Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica

Representações Parciais de Grupos

Danilo Royer

Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel

Florianópolis

Fevereiro de 2001

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica

Representações Parciais de Grupos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Danilo Royer

Florianópolis

Fevereiro de 2001

Representações Parciais de Grupos

por

Danilo Royer

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",

Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma

final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e

Computação Científica.

Celso Melchíades Dória

Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel (UFSC-Orientador)

Aldrovando Araújo

Prof. Dr. Aldrovando Luis Azeredo Araújo (UFSC)

Prof. Dr. Michael Dokuchaev (USP)

Prof. Dr. Oscar Ricardo Janesch (UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2001.

À Deus

À minha Mãe, Maria Royer

Ao meu Pai, Roque Royer

Agradecimentos

Agradeço à minha namorada, Marlise, e a minha família, pelo incentivo dado em todos os momentos.

Aos meus colegas de Graduação e Pós-Graduação Airton, Anderson, Andresa, Christian, Claiton, Daniel, Dirceu, Fábio, Graziela, Janice, Juliano, Maria Inez, Milton, Patrícia, Paulo e Rafael pela amizade e agradável companhia.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro.

Meu especial agradecimento ao meu orientador Ruy Exel, pelo apoio e amizade.

Resumo

Neste trabalho consideramos o grupo livre $\mathbb{F}_n$ gerado por n elementos e um conjunto Λ^* de palavras positivas finitas que é fechado por sub-palavras e contêm o elemento neutro. Além disto fixamos um conjunto de isometrias parciais $\{S_1, \ldots, S_n\} \subseteq \mathcal{L}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, e a partir destas definimos uma função $S : \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathcal{L}(H)$. De posse do conjunto Λ^* e da função S consideramos três condições, que chamamos de M_1, M_2 e M_3. Enunciamos e demonstramos um resultado que garante que S é uma Representação Parcial de Grupo quando S satisfaz as três condições acima.

Finalmente apresentamos um exemplo de uma funçao S que satisfaz as hipóteses do resultado acima e determinamos o espectro de $C^*(S(r)S^*(r)|r \in \mathbb{F}_n)$.

Sumário

Introdução

O conceito de Representação Parcial de Grupo foi introduzido por R. Exel em 1995. Em 1997, Exel demonstrou que um conjunto de n isometrias parciais num espaço de Hilbert H, satisfazendo as condições de Cuntz e Krieger, dão origem a uma Representação Parcial do grupo $\mathbb{F}_n$ em H.

Neste trabalho tomaremos um conjunto de n isometrias parciais, definiremos a partir destas uma função $S : \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ e mostraremos que sob certas condições, introduzidas por Kengo Matsumoto em [1], a função S é uma Representação Parcial de Grupo. Notaremos que uma função nestas condições origina uma C^*-álgebra comutativa. Apresentaremos um exemplo de uma representação parcial de grupo e descreveremos o espectro da C^*-álgebra gerada por esta função.

Capítulo 1

Projeções e Isometrias Parciais em Espaços de Hilbert

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre projeções e isometrias parciais em espaços de Hilbert. Os resultados aqui obtidos serão úteis no desenvolvimento do capítulo 4.

Definição 1.1 *Um operador $P \in \mathcal{L}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, é uma projeção se P é auto-adjunto e idempotente, ou seja, se $P^2 = P = P^*$, onde P^* é o adjunto de P.*

Note que toda projeção P em um espaço de Hilbert H é um operador positivo, pois para cada x em H,

$$\langle P(x), x\rangle = \langle P^2(x), x\rangle = \langle P(x), P(x)\rangle = \|P(x)\|^2 \geq 0.$$

Além disso, se $P \neq 0$, isto é, se $\mathrm{Im}(P) \neq \{0\}$, então $\|P\| = 1$. De fato, dado $x \in H$ com $\|x\| = 1$, pela desigualdade de Cauchy Shwarz tem-se que

$$\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle \leq \|P(x)\|\|x\|,$$

donde segue que $\|P\| \leq 1$. Por outro lado, tomando $0 \neq x_0 \in \mathrm{Im}(P)$ com $\|x_0\| = 1$, tem-se que $\|P(x_0)\| = \|x_0\| = 1$. Portanto, $\|P\| = 1$.

Em geral, se $P \in \mathcal{L}(H)$ é uma projeção sobre $K \subseteq H$, então $I - P$ é uma projeção sobre $K^{\perp}$. É claro que $I - P$ é uma projeção. Para verificar se $I - P$ é projeção sobre $K^{\perp}$, verificaremos se $\mathrm{Im}(I - P) = K^{\perp}$. Dado $x \in \mathrm{Im}(I - P)$, ou seja, $x = (I - P)x$, então para cada $y = P(y) \in K$,

$$\langle x, y \rangle = \langle (I - P)x, y \rangle = \langle x, (I - P)y \rangle = \langle x, y - P(y) \rangle = 0,$$

o que significa que $x \in K^{\perp}$ e portanto, $\mathrm{Im}(I - P) \subseteq K^{\perp}$.
Por outro lado, dado $x \in K^{\perp}$, para cada $y \in H$,

$$\langle (I - P)x - x, y \rangle = -\langle P(x), y \rangle = -\langle x, P(y) \rangle = 0,$$

pois $P(y) \in K$ e $x \in K^{\perp}$. Desta forma, $(I - P)x = x$, ou seja, $x \in \mathrm{Im}(I - P)$, o que prova que $K^{\perp} \subseteq \mathrm{Im}(I - P)$. Com isto podemos concluir que $K^{\perp} = \mathrm{Im}(I - P)$

Proposição 1.1 *Seja $\{P_1, \dots, P_n\} \subseteq \mathcal{L}(H)$ uma família de projeções. Então $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ é projeção se e somente se $P_i P_j = 0$, para cada $i, j = 1 \dots n$ com $i \neq j$.*

Demonstração: Supondo $P_i P_j = 0$, teremos que

$$P^* = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \right)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} P_i = P$$

e

$$P^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_i P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i = P,$$

ou seja, $\sum_{i=1}^{n} P_i = P$ é uma projeção.
Reciprocamente, suponha que P é uma projeção. Sejam $i, j \in I$, com $i \neq j$. Queremos mostrar que $P_i P_j = 0$. Dado $x \in H$, temos que

$$\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x \rangle \text{ e } \|P_k(x)\|^2 = \langle P_k(x), x \rangle \quad \forall k = 1 \dots n.$$

Portanto,

$$\|P_i(x)\|^2 + \|P_j(x)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|P_k(x)\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle P_k(x), x\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} P_k(x), x \right\rangle = \|P(x)\|^2 \leq \|P\|^2 \|x\|^2.$$

Pondo-se $y = P_i(x)$ tem-se que

$$\|P_i(y)\|^2 + \|P_j(y)\|^2 \leq \|y\|^2,$$

ou seja,

$$\|P_i(x)\|^2 + \|P_iP_j(x)\|^2 = \|P_i(P_i(x))\|^2 + \|P_i(P_j(x))\|^2 \leq \|P_i(x)\|^2,$$

donde segue que $P_iP_j(x) = 0$. Como x foi escolhido arbitrariamente, tem-se que $P_iP_j(x) = 0$ para cada x em H, ou seja, $P_iP_j = 0$. $\square$

Definição 1.2 *Um operador $S \in \mathcal{L}(H)$ é uma isometria parcial se $S = SS^*S$, onde S^* é o adjunto de S.*

Exemplo: Seja $E \in \mathcal{L}(l_2(\mathbb{N}))$ o shift à esquerda. Como $E^* = D$, onde D é o shift à direita em $\mathcal{L}(l_2(\mathbb{N}))$, tem-se que $EE^* = I$, donde segue que $EE^*E = E$.

Uma caracterização de isometrias parciais é dada pela seguinte proposição:

Proposição 1.2 *Um operador $S \in \mathcal{L}(H)$ é uma isometria parcial se e somente se $S|_{\ker(S)^\perp}$ é uma isometria.*

Demonstração: Suponha que S é uma isometria parcial. Então é claro que $(S^*S)^* = S^*S$, e também que $(S^*S)^2 = S^*S$, e desta forma S^*S é uma projeção. Também $(I - S^*S)$ é uma projeção. Mostraremos que esta é a projeção ortogonal sobre $\ker(S)$. Para tanto mostraremos que $\mathrm{Im}(I - S^*S) = \ker(S)$.

Dado $x = (I - S^*S)x \in \mathrm{Im}(I - S^*S)$, tem-se que

$$S(x) = S(I - S^*S)x = S(x) - SS^*S(x) = 0.$$

Portanto, $\mathrm{Im}(I - S^*S) \subseteq \ker(S)$.

Por outro lado, $\ker(S) \subseteq \mathrm{Im}(I - S^*S)$, pois dado $x \in \ker(S)$, tem-se que $(I - S^*S)x = x$, ou seja, $x \in \mathrm{Im}(I - S^*S)$. Podemos assim concluir que $\ker(S) = \mathrm{Im}(I - S^*S)$.

Como $I - S^*S$ é a projeção ortogonal sobre $\ker(S)$, segue que S^*S é a projeção ortogonal sobre $\ker(S)^\perp$. Mostraremos agora que $S_{|_{\ker(S)^\perp}}$ é uma isometria. Seja $x \in \ker(S)^\perp$. Então $x = S^*S(x)$, e desta forma,

$$\|S(x)\|^2 = \langle S(x), S(x)\rangle = \langle S^*S(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

donde segue que $S_{|_{\ker(S)^\perp}}$ é uma isometria.

Reciprocamente, suponha que $S_{|_{\ker(S)^\perp}}$ é uma isometria. Note que $\mathrm{Im}(S)$ é fechado em H, e portanto $\ker(S) \bigoplus \ker(S)^\perp = H = \mathrm{Im}(S) \bigoplus \mathrm{Im}(S)^\perp$. Assim

$$S_{|_{\ker(S)^\perp}} : \ker(S)^\perp \longrightarrow \mathrm{Im}(S)$$

é uma isometria sobrejetora, e portanto inversível. Como $S_{|_{\ker(S)^\perp}}$ é uma isometria sobrejetora temos que

$$\left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)^* \left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right) = I.$$

Seja $V : H \to H$, tal que

$$V_{|_{\mathrm{Im}(S)}} = \left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)^{-1} \text{ e } V_{|_{\mathrm{Im}(S)^\perp}} = 0.$$

Note que $V \in \mathcal{L}(H)$, pois $\left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(S), \ker(S)^\perp)$. Queremos mostrar que $S^* = V$. Sejam $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in H$, com $x_1 \in \ker(S)^\perp$, $x_2 \in \ker(S)$,

$y_1 \in \mathrm{Im}(S)$ e $y_2 \in \mathrm{Im}(S)^\perp$. Então, tomando-se $y_1 = S_{|_{\ker(S)^\perp}}(x_1')$, com $x_1' \in \ker(S)^\perp$,

$$\langle S(x), y\rangle = \langle S(x_1 + x_2), y_1 + y_2\rangle = \langle S(x_1), y_1 + y_2\rangle =$$

$$= \left\langle S_{|_{\ker(S)^\perp}}(x_1), S_{|_{\ker(S)^\perp}}(x_1')\right\rangle = \left\langle x_1, \left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)^* \left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)(x_1')\right\rangle = \langle x_1, x_1'\rangle$$

e

$$\langle x, V(y)\rangle = \langle x_1 + x_2, V(y_1 + y_2)\rangle = \langle x_1 + x_2, V(y_1)\rangle = \left\langle x_1 + x_2, V_{|_{\mathrm{Im}(S)}}(y_1)\right\rangle =$$

$$= \left\langle x_1, V_{|_{\mathrm{Im}(S)}} S_{|_{\ker(S)^\perp}}(x_1')\right\rangle = \langle x_1, x_1'\rangle.$$

Portanto, para cada $x, y \in H$, tem-se que $\langle S(x), y\rangle = \langle x, V(y)\rangle$, o que significa que $S^* = V$. Dado $x \in H$, escreva $x = x_1 + x_2$, onde $x_1 \in \ker(S)^\perp$ e $x_2 \in \ker(S)$, e desta forma

$$SS^*S(x) = SS^*S(x_1 + x_2) = SS^*S(x_1) = SS^*_{|_{\mathrm{Im}(S)}}S(x_1) = SV_{|_{\mathrm{Im}(S)}}S(x_1) =$$

$$= S\left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)^{-1}\left(S_{|_{\ker(S)^\perp}}\right)(x_1) = S(x_1) = S(x_1 + x_2) = S(x),$$

donde decorre que S é uma isometria parcial. □

No exemplo apresentado anteriormente, o shift à esquerda em $l_2(\mathbb{N})$, tem-se que $\ker(E)^\perp = \{(a_1, a_2, \dots) \in l_2(\mathbb{N}) | a_1 = 0\}$, e é claro que $E_{|_{\ker(E)^\perp}}$ é uma isometria.

Sempre que S é uma isometria parcial, os operadores SS^* e S^*S são projeções sobre $\mathrm{Im}(S)$ e $\ker(S)^\perp$, respectivamente. A projeção SS^* é chamada de projeção final, enquanto que S^*S é a projeção inicial.

Capítulo 2

Representação Parcial de Grupo

Apresentaremos neste capítulo a definição de representação parcial de grupo e mostraremos que tal representação dá origem a uma C^*-álgebra comutativa.

Definição 2.1 *Dado um grupo* $\mathbb{G}$ *e um espaço de Hilbert* H*, uma função* $S : \mathbb{G} \to \mathcal{L}(H)$ *é uma representação parcial do grupo* $\mathbb{G}$ *no espaço de Hilbert* H *se:*

P_1*)* $S(e) = I$*, onde* e *é o elemento neutro de* $\mathbb{G}$ *e* I *é a identidade de* $\mathcal{L}(H)$*,*

P_2*)* $S(t^{-1}) = S(t)^*$, $\forall t \in \mathbb{G}$,

P_3*)* $S(t)S(r)S(r^{-1}) = S(tr)S(r^{-1})$, $\forall t, r \in \mathbb{G}$.

Exemplo; Seja D o shift à direita em $l_2(\mathbb{N})$. Considere o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ e a função $S : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(\mathbb{N}))$ dada por

$$S(n) = \begin{cases} D^n & \text{se } n \geq 0 \\ (D^*)^{|n|} & \text{se } n < 0 \end{cases}.$$

É claro que S satisfaz a propriedade P_1. Verificaremos se S satisfaz P_2.

Se $n \geq 0$ então

$$S(n^{-1}) = S(-n) = (D^*)^n = (D^n)^* = S(n)^*.$$

Se $n < 0$

$$S(n^{-1}) = S(-n) = D^{-n} = ((D^{-n})^*)^* = S(n)^*.$$

Desta forma fica verificada a propriedade P_2.

Note que $D^* = E$, onde E é o shift á esquerda em $l_2(\mathbb{N})$, e que $E^{n+m} = E^n E^m$ e $D^{n+m} = D^n D^m$, sempre que $n, m \geq 0$. Além disso, se $n > 0$, então $E^n D^n = I$, onde I é o operador identidade em $l_2(\mathbb{N})$.

Sejam $n, m \in \mathbb{Z}$. Queremos verificar a propriedade P_3, ou seja, se $S(n \cdot m)S(m^{-1}) = S(n)S(m)S(m^{-1})$. Esta verificação será separada em 4 casos:

a) Caso $m, n \geq 0$.

Neste caso, $S(n.m) = S(n+m) = D^{n+m} = D^n D^m = S(n)S(m)$, donde decorre que $S(n.m)S(m^{-1}) = S(n)S(m)S(m^{-1})$.

b) Caso $m, n < 0$.

A demonstração é análoga à de a), usando o fato de que $E^{-n-m} = E^{-n}E^{-m}$.

c) Caso $n < 0 < m$.

Suponha que $m + n \geq 0$, ou seja, que $|n| \leq m$. Assim,

$$S(n)S(m)S(m^{-1}) = (D^*)^{|n|} D^m (D^*)^{|m|} = E^{|n|} D^m E^m =$$

$$= E^{|n|} D^{|n|+(m-|n|)} E^m = E^{|n|} D^{|n|} D^{(m-|n|)} E^m = D^{(m-|n|)} E^m =$$

$$= D^{m+n} E^m = D^{n+m} (D^m)^* = S(n+m)S(m)^* = S(n.m)S(m^{-1}).$$

Suponha $m + n < 0$, ou seja, $m < |n|$. Desta forma,

$$S(n)S(m)S(m^{-1}) = (D^*)^{|n|} D^m (D^*)^{|m|} = E^{|n|} D^m E^m =$$

$$= E^{(|n|-m)+m} D^m E^m = E^{|n|-m} E^m D^m E^m = E^{|n|-m} E^m = E^{-n-m} E^m =$$

$$= E^{|n+m|}E^m = (D^*)^{|n+m|}(D^*)^m = S(n+m)S(m)^* = S(n.m)S(m^{-1}).$$

d) Caso $m < 0 < n$.

A demonstração deste caso é análoga à de b).

Portanto, S é de fato uma representação parcial do grupo aditivo $\mathbb{Z}$ em $l_2(\mathbb{N})$.

Em geral, se $S : \mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ é uma representação parcial de grupo, então para cada $r \in \mathbb{G}$, $S(r)$ é uma isometria parcial. De fato, dado $r \in \mathbb{G}$, tem-se que $S(r) = S(r.r^{-1})S(r)$, e pela propriedade P_3, $S(r.r^{-1})S(r) = S(r)S(r^{-1})S(r)$, o que prova que $S(r) = S(r)S(r)^*S(r)$.

Associaremos a cada representação parcial S do grupo $\mathbb{G}$ em $\mathcal{L}(H)$ uma C^*- álgebra B, e mostraremos que esta é comutativa. Para tanto, considere, para cada $r \in G$, o operador $E(r) = S(r)S(r)^* \in \mathcal{L}(H)$, que é obviamente auto-adjunto. Seja

$$B' = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \prod_{j=1}^{N_i} E(r_j) \quad | \quad r_j \in \mathbb{G}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad N, N_i \in \mathbb{N} \right\}$$

e $B = \overline{B'}$, ou seja, B é o fecho de B', relativo à norma de operadores, também denotado por $C^*(E(r)|r \in \mathbb{G})$. Assim obtemos um sub-espaço vetorial fechado de $\mathcal{L}(H)$. Além disso, dados P e Q elementos de B, é claro que PQ e P^* também são elementos de B, e como $\mathcal{L}(H)$ é uma C^*-álgebra, B também é uma C^*-álgebra.

Proposição 2.1 *A C^*-álgebra B é comutativa.*

Demonstração: Já sabemos que B é uma C^*-álgebra. Para mostrar que B é comutativa basta mostrar que $E(r)$ e $E(s)$ comutam, para cada $r, s \in \mathbb{G}$. Dados $r, s \in G$, tem-se que

$$S(r)E(s) = S(r)S(s)S(s^{-1}) = S(rs)S(s^{-1}) =$$

$$= S(rs)S(rs)^*S(rs)S(s^{-1}) = S(rs)\Big(S(s)S(s^{-1}r^{-1})S(rs)\Big)^* =$$

$$= S(rs)\left(S(r^{-1})S(rs)\right)^* = S(rs)S(rs)^*S(r) = E(rs)S(r)$$

e desta forma

$$E(r)E(s) = S(r)S(r^{-1})E(s) = S(r)E(r^{-1}s)S(r^{-1}) = E(s)S(r)S(r^{-1}) = E(s)E(r).$$

Portanto, B é uma C^*-álgebra comutativa. □

Capítulo 3

Representações Parciais do $\mathbb{F}_n$

Fixaremos neste capítulo o grupo livre $\mathbb{F}_n$ gerado por n elementos, como pode ser visto em [2], e um conjunto de n isometrias parciais em um espaço de Hilbert H. A partir das isometrias parciais definiremos uma função $S : \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathcal{L}(H)$. O objetivo principal deste capítulo é mostrar que sob certas condições, aqui chamadas de M_1, M_2 e M_3, a função S é uma representação parcial de grupo.

Consideremos o conjunto $G = \{g_1, \dots , g_n\}$, o grupo livre $\mathbb{F}_n$ gerado por G e o conjunto $G^{-1} = \{g_1^{-1}, \dots , g_n^{-1}\}$. Os elementos de $\mathbb{F}_n$, também chamados de palavras de $\mathbb{F}_n$, são da forma $r = r_1 \dots r_k$ onde cada $r_i \in G \cup G^{-1}$, e dizemos que r está em sua forma reduzida se $r_i \neq r_{i+1}^{-1}$, para cada i. Dois elementos $r = r_1 \dots r_k$ e $s = s_1 \dots s_l$ de $\mathbb{F}_n$, em suas formas reduzidas, são iguais se e só se $l = k$ e $r_i = s_i$, para todo i. Desta forma, cada elemento, na forma reduzida, tem representação única e definimos o seu comprimento pelo número de componentes, ou seja, se $r = r_1 \dots r_k$ está em sua forma reduzida então r tem comprimento k, que será denotado por $|r| = k$. A operação $\cdot : \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathbb{F}_n$ entre dois elementos r e s consiste em considerar as formas reduzidas $r_1 \dots r_k$ e $s_1 \dots s_l$ de r e s respectivamente, e tomar a nova palavra $r_1 \dots r_k s_1 \dots s_l$ na sua forma reduzida, a qual será denotada por rs. Para obter a palavra $r_1 \dots r_k s_1 \dots s_l$ em sua forma reduzida procederemos da seguinte maneira: suponha que $k > l$, tome o menor $j \in \mathbb{N}$ tal que $r_{k-j} \neq s_{j+1}^{-1}$ e portanto a forma reduzida de $r_1 \dots r_k s_1 \dots s_l$ será $r_1 \dots r_{k-j} s_{j+1} \dots s_l$. Se $r_{k-j} = s_{j+1}^{-1}, \forall j$, então a forma reduzida de $r_1 \dots r_k s_1 \dots s_k$ é $r_1 \dots r_{k-l}$. Para o caso $k \leq l$ procede-se de forma análoga. O elemento neutro e de $\mathbb{F}_n$ é o elemento cujo comprimento é zero, que também pode ser visto como a palavra vazia, sem nenhuma componente, e o inverso de um elemento $r = r_1 \dots r_k$ de $\mathbb{F}_n$ é $r^{-1} = r_k^{-1} \dots r_1^{-1}$. Um elemento $r = r_1 \dots r_k$ de $\mathbb{F}_n$, em sua forma reduzida, é chamada de palavra positiva (ou elemento positivo) se $r_i \in G$, para cada i, e o conjunto de todas as palavras positivas será chamado P. Consideramos e como sendo elemento de P. Note que dados dois elementos $r = r_1 \dots r_k, s = s_1 \dots s_l \in P$, a forma reduzida de rs é $r_1 \dots r_k s_1 \dots s_l$, e portanto $rs = r_1 \dots r_k s_1 \dots s_l$.

Fixaremos agora um conjunto $\Lambda^* \subseteq P$ com as seguintes propriedades:

- $e \in \Lambda^*$,
- $G = \{g_1, \dots, g_n\} \subseteq \Lambda^*$,
- Λ^* é fechado por sub-palavras, ou seja, se $\nu = \nu_1 \dots \nu_k \in \Lambda^*$ então qualquer elemento da forma $\nu_i \dots \nu_{i+j}$ com $i = 1 \dots k, i + j \leq k$ também é elemento de Λ^*.

Um exemplo de conjunto com as propriedades acima é o seguinte:

Considere o conjunto $\{g_1, \dots, g_n\}$, com a topologia discreta, o espaço topológico $\{g_1, \dots, g_n\}^{\mathbb{Z}}$, com a topologia produto e a aplicação

$$\sigma : \{g_1, \dots, g_n\}^{\mathbb{Z}} \to \{g_1, \dots, g_n\}^{\mathbb{Z}}$$

dada por

$$\sigma((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Se Λ é um conjunto fechado de $\{g_1, \dots, g_n\}^{\mathbb{Z}}$, na topologia produto, tal que $\sigma(\Lambda) = \Lambda$, dizemos que Λ é um subshift. Um elemento $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de Λ pode ser visto como uma palavra infinita, e os elementos da forma $x_j \dots x_{j+k}$ com $j \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$ como palavras de x, também ocasionalmente chamadas de sub-palavras de x. Note que estas palavras são formadas apenas por elementos de G,(não de $G \cup G^{-1}$), e portanto são palavras positivas.

Definimos Λ^k como sendo o conjunto de todas as palavras positivas de comprimento k que são sub-palavras de algum elemento x do subshift Λ. A união de todos os conjuntos Λ^k, $\{e\}$ e $\{g_1, \ldots, g_n\}$ será chamado de Δ e é claro que Δ satisfaz as propriedades do conjunto Λ^* acima.

Para cada $\mu \in \Lambda^*$ definimos os seguintes conjuntos:

$$L^1_\mu = \{g_j \in G : \mu g_j \notin \Lambda^*\},$$

$$L^k_\mu = \{\nu = \nu_1 \ldots \nu_k \in \Lambda^* : \mu\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \in \Lambda^*, \mu\nu \notin \Lambda^*\}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Considerando quaisquer dois conjuntos L^k_μ e L^l_μ com $l > k$ e tomando $v \in L^k_\mu$, tem-se que nenhum elemento $v' \in L^l_\mu$ é da forma $v' = vr$, para qualquer r em P. Esta afirmação é consequência do seguinte lema:

Lema 3.1 *Sejam $\mu \in \Lambda^*$ e $r, s \in P$. Se $vr = v's$, onde $v \in L^k_\mu$ e $v' \in L^l_\mu$, então $v = v'$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $v \neq v'$. Então $|v| \neq |v'|$, pois caso contrário, $v_1 \ldots v_k r = v'_1 \ldots v'_k s$, donde conclui-se que $v = v'$. Sem perda de generalidade suponha $|v| > l$, e escreva $v = v_1 \ldots v_l \ldots v_k$ e $v' = v'_1 \ldots v'_l$. Como $v_1 \ldots v_l \ldots v_k r = vr = v's = v'_1 \ldots v'_l s$, então $v_1 \ldots v_l = v'_1 \ldots v'_l$, e portanto $v = v' v_{l+1} \ldots v_k$. Sendo que $v' \in L^l_\mu$, pela definição de L^l_μ, $\mu v' \notin \Lambda^*$, e desta forma $\mu v_1 \ldots v_{k-1} = \mu v' v_{l+1} \ldots v_{k-1} \notin \Lambda^*$, o que é absurdo, pois $v \in L^k_\mu$. Portanto, $v = v'$.

□

De fato a afirmação anterior ao lema fica demonstrada, pois supondo que exista $r \in P$ tal que $v = v'r$, onde $v \in L^k_\mu$ e $v' \in L^l_\mu$, pelo lema teriamos $v = v'$, o que é absurdo pois $|v| \neq |v'|$.

Consideremos um espaço de Hilbert H e em $\mathcal{L}(H)$ um conjunto de operadores $\{S_1, \ldots, S_n\}$. Baseado nestes operadores, definimos a aplicação

$$S : \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$r = r_1 \dots r_k \mapsto S(r_1) \dots S(r_k)$$

onde r está na sua forma reduzida e $S(r_i) = S_j$ se $r_i = g_j$ e $S(r_i) = S_j^*$ se $r_i = g_j^{-1}$. Por definição, $S(e) = I$, onde I é a identidade de $\mathcal{L}(H)$. Desta forma, para cada $r \in \mathbb{F}_n$ teremos um operador $S(r) \in \mathcal{L}(H)$ associado, que também chamaremos de S_r. Para que S esteja bem definido é suficiente que os operadores S_i sejam elementos de $\mathcal{L}(H)$, porém, consideraremos um conjunto de isometrias parciais $\{S_1, \dots, S_n\} \subseteq \mathcal{L}(H)$ que originam uma função S com as seguintes propriedades:

(M_1) $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I$;

(M_2) Para cada μ e ν em Λ^* os operadores $S_\mu S_\mu^*$ e $S_\nu^* S_\nu$ comutam;

(M_3) $I - S_i^* S_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{\nu \in L_i^k} S_\nu S_\nu^*$, $i = 1, \dots, n$.

Note que para cada i, $S_i S_i^*$ é idempotente e auto-adjunto, e portanto é uma projeção. Também I é uma projeção, e por (M_1), $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i S_i^*$ é uma projeção, e portanto $S_i S_i^*$ e $S_j S_j^*$ são ortogonais para cada $i \neq j$. Isto significa que $S_i S_i^* S_j S_j^* = 0$ e assim

$$S_i^* S_j = (S_i^* S_i S_i^*)(S_j S_j^* S_j) = S_i^* (S_i S_i^* S_j S_j^*) S_j = 0$$

sempre que $i \neq j$.

Lema 3.2 *Para cada $\mu \in \Lambda^*$ tem-se $S_\mu = S_\mu S_\mu^* S_\mu$.*

Demonstração: A demonstração será por indução sobre o comprimento de μ. Para $|\mu| = 1$, a igualdade $S_\mu = S_\mu S_\mu^* S_\mu$ é satisfeita por hipótese. Supondo $S_\mu = S_\mu S_\mu^* S_\mu$ para todo μ com $|\mu| = k$, considere $\nu \in \Lambda^*$, com $|\nu| = k+1$. Então $\nu = \alpha g_j$, com $|\alpha| = k$, e

$$S_\nu S_\nu^* S_\nu = S_{\alpha g_j} S_{\alpha g_j}^* S_{\alpha g_j} = S_\alpha S_{g_j} S_{g_j}^* S_\alpha^* S_\alpha S_{g_j} = S_\alpha S_\alpha^* S_\alpha S_{g_j} S_{g_j}^* S_{g_j} = S_\alpha S_{g_j} = S_\nu.$$

$\square$

Fixemos agora $\nu \in P$. Escrevemos $\nu = g_j\alpha$, e desta forma,

$$S_\nu^* S_\nu = S_{g_j\alpha}^* S_{g_j\alpha} = S_\alpha^* S_{g_j}^* S_{g_j} S_\alpha$$

e por (M_3),

$$S_\alpha^* S_{g_j}^* S_{g_j} S_\alpha = S_\alpha^* \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu \in L_{g_j}^k} S_\mu S_\mu^* \right) S_\alpha = S_\alpha^* S_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu \in L_{g_j}^k} S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* S_\alpha.$$

Na demostração do próximo teorema, onde mostraremos que $S_\nu = 0$ se $v \in P \setminus \Lambda^*$, analizaremos cada parcela desta soma separadamente, e para tanto, demostraremos o seguinte lema:

Lema 3.3 *Seja $\alpha \in P$ e $\nu \in \Lambda^*$.*

a) Se $|\alpha| \geq |\nu|$ então $S_\nu S_\nu^* S_\alpha = \begin{cases} S_\alpha & \text{se } \alpha = \nu r \text{ para algum } r \in P \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

b) Se $|\alpha| < |\nu|$ então $S_\nu S_\nu^* S_\alpha = \begin{cases} S_\nu S_r^* & \text{se } \nu = \alpha r \text{ para algum } r \in P \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Demonstração:

a) Supondo que exista r em P tal que $\alpha = \nu r$,

$$S_\nu S_\nu^* S_\alpha = S_\nu S_\nu^* S_{\nu r} = S_\nu S_\nu^* S_\nu S_r = S_\nu S_r = S_\alpha.$$

Por outro lado se não existe r em P tal que $\alpha = \nu r$, escreva $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_l \dots \alpha_k$, $\nu = \nu_1 \dots \nu_l$ e tome o menor índice i tal que $\alpha_i \neq \nu_i$. Então temos que $i \leq l$ e $\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} = \nu_1 \dots \nu_{i-1}$, e portanto

$$S_\nu S_\nu^* S_\alpha = S_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \nu_i \dots \nu_l} S_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \nu_i \dots \nu_l}^* S_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \dots \alpha_k} =$$

$$= S_{\nu_1 \dots \nu_{i-1}} S_{\nu_i \dots \nu_l} S_{\nu_i \dots \nu_l}^* S_{\nu_1 \dots \nu_{i-1}}^* S_{\nu_1 \dots \nu_{i-1}} S_{\alpha_i \dots \alpha_k} =$$

$$= S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S^*_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\nu_i\ldots\nu_l} S^*_{\nu_i\ldots\nu_l} S_{\alpha_i\ldots\alpha_k} = 0$$

pois $S^*_{\nu_i} S_{\alpha_i} = 0$, já que $\alpha_i \neq \nu_i$.

b) Suponha que $\nu = \alpha r$ para algum r em P. Como $\nu \in \Lambda^*$ tem-se que $\alpha, r \in \Lambda^*$, e portanto

$$S_\nu S^*_\nu S_\alpha = S_{\alpha r} S^*_{\alpha r} S_\alpha = S_\alpha S_r S^*_r S^*_\alpha S_\alpha = S_\alpha S^*_\alpha S_\alpha S_r S^*_r = S_\alpha S_r S^*_r = S_{\alpha r} S^*_r = S_\nu S^*_r.$$

No caso em que não existe r em P tal que $\nu = \alpha r$, como em a) tome o menor índice i tal que $\nu_i \neq \alpha_i$. Então $\nu_1 \ldots \nu_{i-1} = \alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}$ e

$$S_\nu S^*_\nu S_\alpha = S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\nu_i\ldots\nu_k} S^*_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\nu_i\ldots\nu_k} S_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_i\ldots\alpha_l} =$$

$$= S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\nu_i\ldots\nu_k} S^*_{\nu_i\ldots\nu_k} S^*_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\alpha_i\ldots\alpha_l} =$$

$$= S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S^*_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}} S_{\nu_i\ldots\nu_k} S^*_{\nu_i\ldots\nu_k} S_{\alpha_i\ldots\alpha_l} = 0$$

pois $S^*_{\nu_i} S_{\alpha_i} = 0$, pelo fato de α_i ser diferente de ν_i. □

Teorema 3.1 *Se $\nu \in P \backslash \Lambda^*$ então $S_\nu = 0$.*

Demonstração: Escreva $\nu = g_j \alpha$, e desta forma, como visto anteriormente,

$$S^*_\nu S_\nu = S^*_\alpha S^*_{g_j} S_{g_j} S_\alpha = S^*_\alpha S_\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu \in L^k_{g_j}} S^*_\alpha S_\mu S^*_\mu S_\alpha.$$

Faremos a análise das parcelas de $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu \in L^k_{g_j}} S^*_\alpha S_\mu S^*_\mu S_\alpha$ da seguinte forma:

Caso 1: $|\mu| > |\alpha|$

Pelo Lema 3.3, $S_\mu S^*_\mu S_\alpha \neq 0$ apenas quando $\mu = \alpha r$, para algum $r \in P$. O que faremos é mostrar que não existe nenhum μ desta forma. Suponha que existe $\mu \in L^k_{g_j}$ tal que $\mu = \alpha r$, com $|r| = l$. Pela definição de $L^k_{g_j}$, $g_j \mu_1 \ldots \mu_{k-1} \in \Lambda^*$, mas $g_j\mu_1\dots\mu_{k-1} = g_j\alpha r_1\dots r_{l-1}$, donde conclui-se que $\nu = g_j\alpha \in \Lambda^*$, o que é absurdo, pois estamos supondo que $\nu \notin \Lambda^*$. Portanto não existe μ tal que $\mu = \alpha r$ para algum r em P, e assim, pelo Lema 3.3, $S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* S_\alpha = S_\alpha^*(S_\mu S_\mu^* S_\alpha) = 0$ para cada μ com $|\mu| > |\alpha|$.

Caso 2: $|\mu| \leq |\alpha|$

Pelo Lema 3.3, $S_\mu S_\mu^* S_\alpha = 0$, a menos que $\alpha = \mu r$, para algum r em P. Além disso pelo Lema 3.1, existe no máximo um $\mu \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_{g_j}^k$ tal que $\alpha = \mu r$. Se existe tal μ, pelo Lema 3.3, $S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* S_\alpha = S_\alpha^*(S_\mu S_\mu^* S_\alpha) = S_\alpha^* S_\alpha$.

Desta forma $S_\nu^* S_\nu = z S_\alpha^* S_\alpha$, onde $z = 0$ se existe algum $\mu \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_{g_j}^k$ tal que $\alpha = \mu r$ para algum $r \in P$ e $z = 1$ caso contrário.

Escreva $\nu = \nu_1 \dots \nu_k$ e tome o menor índice i tal que $\nu_{i+1}\dots\nu_k \in \Lambda^*$. Assim,

$$S_\nu^* S_\nu = z_1 S_{\nu_2\dots\nu_k}^* S_{\nu_2\dots\nu_k} = \dots = z_1\dots z_{i-1} S_{\nu_i\dots\nu_k}^* S_{\nu_i\dots\nu_k},$$

onde os z_i são 0 ou 1. Mostraremos que $S_{\nu_i\dots\nu_k}^* S_{\nu_i\dots\nu_k} = 0$. Como $\nu_i\dots\nu_k \notin \Lambda^*$, pelos comentários anteriores (caso 1 e caso 2), o que temos a fazer é mostrar que existe algum $\mu \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_{\nu_i}^k$ tal que $\nu_{i+1}\dots\nu_k = \mu r$ para algum $r \in P$.

Tome o índice j tal que $\nu_i\dots\nu_j \in \Lambda^*$ mas $\nu_i\dots\nu_{j+1} \notin \Lambda^*$. Este índice existe pois $\nu_i\dots\nu_k \notin \Lambda^*$ e $\nu_i \in \Lambda^*$. Além disso, $\nu_{i+1}\dots\nu_{j+1} \in \Lambda^*$ pois $\nu_{i+1}\dots\nu_k \in \Lambda^*$, e assim, $\nu_{i+1}\dots\nu_{j+1} \in L_{\nu_i}^{j+1-i}$. Portanto, $S_{\nu_i\dots\nu_k}^* S_{\nu_i\dots\nu_k} = 0$, e assim $S_\nu^* S_\nu = 0$, ou seja, $S_\nu = 0$.

□

Da definição de S podemos obter informações sobre alguns operadores $S(r)$, onde $r \in \mathbb{F}_n$. Por exemplo, se $r = r_1\dots r_k$ está em sua forma reduzida, com $r_i \in G^{-1}$ e $r_{i+1} \in G$, então $S(r_i r_{i+1}) = S(r_i)S(r_{i+1}) = 0$, donde $S(r) = 0$. Também, se $r = r_1\dots r_k$ e $s = s_1\dots s_l$ são elementos de $\mathbb{F}_n$ e estão em suas formas reduzidas, e além disto $r_k \neq s_1^{-1}$, então a forma reduzida de rs é $r_1\dots r_k s_1\dots s_l$, e assim $S(rs) = S(r)S(s)$ pela definição de S. Em geral, para quaisquer elementos r e s de $\mathbb{F}_n$ a igualdade entre $S(rs)$ e $S(r)S(s)$ pode não ser verdadeira.

Concluiremos este capítulo demonstrando o teorema seguinte, que também é o objetivo principal deste trabalho.

Teorema 3.2 *Se a função* $S : \mathbb{F}_n \to \mathcal{L}(H)$ *definida anteriormente satisfaz* M_1,M_2 *e* M_3*, então* S *é uma representação parcial do grupo* $\mathbb{F}_n$ *em* H.

Demonstração: A propriedade P_1 é satisfeita pela definição de S. Para demonstrar P_2 usaremos indução sobre o comprimento de t. É claro que $S(t^{-1}) = S(t)^*$ se $|t| = 1$, e suponha a igualdade válida para $|t| = k$. Tome $t \in \mathbb{F}_n$, com $|t| = k + 1$, e escreva $t = \widetilde{t}x$, onde $|\widetilde{t}| = k$. Usando a hipótese de indução e o fato de que a igualdade para $|x| = 1$ é válida,

$$S(t^{-1}) = S((\widetilde{t}x)^{-1}) = S(x^{-1}\widetilde{t}^{-1}) = S(x^{-1})S(\widetilde{t}^{-1}) =$$

$$S(x)^*S(\widetilde{t})^* = (S(\widetilde{t})S(x))^* = S(\widetilde{t}x)^* = S(t)^*.$$

Falta verificar a propriedade P_3, e para tanto, provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação: Para cada r *em* $\mathbb{F}_n$ *e* t *em* $G \cup G^{-1}$, $E(r) = S(r)S(r)^*$ *e* $E(t) = S(t)S(t)^*$ *comutam.*

No caso em que $r = r_1 \ldots r_k$ onde r está em sua forma reduzida, com $r_i \in G^{-1}$ e $r_{i+1} \in G$ para algum i, nada temos a provar, pois já sabemos que neste caso $S(r) = 0$. Consideremos portanto $r = \alpha\beta^{-1}$, onde r está em sua forma reduzida e $\alpha, \beta \in P$. No caso em que $\beta \notin \Lambda^*$, pelo teorema anterior, $S_\beta = 0$ e é claro que neste caso $E(t)$ e $E(r)$ comutam. Assim, podemos supor que $\beta \in \Lambda^*$ e provaremos que também neste caso $E(r)$ e $E(t)$ comutam. A demonstração será separada em dois casos:

Caso 1: Se $t \in G$*, isto é,* $t = g_j$*, para algum* j.

a) $|\alpha| \neq 0$.

Escrevendo $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_l$, se $\alpha_1 \neq g_j$, então $S(g_j)^*S(\alpha) = 0$ e portanto

$E(t)E(r) = 0 = E(r)E(t)$. Se $\alpha_1 = g_j$ tem-se que

$$S(\alpha)^*S(g_j)S(g_j)^* = S(\alpha_2 \ldots \alpha_l)^*S(\alpha_1)^*S(g_j)S(g_j)^* =$$

$$= S(\alpha_2 \ldots \alpha_l)^*S(\alpha_1)^*S(\alpha_1)S(\alpha_1)^* = S(\alpha_2 \ldots \alpha_l)^*S(\alpha_1)^* =$$

$$= (S(\alpha_1)S(\alpha_2 \ldots \alpha_k))^* = S(\alpha)^*.$$

De forma análoga, $S(g_j)S(g_j)^*S(\alpha) = S(\alpha)$. Segue que $E(t)$ e $E(r)$ comutam.

b) $|\alpha| = 0$.

Temos aqui que $r = \beta^{-1}$. Como $\beta \in \Lambda^*$, aplicando M_2,

$$E(r)E(t) = S(r)S(r)^*S(t)S(t)^* = S(\beta)^*S(\beta)S(g_j)S(g_j)^* =$$

$$= S(g_j)S(g_j)^*S(\beta)^*S(\beta) = S(t)S(t)^*S(r)S(r)^* = E(t)E(r).$$

Caso 2: Se $t \in G^{-1}$, isto é se $t = g_j^{-1}$, com $g_j \in G$.

Note que

$$E(r)E(t) = E(r)S_tS_t^* = E(r)S_{g_j}^*S_{g_j} = E(r)\left(I - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu \in L_{g_j}^k} S_\mu S_\mu^*\right) =$$

$$= E(r) - E(r)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu \in L_{g_j}^k} S_\mu S_\mu^*\right)$$

e da mesma maneira,

$$E(t)E(r) = S_{g_j}^*S_{g_j}E(r) = E(r) - \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu \in L_{g_j}^k} S_\mu S_\mu^*\right)E(r).$$

Para provar que $E(t)$ e $E(r)$ comutam basta provar que

$$E(r)S_\mu S_\mu^* = S_\mu S_\mu^* E(r) \qquad \forall \mu \in L_{g_j}^k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

a) $|\alpha| \neq 0$.

i) $|\alpha| \geq |\mu|$.

Pelo Lema 3.3, se $\alpha = \mu s$ para algum s em P então $S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* = S_\alpha^*$. Portanto,

$$E(r)S_\mu S_\mu^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* = E(r),$$

e da mesma forma $S_\mu S_\mu^* E(r) = E(r)$, e isto prova que $E(r)S_\mu S_\mu^* = S_\mu S_\mu^* E(r)$. Também pelo Lema 3.3, se $\alpha \neq \mu s$ para todo s em P, $S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* = 0 = S_\mu S_\mu^* S_\alpha$, e também neste caso a igualdade entre $E(r)S_\mu S_\mu^*$ e $S_\mu S_\mu^* E(r)$ se verifica.

ii) $|\alpha| < |\mu|$.

Pelo Lema 3.3, se $\mu \neq \alpha s \quad \forall s \in P$, então $S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* = 0 = S_\mu S_\mu^* S_\alpha$, donde decorre a igualdade. Se $\mu = \alpha s$ para algum $s \in P$, também pelo Lema 3.3, $S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* = S_s S_\mu^*$ e $S_\mu S_\mu^* S_\alpha = S_\mu S_s^*$, donde,

$$E(r)S_\mu S_\mu^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* S_\mu S_\mu^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_s S_\mu^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_s S_s^* S_\alpha^*,$$

e

$$S_\mu S_\mu^* E(r) = S_\mu S_\mu^* S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* = S_\mu S_s^* S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* = S_\alpha S_s S_s^* S_\beta^* S_\beta S_\alpha^*.$$

Usando o fato de que $\beta \in \Lambda^*$, por M_2,

$$S_s S_s^* S_\beta^* S_\beta = S_\beta^* S_\beta S_s S_s^*,$$

o que prova que $E(r)S_\mu S_\mu^* = S_\mu S_\mu^* E(r)$.

b) $|\alpha| = 0$

Sendo que $\beta \in \Lambda^*$, a igualdade procurada, $S_\beta^* S_\beta S_\mu S_\mu^* = S_\mu S_\mu^* S_\beta^* S_\beta$, decorre de M_2.

Conclui-se assim a demonstração da comutatividade entre $S_r S_r^*$ e $S_t S_t^*$ onde $r, t \in \mathbb{F}_n$ e $|t| = 1$. Usaremos isto para demonstrar que

$$S(t)S(r)S(r^{-1}) = S(tr)S(r^{-1}), \forall t, r \in \mathbb{F}_n$$

e concluir a demonstração do teorema. A prova de P_3 será feita por indução sobre $|t| + |r|$. E claro que a igualdade se verifica para $|t| + |r| = 1$. Suponha que a mesma vale para $|t| + |r| < k$. Tome $t, r \in \mathbb{F}_n$, com $|t| + |r| = k$, e escreva $t = \widetilde{t}x, r = y\widetilde{r}$, com $x, y \in G \cup G^{-1}$. No caso em que $y \neq x^{-1}$, $S(tr) = S(t)S(r)$, donde segue a igualdade. Consideremos o caso $x = y^{-1}$.

$$S(t)S(r)S(r^{-1}) = S(\widetilde{t}x)S(y\widetilde{r})S((y\widetilde{r})^{-1}) =$$

$$= S(\widetilde{t})S(x)S(y)S(\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(y^{-1}) = S(\widetilde{t})S(x)S(x^{-1})S(\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(x).$$

Usando a afirmação e o fato de que $S(x)$ é uma isometria parcial,

$$S(\widetilde{t})S(x)S(x^{-1})S(\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(x) = S(\widetilde{t})S(\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(x)S(x^{-1})S(x) =$$

$$= S(\widetilde{t})S(\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(x)$$

e pela hipótese de indução,

$$S(\widetilde{t})S(\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(x) = S(\widetilde{t}\widetilde{r})S(\widetilde{r}^{-1})S(x).$$

Por outro lado,

$$S(tr)S(r^{-1}) = S(\widetilde{t}xy\widetilde{r})S((y\widetilde{r})^{-1}) =$$

$$= S(\widetilde{tr})S(\widetilde{r}^{-1}y^{-1}) = S(\widetilde{tr})S(\widetilde{r}^{-1})S(x).$$

Isto conclui a demonstração de P_3, e também a do teorema. $\square$

Deste teorema e da proposição 2.1 segue que $C^*(S(r)S^*(r)|r \in \mathbb{F}_n)$ é comutativa, sempre que S satisfaz as condições M_1, M_2, e M_3.

Capítulo 4

Espectro

Vimos no capítulo anterior que dado um grupo $\mathbb{G}$ e uma representação parcial de grupo $S : \mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, o conjunto $B = C^*(S(g)S^*(g)|g \in \mathbb{G})$ é uma C^*-álgebra comutativa. Portanto, pelo teorema de Gelfand-Neimark, que pode ser visto em [4], B é isometricamente isomorfo à $C(\widehat{B})$, onde $\widehat{B}$ é o espectro de B, ou seja,

$$\widehat{B} = \{\varphi : B \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ é um homomorfismo e } \varphi(1) = 1\}.$$

Estudaremos aqui o espectro de $C^*(S(r)S^*(r)|r \in \mathbb{F}_n)$ no caso em que S provêm de uma família particular de isometrias parciais satisfazendo as propriedades M_1, M_2 e M_3 do capítulo anterior.

Seja $\mathbb{F}_n$ o grupo livre gerado por $G = \{1, \ldots, n\}$ e P o conjunto de todas as palavras positivas finitas de $\mathbb{F}_n$. Fixe $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > 1$ e o conjunto Pr como sendo um conjunto de palavras de P, onde cada elemento $s \in Pr$ é tal que $1 < |s| \leq k_0$. Defina

$$\Lambda^+ = \{x \in \{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}} | \text{ nenhuma sub-palavra } v \text{ de } x \text{ é elemento de } Pr.\}$$

Seja também

$$\Lambda^* = \{u | u \text{ é sub-palavra de algum elemento } x \text{ de } \Lambda^+\} \cup \{e\}.$$

Suporemos aqui que todos os geradores de $\mathbb{F}_n$ são sub-palavras de algum elemento de Λ^+, e desta forma $G \subseteq \Lambda^*$.

Pelo teorema de Tychonoff, (ver [4]), $\{1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$ é um espaço compacto, e como Λ^+ é fechado na topologia produto, tem-se que Λ^+ também é compacto.

Considere o espaço de Hilbert $l_2(\Lambda^+)$. Seja $\{\delta_w\}_{w \in \Lambda^+}$ uma base ortonormal para este espaço. Definimos para cada $i = 1, \ldots, n$ o operador $S_i : l_2(\Lambda^+) \longrightarrow l_2(\Lambda^+)$ dado por

$$S_i(\delta_w) = \begin{cases} \delta_{iw} & \text{se } iw \in \Lambda^+ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde δ_w é um elemento da base de $l_2(\Lambda^+)$. Desta forma,

$$\ker(S_i) = \overline{\text{span}\{\delta_w | iw \notin \Lambda^+\}}$$

e

$$\ker(S_i)^{\perp} = \overline{\text{span}\{\delta_w | iw \in \Lambda^+\}}.$$

Dado $x \in \ker(S_i)^{\perp}$, $x = \sum_{w | iw \in \Lambda^+} \lambda_w \delta_w$, tem-se que

$$S_i(x) = S_i\left(\sum_{w | iw \in \Lambda^+} \lambda_w \delta_w\right) = \sum_{w | iw \in \Lambda^+} \lambda_w S_i(\delta_w) = \sum_{w | iw \in \Lambda^+} \lambda_w \delta_{iw}.$$

Portanto,

$$\|S_i(x)\| = \left\| \sum_{w | iw \in \Lambda^+} \lambda_w \delta_{iw} \right\| = \left(\sum_{w | iw \in \Lambda^+} \|\lambda_w\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum_{w | iw \in \Lambda^+} \lambda_w \delta_w \right\| = \|x\|,$$

donde segue que $S_i|_{\ker(S_i)^\perp}$ é uma isometria. Pela proposição 1.2 S_i é uma isometria parcial. Além disto, na demonstração desta proposição vimos que S_i^* é tal que $S_i^*|_{\mathrm{Im}(S_i)} = \left(S_i|_{\ker(S_i)^\perp}\right)^{-1}$, e $S_i^*|_{\mathrm{Im}(S_i)^\perp} = 0$.

Tome $w \in \Lambda^+$ e escreva $w = w_1 w_2 \ldots$. Seja $\alpha = w_1 \ldots w_k$. Denotamos por $\widehat{\alpha} w$ o novo elemento $w_{k+1} w_{k+2} \ldots$, que é também um elemento de Λ^+. Desta forma, para cada δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$ vale que

$$S_i^*(\delta_w) = \begin{cases} \delta_{\widehat{i}w} & \text{se } w_1 = i \\ 0 & \text{se } w_1 \neq i. \end{cases}$$

Consideremos agora a função $S : \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathcal{L}(l_2(\Lambda^+))$ definida como no capítulo 2. Verificaremos se S satisfaz as propriedades M_1, M_2 e M_3.

Verificação de M_1: Devemos mostrar que $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I$, onde I é o operador identidade de $l_2(\Lambda^+)$. Motraremos que $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^*(\delta_w) = \delta_w$, para cada δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$. Dado um elemento δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$, escreva $w = w_1 w_2 \ldots$, e portanto $w_1 = j$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Então $S_j S_j^*(\delta_w) = S_j(\delta_{\widehat{j}w}) = \delta_w$, e $S_i S_i^*(\delta_w) = 0$, para cada $i \neq j$. Portanto $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^*(\delta_w) = \delta_w$, para cada elemento δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$, donde segue que $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I$.

Verificação de M_2: Aqui devemos mostrar que $S_\mu S_\mu^* S_\nu^* S_\nu = S_\nu^* S_\nu S_\mu S_\mu^*$, para cada $\mu, \nu \in \Lambda^*$. Sejam $\mu = \mu_1 \ldots \mu_k, \nu \in \Lambda^*$. Basta mostrar que $S_\mu S_\mu^* S_\nu^* S_\nu(\delta_w) = S_\nu^* S_\nu S_\mu S_\mu^*(\delta_w)$, para cada elemento δ_w da base de Λ^*. Dado δ_w, pela definição de S,

$$S_\mu S_\mu^* S_\nu^* S_\nu(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w & \text{se } \nu w \in \Lambda^+ \text{ e } w_j = \mu_j \forall j \in \{1, \ldots, k\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$S_\nu^* S_\nu S_\mu S_\mu^*(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w & \text{se } w_j = \mu_j, \forall j \in \{1, \ldots, k\} \text{ e } \nu w \in \Lambda^+ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

donde segue que $S_\mu S_\mu^* S_\nu^* S_\nu(\delta_w) = S_\nu^* S_\nu S_\mu S_\mu^*(\delta_w)$. Desta forma $S_\nu S_\nu^*$ e $S_\mu^* S_\mu$ comutam, e a propriedade M_2 se verifica.

Verificação de M_3: Verificaremos se $I - S_i^* S_i = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\mu\in L_i^k} S_\mu S_\mu^*$, lembrando que

$$L_i^k = \{\mu = \mu_1 \ldots \mu_k \in \Lambda^* | i\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \in \Lambda^* \text{ mas } i\mu_1 \ldots \mu_k \notin \Lambda^*\}.$$

Inicialmente note que a soma $\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{\mu\in L_i^k} S_\mu S_\mu^*$ é uma soma finita pois L_i^k é vazio para cada $k > k_0$. De fato, dado $\nu = \nu_1 \ldots \nu_k \in \Lambda^*$, com $k > k_0$, tal que $i\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \in \Lambda^*$, tem-se que ν e $i\nu_1 \ldots \nu_{k-1}$ são sub-palavras de elementos x e y de Λ^+, respectivamente. Escremos $x = x_1 \ldots x_r \nu_1 \ldots \nu_k x_{r+k+1} x_{r+k+2} \ldots$ e $y = y_1 \ldots y_l i\nu_1 \ldots \nu_{k-1} y_{l+k+1} y_{l+k+2} \ldots$ e consideremos o elemento $z = y_1 \ldots y_l i\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \nu_k x_{r+k+1} x_{r+k+2} \ldots$. Note que z é elemento de Λ^+, pois nenhuma sub-palavra de z é elemento de Pr (já que $k > k_0$). Desta forma $i\nu_1 \ldots \nu_k \in \Lambda^*$, o que significa que $\nu \notin L_i^k$. Provamos assim que L_i^k é vazio, para cada $k > k_0$.

Para cada elemento δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$,

$$S_i^* S_i(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w & \text{se } iw \in \Lambda^+ \\ 0 & \text{se } iw \notin \Lambda^+ \end{cases}$$

e portanto $S_i^* S_i$ é uma projeção sobre $\overline{\text{span}\{\delta_w | iw \in \Lambda^+\}}$. Assim $I - S_i^* S_i$ é uma projeção sobre $\overline{\text{span}\{\delta_w | iw \notin \Lambda^+\}}$.

Por outro lado, dado $\nu \in L_i^k$, tem-se que

$$S_\nu S_\nu^*(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w & \text{se } w_j = \nu_j, \forall j \in \{1 \ldots k\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Supondo-se $S_\nu S_\nu^*(\delta_w) = \delta_w$, então para cada $\mu = \mu_1 \ldots \mu_r \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_i^k$, com $\mu \neq \nu$, tem-se que $S_\mu S_\mu^*(\delta_w) = 0$. De fato, supondo-se $S_\mu S_\mu^*(\delta_w) = \delta_w$, tem-se que $w_1 \ldots w_r = \mu_1 \ldots \mu_r$. Se $k > r$ então $\nu_1 \ldots \nu_k = w_1 \ldots w_k =$

$\mu_1 \ldots \mu_r w_{r+1} \ldots w_k$, e pelo lema 3.1, $\nu = \mu$, o que é absurdo. O mesmo acontece se $k \leq r$.

Provamos que $S_\mu S_\mu^* S_\nu S_\nu^* = 0$, para cada $\mu, \nu \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_i^k$ com $\mu \neq \nu$. Além disso, pelo lema 3.2, S_μ é uma isometria parcial, para cada $\mu \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_i^k$, donde segue que $S_\mu S_\mu^*$ é idempotente, e é claro que $S_\mu S_\mu^*$ é auto-adjunto. Portanto, pela proposição 1.1, $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\mu \in L_i^k} S_\mu S_\mu^*$ é uma projeção, e como

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\mu \in L_i^k} S_\mu S_\mu^*(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w & \text{se existe } \mu = \mu_1 \ldots \mu_r \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_i^k | w_1 \ldots w_r = \mu_1 \ldots \mu_r \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada elemento δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$, segue que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\mu \in L_i^k} S_\mu S_\mu^*$ é uma projeção sobre

$$\overline{\text{span}\{\delta_w | w_1 \ldots w_r = \mu_1 \ldots \mu_r \text{ para algum } \mu = \mu_1 \ldots \mu_r \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_i^k\}}.$$

Para mostrar que $I - S_i^* S_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\mu \in L_i^k} S_\mu S_\mu^*$, basta mostrar que

$$\overline{\text{span}\{\delta_w | iw \notin \Lambda^+\}} =$$

$$= \overline{\text{span}\{\delta_w | w_1 \ldots w_r = \mu_1 \ldots \mu_r \text{ para algum } \mu = \mu_1 \ldots \mu_r \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_i^k\}},$$

e para tanto mostraremos que $A = A'$, onde

$$A = \{w \in \Lambda^+ | iw \notin \Lambda^+\}$$

e

$$A' = \{w \in \Lambda^+ | w_1 \ldots w_r = \mu_1 \ldots \mu_r \text{ para algum } \mu = \mu_1 \ldots \mu_r \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_i^k\}.$$

Mostraremos primeiro que $A' \subseteq A$. Dado $w \in A'$, tem-se que

$w = w_1w_2\ldots = \mu_1\ldots\mu_k w_{k+1}\ldots = \mu w_{k+1}\ldots$, onde $\mu \in L_i^k$. Como $\mu \in L_i^k$, segue que $i\mu \notin \Lambda^*$, e portanto $iw = i\mu w_{k+1}\ldots \notin \Lambda^+$, ou seja, $w \in A$.

Mostraremos agora que $A \subseteq A'$. Fixe $w \in A$. Como $iw \notin \Lambda^+$, existe subpalavra $iw_1\ldots w_k$ de iw tal que $iw_1\ldots w_k \notin \Lambda^*$. Tome o menor índice j tal que $iw_1\ldots w_{j-1} \in \Lambda^*$ mas $iw_1\ldots w_j \notin \Lambda^*$. É claro que $w_1\ldots w_j \in \Lambda^*$, pois $w \in \Lambda^+$, e portanto $w_1\ldots w_j \in L_i^j$, donde segue que $w \in A'$.

Desta forma, $A = A'$, o que prova que $I - S_i^*S_i = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\sum\limits_{\mu\in L_i^k} S_\mu S_\mu^*$.

Provamos que S satisfaz M_1, M_2, e M_3, e pelo teorema 3.2, S é uma representação parcial do grupo $\mathbb{F}_n$ em $l_2(\Lambda^+)$. Para cada $r \in \mathbb{F}_n$ defina $E(r) = S(r)S(r)^*$, e portanto $B = C^*(E(r)|r \in \mathbb{F}_n)$ é uma C^*-álgebra comutativa. Pelo teorema de Gelfand-Neimark, $\Gamma : B \longrightarrow C(\widehat{B})$ é um isomorfismo isométrico.

Estamos interessados em descrever $\widehat{B}$. Inicialmente, note que se $r = r_1\ldots r_k \in \mathbb{F}_n$, em sua forma reduzida, com algum $r_i \in G^{-1}$ e $r_{i+1} \in G$, (lembrando que $G = \{1,\ldots,n\}$ e $G^{-1} = \{1^{-1},\ldots,n^{-1}\}$), então $E(r)(\delta_w) = S(r)S(r)^*(\delta_w) = 0$ para cada $\delta(w)$ da base de $l_2(\Lambda^+)$, donde segue que $E(r)$ é o operador nulo. Portanto, considere $r = \alpha\beta^{-1} \in \mathbb{F}_n$, onde $\alpha = \alpha_1\ldots\alpha_k, \beta \in P$. Desta forma, para cada $w \in \Lambda^+$,

$$E(r)(\delta_w) = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^*(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w, & \text{se } w_i = \alpha_i, i = 1\ldots n \text{ e } \beta\widehat{\alpha}w \in \Lambda^+ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

o que significa que $E(r)$ é um operador diagonal. Portanto, qualquer elemento de B é um operador diagonal, pela definição de B.

Para cada $w \in \Lambda^+$ defina

$$\begin{aligned} \varphi_w : B &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longrightarrow \langle a(\delta_w), \delta_w\rangle \end{aligned}$$

Como as matrizes associadas a cada operador $a \in B$ são diagonais, tem-se que φ_w é um homomorfismo, e além disto, $\varphi_w(I) = 1$, onde I é o operador identidade. Portanto, $\varphi_w \in \widehat{B}$ para cada $w \in \Lambda^+$, e assim fica definida uma função $\kappa : \Lambda^+ \longrightarrow \widehat{B}$ dada por $\kappa(w) = \varphi_w$.

Proposição 4.1 *A função $\kappa : \Lambda^+ \longrightarrow \widehat{B}$ definida anteriormente é contínua, considerando-se os espaços topológicos Λ^+ e $\widehat{B}$ com as topologias produto e pontual, respectivamente.*

Demonstração: Considere a família de funções $\{\Phi_a\}_{a\in B}$, onde para cada $a \in B$, $\Phi_a : \widehat{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dada por $\Phi_a(\varphi) = \varphi(a)$ para cada $\varphi \in \widehat{B}$. Note que a topologia inicial gerada por esta família de funções é a topologia pontual de $\widehat{B}$. Portanto, para mostrar que $\kappa : \Lambda^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua, basta mostrar que para cada $a \in B$, $\Phi_a \circ \kappa : \Lambda^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua. Seja $a = E(r) \in B$, com $r = \alpha\beta^{-1} \in \mathbb{F}_n$. Se r não for desta forma, é claro que $\Phi_a \circ \kappa$ é contínua. Note que dado um elemento δ_w da base de $l_2(\Lambda^+)$, tem-se que

$$a(\delta_w) = E(\alpha\beta^{-1})(\delta_w) = \begin{cases} \delta_w, & \beta\widehat{\alpha}w \in \Lambda^+ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

donde segue que para cada $w \in \Lambda^+$,

$$\Phi_a(\kappa(w)) = \Phi_a(\varphi_w) = \varphi_w(a) = \langle a(\delta_w), \delta_w\rangle = \begin{cases} 1 & \beta\widehat{\alpha}w \in \Lambda^+ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $w \in \Lambda^+$, tome $\{w^i\}_{i\in I} \subseteq \Lambda^+$ onde $w^i \to w$ e I é um conjunto dirigido. Queremos mostrar que $\Phi_a(\kappa(w^i)) \to \Phi_a(\kappa(w))$.

Suponha que $\Phi_a(\kappa(w)) = 0$, ou seja, que $\beta\widehat{\alpha}w \notin \Lambda^+$. Como $\beta\widehat{\alpha}w \notin \Lambda^+$ existe sub-palavra $v = \beta\widehat{\alpha}w_1 \ldots w_l$ de $\beta\widehat{\alpha}w$ tal que $v \notin \Lambda^*$, e como $w^i \to w$, existe $i_0 \in I$ tal que para cada $i \in I$ com $i > i_0$, v é sub-palavra de $\beta\widehat{\alpha}w^i$, donde segue que $\Phi_a(\kappa(w^i)) = 0$, para cada $i > i_0$. Portanto, $\Phi_a(\kappa(w^i)) \to \Phi_a(\kappa(w))$.

Suponha agora que $\Phi_a(\kappa(w)) = 1$, ou seja, que $\beta\widehat{\alpha}w \in \Lambda^+$. Tome $i_0 \in I$ tal que para cada $i \in I$ com $i > i_0$ tem-se que $\beta\widehat{\alpha}w_1^i \ldots w^i_{|\alpha|+k_0} = \beta\widehat{\alpha}w_1 \ldots w_{|\alpha|+k_0}$, onde k_0

é o número natural fixado quando definimos o conjunto Pr. Mostraremos que para cada $i > i_0$, $\beta\widehat{\alpha}w^i \in \Lambda^+$. Tome $i > i_0$ e suponha, por absurdo, que $\beta\widehat{\alpha}w^i \notin \Lambda^+$. Então existe sub-palavra $v = v_1 \dots v_l$ de $\beta\widehat{\alpha} \in \Lambda^+$ tal que $v \in Pr$. É claro que v não é sub-palavra de $\widehat{\alpha}w^i$, pois $w^i \in \Lambda^+$. Portanto $v_1 = \beta_j$, donde segue que v é sub-palavra de $\beta\widehat{\alpha}w_1^i \dots w_{|\alpha|+k_0}^i = \beta\widehat{\alpha}w_1 \dots w_{|\alpha|+k_0}$ pois $|v| = l \leq k_0$, o que é absurdo, pois $\beta\widehat{\alpha}w_1 \dots w_{|\alpha|+k_0}$ é sub-palavra de $\beta\widehat{\alpha}w$, que é um elemento de Λ^+. Portanto, para cada $i > i_0$, tem-se que $\beta\widehat{\alpha}w \in \Lambda^+$, donde segue que $\Phi_a(\kappa(w^i)) \to \Phi_a(\kappa(w))$.

Provamos que se $a = E(r)$, com $r \in \mathbb{F}_n$ então $\Phi_a \circ \kappa$ é contínua. Desta forma, tomando-se $a = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \prod_{j=1}^{N_i} E(r_j)$, tem-se que $\Phi_a \circ \kappa$ também é contínua. Note que o conjunto D de tais a é denso em B. Dado qualquer $a \in B$, tome uma seqüência $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a^n \in D$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $a^n \to a$. Dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$, $\|a^n - a\| < \epsilon$. Considere a seqüência $\{\Phi_{a^n} \circ \kappa\}_{n\in\mathbb{N}}$, e note que para cada $n > n_0$,

$$\|\Phi_{a^n}(\kappa(w)) - \Phi_a(\kappa(w))\| = \|\varphi_w(a^n) - \varphi_w(a)\| =$$

$$= \|\varphi_w(a^n - a)\| \leq \sup_{w\in\Lambda^+} \|\varphi_w(a^n - a)\| = \|a^n - a\| < \epsilon \quad \forall w \in \Lambda^+.$$

Portanto $\Phi_{a^n} \circ \kappa$ converge uniformemente para $\Phi_a \circ \kappa$, donde segue que $\Phi_a \circ \kappa$ é contínua. Provamos assim que para cada $a \in B$, $\Phi_a \circ \kappa$ é contínua, e portanto $\kappa : \Lambda^+ \longrightarrow \widehat{B}$ é contínua. □

Proposição 4.2 *A função $\kappa : \Lambda^+ \longrightarrow \widehat{B}$ é bijetora.*

Demonstração: Inicialmente mostraremos que κ é injetora. Dados $w, \widetilde{w} \in \Lambda^+$, com $w \neq \widetilde{w}$. Escreva $w = w_1w_2\dots$, $\widetilde{w} = \widetilde{w}_1\widetilde{w}_2\dots$, tome o menor índice i tal que $w_i \neq \widetilde{w}_i$, e seja $\alpha = w_1 \dots w_i$. Desta forma,

$$\kappa(w)(E(\alpha)) = \varphi_w(E(\alpha)) = \langle E(\alpha)\delta_w, \delta_w\rangle = 1$$

e

$$\kappa(\widetilde{w})(E(\alpha)) = \varphi_{\widetilde{w}}(E(\alpha)) = \langle E(\alpha)\delta_{\widetilde{w}}, \delta_{\widetilde{w}}\rangle = 0,$$

donde segue que $\kappa(w) \neq \kappa(\widetilde{w})$. Portanto, κ é injetora.

Mostremos agora que κ é sobrejetora. Suponha por absurdo que $\kappa(\Lambda^+) \neq \widehat{B}$ e tome $\varphi \in \widehat{B} \backslash \kappa(\Lambda^+)$. Como Λ^+ é compacto e κ é contínua, segue que $\kappa(\Lambda^+)$ é compacto e portanto fechado em $\widehat{B}$. Além disso $\widehat{B}$ é normal, (por ser compacto e Hausdorff). Pelo Lema de Urysohn, (ver [4]), existe $f \in C(\widehat{B})$ tal que $f_{|_{\kappa(\Lambda^+)}} = 0$ e $f(\varphi) = 1$. Pelo teorema de Gelfand-Neimark, $\Gamma : B \longrightarrow C(\widehat{B})$ é uma isometria sobrejetora, e portanto existe $a \in B$ tal que $\Gamma(a) = f$. Como $\Gamma(a) = f \neq 0$, tem-se que $a \neq 0$, pois Γ é uma isometria. Além disso, para cada $\varphi_w \in \kappa(\Lambda^+)$,

$$0 = f(\varphi_w) = \Gamma(a)(\varphi_w) = \varphi_w(a),$$

donde segue que $a = 0$, o que é absurdo. Portanto $\kappa(\Lambda^+) = \widehat{B}$, ou seja, κ é sobrejetora. □

Segue desta proposição que κ é inversível. Como κ é contínua e além disto Λ^+ é compacto e $\widehat{B}$ é Hausdorff, tem-se que κ^{-1} também é contínua, e portanto Λ^+ é homeomorfo à $\widehat{B}$. Esta é a descrição de $\widehat{B}$ que estávamos procurando.

Referências Bibliográficas

[1] Kengo Matsumoto. *Relations Among Generators of C^*-Álgebras Associated with Subshifts.* International Journal of Mathematics. (1999), 385-405.

[2] Marshall Hall,Jr. *Theory of Groups.* Chelsea Publishing Company-New York,1973.

[3] Ruy Exel. *Amenability for Fell bundles.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 492 (1997) 41-73.

[4] V.S. Sunder *Functional Analysis: Spectral Theory.* Birkhäuser Verlag-Basel-Boston-Berlin,1998.