (\sum e_{it}^{-1}), g_{it}^{-1} / (\sum f_{it}^{-1}), f_{it}^{-1} / (\sum g_{it}^{-1}), e_{it}^{-1} / (\sum s_{it}^{-1})), \quad (4)$$

com  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$\text{Assim definiu-se } M_{it} = \begin{cases} X_{it}, & i = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, h, \\ RT_{it}, & i = 1, 2, \dots, m; t = h+1, h+2, \dots, k, \text{ onde } M_{it}, \text{ com} \end{cases} \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, k$ , denota a avaliação apropriada da alternativa  $A_i$  para o critério  $C_t$ .

Visto que  $RT_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = h+1, h+2, \dots, k$ , também são números difusos trapezoidais, definidos por  $RT_{it} = (q_{it}, o_{it}, p_{it}, r_{it})$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t = h+1, h+2, \dots, k$ . Então pode-se fazer, de uma forma generalizada,  $M_{it} = (q_{it}, o_{it}, p_{it}, r_{it})$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t = 1, 2, \dots, k$ .

- Construir convenientemente os pesos para a matriz de decisão D

Considerando  $D_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, k$ , para serem os pesos apropriados da matriz de decisão D, isto é,  $D = [D_{it}]_{m \times k}$ . Eles foram usados para avaliar os pesos apropriados das diferentes alternativas *versus* os vários critérios. Logo, pode-se definir  $D_{it} = W_t \otimes M_{it}$ .

Utilizando as idéias apresentadas em 2.4.4 e 2.4.5 e a fórmula geral de função de pertinência de um número difuso trapezoidal, vem:

$$f_{W_t}(x) = \begin{cases} (x - c_t) / (a_t - c_t), & \text{para } c_t \leq x \leq a_t, \\ 1, & \text{para } a_t \leq x \leq b_t, \\ (x - d_t) / (b_t - d_t), & \text{para } b_t \leq x \leq d_t, \\ 0, & \text{para qualquer outro valor, com } t = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

$$f_{M_{it}}(x) = \begin{cases} (x - q_{it}) / (o_{it} - q_{it}), & \text{para } q_{it} \leq x \leq o_{it}, \\ 1, & \text{para } o_{it} \leq x \leq p_{it}, \\ (x - r_{it}) / (p_{it} - r_{it}), & \text{para } p_{it} \leq x \leq r_{it}, \\ 0, & \text{para qualquer outro valor,} \end{cases}$$

com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t = 1, 2, \dots, k$ .

Considerando os intervalos correspondentes aos  $\alpha$ -cortes de  $W_t$  e  $M_{it}$  dados por:

$${}^\alpha W_t = [{}^\alpha a_1, {}^\alpha a_2] \text{ e } {}^\alpha M_{it} = [{}^\alpha b_1, {}^\alpha b_2]. \text{ Obteve-se então,}$$

$$W_t({}^\alpha a_1) = ({}^\alpha a_1 - c_t) / (a_t - c_t) = \alpha$$

$$W_t({}^\alpha a_2) = ({}^\alpha a_2 - d_t) / (b_t - d_t) = \alpha$$

$$M_{it}({}^\alpha b_1) = ({}^\alpha b_1 - q_{it}) / (o_{it} - q_{it}) = \alpha$$

$$M_{it}({}^\alpha b_2) = ({}^\alpha b_2 - r_{it}) / (p_{it} - r_{it}) = \alpha.$$

$${}^\alpha a_1 - c_t = \alpha (a_t - c_t) \quad \Rightarrow \quad {}^\alpha a_1 = \alpha (a_t - c_t) + c_t$$

$${}^\alpha a_2 - d_t = \alpha (b_t - d_t) \quad \Rightarrow \quad {}^\alpha a_2 = \alpha (b_t - d_t) + d_t$$

$${}^\alpha b_1 - q_{it} = \alpha (o_{it} - q_{it}) \Rightarrow \quad {}^\alpha b_1 = \alpha (o_{it} - q_{it}) + q_{it}$$

$${}^\alpha b_2 - r_{it} = \alpha (p_{it} - r_{it}) \Rightarrow \quad {}^\alpha b_2 = \alpha (p_{it} - r_{it}) + r_{it}$$

$$\begin{aligned} {}^\alpha (W_t \otimes M_{it}) = & [\min(\alpha (a_t - c_t) + c_t)(\alpha (o_{it} - q_{it}) + q_{it}), \alpha (a_t - c_t) + c_t)(\alpha (p_{it} - r_{it}) + r_{it}), \\ & (\alpha (b_t - d_t) + d_t)(\alpha (o_{it} - q_{it}) + q_{it}), (\alpha (b_t - d_t) + d_t)(\alpha (p_{it} - r_{it}) + r_{it}), \\ & \max(\alpha (a_t - c_t) + c_t)(\alpha (o_{it} - q_{it}) + q_{it}), \alpha (a_t - c_t) + c_t)(\alpha (p_{it} - r_{it}) + r_{it}), \\ & (\alpha (b_t - d_t) + d_t)(\alpha (o_{it} - q_{it}) + q_{it}), (\alpha (b_t - d_t) + d_t)(\alpha (p_{it} - r_{it}) + r_{it})]. \end{aligned}$$

$$\alpha (W_t \otimes M_{it}) = [(\alpha (a_t - c_t) + c_t)(\alpha (o_{it} - q_{it}) + q_{it}), (\alpha (b_t - d_t) + d_t)(\alpha (p_{it} - r_{it}) + r_{it})].$$

$$\alpha (W_t \otimes M_{it}) = [(\alpha^2 (a_t - c_t)(o_{it} - q_{it}) + \alpha((a_t - c_t)q_{it} + (o_{it} - q_{it})c_t) + q_{it}c_t),$$

$$(\alpha^2 (b_t - d_t)(p_{it} - r_{it}) + \alpha((b_t - d_t) r_{it} + (p_{it} - r_{it}) d_t) + r_{it}d_t)]. \text{ Por questão de}$$

simplificação chamou-se:

$$(a_t - c_t)(o_{it} - q_{it}) = P_{it},$$

$$(a_t - c_t)q_{it} + (o_{it} - q_{it})c_t = T_{it},$$

$$q_{it}c_t = Y_{it},$$

$$(b_t - d_t)(p_{it} - r_{it}) = V_{it},$$

$$(b_t - d_t) r_{it} + (p_{it} - r_{it}) d_t = U_{it} \text{ e}$$

$$r_{it}d_t = Z_{it}. \text{ Além disso, fez-se } o_{it}a_t = Q_{it} \text{ e } p_{it}b_t = R_{it}. \text{ Assim,}$$

$$\alpha (W_t \otimes M_{it}) = [P_{it}\alpha^2 + T_{it}\alpha + Y_{it}, V_{it}\alpha^2 + U_{it}\alpha + Z_{it}] \Rightarrow$$

$$P_{it}\alpha^2 + T_{it}\alpha + Y_{it} = x, \text{ para } Y_{it} \leq x \leq Q_{it} \text{ e}$$

$$V_{it}\alpha^2 + U_{it}\alpha + Z_{it} = x, \text{ para } R_{it} \leq x \leq Z_{it} \Rightarrow$$

$$P_{it}\alpha^2 + T_{it}\alpha + Y_{it} - x = 0 \text{ e}$$

$$V_{it}\alpha^2 + U_{it}\alpha + Z_{it} - x = 0. \text{ Resolvendo as equações do 2º grau em } \alpha, \text{ vem:}$$

$$\alpha = (- T_{it} / 2P_{it}) \pm ((- T_{it} / 2P_{it})^2 - (Y_{it} - x) / P_{it})^{1/2} \text{ e}$$

$$\alpha = (- U_{it} / 2V_{it}) \pm ((- U_{it} / 2V_{it})^2 - (Z_{it} - x) / V_{it})^{1/2}. \text{ Fazendo } H_{it} = - T_{it} / 2P_{it} \text{ e}$$

$$L_{it} = - U_{it} / 2V_{it}, \text{ fica:}$$

$$\alpha = H_{it} \pm (H_{it}^2 - (Y_{it} - x) / P_{it})^{1/2} \quad (*) \text{ e}$$

$$\alpha = L_{it} \pm (L_{it}^2 - (Z_{it} - x) / V_{it})^{1/2} \quad (**). \text{ Considerando que o } (-) \text{ do } (\pm) \text{ de } (*) \text{ e o } (+) \text{ do } (\pm)$$

de (\*\*) caem fora dos respectivos intervalos pré-estabelecidos, tem-se:

$$\alpha = H_{it} - (H_{it}^2 - (Y_{it} - x) / P_{it})^{1/2}$$

$$\alpha = L_{it} + (L_{it}^2 - (Z_{it} - x) / V_{it})^{1/2}, \text{ ou como no texto:}$$

$$\alpha = H_{it} - (H_{it}^2 + (x - Y_{it}) / P_{it})^{1/2}, \quad Y_{it} \leq x \leq Q_{it} \text{ e}$$

$\alpha = L_{it} + (L_{it}^2 - (x - Z_{it}) / V_{it})^{1/2}, \quad R_{it} \leq x \leq Z_{it}$ . Conforme dito em Liang, (1999), os conjuntos  ${}^\alpha W_t$  e  ${}^\alpha M_{it}$  são subconjuntos *crisp* do conjunto universo, chamados de  $\alpha$ -cortes de  $W_t$  e  $M_{it}$ . Portanto, as funções aplicadas nestes conjuntos são do tipo tradicional (*crisp*). Para fuzificá-las aplica-se o *Princípio da Extensão*, já descrito. Assim,  $D_{it}$  denota um número difuso com a função de pertinência dada por:

$$f_{D_{it}(x)} = \begin{cases} H_{it} + [H_{it}^2 + (x - Y_{it}) / P_{it}]^{1/2}, & Y_{it} \leq x \leq Q_{it}, \\ 1, & Q_{it} \leq x \leq R_{it}, \\ L_{it} - [L_{it}^2 + (x - Z_{it}) / V_{it}]^{1/2} & R_{it} \leq x \leq Z_{it}, \\ 0, & \text{qualquer outro valor,} \end{cases} \quad (6)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t = 1, 2, \dots, k$ , onde

$$P_{it} = (o_{it} - q_{it}) \cdot (a_t - c_t),$$

$$T_{it} = q_{it} \cdot (a_t - c_t) + c_t \cdot (o_{it} - q_{it}),$$

$$V_{it} = (r_{it} - p_{it}) \cdot (d_t - b_t),$$

$$U_{it} = r_{it} \cdot (b_t - d_t) + d_t \cdot (p_{it} - r_{it}),$$

$$H_{it} = T_{it} / (2P_{it}), \quad L_{it} = -U_{it} / (2V_{it}),$$

$$Y_{it} = q_{it} c_t, \quad Q_{it} = o_{it} a_t, \quad R_{it} = p_{it} b_t \quad \text{e} \quad Z_{it} = r_{it} d_t.$$

Claramente,  $D_{it}$  assim definido não é um número difuso trapezoidal. Este tipo de número difuso pode ser expresso através da fórmula:

$$D_{it} = (Y_{it}, Q_{it}, R_{it}, Z_{it}; H_{it}, P_{it}, L_{it}, V_{it}), \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, k.$$

- Calcular as soluções ideais positiva e negativa

Para calcular as soluções ideais positiva  $\Gamma^+$  e negativa  $\Gamma^-$  foi desenvolvido um método de ranqueamento envolvendo números difusos  $D_{it}$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$  e fixado um  $t$  ( $t = 1, 2, \dots, k$ ). Existem alguns métodos propostos para o ranqueamento de conjuntos/números difusos. Por questão de simplicidade de implementação foi utilizado o conceito baseado em Chen (1985) e em Kim; et. Al. (1990) que consta de três fases:

1ª) Maximização e minimização do conjunto

Considerando  $D_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, k$ , para serem os elementos de pesos apropriados da matriz  $D$ , cada um com sua função de pertinência obtida pela equação (6) descrita anteriormente. Definir-se-á a maximização do conjunto por

$$M = \{(x, f_M(x)) / x \in \mathfrak{R}\} \text{ com } f_M(x) = \begin{cases} (x - x_2) / (x_2 - x_1), & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{se } x \text{ assume qualquer outro valor, e a} \end{cases}$$

minimização do conjunto por  $G = \{(x, f_G(x)) / x \in \mathfrak{R}\}$  com

$$f_G(x) = \begin{cases} (x - x_2) / (x_2 - x_1), & \text{se } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{se } x \text{ assume qualquer outro valor, onde } x_1 = \min_i \{Y_{it}\} \text{ e} \end{cases}$$

$x_2 = \max_i \{Z_{it}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$  e um  $t$  fixo ( $t = 1, 2, \dots, k$ ).

2ª) Ranqueamento de pesos apropriados de  $D_{it}$

Foi definido a utilidade otimista  $U_M(D_{it})$  e a utilidade pessimista  $U_V(D_{it})$  de cada  $D_{it}$ , como:

$$U_M(D_{it}) = \sup_x (f_{D_{it}}(x) \wedge f_M(x)) \quad (7)$$

$$e U_V(D_{it}) = 1 - \sup_x (f_{D_{it}}(x) \wedge f_G(x)), \quad (8)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Foi definido o valor da posição  $U_T(D_{it})$  de  $D_{it} = (Y_{it}, Q_{it}, R_{it}, Z_{it}; H_{it}, P_{it}; L_{it}, V_{it})$ , onde cada um é encontrado pela função de pertinência (6), por

$$U_T(D_{it}) = aU_M(D_{it}) + (1 - a)U_V(D_{it}), \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } 0 < a < 1. \quad (9)$$

Este valor de  $a$  é um índice de otimismo. Este valor pode ser manipulado para refletir o risco da atitude dos tomadores de decisão. Se  $a > 0.5$  implica que a tomada de decisão é de bastante risco, se  $a = 0.5$  implica que a tomada de decisão é neutra e se  $a < 0.5$ , então este fato implica que a tomada de decisão é conservadora. Aqui foi aplicado  $a = 0.5$ .

Fazendo a aplicação de  $U_T(D_{it})$  em (6) e suas variáveis, com  $a = 0.5$ , foi obtido a equação:

$$U_T(D_{it}) = [L_{it} - (L_{it}^2 + (x_R - Z_{it}) / V_{it})^{1/2} + 1 + H_{it} - (H_{it}^2 + (x_L - Y_{it}) / P_{it})^{1/2}] / 2, \quad (10)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t = 1, 2, \dots, k$ , onde

$$x_R = \{2x_{1t} + 2L_{it}(x_{2t} - x_{1t}) + (x_{2t} - x_{1t})^2 / V_{1t} - (x_{2t} - x_{1t}) [(2L_{it} + (x_{2t} - x_{1t}) / V_{it})^2 + 4(x_{1t} - Z_{it}) / V_{it}]^{1/2}\} / 2 \text{ e}$$

$$x_L = \{2x_{2t} + 2H_{it}(x_{2t} - x_{1t}) + (x_{2t} - x_{1t})^2 / P_{1t} - (x_{2t} - x_{1t}) [(2H_{it} + (x_{2t} - x_{1t}) / P_{it})^2 + 4(x_{2t} - Y_{it}) / P_{it}]^{1/2}\} / 2,$$

sendo  $x_{1t} = \min_i \{q_{it} c_t\}$  e  $x_{2t} = \max_i \{r_{it} d_t\}$ .

3ª) Calcular  $I^+$  e  $I^-$

Pela aplicação da equação (10) e da definição de ranqueamento difuso descrito acima aos valores ranqueados dos  $D_{it}$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t$  fixo, referentes às  $m$  alternativas, podem ser facilmente calculados. Assim sendo, pode-se encontrar a solução ideal positiva  $I^+$  e a solução ideal negativa  $I^-$  através das fórmulas:

$$I^+ = (I_1^+, I_2^+, \dots, I_k^+),$$

$$I^- = (I_1^-, I_2^-, \dots, I_k^-), \text{ onde } I_t^+ = \max_i \{ D_{it} \} \text{ e } I_t^- = \min_i \{ D_{it} \}, \text{ com } t = 1, 2, \dots, k.$$

- Calcular a distancia das diferentes alternativas versus  $I^+$  e  $I^-$

Os índices de aproximação e de dispersão foram usados para calcular a distância das diferentes alternativas em relação às soluções ideais positiva e negativa  $I^+$  e  $I^-$ . Utilizou-se a notação  $A_i^+$  e  $A_i^-$  para representar a distancia da alternativa  $A_i$  em relação a  $I^+$  e  $I^-$ , respectivamente.

$$\text{Assim, foi definido } A_i^+ = \sum F_{it}^+, \text{ } i = 1, 2, \dots, m; \text{ } t = 1, 2, \dots, k \text{ e}$$

$$A_i^- = \sum F_{it}^-, \text{ } i = 1, 2, \dots, m; \text{ } t = 1, 2, \dots, k, \text{ onde}$$

$$F_{it}^+ = 1 - \sigma(D_{it}, I_t^+) \text{ e } F_{it}^- = 1 - \sigma(D_{it}, I_t^-), \forall i = 1, 2, \dots, m; \text{ } t = 1, 2, \dots, k \text{ e}$$

$$\sigma(D_{it}, \Gamma^+) = \left[ \frac{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \wedge f_{I^+}(x))}{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \vee f_{I^+}(x))} \right],$$

$$\sigma(D_{it}, \Gamma) = \left[ \frac{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \wedge f_{I^-}(x))}{\sum_{x \in P_x} (f_{D_{it}}(x) \vee f_{I^-}(x))} \right],$$

onde  $P_x$  representa uma partição do intervalo  $[0,1]$ . Na prática, essa partição  $P_x$  é dada subjetivamente pelos tomadores de decisão. Quanto mais refinado for essa partição, mais preciso será a representação de  $\sigma(D_{it}, \Gamma^+)$  e  $\sigma(D_{it}, \Gamma)$ .

Observação:  $\sigma(A, B)$  e  $1 - \sigma(A, B)$  são chamados índices de aproximação e de dispersão de dois números difusos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

- Calcular o valor de aproximação relativa das diferentes alternativas em relação a  $\Gamma^+$

Considerando  $A_i^*$  para denotar o valor de aproximação relativa da alternativa  $A_i$  versus a solução ideal positiva  $I^+$ . Definiu-se  $A_i^* = A_i^- / (A_i^+ + A_i^-)$ , com  $0 \leq A_i^* \leq 1$  e  $i = 1, 2, \dots, m$ .

O maior valor de  $A_i^*$  corresponde à melhor alternativa  $A_i$  para o processo de tomada de decisão.

### 3.2. Os Dados do Problema:

Foi estudado uma situação real do Zoneamento Ecológico Econômico – ZEE do Acre. Como deve ficar claro o mapa do Estado não interessa como um todo, já que nele constam regiões que correspondem a cidades, áreas de preservação, áreas indígenas e outras. Além do que, existem regiões com o uso da terra bem definido e em plena atividade (propriedades particulares).

Dessa forma, a partir do Mapa Fundiário do Estado, foi destacado a área correspondente à Regional Tarauacá/Envira e definido, dentre as áreas que pertencem ao INCRA (União), quais delas são as melhores para a instalação de um Pólo Agroflorestal na região.

Este primeiro estudo, apesar de importante para a tomada de decisão, pois define o conjunto de decisão, não pode ser considerado definitivo, por razões claras de que as áreas obtidas podem ser totalmente dispersas e espalhadas pelo mapa, além de serem áreas muito grandes para o propósito de instalação do Pólo. Tal situação causa então um problema de Incerteza no Conjunto de Decisão, sobre qual dessas áreas é a melhor, ou seja, sobre o grau de pertinência ao conjunto.

Deve ser ressaltado que o resultado foi obtido a partir do Mapa Fundiário (do INCRA) e que este resultado não foi objeto de análise da primeira etapa de estudos do ZEE-AC. Além disso, os critérios aqui estabelecidos para a tomada de decisão foram apenas técnicos, não levando-se em consideração os aspectos políticos envolvidos com a mesma.

Assim sendo, o problema foi dividido em duas fases:

**Fase 1:** Foi efetuado o cruzamento do Mapa Fundiário da regional Tarauacá/Envira com os mapas mais importantes relacionados ao uso da terra: tipos de solo, vegetação e

aptidão agroflorestal, levando-se em consideração duas restrições, áreas com declividade acentuada (maior que 30%) e vizinhas de áreas indígenas. Este estudo levou ao conjunto de decisão.

**Fase 2:** Foi Aplicado o MCDM difuso baseado nos conceitos de pontos ideal e anti-ideal, envolvendo aspectos sócio-econômicos como critérios nas áreas indicadas na primeira fase, com o objetivo levantar o grau de pertinência ao conjunto de decisão.

### **3.3. As Ferramentas de Análise**

Para resolver o problema foram utilizados como ferramentas um sistema de software SIG com SSD o qual definiu um Conjunto de Decisão e em seguida foi aplicado o MCDM difuso baseado nos conceitos de pontos ideal e anti-ideal, como estratégia de decisão na busca da melhor alternativa do conjunto.

### **3.4. Implementação**

O problema está bem caracterizado por dois momentos distintos, num primeiro momento, foi realizada uma implementação computadorizada utilizando um conjunto de sistemas de software SIG chamados Arc/Info e ArcView. Em seguida, a partir do conjunto de decisão encontrado, foi resolvida a segunda parte algoritmicamente, utilizando a ferramenta MCDM difuso baseado nos conceitos de ideal e anti-ideal.

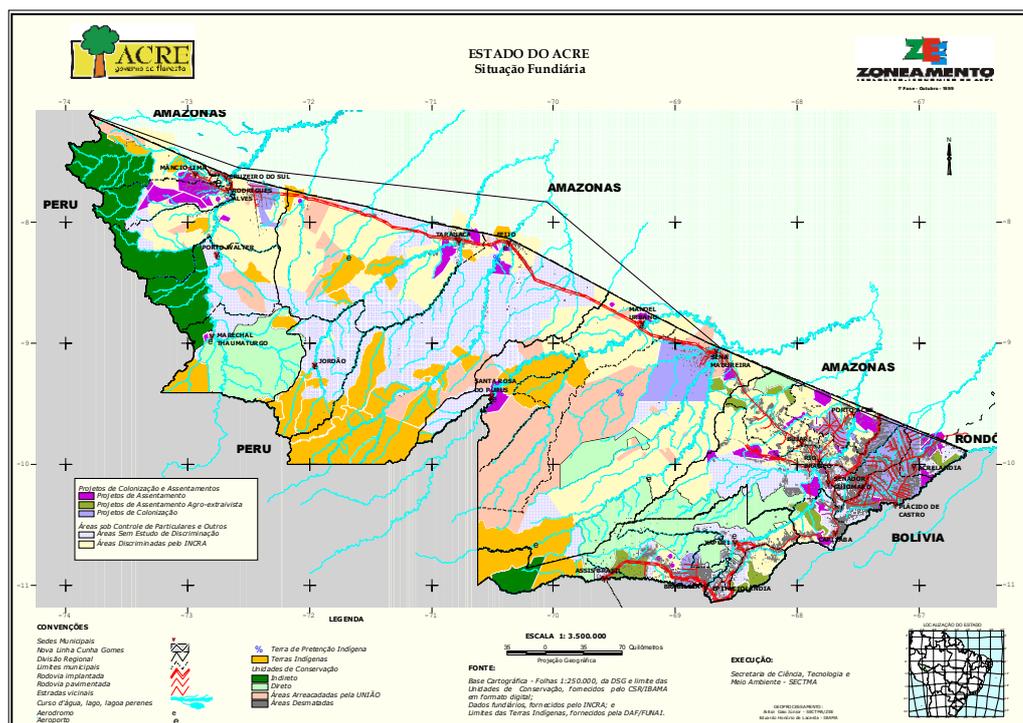
## CAPÍTULO IV

### APLICAÇÃO DO MODELO E ANÁLISE DO RESULTADO

#### 4.1. Aplicação do Modelo: (Metodologia)

##### Fase 1: Obtenção do Conjunto de Decisão

Como passo inicial foi utilizado o Mapa Fundiário do Estado, representado na Figura – 09, cedido pelo ZEE-AC, onde estão determinados seis tipos de áreas quanto à posse da terra: Projetos de Assentamentos; Projetos de Assentamentos Agro-Extrativistas; Projetos de Colonização; Terras Indígenas; Áreas sem Estudos de Discriminação; e, Áreas Discriminadas Pelo INCRA (da União).



**Figura 09 - Mapa Fundiário do Estado do Acre.**

Todo o trabalho de corte e cruzamento foi realizado na escala original dos Mapas, 1 : 1.000.000, tendo sido realizado a redução para a escala 1 : 1.400.000 apenas no momento de exportá-los para o Word, em razão de ser a maior escala que conseguimos imprimi-los em papel A4.

Foi recortado a parte do Mapa Fundiário correspondente à área da Regional Tarauacá/Envira, mantendo os mesmos tipos de áreas. Essa representação está na Figura – 10:

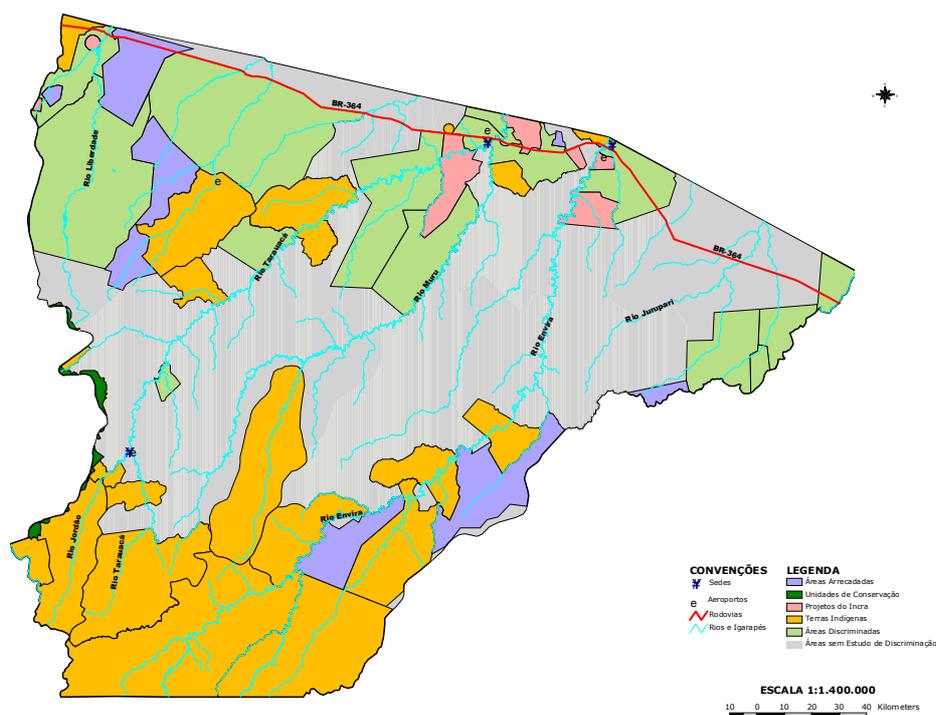
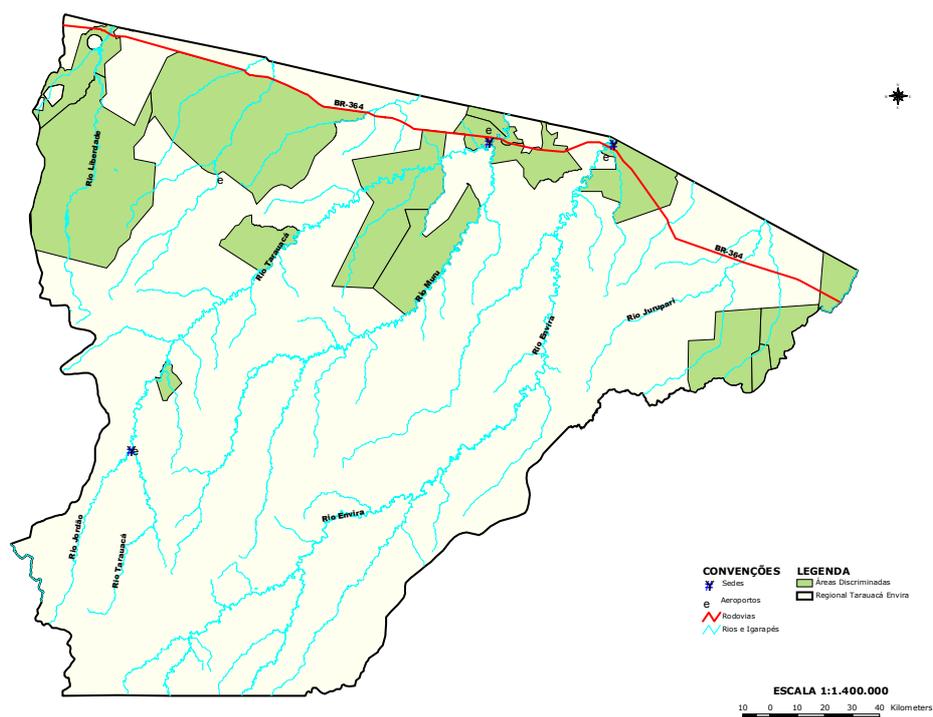


Figura 10 - Mapa Fundiário da Regional Tarauacá/Envira

Como o interesse aqui é apenas com as áreas dessa regional discriminadas pelo INCRA, foi representado pela Figura – 11, uma nova legenda destacando tão somente aquelas áreas.



**Figura 11 - Áreas Discriminadas Pelo INCRA**

Em seguida, foi realizado o cruzamento entre os Mapas Fundiário e de Solos, apresentando as áreas discriminadas com sua Pedologia, o qual está representado na Figura - 12. O Mapa Exploratório de Solos tem sua fonte e classificação original do RADAMBRASIL 1977 (*realizado pelo DNPM para o programa de integração nacional*) e foi digitalizado na escala 1:1.000.000 no SIG Arc/Info 7.1.2.

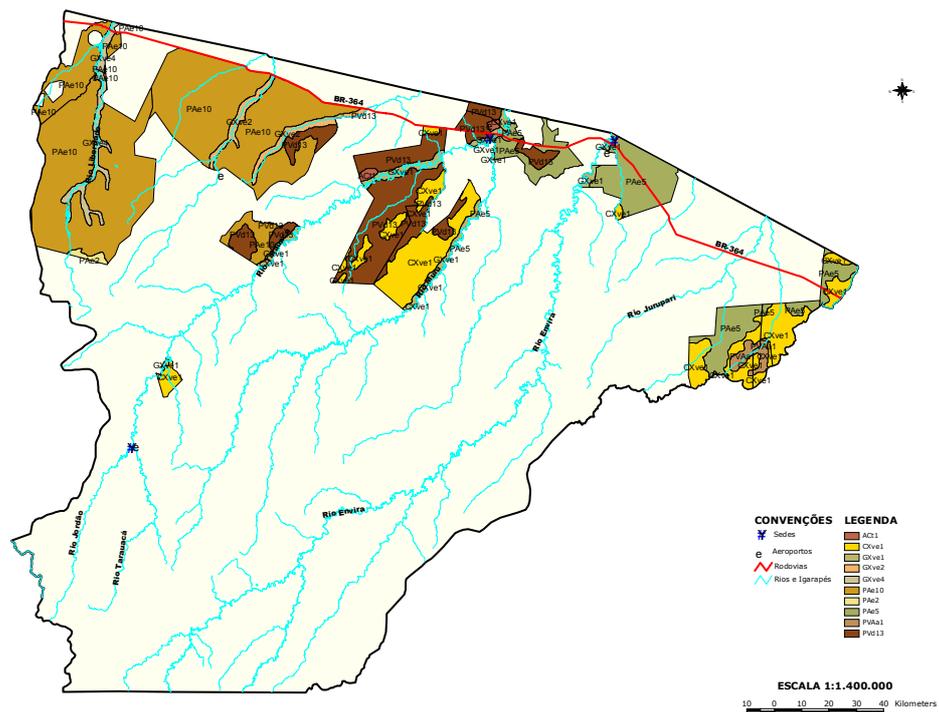
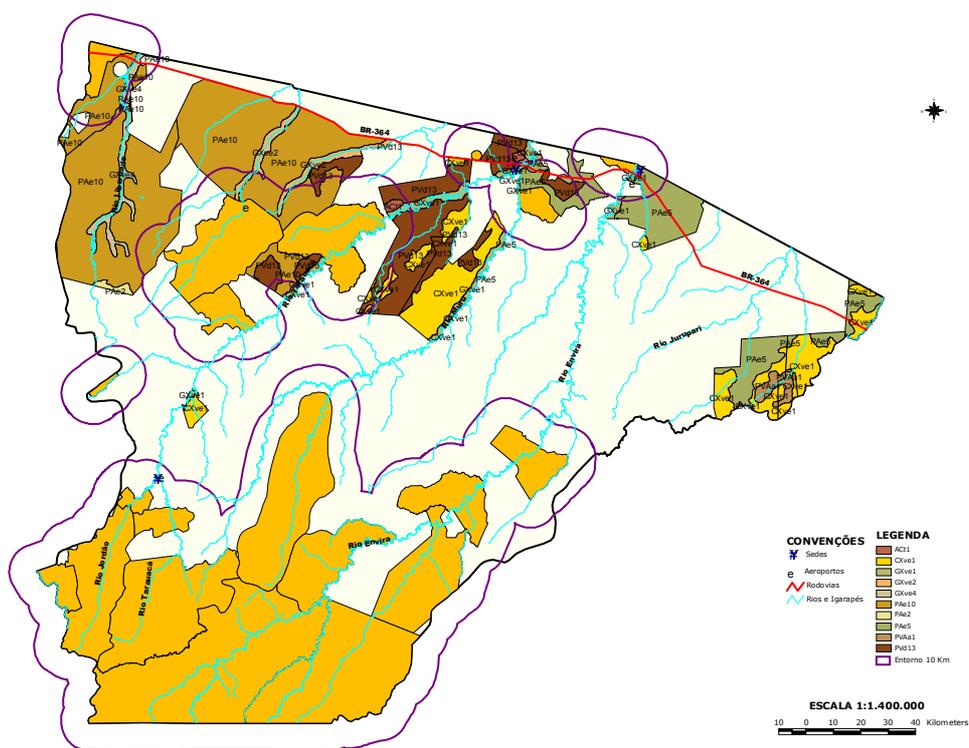


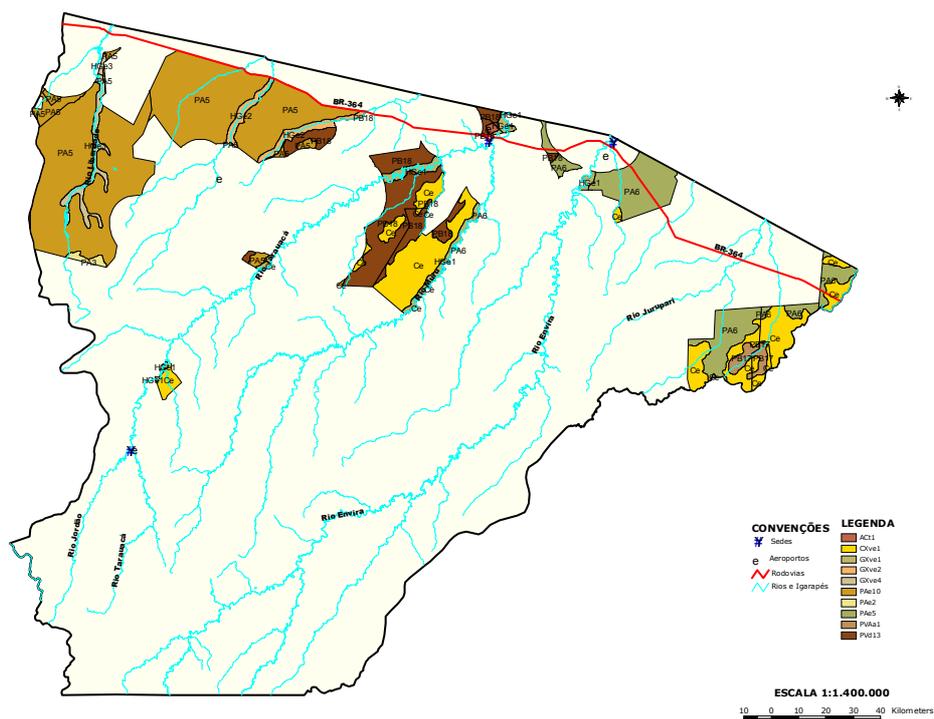
Figura 12 - Mapa R1 (Res. do Cruzamento dos Mapas Fundiário X Solos)

Como para outros projetos e atividades como Reserva Extrativista, Plano de Manejo, etc., são mantidos os limites de contorno de 10 km para terras Indígenas, foi efetuado essa mesma restrição. Muito embora, para a presente atividade nada exista oficialmente. Os contornos de representação destes limites estão expressos através da Figura – 13.



**Figura 13 - Mapa R2 (R1 Cruzado Com Lim. de 10 km Para Terras Indígenas)**

As áreas constantes do mapa objeto da Figura - 14, resultado de todos os cruzamentos e restrições efetuados, serão o objeto de aplicação dos critérios que a serem estabelecidos.



**Figura 14 - Mapa RF (Resultado Final)**

O Banco de Dados que consta do ANEXO I, Tabela - 07, é o detalhamento do Mapa RF. Conforme pode ser observado no mesmo, foram selecionadas 90 (noventa) áreas distintas sobre as quais incidirão os critérios:

Em razão de tratar-se de um estudo preliminar, e de uma escala incompatível com o detalhamento que a implantação da atividade requer, foram levados em consideração para definição dos critérios da Fase 2 apenas aspectos marcantes das características da terra, como: Pedologia, Aptidão Agroflorestral, Relevo e Drenagem, deixando detalhes importantes como Estrutura e Composição do Solo (Profundidade, PH, Elementos Químicos, etc) para o caso de se querer transformar o objeto de estudo em realidade, o que seguramente implicará em estudos muito mais minuciosos sobre as áreas aqui analisadas.

**- Crêterios**

1. PEDOLOGIA: Alissolo, Cambissolo, Gleissolo, Latossolo, Nitossolo, Argissolo e Luvisolo.

2. APTIDÃO AGROFLORESTAL: Produ o intensiva de grãos, monocultivos, sistemas agroflorestrais, agrosilvipastoris, sem aptidão e preserva o.

3. RELEVO: Plano, plano a suavemente ondulado, suavemente ondulado a ondulado, ondulado, ondulado a fortemente ondulado.

4. DRENAGEM: Bem a moderadamente drenado, moderadamente drenado, moderado a mal drenado, moderado a imperfeitamente drenado, imperfeitamente a mal drenado e imperfeitamente drenado.

5. DISTÂNCIA DA ESTRADA: Maior que 10 quil metros.

- Aplicação de Números Difusos aos Critérios da Fase 1

Além da Tolerância Difusa que estabelece o nível de segurança com que pode-se afirmar o grau de pertinência de um ponto a um mapa, tem-se nesta Fase 1 do trabalho a aplicação de números difusos aos critérios estabelecidos. Isto porque, por enquanto os computadores ainda não entendem a linguagem corrente de uma expressão como: “moderadamente drenado”. Assim sendo, para que o computador entenda os critérios, cada um é associado a um número difuso.

Todas as ferramentas SIG utilizam a idéia de número *fuzzy*. Algumas no entanto, fornecem os valores iniciais em bytes que variam de 0 a 255. Neste caso, antes de aplicar o método é efetuado uma conversão de (0-255) para (0.00-1.00). Assim, por exemplo, 13 bytes corresponderiam a 0.05, aproximadamente.

Apesar de cada uma dessas ferramentas ter uma fórmula para calcular, de forma adequada, os números difusos, qualquer uma delas fornece valores bem próximos. Uma fórmula que pode ser sugerida é, por exemplo, o da Tabela - 05:

<b>Ling.Natural</b>	<b>V.Estabelecido</b>	<b>V.Em Decimais</b>	<b>Dec.Proporcional</b>	<b>Número Difuso</b>
Minúsculo	1/4	0.250	0.063	(0.0, 0.1, 0.1, 0.2)
Muito Pequeno	1/3	0.333	0.111	(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)
Pequeno	½	0.500	0.250	(0.2, 0.3, 0.3, 0.4)
Médio	1	1.000	0.500	(0.3, 0.5, 0.5, 0.7)
Grande	2	2.000	0.667	(0.5, 0.7, 0.7, 0.8)
Muito Grande	3	3.000	0.750	(0.7, 0.8, 0.8, 1.0)
Enorme	4	4.000	1.000	(0.8, 1.0, 1.0, 1.0)

**Tabela 05 - Número difuso trapezoidal obtido pela razão do anterior.**

Assim, podem ser estabelecidos para os critérios 3 e 4 da Fase 1, números difusos do tipo, mostrado na Tabela - 06:

<b><u>Critério:</u></b>	<b><u>Número Difuso:</u></b>
Plano	(0.8, 0.9, 0.9, 1.0)
Plano a suavemente ondulado	(0.5, 0.7, 0.7, 0.9)
Suavemente ondulado a ondulado	(0.3, 0.5, 0.5, 0.7)
Ondulado	(0.2, 0.4, 0.4, 0.6)
Ondulado a fortemente ondulado	(0.0, 0.2, 0.2, 0.4)
Bem a moderadamente drenado	(0.6, 0.8, 0.8, 1.0)
Moderadamente drenado	(0.5, 0.7, 0.7, 0.9)
Moderado a mal drenado	(0.2, 0.4, 0.4, 0.6)
Moderado a imperfeitamente drenado	(0.2, 0.4, 0.4, 0.6)
Imperfeitamente a mal drenado	(0.0, 0.2, 0.2, 0.4)
Imperfeitamente drenado.	(0.0, 0.0, 0.0, 0.2)

**Tabela 06 - Números Difusos estab. para os critérios 3 e 4 da Fase 1.**

- Aplicação dos critérios 3 e 4

1º Passo: Aplicar o critério 3 eliminado as áreas de relevo ondulado e ondulado a fortemente ondulado;

2º Passo: Aplicar o critério 4 eliminado as áreas que apresentam drenagem: moderado a mal drenado, moderado a imperfeitamente drenado, imperfeitamente a mal drenado, moderado a imperfeitamente drenado, imperfeitamente a mal drenado e imperfeitamente drenado.

Após a aplicação destes dois critérios, das 90 áreas que existiam, foram eliminadas 73 áreas, tendo assim 17 áreas apresentado RELEVO: plano, plano a suavemente ondulado e suavemente ondulado a ondulado e DRENAGEM: bem a moderadamente drenado e moderadamente drenado.

Essas áreas estão representadas de forma contígua por 8 (oito) áreas do Mapa RF34, mostrado na Figura - 15:

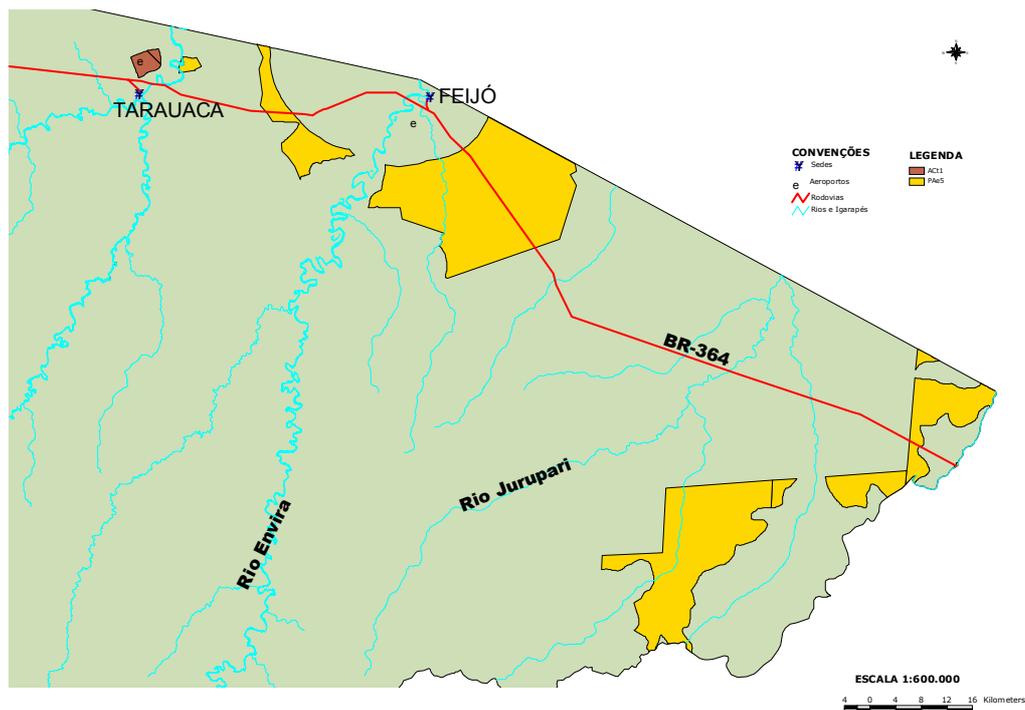


Figura 15 - Mapa RF34. Resultado da Aplicação dos Critérios 3 e 4.

- Aplicação dos critérios 1 e 2

De acordo com o Relatório Final sobre Solos e Aptidão Agroflorestal do ZEE-AC, os dados do Mapa de Aptidão Agroflorestal do Estado demonstram que mais de 85% (oitenta e cinco por cento) das terras do Acre têm aptidão para o cultivo de espécies florestais e frutíferas, sendo 44,3% (quarenta e quatro vírgula três por cento) em monocultivos e 41,0% (quarenta e um por cento) com ênfase em sistemas agroflorestais. Sendo portanto, altamente viáveis projetos de atividades como os Pólos Agroflorestais. Para melhor entendimento, ver os grupos de possibilidades de uso da terra na Tabela – 07:

Grupos	Preservação	Sem Aptidão	Pastagem	Sistemas Agroflorestais	Monocultivos	Agricultura Intensiva
1						XXXXXXXX
2					XXXXXX	
3				XXXXXX		
4			XXXXX			
5		XXXXXX				
6	XXXXXX					

**Tabela 07 - Tabela de possibilidades de uso de acordo com a aptidão.**

Na Regional do Tarauacá/Envira (área que foi estudada) o comportamento é semelhante. Assim sendo, e como existe uma “casamento” entre as classes de solo e as aptidões, foram eliminados do processo tão somente as áreas que tinham na composição de sua aptidão agroflorestal maior possibilidades de uso referentes aos Grupos 4 e 5 (4p e 5n), (Amaral, et Al., 2000), já que nessas terras não existem os grupos de aptidão 1 e 6. O resultado da eliminação destes grupos estão na Figura – 16.

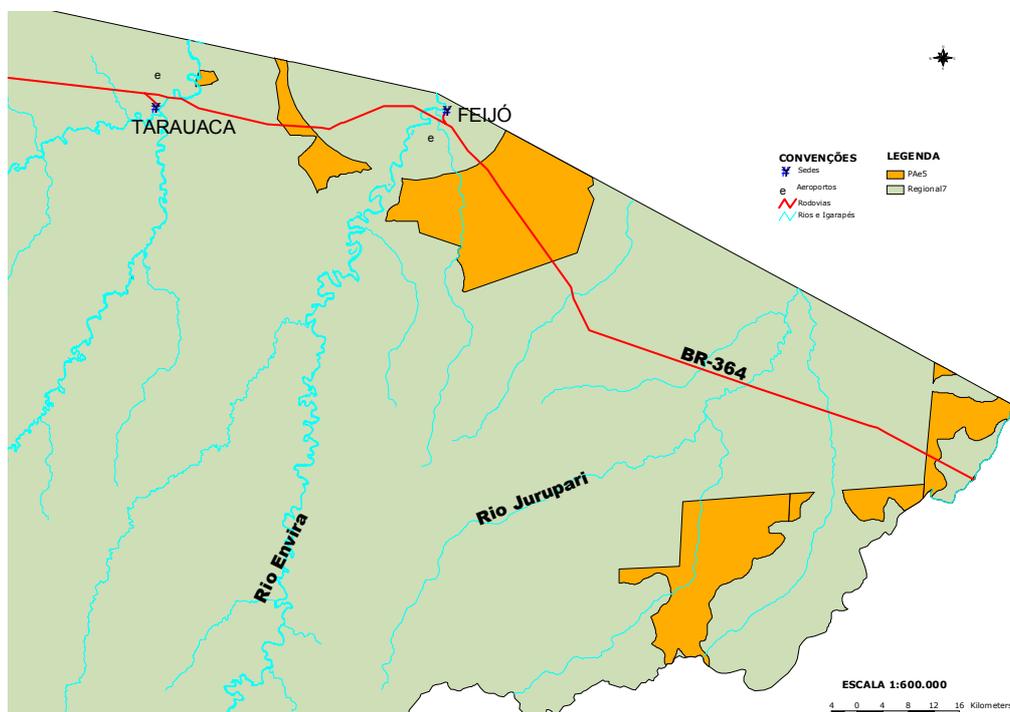
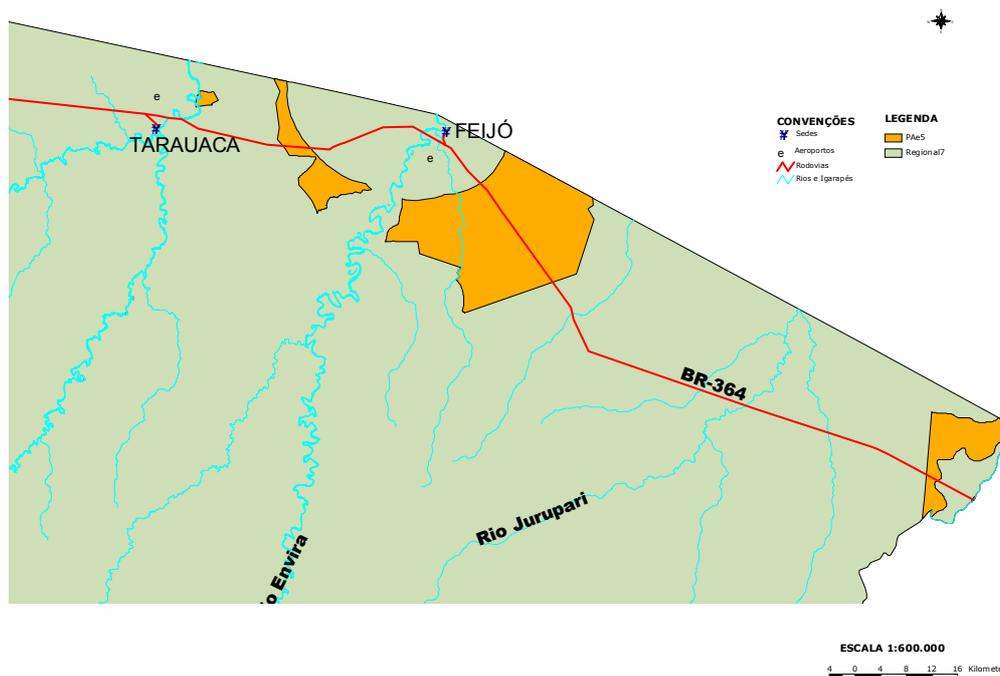


Figura 16 - Mapa RF12. RF34 mais Aplicação dos Critérios 1 e 2.

- Aplicação do critério 5

Este critério foi estabelecido em razão da dificuldade de escoamento da produção dos Pólos e da elevação dos custos de investimento. O mapa resultado, representado na Figura – 17 e o banco de dados constante da Tabela - 08, representam o resultado final da fase 1 deste trabalho, onde foram selecionadas 11 (onze) áreas, contíguas em quatro, sobre as quais serão aplicados os critérios sócio-econômicos correspondentes à Fase 2 do trabalho:



**Figura 17 - Mapa Final da Fase 1.**

Código Área	Tamanho em m	Código Solo	Aptidão
21	72950096.000	PAe5	2a,2a,5N
26	5804780.500	PAe5	2a,2a,5N
28	360806.625	PAe5	2a,2a,5N
32	123515.852	PAe5	2a,2a,5N
38	453243104.000	PAe5	2a,2a,5N
54	102471.195	PAe5	2a,2a,5N
56	1526.242	PAe5	2a,2a,5N
57	59993.336	PAe5	2a,2a,5N
59	29314.035	PAe5	2a,2a,5N
66	91696168.000	PAe5	2a,2a,5N
72	235791.188	PAe5	2a,2a,5N

**Tabela 08 – Banco de dados final da Fase 1.**

Para melhor identificação das 4 áreas, as mesmas foram codificadas, da esquerda para a direita, como  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ , sendo assim o Conjunto de Decisão a ser ordenado na Fase 2 representado por  $\mathbf{A} = \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$ .

## - Fase 2: Seleção da Melhor Área Utilizando Critérios Sócio-Econômicos

Como não foi possível montar um Comitê tendo como base a CEZEE, foi pesquisado com vários técnicos envolvidos com este tipo de trabalho, com o objetivo de tornar o estudo o mais real possível, e para solucionar o problema considerou-se um Comitê hipotético com quatro tomadores de decisão  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$ , mas que retratam todas as opiniões desses técnicos.

O estabelecimento dos critérios e alternativas, bem como o desenvolvimento do algoritmo fazem parte do ANEXO II. Conforme pode ser observado, este desenvolvimento levou à ordenação do conjunto A da Fase 1, conforme representado abaixo:

$$\mathbf{A}^* = \{ A_3^*, A_2^*, A_4^*, A_1^* \}.$$

### ***4.2. Análise de Resultado***

Os critérios aplicados na Fase 1, proporcionaram um número de áreas ideal para o desenvolvimento da outra fase do trabalho. Além disso, as áreas obtidas apresentam um único tipo de aptidão agroflorestal (monocultivo), fazendo com que um dos fatores socio-econômicos mais complicados de ser avaliado, que é a produção, perdesse a importância no contexto já que o tipo de atividade a ser desenvolvida em qualquer das áreas é idêntico.

O resultado obtido na ordenação do conjunto está totalmente dentro do esperado, visto que a alternativa  $A_3$  é a que reúne os melhores requisitos para que se proceda estudos mais aprofundados com vistas à implantação do Pólo, pois fica situada à beira da estrada principal, a apenas 9 km de uma das cidades e apresenta o maior número de pessoas disponíveis para a terceirização. A alternativa  $A_2$  apesar de estar bem situada entre as duas

idades, a distancia é de 19 km para uma e 21 km para a outra, fazendo com que os critério energia elétrica seja maior que  $A_3$ , além de possuir menos pessoas disponíveis. A alternativa  $A_4$  foi considerada muito afastada das cidades, tendo ficado na frente da alternativa  $A_1$  somente por ficar à beira da estrada principal, visto que construir um ramal de mais de 4 km encarece o custo de investimento, além de dificultar consideravelmente o escoamento da produção, especialmente na época invernososa.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 5.1. Conclusões

A seleção das quatro áreas na Fase 1 do trabalho foi realizada com base no uso da terra, utilizando-se mapas originais do ZEE-AC em uma escala muito pequena, 1 : 1.000.000, o que permitiu a obtenção de áreas muito grandes para a proposta de implantação de um Polo. No entanto, como o método é perfeitamente válido, o que deve ser feito é uma avaliação mais detalhada das áreas obtidas com a finalidade de obter alternativas mais consolidadas para o tomador de decisão. Ressalte-se ainda, que existem hoje no campo de SIG várias ferramentas que utilizam a lógica difusa no suporte a decisão com muito maior clareza. Como exemplo, pode-se citar o *Idrisi for Windows*, que por ser um SIG mais simples que Arc/Info e ArcView, nem por isso menos eficiente, as aplicações difusas ficam bastante mais claras. O motivo do Idrisi não ter sido utilizado foi exclusivamente por questões técnicas, já que a exportação dos mapas para o mesmo, exigiria uma nova montagem do banco de dados, o que demandaria enorme quantidade de tempo.

Sobre a ordenação pode-se dizer que o método aplicado mostrou-se altamente eficiente, pois como já foi observado, levando em consideração as áreas e os critérios aplicados, a expectativa de ordenação seria realmente a que foi encontrada. Sendo portanto, um método que apesar de exigir uma série de conhecimentos sobre operações e lógica difusa, é fortemente recomendado para situações de tomada de decisão em que existem dúvidas sobre a melhor alternativa.

Em relação ao estabelecimento dos critérios socio-econômicos que tencionou-se aplicar, não foi avaliado a produção de um Pólo, por um fato simples. Apesar de ser um

dato altamente importante em qualquer avaliação sócio-econômica que se queira fazer, no caso presente ela não afetaria a ordenação das alternativas, visto que as quatro áreas obtidas na Fase 1 apresentam o mesmo tipo de aptidão agroflorestal (aptidão regular para cultivo de espécies florestais e frutíferas em monocultivos no nível tecnológico A-primitivo).

Como já foi mencionado, o método aqui aplicado é válido para qualquer tipo de seleção de áreas, devendo-se apenas definir e avaliar de forma coerente e adequada, os critérios fundamentais e os pesos (importância) de cada um. Assim sendo, independe se o que será implantado é um Distrito Industrial, uma Reserva Extrativista, um Pólo Moveleiro ou qualquer outro. Neste problema foram definidos como critérios da Fase 1 os elementos básicos de um estudo preliminar de uso da terra, e os estabelecidos para a Fase 2 são critérios sócio-econômicos fundamentais ao estudo da situação presente.

## **5.2. *Recomendações***

O primeiro fato que deve ser chamado a atenção é que , apesar da metodologia aplicada ser perfeitamente válida, a base onde a mesma foi aplicada está em uma escala muito pequena para que se tenha uma precisão satisfatória. Para se ter uma idéia, conforme o que consta sobre tolerância difusa, o raio de divergência de um “pixel” na escala 1 : 1.000.000 chega a mais de 50 m.

Assim sendo, este trabalho deve ser a base para estudos mais detalhados, em escalas adequadas, de mapas específicos das áreas obtidas (1 : 50.000, por exemplo), já que as mesmas são muito grandes para o propósito de um Pólo Agroflorestal (apenas a área A<sub>1</sub> apresenta 580 hectares, as outras três apresentam mais de 7.000 ha), significando que pode-se procurar nas mesmas um local ideal para a instalação de um Pólo, inclusive com estudos detalhados de solo que permitam apurar erosão, declividade, permeabilidade, textura, pH, etc.

Com relação à área A<sub>3</sub>, que obteve o maior ranqueamento, deve-se fazer uma observação que é a única que com base na população cadastrada pela Fundação Nacional de Saúde FNS98, onde constam cinco comunidades (seringal e colocações) o que deve ainda ser levado em consideração no caso de estudos mais aprofundados sobre o local adequado.

Para a realização de outros trabalhos utilizando o mesmo método sugere-se que esteja bem definido uma Comissão real seja responsável para, no papel de Comitê, definir critérios, avaliações lingüísticas e pesos dos mesmos, o que tornará o processo bem mais transparente.

A terra é generosa desde que usada adequadamente.

## GLOSSÁRIO

<b>Agricultura de Precisão</b>	Forma de tratar a agricultura com alta tecnologia, com o objetivo de reduzir custos e maximizar o uso da terra.
<b>Agricultura intensiva</b>	Desenvolvida com alto grau de tecnologia, onde se desembolsa valores elevados para investimento.
<b>Banco de Dados</b>	Conjunto de informações padronizadas e organizadas que são armazenadas em um meio magnético para manipulação.
<b>CEZEE</b>	Comissão Estadual de Zoneamento Ecológico-Econômico. Instância máxima de deliberação e definição de diretrizes do ZEE-AC.
<b>Comitê hipotético</b>	Comitê criado para avaliar as alternativas e definir os pesos da Fase 2 do trabalho, na impossibilidade de reunir a CEZEE.
<b>Conjunto crisp</b>	Tipo de conjunto que pode ser fuzificado.
<b>Contíguas</b>	Áreas diferentes do ponto de vista de alguns aspectos, mas que estão interligadas fazendo parte de um todo.
<b>dBASE</b>	Um tipo de banco de dados.
<b>DNPM</b>	Departamento Nacional da Produção Mineral.
<b>El Nino</b>	Fenômeno que ocorre com o aquecimento das águas do Oceano Pacífico.
<b>ESRI</b>	Instituto de Pesquisa em Sistemas Ambientais.

<b>Frame de Decisão</b>	Conjunto de alternativas existentes, antes de serem aplicados os critérios.
<b>FUZZY</b>	Difuso.
<b>GPS</b>	Sistema de Posicionamento Global.
<b>INCRA</b>	Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária.
<b>Matriz de decisão</b>	Matriz resultado do produto entre as matrizes dos pesos e das avaliações linguísticas dos critérios.
<b>Matriz <math>m \times k</math></b>	Matriz que possui $m$ linhas e $k$ colunas.
<b>Max(a,b,c,d)</b>	Maior valor entre os números a, b, c, d.
<b>MCDM</b>	Multiplos Critérios para a Tomada de Decisão
<b>Medida fuzzy</b>	Medida difusa.
<b>Min(a,b,c,d)</b>	Menor valor entre os números a, b, c, d.
<b>Monocultivos</b>	Exploração de espécies como a pupunha, a pimenta longa, o café, etc. O que pode ser feito tanto por médios produtores, como por comunidades do tipo dos Polos Agroflorestais.
<b>Pastagem</b>	Áreas que podem ser exploradas com a atividade pecuária.
<b>Polo Agroflorestal</b>	Tipo de atividade rural criada com o objetivo de fixar o homem no campo de forma mais consistente.
<b>Preservação</b>	Áreas com fortes restrições morfológica ou de relevo, áreas de preservação permanente, ou onde habitem espécies endêmicas e ameaçadas de extinção.
<b>Proportional error</b>	Tipo de avaliação de erro onde é feita uma proporcionalidade entre certas variáveis.

<b>Ranquear adequadamente uma matriz <math>m \times k</math></b>	Para cada valor fixo de $k$ , encontrar os valores máximo e mínimo da coluna.
<b>Root mean square error</b>	Tipo de avaliação de erro que utiliza a raiz quadrada de um quociente.
<b>Sem Aptidão</b>	Terras que não podem sofrer exploração florestal, a não ser através de Planos de Manejo ou desmatamentos autorizados.
<b>SIG</b>	Sistema de Informações Geográficas
<b>Sistemas Agroflorestais</b>	Uso diversificado do solo, através do consorciamento entre plantas e animais, de forma a dinamizar ao máximo a produção.
<b>SOFTWARE</b>	Conjunto de programas ou sistemas que são executados em um computador.
<b>Solução ideal negativa</b>	Conjunto formado pelos valores mínimos de cada coluna da matriz de decisão.
<b>Solução ideal positiva</b>	Conjunto formado pelos valores máximos de cada coluna da matriz de decisão.
<b>SSD</b>	Sistema de Suporte à Decisão.
<b>T-Norma e T-CoNorma</b>	Relacionamento triangular entre os operadores de interseção, união e negação utilizando as leis de De Morgan.
<b>Word</b>	Aplicação para editoração eletrônica de textos.
<b>ZEE-AC</b>	Zoneamento Ecológico-Econômico do Estado do Acre. Mecanismo criado com o objetivo de instituir toda política ambiental do Estado.

## BIBLIOGRAFIAS

- Albertos, P., (1992)** *Fuzzy Controllers – All Techniques in Control*. Pergamon Press.
- Alonso, W., (1968)** Predictiing Best with Imperfect Data. In: *Journal of the American Institute of Planners* 34, 248-255.
- Altrock, C.V., (1995)** *Fuzzy Logic & NeuroFuzzy Applications Explained*. Prentice-Hall PTR.
- Alves, D.S., (1994)** Modelo de Dados para Sistemas de Informações Geográficas. In: *Tese de Doutorado*, São José dos Campos, SP: USP..
- Alves, D.S., (1990)** Sistemas de Informação Geográfica. In: *SIMPÓSIO BRASILEIRO DE GEOPROCESSAMENTO, 1.*, São Paulo.Anais... USP.
- Amaral, E., et Al., (1999)** Polos Agroflorestais: A Base para a Produção Sustentada Usando o Conhecimento da Floresta
- Amaral, E., et Al., (2000)** Relatório Final do ZEE sobre Solos e Aptidão Agroflorestal.
- Antenucci, J. C.; et Al., (1991)** *Geographic Information Systems: A guide to the technology*. Van Nostrand Reinhold.
- Aronof, S., (1989)** *Geographic Information Systems: a management perspective*. WDL Publications. Canada.
- Bajalinov, Erik B., (1998)** On an approach to the modelling of problems connected with conflicting economic interests. In: *European Journal of Operational Research* 116 (1999) 477-486.
- Beaulieu, Denis, (1995)** *Geomatics in Canada*. Geomatica, Canada, v. 49, n.1, p. 124-128.
- Boender, C.G.E.; Graan, J.G.; Lootsma, F.A., (1989)** Multi-attribute decision analysis with fuzzy pairwise comparisons. In: *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 133±143.
- Bonissone, P.P.; Decker, K., (1986)** Uncertainty in Artificial Intelligence. In: *North-Holland: Elsevier Science*.
- Bortolan, G.; Degani, R., (1985)** A review of some methods for ranking fuzzy subsets. In: *Fuzzy Sets and Systems* 15 (1985) 1±19.

- Buckley, J.J.; S. Chanas, (1989)** A fast method of ranking alternatives using fuzzy numbers. In: *Fuzzy Sets and Systems* 30 (1989) 337±338.
- Burrough, P. A., (1986)** *Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assesment*. Oxford: Clarendon Press.
- Câmara, Gilberto, (1994)** Tese de Doutorado em Análise de Arquiteturas para Bancos de Dados Geográficos Orientados-a-Objetos. São José dos Campos, SP: USP.
- Carver, S.J., (1991)** Integrating Multi-Criteria Evaluation with Geographical Information Systems. In: *International Journal of Geographical Information Systems* 5, 3,321-339.
- Chen, S.H., (1985)** Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set. In: *Fuzzy Sets and Systems* 17 (1985) 113±129
- Chen, S.J.; Hwang, C.L., (1992)** *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications*. Springer, Berlim.
- Cheng, C.H.; Mon, D.L., (1994)** Evaluating weapon system by analytical hierarchy process based on fuzzy scales. In: *Fuzzy Sets and Systems* 63 (1994)1±10.
- Clemens, M.A.; ReVelle, C.S.; Williams, J.C., (1998)** Reserve design for species preservation. In: *European Journal of Operational Research* 112 (1999) 273-283.
- Congalton, R.G., (1991)** A Review of Assessing the Accuracy of Classifications of Remotely Sensed Data. In: *Remote Sensing and the Environment* 37, 35-46.
- Cowen, David J., (1998)** GIS versus CAD versus DBMS: What area the differences?. In: *Photogrammetria Engineering and remote sensing*. [S.1], v. 4, n 11, p. 1551-1555.
- Cox, Earl, (1994)** *The Fuzzy Systems Handbook: A Practitioner's Guide to Building, Using, and Maintaining Fuzzy Systems*. AP Professional.
- Driankov, D.; Hellendoorn, H.; Reinfrank, M., (1993)** *Introduction to Fuzzy Control*, Springer-Verlag.
- Dubois, D.; Prade, H., (1978)** Operations on fuzzy numbers. In: *Int. J. System Sci.* 9 (1978) 613±626.
- Dubois, D; Prade, H., (1982)** "A Class of Fuzzy Measures Based on Triangle Inequalities".
- Eastman, et. Al., (1993)** *UNITAR Workbook on Decision Making*
- Eastman, J.R.; Jiang, H., (1996)** "Fuzzy Measures in Multi-Criteria Evaluation".

- Eastman, J.R., (1996)** *Uncertainty and Decision Risk in Multi-Criteria Evaluation: Implications for GIS Software Design.*
- Eastman, J. R., (1997)** *Idrisi for Windows. User's Guide, Version 2.0.*
- ENRI, (1991)** *ENVIRONMENTAL SYSTEMS RESEARCH INSTITUTE. Understanding GIS: The ARC/INFO Method.* Redlands, CA: Environmental Systems Research Institute.
- Escada, Maria Isabel, (1998)** *Aplicação de Técnica Fuzzy em SIG como alternativa para o Zoneamento Ecológico Econômico (ZEE).*
- Felgueiras, Carlos, (s/data)** *Inferências e Estimativas de Incertezas Utilizando Técnicas de Krigagem não-linear.*
- Fiering, B.R., (1986)** *Linear Programming: An Introduction. Quantitative Applications in the Social Sciences, Vol. 60.* (London: Sage Publications).
- Fisher, P.F., (1991)** *First Experiments in Viewshed Uncertainty: The Accuracy of the Viewshed Area.* In: *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing* 57, 10, 1321-1327.
- Goodchild, M.F.; Gopal, S., (1989)** *Accuracy of Spatial Databases.* (London: Taylor and Francis).
- Ignizio, J.P., (1985)** *Introduction to Linear Goal Programming. Quantitative Applications in the Social Sciences, 56,* (London: Sage Publications).
- IMAC, (1999)** *O Zoneamento Ecológico-Econômico do Acre – Diretrizes Básicas*
- Kaufmann, A.; Gupta, M.M., (1991)** *Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Application,* Van Nortrand Reinhold, New York.
- Kim, K.; Park, K.S., (1990)** *Ranking fuzzy numbers with index of optimism.* In: *Fuzzy Sets and Systems* 35 (1990) 143±150.
- Klir, George J.; St.Clair, Ute H.; Yuan, Bo, (1997)** *Fuzzy Set Theory: Foundation and Applications.* Prentice-Hall PTR.
- Klir, George J.; Folger, Tina A., (1988)** *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.* Prentice-Hall International.
- Lee, C. C., (1990)** *Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller, part I and II,* *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics,* vol 20, pp 404-435.
- Lee, N.S.; Grize, Y.L.; Dehnad, K., (1987)** *Quantitative Models for Reasoning under Uncertainty.* In: *Knowledge-Based Expert Systems*

- Liang, G-S.; Wang, M.J., (1994)** Personal selection using fuzzy MCDM algorithm. In: *European J. Oper. Res.* 78 (1994) 22±33.
- Liang, G-S., (1997)** Fuzzy MCDM based on ideal and anti-ideal concepts. In: *European Journal of Operational Research* 112 (1999) 682-691.
- Maeda, H., Murakami, S., (1993)** The use of a fuzzy decision making method in a large-scale computer system choice problem. In: *Fuzzy Sets and systems* 54 (1993) 235±249.
- Maling, D.H., (1989)** *Measurement from Maps: Principles and Methods of Cartography* (Oxford: Pergamon Press).
- Mendel, Jerry M., (1995)** *Fuzzy Logic Systems for Engineering: A Tutorial, Proc. Of the IEEE.* Vol. 83, No. 3, March 95.
- Moellering, H., (1988)** Digital Cartographic Data Quality. In: *The American Cartographer* 15, 1.
- Pedrycz, W., (1989)** *Fuzzy Control and Fuzzy Systems.* John Wiley and Sons Inc, NY.
- Raju, Komaragiri S.; Pillai, C.R.S., (1997)** Multicriterion decision making in performance evaluation of an irrigation system. In: *European Journal of Operational Research* 112 (1999) 479-488.
- Rosenthal, R.E., (1985)** Concepts, Theory and Techniques: Principals of Multiobjective Optimization. In: *Decision Sciences*, 16, 2, 133-152.
- Ruoning, X.; Xiaoyan, Z., (1992)** Extensions of the analytic hierarchy process in fuzzy environment. In: *Fuzzy Sets and Systems* 52 (1992) 251±257.
- Saade, J.J.; Schwanzlander, H., (1992)** Ordering Fuzzy sets over the real line: Na approach based on decision-making under uncertainty. In: *Fuzzy sets and Systems* - 50 (1992) 237-246.
- Slonecker E.T.; Tosta, N., (1992)** National Map Accuracy: Out of Sync Time. In: *Geoinfo Systems* 2, 1, 23-26.
- Stoms, D., (1987)** *Reasoning with Uncertainty in Intelligent Geographic Information Systems*
- Voogd, H., (1983)** *Multicriteria Evaluation for Urban and Regional Planning.* (London: Pion, Ltd.).
- Wang, F., (1990)** “Fuzzy Supervised Classification of Remote Sensing Images”. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 28, 2, 194-201.

- Wang, P.Z., (1990)** *Fuzzy set theory and its application*. China Productivity Center, R.O.C..
- Yager, R. (1988)** “On Ordered Weighted Averaging aggregation operators in multicriteria decision making”. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 8(1): 183-190.
- Zadeh, L.A., (1965)** Fuzzy sets, *Information and Control* 8 (1965) 338±353.
- Zadeh, L.A., (1975)** The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. In: *Part 1, 2 and 3, Inform. Sci.* 8(1975) 199±249, 301±357; 9 (1976) 43±58.
- Zadeh, L. A., (1973)** Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process. In: *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol 3, pp 28-44.
- Zeleny, M., (1982)** *Multiple criteria decision making*, McGraw-Hill, New York.
- Zimmermann, H.J., (1994)** *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, 2<sup>nd</sup> Edition, Kluwer Academic Publishers.

## BIBLIOGRAFIAS DA INTERNET

- Análise Espacial. Representação e Propagação de Incerteza  
<http://sputnik.dpi.inpe.br/cursos/ser431/> Acesso: 21/10/1999
- Caderno de Informações Georreferenciadas – CIG – FEAGRI/UNICAMP  
 GY 705 – Geographical Decision Making (Multi-Objective Decions)  
<http://www.geog.le.ac.uk/pffl/Teaching/GDM> Acesso: 22/11/1999
- Centro de Recursos Idrisi, Brasil – UFRGS:  
<http://www.ecologia.ufrgs.br/idrisi/> Acesso: 20/12/1999
- Departamento de Matemática/Informática da Universidade da Beira Interior:  
<http://www.dmi.ubi.pt/~jvo/ldifusa.html> Acesso: 20/12/1999
- Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas da UFSC: <http://www.eps.ufsc.br/>  
 Acesso: 20/12/1999
- Departamento de Engenharia Elétrica – DEE da UFC:  
<http://www.dee.ufc.br/~pimentel/fuzzy/menu.html> Acesso: 22/11/1999
- Divisão de Processamento de Imagens – DPI/INPE:  
<http://www.dpi.inpe.br> Acesso: 22/11/1999
- GIS (ARC/INFO y ArcView) – by Shane Murnion  
<http://www.cca.es/docu/soft/gis/arcinfo.es.html> Acesso: 21/10/1999
- GY 705 – Geographical Decision Making (Spatial Uncertainty)  
<http://www.geog.le.ac.uk/pffl/Teaching/GDM> Acesso: 22/11/1999
- GY 705 – Geographical Decision Making (Search and Routing)  
<http://www.geog.le.ac.uk/pffl/Teaching/GDM> Acesso: 22/11/1999
- Hamada, Emília e Rocha, Jansle, Alocação de um Distrito Industrial Utilizando SIG Idrisi e SSD Partipativo – Simulação de Caso.  
<http://www.cpa.unicamp.br/cigy1n2n2.html> Acesso: 20/12/1999
- Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais:  
<http://www.inpe.br> Acesso: 22/11/1999
- Núcleo de Computação da UFRJ:

- <http://www.nce.ufrrj.br/> Acesso: 28/12/1999
- Precision Agriculture – University of Georgia –  
[http://nspal.cpes.peachnet.edu/research/precison\\_agriculture](http://nspal.cpes.peachnet.edu/research/precison_agriculture)  
Acesso: 11/08/1999
- Precision Agriculture Mailing list PRECISE-AGRI  
<http://precision.agri.umn.edu/precise-agri/> Acesso: 11/08/1999
- Soil Specific Crop Management: gopher:  
gopher://gopher.soils.umn.edu/00/ssfm/sscm-execsum Acesso: 11/08/1999
- The University of New Mexico:  
<http://ace.unm.edu/fuzzy/fuzzy.html> Acesso: 28/12/1999
- What is fuzzy logic? Date 15-abr-93.  
<http://www.cs.cmu.edu/Web/Groups/AI/html> Acesso: 22/02/2000

## ANEXO I

Área	Perímetro	Cod. Área	Cod. Ger. Area	Cód.Solo Velh Solo	Novo Cód. Solo	Classe Velha Solo	Nova Classe	Aptidão	
8447213.000	17108.447	2	6	47	69	PA5	PAe10	3(ab), 5N, 3(a)	<p>FIFPAACCCFI</p> <p>FFFH17ACNIIII</p> <p>IEC_UCFISIIII</p> <p>ENFSM_ECFISSSS</p> <p>VAUCISCICCCCC</p> <p>CCMNCNCFABFFF</p> <p>_ELCIIIC_CIIII</p> <p>SM CC_S AMMM</p> <p>C_I _ SC U77FF</p> <p>ISA S CI ___CC</p> <p>rMPFA7CCF 2178</p> <p>eo1H11oa1</p> <p>ld-13-r1</p> <p>eeP- 7g-</p> <p>vr2F 31C</p> <p>ca F - a</p> <p>d 3 C3</p> <p>ca o</p> <p>nn r</p> <p>de g</p> <p>un 3</p> <p>lt</p> <p>ae</p> <p>d</p> <p>cd</p> <p>r</p> <p>e</p> <p>n</p> <p>a</p> <p>d</p> <p>o</p>
	133833.969	3	8	47	69	PA5	PAe10	3(ab), 5N, 3(a)	<p>rMPFA7CCF 5411</p> <p>eo1H11oa1 34</p>

10643549.000 19300.471 4 2 55 52 HGe3 GXve4 3(ab), 3(b),3(ab)

ld-13-r1  
eeF- 7g-  
vr2F 31C  
ca F -a  
d 3 C3  
ca o  
nn r  
de g  
un 3  
lt  
ae  
d  
cd  
r  
e  
n  
a  
d  
o  
rIPFA'ICCF 2178  
en1F11oa1  
lp 13-r1  
ee 7g-  
vr 31C  
cf -a  
e C3  
pi o  
lt r  
aa g  
nn 3  
ce  
n  
t  
e  
I  
r

1122278.000 7102.353 5 9 47 69 PA5 PAe10 3(ab), 5N, 3(a)

e  
n  
a  
d  
o  
r MPFA'ICCF 2178  
e o l H l l o a l  
l d - 13 - r l  
e e P - 1 g -  
v r 2 F 3 1 C  
c a F - a  
d 3 C 3  
c a o  
n n r  
d e g  
u n 3  
l t  
a e  
d  
c d  
r  
e  
n  
a  
d  
o

202273.328 6 11 55 52 HGe3 GXve4 3(ab), 3(b), 3(ab)

r I P F A ' I C C F 6511  
e n l H l l o a l 56  
l p 13 - r l  
e e 1 g -  
v r 3 1 C  
c f - a  
e C 3  
p i o  
l t r  
a a g  
n n 3

ce  
n  
t  
e

I  
r  
e  
n  
a  
d  
o

1637650.375    13242.746    7    12    47    69    PA5    PAe10    3(ab), 5N, 3(a)

rMPFA'ICCF 6511

eo1H11oa1 56

ld-13-r1

eeF- 1g-

vr2F 31C

ca F -a

d 3 C3

ca o

nn r

de g

un 3

lt

ae

d

cd

r

e

n

a

d

o

78182480.000    71793.508    8    13    62    70    HGe2    GXve2    3(ab),4p

rIPFA'ICCF 5411

en1H11oa1 34

lp 12-r1

ee -1g-

vr A31C  
 cf l - a  
 e 3 C3  
 pi o  
 lt r  
 aa g  
 nn 3  
 ce  
 n  
 at  
 e  
 s  
 ua  
 a  
 vn  
 ea  
 l  
 c  
 nI  
 dr  
 ue  
 ln  
 aa  
 dd  
 co  
 rMFFA1CCF 5411  
 eo1H11oa1 34  
 ld-13-r1  
 eeP- 1g-  
 vr2F 31C  
 ca F - a  
 d 3 C3  
 ca o  
 nn r  
 de g  
 un 3  
 lt

120773.086 9 14 47 69 PA5 PAe10 3(ab), 5N, 3(a)

a e  
d  
c d  
r  
e  
n  
a  
d  
o

400463.719 10 10 47 69 PA5 PAe10 3(ab), 5N, 3(a)

r MPFA TCCF 6511  
e o1H11oa1 56  
ld-13-r1  
eeP- Tg-  
vr2F 31C  
ca F -a  
d 3 C3  
ca o  
nn r  
de g  
un 3

74842272.000 62546.121 11 1 47 69 PA5 PAe10 3(ab), 5N, 3(a)

lt  
ae  
d  
cd  
r  
e  
n  
a  
d  
o  
r MPFA TCCF 2178  
e o1H11oa1  
ld-13-r1  
eeP- Tg-  
vr2F 31C  
ca F -a  
d 3 C3

										ca o	
										nn r	
										de g	
										un 3	
										lt	
										ae	
										d	
										cd	
										r	
										e	
										n	
										a	
										d	
										o	
15568015.000	18454.039	12	15	47	69	PA5	PAe10	3(ab), 5N, 3(a)	r MPFA'ICCF	7611	
									eo1F11oa1	89	
									ld-13-r1		
									eeP- 7g-		
									vr2F 31C		
									ca F - a		
									d 3 C3		
									ca o		
									nn r		
									de g		
									un 3		
									lt		
									ae		
									d		
									cd		
									r		
									e		
									n		
									a		
									d		
									o		
30303732.000	25168.605	13	16	69	0	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2	r EPPA'ICCF	8711	
									ee2F12oa1	45	

l n- 12- r 1-  
e F- - 1g- F  
va 3F A 31 C 2  
c F l - a  
n 33 C 3  
co o  
nd r  
de g  
ur 3  
l a  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rd  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
r M P F A 1 C C F 9 8 1 2  
e o 1 F l l o a l 9 0  
l d- 13- r 1  
ee P- 1g-  
vr 2F 31 C  
ca F - a  
d 3 C 3

5041497.500 10373.749 14 17 47 69 PA5 PAe10 3(ab), 5N, 3(a)

99606.102 15 18 68 68 HGe2 GXve2 3(ab),4p

ca o  
nn r  
de g  
un 3  
lt  
ae  
d  
cd  
r  
e  
n  
a  
d  
o  
rIPFA'ICCF 5411  
en1F11oa1 34  
lp 12-r 1  
ee -Tg-  
vr A31C  
cf 1 -a  
e 3 C3  
pi o  
lt r  
aa g  
nn 3  
ce  
n  
at  
e  
s  
ua  
a  
vn  
ea  
l  
c  
nI

16733608.000 22248.131 16 19 74 0 HGe1 GXve1 3(ab),2ab

dr  
ue  
ln  
aa  
dd  
co

rMFFA'ICCF 8711  
eolH13oa1 45  
ld 12 r3  
ee -- g  
vr FA 3  
ca Fl  
d 23

pa  
l  
aa  
n  
cM  
a  
l

L  
r  
e  
n  
a  
d  
o

21843.922 1491.724 17 20 74 0 HGe1 GXve1 3(ab),2ab

rMFFA'ICCF 1911  
eolH13oa1 0 45  
ld 12 r3  
ee -- g  
vr FA 3  
ca Fl  
d 23

pa  
l



131218.281	1886.969	19	23	69	0	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2
------------	----------	----	----	----	---	------	-------	------------------

ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c

rEPF^1CCF 5411  
ee2H12ca1 34  
ln-12-r1-  
eF--1g-F  
va3F^31C2  
c H1 -a  
n 33 C3  
co o  
nd r  
de g  
ur 3  
la  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rd  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l

15008785.000	21503.076	20	21	69	0	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2	r E P F A T C C F 1125 e e 2 F 1 2 o a 1 1006 l n - 1 2 - r 1 - e F - - T g - F v a 3 F A 3 1 C 2 c F l - a n 3 3 C 3 c o o n d r d e g u r 3 l a a d d a c n e a n t f e c r d t r e e n c a n d d o u l a d c r M P F A T C C F 1125 e o 2 F 1 2 o a 1 2127
72950096.000	64378.141	21	24	76	80	PA6	PAe5	2a,2a,5N	

ld-22-r1-  
eeF--1g-F  
vr3FA31C2  
caFl-a  
d33C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3  
et  
e  
c  
nd  
dr  
ue  
ln  
aa  
dd  
co

a

c  
n  
d  
u  
l  
a  
d  
c

91004.758      2392.520      22    25    75    79    PB18    PVd13    2abc,2ab,3(ab),2

rEPPA1CCF 8711  
ee2H12oa1 45  
ln-12-r1-  
eP--1g-F  
va3FA31C2  
cFl-a  
n33C3

co o  
nd r  
de g  
ur 3  
la  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rd  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
rEPPA7CCF 8711  
ee2H11oa1 45  
ln-13-r1  
e P- 1g  
va3F 31  
c F -  
n 2 C  
po o  
ld r  
ae g  
nr 3  
ca

2541149.000 7429.744 23 26 77 81 PB3 ACt1 5N,3(ab)



											d cr ne dn ua ld ao d c rMFFA1CCF 1125 eo1F13oa1 3238 ld 12 r 3 ee -- g vr FA 3 ca F1 d 23 pa l aa n cM a l  I r e n a d o
7267.773	444.857	25	28	74	0	HGe1	GXve1	3(ab),2ab			rMFFA1CCF 1125 eo1F13oa1 3238 ld 12 r 3 ee -- g vr FA 3 ca F1 d 23 pa l aa n cM a l  I r e n a d o
5804780.500	10775.635	26	29	76	80	PA6	PAe5	2a,2a,5N			rMFFA1CCF 1125 eo2F12oa1 3238 ld-22-r1- eeP--1g-F vr3FA31C2 ca F1 -a

d 33 C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3  
et  
e  
c  
nd  
dr  
ue  
ln  
aa  
dd  
co

a

c  
n  
d  
u  
l  
a  
d  
c

121756.172      2904.388      27      30      75      79      PB18      PVd13      2abc,2ab,3(ab),2

r E P F A T C C F 1125  
e e 2 H 1 2 o a 1 3238  
l n - 1 2 - r 1 -  
e P - - T g - F  
v a 3 F A 3 1 C 2

c H l - a  
n 33 C3  
co o  
nd r  
de g  
ur 3

360806.625	2689.325	28	31	76	80	PA6	PAe5	2a,2a,5N
------------	----------	----	----	----	----	-----	------	----------

l a  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rd  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
r M P F A T C C F 8 7 1 1  
e o 2 F 1 2 o a 1 4 5  
l d - 2 2 - r 1 -  
e e P - - 1 g - F  
v r 3 F A 3 1 C 2  
c a F 1 - a  
d 3 3 C 3  
s a o  
u n r  
a e g  
v n 3  
e t  
e  
c  
n d  
d r

ue  
ln  
aa  
dd  
co

a

c  
n  
d  
u  
l  
a  
d  
c

88994312.000    57896.164    29    32    69    0    PB18    PVd13    2abc,2ab,3(ab),2

r E P F A T C C F    5 4 1 1  
e e 2 F 1 2 o a 1    3 4  
l n - 1 2 - r 1 -  
e P - - 1 g - F  
v a 3 F A 3 1 C 2  
c    F 1    - a  
n    3 3    C 3  
c o    o  
n d    r  
d e    g  
u r    3  
l a  
a d  
d a  
c n  
e  
a n  
t  
f e  
c  
r d



vr FA 3  
ca Fl  
d 23  
pa  
l  
aa  
n  
cM  
a  
l

I  
r  
e  
n  
a  
d  
o

123515.852      1663.302      32      38      76      80      PA6      PAe5      2a,2a,5N

rMPFA'ICCF 8711  
eo2F12oa1 45  
ld-22-r1-  
eeP--Tg-F  
vr3FA'31C2  
ca Fl -a  
d 33 C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3  
et  
e  
c  
nd  
dr  
ue  
ln  
aa



10439156.000 26685.127 35 14 47 69 PA5 PAe10 3(ab), 5N, 3(a)

ld-13-r1  
eeF- 7g-  
vr2F 31C  
ca F -a  
d 3 C3  
ca o  
nn r  
de g  
un 3  
lt  
ae  
d  
cd  
r  
e  
n  
a  
d  
o  
rMPF7CCF 5411  
eolFl1oa1 34  
ld-13-r1  
eeF- 7g-  
vr2F 31C  
ca F -a  
d 3 C3  
ca o  
nn r  
de g  
un 3  
lt  
ae  
d  
cd  
r  
e  
n

									a		
									d		
									o		
59105.395	36	37	69	0	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2	r	EPFA1CCF	1122	
								e	e2H12ca1	4341	
								l	n-12-r1-		
								e	F--1g-F		
								v	a3FA31C2		
								c	H1-a		
								n	33 C3		
								co	o		
								nd	r		
								de	g		
								ur	3		
								l	a		
								a	d		
								d	a		
								cn	e		
								e	an		
								t	t		
								f	e		
								c	c		
								r	d		
								t	r		
								e	e		
								n	n		
								ca	a		
								nd	d		
								do	o		
								u	u		
								l	l		
								a	a		
								d	d		
								c	c		
939218.125	4857.263	37	14	47	69	PA5	PAe10	3(ab), 5N, 3(a)	r	MPFA1CCF	5411
								e	o1H11ca1	34	



aa

dd

co

a

c

n

d

u

l

a

d

c

7613790.000 12293.158 39 45 85 89 PB18 PVd13 2abc,2ab,3(ab),2

rEPF^TCCF 1125

ee2F12ca1 2127

ln-12-r1-

eP--Tg-F

va3F^31C2

c F1 - a

n 33 C3

co o

nd r

de g

ur 3

la

ad

da

cn

e

an

t

fe

c

rd

tr

ee

69255616.000 54177.602 40 47 74 0 HGe1 GXve1 3(ab),2ab

n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c

rMFFA'ICCF 1122  
e o l F l 3 o a l 4341  
l d 12 r 3  
e e -- g  
v r F A 3  
c a F l  
d 23  
p a  
l  
a a  
n  
c M  
a  
l

182476.719 41 49 93 97 PB18 PVd13 2abc,2ab,3(ab),2

I  
r  
e  
n  
a  
d  
o

r E P F A ' I C C F 1122  
e e 2 F l 2 o a l 4341  
l n - 12 - r l -  
e F - - 1 g - F  
v a 3 F A 3 1 C 2  
c F l - a

n 33 C3  
co o  
nd r  
de g  
ur 3  
la  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rd  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
rMFFATCCF 1122  
eolHl3oa1 5412  
ld 12 r3  
ee -- g  
vr FA 3  
ca Fl  
d 23  
pa  
l  
aa  
n

18907616.000 29705.137 42 50 83 87 HGe1 GXve1 3(ab),2ab



149932.391 44 53 89 92 Ce CXve1 3(a),3(ab),3(a)

do  
u  
l  
a  
d  
c  
r  
ee  
ln  
e  
va  
c  
N  
co  
nd  
de  
ur  
la  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
r  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d

FFFA1CCF 1122  
e2H13oa1 6554

ln 22 r 3-

e - - g F

va FA 2 2

c H1 -

N 33 C

co o

nd r

de g

ur 3

51830.922	1461.622	45	54	98	102	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)	c r E P F A T C C F 1122 e e 2 F 1 3 o a 1 5412 l n 22 r 3- e - - g F v a F A 2 2 c F 1 - N 33 C c o o n d r d e g u r 3 l a a d d a c n e a n t f e c r I t r e e n c a n d d o u l a d c
54696516.000	53601.039	46	55	93	97	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2	r E P F A T C C F 1122 e e 2 F 1 2 o a 1 6554 l n - 12 - r 1 - e P - - T g - F

										va3F^31C2	
										c Fl - a	
										n 33 C3	
										co o	
										nd r	
										de g	
										ur 3	
										la	
										ad	
										da	
										cn	
										e	
										an	
										t	
										fe	
										c	
										rd	
										tr	
										ee	
										n	
										ca	
										nd	
										do	
										u	
										l	
										a	
										d	
										c	
5136195.000	10551.255	47	56	93	97	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2	r	FPF^TCCF	1122
									ee	2F12ca1	4341
									ln-	12-r1-	
									e	P--Tg-F	
									va	3F^31C2	
									c	Fl - a	
									n	33 C3	
									co	o	
									nd	r	

de g  
ur 3  
la  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rd  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
rMFFA'1CCF 1122  
eolF13ca1 6554  
ld 12 r 3  
ee -- g  
vr FA 3  
ca Fl  
d 23  
pa  
l  
aa  
n  
cM  
a  
l

87501968.000 139490.109 48 57 74 0 HGe1 GXve1 3(ab),2ab

13382230.000	15352.980	49	58	98	102	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
--------------	-----------	----	----	----	-----	----	-------	-----------------

I  
 r  
 e  
 n  
 a  
 d  
 o  
 r E P F A T C C F 1 1 2 2  
 e e 2 F 1 3 o a 1 5 4 1 2  
 l n 2 2 r 3 -  
 e - - g F  
 v a F A 2 2  
 c H 1 -  
 N 3 3 C  
 c o o  
 n d r  
 d e g  
 u r 3  
 l a  
 a d  
 d a  
 c n  
 e  
 a n  
 t  
 f e  
 c  
 r I  
 t r  
 e e  
 n  
 c a  
 n d  
 d o  
 u  
 l

98348544.000	86348.984	50	59	93	97	PB18	PVd13	2abc,2ab,3(ab),2	a d c r E P F A T C C F 1122 e e 2 F 1 2 o a 1 6554 l n - 1 2 - r 1 - e F - - T g - F v a 3 F A 3 1 C 2 c F l - a n 3 3 C 3 c o o n d r d e g u r 3 l a a d d a c n e a n t f e c r d t r e e n c a n d d o u l a d c r E P F A T C C F 1122 e e 2 F 1 3 o a 1 6554
3760814.000	8493.100	51	60	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)	

l n 22 r 3-  
e - - g F  
va FA 2 2  
c Fl -  
N 33 C  
co o  
nd r  
de g  
ur 3  
la  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rI  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
r E P F A T C C F 1122  
ee 2 H 1 3 o a 1 6554  
l n 22 r 3-  
e - - g F  
va FA 2 2  
c Fl -  
N 33 C

305041.125      3318.147      52      61      89      92      Ce      CXve1      3(a),3(ab),3(a)



102471.195      1250.071      54      63      76      80      PA6      PAe5      2a,2a,5N

a e

d

c d

r

e

n

a

d

o

r M P F A T C C F 1122

e o 2 F 1 2 o a 1 6554

l d - 22 - r 1 -

e e P - - T g - F

v r 3 F A 3 1 C 2

c a F 1 - a

d 33 C 3

s a o

u n r

a e g

v n 3

e t

e

c

n d

d r

u e

l n

a a

d d

c o

a

c

n

d

u

43869292.000    33854.879    55    65    105    110    Ce    CXve1    3(a),3(ab),3(a)

l

a

d

c

r E P F A T C C F 1122

ee2F13oa1 4341

ln 22 r 3-

e -- g F

va F A 2 2

c F1 -

N 33 C

co o

nd r

de g

ur 3

la

ad

da

cn

e

an

t

fe

c

r I

tr

ee

n

ca

nd

do

u

l

a

d

c

1526.242

380.773

56

66

76

80

PA6

PAe5

2a,2a,5N

r M P F A T C C F 1122

eo2H12oa1 6554  
ld-22-r1-  
eeP--Tg-F  
vr3FA31C2  
ca H1 -a  
d 33 C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3  
et  
e  
c  
nd  
dr  
ue  
ln  
aa  
dd  
co  
  
a  
  
c  
n  
d  
u  
l  
a  
d  
c  
rMPFA1CCF 1122  
eo2H12oa1 6554  
ld-22-r1-  
eeP--Tg-F  
vr3FA31C2  
ca H1 -a

59993.336      1243.360      57    67    76    80    PA6    PAe5    2a,2a,5N

d 33 C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3  
et  
e  
c  
nd  
dr  
ue  
ln  
aa  
dd  
co

a

c  
n  
d  
u  
l  
a  
d  
c

16487991.000 30769.045 58 72 110 114 Ce CXvel 3(a),3(ab),3(a)

r E P F A T C C F 1122  
ee2H13oa1 4341  
ln 22 r 3-  
e - - g F  
va FA 2 2  
c H1 -  
N 33 C  
co o  
nd r  
de g  
ur 3

29314.035	917.272	59	74	76	80	PA6	PAe5	2a,2a,5N
-----------	---------	----	----	----	----	-----	------	----------

l a  
ad  
da  
cn  
e  
an  
t  
fe  
c  
rI  
tr  
ee  
n  
ca  
nd  
do  
u  
l  
a  
d  
c  
rMFFA1CCF 1122  
e02H12ca1 6554  
ld-22-r1-  
eeP--1g-F  
vr3FA31C2  
ca H1 -a  
d 33 C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3  
et  
e  
c  
nd  
dr

ue  
ln  
aa  
dd  
co

a

c  
n  
d  
u  
l  
a  
d  
c

4423114.500      11431.615      60      76      84      88      PA6      PAe5      2a,2a,5N

rMFFA1CCF 1125  
eo2H12oa1 9879  
ld-22-r1-  
eeP--1g-F  
vr3FA31C2  
ca H1 -a  
d 33 C3  
sa o  
un r  
ae g  
vn 3

et  
e  
c  
nd  
dr  
ue  
ln  
aa  
dd  
co



										do	
										u	
										l	
										a	
										d	
										c	
33293026.000	36563.438	62	77	114	119	PA3	PAe2	2ab,4p,3(a),3(a)	r	FFFA'ICCF	6511
									e	e2H13oa1	56
									l	n-13 r1-	
									e	P- g-P	
									v	a3F 3C2	
									c	F a	
									n	3 3	
									co		
									nd		
									de		
									ur		
									l	a	
									a	d	
									d	a	
									c	n	
									e		
									n		
									t		
									e		
									d		
									r		
									e		
									n		
									a		
									d		
									o		
25127746.000	21258.906	63	64	47	69	PA5	PAe10	3(ab), 5N, 3(a)	r	MFFA'ICCF	1122
									e	o1H11oa1	8765
									l	d-13-r1	
									e	eP- Tg-	



24113808.000	23903.279	65	78	116	121	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
91696168.000	63116.711	66	79	84	88	PA6	PAe5	2a,2a,5N
144433.156	1834.680	67	80	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
53047.563	1092.037	68	81	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
65083972.000	46393.113	69	82	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
2088206.375	8303.864	70	83	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
87254.016	2249.774	71	84	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
235791.188	2601.218	72	85	84	88	PA6	PAe5	2a,2a,5N
45283068.000	35247.430	73	86	84	88	PA6	PAe5	2a,2a,5N
326812.063	2392.414	74	87	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
	80765.477	75	88	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
9559443.000	14981.403	76	89	84	88	PA6	PAe5	2a,2a,5N
	113706.797	77	90	84	88	PA6	PAe5	2a,2a,5N
47473.656	992.240	78	91	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
	104050.789	79	92	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
1632924.625	6594.166	80	93	134	144	PB17	PVAa1	4p,5n
	50981.285	81	94	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
55899912.000	39271.648	82	95	134	144	PB17	PVAa1	4p,5n
42524784.000	38782.543	83	96	134	144	PB17	PVAa1	4p,5n
10732710.000	21370.031	84	97	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
13103188.000	15775.987	85	98	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
6636907.500	14347.218	86	99	74	0	HGe1	GXve1	3(ab),2ab
61779964.000	37924.227	87	100	89	92	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
17893634.000	19929.086	88	101	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
3443598.250	7261.161	89	102	134	144	PB17	PVAa1	4p,5n
1320320.125	7040.100	90	103	119	126	Ce	CXve1	3(a),3(ab),3(a)
2042524.125	6807.272	91	104	74	0	HGe1	GXve1	3(ab),2ab

#### CLASSE DE SOLOS

Argissolo Amarelo eutrófico plântico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plântico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Gleissolo Háplico Ta Eutrófico típico, Gleissolo Háplico Ta alumínico, Neossolo Flúvico Ta Eutrófico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plântico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Gleissolo Háplico Ta Eutrófico típico, Gleissolo Háplico Ta alumínico, Neossolo Flúvico Ta Eutrófico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plântico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico

Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Argissolo Amarelo Distrófico plíntico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plíntico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plíntico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plíntico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Argissolo Amarelo eutrófico plíntico, Alissolo Crômico argilúvico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Argissolo Amarelo Distrófico plíntico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Alissolo Hipocrômico argilúvico  
 típico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Alissolo Crômico argilúvico típico, Argissolo Amarelo distrófico  
 Alissolo Crômico argilúvico típico, Argissolo Amarelo distrófico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico  
 Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Alissolo Hipocrômico argilúvico  
 típico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Alissolo Hipocrômico argilúvico  
 típico  
 Argissolo Vermelho Distrófico latossólico, Argissolo Vermelho Amarelo eutrófico abrupto plíntico,  
 Argissolo Vermelho Amarelo alumínico alissólico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico  
 Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Alissolo Hipocrômico argilúvico  
 típico  
 Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico





Cambissolo Háplico Ta Eutrófico, Argissolo Amarelo Eutrófico plíntico, Cambissolo Háplico Ta Eutrófico  
Gleissolo Háplico Ta eutrófico, Neossolo Flúvico Ta eutrófico

RELEVO	DRENAGEM
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo plano	Imperfeitamente Drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo plano	Imperfeitamente Drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo plano a suave ondulado	Imperfeitamente a mal Drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado
relevo plano a suave ondulado	Imperfeitamente a mal Drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo plano a suave ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo plano a suave ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a moderadamente drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo ondulado	Moderadamente drenado



relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderadamente drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderada a imperfeitamente drenad
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderada a imperfeitamente drenad
relevo suave ondulado a ondulado	Moderada a imperfeitamente drenad
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo suave ondulado a ondulado	Moderada a imperfeitamente drenad
relevo ondulado a forte ondulado	Bem a Moderadamente Drenado
relevo plano	Moderada a Mal Drenado

**Tabela 09 – Banco de dados correspondente ao Mapa RF.**

## ANEXO II

*1º Passo:* Como já tem-se o conjunto de alternativas  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  e o conjunto de tomadores de decisão  $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ , definir-se-á cinco critérios para o problema:

$C_1 = \{\text{Proximidade de cidades, <Mercado Consumidor>}\}$ ,

$C_2 = \{\text{Facilidade de transporte, <Escoamento da Produção>}\}$ ,

$C_3 = \{\text{Eletrificação rural e rede hídrica, <Industrialização>}\}$ ,

$C_4 = \{\text{Custo de investimento, <Infraestrutura>}\}$  e

$C_5 = \{\text{Mão-de-obra nas proximidades, <Terceirização>}\}$ .

*2º Passo:* Estes critérios foram classificados em dois grupos. Critérios subjetivos:  $C_1, C_2$  e  $C_3$ , e critérios objetivos:  $C_4$  e  $C_5$ .

*3º Passo:* Foi empregada a mesma lingüística aplicada por Liang [0], tanto para o conjunto de pesos  $W = \{MB, B, M, A, MA\}$ , onde  $MB = \text{Muito Baixo}$ ,  $B = \text{Baixo}$ ,  $M = \text{Médio}$ ,  $A = \text{Alto}$  e  $MA = \text{Muito Alto}$ , que avaliam a importância dos critérios, com  $MB = (0,0,0,0,3)$ ,  $B = (0,0,3,0,3,0,5)$ ,  $M = (0,2,0,5,0,5,0,8)$ ,  $A = (0,5,0,5,0,7,1)$ ,  $MA = (0,7,1,1,1)$ , como para as avaliações adequadas das alternativas sob cada um dos critérios subjetivos,  $S = \{MF, E.MF \& F, F, E.F \& R, R, E.R \& B, B, E.B \& MB, MB\}$ , onde  $MF = \text{Muito Franco}$ ,  $E.MF \& F = \text{Entre Muito Fraco e Fraco}$ ,  $F = \text{Fraco}$ ,  $E.F \& R = \text{Entre Fraco e Razoável}$ ,  $R = \text{Razoável}$ ,  $E.R \& B = \text{Entre Razoável e Bom}$ ,  $B = \text{Bom}$ ,  $E.B \& MB = \text{Entre Bom e Muito Bom}$ ,  $MB = \text{Muito Bom}$ , com  $MF = (0,0,0,0,2)$ ,  $E.MF \& F = (0,0,0,2,0,4)$ ,  $F = (0,0,2,0,2,0,4)$ ,  $E.F \& R = (0,0,2,0,5,0,7)$ ,  $R = (0,3,0,5,0,5,0,7)$ ,  $E.R \& B = (0,3,0,5,0,8,1)$ ,  $B = (0,6,0,8,0,8,1)$ ,  $E.B \& MB = (0,6,0,8,1,1)$ ,  $MB = (0,8,1,1,1)$ . As avaliações dos critérios objetivos serão expressas no 6º Passo.

*4º Passo: (Estabelecimento dos Pesos).* É do conhecimento de todos que o grande problema dos produtores da nossa região são os ramais que deveriam dar acesso às estradas principais, especialmente no inverno, quando produção inteira estraga nos paióis. Em seguida vêm os consumidores, que nem sempre têm acesso direto ao produto dos mesmos, aparecendo aí a figura do atravessador, que encarece significativamente o produto. Foi colocado em terceiro lugar a escassez de recursos do governo do Estado para implantar uma infra-estrutura básica nos Pólos, como: escola, posto médico, armazens, energia, etc, fato este que na maioria das vezes é responsável pelo êxodo rural. Como a idéia dos Pólos Agroflorestais é que os mesmos sejam, mais ou menos, uma comunidade fechada, foi considerado primeiramente o processo de industrialização, para só então ser necessário mão-de-obra exterior. Assim, os pesos, já considerados agregados ficaram:

$$W_1 = (0.500, 0.700, 0.700, 0.900),$$

$$W_2 = (0.650, 0.850, 0.850, 1.000),$$

$$W_3 = (0.350, 0.500, 0.500, 0.650),$$

$$W_4 = (0.400, 0.600, 0.600, 0.800) \text{ e}$$

$$W_5 = (0.200, 0.400, 0.400, 0.600).$$

*5º Passo: (Avaliação lingüística das alternativas em relação aos critérios subjetivos).* Aqui também o estabelecimento das avaliações foram baseadas em estudo das áreas como distância em linha reta das estradas, distância em linha reta das cidades, etc. Assim as avaliações ficaram:

$$\begin{aligned} X_{11} &= (0.350, 0.450, 0.550, 0.650), & X_{31} &= (0.500, 0.600, 0.700, 0.800), & X_{12} \\ &= (0.200, 0.300, 0.350, 0.500), & X_{32} &= (0.600, 0.750, 0.850, 1.000), \\ X_{13} &= (0.500, 0.600, 0.700, 0.800), & X_{33} &= (0.600, 0.750, 0.850, 1.000), \\ X_{21} &= (0.600, 0.750, 0.850, 1.000), & X_{41} &= (0.100, 0.200, 0.300, 0.400), \\ X_{22} &= (0.600, 0.750, 0.850, 1.000), & X_{42} &= (0.600, 0.750, 0.850, 1.000), \\ X_{23} &= (0.300, 0.450, 0.600, 0.700) \text{ e } X_{43} &= (0.100, 0.200, 0.300, 0.400). \end{aligned}$$

6º Passo: (Avaliação dos critérios objetivos). O critério  $C_4$  (custo de investimento) foi avaliado com base nos gastos com a infra-estrutura de outros Pólos Agroflorestais que já foram implantados ou que estão em fase adiantada de implantação no Estado, e estão estimados como em (Liang, G-S., 1997), na base de ( $\$ * 10^4$ ).

Foi considerado infra-estrutura para um Polo Agroflorestal com 40 (quarenta) famílias, na base de R\$7.000,00 (sete mil reais por família; R\$32.000,00 (trinta e dois mil reais) por quilômetro de ramal; e, R\$1.200,00 (hum mil e duzentos reais) por quilômetro de eletrificação rural monofásica. Os valores obtidos ficaram como maior probabilidade do número difuso correspondente ao critério.

Assim:

$$T_{14} = (40, 44, 44, 50),$$

$$T_{24} = (27, 30, 30, 35),$$

$$T_{34} = (26, 29, 29, 33) \text{ e}$$

$$T_{44} = (35, 39, 39, 44).$$

Como menor custo implica em maior benefício, apresentando portanto maior avaliação, será aplicado a relação inversa:

$$RT_{it} = (s_{it}^{-1} / (\sum e_{it}^{-1}), g_{it}^{-1} / (\sum f_{it}^{-1}), f_{it}^{-1} / (\sum g_{it}^{-1}), e_{it}^{-1} / (\sum s_{it}^{-1})), \text{ com } i = 1, 2, \dots, m.$$

$$RT_{14} = ((1/50)/(1/40+1/27+1/26+1/35), (1/44)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/44)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/40)/(1/50+1/35+1/33+1/44))$$

$$RT_{24} = ((1/35)/(1/40+1/27+1/26+1/35), (1/30)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/30)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/44)/(1/44+1/30+1/29+1/39))$$

$$RT_{34} = ((1/33)/(1/40+1/27+1/26+1/35), (1/29)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/29)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/26)/(1/50+1/35+1/33+1/44))$$

$$RT_{24} = ((1/44)/(1/40+1/27+1/26+1/35), (1/39)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/39)/(1/44+1/30+1/29+1/39), (1/35)/(1/44+1/30+1/29+1/39))$$

$$RT_{14} = (0.020/0.129, 0.023/0.116, 0.023/0.116, 0.025/0.102)$$

$$RT_{24} = (0.029/0.129, 0.033/0.116, 0.033/0.116, 0.037/0.102)$$

$$RT_{34} = (0.030/0.129, 0.034/0.116, 0.034/0.116, 0.038/0.102)$$

$$RT_{44} = (0.023/0.129, 0.026/0.116, 0.026/0.116, 0.029/0.102)$$

$$RT_{14} = (0.155, 0.198, 0.198, 0.245)$$

$$RT_{24} = (0.225, 0.284, 0.284, 0.363)$$

$$RT_{34} = (0.232, 0.293, 0.293, 0.373)$$

$$RT_{44} = (0.178, 0.224, 0.224, 0.284)$$

Quanto ao critério  $C_5$  (*Mão-de-obra nas proximidades*). Foi levantada toda a população vizinha às áreas, tendo como fonte os dados da Fundação Nacional de Saúde – FNS98, e estimado famílias de cinco pessoas das quais uma estaria disposta a trabalhar no projeto, ficando este valor como maior probabilidade dos números difusos correspondentes ao critério. Logo:

$$T_{15} = (56, 64, 64, 72),$$

$$T_{25} = (95, 105, 105, 120),$$

$$T_{35} = (170, 185, 185, 205) \text{ e}$$

$$T_{45} = (84, 91, 91, 100).$$

Neste caso, maior quantidade de pessoas disponíveis implica em maior benefício, tratando-se portanto, de uma relação direta:

$$RT_{it} = (e_{it} / (\sum s_{it}), f_{it} / (\sum g_{it}), g_{it} / (\sum f_{it}), s_{it} / (\sum e_{it})), \text{ com } i = 1, 2, \dots, m. \text{ Assim:}$$

$$RT_{15} = (56/497, 64/445, 64/445, 72/405)$$

$$\mathbf{RT_{15} = (0.114, 0.144, 0.144, 0.178)}$$

$$RT_{25} = (95/497, 105/445, 105/445, 120/405)$$

$$\mathbf{RT_{25} = (0.191, 0.236, 0.236, 0.296)}$$

$$RT_{35} = (170/497, 185/445, 185/445, 205/405)$$

$$\mathbf{RT_{35} = (0.342, 0.416, 0.416, 0.506)}$$

$$RT_{45} = (84/497, 91/445, 91/445, 100/405)$$

$$\mathbf{RT}_{45} = (0.169, 0.204, 0.204, 0.247).$$

*Observação:* Muito embora o importante, para qualquer método de tomada de decisão seja que os tomadores de decisão cheguem a um consenso tanto em relação aos pesos como em relação às avaliações, o método (Liang, G-S., 1997) prever que, no caso de não se chegar a um consenso, calcular as médias aritméticas correspondentes aos tomadores de decisão.

$$\text{Utilizando (5), estabelecer } M_{it} = \begin{cases} X_{it}, & \text{com } i = 1,2,3,4 \text{ e } t = 1,2,3 \\ \mathbf{RT}_{it}, & \text{com } i = 1,2,3,4 \text{ e } t = 4,5. \end{cases}$$

$$M_{11} = (0.350, 0.450, 0.550, 0.650),$$

$$M_{12} = (0.200, 0.300, 0.350, 0.500),$$

$$M_{13} = (0.500, 0.600, 0.700, 0.800),$$

$$M_{14} = (0.155, 0.198, 0.198, 0.245),$$

$$M_{15} = (0.114, 0.144, 0.144, 0.178),$$

$$M_{21} = (0.600, 0.750, 0.850, 1.000),$$

$$M_{22} = (0.600, 0.750, 0.850, 1.000),$$

$$M_{23} = (0.300, 0.450, 0.600, 0.700),$$

$$M_{24} = (0.225, 0.284, 0.284, 0.363),$$

$$M_{25} = (0.191, 0.236, 0.236, 0.296),$$

$$M_{31} = (0.500, 0.600, 0.700, 0.800),$$

$$M_{32} = (0.600, 0.750, 0.850, 1.000),$$

$$M_{33} = (0.600, 0.750, 0.850, 1.000),$$

$$M_{34} = (0.232, 0.293, 0.293, 0.373),$$

$$M_{35} = (0.342, 0.416, 0.416, 0.506),$$

$$M_{41} = (0.100, 0.200, 0.300, 0.400),$$

$$M_{42} = (0.600, 0.750, 0.850, 1.000),$$

$$M_{43} = (0.100, 0.200, 0.300, 0.400),$$

$$M_{44} = (0.178, 0.224, 0.224, 0.284) \text{ e}$$

$$M_{45} = (0.169, 0.204, 0.204, 0.247).$$

7º Passo: Utilizando a equação (6), obter a matriz de decisão  $D = [D_{it}]_{4 \times 5}$ :

Temos que:

$$W_t = (c_t, a_t, b_t, d_t),$$

$$M_{it} = (q_{it}, o_{it}, p_{it}, r_{it}),$$

$$D_{it} = (Y_{it}, Q_{it}, R_{it}, Z_{it}; H_{it}, P_{it}; L_{it}, V_{it}), \text{ com}$$

$$Y_{it} = q_{it}c_t$$

$$Q_{it} = o_{it}a_t$$

$$R_{it} = p_{it}b_t$$

$$Z_{it} = r_{it}d_t$$

$$H_{it} = T_{it} / (2P_{it})$$

$$P_{it} = (o_{it} - q_{it})(a_t - c_t) \text{ e } T_{it} = q_{it}(a_t - c_t) + c_t(o_{it} - q_{it})$$

$$L_{it} = -U_{it} / (2V_{it})$$

$$V_{it} = (r_{it} - p_{it})(d_t - b_t) \text{ e } T_{it} = r_{it}(b_t - d_t) + d_t(p_{it} - r_{it}). \text{ Assim,}$$

$$D_{11} = (Y_{11}, Q_{11}, R_{11}, Z_{11}; H_{11}, P_{11}; L_{11}, V_{11}), \text{ com}$$

$$Y_{11} = q_{11}c_1 = 0.350 * 0.500 = 0.175$$

$$Q_{11} = o_{11}a_1 = 0.450 * 0.700 = 0.315$$

$$R_{11} = p_{11}b_1 = 0.550 * 0.700 = 0.385$$

$$Z_{11} = r_{11}d_1 = 0.650 * 0.900 = 0.585$$

$$P_{11} = (o_{11} - q_{11})(a_1 - c_1) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$T_{11} = q_{11}(a_1 - c_1) + c_1(o_{11} - q_{11}) = 0.350 * 0.200 + 0.500 * 0.100 = 0.120$$

$$H_{11} = T_{11} / (2P_{11}) = 0.120 / 0.040 = 3.000$$

$$V_{11} = (r_{11} - p_{11})(d_1 - b_1) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$U_{11} = r_{11}(b_1 - d_1) + d_1(p_{11} - r_{11}) = 0.650 * (-0.200) + 0.900 * (-0.100) = -0.220$$

$$L_{11} = -U_{11} / (2V_{11}) = 0.220 / 0.040 = 5.500. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{11} = (0.175, 0.315, 0.385, 0.585; 3.000, 0.020; 5.500, 0.020)}.$$

$D_{12} = (Y_{12}, Q_{12}, R_{12}, Z_{12}; H_{12}, P_{12}; L_{12}, V_{12}), \text{ com}$

$$Y_{12} = q_{12}c_2 = 0.200 * 0.650 = 0.130$$

$$Q_{12} = o_{12}a_2 = 0.300 * 0.850 = 0.255$$

$$R_{12} = p_{12}b_2 = 0.350 * 0.850 = 0.298$$

$$Z_{12} = r_{12}d_2 = 0.500 * 1.000 = 0.500$$

$$P_{12} = (o_{12} - q_{12})(a_2 - c_2) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$T_{12} = q_{12}(a_2 - c_2) + c_2(o_{12} - q_{12}) = 0.200 * 0.200 + 0.650 * 0.100 = 0.105$$

$$H_{12} = T_{12} / (2P_{12}) = 0.105 / 0.040 = 2.625$$

$$V_{12} = (r_{12} - p_{12})(d_2 - b_2) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$U_{12} = r_{12}(b_2 - d_2) + d_2(p_{12} - r_{12}) = 0.500 * (-0.150) + 1.000 * (-0.150) = -0.225$$

$$L_{12} = -U_{12} / (2V_{12}) = 0.225 / 0.046 = 4.891. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{12} = (0.130, 0.255, 0.298, 0.500; 2.625, 0.020; 4.891, 0.023)}.$$

$D_{13} = (Y_{13}, Q_{13}, R_{13}, Z_{13}; H_{13}, P_{13}; L_{13}, V_{13}), \text{ com}$

$$Y_{13} = q_{13}c_3 = 0.500 * 0.350 = 0.175$$

$$Q_{13} = o_{13}a_3 = 0.600 * 0.500 = 0.300$$

$$R_{13} = p_{13}b_3 = 0.700 * 0.500 = 0.350$$

$$Z_{13} = r_{13}d_3 = 0.800 * 0.650 = 0.520$$

$$P_{13} = (o_{13} - q_{13})(a_3 - c_3) = 0.100 * 0.150 = 0.015$$

$$T_{13} = q_{13}(a_3 - c_3) + c_3(o_{13} - q_{13}) = 0.500 * 0.150 + 0.500 * 0.100 = 0.125$$

$$H_{13} = T_{13} / (2P_{13}) = 0.125 / 0.030 = 4.167$$

$$V_{13} = (r_{13} - p_{13})(d_3 - b_3) = 0.100 * 0.150 = 0.015$$

$$U_{13} = r_{13}(b_3 - d_3) + d_3(p_{13} - r_{13}) = 0.800 * (-0.150) + 0.650 * (-0.100) = -0.185$$

$$L_{13} = -U_{13} / (2V_{13}) = 0.185 / 0.030 = 6.167. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{13} = (0.175, 0.300, 0.350, 0.520; 4.167, 0.015; 6.167, 0.015)}.$$

$D_{14} = (Y_{14}, Q_{14}, R_{14}, Z_{14}; H_{14}, P_{14}; L_{14}, V_{14}), \text{ com}$

$$Y_{14} = q_{14}c_4 = 0.155 * 0.400 = 0.062$$

$$Q_{14} = o_{14}a_4 = 0.198 * 0.600 = 0.119$$

$$R_{14} = p_{14}b_4 = 0.198 * 0.600 = 0.119$$

$$Z_{14} = r_{14}d_4 = 0.245 * 0.900 = 0.196$$

$$P_{14} = (o_{14} - q_{14})(a_4 - c_4) = 0.043 * 0.200 = 0.009$$

$$T_{14} = q_{14}(a_4 - c_4) + c_4(o_{14} - q_{14}) = 0.155 * 0.200 + 0.400 * 0.043 = 0.048$$

$$H_{14} = T_{14} / (2P_{14}) = 0.048 / 0.018 = 2.667$$

$$V_{14} = (r_{14} - p_{14})(d_4 - b_4) = 0.047 * 0.200 = 0.009$$

$$U_{14} = r_{14}(b_4 - d_4) + d_4(p_{14} - r_{14}) = 0.245 * (-0.200) + 0.800 * (-0.047) = -0.087$$

$$L_{14} = -U_{14} / (2V_{14}) = 0.087 / 0.018 = 4.833. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{14} = (0.062, 0.119, 0.119, 0.196; 2.667, 0.009; 4.833, 0.009)}.$$

$$D_{15} = (Y_{15}, Q_{15}, R_{15}, Z_{15}; H_{15}, P_{15}; L_{15}, V_{15}), \text{ com}$$

$$Y_{15} = q_{15}c_5 = 0.113 * 0.200 = 0.023$$

$$Q_{15} = o_{15}a_5 = 0.144 * 0.400 = 0.058$$

$$R_{15} = p_{15}b_5 = 0.144 * 0.400 = 0.058$$

$$Z_{15} = r_{15}d_5 = 0.178 * 0.600 = 0.107$$

$$P_{15} = (o_{15} - q_{15})(a_5 - c_5) = 0.031 * 0.200 = 0.006$$

$$T_{15} = q_{15}(a_5 - c_5) + c_5(o_{15} - q_{15}) = 0.113 * 0.200 + 0.200 * 0.031 = 0.025$$

$$H_{15} = T_{15} / (2P_{15}) = 0.025 / 0.012 = 2.417$$

$$V_{15} = (r_{15} - p_{15})(d_5 - b_5) = 0.034 * 0.200 = 0.007$$

$$U_{15} = r_{15}(b_5 - d_5) + d_5(p_{15} - r_{15}) = 0.178 * (-0.200) + 0.600 * (-0.034) = -0.056$$

$$L_{15} = -U_{15} / (2V_{15}) = 0.056 / 0.014 = 4.000. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{15} = (0.023, 0.058, 0.058, 0.107; 2.417, 0.006; 4.000, 0.007)}.$$

$$D_{21} = (Y_{21}, Q_{21}, R_{21}, Z_{21}; H_{21}, P_{21}; L_{21}, V_{21}), \text{ com}$$

$$Y_{21} = q_{21}c_1 = 0.600 * 0.500 = 0.300$$

$$Q_{21} = o_{21}a_1 = 0.750 * 0.700 = 0.525$$

$$R_{21} = p_{21}b_1 = 0.850 * 0.700 = 0.595$$

$$Z_{21} = r_{21}d_1 = 1.000 * 0.900 = 0.900$$

$$P_{21} = (o_{21} - q_{21})(a_1 - c_1) = 0.150 * 0.200 = 0.030$$

$$T_{21} = q_{21}(a_1 - c_1) + c_1(o_{21} - q_{21}) = 0.600 * 0.200 + 0.500 * 0.150 = 0.195$$

$$H_{21} = T_{21} / (2P_{21}) = 0.195 / 0.060 = 3.250$$

$$V_{21} = (r_{21} - p_{21})(d_1 - b_1) = 0.150 * 0.200 = 0.030$$

$$U_{21} = r_{21}(b_1 - d_1) + d_1(p_{21} - r_{21}) = 1.000 * (-0.200) + 0.900 * (-0.100) = -0.335$$

$$L_{21} = -U_{21} / (2V_{21}) = 0.335 / 0.060 = 5.583. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D}_{21} = (0.300, 0.525, 0.595, 0.900; 3.250, 0.030; 5.583, 0.030).$$

$$D_{22} = (Y_{22}, Q_{22}, R_{22}, Z_{22}; H_{22}, P_{22}; L_{22}, V_{22}), \text{ com}$$

$$Y_{22} = q_{22}c_2 = 0.600 * 0.650 = 0.390$$

$$Q_{22} = o_{22}a_2 = 0.750 * 0.850 = 0.638$$

$$R_{22} = p_{22}b_2 = 0.850 * 0.850 = 0.723$$

$$Z_{22} = r_{22}d_2 = 1.000 * 1.000 = 1.000$$

$$P_{22} = (o_{22} - q_{22})(a_2 - c_2) = 0.150 * 0.200 = 0.030$$

$$T_{22} = q_{22}(a_2 - c_2) + c_2(o_{22} - q_{22}) = 0.600 * 0.200 + 0.650 * 0.150 = 0.218$$

$$H_{22} = T_{22} / (2P_{22}) = 0.218 / 0.060 = 3.633$$

$$V_{22} = (r_{22} - p_{22})(d_2 - b_2) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$U_{22} = r_{22}(b_2 - d_2) + d_2(p_{22} - r_{22}) = 1.000 * (-0.150) + 1.000 * (-0.150) = -0.300$$

$$L_{22} = -U_{22} / (2V_{22}) = 0.300 / 0.046 = 6.522. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D}_{22} = (0.390, 0.638, 0.723, 1.000; 3.633, 0.030; 6.522, 0.023).$$

$$D_{23} = (Y_{23}, Q_{23}, R_{23}, Z_{23}; H_{23}, P_{23}; L_{23}, V_{23}), \text{ com}$$

$$Y_{23} = q_{23}c_3 = 0.300 * 0.350 = 0.155$$

$$Q_{23} = o_{23}a_3 = 0.450 * 0.500 = 0.225$$

$$R_{23} = p_{23}b_3 = 0.600 * 0.500 = 0.300$$

$$Z_{23} = r_{23}d_3 = 0.700 * 0.650 = 0.455$$

$$P_{23} = (o_{23} - q_{23})(a_3 - c_3) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$T_{23} = q_{23}(a_3 - c_3) + c_3(o_{23} - q_{23}) = 0.300 * 0.150 + 0.350 * 0.150 = 0.098$$

$$H_{23} = T_{23} / (2P_{23}) = 0.098 / 0.046 = 2.130$$

$$V_{23} = (r_{23} - p_{23})(d_3 - b_3) = 0.100 * 0.150 = 0.015$$

$$U_{23} = r_{23}(b_3 - d_3) + d_3(p_{23} - r_{23}) = 0.700 * (-0.150) + 0.650 * (-0.100) = -0.170$$

$$L_{23} = -U_{23} / (2V_{23}) = 0.170 / 0.030 = 5.667. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D}_{23} = (0.105, 0.225, 0.300, 0.455; 2.130, 0.023; 5.667, 0.015).$$

$$D_{24} = (Y_{24}, Q_{24}, R_{24}, Z_{24}; H_{24}, P_{24}; L_{24}, V_{24}), \text{ com}$$

$$Y_{24} = q_{24}c_4 = 0.225 * 0.400 = 0.090$$

$$Q_{24} = o_{24}a_4 = 0.284 * 0.600 = 0.170$$

$$R_{24} = p_{24}b_4 = 0.284 * 0.600 = 0.170$$

$$Z_{24} = r_{24}d_4 = 0.363 * 0.800 = 0.290$$

$$P_{24} = (o_{24} - q_{24})(a_4 - c_4) = 0.059 * 0.200 = 0.012$$

$$T_{24} = q_{24}(a_4 - c_4) + c_4(o_{24} - q_{24}) = 0.225 * 0.200 + 0.400 * 0.059 = 0.069$$

$$H_{24} = T_{24} / (2P_{24}) = 0.069 / 0.024 = 2.875$$

$$V_{24} = (r_{24} - p_{24})(d_4 - b_4) = 0.079 * 0.200 = 0.016$$

$$U_{24} = r_{24}(b_4 - d_4) + d_4(p_{24} - r_{24}) = 0.363 * (-0.200) + 0.800 * (-0.200) = -0.136$$

$$L_{24} = -U_{24} / (2V_{24}) = 0.136 / 0.032 = 4.250. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{24} = (0.090, 0.170, 0.170, 0.290; 2.875, 0.012; 4.250, 0.016)}.$$

$$D_{25} = (Y_{25}, Q_{25}, R_{25}, Z_{25}; H_{25}, P_{25}; L_{25}, V_{25}), \text{ com}$$

$$Y_{25} = q_{25}c_5 = 0.191 * 0.200 = 0.038$$

$$Q_{25} = o_{25}a_5 = 0.236 * 0.400 = 0.094$$

$$R_{25} = p_{25}b_5 = 0.236 * 0.400 = 0.094$$

$$Z_{25} = r_{25}d_5 = 0.296 * 0.600 = 0.178$$

$$P_{25} = (o_{25} - q_{25})(a_5 - c_5) = 0.045 * 0.200 = 0.009$$

$$T_{25} = q_{25}(a_5 - c_5) + c_5(o_{25} - q_{25}) = 0.191 * 0.200 + 0.200 * 0.045 = 0.047$$

$$H_{25} = T_{25} / (2P_{25}) = 0.047 / 0.018 = 2.611$$

$$V_{25} = (r_{25} - p_{25})(d_5 - b_5) = 0.060 * 0.200 = 0.012$$

$$U_{25} = r_{25}(b_5 - d_5) + d_5(p_{25} - r_{25}) = 0.296 * (-0.200) + 0.600 * (-0.060) = -0.095$$

$$L_{25} = -U_{25} / (2V_{25}) = 0.095 / 0.024 = 3.958. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{25} = (0.038, 0.094, 0.094, 0.178; 2.611, 0.009; 3.958, 0.012)}.$$

$$D_{31} = (Y_{31}, Q_{31}, R_{31}, Z_{31}; H_{31}, P_{31}; L_{31}, V_{31}), \text{ com}$$

$$Y_{31} = q_{31}c_1 = 0.500 * 0.500 = 0.250$$

$$Q_{31} = o_{31}a_1 = 0.600 * 0.700 = 0.420$$

$$R_{31} = p_{31}b_1 = 0.700 * 0.700 = 0.490$$

$$Z_{31} = r_{31}d_1 = 0.800 * 0.900 = 0.720$$

$$P_{31} = (o_{31} - q_{31})(a_1 - c_1) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$T_{31} = q_{31}(a_1 - c_1) + c_1(o_{31} - q_{31}) = 0.500 * 0.200 + 0.500 * 0.100 = 0.150$$

$$H_{31} = T_{31} / (2P_{31}) = 0.150 / 0.040 = 3.750$$

$$V_{31} = (r_{31} - p_{31})(d_1 - b_1) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$U_{31} = r_{31}(b_1 - d_1) + d_1(p_{31} - r_{31}) = 0.800 * (-0.200) + 0.900 * (-0.100) = -0.250$$

$$L_{31} = -U_{31} / (2V_{31}) = 0.250 / 0.040 = 6.250. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{31} = (0.250, 0.420, 0.490, 0.720; 3.750, 0.020; 6.250, 0.020)}.$$

$$D_{32} = (Y_{32}, Q_{32}, R_{32}, Z_{32}; H_{32}, P_{32}; L_{32}, V_{32}), \text{ com}$$

$$Y_{32} = q_{32}c_2 = 0.600 * 0.650 = 0.390$$

$$Q_{32} = o_{32}a_2 = 0.750 * 0.850 = 0.638$$

$$R_{32} = p_{32}b_2 = 0.850 * 0.850 = 0.723$$

$$Z_{32} = r_{32}d_2 = 1.000 * 1.000 = 1.000$$

$$P_{32} = (o_{32} - q_{32})(a_2 - c_2) = 0.150 * 0.200 = 0.030$$

$$T_{32} = q_{32}(a_2 - c_2) + c_2(o_{32} - q_{32}) = 0.600 * 0.200 + 0.650 * 0.150 = 0.218$$

$$H_{32} = T_{32} / (2P_{32}) = 0.218 / 0.060 = 3.633$$

$$V_{32} = (r_{32} - p_{32})(d_2 - b_2) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$U_{32} = r_{32}(b_2 - d_2) + d_2(p_{32} - r_{32}) = 1.000 * (-0.150) + 1.000 * (-0.150) = -0.300$$

$$L_{32} = -U_{32} / (2V_{32}) = 0.300 / 0.046 = 6.522. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{32} = (0.390, 0.638, 0.723, 1.000; 3.633, 0.030; 6.522, 0.023)}.$$

$$D_{33} = (Y_{33}, Q_{33}, R_{33}, Z_{33}; H_{33}, P_{33}; L_{33}, V_{33}), \text{ com}$$

$$Y_{33} = q_{33}c_3 = 0.600 * 0.350 = 0.210$$

$$Q_{33} = o_{33}a_3 = 0.750 * 0.500 = 0.375$$

$$R_{33} = p_{33}b_3 = 0.850 * 0.500 = 0.425$$

$$Z_{33} = r_{33}d_3 = 1.000 * 0.650 = 0.650$$

$$P_{33} = (o_{33} - q_{33})(a_3 - c_3) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$T_{33} = q_{33}(a_3 - c_3) + c_3(o_{33} - q_{33}) = 0.600 * 0.150 + 0.350 * 0.150 = 0.143$$

$$H_{33} = T_{33} / (2P_{33}) = 0.143 / 0.046 = 3.109$$

$$V_{33} = (r_{33} - p_{33})(d_3 - b_3) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$U_{33} = r_{33}(b_3 - d_3) + d_3(p_{33} - r_{33}) = 1.000 * (-0.150) + 0.650 * (-0.150) = -0.248$$

$$L_{33} = -U_{33} / (2V_{33}) = 0.248 / 0.046 = 5.391. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{33} = (0.210, 0.375, 0.425, 0.650; 3.109, 0.023; 5.391, 0.023)}.$$

$$D_{34} = (Y_{34}, Q_{34}, R_{34}, Z_{34}; H_{34}, P_{34}, L_{34}, V_{34}), \text{ com}$$

$$Y_{34} = q_{34}c_4 = 0.232 * 0.400 = 0.093$$

$$Q_{34} = o_{34}a_4 = 0.293 * 0.600 = 0.176$$

$$R_{34} = p_{34}b_4 = 0.293 * 0.600 = 0.176$$

$$Z_{34} = r_{34}d_4 = 0.373 * 0.800 = 0.298$$

$$P_{34} = (o_{34} - q_{34})(a_4 - c_4) = 0.061 * 0.200 = 0.012$$

$$T_{34} = q_{34}(a_4 - c_4) + c_4(o_{34} - q_{34}) = 0.232 * 0.200 + 0.400 * 0.061 = 0.070$$

$$H_{34} = T_{34} / (2P_{34}) = 0.070 / 0.024 = 2.917$$

$$V_{34} = (r_{34} - p_{34})(d_4 - b_4) = 0.080 * 0.200 = 0.016$$

$$U_{34} = r_{34}(b_4 - d_4) + d_4(p_{34} - r_{34}) = 0.373 * (-0.200) + 0.800 * (-0.080) = -0.139$$

$$L_{34} = -U_{34} / (2V_{34}) = 0.139 / 0.032 = 4.344. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{34} = (0.093, 0.176, 0.176, 0.298; 2.917, 0.012; 4.344, 0.016)}.$$

$$D_{35} = (Y_{35}, Q_{35}, R_{35}, Z_{35}; H_{35}, P_{35}, L_{35}, V_{35}), \text{ com}$$

$$Y_{35} = q_{35}c_5 = 0.342 * 0.200 = 0.068$$

$$Q_{35} = o_{35}a_5 = 0.416 * 0.400 = 0.166$$

$$R_{35} = p_{35}b_5 = 0.416 * 0.400 = 0.166$$

$$Z_{35} = r_{35}d_5 = 0.506 * 0.600 = 0.304$$

$$P_{35} = (o_{35} - q_{35})(a_5 - c_5) = 0.074 * 0.200 = 0.015$$

$$T_{35} = q_{35}(a_5 - c_5) + c_5(o_{35} - q_{35}) = 0.342 * 0.200 + 0.200 * 0.074 = 0.083$$

$$H_{35} = T_{35} / (2P_{35}) = 0.083 / 0.030 = 2.767$$

$$V_{35} = (r_{35} - p_{35})(d_5 - b_5) = 0.090 * 0.200 = 0.018$$

$$U_{35} = r_{35}(b_5 - d_5) + d_5(p_{35} - r_{35}) = 0.506 * (-0.200) + 0.600 * (-0.090) = -0.155$$

$$L_{35} = -U_{35} / (2V_{35}) = 0.155 / 0.036 = 4.306. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{35} = (0.068, 0.166, 0.166, 0.304; 2.767, 0.015; 4.306, 0.018)}.$$

$$D_{41} = (Y_{41}, Q_{41}, R_{41}, Z_{41}; H_{41}, P_{41}, L_{41}, V_{41}), \text{ com}$$

$$Y_{41} = q_{41}c_1 = 0.100 * 0.500 = 0.050$$

$$Q_{41} = o_{41}a_1 = 0.200 * 0.700 = 0.140$$

$$R_{41} = p_{41}b_1 = 0.300 * 0.700 = 0.210$$

$$Z_{41} = r_{41}d_1 = 0.400 * 0.900 = 0.360$$

$$P_{41} = (o_{41} - q_{41})(a_1 - c_1) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$T_{41} = q_{41}(a_1 - c_1) + c_1(o_{41} - q_{41}) = 0.100 * 0.200 + 0.500 * 0.100 = 0.070$$

$$H_{41} = T_{41} / (2P_{41}) = 0.070 / 0.040 = 1.750$$

$$V_{41} = (r_{41} - p_{41})(d_1 - b_1) = 0.100 * 0.200 = 0.020$$

$$U_{41} = r_{41}(b_1 - d_1) + d_1(p_{41} - r_{41}) = 0.400 * (-0.200) + 0.900 * (-0.100) = -0.170$$

$$L_{41} = -U_{41} / (2V_{41}) = 0.170 / 0.040 = 4.250. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{41} = (0.050, 0.140, 0.210, 0.360; 1.750, 0.020; 4.250, 0.020)}.$$

$$D_{42} = (Y_{42}, Q_{42}, R_{42}, Z_{42}; H_{42}, P_{42}; L_{42}, V_{42}), \text{ com}$$

$$Y_{42} = q_{42}c_2 = 0.600 * 0.650 = 0.390$$

$$Q_{42} = o_{42}a_2 = 0.750 * 0.850 = 0.638$$

$$R_{42} = p_{42}b_2 = 0.850 * 0.850 = 0.723$$

$$Z_{42} = r_{42}d_2 = 1.000 * 1.000 = 1.000$$

$$P_{42} = (o_{42} - q_{42})(a_2 - c_2) = 0.150 * 0.200 = 0.030$$

$$T_{42} = q_{42}(a_2 - c_2) + c_2(o_{42} - q_{42}) = 0.600 * 0.200 + 0.650 * 0.150 = 0.218$$

$$H_{42} = T_{42} / (2P_{42}) = 0.218 / 0.060 = 3.633$$

$$V_{42} = (r_{42} - p_{42})(d_2 - b_2) = 0.150 * 0.150 = 0.023$$

$$U_{42} = r_{42}(b_2 - d_2) + d_2(p_{42} - r_{42}) = 1.000 * (-0.150) + 1.000 * (-0.150) = -0.300$$

$$L_{42} = -U_{42} / (2V_{42}) = 0.300 / 0.046 = 6.522. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{42} = (0.390, 0.638, 0.723, 1.000; 3.633, 0.030; 6.522, 0.023)}.$$

$$D_{43} = (Y_{43}, Q_{43}, R_{43}, Z_{43}; H_{43}, P_{43}; L_{43}, V_{43}), \text{ com}$$

$$Y_{43} = q_{43}c_3 = 0.100 * 0.350 = 0.035$$

$$Q_{43} = o_{43}a_3 = 0.200 * 0.500 = 0.100$$

$$R_{43} = p_{43}b_3 = 0.300 * 0.500 = 0.150$$

$$Z_{43} = r_{43}d_3 = 0.400 * 0.650 = 0.260$$

$$P_{43} = (o_{43} - q_{43})(a_3 - c_3) = 0.100 * 0.150 = 0.015$$

$$T_{43} = q_{43}(a_3 - c_3) + c_3(o_{43} - q_{43}) = 0.100 * 0.150 + 0.350 * 0.100 = 0.050$$

$$H_{43} = T_{43} / (2P_{43}) = 0.050 / 0.030 = 1.667$$

$$V_{43} = (r_{43} - p_{43})(d_3 - b_3) = 0.100 * 0.150 = 0.015$$

$$U_{43} = r_{43}(b_3 - d_3) + d_3(p_{43} - r_{43}) = 0.400 * (-0.150) + 0.650 * (-0.100) = -0.125$$

$$L_{43} = -U_{43} / (2V_{43}) = 0.125 / 0.030 = 4.167. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{43} = (0.035, 0.100, 0.150, 0.260; 1.667, 0.015; 4.167, 0.015)}.$$

$$D_{44} = (Y_{44}, Q_{44}, R_{44}, Z_{44}; H_{44}, P_{44}; L_{44}, V_{44}), \text{ com}$$

$$Y_{44} = q_{44}c_4 = 0.178 * 0.400 = 0.071$$

$$Q_{44} = o_{44}a_4 = 0.224 * 0.600 = 0.134$$

$$R_{44} = p_{44}b_4 = 0.224 * 0.600 = 0.134$$

$$Z_{44} = r_{44}d_4 = 0.284 * 0.800 = 0.227$$

$$P_{44} = (o_{44} - q_{44})(a_4 - c_4) = 0.046 * 0.200 = 0.009$$

$$T_{44} = q_{44}(a_4 - c_4) + c_4(o_{44} - q_{44}) = 0.178 * 0.200 + 0.400 * 0.046 = 0.054$$

$$H_{44} = T_{44} / (2P_{44}) = 0.054 / 0.018 = 3.000$$

$$V_{44} = (r_{44} - p_{44})(d_4 - b_4) = 0.060 * 0.200 = 0.012$$

$$U_{44} = r_{44}(b_4 - d_4) + d_4(p_{44} - r_{44}) = 0.284 * (-0.200) + 0.800 * (-0.060) = -0.105$$

$$L_{44} = -U_{44} / (2V_{44}) = 0.105 / 0.024 = 4.375. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{44} = (0.071, 0.134, 0.134, 0.227; 3.000, 0.009; 4.375, 0.012)}.$$

$$D_{45} = (Y_{45}, Q_{45}, R_{45}, Z_{45}; H_{45}, P_{45}; L_{45}, V_{45}), \text{ com}$$

$$Y_{45} = q_{45}c_5 = 0.169 * 0.200 = 0.034$$

$$Q_{45} = o_{45}a_5 = 0.204 * 0.400 = 0.082$$

$$R_{45} = p_{45}b_5 = 0.204 * 0.400 = 0.082$$

$$Z_{45} = r_{45}d_5 = 0.247 * 0.600 = 0.148$$

$$P_{45} = (o_{45} - q_{45})(a_5 - c_5) = 0.035 * 0.200 = 0.007$$

$$T_{45} = q_{45}(a_5 - c_5) + c_5(o_{45} - q_{45}) = 0.169 * 0.200 + 0.200 * 0.035 = 0.041$$

$$H_{45} = T_{45} / (2P_{45}) = 0.041 / 0.014 = 2.929$$

$$V_{45} = (r_{45} - p_{45})(d_5 - b_5) = 0.043 * 0.200 = 0.009$$

$$U_{45} = r_{45}(b_5 - d_5) + d_5(p_{45} - r_{45}) = 0.247 * (-0.200) + 0.600 * (-0.043) = -0.075$$

$$L_{45} = -U_{45} / (2V_{45}) = 0.075 / 0.018 = 4.167. \text{ Logo}$$

$$\mathbf{D_{45} = (0.034, 0.082, 0.082, 0.148; 2.929, 0.007; 4.167, 0.009)}.$$

8° Passo: Para ranquear adequadamente os  $D_{it}$ , encontraremos os  $U_T(D_{it})$  utilizando a idéia de maximização e minimização de conjuntos estabelecidos no texto (Liang, G-S., 1997), com a aplicação da equação (10). Assim:

$$U_T(D_{it}) = [L_{it} - (L_{it}^2 + (x_R - Z_{it}) / V_{it})^{1/2} + 1 + H_{it} - (H_{it}^2 + (x_L - Y_{it}) / P_{it})^{1/2}] / 2,$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $t = 1, 2, \dots, k$ , onde

$$x_R = \{2x_{1t} + 2L_{it}(x_{2t} - x_{1t}) + (x_{2t} - x_{1t})^2 / V_{1t} - (x_{2t} - x_{1t})[(2L_{it} + (x_{2t} - x_{1t}) / V_{it})^2 + 4(x_{1t} - Z_{it}) / V_{it}]^{1/2}\} / 2 \text{ e}$$

$$x_L = \{2x_{2t} + 2H_{it}(x_{2t} - x_{1t}) + (x_{2t} - x_{1t})^2 / P_{1t} - (x_{2t} - x_{1t})[(2H_{it} + (x_{2t} - x_{1t}) / P_{it})^2 + 4(x_{2t} - Y_{it}) / P_{it}]^{1/2}\} / 2,$$

sendo  $x_{1t} = \min_i \{q_{it}c_i\}$  e  $x_{2t} = \max_i \{r_{it}d_i\}$ . Logo ter-se-á:

$$\text{Para } t = 1, x_{11} = \min_i \{q_{i1}c_i\} = x_{11} = \min \{q_{11}c_1, q_{21}c_1, q_{31}c_1, q_{41}c_1\}$$

$$x_{11} = \min \{0.175, 0.300, 0.250, 0.050\} = 0.050$$

$$x_{21} = \max_i \{r_{i1}d_i\} = x_{21} = \max \{r_{11}d_1, r_{21}d_1, r_{31}d_1, r_{41}d_1\}$$

$$x_{21} = \max \{0.585, 0.900, 0.720, 0.360\} = 0.900.$$

$$\text{Para } t = 2, x_{12} = \min_i \{q_{i2}c_i\} = x_{12} = \min \{q_{12}c_2, q_{22}c_2, q_{32}c_2, q_{42}c_2\}$$

$$x_{12} = \min \{0.130, 0.390, 0.390, 0.390\} = 0.130$$

$$x_{22} = \max_i \{r_{i2}d_i\} = x_{22} = \max \{r_{12}d_2, r_{22}d_2, r_{32}d_2, r_{42}d_2\}$$

$$x_{22} = \max \{0.500, 1.000, 1.000, 1.000\} = 1.000.$$

$$\text{Para } t = 3, x_{13} = \min_i \{q_{i3}c_i\} = x_{13} = \min \{q_{13}c_3, q_{23}c_3, q_{33}c_3, q_{43}c_3\}$$

$$x_{13} = \min \{0.175, 0.105, 0.210, 0.035\} = 0.035$$

$$x_{23} = \max_i \{r_{i3}d_i\} = x_{23} = \max \{r_{13}d_3, r_{23}d_3, r_{33}d_3, r_{43}d_3\}$$

$$x_{23} = \max \{0.520, 0.455, 0.650, 0.260\} = 0.650.$$

$$\text{Para } t = 4, x_{14} = \min_i \{q_{i4}c_i\} = x_{14} = \min \{q_{14}c_4, q_{24}c_4, q_{34}c_4, q_{44}c_4\}$$

$$x_{14} = \min \{0.062, 0.090, 0.093, 0.071\} = 0.062$$

$$x_{24} = \max_i \{r_{i4}d_i\} = x_{24} = \max \{r_{14}d_4, r_{24}d_4, r_{34}d_4, r_{44}d_4\}$$

$$x_{24} = \max \{0.196, 0.290, 0.298, 0.227\} = 0.298.$$

$$\text{Para } t = 5, x_{15} = \min_i \{q_{i5}c_5\} = x_{15} = \min \{q_{15}c_5, q_{25}c_5, q_{35}c_5, q_{45}c_5\}$$

$$x_{15} = \min \{0.023, 0.038, 0.068, 0.034\} = 0.023$$

$$x_{25} = \max_i \{r_{i5}d_5\} = x_{25} = \max \{r_{15}d_5, r_{25}d_5, r_{35}d_5, r_{45}d_5\}$$

$$x_{25} = \max \{0.107, 0.178, 0.304, 0.148\} = 0.304.$$

Para i = 1 e t = 1:

$$x_R = \{2x_{11} + 2L_{11}(x_{21}-x_{11}) + (x_{21}-x_{11})^2 / V_{11} - (x_{21}-x_{11})[(2L_{11} + (x_{21}-x_{11}) / V_{11})^2 + 4(x_{11}-Z_{11}) / V_{11}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{21} + 2H_{11}(x_{21}-x_{11}) + (x_{21}-x_{11})^2 / P_{11} - (x_{21}-x_{11})[(2H_{11} + (x_{21}-x_{11}) / P_{11})^2 + 4(x_{21}-Y_{11}) / P_{11}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.050 + 2*5.500*0.850 + 0.850^2 / 0.020 - 0.850*[(2*5.500 + 0.850 / 0.020)^2 + 4(0.050-0.585) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.900 + 2*3.000*0.850 + 0.850^2 / 0.020 - 0.850*[(2*3.000 + 0.850 / 0.020)^2 + 4(0.900-0.175) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.100 + 9.350 + 36.125 - 0.850*[(11.000+42.500)^2 - 107.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.800 + 5.100 + 36.125 - 0.850*[(6.000+42.500)^2 + 145.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{45.575 - 0.850*52.490\} / 2 = \{45.575 - 44.617\} / 2 = \mathbf{0.479}$$

$$x_L = \{43.025 - 0.850*49.972\} / 2 = \{43.025 - 42.477\} / 2 = \mathbf{0.274}$$

$$U_T(D_{11}) = [L_{11} - (L_{11}^2 + (x_R - Z_{11}) / V_{11})^{1/2} + 1 + H_{11} - (H_{11}^2 + (x_L - Y_{11}) / P_{11})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{11}) = [5.500 - (5.500^2 + (0.479 - 0.585) / 0.020)^{1/2} + 1 + 3.000 - (3.000^2 + (0.274 - 0.175) / 0.020)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{11}) = [5.500 - (30.250 - 5.300)^{1/2} + 4.000 - (9.000 + 4.950)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{11}) = [5.500 - 4.995 + 4.000 - 3.735] / 2 = \mathbf{0.385}$$

Para i = 2 e t = 1:

$$x_R = \{2x_{11} + 2L_{21}(x_{21} - x_{11}) + (x_{21} - x_{11})^2 / V_{21} - (x_{21} - x_{11})[(2L_{21} + (x_{21} - x_{11}) / V_{21})^2 + 4(x_{11} - Z_{21}) / V_{21}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{21} + 2H_{21}(x_{21} - x_{11}) + (x_{21} - x_{11})^2 / P_{21} - (x_{21} - x_{11})[(2H_{21} + (x_{21} - x_{11}) / P_{21})^2 + 4(x_{21} - Y_{21}) / P_{21}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.050 + 2*5.583*0.850 + 0.850^2 / 0.030 - 0.850*[(2*5.583 + 0.850 / 0.030)^2 + 4(0.050 - 0.900) / 0.030]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.900 + 2*3.250*0.850 + 0.850^2 / 0.030 - 0.850*[(2*3.250 + 0.850 / 0.030)^2 + 4(0.900 - 0.300) / 0.030]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.100 + 9.491 + 24.083 - 0.850*[(11.166 + 28.333)^2 - 113.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.800 + 5.525 + 24.083 - 0.850*[(6.500 + 28.333)^2 + 80.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{33.674 - 0.850*38.037\} / 2 = \{33.674 - 32.331\} / 2 = \mathbf{0.672}$$

$$x_L = \{31.408 - 0.850*35.963\} / 2 = \{31.408 - 30.569\} / 2 = \mathbf{0.420}$$

$$U_T(D_{21}) = [L_{21} - (L_{21}^2 + (x_R - Z_{21}) / V_{21})^{1/2} + 1 + H_{21} - (H_{21}^2 + (x_L - Y_{21}) / P_{21})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{21}) = [5.583 - (5.583^2 + (0.672 - 0.900) / 0.030)^{1/2} + 1 + 3.250 - (3.250^2 + (0.420 - 0.300) / 0.030)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{21}) = [5.583 - (31.170 - 7.600)^{1/2} + 4.250 - (10.563 + 4.000)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{21}) = [5.583 - 4.855 + 4.250 - 3.816] / 2 = \mathbf{0.581}$$

Para i = 3 e t = 1:

$$x_R = \{2x_{11} + 2L_{31}(x_{21}-x_{11}) + (x_{21}-x_{11})^2 / V_{31} - (x_{21}-x_{11})[(2L_{31} + (x_{21}-x_{11}) / V_{31})^2 + 4(x_{11}-Z_{31}) / V_{31}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{21} + 2H_{31}(x_{21}-x_{11}) + (x_{21}-x_{11})^2 / P_{31} - (x_{21}-x_{11})[(2H_{31} + (x_{21}-x_{11}) / P_{31})^2 + 4(x_{21}-Y_{31}) / P_{31}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.050 + 2*6.250*0.850 + 0.850^2 / 0.020 - 0.850*[(2*6.250 + 0.850 / 0.020)^2 + 4(0.050-0.720) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.900 + 2*3.750*0.850 + 0.850^2 / 0.020 - 0.850*[(2*3.750 + 0.850 / 0.020)^2 + 4(0.900-0.250) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.100 + 10.625 + 36.125 - 0.850*[(12.500+42.500)^2 - 134.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.800 + 6.375 + 36.125 - 0.850*[(7.500+42.500)^2 + 130.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{46.850 - 0.850*53.768\} / 2 = \{46.850 - 45.703\} / 2 = \mathbf{0.574}$$

$$x_L = \{44.300 - 0.850*51.284\} / 2 = \{44.300 - 43.591\} / 2 = \mathbf{0.355}$$

$$U_T(D_{31}) = [L_{31} - (L_{31}^2 + (x_R - Z_{31}) / V_{31})^{1/2} + 1 + H_{31} - (H_{31}^2 + (x_L - Y_{31}) / P_{31})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{31}) = [6.250 - (6.250^2 + (0.574 - 0.720) / 0.020)^{1/2} + 1 + 3.750 - (3.750^2 + (0.355 - 0.250) / 0.020)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{31}) = [6.250 - (39.063 - 7.300)^{1/2} + 4.750 - (14.063 + 5.250)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{31}) = [6.250 - 5.636 + 4.750 - 4.395] / 2 = \mathbf{0.485}$$

Para i = 4 e t = 1:

$$x_R = \{2x_{11} + 2L_{41}(x_{21}-x_{11}) + (x_{21}-x_{11})^2 / V_{41} - (x_{21}-x_{11})[(2L_{41} + (x_{21}-x_{11}) / V_{41})^2 + 4(x_{11}-Z_{41}) / V_{41}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{21} + 2H_{41}(x_{21}-x_{11}) + (x_{21}-x_{11})^2 / P_{41} - (x_{21}-x_{11})[(2H_{41} + (x_{21}-x_{11}) / P_{41})^2 + 4(x_{21}-Y_{41}) / P_{41}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.050 + 2*4.250*0.850 + 0.850^2 / 0.020 - 0.850*[(2*4.250 + 0.850 / 0.020)^2 + 4(0.050-0.360) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.900 + 2*1.750*0.850 + 0.850^2 / 0.020 - 0.850*[(2*1.750 + 0.850 / 0.020)^2 + 4(0.900-0.050) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.100 + 7.225 + 36.125 - 0.850*[(8.500+42.500)^2 - 62.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.800 + 2.975 + 36.125 - 0.850*[(3.500+42.500)^2 + 170.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{43.450 - 0.850*50.388\} / 2 = \{43.450 - 42.830\} / 2 = \mathbf{0.310}$$

$$x_L = \{40.900 - 0.850*47.812\} / 2 = \{40.900 - 40.640\} / 2 = \mathbf{0.130}$$

$$U_T(D_{41}) = [L_{41} - (L_{41}^2 + (x_R - Z_{41}) / V_{41})^{1/2} + 1 + H_{41} - (H_{41}^2 + (x_L - Y_{41}) / P_{41})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{41}) = [4.250 - (4.250^2 + (0.310 - 0.360) / 0.020)^{1/2} + 1 + 1.750 - (1.750^2 + (0.130 - 0.050) / 0.020)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{41}) = [4.250 - (18.063 - 2.500)^{1/2} + 2.750 - (3.063 + 4.000)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{41}) = [4.250 - 3.945 + 2.750 - 2.658] / 2 = \mathbf{0.199}$$

Para i = 1 e t = 2:

$$x_R = \{2x_{12} + 2L_{12}(x_{22}-x_{12}) + (x_{22}-x_{12})^2 / V_{12} - (x_{22}-x_{12})[(2L_{12} + (x_{22}-x_{12}) / V_{12})^2 + 4(x_{12}-Z_{12}) / V_{12}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{22} + 2H_{12}(x_{22}-x_{12}) + (x_{22}-x_{12})^2 / P_{12} - (x_{22}-x_{12})[(2H_{12} + (x_{22}-x_{12}) / P_{12})^2 + 4(x_{22}-Y_{12}) / P_{12}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.130 + 2*4.891*0.870 + 0.870^2 / 0.023$$

$$- 0.870 * [(2 * 4.891 + 0.870 / 0.023)^2 + 4(0.130 - 0.500) / 0.023]^{1/2} / 2$$

$$x_L = \{2 * 1.000 + 2 * 2.625 * 0.870 + 0.870^2 / 0.020$$

$$- 0.870 * [(2 * 2.625 + 0.870 / 0.020)^2 + 4(1.000 - 0.130) / 0.020]^{1/2} / 2$$

$$x_R = \{0.260 + 8.510 + 32.909 - 0.870 * [(9.782 + 37.826)^2 - 64.348]^{1/2} / 2$$

$$x_L = \{2.000 + 4.568 + 37.845 - 0.870 * [(5.250 + 43.500)^2 + 174.000]^{1/2} / 2$$

$$x_R = \{41.679 - 0.870 * 46.929\} / 2 = \{41.679 - 40.828\} / 2 = \mathbf{0.426}$$

$$x_L = \{44.413 - 0.870 * 50.503\} / 2 = \{44.413 - 43.938\} / 2 = \mathbf{0.238}$$

$$U_T(D_{12}) = [L_{12} - (L_{12}^2 + (x_R - Z_{12}) / V_{12})^{1/2} + 1 + H_{12} - (H_{12}^2 + (x_L - Y_{12}) / P_{12})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{12}) = [4.891 - (4.891^2 + (0.426 - 0.500) / 0.023)^{1/2} + 1 + 2.625 - \\ (2.625^2 + (0.238 - 0.130) / 0.020)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{12}) = [4.891 - (23.922 - 3.217)^{1/2} + 3.625 - (6.891 + 5.400)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{12}) = [4.891 - 4.550 + 3.625 - 3.506] / 2 = \mathbf{0.230}$$

Para i = 2 e t = 2:

$$x_R = \{2x_{12} + 2L_{22}(x_{22} - x_{12}) + (x_{22} - x_{12})^2 / V_{22} \\ - (x_{22} - x_{12}) [(2L_{22} + (x_{22} - x_{12}) / V_{22})^2 + 4(x_{12} - Z_{22}) / V_{22}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{22} + 2H_{22}(x_{22} - x_{12}) + (x_{22} - x_{12})^2 / P_{22} \\ - (x_{22} - x_{12}) [(2H_{22} + (x_{22} - x_{12}) / P_{22})^2 + 4(x_{22} - Y_{22}) / P_{22}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2 * 0.130 + 2 * 6.522 * 0.870 + 0.870^2 / 0.023 \\ - 0.870 * [(2 * 6.522 + 0.870 / 0.023)^2 + 4(0.130 - 1.000) / 0.023]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2 * 1.000 + 2 * 3.633 * 0.870 + 0.870^2 / 0.030 \\ - 0.870 * [(2 * 3.633 + 0.870 / 0.030)^2 + 4(1.000 - 0.390) / 0.030]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.260 + 11.348 + 32.909 - 0.870 * [(13.044 + 37.826)^2 - 151.304]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2.000 + 6.321 + 25.230 - 0.870 * [(7.266 + 29.000)^2 + 81.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{44.517 - 0.870 * 49.360\} / 2 = \{44.517 - 42.944\} / 2 = \mathbf{0.787}$$

$$x_L = \{33.551 - 0.870 * 37.371\} / 2 = \{33.551 - 32.512\} / 2 = \mathbf{0.520}$$

$$U_T(D_{22}) = [L_{22} - (L_{22}^2 + (x_R - Z_{22}) / V_{22})^{1/2} + 1 + H_{22} - (H_{22}^2 + (x_L - Y_{22}) / P_{22})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{22}) = [6.522 - (6.522^2 + (0.787 - 1.000) / 0.023)^{1/2} + 1 + 3.633 - (3.633^2 + (0.520 - 0.390) / 0.030)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{22}) = [6.522 - (42.536 - 9.261)^{1/2} + 4.633 - (13.199 + 4.333)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{22}) = [6.522 - 5.768 + 4.633 - 4.187] / 2 = \mathbf{0.600}$$

Para i = 3 e t = 2:

$$x_R = \{2x_{12} + 2L_{32}(x_{22} - x_{12}) + (x_{22} - x_{12})^2 / V_{32} - (x_{22} - x_{12})[(2L_{32} + (x_{22} - x_{12}) / V_{32})^2 + 4(x_{12} - Z_{32}) / V_{32}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{22} + 2H_{32}(x_{22} - x_{12}) + (x_{22} - x_{12})^2 / P_{32} - (x_{22} - x_{12})[(2H_{32} + (x_{22} - x_{12}) / P_{32})^2 + 4(x_{22} - Y_{32}) / P_{32}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2 * 0.130 + 2 * 6.522 * 0.870 + 0.870^2 / 0.023 - 0.870 * [(2 * 6.522 + 0.870 / 0.023)^2 + 4(0.130 - 1.000) / 0.023]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2 * 1.000 + 2 * 3.633 * 0.870 + 0.870^2 / 0.030 - 0.870 * [(2 * 3.633 + 0.870 / 0.030)^2 + 4(1.000 - 0.390) / 0.030]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.260 + 11.348 + 32.909 - 0.870 * [(13.044 + 37.826)^2 - 151.304]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2.000 + 6.321 + 25.230 - 0.870 * [(7.266 + 29.000)^2 + 81.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{44.517 - 0.870*49.360\} / 2 = \{44.517 - 42.944\} / 2 = \mathbf{0.787}$$

$$x_L = \{33.551 - 0.870*37.371\} / 2 = \{33.551 - 32.512\} / 2 = \mathbf{0.520}$$

$$U_T(D_{32}) = [L_{32} - (L_{32}^2 + (x_R - Z_{32}) / V_{32})^{1/2} + 1 + H_{32} - (H_{32}^2 + (x_L - Y_{32}) / P_{32})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{32}) = [6.522 - (6.522^2 + (0.787 - 1.000) / 0.023)^{1/2} + 1 + 3.633 - (3.633^2 + (0.520 - 0.390) / 0.030)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{32}) = [6.522 - (42.536 - 9.261)^{1/2} + 4.633 - (13.199 + 4.333)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{32}) = [6.522 - 5.768 + 4.633 - 4.187] / 2 = \mathbf{0.600}$$

Para i = 4 e t = 2:

$$x_R = \{2x_{12} + 2L_{42}(x_{22}-x_{12}) + (x_{22}-x_{12})^2 / V_{42} - (x_{22}-x_{12})[(2L_{42} + (x_{22}-x_{12}) / V_{42})^2 + 4(x_{12}-Z_{42}) / V_{42}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{22} + 2H_{42}(x_{22}-x_{12}) + (x_{22}-x_{12})^2 / P_{42} - (x_{22}-x_{12})[(2H_{42} + (x_{22}-x_{12}) / P_{42})^2 + 4(x_{22}-Y_{42}) / P_{42}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.130 + 2*6.522*0.870 + 0.870^2 / 0.023 - 0.870*[(2*6.522 + 0.870 / 0.023)^2 + 4(0.130-1.000) / 0.023]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*1.000 + 2*3.633*0.870 + 0.870^2 / 0.030 - 0.870*[(2*3.633 + 0.870 / 0.030)^2 + 4(1.000-0.390) / 0.030]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.260 + 11.348 + 32.909 - 0.870*[(13.044+37.826)^2 - 151.304]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2.000 + 6.321 + 25.230 - 0.870*[(7.266+29.000)^2 + 81.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{44.517 - 0.870*49.360\} / 2 = \{44.517 - 42.944\} / 2 = \mathbf{0.787}$$

$$x_L = \{33.551 - 0.870*37.371\} / 2 = \{33.551 - 32.512\} / 2 = \mathbf{0.520}$$

$$U_T(D_{42}) = [L_{42} - (L_{42}^2 + (x_R - Z_{42}) / V_{42})^{1/2} + 1 + H_{42} - (H_{42}^2 + (x_L - Y_{42}) / P_{42})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{42}) = [6.522 - (6.522^2 + (0.787 - 1.000) / 0.023)^{1/2} + 1 + 3.633 - (3.633^2 + (0.520 - 0.390) / 0.030)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{42}) = [6.522 - (42.536 - 9.261)^{1/2} + 4.633 - (13.199 + 4.333)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{42}) = [6.522 - 5.768 + 4.633 - 4.187] / 2 = \mathbf{0.600}$$

Para i = 1 e t = 3:

$$x_R = \{2x_{13} + 2L_{13}(x_{23} - x_{13}) + (x_{23} - x_{13})^2 / V_{13} - (x_{23} - x_{13})[(2L_{13} + (x_{23} - x_{13}) / V_{13})^2 + 4(x_{13} - Z_{13}) / V_{13}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{23} + 2H_{13}(x_{23} - x_{13}) + (x_{23} - x_{13})^2 / P_{13} - (x_{23} - x_{13})[(2H_{13} + (x_{23} - x_{13}) / P_{13})^2 + 4(x_{23} - Y_{13}) / P_{13}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2 * 0.035 + 2 * 6.167 * 0.615 + 0.615^2 / 0.015 - 0.615 * [(2 * 6.167 + 0.615 / 0.015)^2 + 4(0.035 - 0.520) / 0.015]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2 * 0.650 + 2 * 4.167 * 0.615 + 0.615^2 / 0.015 - 0.615 * [(2 * 4.167 + 0.615 / 0.015)^2 + 4(0.650 - 0.175) / 0.015]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.070 + 7.585 + 25.215 - 0.615 * [(12.334 + 41.000)^2 - 129.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.300 + 5.125 + 25.215 - 0.615 * [(8.334 + 41.000)^2 + 126.667]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{32.870 - 0.615 * 52.107\} / 2 = \{32.870 - 32.046\} / 2 = \mathbf{0.412}$$

$$x_L = \{31.640 - 0.615 * 50.601\} / 2 = \{31.640 - 31.120\} / 2 = \mathbf{0.260}$$

$$U_T(D_{13}) = [L_{13} - (L_{13}^2 + (x_R - Z_{13}) / V_{13})^{1/2} + 1 + H_{13} - (H_{13}^2 + (x_L - Y_{13}) / P_{13})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{13}) = [6.167 - (6.167^2 + (0.412 - 0.520) / 0.015)^{1/2} + 1 + 4.167 - (4.167^2 + (0.260 - 0.175) / 0.015)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{13}) = [6.167 - (38.032 - 7.200)^{1/2} + 5.167 - (17.364 + 5.667)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{13}) = [6.167 - 5.553 + 5.167 - 4.799] / 2 = \mathbf{0.491}$$

Para i = 2 e t = 3:

$$x_R = \{2x_{13} + 2L_{23}(x_{23}-x_{13}) + (x_{23}-x_{13})^2 / V_{23} - (x_{23}-x_{13})[(2L_{23} + (x_{23}-x_{13}) / V_{23})^2 + 4(x_{13}-Z_{23}) / V_{23}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{23} + 2H_{23}(x_{23}-x_{13}) + (x_{23}-x_{13})^2 / P_{23} - (x_{23}-x_{13})[(2H_{23} + (x_{23}-x_{13}) / P_{23})^2 + 4(x_{23}-Y_{23}) / P_{23}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.035 + 2*5.667*0.615 + 0.615^2 / 0.020 - 0.615*[(2*5.667 + 0.615 / 0.020)^2 + 4(0.035-0.455) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.650 + 2*2.130*0.615 + 0.615^2 / 0.020 - 0.615*[(2*2.130 + 0.615 / 0.020)^2 + 4(0.650-0.105) / 0.020]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.070 + 6.970 + 18.911 - 0.615*[(11.334+30.750)^2 - 84.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.300 + 2.620 + 18.911 - 0.615*[(4.260+30.750)^2 + 109.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{25.951 - 0.615*41.074\} / 2 = \{25.951 - 25.260\} / 2 = \mathbf{0.346}$$

$$x_L = \{22.831 - 0.615*36.534\} / 2 = \{22.831 - 22.468\} / 2 = \mathbf{0.182}$$

$$U_T(D_{23}) = [L_{23} - (L_{23}^2 + (x_R - Z_{23}) / V_{23})^{1/2} + 1 + H_{23} - (H_{23}^2 + (x_L - Y_{23}) / P_{23})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{23}) = [5.667 - (5.667^2 + (0.346 - 0.455) / 0.020)^{1/2} + 1 + 2.130 - (2.130^2 + (0.182 - 0.105) / 0.020)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{23}) = [5.667 - (32.115 - 5.450)^{1/2} + 3.130 - (4.537 + 3.850)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{23}) = [5.667 - 5.164 + 3.130 - 2.896] / 2 = \mathbf{0.369}$$

Para i = 3 e t = 3:

$$x_R = \{2x_{13} + 2L_{33}(x_{23}-x_{13}) + (x_{23}-x_{13})^2 / V_{33}$$

$$- (x_{23}-x_{13})[(2L_{33} + (x_{23}-x_{13}) / V_{33})^2 + 4(x_{13}-Z_{33}) / V_{33}]^{1/2} / 2$$

$$x_L = \{2x_{23} + 2H_{33}(x_{23}-x_{13}) + (x_{23}-x_{13})^2 / P_{33} \\ - (x_{23}-x_{13})[(2H_{33} + (x_{23}-x_{13}) / P_{33})^2 + 4(x_{23}-Y_{33}) / P_{33}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.035 + 2*5.391*0.615 + 0.615^2 / 0.023 \\ - 0.615*[(2*5.391 + 0.615 / 0.023)^2 + 4(0.035-0.650) / 0.023]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.650 + 2*3.109*0.615 + 0.615^2 / 0.023 \\ - 0.615*[(2*3.109 + 0.615 / 0.023)^2 + 4(0.650-0.210) / 0.023]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.070 + 6.631 + 16.445 - 0.615*[(10.782+26.739)^2 - 106.957]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{1.300 + 3.824 + 16.445 - 0.615*[(6.218+26.739)^2 + 76.522]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{23.146 - 0.615*36.068\} / 2 = \{23.146 - 22.182\} / 2 = \mathbf{0.482}$$

$$x_L = \{21.569 - 0.615*34.098\} / 2 = \{21.569 - 20.970\} / 2 = \mathbf{0.300}$$

$$U_T(D_{33}) = [L_{33} - (L_{33}^2 + (x_R - Z_{33}) / V_{33})^{1/2} + 1 + H_{33} - (H_{33}^2 + (x_L - Y_{33}) / P_{33})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{33}) = [5.391 - (5.391^2 + (0.482 - 0.650) / 0.023)^{1/2} + 1 + 3.109 - \\ (3.109^2 + (0.300 - 0.210) / 0.023)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{33}) = [5.391 - (29.063 - 7.304)^{1/2} + 4.109 - (9.666 + 3.913)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{33}) = [5.391 - 4.665 + 4.109 - 3.685] / 2 = \mathbf{0.575}$$

Para i = 4 e t = 3:

$$x_R = \{2x_{13} + 2L_{43}(x_{23}-x_{13}) + (x_{23}-x_{13})^2 / V_{43} \\ - (x_{23}-x_{13})[(2L_{43} + (x_{23}-x_{13}) / V_{43})^2 + 4(x_{13}-Z_{43}) / V_{43}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{23} + 2H_{43}(x_{23}-x_{13}) + (x_{23}-x_{13})^2 / P_{43} \\ - (x_{23}-x_{13})[(2H_{43} + (x_{23}-x_{13}) / P_{43})^2 + 4(x_{23}-Y_{43}) / P_{43}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.035 + 2*6.167*0.615 + 0.615^2 / 0.015 \\ - 0.615*[(2*6.167 + 0.615 / 0.015)^2 + 4(0.035-0.520) / 0.015]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.650 + 2*4.167*0.615 + 0.615^2 / 0.015 \\ - 0.615*[(2*4.167 + 0.615 / 0.015)^2 + 4(0.650-0.175) / 0.015]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.070 + 7.585 + 25.215 - 0.615*[(12.334+41.000)^2 - 129.333]^{1/2}\} / 2 \\ x_L = \{1.300 + 5.125 + 25.215 - 0.615*[(8.334+41.000)^2 + 126.667]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{32.870 - 0.615*52.107\} / 2 = \{32.870 - 32.046\} / 2 = \mathbf{0.412}$$

$$x_L = \{31.640 - 0.615*50.601\} / 2 = \{31.640 - 31.120\} / 2 = \mathbf{0.260}$$

$$U_T(D_{43}) = [L_{43} - (L_{43}^2 + (x_R - Z_{43}) / V_{43})^{1/2} + 1 + H_{43} - (H_{43}^2 + (x_L - Y_{43}) / P_{43})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{43}) = [6.167 - (6.167^2 + (0.412 - 0.520) / 0.015)^{1/2} + 1 + 4.167 - \\ (4.167^2 + (0.260 - 0.175) / 0.015)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{43}) = [6.167 - (38.032 - 7.200)^{1/2} + 5.167 - (17.364 + 5.667)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{43}) = [6.167 - 5.553 + 5.167 - 4.799] / 2 = \mathbf{0.491}$$

Para i = 1 e t = 4:

$$x_R = \{2x_{14} + 2L_{14}(x_{24}-x_{14}) + (x_{24}-x_{14})^2 / V_{14} \\ - (x_{24}-x_{14})[(2L_{14} + (x_{24}-x_{14}) / V_{14})^2 + 4(x_{14}-Z_{14}) / V_{14}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{24} + 2H_{14}(x_{24}-x_{14}) + (x_{24}-x_{14})^2 / P_{14} \\ - (x_{24}-x_{14})[(2H_{14} + (x_{24}-x_{14}) / P_{14})^2 + 4(x_{24}-Y_{14}) / P_{14}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.062 + 2*4.833*0.236 + 0.236^2 / 0.009 \\ - 0.236*[(2*4.833 + 0.236 / 0.009)^2 + 4(0.062-0.196) / 0.009]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.298 + 2*2.667*0.236 + 0.236^2 / 0.009$$

$$- 0.236 * [(2 * 2.667 + 0.236 / 0.009)^2 + 4(0.298 - 0.062) / 0.009]^{1/2} \} / 2$$

$$x_R = \{0.124 + 2.281 + 6.188 - 0.236 * [(9.666 + 26.222)^2 - 59.556]^{1/2} \} / 2$$

$$x_L = \{0.596 + 1.259 + 6.188 - 0.236 * [(5.334 + 26.222)^2 + 104.889]^{1/2} \} / 2$$

$$x_R = \{8.593 - 0.236 * 35.048 \} / 2 = \{8.593 - 8.271 \} / 2 = \mathbf{0.161}$$

$$x_L = \{8.043 - 0.236 * 33.176 \} / 2 = \{8.043 - 7.830 \} / 2 = \mathbf{0.107}$$

$$U_T(D_{14}) = [L_{14} - (L_{14}^2 + (x_R - Z_{14}) / V_{14})^{1/2} + 1 + H_{14} - (H_{14}^2 + (x_L - Y_{14}) / P_{14})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{14}) = [4.833 - (4.833^2 + (0.161 - 0.196) / 0.009)^{1/2} + 1 + 2.667 - (2.667^2 + (0.107 - 0.062) / 0.009)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{14}) = [4.833 - (23.358 - 3.889)^{1/2} + 3.667 - (7.113 + 5.000)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{14}) = [4.833 - 4.412 + 3.667 - 3.480] / 2 = \mathbf{0.304}$$

Para i = 2 e t = 4:

$$x_R = \{2x_{14} + 2L_{24}(x_{24} - x_{14}) + (x_{24} - x_{14})^2 / V_{24} - (x_{24} - x_{14}) [(2L_{24} + (x_{24} - x_{14}) / V_{24})^2 + 4(x_{14} - Z_{24}) / V_{24}]^{1/2} \} / 2$$

$$x_L = \{2x_{24} + 2H_{24}(x_{24} - x_{14}) + (x_{24} - x_{14})^2 / P_{24} - (x_{24} - x_{14}) [(2H_{24} + (x_{24} - x_{14}) / P_{24})^2 + 4(x_{24} - Y_{24}) / P_{24}]^{1/2} \} / 2$$

$$x_R = \{2 * 0.062 + 2 * 4.250 * 0.236 + 0.236^2 / 0.016 - 0.236 * [(2 * 4.250 + 0.236 / 0.016)^2 + 4(0.062 - 0.290) / 0.016]^{1/2} \} / 2$$

$$x_L = \{2 * 0.298 + 2 * 2.875 * 0.236 + 0.236^2 / 0.012 - 0.236 * [(2 * 2.875 + 0.236 / 0.012)^2 + 4(0.298 - 0.090) / 0.012]^{1/2} \} / 2$$

$$x_R = \{0.124 + 2.006 + 3.481 - 0.236 * [(8.500 + 14.750)^2 - 57.000]^{1/2} \} / 2$$

$$x_L = \{0.596 + 1.357 + 4.641 - 0.236 * [(5.750 + 19.667)^2 + 69.333]^{1/2} \} / 2$$

$$x_R = \{5.611 - 0.236*21.990\} / 2 = \{5.611 - 5.190\} / 2 = \mathbf{0.211}$$

$$x_L = \{6.594 - 0.236*26.746\} / 2 = \{6.594 - 6.312\} / 2 = \mathbf{0.141}$$

$$U_T(D_{24}) = [L_{24} - (L_{24}^2 + (x_R - Z_{24}) / V_{24})^{1/2} + 1 + H_{24} - (H_{24}^2 + (x_L - Y_{24}) / P_{24})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{24}) = [4.250 - (4.250^2 + (0.211 - 0.290) / 0.016)^{1/2} + 1 + 2.875 - (2.875^2 + (0.141 - 0.090) / 0.012)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{24}) = [4.250 - (18.063 - 4.938)^{1/2} + 3.875 - (8.266 + 4.250)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{24}) = [4.250 - 3.623 + 3.875 - 3.538] / 2 = \mathbf{0.482}$$

Para i = 3 e t = 4:

$$x_R = \{2x_{14} + 2L_{34}(x_{24} - x_{14}) + (x_{24} - x_{14})^2 / V_{34} - (x_{24} - x_{14})[(2L_{34} + (x_{24} - x_{14}) / V_{34})^2 + 4(x_{14} - Z_{34}) / V_{34}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{24} + 2H_{34}(x_{24} - x_{14}) + (x_{24} - x_{14})^2 / P_{34} - (x_{24} - x_{14})[(2H_{34} + (x_{24} - x_{14}) / P_{34})^2 + 4(x_{24} - Y_{34}) / P_{34}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.062 + 2*4.344*0.236 + 0.236^2 / 0.016 - 0.236*[(2*4.344 + 0.236 / 0.016)^2 + 4(0.062 - 0.298) / 0.016]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.298 + 2*2.917*0.236 + 0.236^2 / 0.012 - 0.236*[(2*2.917 + 0.236 / 0.012)^2 + 4(0.298 - 0.093) / 0.012]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.124 + 2.050 + 3.481 - 0.236*[(8.688 + 14.750)^2 - 59.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{0.596 + 1.377 + 4.641 - 0.236*[(5.834 + 19.667)^2 + 68.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{5.655 - 0.236*22.144\} / 2 = \{5.655 - 5.226\} / 2 = \mathbf{0.215}$$

$$x_L = \{6.614 - 0.236*26.807\} / 2 = \{6.614 - 6.327\} / 2 = \mathbf{0.144}$$

$$U_T(D_{34}) = [L_{34} - (L_{34}^2 + (x_R - Z_{34}) / V_{34})^{1/2} + 1 + H_{34} - (H_{34}^2 + (x_L - Y_{34}) / P_{34})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{34}) = [4.344 - (4.344^2 + (0.215 - 0.298) / 0.016)^{1/2} + 1 + 2.917 - (2.917^2 + (0.144 - 0.093) / 0.012)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{34}) = [4.344 - (18.870 - 5.188)^{1/2} + 3.917 - (8.509 + 4.250)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{34}) = [4.344 - 3.699 + 3.917 - 3.572] / 2 = \mathbf{0.495}$$

Para i = 4 e t = 4:

$$x_R = \{2x_{14} + 2L_{44}(x_{24} - x_{14}) + (x_{24} - x_{14})^2 / V_{44} - (x_{24} - x_{14})[(2L_{44} + (x_{24} - x_{14}) / V_{44})^2 + 4(x_{14} - Z_{44}) / V_{44}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{24} + 2H_{44}(x_{24} - x_{14}) + (x_{24} - x_{14})^2 / P_{44} - (x_{24} - x_{14})[(2H_{44} + (x_{24} - x_{14}) / P_{44})^2 + 4(x_{24} - Y_{44}) / P_{44}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2 * 0.062 + 2 * 4.375 * 0.236 + 0.236^2 / 0.012 - 0.236 * [(2 * 4.375 + 0.236 / 0.012)^2 + 4(0.062 - 0.227) / 0.012]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2 * 0.298 + 2 * 3.000 * 0.236 + 0.236^2 / 0.009 - 0.236 * [(2 * 3.000 + 0.236 / 0.009)^2 + 4(0.298 - 0.071) / 0.009]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.124 + 2.065 + 4.641 - 0.236 * [(8.750 + 19.667)^2 - 55.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{0.596 + 1.416 + 6.188 - 0.236 * [(6.000 + 26.222)^2 + 100.889]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{6.830 - 0.236 * 27.432\} / 2 = \{6.830 - 6.474\} / 2 = \mathbf{0.178}$$

$$x_L = \{8.200 - 0.236 * 33.751\} / 2 = \{8.200 - 7.965\} / 2 = \mathbf{0.118}$$

$$U_T(D_{44}) = [L_{44} - (L_{44}^2 + (x_R - Z_{44}) / V_{44})^{1/2} + 1 + H_{44} - (H_{44}^2 + (x_L - Y_{44}) / P_{44})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{44}) = [4.375 - (4.375^2 + (0.178 - 0.227) / 0.012)^{1/2} + 1 + 3.000 - (3.000^2 + (0.118 - 0.071) / 0.009)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{44}) = [4.375 - (19.141 - 4.083)^{1/2} + 4.000 - (9.000 + 5.222)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{44}) = [4.375 - 3.880 + 4.000 - 3.771] / 2 = \mathbf{0.362}$$

Para i = 1 e t = 5:

$$x_R = \{2x_{15} + 2L_{15}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / V_{15} - (x_{25}-x_{15})[(2L_{15} + (x_{25}-x_{15}) / V_{15})^2 + 4(x_{15}-Z_{15}) / V_{15}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{25} + 2H_{15}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / P_{15} - (x_{25}-x_{15})[(2H_{15} + (x_{25}-x_{15}) / P_{15})^2 + 4(x_{25}-Y_{15}) / P_{15}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.023 + 2*4.000*0.281 + 0.281^2 / 0.007 - 0.281*[(2*4.000 + 0.281 / 0.007)^2 + 4(0.023-0.107) / 0.007]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.304 + 2*2.417*0.281 + 0.281^2 / 0.006 - 0.281*[(2*2.417 + 0.281 / 0.006)^2 + 4(0.304-0.023) / 0.006]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.046 + 2.248 + 11.280 - 0.281*[(8.000+40.143)^2 - 48.000]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{0.608 + 1.358 + 13.160 - 0.281*[(4.834+46.833)^2 + 187.333]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{13.574 - 0.281*47.642\} / 2 = \{13.574 - 13.387\} / 2 = \mathbf{0.094}$$

$$x_L = \{15.126 - 0.281*53.449\} / 2 = \{15.126 - 15.019\} / 2 = \mathbf{0.054}$$

$$U_T(D_{15}) = [L_{15} - (L_{15}^2 + (x_R - Z_{15}) / V_{15})^{1/2} + 1 + H_{15} - (H_{15}^2 + (x_L - Y_{15}) / P_{15})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{15}) = [4.000 - (4.000^2 + (0.094 - 0.107) / 0.007)^{1/2} + 1 + 2.417 - (2.417^2 + (0.054 - 0.023) / 0.006)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{15}) = [4.000 - (16.000 - 1.857)^{1/2} + 3.417 - (5.842 + 5.167)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{15}) = [4.000 - 3.761 + 3.417 - 3.318] / 2 = \mathbf{0.169}$$

Para i = 2 e t = 5:

$$x_R = \{2x_{15} + 2L_{25}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / V_{25} - (x_{25}-x_{15})[(2L_{25} + (x_{25}-x_{15}) / V_{25})^2 + 4(x_{15}-Z_{25}) / V_{25}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{25} + 2H_{25}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / P_{25} - (x_{25}-x_{15})[(2H_{25} + (x_{25}-x_{15}) / P_{25})^2 + 4(x_{25}-Y_{25}) / P_{25}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.023 + 2*3.958*0.281 + 0.281^2 / 0.012 - 0.281*[(2*3.958 + 0.281 / 0.012)^2 + 4(0.023-0.178) / 0.012]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.304 + 2*2.611*0.281 + 0.281^2 / 0.009 - 0.281*[(2*2.611 + 0.281 / 0.009)^2 + 4(0.304-0.038) / 0.009]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.046 + 2.224 + 6.580 - 0.281*[(7.916+23.417)^2 - 51.667]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{0.608 + 1.467 + 8.773 - 0.281*[(5.222+31.222)^2 + 118.222]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{8.850 - 0.281*30.497\} / 2 = \{8.850 - 8.570\} / 2 = \mathbf{0.140}$$

$$x_L = \{10.848 - 0.281*38.031\} / 2 = \{10.848 - 10.687\} / 2 = \mathbf{0.081}$$

$$U_T(D_{25}) = [L_{25} - (L_{25}^2 + (x_R - Z_{25}) / V_{25})^{1/2} + 1 + H_{25} - (H_{25}^2 + (x_L - Y_{25}) / P_{25})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{25}) = [3.958 - (3.958^2 + (0.140 - 0.178) / 0.012)^{1/2} + 1 + 2.611 - (2.611^2 + (0.081 - 0.038) / 0.009)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{25}) = [3.958 - (15.666 - 3.167)^{1/2} + 3.611 - (6.817 + 4.778)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{25}) = [3.958 - 3.535 + 3.611 - 3.405] / 2 = \mathbf{0.315}$$

Para i = 3 e t = 5:

$$x_R = \{2x_{15} + 2L_{35}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / V_{35} - (x_{25}-x_{15})[(2L_{35} + (x_{25}-x_{15}) / V_{35})^2 + 4(x_{15}-Z_{35}) / V_{35}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{25} + 2H_{35}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / P_{35} - (x_{25}-x_{15})[(2H_{35} + (x_{25}-x_{15}) / P_{35})^2 + 4(x_{25}-Y_{35}) / P_{35}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.023 + 2*4.306*0.281 + 0.281^2 / 0.018 - 0.281*[(2*4.306 + 0.281 / 0.018)^2 + 4(0.023-0.304) / 0.018]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.304 + 2*2.767*0.281 + 0.281^2 / 0.015 - 0.281*[(2*2.767 + 0.281 / 0.015)^2 + 4(0.304-0.068) / 0.015]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.046 + 2.420 + 4.387 - 0.281*[(8.612+15.611)^2 - 62.444]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{0.608 + 1.555 + 5.264 - 0.281*[(5.534+18.733)^2 + 62.933]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{6.853 - 0.281*22.898\} / 2 = \{6.853 - 6.434\} / 2 = \mathbf{0.210}$$

$$x_L = \{7.427 - 0.281*25.531\} / 2 = \{7.427 - 7.174\} / 2 = \mathbf{0.127}$$

$$U_T(D_{35}) = [L_{35} - (L_{35}^2 + (x_R - Z_{35}) / V_{35})^{1/2} + 1 + H_{35} - (H_{35}^2 + (x_L - Y_{35}) / P_{35})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{35}) = [4.306 - (4.306^2 + (0.210 - 0.304) / 0.018)^{1/2} + 1 + 2.767 - (2.767^2 + (0.127 - 0.068) / 0.015)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{35}) = [4.306 - (18.542 - 5.222)^{1/2} + 3.767 - (7.656 + 3.933)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{35}) = [4.306 - 3.650 + 3.767 - 3.404] / 2 = \mathbf{0.510}$$

Para i = 4 e t = 5:

$$x_R = \{2x_{15} + 2L_{45}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / V_{45} - (x_{25}-x_{15})[(2L_{45} + (x_{25}-x_{15}) / V_{45})^2 + 4(x_{15}-Z_{45}) / V_{45}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2x_{25} + 2H_{45}(x_{25}-x_{15}) + (x_{25}-x_{15})^2 / P_{45} - (x_{25}-x_{15})[(2H_{45} + (x_{25}-x_{15}) / P_{45})^2 + 4(x_{25}-Y_{45}) / P_{45}]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{2*0.023 + 2*4.167*0.281 + 0.281^2 / 0.009 - 0.281*[(2*4.167 + 0.281 / 0.009)^2 + 4(0.023-0.148) / 0.009]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{2*0.304 + 2*2.929*0.281 + 0.281^2 / 0.007 - 0.281*[(2*2.929 + 0.281 / 0.007)^2 + 4(0.304-0.034) / 0.007]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{0.046 + 2.342 + 8.773 - 0.281*[(8.334+31.222)^2 - 55.556]^{1/2}\} / 2$$

$$x_L = \{0.608 + 1.646 + 11.280 - 0.281*[(5.858+40.143)^2 + 154.286]^{1/2}\} / 2$$

$$x_R = \{11.161 - 0.281*38.847\} / 2 = \{11.161 - 10.916\} / 2 = \mathbf{0.123}$$

$$x_L = \{13.534 - 0.281*47.648\} / 2 = \{13.534 - 13.389\} / 2 = \mathbf{0.073}$$

$$U_T(D_{45}) = [L_{45} - (L_{45}^2 + (x_R - Z_{45}) / V_{45})^{1/2} + 1 + H_{45} - (H_{45}^2 + (x_L - Y_{45}) / P_{45})^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{45}) = [4.167 - (4.167^2 + (0.123 - 0.148) / 0.009)^{1/2} + 1 + 2.929 - (2.929^2 + (0.073 - 0.034) / 0.007)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{45}) = [4.167 - (17.364 - 2.778)^{1/2} + 3.929 - (8.579 + 5.571)^{1/2}] / 2$$

$$U_T(D_{45}) = [4.167 - 3.819 + 3.929 - 3.762] / 2 = \mathbf{0.258}$$

Resumindo tem-se:

Para  $t = 1$ :  $U_T(D_{11}) = 0.385$ ,  $U_T(D_{21}) = 0.581$ ,  $U_T(D_{31}) = 0.485$ ,  $U_T(D_{41}) = 0.199$ ,

Para  $t = 2$ :  $U_T(D_{12}) = 0.230$ ,  $U_T(D_{22}) = 0.600$ ,  $U_T(D_{32}) = 0.600$ ,  $U_T(D_{42}) = 0.600$ ,

Para  $t = 3$ :  $U_T(D_{13}) = 0.491$ ,  $U_T(D_{23}) = 0.369$ ,  $U_T(D_{33}) = 0.575$ ,  $U_T(D_{43}) = 0.198$ ,

Para  $t = 4$ :  $U_T(D_{14}) = 0.304$ ,  $U_T(D_{24}) = 0.482$ ,  $U_T(D_{34}) = 0.495$ ,  $U_T(D_{44}) = 0.362$ ,

Para  $t = 5$ :  $U_T(D_{15}) = 0.169$ ,  $U_T(D_{25}) = 0.315$ ,  $U_T(D_{35}) = 0.510$ ,  $U_T(D_{45}) = 0.258$ .

Como  $I_t^+ = \max_i \{ D_{it} \}$  e  $I_t^- = \min_i \{ D_{it} \}$ , tem-se:

$$I_1^+ = D_{21} = 0.581 \quad I_1^- = D_{41} = 0.199$$

$$I_2^+ = D_{22} = 0.600 \quad I_2^- = D_{12} = 0.230$$

$$I_3^+ = D_{33} = 0.575 \quad I_3^- = D_{43} = 0.198$$

$$I_4^+ = D_{34} = 0.495 \quad I_4^- = D_{14} = 0.304$$

$$I_5^+ = D_{35} = 0.510 \quad I_5^- = D_{15} = 0.169$$

Assim, as soluções ideais positiva e negativa são:

$$\Gamma^+ = (I_1^+, I_2^+, I_3^+, I_4^+, I_5^+) = (D_{21}, D_{22}, D_{33}, D_{34}, D_{35})$$

$$\Gamma^- = (I_1^-, I_2^-, I_3^-, I_4^-, I_5^-) = (D_{41}, D_{12}, D_{43}, D_{14}, D_{15})$$

*9º Passo:* Calcular a distância das diferentes alternativas em relação a  $\Gamma^+$  e a  $\Gamma^-$ . Para tanto, foi considerada a mesma partição de  $X = [0,1]$  dada no texto (Liang, G-S., 1997):

$$P_x = \{x / x = 0.05t, t = 0,1,2,\dots,20\} \subset [0,1]. \text{ Logo,}$$

$$P_x = \{0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, \dots, 0.95, 1\}$$

De (6) tem-se que:

$$f_{D_{it}}(x) = \begin{cases} -H_{it} + [H_{it}^2 + (x - Y_{it}) / P_{it}]^{1/2}, & Y_{it} \leq x \leq Q_{it}, \\ 1, & Q_{it} \leq x \leq R_{it}, \\ L_{it} - [L_{it}^2 + (x - Z_{it}) / V_{it}]^{1/2} & R_{it} \leq x \leq Z_{it}, \\ 0, & \text{qualquer outro valor. Assim:} \end{cases}$$

$$f_{D_{11}}(x) = \begin{cases} -H_{11} + [H_{11}^2 + (x - Y_{11}) / P_{11}]^{1/2}, & 0.175 \leq x \leq 0.315, \\ 1, & 0.315 \leq x \leq 0.385, \\ L_{11} - [L_{11}^2 + (x - Z_{11}) / V_{11}]^{1/2} & 0.385 \leq x \leq 0.585, \\ 0, & x < 0.175 \text{ e } x > 0.585. \end{cases}$$

$$f_{D_{11}}(0) = f_{D_{11}}(0.05) = f_{D_{11}}(0.10) = f_{D_{11}}(0.15) = 0$$

$$f_{D_{11}}(0.60) = f_{D_{11}}(0.65) = f_{D_{11}}(0.70) = \dots = f_{D_{11}}(1) = 0$$

$$f_{D_{11}}(0.35) = 1$$

$$f_{D_{11}}(0.20) = 0.202, \quad f_{D_{11}}(0.25) = 0.571, \quad f_{D_{11}}(0.30) = 0.905$$

$$f_{D_{11}}(0.40) = 0.917, \quad f_{D_{11}}(0.45) = 0.652, \quad f_{D_{11}}(0.50) = 0.401 \text{ e } f_{D_{11}}(0.55) = 0.161.$$

$$f_{D_{21}}(x) = \begin{cases} -H_{21} + [H_{21}^2 + (x - Y_{21}) / P_{21}]^{1/2}, & 0.300 \leq x \leq 0.525, \\ 1, & 0.525 \leq x \leq 0.595, \\ L_{21} - [L_{21}^2 + (x - Z_{21}) / V_{21}]^{1/2} & 0.595 \leq x \leq 0.900, \\ 0, & x < 0.300 \text{ e } x > 0.900. \end{cases}$$

$$f_{D_{21}}(0) = f_{D_{21}}(0.05) = f_{D_{21}}(0.10) = f_{D_{21}}(0.15) = f_{D_{21}}(0.20) = f_{D_{21}}(0.25) = 0$$

$$f_{D_{21}}(0.95) = f_{D_{21}}(1) = 0$$

$$f_{D_{21}}(0.55) = 1$$

$$f_{D_{21}}(0.30) = 0, \quad f_{D_{21}}(0.35) = 0.247, \quad f_{D_{21}}(0.40) = 0.478, \quad f_{D_{21}}(0.45) = 0.695, \quad f_{D_{21}}(0.50) = 0.901,$$

$$f_{D_{21}}(0.60) = 0.982, \quad f_{D_{21}}(0.65) = 0.804, \quad f_{D_{21}}(0.70) = 0.633, \quad f_{D_{21}}(0.75) = 0.467,$$

$$f_{D_{21}}(0.80) = 0.307, \quad f_{D_{21}}(0.85) = 0.151, \quad f_{D_{21}}(0.90) = 0.$$

$$f_{D31}(x) = \begin{cases} -H_{31} + [H_{31}^2 + (x - Y_{31}) / P_{31}]^{1/2}, & 0.250 \leq x \leq 0.420, \\ 1, & 0.420 \leq x \leq 0.490, \\ L_{31} - [L_{31}^2 + (x - Z_{31}) / V_{31}]^{1/2} & 0.490 \leq x \leq 0.720, \\ 0, & x < 0.250 \text{ e } x > 0.720. \end{cases}$$

$$f_{D31}(0) = f_{D31}(0.05) = f_{D31}(0.10) = f_{D31}(0.15) = f_{D31}(0.20) = 0$$

$$f_{D31}(0.75) = f_{D31}(0.80) = f_{D31}(0.85) = f_{D31}(0.90) = f_{D31}(0.95) = f_{D31}(1) = 0$$

$$f_{D31}(0.45) = 1$$

$$f_{D31}(0.25) = 0, \quad f_{D31}(0.30) = 0.320, \quad f_{D31}(0.35) = 0.616, \quad f_{D31}(0.40) = 0.894, \quad f_{D31}(0.50) = 0.953, \quad f_{D31}(0.55) = 0.722, \quad f_{D31}(0.60) = 0.500, \quad f_{D31}(0.65) = 0.287, \quad f_{D31}(0.70) = 0.080.$$

$$f_{D41}(x) = \begin{cases} -H_{41} + [H_{41}^2 + (x - Y_{41}) / P_{41}]^{1/2}, & 0.050 \leq x \leq 0.140, \\ 1, & 0.140 \leq x \leq 0.210, \\ L_{41} - [L_{41}^2 + (x - Z_{41}) / V_{41}]^{1/2} & 0.210 \leq x \leq 0.360, \\ 0, & x < 0.050 \text{ e } x > 0.360. \end{cases}$$

$$f_{D41}(0) = 0$$

$$f_{D41}(0.40) = f_{D41}(0.45) = f_{D41}(0.50) = \dots = f_{D41}(0.95) = f_{D41}(1) = 0$$

$$f_{D41}(0.05) = 0, \quad f_{D41}(0.10) = 0.609,$$

$$f_{D41}(0.15) = f_{D41}(0.20) = 1$$

$$f_{D41}(0.25) = 0.706 \quad f_{D41}(0.30) = 0.369, \quad f_{D41}(0.35) = 0.059.$$

$$f_{D12}(x) = \begin{cases} -H_{12} + [H_{12}^2 + (x - Y_{12}) / P_{12}]^{1/2}, & 0.130 \leq x \leq 0.255, \\ 1, & 0.255 \leq x \leq 0.298, \\ L_{12} - [L_{12}^2 + (x - Z_{12}) / V_{12}]^{1/2} & 0.298 \leq x \leq 0.500, \\ 0, & x < 0.130 \text{ e } x > 0.500. \end{cases}$$

$$f_{D12}(0) = f_{D12}(0.05) = f_{D12}(0.10) = 0$$

$$f_{D12}(0.55) = f_{D12}(0.60) = f_{D12}(0.65) = f_{D12}(0.70) = \dots = f_{D12}(1) = 0$$

$$f_{D12}(0.15) = 0.184, \quad f_{D12}(0.20) = 0.598, \quad f_{D12}(0.25) = 0.965,$$

$$f_{D12}(0.30) = 0.989, \quad f_{D12}(0.35) = 0.720, \quad f_{D12}(0.40) = 0.467, \quad f_{D12}(0.45) = 0.228, \quad f_{D12}(0.50) = 0.$$

$$f_{D22}(x) = \begin{cases} -H_{22} + [H_{22}^2 + (x - Y_{22}) / P_{22}]^{1/2}, & 0.390 \leq x \leq 0.638, \\ 1, & 0.638 \leq x \leq 0.723, \\ L_{22} - [L_{22}^2 + (x - Z_{22}) / V_{22}]^{1/2} & 0.723 \leq x \leq 1.000, \\ 0, & x < 0.390. \end{cases}$$

$$f_{D22}(0) = f_{D22}(0.05) = f_{D22}(0.10) = f_{D22}(0.15) = f_{D22}(0.20) = f_{D22}(0.25) = f_{D22}(0.30) = f_{D22}(0.35) = 0,$$

$$f_{D22}(0.65) = f_{D22}(0.70) = 1,$$

$$f_{D22}(0.40) = 0.046, \quad f_{D22}(0.45) = 0.266, \quad f_{D22}(0.50) = 0.474, \quad f_{D22}(0.55) = 0.672,$$

$$f_{D22}(0.60) = 0.861, \quad f_{D22}(0.75) = 0.895, \quad f_{D22}(0.80) = 0.705, \quad f_{D22}(0.85) = 0.521, \quad f_{D22}(0.90) = 0.342,$$

$$f_{D22}(0.95) = 0.169, \quad f_{D22}(1) = 0.$$

$$f_{D32}(x) = \begin{cases} -H_{32} + [H_{32}^2 + (x - Y_{32}) / P_{32}]^{1/2}, & 0.390 \leq x \leq 0.638, \\ 1, & 0.638 \leq x \leq 0.723, \\ L_{32} - [L_{32}^2 + (x - Z_{32}) / V_{32}]^{1/2} & 0.723 \leq x \leq 1.000, \\ 0, & x < 0.390. \end{cases}$$

$$f_{D32}(0) = f_{D32}(0.05) = f_{D32}(0.10) = f_{D32}(0.15) = f_{D32}(0.20) = f_{D32}(0.25) = f_{D32}(0.30) = f_{D32}(0.35) = 0,$$

$$f_{D32}(0.65) = f_{D32}(0.70) = 1,$$

$$f_{D32}(0.40) = 0.046, \quad f_{D32}(0.45) = 0.266, \quad f_{D32}(0.50) = 0.474, \quad f_{D32}(0.55) = 0.672,$$

$$f_{D32}(0.60) = 0.861, \quad f_{D32}(0.75) = 0.895, \quad f_{D32}(0.80) = 0.705, \quad f_{D32}(0.85) = 0.521, \quad f_{D32}(0.90) = 0.342,$$

$$f_{D32}(0.95) = 0.169, \quad f_{D32}(1) = 0.$$

$$f_{D42}(x) = \begin{cases} -H_{42} + [H_{42}^2 + (x - Y_{42}) / P_{42}]^{1/2}, & 0.390 \leq x \leq 0.638, \\ 1, & 0.638 \leq x \leq 0.723, \\ L_{42} - [L_{42}^2 + (x - Z_{42}) / V_{42}]^{1/2} & 0.723 \leq x \leq 1.000, \\ 0, & x < 0.390. \end{cases}$$

$$f_{D42}(0) = f_{D42}(0.05) = f_{D42}(0.10) = f_{D42}(0.15) = f_{D42}(0.20) = f_{D42}(0.25) = f_{D42}(0.30) = f_{D42}(0.35) = 0,$$

$$f_{D42}(0.65) = f_{D42}(0.70) = 1,$$

$$f_{D42}(0.40) = 0.046, \quad f_{D42}(0.45) = 0.266, \quad f_{D42}(0.50) = 0.474, \quad f_{D42}(0.55) = 0.672,$$

$$f_{D42}(0.60) = 0.861, \quad f_{D42}(0.75) = 0.895, \quad f_{D42}(0.80) = 0.705, \quad f_{D42}(0.85) = 0.521, \quad f_{D42}(0.90) = 0.342, \quad f_{D42}(0.95) = 0.169, \quad f_{D42}(1) = 0.$$

$$f_{D13}(x) = \begin{cases} -H_{13} + [H_{13}^2 + (x - Y_{13}) / P_{13}]^{1/2}, & 0.175 \leq x \leq 0.300, \\ 1, & 0.300 \leq x \leq 0.350, \\ L_{13} - [L_{13}^2 + (x - Z_{13}) / V_{13}]^{1/2} & 0.350 \leq x \leq 0.520, \\ 0, & x < 0.175 \text{ e } x > 0.520. \end{cases}$$

$$f_{D13}(0) = f_{D13}(0.05) = f_{D13}(0.10) = f_{D13}(0.15) = 0$$

$$f_{D13}(0.55) = f_{D13}(0.60) = f_{D13}(0.65) = f_{D13}(0.70) = \dots = f_{D13}(0.95) = f_{D13}(1) = 0$$

$$f_{D13}(0.35) = 1$$

$$f_{D13}(0.20) = 0.195, \quad f_{D13}(0.25) = 0.562, \quad f_{D13}(0.30) = 0.902$$

$$f_{D13}(0.40) = 0.687, \quad f_{D13}(0.45) = 0.391, \quad f_{D13}(0.50) = 0.109.$$

$$f_{D23}(x) = \begin{cases} -H_{23} + [H_{23}^2 + (x - Y_{23}) / P_{23}]^{1/2}, & 0.105 \leq x \leq 0.225, \\ 1, & 0.225 \leq x \leq 0.300, \\ L_{23} - [L_{23}^2 + (x - Z_{23}) / V_{23}]^{1/2} & 0.300 \leq x \leq 0.455, \\ 0, & x < 0.105 \text{ e } x > 0.455. \end{cases}$$

$$f_{D23}(0) = f_{D23}(0.05) = f_{D23}(0.10) = 0$$

$$f_{D23}(0.50) = f_{D23}(0.55) = f_{D23}(0.60) = f_{D23}(0.65) = \dots = f_{D23}(0.95) = f_{D23}(1) = 0$$

$$f_{D23}(0.25) = f_{D23}(0.30) = 1,$$

$$f_{D23}(0.15) = 0.418, \quad f_{D23}(0.20) = 0.814,$$

$$f_{D23}(0.35) = 0.656 \quad f_{D23}(0.40) = 0.333, \quad f_{D23}(0.45) = 0.029.$$

$$f_{D33}(x) = \begin{cases} -H_{33} + [H_{33}^2 + (x - Y_{33}) / P_{33}]^{1/2}, & 0.210 \leq x \leq 0.375, \\ 1, & 0.375 \leq x \leq 0.425, \\ L_{33} - [L_{33}^2 + (x - Z_{33}) / V_{33}]^{1/2} & 0.425 \leq x \leq 0.650, \\ 0, & x < 0.210 \text{ e } x > 0.650. \end{cases}$$

$$f_{D33}(0) = f_{D33}(0.05) = f_{D33}(0.10) = f_{D33}(0.15) = f_{D33}(0.20) = 0$$

$$f_{D33}(0.65) = f_{D33}(0.70) = f_{D33}(0.75) = \dots = f_{D33}(0.95) = f_{D33}(1) = 0$$

$$f_{D33}(0.40) = 1$$

$$f_{D33}(0.25) = 0.268, \quad f_{D33}(0.30) = 0.576, \quad f_{D33}(0.35) = 0.860,$$

$$f_{D33}(0.45) = 0.878, \quad f_{D33}(0.50) = 0.643, \quad f_{D33}(0.55) = 0.420, \quad f_{D33}(0.60) = 0.206.$$

$$f_{D43}(x) = \begin{cases} -H_{43} + [H_{43}^2 + (x - Y_{43}) / P_{43}]^{1/2}, & 0.035 \leq x \leq 0.100, \\ 1, & 0.100 \leq x \leq 0.150, \\ L_{43} - [L_{43}^2 + (x - Z_{43}) / V_{43}]^{1/2} & 0.150 \leq x \leq 0.260, \\ 0, & x < 0.035 \text{ e } x > 0.260. \end{cases}$$

$$f_{D43}(0) = 0$$

$$f_{D43}(0.30) = f_{D43}(0.35) = f_{D43}(0.40) = f_{D43}(0.45) = \dots = f_{D43}(0.95) = f_{D43}(1) = 0$$

$$f_{D43}(0.10) = f_{D43}(0.15) = 1$$

$$f_{D43}(0.05) = 0.277, \quad f_{D43}(0.20) = 0.511, \quad f_{D43}(0.25) = 0.081.$$

$$f_{D14}(x) = \begin{cases} -H_{14} + [H_{14}^2 + (x - Y_{14}) / P_{14}]^{1/2}, & 0.062 \leq x \leq 0.119, \\ 1, & 0.119 \leq x \leq 0.119, \\ L_{14} - [L_{14}^2 + (x - Z_{14}) / V_{14}]^{1/2} & 0.119 \leq x \leq 0.195, \\ 0, & x < 0.062 \text{ e } x > 0.195. \end{cases}$$

$$f_{D14}(0) = f_{D14}(0.05) = 0$$

$$f_{D14}(0.20) = f_{D14}(0.25) = f_{D14}(0.30) = \dots = f_{D14}(1) = 0$$

$$f_{D14}(0.10) = 0.700, \quad f_{D14}(0.15) = 0.561.$$

$$f_{D24}(x) = \begin{cases} -H_{24} + [H_{24}^2 + (x - Y_{24}) / P_{24}]^{1/2}, & 0.090 \leq x \leq 0.170, \\ 1, & 0.170 \leq x \leq 0.170, \\ L_{24} - [L_{24}^2 + (x - Z_{24}) / V_{24}]^{1/2} & 0.170 \leq x \leq 0.290, \\ 0, & x < 0.090 \text{ e } x > 0.290. \end{cases}$$

$$f_{D24}(0) = f_{D24}(0.05) = 0$$

$$f_{D24}(0.30) = f_{D24}(0.35) = f_{D24}(0.40) = \dots = f_{D24}(1) = 0$$

$$f_{D24}(0.10) = 0.142, \quad f_{D24}(0.15) = 0.767$$

$$f_{D24}(0.20) = 0.723, \quad f_{D24}(0.25) = 0.305.$$

$$f_{D34}(x) = \begin{cases} -H_{34} + [H_{34}^2 + (x - Y_{34}) / P_{34}]^{1/2}, & 0.093 \leq x \leq 0.176, \\ 1, & 0.176 \leq x \leq 0.176, \\ L_{34} - [L_{34}^2 + (x - Z_{34}) / V_{34}]^{1/2} & 0.176 \leq x \leq 0.298, \\ 0, & x < 0.093 \text{ e } x > 0.298. \end{cases}$$

$$f_{D34}(0) = f_{D34}(0.05) = 0$$

$$f_{D34}(0.30) = f_{D34}(0.35) = f_{D34}(0.40) = \dots = f_{D34}(1) = 0$$

$$f_{D34}(0.10) = 0.093, \quad f_{D34}(0.15) = 0.724$$

$$f_{D34}(0.20) = 0.774, \quad f_{D34}(0.25) = 0.360.$$

$$f_{D44}(x) = \begin{cases} -H_{44} + [H_{44}^2 + (x - Y_{44}) / P_{44}]^{1/2}, & 0.071 \leq x \leq 0.134, \\ 1, & 0.134 \leq x \leq 0.134, \\ L_{44} - [L_{44}^2 + (x - Z_{44}) / V_{44}]^{1/2} & 0.134 \leq x \leq 0.227, \\ 0, & x < 0.071 \text{ e } x > 0.227. \end{cases}$$

$$f_{D44}(0) = f_{D24}(0.05) = 0$$

$$f_{D44}(0.25) = f_{D24}(0.30) = f_{D44}(0.35) = f_{D44}(0.40) = \dots = f_{D44}(1) = 0$$

$$f_{D44}(0.10) = 0.496, \quad f_{D44}(0.15) = 0.808, \quad f_{D44}(0.20) = 0.265.$$

$$f_{D15}(x) = \begin{cases} -H_{15} + [H_{15}^2 + (x - Y_{15}) / P_{15}]^{1/2}, & 0.023 \leq x \leq 0.058, \\ 1, & 0.058 \leq x \leq 0.058, \\ L_{15} - [L_{15}^2 + (x - Z_{15}) / V_{15}]^{1/2} & 0.058 \leq x \leq 0.107, \\ 0, & x < 0.023 \text{ e } x > 0.107. \end{cases}$$

$$f_{D15}(0) = 0$$

$$f_{D15}(0.15) = f_{D15}(0.20) = f_{D15}(0.25) = f_{D15}(0.30) = \dots = f_{D15}(1) = 0$$

$$f_{D15}(0.05) = 0.799, \quad f_{D15}(0.10) = 0.571.$$

$$f_{D25}(x) = \begin{cases} -H_{25} + [H_{25}^2 + (x - Y_{25}) / P_{25}]^{1/2}, & 0.038 \leq x \leq 0.094, \\ 1, & 0.094 \leq x \leq 0.094, \\ L_{25} - [L_{25}^2 + (x - Z_{25}) / V_{25}]^{1/2} & 0.094 \leq x \leq 0.178, \\ 0, & x < 0.038 \text{ e } x > 0.178. \end{cases}$$

$$f_{D25}(0) = 0$$

$$f_{D25}(0.20) = f_{D25}(0.25) = f_{D25}(0.30) = f_{D25}(0.35) = \dots = f_{D25}(1) = 0$$

$$f_{D25}(0.05) = 0.244, \quad f_{D25}(0.10) = 0.930, \quad f_{D25}(0.15) = 0.307.$$

$$f_{D35}(x) = \begin{cases} -H_{35} + [H_{35}^2 + (x - Y_{35}) / P_{35}]^{1/2}, & 0.068 \leq x \leq 0.166, \\ 1, & 0.166 \leq x \leq 0.166, \\ L_{35} - [L_{35}^2 + (x - Z_{35}) / V_{35}]^{1/2} & 0.166 \leq x \leq 0.304, \\ 0, & x < 0.068 \text{ e } x > 0.304. \end{cases}$$

$$f_{D35}(0) = f_{D35}(0.05) = 0$$

$$f_{D35}(0.30) = f_{D35}(0.35) = f_{D35}(0.40) = f_{D35}(0.45) = \dots = f_{D35}(1) = 0$$

$$f_{D35}(0.10) = 0.093, \quad f_{D35}(0.15) = 0.724,$$

$$f_{D35}(0.20) = 0.774, \quad f_{D35}(0.25) = 0.360.$$

$$f_{D45}(x) = \begin{cases} -H_{45} + [H_{45}^2 + (x - Y_{45}) / P_{45}]^{1/2}, & 0.034 \leq x \leq 0.082, \\ 1, & 0.082 \leq x \leq 0.082, \\ L_{45} - [L_{45}^2 + (x - Z_{45}) / V_{45}]^{1/2} & 0.082 \leq x \leq 0.148, \\ 0, & x < 0.034 \text{ e } x > 0.148. \end{cases}$$

$$f_{D45}(0) = 0$$

$$f_{D45}(0.15) = f_{D45}(0.20) = f_{D45}(0.25) = f_{D45}(0.30) = \dots = f_{D45}(1) = 0$$

$$f_{D45}(0.05) = 0.367, \quad f_{D45}(0.10) = 0.698.$$

Como  $I_1^+ = D_{21} \Rightarrow f_{I_1^+}(x) = f_{D_{21}}(x)$

$$I_2^+ = D_{22} \Rightarrow f_{I_2^+}(x) = f_{D_{22}}(x)$$

$$I_3^+ = D_{33} \Rightarrow f_{I_3^+}(x) = f_{D_{33}}(x)$$

$$I_4^+ = D_{34} \Rightarrow f_{I_4^+}(x) = f_{D_{34}}(x)$$

$$I_5^+ = D_{35} \Rightarrow f_{I_5^+}(x) = f_{D_{35}}(x)$$

$$I_1^- = D_{41} \Rightarrow f_{I_1^-}(x) = f_{D_{41}}(x)$$

$$I_2^- = D_{12} \Rightarrow f_{I_2^-}(x) = f_{D_{12}}(x)$$

$$I_3^- = D_{43} \Rightarrow f_{I_3^-}(x) = f_{D_{43}}(x)$$

$$I_4^- = D_{14} \Rightarrow f_{I_4^-}(x) = f_{D_{14}}(x)$$

$$I_5^- = D_{15} \Rightarrow f_{I_5^-}(x) = f_{D_{15}}(x).$$

Assim, utilizando a idéia que consta em (Klir, George J.; St.Clair, Ute H.; Yuan, Bo, 1997) sobre os símbolos ‘ $\wedge$ ’ e ‘ $\vee$ ’ em lógica difusa:

$[p \wedge q] = \min [p,q]$  e  $[p \vee q] = \max [p,q]$ , vem:

$$\sigma(D_{11}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D11}(x) \wedge f_{I1^+}(x))] / [\Sigma (f_{D11}(x) \vee f_{I1^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D11}(x) \wedge f_{D21}(x))] / [\Sigma (f_{D11}(x) \vee f_{D21}(x))]$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^+) = (0.247+0.478+0.652+0.401+0.161) / (1+0.917+0.695+0.901+1+0.202+0.571+0.905+0.982+0.804+0.633+0.467+0.307+0.151)$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^+) = 1.939 / 9.545 = \mathbf{0.203}$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D21}(x) \wedge f_{I1^+}(x))] / [\Sigma (f_{D21}(x) \vee f_{I1^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D21}(x) \wedge f_{D21}(x))] / [\Sigma (f_{D21}(x) \vee f_{D21}(x))]$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^+) = \sigma(D_{21}, I_1^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D31}(x) \wedge f_{I1^+}(x))] / [\Sigma (f_{D31}(x) \vee f_{I1^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D31}(x) \wedge f_{D21}(x))] / [\Sigma (f_{D31}(x) \vee f_{D21}(x))]$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^+) = (0.247+0.478+0.695+0.901+0.722+0.500+0.287+0.080) / (0.616+0.894+1+0.953+1+0.982+0.804+0.633+0.320+0.467+0.307+0.151)$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^+) = 3.910 / 8.127 = \mathbf{0.481}$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D41}(x) \wedge f_{I1^+}(x))] / [\Sigma (f_{D41}(x) \vee f_{I1^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^+) = [\Sigma (f_{D41}(x) \wedge f_{D21}(x))] / [\Sigma (f_{D41}(x) \vee f_{D21}(x))]$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^+) = (0.59) / (0.609+1+1+0.706+0.369+0.247+0.478+0.695+0.901+0.982+0.804+0.633+0.467+0.307+0.151)$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^+) = 0.059 / 9.349 = \mathbf{0.006}$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D12}(x) \wedge f_{I2^+}(x))] / [\Sigma (f_{D12}(x) \vee f_{I2^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D12}(x) \wedge f_{D22}(x))] / [\Sigma (f_{D12}(x) \vee f_{D22}(x))]$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^+) = (0.046+0.228) / (0.467+0.266+0.184+0.598+0.965+0.989+0.720+0.474+0.672+0.861+0.895+0.705+0.521+0.342+0.169)$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^+) = 0.274 / 8.828 = \mathbf{0.031}$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D22}(x) \wedge f_{I_2^+}(x))] / [\Sigma (f_{D22}(x) \vee f_{I_2^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D22}(x) \wedge f_{D22}(x))] / [\Sigma (f_{D22}(x) \vee f_{D22}(x))]$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D32}(x) \wedge f_{I_1^+}(x))] / [\Sigma (f_{D32}(x) \vee f_{I_2^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D32}(x) \wedge f_{D22}(x))] / [\Sigma (f_{D32}(x) \vee f_{D22}(x))]$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D42}(x) \wedge f_{I_1^+}(x))] / [\Sigma (f_{D42}(x) \vee f_{I_2^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^+) = [\Sigma (f_{D42}(x) \wedge f_{D22}(x))] / [\Sigma (f_{D42}(x) \vee f_{D22}(x))]$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{13}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D13}(x) \wedge f_{I_3^+}(x))] / [\Sigma (f_{D13}(x) \vee f_{I_3^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{13}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D13}(x) \wedge f_{D33}(x))] / [\Sigma (f_{D13}(x) \vee f_{D33}(x))]$$

$$\sigma(D_{13}, I_3^+) = (0.268+0.576+0.860+0.687+0.391+0.109) / (0.562 +0.902 +1+1+0.878+0.643+0.195+0.420+0.206)$$

$$\sigma(D_{13}, I_3^+) = 2.891 / 5.806 = \mathbf{0.498}$$

$$\sigma(D_{23}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D23}(x) \wedge f_{I_3^+}(x))] / [\Sigma (f_{D23}(x) \vee f_{I_3^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{23}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D23}(x) \wedge f_{D33}(x))] / [\Sigma (f_{D23}(x) \vee f_{D33}(x))]$$

$$\sigma(D_{23}, I_3^+) = (0.268+0.576+0.656+0.333+0.029) / (1+1+0.860 +1+0.878+ 0.418+0.814+0.643+0.420+0.206)$$

$$\sigma(D_{23}, I_3^+) = 1.862 / 7.239 = \mathbf{0.257}$$

$$\sigma(D_{33}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D33}(x) \wedge f_{I_3^+}(x))] / [\Sigma (f_{D33}(x) \vee f_{I_3^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{33}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D33}(x) \wedge f_{D33}(x))] / [\Sigma (f_{D33}(x) \vee f_{D33}(x))]$$

$$\sigma(D_{33}, I_3^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{43}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D43}(x) \wedge f_{I_3^+}(x))] / [\Sigma (f_{D43}(x) \vee f_{I_3^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{43}, I_3^+) = [\Sigma (f_{D43}(x) \wedge f_{D33}(x))] / [\Sigma (f_{D43}(x) \vee f_{D33}(x))]$$

$$\sigma(D_{43}, I_3^+) = (0.081) / (0.268+0.277+1+1+0.511+0.576+0.860+0.878+0.643+0.420+0.206)$$

$$\sigma(D_{43}, I_3^+) = 0.081 / 6.639 = \mathbf{0.012}$$

$$\sigma(D_{14}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D14}(x) \wedge f_{I_4^+}(x))] / [\Sigma (f_{D14}(x) \vee f_{I_4^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{14}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D14}(x) \wedge f_{D34}(x))] / [\Sigma (f_{D14}(x) \vee f_{D34}(x))]$$

$$\sigma(D_{14}, I_4^+) = (0.093+0.561) / (0.700+0.724+0.774+0.360)$$

$$\sigma(D_{14}, I_4^+) = 0.654 / 2.558 = \mathbf{0.256}$$

$$\sigma(D_{24}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D24}(x) \wedge f_{I_4^+}(x))] / [\Sigma (f_{D24}(x) \vee f_{I_4^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{24}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D24}(x) \wedge f_{D34}(x))] / [\Sigma (f_{D24}(x) \vee f_{D34}(x))]$$

$$\sigma(D_{24}, I_4^+) = (0.093+0.724+0.723+0.305) / (0.142+0.767+0.774+0.360)$$

$$\sigma(D_{24}, I_4^+) = 1.845 / 2.043 = \mathbf{0.903}$$

$$\sigma(D_{34}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D34}(x) \wedge f_{I_4^+}(x))] / [\Sigma (f_{D34}(x) \vee f_{I_4^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{34}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D34}(x) \wedge f_{D34}(x))] / [\Sigma (f_{D34}(x) \vee f_{D34}(x))]$$

$$\sigma(D_{34}, I_4^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{44}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D44}(x) \wedge f_{I_4^+}(x))] / [\Sigma (f_{D44}(x) \vee f_{I_4^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{44}, I_4^+) = [\Sigma (f_{D44}(x) \wedge f_{D34}(x))] / [\Sigma (f_{D44}(x) \vee f_{D34}(x))]$$

$$\sigma(D_{44}, I_4^+) = (0.093+0.724+0.265) / (0.496+0.808+0.774+0.360)$$

$$\sigma(D_{44}, I_4^+) = 1.082 / 2.438 = \mathbf{0.444}$$

$$\sigma(D_{15}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D15}(x) \wedge f_{I_5^+}(x))] / [\Sigma (f_{D15}(x) \vee f_{I_5^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{15}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D15}(x) \wedge f_{D35}(x))] / [\Sigma (f_{D15}(x) \vee f_{D35}(x))]$$

$$\sigma(D_{15}, I_5^+) = (0.093) / (0.571+0.799+0.724+0.774+0.360)$$

$$\sigma(D_{15}, I_5^+) = 0.093 / 3.228 = \mathbf{0.029}$$

$$\sigma(D_{25}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D25}(x) \wedge f_{I5^+}(x))] / [\Sigma (f_{D25}(x) \vee f_{I5^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{25}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D25}(x) \wedge f_{D35}(x))] / [\Sigma (f_{D25}(x) \vee f_{D35}(x))]$$

$$\sigma(D_{25}, I_5^+) = (0.093+0.307) / (0.930+0.724+0.244+0.774+0.360)$$

$$\sigma(D_{25}, I_5^+) = 0.400 / 3.032 = \mathbf{0.132}$$

$$\sigma(D_{35}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D35}(x) \wedge f_{I5^+}(x))] / [\Sigma (f_{D35}(x) \vee f_{I5^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{35}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D35}(x) \wedge f_{D35}(x))] / [\Sigma (f_{D35}(x) \vee f_{D35}(x))]$$

$$\sigma(D_{35}, I_5^+) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{45}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D45}(x) \wedge f_{I5^+}(x))] / [\Sigma (f_{D45}(x) \vee f_{I5^+}(x))]$$

$$\sigma(D_{45}, I_5^+) = [\Sigma (f_{D45}(x) \wedge f_{D35}(x))] / [\Sigma (f_{D45}(x) \vee f_{D35}(x))]$$

$$\sigma(D_{45}, I_5^+) = (0.093) / (0.698+0.367+0.724+0.774+0.360)$$

$$\sigma(D_{45}, I_5^+) = 0.093 / 2.923 = \mathbf{0.032}$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D11}(x) \wedge f_{I1^-}(x))] / [\Sigma (f_{D11}(x) \vee f_{I1^-}(x))]$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D11}(x) \wedge f_{D41}(x))] / [\Sigma (f_{D11}(x) \vee f_{D41}(x))]$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^-) = (0.202+0.571+0.369+0.059) / (1+0.706+0.905+1+0.609+1+0.917+0.652+0.401+0.161)$$

$$\sigma(D_{11}, I_1^-) = 1.201 / 7.351 = \mathbf{0.163}$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D21}(x) \wedge f_{I1^-}(x))] / [\Sigma (f_{D21}(x) \vee f_{I1^-}(x))]$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D21}(x) \wedge f_{D41}(x))] / [\Sigma (f_{D21}(x) \vee f_{D41}(x))]$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^-) = (0.059) / (0.247+0.609+1+1+0.706+0.369+0.478+0.695+0.901+0.982+0.804+0.633+0.467+0.307+0.151)$$

$$\sigma(D_{21}, I_1^-) = 0.059 / 8.349 = \mathbf{0.007}$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D31}(x) \wedge f_{I1^-}(x))] / [\Sigma (f_{D31}(x) \vee f_{I1^-}(x))]$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D31}(x) \wedge f_{D41}(x))] / [\Sigma (f_{D31}(x) \vee f_{D41}(x))]$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^-) = (0.320+0.059) / (0.369+0.616+0.609+1+1+0.706+0.894+0.953+0.722+0.500+0.287+0.080)$$

$$\sigma(D_{31}, I_1^-) = 0.379 / 7.736 = \mathbf{0.049}$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D41}(x) \wedge f_{I1}(x))] / [\Sigma (f_{D41}(x) \vee f_{I1}(x))]$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^-) = [\Sigma (f_{D41}(x) \wedge f_{D41}(x))] / [\Sigma (f_{D41}(x) \vee f_{D41}(x))]$$

$$\sigma(D_{41}, I_1^-) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D12}(x) \wedge f_{I2}(x))] / [\Sigma (f_{D12}(x) \vee f_{I2}(x))]$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D12}(x) \wedge f_{D12}(x))] / [\Sigma (f_{D12}(x) \vee f_{D12}(x))]$$

$$\sigma(D_{12}, I_2^-) = \mathbf{1.000}$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D22}(x) \wedge f_{I2}(x))] / [\Sigma (f_{D22}(x) \vee f_{I2}(x))]$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D22}(x) \wedge f_{D12}(x))] / [\Sigma (f_{D22}(x) \vee f_{D12}(x))]$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^-) = (0.046+0.228) / (0.467+0.266+0.184+0.598+0.965+0.989+0.720+0.474+0.672+0.861+0.895+0.705+0.521+0.342+0.169)$$

$$\sigma(D_{22}, I_2^-) = 0.274 / 8.828 = \mathbf{0.031}$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D32}(x) \wedge f_{I1}(x))] / [\Sigma (f_{D32}(x) \vee f_{I2}(x))]$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D32}(x) \wedge f_{D12}(x))] / [\Sigma (f_{D32}(x) \vee f_{D12}(x))]$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^-) = (0.046+0.228) / (0.467+0.266+0.184+0.598+0.965+0.989+0.720+0.474+0.672+0.861+0.895+0.705+0.521+0.342+0.169)$$

$$\sigma(D_{32}, I_2^-) = 0.274 / 8.828 = \mathbf{0.031}$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D42}(x) \wedge f_{I1}(x))] / [\Sigma (f_{D42}(x) \vee f_{I2}(x))]$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^-) = [\Sigma (f_{D42}(x) \wedge f_{D12}(x))] / [\Sigma (f_{D42}(x) \vee f_{D12}(x))]$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^-) = (0.046+0.228) / (0.467+0.266+0.184+0.598+0.965+0.989+0.720+0.474+0.672+0.861+0.895+0.705+0.521+0.342+0.169)$$

$$\sigma(D_{42}, I_2^-) = 0.274 / 8.828 = \mathbf{0.031}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{13}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{13}}(x) \wedge f_{I_3^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{13}}(x) \vee f_{I_3^-}(x))] \\ \sigma(D_{13}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{13}}(x) \wedge f_{D_{43}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{13}}(x) \vee f_{D_{43}}(x))] \\ \sigma(D_{13}, I_3^-) &= (0.195+0.081) / (0.511+0.562+0.277+1+1+0.902+1+0.687+0.391+ 0.109) \\ \sigma(D_{13}, I_3^-) &= 0.276 / 6.439 = \mathbf{0.043}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{23}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{23}}(x) \wedge f_{I_3^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{23}}(x) \vee f_{I_3^-}(x))] \\ \sigma(D_{23}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{23}}(x) \wedge f_{D_{43}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{23}}(x) \vee f_{D_{43}}(x))] \\ \sigma(D_{23}, I_3^-) &= (0.418+0.511+0.081) / (1+0.814+1+0.277+1+1+0.656+0.333+0.029) \\ \sigma(D_{23}, I_3^-) &= 1.010 / 6.109 = \mathbf{0.165}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{33}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{33}}(x) \wedge f_{I_3^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{33}}(x) \vee f_{I_3^-}(x))] \\ \sigma(D_{33}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{33}}(x) \wedge f_{D_{43}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{33}}(x) \vee f_{D_{43}}(x))] \\ \sigma(D_{33}, I_3^-) &= (0.081) / (0.268+0.576+0.860+0.878+0.643+0.420+0.206+0.277+1+1 \\ &+0.511) \\ \sigma(D_{33}, I_3^-) &= 0.081 / 6.639 = \mathbf{0.012}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{43}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{43}}(x) \wedge f_{I_3^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{43}}(x) \vee f_{I_3^-}(x))] \\ \sigma(D_{43}, I_3^-) &= [\Sigma (f_{D_{43}}(x) \wedge f_{D_{43}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{43}}(x) \vee f_{D_{43}}(x))] \\ \sigma(D_{43}, I_3^-) &= \mathbf{1.000}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{14}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{14}}(x) \wedge f_{I_4^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{14}}(x) \vee f_{I_4^-}(x))] \\ \sigma(D_{14}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{14}}(x) \wedge f_{D_{14}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{14}}(x) \vee f_{D_{14}}(x))] \\ \sigma(D_{14}, I_4^-) &= \mathbf{1.000}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{24}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{24}}(x) \wedge f_{I_4^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{24}}(x) \vee f_{I_4^-}(x))] \\ \sigma(D_{24}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{24}}(x) \wedge f_{D_{14}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{24}}(x) \vee f_{D_{14}}(x))] \\ \sigma(D_{24}, I_4^-) &= (0.142+0.561) / (0.700+0.767+0.723+0.305) \\ \sigma(D_{24}, I_4^-) &= 0.703 / 2.495 = \mathbf{0.282}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{34}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{34}}(x) \wedge f_{I_4^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{34}}(x) \vee f_{I_4^-}(x))] \\ \sigma(D_{34}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{34}}(x) \wedge f_{D_{14}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{34}}(x) \vee f_{D_{14}}(x))] \\ \sigma(D_{34}, I_4^-) &= (0.093+0.561) / (0.700+0.724+0.774+0.360) \\ \sigma(D_{34}, I_4^-) &= 0.654 / 2.558 = \mathbf{0.256}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{44}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{44}}(x) \wedge f_{I_4^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{44}}(x) \vee f_{I_4^-}(x))] \\ \sigma(D_{44}, I_4^-) &= [\Sigma (f_{D_{44}}(x) \wedge f_{D_{14}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{44}}(x) \vee f_{D_{14}}(x))] \\ \sigma(D_{44}, I_4^-) &= (0.496+0.561) / (0.700+0.808+0.265) \\ \sigma(D_{44}, I_4^-) &= 1.057 / 1.773 = \mathbf{0.596}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{15}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{15}}(x) \wedge f_{I_5^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{15}}(x) \vee f_{I_5^-}(x))] \\ \sigma(D_{15}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{15}}(x) \wedge f_{D_{15}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{15}}(x) \vee f_{D_{15}}(x))] \\ \sigma(D_{15}, I_5^-) &= \mathbf{1.000}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{25}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{25}}(x) \wedge f_{I_5^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{25}}(x) \vee f_{I_5^-}(x))] \\ \sigma(D_{25}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{25}}(x) \wedge f_{D_{15}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{25}}(x) \vee f_{D_{15}}(x))] \\ \sigma(D_{25}, I_5^-) &= (0.244+0.571) / (0.799+0.930+0.307) \\ \sigma(D_{25}, I_5^-) &= 0.815 / 2.036 = \mathbf{0.400}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(D_{35}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{35}}(x) \wedge f_{I_5^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{35}}(x) \vee f_{I_5^-}(x))] \\ \sigma(D_{35}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{35}}(x) \wedge f_{D_{15}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{35}}(x) \vee f_{D_{15}}(x))] \\ \sigma(D_{35}, I_5^-) &= (0.093) / (0.571+0.799+0.724+0.774+0.360) \\ \sigma(D_{35}, I_5^-) &= 0.093 / 3.228 = \mathbf{0.029} \\ \sigma(D_{45}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{45}}(x) \wedge f_{I_5^-}(x))] / [\Sigma (f_{D_{45}}(x) \vee f_{I_5^-}(x))] \\ \sigma(D_{45}, I_5^-) &= [\Sigma (f_{D_{45}}(x) \wedge f_{D_{15}}(x))] / [\Sigma (f_{D_{45}}(x) \vee f_{D_{15}}(x))] \\ \sigma(D_{45}, I_5^-) &= (0.367+0.571) / (0.799+0.698) \\ \sigma(D_{45}, I_5^-) &= 0.938 / 1.497 = \mathbf{0.627}\end{aligned}$$

Aplicando as fórmulas  $F_{it}^+ = 1 - \sigma(D_{it}, I_t^+)$  e  $F_{it}^- = 1 - \sigma(D_{it}, I_t^-)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, k$ , vem:

$$F_{11}^+ = 1 - \sigma(D_{11}, I_1^+) = 1 - 0.203 = 0.797$$

$$F_{12}^+ = 1 - \sigma(D_{12}, I_2^+) = 1 - 0.031 = 0.969$$

$$F_{13}^+ = 1 - \sigma(D_{13}, I_3^+) = 1 - 0.498 = 0.502$$

$$F_{14}^+ = 1 - \sigma(D_{14}, I_4^+) = 1 - 0.256 = 0.744$$

$$F_{15}^+ = 1 - \sigma(D_{15}, I_5^+) = 1 - 0.029 = 0.971$$

$$F_{21}^+ = 1 - \sigma(D_{21}, I_1^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{22}^+ = 1 - \sigma(D_{22}, I_2^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{23}^+ = 1 - \sigma(D_{23}, I_3^+) = 1 - 0.257 = 0.743$$

$$F_{24}^+ = 1 - \sigma(D_{24}, I_4^+) = 1 - 0.903 = 0.097$$

$$F_{25}^+ = 1 - \sigma(D_{25}, I_5^+) = 1 - 0.132 = 0.868$$

$$F_{31}^+ = 1 - \sigma(D_{31}, I_1^+) = 1 - 0.481 = 0.519$$

$$F_{32}^+ = 1 - \sigma(D_{32}, I_2^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{33}^+ = 1 - \sigma(D_{33}, I_3^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{34}^+ = 1 - \sigma(D_{34}, I_4^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{35}^+ = 1 - \sigma(D_{35}, I_5^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{41}^+ = 1 - \sigma(D_{41}, I_1^+) = 1 - 0.006 = 0.994$$

$$F_{42}^+ = 1 - \sigma(D_{42}, I_2^+) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{43}^+ = 1 - \sigma(D_{43}, I_3^+) = 1 - 0.012 = 0.988$$

$$F_{44}^+ = 1 - \sigma(D_{44}, I_4^+) = 1 - 0.444 = 0.556$$

$$F_{45}^+ = 1 - \sigma(D_{45}, I_5^+) = 1 - 0.032 = 0.968$$

$$F_{11}^- = 1 - \sigma(D_{11}, I_1^-) = 1 - 0.163 = 0.837$$

$$F_{12}^- = 1 - \sigma(D_{12}, I_2^-) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{13}^- = 1 - \sigma(D_{13}, I_3^-) = 1 - 0.043 = 0.957$$

$$F_{14}^- = 1 - \sigma(D_{14}, I_4^-) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{15}^- = 1 - \sigma(D_{15}, I_5^-) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{21}^- = 1 - \sigma(D_{21}, I_1^-) = 1 - 0.007 = 0.993$$

$$F_{22}^- = 1 - \sigma(D_{22}, I_2^-) = 1 - 0.031 = 0.969$$

$$F_{23}^- = 1 - \sigma(D_{23}, I_3^-) = 1 - 0.165 = 0.835$$

$$F_{24}^- = 1 - \sigma(D_{24}, I_4^-) = 1 - 0.282 = 0.718$$

$$F_{25}^- = 1 - \sigma(D_{25}, I_5^-) = 1 - 0.400 = 0.600$$

$$F_{31}^- = 1 - \sigma(D_{31}, I_1^-) = 1 - 0.049 = 0.951$$

$$F_{32}^- = 1 - \sigma(D_{32}, I_2^-) = 1 - 0.031 = 0.969$$

$$F_{33}^- = 1 - \sigma(D_{33}, I_3^-) = 1 - 0.012 = 0.988$$

$$F_{34}^- = 1 - \sigma(D_{34}, I_4^-) = 1 - 0.256 = 0.744$$

$$F_{35}^- = 1 - \sigma(D_{35}, I_5^-) = 1 - 0.029 = 0.971$$

$$F_{41}^- = 1 - \sigma(D_{41}, I_1^-) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{42}^- = 1 - \sigma(D_{42}, I_2^-) = 1 - 0.031 = 0.969$$

$$F_{43}^- = 1 - \sigma(D_{43}, I_3^-) = 1 - 1.000 = 0.000$$

$$F_{44}^- = 1 - \sigma(D_{44}, I_4^-) = 1 - 0.596 = 0.404$$

$$F_{45}^- = 1 - \sigma(D_{45}, I_5^-) = 1 - 0.627 = 0.373.$$

Como  $A_i^+ = \sum F_{it}^+$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, k$  e

$A_i^- = \sum F_{it}^-$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t = 1, 2, \dots, k$ , tem-se:

$$A_1^+ = (0.797+0.969+0.502+0.742+0.971) = 3.983$$

$$A_2^+ = (0.000+0.000+0.743+0.097+0.868) = 1.708$$

$$A_3^+ = (0.519+0.000+0.000+0.000+0.000) = 0.519$$

$$A_4^+ = (0.994+0.000+0.988+0.556+0.968) = 3.506$$

$$A_1^- = (0.837+0.000+0.957+0.000+0.000) = 1.794$$

$$A_2^- = (0.993+0.969+0.835+0.718+0.600) = 4.115$$

$$A_3^- = (0.951+0.969+0.988+0.744+0.971) = 4.623$$

$$A_4^- = (0.000+0.969+0.000+0.404+0.373) = 1.746$$

*10º Passo:* Usando a equação (15), encontra-se os valores de aproximação relativa das diferentes alternativas *versus* a solução ideal positiva  $I^+$ :

$$A_1^* = A_1^- / (A_1^+ + A_1^-) = 1.794 / (3.983 + 1.794) = \mathbf{0.311}$$

$$A_2^* = A_2^- / (A_2^+ + A_2^-) = 4.115 / (1.708 + 4.115) = \mathbf{0.707}$$

$$A_3^* = A_3^- / (A_3^+ + A_3^-) = 4.623 / (0.519 + 4.623) = \mathbf{0.899}$$

$$A_4^* = A_4^- / (A_4^+ + A_4^-) = 1.746 / (3.506 + 1.746) = \mathbf{0.332}.$$