Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Produtos Cruzados

Daniel Gonçalves
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Fevereiro de 2001

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

Produtos Cruzados

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Daniel Gonçalves
Florianópolis
Fevereiro de 2001

Produtos Cruzados

por

Daniel Gonçalves

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica.

Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Bert Schröer (Berlim e CBPF)

Prof. Dr. Artur Lopes (UFRGS)

Prof. Dr. Michael Dokuchaev (USP)

Florianópolis, 20 de fevereiro de 2001.

À minha mãe
À MI

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha família por todo o suporte, apoio e alegria dados a mim durante toda a minha vida. Em especial, dedico este trabalho a minha mãe, que sempre me ajudou a escolher os caminhos certos nas trilhas da vida.

A minha esposa, Maria Inez, por todo seu amor e carinho, sem o qual minha vida não seria completa.

Ao meu orientador, Ruy Exel, um professor e pesquisador exemplar, algo difícil de se encontrar nos dias de hoje. Gostaria de agradecê-lo por sua enorme paciência em resolver todas as minhas dúvidas, da mais simples a mais difícil. Para mim, mais do que um orientador, um amigo.

Ao professor Igor Mozolevski, pelas suas aulas de análise funcional, que despertaram em mim o gosto por esta matéria tão interessante. Às professoras Jane de O. Crippa e Albertina Zatelli, pela orientação durante a graduação, através dos programas de iniciação científica. De novo à professora Albertina Zatelli, pela compreensão e ajuda na hora de escolher o meu orientador de mestrado. Ao professor Rubens Starke, por ter acreditado e confiado em mim. A professora Joana Quandt, por ter me ensinado Álgebra Linear do modo que eu precisava. Ao professor Celso M. Doria, que sempre desejou o melhor para mim. Ao professor Mário César Zambaldi, que escreveu certo por linhas tortas, gostaria de dizer que não guardo nenhuma mágoa pelo passado. Agradeço também a todos os demais professores que contribuíram com a minha formação e não foram citados. Finalmente, a Elisa, secretária da PG, que sempre me atendeu com muita boa vontade.

A Capes, pelo financiamento de meus estudos.

Resumo

Dado (A, G, α) um C* sistema dinâmico, estudaremos o produto cruzado da C*-algebra A pelo grupo discreto G pela ação α de G em A. Como dada uma ação parcial de G em um espaço de Hausdorff localmente compacto X, existe uma ação parcial de G na C*-algebra $C_0(X)$ associada, e a reciproca também vale, vamos provar que se uma ação parcial é topologicamente livre e minimal em X, então o produto cruzado reduzido associado é simples, [1]. É claro que antes disto precisamos introduzir as noções de produto cruzado por ações parciais e produto cruzado reduzido. Por último, aplicaremos este resultado para alguns exemplos.

Abstract

Given $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$ a C* dynamical system, we will study the cross product of the C*-algebra A by the discrete group G under the action α of G into A. Since given a partial action of G on a locally compact Hausdorff space X, there exists an partial action of G into the C*-algebra $C_0(\mathrm{X})$ associated, and the converse also holds, we will proof that if a partial action is topologically free and minimal on X, then the associated reduced crossed product is simple, [1]. Of course, before we do this, we need to introduce the notions of cross product by partial actions and reduced crossed product. Finally, we will apply this theorem for some examples.

Sumário

Introdução

Dado G um grupo e X um espaço de Hausdorff localmente compacto, um sistema dinâmico com espaço de representação X, denotado por $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$, é um homomorfismo de grupo $\beta : \mathrm{G} \to \mathrm{Homeo}(\mathrm{X})$.

Se A é uma C* álgebra e G um grupo discreto, então um C* sistema dinâmico, denotado por $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$, é um homomorfismo de grupo $\alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{A})$.

É muito interessante notarmos que dado um sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$, existe um C* sistema dinâmico $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ associado, e reciprocamente, dado $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ existe $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ tal que $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ é proveniente de $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$.

Portanto, quando queremos resolver problemas ligados a um sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$, um caminho possível é encontrarmos o C* sistema dinâmico associado, resolvermos os problemas neste ambiente, e então voltarmos ao sistema dinâmico original.

Também é comum, quando temos um C* sistema dinâmico bem conhecido, tentarmos encontrar um sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ tal que este C* sistema dinâmico seja proveniente do sistema dinâmico.

Em particular, dado $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$ um C* sistema dinâmico, estamos interessados em fazer com que todos os automorfismos α_t de A dados sejam internos, ou seja, queremos que existam elementos u_t unitários tal que $\alpha_t(a) = u_t a u_t^{-1}$ para todo $a \in \mathrm{A}$. Para isto construímos o produto cruzado de A por G pela ação α, que é uma C*-algebra que contém A e tal que todo automorfismo α_t tem uma extensão que é um automorfismo interno.

Neste contexto, surge a definição de uma ação parcial. Esta definição é uma generalização tanto da definição de um sistema dinâmico como de um C* sistema dinâmico.

Uma Ação Parcial de um Grupo G em um conjunto Ω é um par $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in\mathrm{G}}, \{h_t\}_{t\in\mathrm{G}})$, onde para cada $t \in \mathrm{G}$, Δ_t é um subconjunto de Ω e $h_t : \Delta_{t^{-1}} \to \Delta_t$ é uma bijeção satisfazendo para todo t,s pertencentes ao grupo G:

i) $\Delta_e = \Omega$ e h_e é a identidade em Ω

ii) $h_t(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) = \Delta_t \cap \Delta_{ts}$

iii) $h_t(h_s(x)) = h_{ts}(x)$, $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$

Se Ω é um espaço topológico, precisamos que:

- cada Δ_t seja um subconjunto aberto de Ω

- h_t seja um homeomorfismo de $\Delta_{t^{-1}}$ em Δ_t

Se $\theta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ é uma ação parcial de G em uma C*-algebra A é necessário que:

- Cada D_t seja um ideal bilateral fechado de A

- α_t seja um *-isomorfismo de $D_{t^{-1}}$ em D_t

É interessante notarmos que a relação entre a teoria de sistema dinâmicos e C*-algebras é preservada, uma vez que dada uma ação parcial de G em um espaço de Hausdorff localmente compacto X, existe uma ação parcial de G na C*-algebra $C_0(X)$ associada, e reciprocamente, dada uma ação parcial α em $C_0(X)$, existe uma ação parcial h em X tal que α é proveniente de h.

Também é possível generalizarmos a construção do produto cruzado para uma ação parcial α em uma C*-algebra, porém para obtermos os resultados que procuramos é necessário utilizarmos a noção de produto cruzado reduzido.

Dada uma ação parcial h em X, e α a ação em $C_0(X)$ proveniente de h, é interessante encontrarmos propriedades do produto cruzado reduzido de $C_0(X)$ pela ação α, a partir de propriedades da ação h.

É um resultado conhecido, [1], que se α é a ação proveniente de uma ação parcial h em X, e h é topologicamente livre e minimal, ou seja, $\forall t \in G \setminus \{e\}$ o conjunto $F_t := \{x \in \Delta_{t^{-1}} : h_t(x) = x\}$ tem interior vazio (topologicamente livre) e não existem subconjuntos abertos V de X tais que $h_s(V \cap \Delta_{s^{-1}}) \subset V$ $\forall s \in G$, a não ser $V = X$ e $V = \emptyset$ (minimal), então o produto cruzado reduzido associado é simples, ou seja não possui ideais bilaterais fechados não triviais. Este é o resultado principal da nossa dissertação de mestrado, que será apresentado ao fim do trabalho.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, faremos a apresentação de alguns resultados sobre C*-algebras, grupos, teoria de representação de C*-algebras e topologia, os quais serão utilizados no decorrer do trabalho.

Durante o capítulo 2, vamos expor algumas das relações entre a teoria de sistemas dinâmicos e a teoria de C*-algebras e conheceremos um pouco mais certos C*-sistemas dinâmicos. Em particular, construiremos o produto cruzado de uma C*-algebra A por um grupo discreto G pela ação de G em A.

Dedicaremos o capítulo 3 a tarefa de representarmos o produto cruzado de A por G, em um espaço de operadores limitados B(H) e melhorarmos nosso entendimento dos produtos cruzados, através de alguns exemplos.

No capítulo 4, introduziremos a definição de uma ação parcial, construiremos o produto cruzado de uma C*-algebra A por um grupo discreto G pela ação parcial de G em A e representaremos este produto cruzado em um espaço de operadores limitados B(H). Por último daremos alguns exemplos de produtos cruzados por ações parciais.

O capítulo 5 contém o teorema principal desta dissertação. Para provarmos este resultado é necessário definirmos o produto cruzado reduzido. Com este teorema, provamos que se uma ação parcial é topologicamente livre e minimal então o produto cruzado reduzido associado é simples.

Finalmente, no capítulo 6 aplicaremos os resultados obtidos no capítulo 5 para alguns casos particulares.

Apresentaremos ainda, algumas conclusões finais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo veremos alguns resultados necessários para o bom desenvolvimento do trabalho que segue. A maior parte das proposições será demonstrada, porém em alguns casos apenas daremos a referência. Presume-se que o leitor tenha um pouco de familiaridade com a teoria de C*-algebras.

1.1 Teoria Elementar de C*-algebras

Definição 1.1. *Uma* ***-algebra** *é um espaço vetorial* A *sobre o corpo dos números complexos,* $\mathbb{C}$, *munido com uma multiplicação e uma aplicação* $*: \mathrm{A} \to \mathrm{A}$, *chamada involução, que satisfazem:*

- $a(bc) = (ab)c$
- $(a+b)c = ac + bc \qquad a(b+c) = ab + ac$
- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$
- $(a+b)^* = a^* + b^*$
- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$
- $(ab)^* = a^* b^*$
- $a^{**} = a$

onde $a, b, c \quad \in \mathrm{A}$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observação 1.2. *Se* A *é um espaço de Banach com relação a uma norma,* $||\cdot||$, *tal que* $||ab|| \leq ||a||||b||$ *para todo* $a, b \in \mathrm{A}$, *então* A *é uma* ***-algebra de Banach**.

Definição 1.3. *Dizemos que* A *é uma* **C*-algebra** *se* A *é uma *-algebra de Banach tal que*

$$||a^*a|| = ||a||^2$$

para todo $a \in \mathrm{A}$.

Observação 1.4. *Se* A *possui um elemento unidade* e, *tal que*

$$ae = ea = a \quad \forall a \in \mathrm{A}$$

$$\|e\| = 1$$

então A *é chamada* C^**-algebra com unidade.*

Exemplo 1.5. *Se* X *é um espaço de Hausdorff compacto então* $C(\mathrm{X})$, *o espaço de todas as funções contínuas em* X, *é uma* C^**algebra onde as operações estão definidas pontualmente e a involução é dada por* $* : f \to \overline{f}$.

Definição 1.6. *Seja* A *uma *-algebra. Uma* **representação de** A **em** H, *onde* H *é um espaço de Hilbert, é um *-homomorfismo* $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)}$. *Aqui* B(H) *denota os espaço dos operadores limitados em* H.

Proposição 1.7. *Se* A *é uma *-algebra de Banach então toda representação,* π, *de* A *é contrativa, ou seja,* $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ *para todo* $a \in \mathrm{A}$.

Demonstração:

Primeiro note que se a é inversível então $\pi(a)\pi(a^{-1}) = \pi(aa^{-1}) = \pi(1) = I$ e $\pi(a)$ é inversível. Logo se $a - \lambda e$ é inversível então $\pi(a) - \lambda I$ é inversível e o conjunto resolvente de a esta contido no conjunto resolvente de $\pi(a)$, o que implica que o espectro de a contém o espectro de $\pi(a)$. Denotando o raio espectral de um elemento $a \in \mathrm{A}$ por $\rho(a)$, segue que $\rho(\pi(a)) \leq \rho(a)\ \forall a \in \mathrm{A}$.

Ainda, por [14], página 37, teorema 2.1.1, sabemos que para todo elemento autoadjunto a de uma C*-algebra, $\rho(a) = \|a\|$.

Então,

$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \rho\big(\pi(a)^*\pi(a)\big) = \rho\big(\pi(a^*a)\big) \leq \rho(a^*a) \leq \|a^*a\|$
$\leq \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2$

■

Definição 1.8. *Seja* A *uma *-algebra normada não necessariamente completa. Defina* $|||a||| = \sup\{\|\pi(a)\| : \pi$ *é representação contrativa de* $\mathrm{A}\}$. *Seja* $N = \{a \in \mathrm{A} : |||a||| = 0\}$. *Considere o espaço quociente* $\frac{\mathrm{A}}{N}$. *Para* $\tilde{a} \in \frac{\mathrm{A}}{N}$ *defina* $|||\tilde{a}||| = |||a|||$. *A* **C*-algebra envolvente** *de* A *é o completamento de* $\left(\frac{\mathrm{A}}{N}, |||\cdot|||\right)$.

Proposição 1.9. *A norma* $|||\cdot|||$ *em* $\frac{\mathrm{A}}{N}$ *esta bem definida e a* C^**-algebra envolvente de* A *é, de fato, uma* C^**-algebra.*

Demonstração:

Para mostrar que a norma $|||\cdot|||$ em $\frac{\mathrm{A}}{N}$ esta bem definida, suponha que $\tilde{a} = \tilde{b}$. Então $a - b \in N$ e portanto $a = b + n$, onde $n \in N$. Logo,

$$|||a||| = |||b + n||| \leq |||b||| + |||n||| = |||b|||$$

e analogamente $|||b||| \leq |||a|||$. Assim $|||b||| = |||a|||$.

Para demonstrarmos que a C*-algebra envolvente de A é uma C*-algebra, basta mostrar que $|||\widetilde{a^*a}||| = |||\tilde{a}|||^2$ e $|||\widetilde{ab}||| \leq |||\tilde{a}||| \, |||\tilde{b}|||$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
&|||\tilde{a}|||^2 = |||a|||^2 = \sup{}^2\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} \\
&= \sup\{\|\pi(a)\|^2 : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} \\
&= \sup\{\|\pi(a)^*\pi(a)\|^2 : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} \\
&= \sup\{\|\pi(a^*a)\|^2 : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} \\
&= |||a^*a||| = |||\widetilde{a^*a}|||
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&|||\widetilde{ab}||| = |||ab||| = \sup\{\|\pi(ab)\| : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} \\
&\leq \sup\{\|\pi(a)\|\|\pi(b)\| : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} \\
&\leq \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ é rep. cont. de A}\} \sup\{\|\pi(b)\| : \pi \text{ é rep. cont. de A}\} \\
&= |||a||| \, |||b||| = |||\tilde{a}||| \, |||\tilde{b}|||
\end{aligned}$$

■

Definição 1.10. *Definimos a inclusão canônica de* A *na sua* C^**-algebra envolvente,* $C^*(\mathrm{A})$*, como a aplicação* $\begin{array}{rcl} i : \mathrm{A} & \to & C^*(\mathrm{A}) \\ a & \mapsto & \tilde{a} \end{array}$

Proposição 1.11. Propriedade Universal. *Seja* A *uma *-algebra normada. Se denotarmos a* C^**-algebra envolvente de* A *por* $C^*(\mathrm{A})$ *então, para toda* C^**-algebra* B *e para todo *-homomorfismo contrativo* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$*, existe único *-homomorfismo* $\tilde{\varphi} : C^*(\mathrm{A}) \to \mathrm{B}$ *tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{B} \\
C^*(\mathrm{A}) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração:

Como B é uma C*-algebra, por [12], página 338, existe um isomorfismo isométrico de B em B(H), para algum espaço de Hilbert H. Vamos então considerar $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B(H)}$.

Assim, φ é uma representação contrativa de A. Utilizando as notações da definição de C*-algebra envolvente, podemos definir uma representação contrativa de $\frac{\mathrm{A}}{N}$ por $\phi(\tilde{a}) = \varphi(a)$.

Note que ϕ esta bem definida pois, se $\tilde{a} = \tilde{b}$ então $|||a - b||| = 0$, o que implica que $\|\varphi(a - b)\| = 0$ pois φ é uma representação contrativa. Segue que $\varphi(a - b) = 0 \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ e portanto $\phi(\tilde{a}) = \phi(\tilde{b})$.

Ainda, ϕ é realmente contrativa, pois

$$\|\phi(\tilde{a})\| = \|\varphi(a)\| \leq \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ é representação contrativa de A}\} = |||a||| = |||\tilde{a}|||$$

Agora, como $\frac{\mathrm{A}}{N}$ é denso em $C^*(\mathrm{A})$, segue do teorema 2.7.11, página 100 de [16], que ϕ pode ser estendido para um operador $\tilde{\varphi}$ em $C^*(\mathrm{A})$. É claro que $\tilde{\varphi}$ é tal que o diagrama comuta.

Mais explicitamente, estamos na seguinte situação:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{B} \\
\frac{\mathrm{A}}{N} \arrow[r] & C^*(\mathrm{A}) \arrow[u, "\tilde{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

■

Lema 1.12. *Sejam* B *uma *-algebra de Banach,* $\tilde{\mathrm{B}}$ *uma* C^**-algebra e* $k : \mathrm{B} \to \tilde{\mathrm{B}}$ *um homomorfismo tal que* $\overline{Im(k)} = \tilde{\mathrm{B}}$. *Se para toda* C^**-algebra* A *e para todo homomorfismo* $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, *existe único homomorfismo* $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathrm{B}} \to A$ *tal que o diagrama abaixo comuta,*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "k"'] & \mathrm{A} \\
\tilde{B} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"] &
\end{tikzcd}$$

então $\tilde{\mathrm{B}} \cong C^*(\mathrm{B})$, *a* C^**-algebra envolvente de* B

Demonstração:

Pela proposição 1.11, existe $\tilde{k} : C^*(\mathrm{B}) \to \tilde{\mathrm{B}}$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & C^*(\mathrm{B}) \arrow[dl, dotted, "\tilde{k}"'] \\
\tilde{B} &
\end{tikzcd}$$

Por hipótese, existe $\overline{k} : \tilde{\mathrm{B}} \to C^*(\mathrm{B})$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & C^*(\mathrm{B}) \\
\tilde{B} \arrow[ur, dotted, "\overline{k}"] &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que $\overline{k}$ é a inversa de $\tilde{k}$ e portanto $\tilde{k}$ é um isomorfismo entre $C^*(\mathrm{B})$ e $\tilde{\mathrm{B}}$.

Seja $\tilde{b}$ pertencente a imagem de k. Então $\tilde{b} = k(b)$ para algum $b \in \mathrm{B}$. Logo,

$$\tilde{k} \circ \overline{k}(\tilde{b}) = \tilde{k} \circ \overline{k}\big(k(b)\big) = \tilde{k} \circ \big(i(b)\big) = k(b) = \tilde{b}$$

Assim, $\tilde{k} \circ \overline{k} = I$ na $\mathrm{Im}(k)$. Como $\overline{\mathrm{Im}(k)} = \tilde{\mathrm{B}}$ temos que $\tilde{k} \circ \overline{k} = I$ em $\tilde{\mathrm{B}}$.

Agora, seja b_i pertencente a imagem da inclusão i de B em $C^*(\mathrm{B})$, ou seja, $b_i = i(b)$ para algum $b \in \mathrm{B}$. Então,

$$\overline{k} \circ \tilde{k}(b_i) = \overline{k} \circ \tilde{k}\big(i(b_i)\big) = \overline{k} \circ \big(k(b_i)\big) = i(b_i) = b_i$$

Logo, $\overline{k} \circ \tilde{k} = I$ na $\mathrm{Im}(i)$ e como B é denso em $C^*(\mathrm{B})$, temos que $\overline{k} \circ \tilde{k} = I$ em $C^*(\mathrm{B})$.

■

Proposição 1.13. *Se* B *é uma *-algebra de Banach comutativa, então,* $C^*(\mathrm{B}) = C(\Delta_{\mathrm{B}})$

$\hat{\mathrm{B}}$

Demonstração:

Nosso objetivo é utilizar o lema anterior para provar a proposição. Para isto, considere a transformada de Gelfand $\wedge : \mathrm{B} \to C(\Delta_{\mathrm{B}})$, onde Δ_{B} denota os espaço dos homomorfismos complexos em B. Pela prova do teorema 11.18 de [12], página 289, temos que $\overline{\mathrm{Im}(\wedge)} = C(\Delta_{\mathrm{B}})$.

Assim, se mostrarmos que para todo homomorfismo $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, onde A é uma C*-algebra, existe único homomorfismo $\tilde{\varphi} : C(\Delta_{\mathrm{B}}) \to \mathrm{A}$ tal que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\wedge"'] & \mathrm{A} \\
C(\Delta_{\mathrm{B}}) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

segue do lema acima que $C^*(\mathrm{B}) \cong C(\Delta_{\mathrm{B}})$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\overline{\varphi(\mathrm{B})} = \mathrm{A}$ e portanto A é uma C*-algebra comutativa. Logo, pelo teorema de Gelfand-Naimark (11.18) da página 289 de [12], temos que A é isometricamente isomorfa a $C(\Delta_{\mathrm{A}})$, onde Δ_{A} denota os espaço dos homomorfismos complexos em A. Pelo teorema 11.9, página 280 de [12] sabemos que Δ_{A} é um espaço de Hausdorff compacto. A partir de agora vamos denotar Δ_{A} por X. Então $\mathrm{A} \cong C(\mathrm{X})$.

Agora, defina $\begin{array}{rcl} h : \mathrm{X} & \to & \Delta_{\mathrm{B}} \\ x & \mapsto & \delta_x \circ \varphi \end{array}$, onde δ_x denota o homomorfismo de avaliação em x. Precisamos mostrar que h é contínua. Como Δ_{B} possui uma topologia inicial, é suficiente mostrar que $\hat{b} \circ h$ é contínua para todo $b \in \mathrm{B}$. Estamos na seguinte situação:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{h} & \Delta_{\mathrm{B}} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & h(x) & \mapsto & \hat{b}(h(x)) \end{array}$$

Agora, note que $\hat{b}(h(x)) = \hat{b}(\delta_x \circ \varphi) = \delta_x \circ \varphi(b) = \varphi(b)(x)$ e como $\varphi(b) \in C(\mathrm{X})$, $\hat{b} \circ h$ é contínua para todo $b \in \mathrm{B}$. Logo h é contínua.

Com isto, podemos definir o homomorfismo $\tilde{\varphi}$ que estamos procurando.

Defina:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : C(\Delta_{\mathrm{B}}) &\rightarrow C(\mathrm{X}) \\ f &\mapsto f \circ h \end{aligned}$$

É fácil ver que $\tilde{\varphi}$ é realmente um homomorfismo. Os detalhes desta demonstração serão aqui omitidos, uma vez que esta é completamente análoga a demonstração da proposição 2.3 do capítulo 2.

Falta mostrar que $\tilde{\varphi}$ é o único homomorfismo tal que o diagrama 1.1 comuta. Observe que

$$\tilde{\varphi} \circ \wedge(b) \mid_x = \tilde{\varphi}(\hat{b}) \mid_x = \hat{b} \circ h \mid_x = \hat{b}\big(h(x)\big) = \hat{b}(\delta_x \circ \varphi) = \delta_x\big(\varphi(b)\big) = \varphi(b) \mid_x$$

e portanto o diagrama 1.1 comuta.

Finalmente, $\tilde{\varphi}$ é único, pois, se $\overline{\varphi}$ é um homomorfismo tal que o diagrama 1.1 comuta, temos que

$$\tilde{\varphi}(\hat{b}) = \tilde{\varphi} \circ \wedge(b) = \varphi(b) = \overline{\varphi} \circ \wedge(b) = \overline{\varphi}(\hat{b}) \quad \forall b \in \mathrm{B}$$

e como $\overline{\mathrm{Im}(\wedge)} = C(\Delta_{\mathrm{B}})$, ou seja, $\hat{\mathrm{B}}$ é denso em $C(\Delta_{\mathrm{B}})$, segue que $\tilde{\varphi} = \overline{\varphi}$.

■

Proposição 1.14. *Sejam* A *uma C^*-algebra,* B *uma $*$-algebra e ϕ um homomorfismo injetor de* A *em* B. *Então* $\|\phi(x)\| \geq \|x\|$ $\forall x \in \mathrm{A}$

Demonstração:

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [10], página 20, proposição 1.8.1.

■

Proposição 1.15. *Se A e B sao C^*-algebras e ϕ é um homomorfismo injetor de* A *em* B, *então* $\|\phi(x)\| = \|x\|$.

Demonstração:

Como B é uma C*-algebra, por [12], página 338, existe um isomorfismo isométrico de B em B(H), para algum espaço de Hilbert H. Vamos então considerar $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B(H)}$.

Assim, ϕ é uma representação de A e pela proposição 1.7 temos que $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$. Pela proposição anterior, como ϕ é injetor, $\|\phi(x)\| \geq \|x\|$. Destas duas desigualdades segue que $\|\phi(x)\| = \|x\|$.

■

Corolário 1.16. *Sejam* A, B *C^*-algebras, ϕ um homomorfismo de* A *em* B *e* I *o* $\ker(\phi)$. *Considere a decomposição canônica de ϕ:* $\mathrm{A} \rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}} \xrightarrow{\psi} \phi(\mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{B}$ *Então,* I *é fechado em* A, $\phi(\mathrm{A})$ *é fechado em* B *e ψ é um isomorfismo isométrico da C^*-algebra* $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}$ *na C^*-algebra* $\phi(\mathrm{A})$

Demonstração:

Como ϕ é um homomorfismo de C*-algebras, ϕ é contínuo e portanto I é fechado. Logo, $\frac{A}{I}$ com a norma quociente é uma C*-algebra.

Agora, note que o homomorfismo $\begin{array}{rccl}\psi: & \frac{A}{I} & \xrightarrow{\psi} & B \\ & \overline{a} & \mapsto & \phi(a); a \in \overline{a}\end{array}$, obtido de ϕ passando-se o quociente, é injetivo e portanto, pela proposição 1.15, ψ é isométrico.

Logo, $\phi(A)$ é completo e portanto fechado em B.

■

Definição 1.17. *Uma* **aproximação da unidade** *para uma C^*-algebra* A *é um net crescente $\{u_i\}_{i \in I}$ onde I é um conjunto dirigido, tal que,* $0 \leq u_i \leq 1$ *e* $\forall a \in A$ $\lim u_i a = \lim a u_i = a$

Observação 1.18. *Note que como u_i é sempre positivo, segue da definição 11.27 de [12], página 294, que u_i é sempre hermitiano, ou seja,* $u_i^* = u_i$ $\forall i \in I$.

Proposição 1.19. *Toda C^*-algebra admite uma aproximação da unidade.*

Demonstração:

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [14], teorema 3.1.1, pág. 78.

■

Proposição 1.20. *Se* I *é um ideal fechado de uma C^*-algebra* A, *então* $I = I^*$

Demonstração:

Como I é um ideal fechado de A, I é uma C*-algebra.

Logo, pela proposição 1.19, existe uma aproximação da unidade $\{u_i\}_{i \in J}$ de I.

Seja $x \in I$. Então $x = \lim x u_i = \lim u_i x$ e $x^* = \lim u_i^* x^* = \lim u_i x^*$. Agora, como I é ideal, $u_i x^* \in I$, $\forall i \in J$, e como I é fechado, $\lim u_i x^* \in I$. Portanto $x^* \in I$.

■

Proposição 1.21. *Seja* I *um ideal fechado de uma C^*-algebra* A. *Então o conjunto* $\{b \in I : b = b'b'',$ *onde* $b', b'' \in I\}$ *é denso em* I.

Demonstração:

Seja $\{u_i\}$ uma aproximação da unidade para I.

Então para todo $a \in \mathrm{I}$, temos que $a = \lim u_i a$, onde $u_i \in \mathrm{I}$ e $a \in \mathrm{I}$.

∎

Definição 1.22. *Seja* $\mathrm{H} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{H}_i$, *onde* H_i *é um espaço de Hilbert para todo* i *em* I *um conjunto de índices. Queremos representar um operador* $T : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *de forma matricial. Como proceder?*

Sejam $J_k : \mathrm{H}_k \to \mathrm{H}$ a inclusão de H_k em H $P_k : \mathrm{H} \to \mathrm{H}_k$ a projeção em H_k. Defina o operador $T_{ij} : \mathrm{H}_j \to \mathrm{H}_i$ como $T_{ij} = P_i \circ T \circ J_j$.

Note que todo $x = (x_k)_{k \in \mathrm{I}} \in \mathrm{H}$ pode ser escrito como $x = \sum_{k \in \mathrm{I}} J_k(x_k)$.

Então

$$T(x)_i = P_i(T(x)) = P_i\Big(T\big(\textstyle\sum_{k \in \mathrm{I}} J_k(x_k)\big)\Big) = P_i\Big(\textstyle\sum_{k \in \mathrm{I}} T\big(J_k(x_k)\big)\Big)$$
$$= \textstyle\sum_{k \in \mathrm{I}} P_i\big(T(J_k(x_k))\big) = \sum_{k \in \mathrm{I}} T_{ik}(x_k)$$

No caso em que $\mathrm{I} = \mathbb{N}$, esta igualdade pode ser descrita da seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots \\ T_{21} & T_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{k \in \mathrm{I}} T_{ik} x_j \\ \vdots \end{pmatrix} -i-$$

A matriz a esquerda desta igualdade é a **matriz do operador** T. Procedemos de forma análoga quando I é um conjunto de índices qualquer.

Proposição 1.23. *Se* $T = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & T_{11} & & \\ & & T_{22} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ *é um operador diagonal em* $\mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$, *então* $\|T\| = sup\|T_{ii}\|$

Demonstração:

Observe que $\|T(\xi_1, \xi_2, \ldots)\| = \|(T_{11}\xi_1, T_{22}\xi_2, \ldots)\| = \sqrt{\sum \|T_{ii}\xi_i\|^2} \leq \sup \|T_{ii}\| \|(\xi_1, \xi_2, \ldots)\|$. Logo $\|T\| \leq \sup \|T_{ii}\|$.

Por outro lado, $\|T_{ii}\| = \|T\,|_{\mathrm{H}_i}\| \leq \|T\|$ e portanto $\sup \|T_{ii}\| \leq \|T\|$

Assim, $\|T\| = \sup \|T_{ii}\|$.

∎

Proposição 1.24. *Sejam* A *um* C^**-algebra,* D *um subconjunto denso de* A *e* α *uma aplicação de* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *nos automorfismo de* A, $\alpha : S^1 \to aut(\mathrm{A})$. *Se para todo* $d \in D$ *a aplicação* $\begin{array}{ccc} S^1 & \to & \mathrm{A} \\ z & \mapsto & \alpha_z(d) \end{array}$ *é contínua, então para todo* $a \in \mathrm{A}$ *a aplicação* $z \mapsto \alpha_z(a)$ *é contínua.*

Demonstração:

Seja $a \in \mathrm{A}$.

Como D é denso em A, existe uma seqüência $\{d_i\}$ contida em D, tal que $d_i \to a$. Sejam

$$\begin{array}{rcl} f_i : S^1 & \to & \mathrm{A} \\ z & \mapsto & \alpha_z(d_i) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f : S^1 & \to & \mathrm{A} \\ z & \mapsto & \alpha_z(a) \end{array}$$

Note que f_i converge para f uniformemente, pois

$$\|f_i(z) - f(z)\| = \|\alpha_z(d_i) - \alpha_z(a)\| = \|\alpha_z(d_i - a)\| \leq \|d_i - a\| \to 0$$

e como por hipótese todas as f_i são contínuas, temos que f é contínua.

■

1.2 Um Pouco Sobre Grupos

Proposição 1.25. *Seja $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ um homomorfismo de grupo, e N um subgrupo normal de* G *tal que $\varphi|_N = 0$, onde 0 é o elemento neutro do grupo* G. *Então, existe $\tilde{\varphi} : \frac{\mathrm{G}}{N} \to \mathrm{H}$ tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathrm{H} \\ \frac{\mathrm{G}}{N} \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

Demonstração:

Defina $\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi} : \frac{\mathrm{G}}{N} & \to & \mathrm{H} \\ \overline{g} & \mapsto & \varphi(g); \text{ onde } g \in \overline{g} \end{array}$

Note que $\tilde{\varphi}$ esta bem definido, pois se $g, h \in \overline{g}$ então $gh^{-1} \in N$ e $\varphi(gh^{-1}) = 0$. Logo, $\varphi(g) = \varphi(h)$.

É claro que $\tilde{\varphi}$ faz o diagrama comutar. Falta apenas mostrar que $\tilde{\varphi}$ é um homomorfismo. Mas isto segue da igualdade abaixo

$$\tilde{\varphi}(\overline{g})\tilde{\varphi}(\overline{h}) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(gh) = \tilde{\varphi}(\overline{gh}) = \tilde{\varphi}(\overline{g}\overline{h})$$

■

Proposição 1.26. *Seja $U(\mathrm{H})$ o espaço do operadores unitários em um espaço de Hilbert* H. *Seja $u \in U(\mathrm{H})$. Então existe U um homomorfismo do grupo $\mathbb{Z}$(aditivo) dado por* $\begin{array}{rcl} U : \mathbb{Z} & \to & U(\mathrm{H}) \\ n & \mapsto & u^n \end{array}$

Demonstração:

$U(n+m) = u^{n+m} = u^n u^m = U(n)U(m)$ e

$$U(0) = u^0 = I$$

■

Proposição 1.27. *Se $\mathbb{Z}$ é substituido por $\mathbb{Z}_n$(aditivo) na proposição acima, então é necessário e suficiente que $u^n = U(1)^n = I$ para que a afirmação da proposição citada seja válida.*

Demonstração:

Suponha que U é um homomorfismo.

Sabemos que 1 somado n vezes esta na classe do 0. Ou seja,

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\times} = 0$$

Aplicando U de ambos os lados da equação acima, temos que

$$U(1)\ldots U(1) = I$$

ou seja, $U(1)^n = I$, e como $U(1) = u$ segue que $u^n = I$.

Suponha agora que $u^n = I$.

Pela proposição acima, 1.26, sabemos que existe um homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} U:\mathbb{Z} & \rightarrow & U(\mathrm{H}) \\ n & \mapsto & u^n \end{array}.$$

Observe que $U\,|_{n\mathbb{Z}} = I$, pois $U(kn) = u^{kn} = (u^n)^k = I^k = I \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$

Ainda, como $n\mathbb{Z}$ é abeliano, é normal, ou seja, $g\, n\mathbb{Z}\, g^{-1} \subseteq n\mathbb{Z} \quad \forall g$. Logo, pela proposição 1.25, existe um homomorfismo $\tilde{U}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & U(\mathrm{H}) \\ \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \arrow[ur, dotted, "\tilde{U}"] & \end{tikzcd}$$

■

1.3 Teoria de Representação

Nesta seção veremos alguns resultados sobre representações que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. A definição de representação já foi introduzida na seção 1.1.

Proposição 1.28. *Seja $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)}$ uma *-representação. Sejam:* $\mathrm{H}_0 = \{\xi \in \mathrm{H} : \rho(a)\xi = 0\ \forall a \in \mathrm{A}\}$ *e* $\mathrm{H}_1 = \overline{span}\{\rho(a)\xi : a \in \mathrm{A},\ \xi \in \mathrm{H}\}$. *Então,* $\mathrm{H}_1 \bigoplus \mathrm{H}_0 = \mathrm{H}$.

Demonstração:

De [16], sabemos que se L é um subespaço fechado de H, então $\mathrm{H} = L \oplus L^{\perp}$, onde $L^{\perp}$ denota o subespaço ortogonal a L.

Assim, basta mostrarmos que $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}_1^{\perp}$. Faremos isto em duas partes. Primeiro, demonstraremos que $\mathrm{H}_1^{\perp} \subseteq \mathrm{H}_0$.

Seja $y \in \mathrm{H}_1^{\perp}$. Então $\langle \rho(a)\xi, y \rangle = 0 \quad \forall a \in \mathrm{H},\ \xi \in \mathrm{H}$.

A igualdade acima implica que $\langle \xi, \rho(a)^* y \rangle = 0\ \forall a \in \mathrm{H},\ \xi \in \mathrm{H}$, o que por sua vez, implica que $\langle \xi, \rho(a^*) y \rangle = 0\ \forall a \in \mathrm{H},\ \xi \in \mathrm{H}$.

Assim, para a^* fixo, temos que $\langle \xi, \rho(a) y \rangle = 0\ \forall \xi \in \mathrm{H}$, e portanto $\rho(a)y = 0$.

Logo, $\rho(a)y = 0$ para todo $a \in \mathrm{A}$ e $y \in \mathrm{H}_0$.

Falta mostrarmos que $\mathrm{H}_0 \subseteq \mathrm{H}_1^{\perp}$.

Seja $y_0 \in \mathrm{H}_0$ e $y \in \mathrm{span}\{\rho(a)\xi : a \in \mathrm{A},\ \xi \in \mathrm{H}\}$. Observe que y é um somatório finito da forma $\sum \rho(a_i)\xi_i$. Portanto,

$$\langle y, y_0 \rangle = \langle \sum \rho(a_i)\xi_i, y_0 \rangle = \sum \langle \rho(a_i)\xi_i, y_0 \rangle = \sum \langle \xi_i, \rho(a_i^*) y_0 \rangle = 0$$

note que a última igualdade segue do fato de y_0 pertencer a H_0.

Como $L^{\perp} = \overline{L}^{\perp}$ para qualquer subespaço $L \subseteq \mathrm{H}$, temos que $y_0 \in \overline{\mathrm{span}}\{\rho(a)\xi : a \in \mathrm{A},\ \xi \in \mathrm{H}\}^{\perp}$, ou seja, $y_0 \in \mathrm{H}_1^{\perp}$.

■

Observação 1.29. *Se* $\mathrm{H}_0 = \{0\}$*, dizemos que a representação* ρ *é não degenerada, e caso contrário, dizemos que* ρ *é degenerada.*

Exemplo 1.30. *Seja* π *a representação de* $\mathbb{C} \bigoplus \mathbb{C}$ *em* $M_3(\mathbb{C})$ *definida por:*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C} \bigoplus \mathbb{C} &\to M_3(\mathbb{C}) \\ (z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos encontrar H_1 *e* H_0.

Demonstração:

Note que $\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\lambda \\ w\beta \\ 0 \end{pmatrix}$ é igual a 0 para todo (z, w), se e somente se $\lambda = \beta = 0$.

Logo, $\mathrm{H}_0 = \{(0, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{C}\}$ e $\mathrm{H}_1 = \{(\lambda, \beta, 0) : \lambda,\ \beta \in \mathbb{C}\}$.

Observe que $\mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_1 = \mathrm{H}$.

■

Lema 1.31. *Seja* $\{A_n\} \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$ *uma sequência de operadores, tal que:*

i) $\exists\ c \geq 0$ *tal que* $\|A_n\| \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\exists$ H' *denso em* H *tal que* $\{A_n x'\}$ *converge* $\forall x' \in$ H'

Então existe um operador $A \in$ B(H) *tal que* $A_n x \to Ax$ $\forall x \in$ H

Demonstração:

Seja $x \in$ H. Vamos mostrar que a seqüência $\{A_n x\}$ é de Cauchy.

Como H' é denso em H, existe $x' \in$ H' tal que $\|x - x'\| \leq \frac{\epsilon}{3c}$. Por ii), a seqüência $\{A_n x'\}$ converge, portanto é de Cauchy e assim existe $N > 0$ tal que, se $n, k \geq N$, então $\|A_n x' - A_k x'\| < \frac{\epsilon}{3}$.

Agora, observe que

$$\|A_n x - A_k x\| = \|A_n x - A_n x'\| + \|A_n x' - A_k x'\| + \|A_k x' - A_k x\|$$
$$\leq \|A_n\|\|x - x'\| + \|A_n x' - A_k x'\| + \|A_k\|\|x' - x\| \leq \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Logo, $\{A_n x\}$ é Cauchy e como H é completo, $\{A_n x\} \to y$ para algum $y \in$ H.

Defina A em x por $Ax = y = \lim\{A_n x\}$.

Note que $A \in$ B(H), pois

$$\|Ax\| = \|\lim\{A_n x\}\| = \lim \|\{A_n x\}\| \leq c\|x\|$$

■

Lema 1.32. *Sejam* $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq$ A *aproximação da unidade para* A *e* $\pi :$ A $\to$ B(H) *uma representação. Então* $\pi(u_i) \to P_{\mathrm{H}_1}$ *fortemente, ou seja,* $\pi(u_i)v \to P_{\mathrm{H}_1}v$ $\forall v \in$ H.

Demonstração:

Seja $w \in \mathrm{span}\{\pi(x)v : x \in \mathrm{A},\ v \in \mathrm{H}\}$, ou seja, w é um somatório finito da forma $w = \sum \pi(x_i)v_i$, onde $x_i \in$ A e $v_i \in$ H. Então

$$\pi(u_i)\left(\sum \pi(x_i)v_i\right) = \sum \pi(u_i)\left(\pi(x_i)v_i\right) = \sum \pi(u_i x_i)v_i \to \sum \pi(x_i)v_i$$

assim, $\pi(u_i)$ converge para a identidade no conjunto das somas finitas da forma $\sum \pi(x_i)v_i$, que é denso em H_1. Como $\|\pi(u_i)\| \leq \|u_i\| \leq 1$, segue do lema 1.31 que $\pi(u_i)v_1 \to Iv_1$ para todo $v_1 \in \mathrm{H}_1$.

Agora, seja $v \in$ H. Pela proposição 1.28, $v = v_0 + v_1$, onde $v_0 \in \mathrm{H}_0$ e $v_1 \in \mathrm{H}_1$ e portanto

$$\pi(u_i)(v) = \pi(u_i)(v_1) + \pi(u_i)(v_0) = \pi(u_i)(v_1)$$

e pelo que foi demonstrado no parágrafo anterior, o lado direito da igualdade acima converge para $v_1 = P_{\mathrm{H}_1}v$.

■

Observação 1.33. *Se* $\pi :$ A $\to$ B(H) *é não degenerada, então* H $= \mathrm{H}_1$ *e* $\pi(u_i)$ *converge para a identidade fortemente.*

Proposição 1.34. *Seja* I *ideal fechado de uma C^*-algebra* A, *e* $\pi : \mathrm{I} \to \mathrm{B(H)}$ *uma representação não degenerada. Então, existe única representação* $\tilde{\pi} : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)}$ *tal que* $\tilde{\pi}\mid_{\mathrm{I}} = \pi$

Demonstração:

Seja $\{u_i\}$ uma aproximação da unidade para I e $a \in \mathrm{A}$. Vamos mostrar que $\pi(au_i)$ converge fortemente para algum $T \in \mathrm{B(H)}$.

Como π é não degenerada, $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1$. Seja $w \in \mathrm{span}\{\pi(x)v : x \in \mathrm{I},\ v \in \mathrm{H}\}$, ou seja, w é um somatório finito da forma $w = \sum \pi(x_i)v_i$, onde $x_i \in \mathrm{I}$ e $v_i \in \mathrm{H}$. Então

$$\lim_{i\to\infty} \pi(au_i)\left(\sum \pi(x_i)v_i\right) = \lim_{i\to\infty} \sum \pi(au_i)(\pi(x_i)v_i) = \sum \lim_{i\to\infty} \pi(au_ix_i)v_i \to \sum \pi(ax_i)v_i$$

logo, $\pi(au_i)$ converge no conjunto das somas finitas da forma $\sum \pi(x_i)v_i$, que é denso em H_1. Ainda, $\|\pi(au_i)\| \leq \|au_i\| \leq \|a\|$, e portanto, pelo lema 1.31 existe $T_a \in \mathrm{B(H)}$ tal que $\pi(au_i)w \to T_a w$ para todo $w \in \mathrm{H} = \mathrm{H}_1$.

Estamos em condições de definir a extensão $\tilde{\pi}$ de π. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathrm{A} &\to \mathrm{B(H)} \\ a &\mapsto T_a \end{aligned}$$

Se lembrarmos que pela prova do lema 1.31, $T_a(w) = \lim_{i\to\infty} \pi(au_i)w$ e $\|T_a\| \leq \|a\|$, a demonstração de que $\tilde{\pi}$ é uma representação é direta.

■

Observação 1.35. *Se* $\pi : I \to \mathrm{B(H)}$ *for uma representação degenerada, então para todo* $\xi_0 \in \mathrm{H}_0$ *definimos* $\tilde{\pi}(\xi_0) = 0$.

Proposição 1.36. *Seja* $\pi : I \to \mathrm{B(H)}$ *uma representação e* $\tilde{\pi} : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)}$ *a extensão de* π, *conforme a proposição 1.34. Seja* J *outro ideal de* A *e* $\{v_j\}$ *uma aproximação da unidade para* $\mathrm{I} \cap J$. *Então* $\pi(v_ia)\xi \to \tilde{\pi}(a)\xi \quad \forall \xi \in \mathrm{H},\ a \in J$.

Demonstração:

Pela proposição 1.28, sabemos que $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_0$. Observe que a proposição acima é válida em H_1, pois se $a \in \mathrm{A}$ e $w \in \mathrm{H}_1$ é um somatório finito da forma $w = \sum \pi(x_i)\xi_i$, onde $x_i \in \mathrm{I}$ e $\xi_i \in \mathrm{H}$, então

$$\pi(v_ia)\left(\sum \pi(x_i)\xi_i\right) = \sum \pi(v_ia)\pi(x_i)\xi_i = \sum \pi(v_iax_i)\xi_i$$

e como $ax_i \in \mathrm{I} \cap J$, o último termo da igualdade acima converge para

$$\sum \pi(ax_i)\xi_i = \sum \tilde{\pi}(ax_i)\xi_i = \sum \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(x_i)\xi_i = \tilde{\pi}(a)\left(\sum \pi(x_i)\xi_i\right)$$

Assim, $\pi(v_ia)$ converge fortemente para $\tilde{\pi}(a)$ no conjunto dos somatórios finitos da forma $\sum \pi(x_i)\xi_i$, que é denso em H_1. Portanto $\pi(v_ia)$ converge fortemente para $\tilde{\pi}(a)$ em H_1.

Agora, todo $\xi \in \mathrm{H}$ pode ser escrito da forma $\xi_1 + \xi_0$, onde $\xi_1 \in \mathrm{H}_1$ e $\xi_0 \in \mathrm{H}_0$, e portanto

$$\pi(v_ia)\xi = \pi(v_ia)\xi_1 + \pi(v_ia)\xi_0 = \pi(v_ia)\xi_1 \to \tilde{\pi}(a)\xi_1 \overset{1.35}{=} \tilde{\pi}(a)\xi_1 + \tilde{\pi}(a)\xi_0 = \tilde{\pi}(a)\xi$$

■

1.4 Fatos Topológicos

Definição 1.37. *Um subconjunto* A *de um espaço topológico* X *é* **Raro** *se* $\overline{\mathrm{A}}$ *não tem interior.*

Proposição 1.38. *A união finita de conjuntos raros é raro.*

Demonstração:

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [11], página 191.

■

Definição 1.39. *Um espaço topologico* X *é dito* **Localmente Compacto** *se para todo* $x \in \mathrm{X}$*, existe um compacto* K *tal que* x *pertence ao interior de* K.

Definição 1.40. *Seja* X *localmente compacto e* f *uma função em* X*. Dizemos que* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ *se,* $\forall \epsilon > 0$*, existe um compacto* $K \subseteq \mathrm{X}$ *tal que,* $\forall x \notin K \quad |f(x) - L| < \epsilon$

Definição 1.41. *Se* X *é localmente compacto então* $C_0(\mathrm{X}) = \{f \in C(\mathrm{X}) : \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0\}$

Observação 1.42. *Se* X *é localmente compacto então* $C_0(\mathrm{X})$ *é uma* C^**-algebra, onde as operações são definidas pontualmente e a involução é dada por* $* : f \longrightarrow \overline{f}$*. Veja por exemplo, [14], exemplo 2.1.2, pág. 37.*

Proposição 1.43. *Seja* X *localmente compacto. Dado um fechado* $K \subset X$ *e* $x_0 \in \mathrm{X}$ *tal que* $x_0 \notin K$*, então,* $\exists\ h \in C_0(\mathrm{X})$ *tal que* $0 \leq h \leq 1$ *,* $h(K) = 0$ *e* $h(x_0) = 1$

Demonstração:

Vamos denotar $C_c(\mathrm{X})$ como as funções contínuas em X que tem suporte compacto, ou seja, $C_c(\mathrm{X}) = \{f(x) \in C(\mathrm{X}) : \exists$ compacto L tal que $f\ |_{L^c} = 0\}$.

Como X é localmente compacto, para todo $x \in \mathrm{X}$, existe um compacto L tal que x pertence ao interior de L, que chamaremos de V. Note que $\overline{V} = L$ é compacto e $x \in V$.

Pelo lema de Urysonh, [13] página 24, existe $\varphi \in C(\mathrm{X})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ e $\varphi\ |_{V^c} = 0$. Observe que $\varphi \in C_c$ pois $\varphi\ |_{\overline{V}} = 0$.

Como x não pertence a K, e K é fechado, pelo mesmo lema de Urysonh acima, existe $F \in C(\mathrm{X})$ tal que $0 \leq F \leq 1$, $F(x) = 1$ e $F\ |_K = 0$.

Tome $h = F\varphi$. Então $h\ |_K = 0$, $h(x) = 1$ e $0 \leq h \leq 1$. Ainda, h tem suporte compacto e portanto $h \in C_0(\mathrm{X})$.

■

Proposição 1.44. *Seja* U *um subconjunto aberto de um espaço topologico localmente compacto* X*. Então* U *é localmente compacto.*

Demonstração:

Esta demonstração pode ser encontrada em [15], página 200, corolário 1.

■

Nas duas definições que seguem abaixo, U é um conjunto aberto contido no espaço topológico localmente compacto X.

Definição 1.45. $\widetilde{C_0(U)} = \{f \in C_0(\mathrm{X}) : f\mid_{\mathrm{X}\setminus U} = 0\}$

Observação 1.46. *Vamos provar a seguir que $C_0(U)$ é naturalmente isomorfo a $\widetilde{C_0(U)}$. Portanto, é comum no decorrer do texto nos referirmos a $C_0(U)$ sem alertarmos sobre qual das definições estamos usando.*

Proposição 1.47. *$C_0(U)$ é naturalmente isomorfo a $\widetilde{C_0(U)}$.*

Demonstração:

Lembre que, pela definição 1.41, $C_0(U) = \{f \in C(U) : \lim_{x \to \infty} f(x) = 0\}$.

Seja f pertencente a $C_0(U)$ definido em 1.41. Então $f \in C(U)$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Defina $\tilde{f}$ da seguinte forma: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in U, \\ 0 & \mathrm{X} \setminus U \end{cases}$

Queremos demonstrar que $\tilde{f}$ pertence a $\widetilde{C_0(U)}$.

Como $\tilde{f}\mid_{\mathrm{X}\setminus U} = 0$, basta mostrar que $\tilde{f} \in C_0(\mathrm{X})$.

Agora, dado $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subseteq U$ tal que, se $x \in U \setminus K$ então $|f(x)| < \epsilon$. Como K é um compacto em U, K é compacto em X e para todo $x \in \mathrm{X} \setminus K$ temos que $\begin{cases} |f(x)| < \epsilon & \text{se } x \in U, \\ |f(x)| = 0 & \text{se } x \notin U. \end{cases}$. Logo $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathrm{X} \setminus K$ e portanto $\lim_{x \to \infty} \tilde{f}(x) = 0$.

Falta mostrar que $\tilde{f} \in C(\mathrm{X})$, ou seja, $\tilde{f}$ é contínua em x, para todo $x \in \mathrm{X}$. Vejamos:

i) Se $x \in U$

Então $\tilde{f}$ é contínua em x, pois U é aberto.

ii) Se $x \notin U$

Queremos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto V que contém x, tal que para todo $p \in V$, $|\tilde{f}(p)| < \epsilon$.

Como $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\forall \epsilon > 0$, existe um compacto $K_\epsilon \subseteq U$ tal que, $\forall p \in U \setminus K_\epsilon$, $|f(p) - 0| < \epsilon$.

Uma vez que X é Hausdorff, K_ϵ é fechado. Assim, dado $\epsilon > 0$, seja $V = \mathrm{X} \setminus K_\epsilon$. Então $x \in V$ e $|\tilde{f}(p)| < \epsilon$ $\forall p \in V$. Logo $\tilde{f} \in C(\mathrm{X})$.

Temos a seguinte relação:

$$\begin{array}{rcl} r : C_0(U) & \xrightarrow{r} & \widetilde{C_0(U)} \\ f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$$

É claro que r é injetora. Vejamos a demonstração de que r é sobrejetora:

Seja $f \in \widetilde{C_0(U)}$. Note que $r(f\mid_U) = f$ e portanto basta mostrarmos que $f\mid_U \in C_0(U)$. Para isto, é suficiente mostrarmos que $\lim\limits_{x\to\infty} f\mid_U(x) = 0$, onde o limite é tomado em U.

Como $f \in \widetilde{C_0(U)}$, $f\mid_{\mathrm{X}\setminus U} = 0$ e dado $\epsilon > 0$, existe um compacto $K \subseteq \mathrm{X}$, tal que para todo $x \in \mathrm{X}\setminus K$, $|f(x)| < \epsilon$.

Seja $F_\epsilon = \{x : |f(x)| \geq \epsilon\}$. F_ϵ é fechado em X, e como $f\mid_{\mathrm{X}\setminus U} = 0$, $F_\epsilon \subseteq U$.

Observe que $K' = K \cap F_\epsilon$ é fechado em K, logo é compacto. Ainda, $K' \subseteq U$.

Agora, se $x \in U \setminus K'$ então ou $x \notin K$ ou $x \notin F_\epsilon$. Em ambos os casos temos que $|f(x)| < \epsilon$.

Logo, $\lim\limits_{x\to\infty} f\mid_U(x) = 0$.

■

Observação 1.48. *A relação r definida acima, é um *-isomorfismo isométrico de C^*-algebras.*

Proposição 1.49. $C_0(U) \cap C_0(V) = C_0(U \cap V)$

Demonstração:

Usando a definição 1.45 de $C_0(U)$, o resultado acima segue.

■

Proposição 1.50. *Sejam U, V localmente compactos e Δ aberto contido em V. Seja h um homeomorfismo de U em V ($U \xrightarrow{h} V \supseteq \Delta$). Considere $C_0(\Delta)$ um ideal fechado de $C_0(V)$, que denotamos por $C_0(\Delta) \trianglerighteq C_0(V)$ e seja α definida por* $\begin{array}{rcl} \alpha : C_0(\Delta) & \to & C_0(U) \\ f & \mapsto & f \circ h \end{array}$. *Então $\alpha(C_0(\Delta)) = C_0(h^{-1}(\Delta))$*

Demonstração:

Nesta proposição utilizaremos a definição 1.41 de $C_0(\Delta)$.

Primeiro vamos mostrar que $\alpha(C_0(\Delta)) \subseteq C_0(h^{-1}(\Delta))$.

Seja $g \in \alpha(C_0(\Delta))$. Então, existe $f \in C_0(\Delta)$ tal que $g = \alpha(f) = f \circ h$.

Como $f \in C_0(\Delta)$, existe um compacto $K \subseteq \Delta$, tal que para todo $x \in \Delta \setminus K$, $|f(x)| \leq \epsilon$. Observe que $h^{-1}(K)$ é um compacto em $h^{-1}(\Delta)$.

Agora, se $y \in h^{-1}(\Delta) \setminus h^{-1}(K)$ então $y = h^{-1}(x)$, onde $x \in \Delta \setminus K$ e portanto

$$|g(y)| = |f \circ h(y)| = |f \circ h(h^{-1}(x))| = |f(x)| \leq \epsilon$$

Assim, $\lim_{y \to \infty} g(y) = 0$ e como $g(y) \in C(h^{-1}(\Delta))$ temos que $g \in C_0(h^{-1}(\Delta))$.

Falta mostrar que mostrar que $C_0(h^{-1}(\Delta)) \subseteq \alpha(C_0(\Delta))$.

Seja $g \in C_0(h^{-1}(\Delta))$.

Defina $f = g \circ h^{-1}$. É claro que $f \in C(\Delta)$ e analogamente ao feito acima, temos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Logo, $f \in C_0(\Delta)$.

Finalmente, observe que $\alpha(f) = f \circ h = g$ e portanto $g \in \alpha(C_0(\Delta))$.

■

Proposição 1.51. *Sejam U um aberto, $f : U \to \mathbb{C}$ contínua e $K_\epsilon = \{x \in U : |f(x)| \geq \epsilon\}$. Então $f \in C_0(U)$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ K_ϵ é compacto.*

Demonstração:

Supor $f \in C_0(U)$.

Para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $L \subseteq U$ compacto tal que $\forall x \in L^c$, $|f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Então $K_\epsilon = \{x \in U : |f(x)| \geq \epsilon\} = \{x \in L : |f(x)| \geq \epsilon\}$. Logo, K_ϵ é um subconjunto fechado do compacto L e portanto é compacto.

A volta é imediata.

■

Capítulo 2

Construção do Produto Cruzado

Dado um sistema dinâmico em um espaço de Hausdorff localmente compacto X, existe um C*-sistema dinâmico associado, e reciprocamente, todo C*-sistema dinâmico de forma $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ provém de um sistema dinâmico em X.

Assim, quando temos problemas envolvendo ações de grupo, é um caminho natural encontrarmos o C*-sistema dinâmico associado, acharmos respostas neste ambiente e então tentarmos voltar para o problema original.

Também é usual, quando se tem um C*-sistema dinâmico bem conhecido, tentarmos encontrar um sistema dinâmico tal que o C*-sistema dinâmico seja proveniente desta ação.

Neste capítulo, veremos um pouco da relação entre a teoria de sistemas dinâmicos e a teoria de C*-algebras e conheceremos um pouco mais certos C*-sistema dinâmicos.

Definição 2.1. *Um* **Sistema Dinâmico** *baseado num grupo* G*, com espaço de representação* X *(localmente compacto) é um homomorfismo de grupo* $\beta : \mathrm{G} \to$ *Homeo*(X, X)*, onde Homeo*(X, X) *denota o conjunto de todos os homeomorfismos de* X *em* X*. Denotaremos um sistema dinâmico por* $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$

Definição 2.2. *Um* **C*-sistema dinâmico** *é uma tripla* $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$*, onde* A *é uma C*-algebra,* G *é um grupo discreto e* α *é um homomorfismo de grupo* $\alpha : \mathrm{G} \to Aut(\mathrm{A})$*. Aqui,* $Aut(\mathrm{A})$ *denota o conjunto de todos os automorfismos de* A *e* α *é chamada de ação de* G *em* A*.*

Veremos agora alguns resultados necessários para provarmos as relações entre sistemas dinâmicos e C*-algebras citadas acima.

No que segue, X e Y são espaços topológicos de Hausdorff localmente compactos, h é um homeomorfismo de X em Y ($h : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$) e ϕ_h de $C_0(\mathrm{Y})$ em $C_0(\mathrm{X})$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} \phi_h : C_0(\mathrm{Y}) & \to & C_0(\mathrm{X}) \\ f & \mapsto & f \circ h \end{array}$$

Nosso objetivo é mostrar que $\begin{array}{rcl} \phi : \mathrm{homeo}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{iso}\big(C_0(\mathrm{Y}), C_0(\mathrm{X})\big) \\ h & \mapsto & \phi_h \end{array}$

é um isomorfismo. Aqui $\mathrm{iso}\big(C_0(\mathrm{Y}), C_0(\mathrm{X})\big)$ denota o conjunto de todos os isomorfismo de $C_0(\mathrm{Y})$ em $C_0(\mathrm{X})$.

Sera que ϕ_h esta bem definida? Sim! Vejamos a prova:

Proposição 2.3. *ϕ_h esta bem definido, ou seja, $\phi_h(f) \in C_0(\mathrm{X})$ $\forall f \in C_0(\mathrm{Y})$ e ϕ_h é um isomorfismo de $C_0(\mathrm{Y})$ em $C_0(\mathrm{X})$.*

Demonstração:

$f \circ h$ é contínua pois f e h são.

Seja $f \in \mathbb{C}_0(\mathrm{Y})$. Se mostrarmos que $\lim_{x\to\infty} f \circ h = 0$ então $\phi_h(f) \in C_0(\mathrm{X})$.

Dado $\epsilon > 0$, como $f \in C_0(\mathrm{Y})$, existe K_ϵ compacto contido em Y tal que, para todo $x \in \mathrm{Y} \setminus K_\epsilon$, $|f(x)| < \epsilon$.

Como h^{-1} é contínua, $h^{-1}(K_\epsilon)$ é compacto em X, e se $x \in \mathrm{X} \setminus h^{-1}(K_\epsilon)$ então $f \circ h(x) < \epsilon$.

Logo, $\lim_{x\to\infty} f \circ h = 0$

Falta mostrar que ϕ_h é um isomorfismo. Vejamos:

Sejam λ, β escalares e $f, g \in C_0(\mathrm{Y})$.

i) ϕ_h é multiplicativo, pois

$\phi_h(fg)\,|_x = (fg) \circ h\,|_x = (fg)(h(x)) = f(h(x))g(h(x)) = \phi_h(f)\,|_x\, \phi_h(g)\,|_x = (\phi_h(f)\phi_h(g))\,|_x$

ii) ϕ_h é injetora.

Seja $f \in \ker(\phi_h)$.

Então $\phi_h(f)\,|_x = 0$ $\forall x \in \mathrm{X} \Rightarrow f \circ h\,|_x = 0$ $\forall x \in \mathrm{X}$

$\Rightarrow f(h(x)) = 0$ $\forall x \in \mathrm{X}$

$\Rightarrow f(y) = 0$ $\forall y \in \mathrm{Y}$, pois h é sobrejetora.

Logo $f = 0$ e ϕ_h é injetora.

iii) ϕ_h é sobrejetora, pois

Seja $g(x) \in C_0(\mathrm{X})$.

Procedendo analogamente ao feito acima para mostrar que $\phi_h(f) \in C_0(\mathrm{X})$, temos que $g \circ h^{-1} \in C_0(\mathrm{Y})$.

Agora, note que $\phi_h(g \circ h^{-1})\,|_x = g \circ h^{-1}h\,|_x = g(x)$ e portanto ϕ_h é sobrejetora.

■

Proposição 2.4. *Dado um isomorfismo $\varphi : C_0(\mathrm{Y}) \to C_0(\mathrm{X})$, tal que $\varphi(1) = 1$, existe único homeomorfismo $h : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tal que $\varphi = \phi_h$.*

Demonstração:

Seja φ um isomorfismo de $C_0(\mathrm{Y})$ em $C_0(\mathrm{X})$. Como podemos definir um homeomorfismo h, de X em Y, tal que $\varphi = \phi_h$?

Para termos uma idéia intuitiva, suponha que exista h tal que $\varphi = \phi_h$.

Lembre que os homomorfismos de $C_0(\mathrm{X})$ nos complexos são as avaliações, [12], exemplo 11.13, página 283. Vamos denotar o homomorfismo de avaliação no ponto $x \in \mathrm{X}$ por δ_x. Então,

$$\delta_x \circ \varphi(f) = \delta_x(\varphi(f)) = \delta_x(f \circ h) = f(h(x)) = \delta_{h(x)}(f).$$

Isto nos leva a definir h da seguinte forma:

Dado $x \in \mathrm{X}$, $\delta_x \circ \varphi$ é um homomorfismo em $C_0(\mathrm{Y})$. Assim, como os homomorfismos em $C_0(\mathrm{Y})$ são as avaliações, existe $y \in \mathrm{Y}$ tal que $\delta_x \circ \varphi = \delta_y$. Defina então, h em x, por y.

Falta mostra que $\varphi = \phi_h$ e que h é um homeomorfismo. Vejamos

i) $\varphi = \phi_h$, pois

$$\phi_h(f)(x) = f(h(x)) = f(y) = \delta_y(f) = \delta_x \circ \varphi(f) = \delta_x(\varphi(f)) = \varphi(f)(x)$$

ii) h é contínua

Queremos mostrar que $\begin{array}{rcl} h : \mathrm{X} & \xrightarrow{h} & \mathrm{Y} \cong \Delta_{C_0(\mathrm{Y})} \\ x & \mapsto & h(x) = y \end{array}$ é contínua. Como $\Delta_{C_0(\mathrm{Y})}$ possui uma topologia inicial, denotando por $\hat{f}$ a transformada de Gelfand de uma função $f \in C_0(\mathrm{Y})$ (A definição de transformada de Gelfand pode ser encontrada em [12], definição 11.8, página 280), é suficiente mostrar que $\hat{f} \circ h$ é contínua para toda $f \in C_0(\mathrm{Y})$.

Estamos na seguinte situação:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{h} & \mathrm{Y} \cong \Delta_{C_0(\mathrm{Y})} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & h(x) = y \cong \delta_y & \mapsto & \hat{f}(\delta_y) \end{array}$$

Agora, note que $\hat{f}(\delta_y) = \hat{f}(\delta_x \circ \varphi) = \delta_x \circ \varphi(f) = \varphi(f)(x)$ e como $\varphi(f) \in C_0(\mathrm{X})$, $\hat{f} \circ h$ é contínua para toda $f \in C_0(\mathrm{Y})$.

Logo h é contínuo.

iii) existe h^{-1} contínua.

Vamos construir diretamente h^{-1}, de uma forma análoga ao feito para construir h.

Considere $\varphi^{-1} : C_0(\mathrm{X}) \to C_0(\mathrm{Y})$. Vamos definir $k : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

Dado $y \in \mathrm{Y}$, $\delta_y \circ \varphi^{-1}$ é um homomorfismo em $C_0(\mathrm{X})$. Logo, existe $x \in \mathrm{X}$ tal que $\delta_y \circ \varphi^{-1} = \delta_x$. Defina k, em y, por x.

Procedendo analogamente ao feito na construção de h, temos que k é contínuo e $\varphi^{-1} = \phi_k$.

Falta apenas mostrar que k é a inversa de h. Vejamos:

Para $x \in \mathrm{X}$, $k \circ h\,|_x = k(h(x)) = k(y) = x_0$, onde y é tal que $\delta_x \circ \varphi = \delta_y$ e x_0 é tal que $\delta_y \circ \varphi^{-1} = \delta_{x_0}$.

Então, x_0 é tal que $\delta_{x_0} = \delta_y \circ \varphi^{-1} = \delta_x \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \delta_x$. Logo $x_0 = x$ e $k \circ h = I$.

Analogamente prova-se que $h \circ k = I$ e portanto $k = h^{-1}$ e h é um homeomorfismo.

Falta mostrar que h tal que $\varphi = \phi_h$ é único. Vejamos:

Suponha que existam homeomorfismos h_1 e h_2 tal que $\varphi(f) = \phi_{h_1}(f) = \phi_{h_2}(f) \quad \forall f \in C_0(\mathrm{Y})$.

Então $f \circ h_1 \mid_x = f \circ h_2 \mid_x \ \forall f \in C_0(\mathrm{Y}),\ \forall x \in \mathrm{X}$

$\Rightarrow f\big(h_1(x)\big) = f\big(h_2(x)\big)\ \forall f \in C_0(\mathrm{Y}),\ \forall x \in \mathrm{X}$

Agora, suponha que existe $x \in \mathrm{X}$ tal que $h_1(x) \neq h_2(x)$. Então, pela proposição 1.43, existe $f \in C_0(\mathrm{Y})$ tal que $f \mid_{h_1(x)} = 0$ e $f \mid_{h_2(x)} = 1$, o que é uma contradição.

Logo $h_1(x) = h_2(x)\ \forall x \in \mathrm{X}$.

■

Proposição 2.5. *ϕ é um anti-homomorfismo. Ou seja, se $h : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ e $k : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ são homeomorfismos, então os isomorfismos associados $\phi_k : C_0(\mathrm{Z}) \to C_0(\mathrm{Y})$ e $\phi_h : C_0(\mathrm{Y}) \to C_0(\mathrm{X})$ são tais que $\phi_{kh} = \phi_h \circ \phi_k$.*

Demonstração:

$$(\phi_h \circ \phi_k)(f) = \phi_h \circ (\phi_k(f)) = \phi_h(f \circ k) = (f \circ k) \circ h = f \circ (k \circ h) = \phi_{kh}(f)$$

■

Observe que não conseguimos mostrar que ϕ é um isomorfismo e sim um anti-isomorfismo. Porém, isto é suficiente para provarmos a relação entre sistemas dinâmicos e C*-algebras que desejamos. Vejamos:

Proposição 2.6. *Dado um sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ existe um C*-sistema dinâmico $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ associado. Assim, podemos dizer que $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ é proveniente de $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$.*

Demonstração:

Pelas proposições 2.3 a 2.5, existe uma bijeção ϕ entre os homeomorfismos em X e os isomorfismos de $C_0(\mathrm{X})$, dada por

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathrm{homeo}(\mathrm{X}) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Aut}(C_0(\mathrm{X})) \\ h & \mapsto & \phi_h \end{array}$$

Assim, dado um sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$, onde $\begin{array}{rcl} \beta : \mathrm{G} & \to & \mathrm{homeo}(\mathrm{X}) \\ t & \mapsto & h_t \end{array}$ é um homomorfismo, para cada homeomorfismo $\beta_t = h_t$ de X, associamos o automorfismo $\alpha_t = \phi_{h_{t^{-1}}}$.

Podemos então definir a ação α de G em $C_0(\mathrm{X})$ por $\begin{array}{rcl} \alpha : \mathrm{G} & \to & \mathrm{Aut}(C_0(\mathrm{X})) \\ t & \mapsto & \alpha_t = \phi_{h_{t^{-1}}} \end{array}$

Note que α é um homomorfismo, pois

$$(\alpha_t \circ \alpha_s)(f) = \alpha_t\big(\alpha_s(f)\big) = \alpha_t(f \circ h_{s^{-1}}) = f \circ h_{s^{-1}} h_{t^{-1}} = f \circ h_{s^{-1} t^{-1}} = f \circ h_{(ts)^{-1}} = \alpha_{ts}(f)$$

Logo, $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ é o C*-sistema dinâmico associado ao sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$.

■

Proposição 2.7. *Dado um sistema dinâmico* $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ *existe um C^*-sistema dinâmico* $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ *associado e reciprocamente, dado* $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ *existe* $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ *tal que* $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ *é proveniente de* $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ *no sentido da proposição 2.6*

Demonstração:

Dado um C*-sistema dinâmico $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$, onde $\begin{array}{rcl}\alpha : \mathrm{G} & \to & \mathrm{Aut}(C_0(\mathrm{X})) \\ t & \mapsto & \alpha_t\end{array}$ é um homomorfismo, para cada automorfismo α_t associamos o homeomorfismo h_t proveniente da proposição 2.4, ou seja, h_t é o único homeomorfismo tal que $\alpha_t = \phi_{h_t}$.

Defina o sistema dinâmico $\begin{array}{rcl}\beta : \mathrm{G} & \to & \mathrm{Homeo}(\mathrm{X}) \\ t & \mapsto & h_{t^{-1}}\end{array}$.

Então, procedendo como na proposição anterior, vemos que o C*-sistema dinâmico $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$, é proveniente do sistema dinâmico $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$.

Falta mostrar que $(\mathrm{X}, \mathrm{G}, \beta)$ é realmente um sistema dinâmico, ou seja, que β é um homomorfismo de grupo.

Para isto, basta provar que $h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}} = h_{(ts)^{-1}}$, pois

$$\beta_t \circ \beta_s(x) = \beta_t \circ (h_{s^{-1}}(x)) = h_{t^{-1}}(h_{s^{-1}}(x)) = h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}}(x) = h_{(ts)^{-1}}(x) = \beta_{ts}(x)$$

Para provar que $h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}} = h_{(ts)^{-1}}$, lembre que $h_{(ts)^{-1}}$ é o único homeomorfismo tal que $\alpha_{(ts)^{-1}} = \phi_{h_{(ts)^{-1}}}$. Logo, se mostrarmos que $h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}}$ é tal que $\alpha_{(ts)^{-1}} = \phi_{h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}}}$, temos que $h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}} = h_{(ts)^{-1}}$. Mas isto segue da equação abaixo

$$\alpha_{(ts)^{-1}} = \alpha_{s^{-1}} \circ \alpha_{t^{-1}} = \phi_{h_{s^{-1}}} \circ \phi_{h_{t^{-1}}} \overset{2.5}{=} \phi_{h_{t^{-1}} \circ h_{s^{-1}}}$$

■

Vamos agora estudar alguns C*-sistemas dinâmicos especiais. Em particular estaremos interessados no caso onde todos os automorfismos α_t do C*-sistema dinâmico são internos.

Definição 2.8. *Seja ϕ um automorfismo da C^*-algebra* A. *Então ϕ é um* **automorfismo interno** *de* A *se existe $u \in \mathrm{A}$ unitário tal que* $\phi(a) = uau^{-1} \quad \forall a \in \mathrm{A}$.

Exemplo 2.9. *Seja* A *uma C^*-algebra. Se $u \in \mathrm{A}$ é unitário, então o automorfismo em* A *definido por* $\phi(a) = uau^{-1} = uau^*$ *é um automorfismo interno.*

Demonstração:

Basta verificar que ϕ é multiplicativo e satisfaz a propriedade da involução. Vejamos:

$\phi(a)\phi(b) = uau^{-1}ubu^{-1} = uabu^{-1} = \phi(ab)$

e

$\phi(a)^* = (uau^{-1})^* = (u^{-1})^* a^* u^* = ua^*u^{-1} = \phi(a^*)$

■

Exemplo 2.10. *Seja h o homeomofismo no círculo unitário, S^1, que rotaciona um ponto $z \in S^1$ qualquer, por um ângulo θ fixo. Ou seja,* $\begin{array}{rcl} h: S^1 & \to & S^1 \\ z & \mapsto & e^{i\theta}z \end{array}$. *Então o automorfismo ϕ na C^*-algebra $C(S^1)$, dado por* $\begin{array}{rcl} \phi: C(S^1) & \to & C(S^1) \\ f & \mapsto & f \circ h^{-1} \end{array}$ *não é interno. Mais ainda, o único automorfismo interno em $C(S^1)$ é a identidade.*

Demonstração:

Suponha que ψ é um automorfismo interno em $C(S^1)$. Então, existe $u \in C(S^1)$ tal que $\psi(f) = ufu^{-1}$ $\forall f \in C(S^1)$.

Mas, $ufu^{-1} = uu^{-1}f = f$ e portanto $\psi = I$.

■

Dado um C*-sistema dinâmico $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$, como o exemplo acima nos mostra, nem sempre todo automorfismo é interno. É interessante encontrar uma C*-algebra $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$ que contém A e tal que para todo $t \in \mathrm{G}$, os automorfismos α_t de A sejam restrições de automorfismos internos. Isto motiva a definição de $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$:

Definição 2.11. *Seja $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$ um C^* sistema dinâmico. Então*

$$l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A}) = \{(a_t)_{t\in\mathrm{G}} : a_t \in \mathrm{A}\ \forall t \in \mathrm{G}\ e \sum_{t\in\mathrm{G}} \|a_t\| < \infty\} \subseteq \prod_{\mathrm{G}} \mathrm{A}$$

Defina a norma de um elemento $a = (a_t)_{t\in\mathrm{G}} \in l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ por

$$\|a\| = \sum_{t\in\mathrm{G}} \|a_t\|$$

Para $a = (a_t)_{t\in\mathrm{G}} \in l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ e $b = (b_t)_{t\in\mathrm{G}} \in l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ defina as operações de multiplicação e convolução por:

$$(a * b)_\gamma = \sum_{t\in\mathrm{G}} a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma}) \qquad \gamma \in \mathrm{G}$$

$$(a^*)_\gamma = \alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}}) \qquad \gamma \in \mathrm{G}$$

Estas operações estão bem definidas??

$a * b$ esta bem definida, pois:

i) A série $\sum_{t\in\mathrm{G}} a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma})$ converge em A, $\forall\gamma$, uma vez que converge absolutamente.

Vejamos:

$\sum_{t\in\mathrm{G}} \|a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma})\| \leq \sum_{t\in\mathrm{G}} \|a_t\|\|b_{t^{-1}\gamma}\| \leq \sum_{t\in\mathrm{G}} \|a_t\|\|b\| = \|a\|\|b\| \leq \infty$

ii) $(a * b) \in l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$, já que:

$\sum_{\gamma\in\mathrm{G}} \|(a * b)_\gamma\| = \sum_{\gamma\in\mathrm{G}} \|\sum_{t\in\mathrm{G}} a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma})\| \leq \sum_\gamma \sum_t \|a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma})\|$

$\leq \sum_\gamma \sum_t \|a_t\|\|\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma})\| = \sum_t \|a_t\| \sum_\gamma \|\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma})\| \leq \sum_t \|a_t\| \sum_\gamma \|b_{t^{-1}\gamma}\|$

$= \sum_t \|a_t\|\|b\| = \|a\|\|b\| \leq \infty$

Note que a^* também esta bem definida, uma vez que:

iii) $a^* \in l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$, pois

$\sum_{\gamma \in \mathrm{G}} \|a^*_\gamma\| = \sum_{\gamma \in \mathrm{G}} \|\alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}})\| \overset{1.15}{=} \sum_{\gamma \in \mathrm{G}} \|(a_{\gamma^{-1}})^*\| = \sum_{\gamma \in \mathrm{G}} \|a_{\gamma^{-1}}\| = \|a\| \leq \infty$

Logo as operações de multiplicação e involução estão bem definidas em $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$.

Tendo feito isto, podemos provar que $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ é uma *-algebra de Banach normada.

Observação 2.12. *De ii) e iii) temos que* $\|a * b\| \leq \|a\|\|b\|$ *e* $\|a^*\| = \|a\|$

Proposição 2.13. $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ *é uma *-algebra de Banach normada.*

Demonstração:

Sejam $a = (a_t)_{t \in \mathrm{G}}, b = (b_t)_{t \in \mathrm{G}}$, e $c = (c_t)_{t \in \mathrm{G}}$ elementos de $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$.

Pela observação acima, basta mostrar as propriedades algébricas:

i) Distributividade

$(a + b) * c = a * c + b * c$, pois

$(a * c + b * c)_\gamma = \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \alpha_t(c_{t^{-1}\gamma}) + \sum_{t \in \mathrm{G}} b_t \alpha_t(c_{t^{-1}\gamma})$

$= \sum_{t \in \mathrm{G}} (a_t + b_t) \alpha_t(c_{t^{-1}\gamma}) = ((a + b) * c)_\gamma$

$a * (b + c) = a * b + a * c$, já que

$(a * b + a * c)_\gamma = \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \alpha_t(b_{t^{-1}\gamma}) + \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \alpha_t(c_{t^{-1}\gamma})$

$= \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \big(\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma}) + \alpha_t(c_{t^{-1}\gamma})\big) = \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \alpha_t(b_{t^{-1}\gamma} + c_{t^{-1}\gamma})$

$= \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \alpha_t((b + c)_{t^{-1}\gamma}) = (a * (b + c))_\gamma$

ii) Associatividade do escalar κ

$\kappa(a * b) = (\kappa a) * b$, já que

$(\kappa(a * b))_\gamma = \kappa \sum_{t \in \mathrm{G}} a_t \alpha_t(b_{t^{-1}\gamma}) = \sum_{t \in \mathrm{G}} (\kappa a_t) \alpha_t(b_{t^{-1}\gamma}) = ((\kappa a) * b)_\gamma$

Procedendo de forma semelhante, temos que $\kappa(a * b) = a * (\kappa b)$

iii) Associatividade.

$(a * b) * c = a * (b * c)$

Primeiro, note que:

$(a * (b * c))_\gamma = \sum_{g \in \mathrm{G}} a_g \alpha_g\big((b * c)_{g^{-1}\gamma}\big) = \sum_{g \in \mathrm{G}} a_g \alpha_g\big(\sum_{t \in \mathrm{G}} b_t \alpha_t(c_{t^{-1}g^{-1}\gamma})\big)$

$= \sum_{g \in \mathrm{G}} \sum_{t \in \mathrm{G}} a_g \alpha_g\big(b_t \alpha_t(c_{t^{-1}g^{-1}\gamma})\big) = \sum_{g \in \mathrm{G}} \sum_{t \in \mathrm{G}} a_g \alpha_g(b_t) \alpha_{gt}(c_{t^{-1}g^{-1}\gamma})$

Por outro lado, temos que

$((a*b)*c)_\gamma = \sum_{g\in G}(a*b)_g\alpha_g(c_{g^{-1}\gamma}) = \sum_{g\in G}\big(\sum_{t\in G} a_t\alpha_t(b_{t^{-1}g})\big)\alpha_g(c_{g^{-1}\gamma})$

$\overset{g=t}{=} \sum_{t\in G}\sum_{g\in G} a_g\alpha_g(b_{g^{-1}t})\alpha_t(c_{t^{-1}\gamma}) = \sum_{g\in G}\big(\sum_{t\in G} a_g\alpha_g(b_{g^{-1}t})\alpha_t(c_{t^{-1}\gamma})\big)$

Fazendo a mudança de variáveis $t \to gt$ temos que o lado direito da equação acima é igual a

$\sum_{g\in G}\sum_{t\in G} a_g\alpha_g(b_t)\alpha_{gt}(c_{t^{-1}g^{-1}\gamma}) = (a*(b*c))_\gamma$

iv) $(\kappa a)^* = \overline{\kappa}a^*$

$(\overline{\kappa}a^*)_\gamma = \overline{\kappa}(a^*)_\gamma = \overline{\kappa}\alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}}) = \alpha_\gamma(\overline{\kappa}a^*_{\gamma^{-1}}) = \alpha_\gamma\big((\kappa a_{\gamma^{-1}})^*\big) = \alpha_\gamma\big((\kappa a)^*_{\gamma^{-1}}\big)$
$= (\kappa a)^*_\gamma$

v) $a^{**} = a$

$(a^*)^*_t = \alpha_t((a^*)^*_{t^{-1}}) = \alpha_t[(\alpha_{t^{-1}}(a^*_t))^*] = \alpha_t[\alpha_{t^{-1}}((a^*_t)^*)] = a_t$

vi) $(a+b)^* = a^* + b^*$

$(a^*+b^*)_t = (a^*)_t + (b^*)_t = \alpha_t(a^*_{t^{-1}}) + \alpha_t(b^*_{t^{-1}}) = \alpha_t(a^*_{t^{-1}} + b^*_{t^{-1}})$
$= \alpha_t((a_{t^{-1}} + b_{t^{-1}})^*) = \alpha_t((a+b)^*_{t^{-1}}) = (a+b)^*_t$

vii) $(a*b)^* = b^* * a^*$

Observe que,

$(a*b)^*_\gamma = \alpha_\gamma((a*b)_{\gamma^{-1}}{}^*) = \alpha_\gamma\Big(\big(\sum_{t\in G} a_t\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma^{-1}})\big)^*\Big)$
$= \alpha_\gamma\big(\sum_{t\in G}\alpha_t(b^*_{t^{-1}\gamma^{-1}})a^*_t\big) = \sum_{t\in G}\alpha_{\gamma t}(b^*_{t^{-1}\gamma^{-1}})\alpha_\gamma(a^*_t)$

Por outro lado,

$(b^* * a^*)_\gamma = \sum_{t\in G}((b^*)_t)\alpha_t((a^*)_{t^{-1}\gamma}) = \sum_{t\in G}\alpha_t(b^*_{t^{-1}})\alpha_t\big(\alpha_{t^{-1}\gamma}(a^*_{\gamma^{-1}t})\big)$
$= \sum_{t\in G}\alpha_t(b^*_{t^{-1}})\alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}t})$

Mudando a variável t por γt temos que o último termo da equação acima é igual a

$= \sum_{t\in G}\alpha_{\gamma t}(b^*_{t^{-1}\gamma^{-1}})\alpha_\gamma(a^*_t) = (a*b)^*_\gamma$

Finalmente, $l_1(G, A)$ é completo, e a demonstração se faz de modo análogo ao feito em [13], página 49, para $l_1(X_j) = \{(x_j) \in \prod_{j\in J} X_j : \sum_{j\in J}\|x_j\| < \infty\}$, onde $(X_j)_{j\in J}$ é uma família de espaços de Banach.

Logo, $l_1(G, A)$ é uma *-algebra de Banach normada.

■

Lembre que o objetivo de construir $l_1(G, A)$ é encontrar uma C*-algebra que contém A, onde para todo $t \in G$ os automorfismos α_t de A são restrições de automorfismos internos.

Podemos "ver" que a algebra original A esta contida em $l_1(G, A)$, definindo a inclusão:

$$\begin{array}{rcl} i : \mathrm{A} & \to & l_1(\mathrm{G},\mathrm{A}) \\ a & \mapsto & \tilde{a} \end{array}, \text{ onde } \tilde{a}|_g = \begin{cases} a & \mathrm{g} = \mathrm{e}, \\ 0 & \mathrm{g} \neq \mathrm{e} \end{cases}$$

Para mostrarmos que para todo $t \in \mathrm{G}$ os automorfismos α_t de A são restrições de automorfismos internos, precisamos definir elementos $u_t \in l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$. Vejamos:

$$\text{Defina } \begin{array}{rcl} u : \mathrm{G} & \to & l_1(\mathrm{G},\mathrm{A}) \\ t & \mapsto & u_t \end{array}, \text{ onde } u_t|_g = \begin{cases} 1 & \mathrm{g} = \mathrm{t}, \\ 0 & \mathrm{g} \neq \mathrm{t} \end{cases}$$

Exemplo 2.14. *Seja* A *uma C^*-algebra e G o grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$. Então para todo* $a \in \mathrm{A}$, $\tilde{a} = \underset{0^a coordenada}{(\ldots,0,0,\underbrace{a},0,0,\ldots)}$ *e para todo $n \in \mathbb{Z}$,* $u_n = \underset{n^a coordenada}{(\ldots,0,0,\underbrace{1},0,0,\ldots)}$

Nas proposições 2.15 até 2.20 faremos a demonstração do resultado que estamos procurando:

Proposição 2.15. $u_e = \tilde{1}$ *é a unidade em* l_1

Demonstração:

Seja $a = (a_t)_{t\in\mathrm{G}} \in l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$

Então $(a\tilde{1})_\gamma = \sum_{g\in\mathrm{G}} a_g\alpha_g(\tilde{1}_{g^{-1}\gamma})$.

Como $\tilde{1}_{g^{-1}\gamma} = 0$, exceto quando $g^{-1}\gamma = e$, ou seja, quando $g = \gamma$, temos que

$(a\tilde{1})_\gamma = \sum_{g\in\mathrm{G}} a_g\alpha_g(\tilde{1}_{g^{-1}\gamma}) = a_\gamma\alpha_\gamma(\tilde{1}_e) = a_\gamma\alpha_\gamma(1) = a_\gamma$

Também, como $\tilde{1}_g = 0$, exceto quando $g = e$, segue que

$(\tilde{1}a)_\gamma = \sum_{g\in\mathrm{G}} \tilde{1}_g\alpha_g(a_{g^{-1}\gamma}) = \tilde{1}_e\alpha_e(a_{e^{-1}\gamma}) = \alpha_e(a_\gamma) = a_\gamma$

Logo $\tilde{1} = u_e$ é a unidade em $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$.

■

$(a\,\mu_e)_\gamma = a_\gamma$

Proposição 2.16. *A inclusão i é um *-isomomorfismo isométrico sobre sua imagem.*

Demonstração:

Sejam $a, b \in \mathrm{A}$ e κ, β escalares.

Então,

- $(\kappa i(a) + \beta i(b))_\gamma = (\kappa\tilde{a} + \beta\tilde{b})_\gamma = \kappa(\tilde{a}_\gamma) + \beta(\tilde{b}_\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma \neq e, \\ \kappa a + \beta b & \text{se } \gamma = e \end{cases}$

  $= \widetilde{\kappa a + \beta b}_\gamma = i(\kappa a + \beta b)_\gamma$

- $(i(a)i(b))_\gamma = (\tilde{a}\tilde{b})_\gamma = \sum_{g\in\mathrm{G}} \tilde{a}_g\alpha_g(\tilde{b}_{g^{-1}\gamma}) = \tilde{a}_e\alpha_e(\tilde{b}_\gamma) = a(\tilde{b})_\gamma$

  $= \begin{cases} ab & \text{se } \gamma = e, \\ 0 & \text{se } \gamma \neq e \end{cases} = (\widetilde{ab})_\gamma = i(ab)_\gamma$

- $(i(a)^*)_\gamma = (\tilde{a}^*)_\gamma = \alpha_\gamma\big((\tilde{a}_{\gamma^{-1}})^*\big)$
$$= \begin{cases} a^* & \text{se } \gamma = e, \\ 0 & \text{se } \gamma \neq e \end{cases} = i(a^*)_\gamma$$
- $\|i(a)\| = \|\tilde{a}\| = \sum_{g\in \mathrm{G}} \|\tilde{a}_g\| = \|\tilde{a}_e\| = \|a\|$

■

Proposição 2.17. *u é um homomorfismo de grupo, isto é, $u_t u_s = u_{ts}$ $\forall t, s \in \mathrm{G}$ e $u(e) = \tilde{1}$.*

Demonstração:

$$(u_t u_s)_\gamma = \sum_{g\in \mathrm{G}} (u_t)_g \alpha_g\big((u_s)_{g^{-1}\gamma}\big) = \alpha_t\big((u_s)_{t^{-1}\gamma}\big) = \begin{cases} 1 & \text{se } t^{-1}\gamma = s, \\ 0 & \text{se } t^{-1}\gamma \neq s \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = ts, \\ 0 & \text{se } \gamma \neq ts \end{cases} = (u_{ts})_\gamma$$

■

Proposição 2.18. *u_t é unitário para todo $t \in G$*

Demonstração:

Para provarmos que u_t é unitário, precisamos encontrar $(u_t)^*$.

Note que $\big((u_t)^*\big)_\gamma = \alpha_\gamma\big((u_t)^*_{\gamma^{-1}}\big)$.

Como $(u_t)_\gamma$ é sempre 0 ou 1, temos que $\big((u_t)_\gamma\big)^* = (u_t)_\gamma$. Uma vez que α_γ é um homomorfismo, segue que

$$\big((u_t^*)\big)_\gamma = (u_t)_{\gamma^{-1}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma^{-1} = t, \\ 0 & \text{se } \gamma^{-1} \neq t \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = t^{-1}, \\ 0 & \text{se } \gamma \neq t^{-1}. \end{cases} = (u_{t^{-1}})_\gamma$$

Assim, $(u_t)^* = u_{t^{-1}}$

Agora, usando a proposição 2.17 temos que $(u_t)^* u_t = u_{t^{-1}} u_t = u_{t^{-1}t} = u_e = \tilde{1}$ e analogamente $u_t (u_t)^* = \tilde{1}$. Logo u_t é unitário.

■

Proposição 2.19. *Para todo $t \in \mathrm{G}$ os automorfismos α_t de A, dados no C^* sistema dinâmico, são restrições de automorfismos internos em $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$, ou seja, para todo $t \in \mathrm{G}$ temos que $u_t i(a) u_t^{-1} = i(\alpha_t(a))$ $\forall a \in \mathrm{A}$.*

Demonstração:

Para facilitar as contas, vamos primeiro fazer a multiplicação de u_t por $\tilde{a}$. Vejamos

$$(u_t \tilde{a})_g = \sum_{s\in \mathrm{G}} (u_t)_s \alpha_s(\tilde{a}_{s^{-1}g}) = (u_t)_t \alpha_t(\tilde{a}_{t^{-1}g}) = \begin{cases} \alpha_t(a) & \text{se } g = t, \\ 0 & \text{se } g \neq t \end{cases}$$

Pelo feito na proposição anterior, já sabemos que $(u_t)^* = (u_t)^{-1} = u_{t^{-1}}$.

Então,

$$\left((u_t\tilde{a})u_{t^{-1}}\right)_\gamma = \sum_{g\in \mathrm{G}}(u_t\tilde{a})_g\alpha_g\left((u_{t^{-1}})_{g^{-1}\gamma}\right) = \alpha_t(a)\alpha_t\left((u_{t^{-1}})_{t^{-1}\gamma}\right)$$
$$= \begin{cases}\alpha_t(a) & \text{se } \gamma = e,\\ 0 & \text{se } \gamma \neq e\end{cases} = \left(i(\alpha_t(a))\right)_\gamma$$

■

Proposição 2.20. *Todo elemento de $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ se escreve de forma única como $\sum_{t\in\mathrm{G}} i(a_t)u_t$ e portanto $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ pode ser visto como o conjunto das somas do tipo $\sum_{t\in\mathrm{G}} i(a_t)u_t$, onde $\sum_{t\in\mathrm{G}} \|a_t\| < \infty$.*

Demonstração:

Seja $a = (a_t)_{t\in\mathrm{G}} \in l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$.

Note que $\left(i(a_t)u_t\right)_\gamma = \sum_{g\in\mathrm{G}}(\tilde{a}_t)_g\alpha_g\left((u_t)_{g^{-1}\gamma}\right) = a_t(u_t)_\gamma = \begin{cases} a_t & \text{se } \gamma = t,\\ 0 & \text{se } \gamma \neq t\end{cases}$

Logo, $\left(\sum_{t\in\mathrm{G}} i(a_t)u_t\right)_\gamma = a_\gamma$

■

Observação 2.21. *É usual escrevermos $\sum_{t\in\mathrm{G}} a_tu_t$ para um elemento pertencente a $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$, em vez de $\sum_{t\in\mathrm{G}} i(a_t)u_t$.*

Por último, gostaríamos que $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ fosse uma C*-algebra. Infelizmente, isto não acontece, como mostra o exemplo abaixo:

Exemplo 2.22. *Seja A a C*-algebra dos Complexos, G o grupo dos inteiros e α a ação trivial de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{C}$, ou seja, a ação dada por* $\begin{array}{rcl}\alpha : \mathbb{Z} & \to & Aut(\mathbb{C}) = \{I\}\\ n & \mapsto & I\end{array}$*. Então, existem elementos em $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ tais que $\|a^*a\| \neq \|a\|^2$.*

Demonstração:

Seja $a = i + 1 + u_1 - u_{-1}$, ou seja, $a_{-1} = -1$, $a_0 = i + 1$, $a_1 = 1$ e $a_\gamma = 0$ nas outras coordenadas. De uma maneira pouco formal, podemos escrever a da seguinte forma:

$$a = (\ldots, 0, \underbrace{-1}_{-1^a}, \underbrace{i+1}_{0^a}, \underbrace{1}_{1^a}, 0, 0, \ldots)$$

Então,

$$a^* = (\ldots, 0, \underbrace{1}_{-1^a}, \underbrace{1-i}_{0^a}, \underbrace{-1}_{1^a}, 0, 0, \ldots)$$

Ou seja, $a^*_{-1} = 1$, $a^*_0 = 1 - i$, $a^*_1 = -1$ e $a^*_\gamma = 0$ nas outras coordenadas.

Assim, $(a^*a)_s = \sum_{g\in\mathrm{G}}(a^*)_g\alpha_g(a_{-g+s}) = 1a_{1+s} + (1-i)a_s - 1a_{s-1}$ e portanto,

$$(a^*a)_s = \begin{cases} -1 & \text{se } s = -2,\\ 2i & \text{se } s = -1,\\ 4 & \text{se } s = 0,\\ -2i & \text{se } s = 1,\\ 1 & \text{se } s = 2,\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

Agora, note que $\|a\|^2 = (1+\sqrt{2}+1)^2 = (2+\sqrt{2})^2 = 4+4\sqrt{2}+2 = 6+4\sqrt{2}$. Porém, $\|a^*a\| = 1+2+4+2+1 = 10$.

Logo, $\|a^*a\| \neq \|a\|^2$.

∎

O fato de $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ não ser uma C*-algebra, motiva a definição de produto cruzado. O produto cruzado é a C*-algebra que estamos procurando!!

Definição 2.23. *Seja* $(\mathrm{A},\mathrm{G},\alpha)$ *um* C^**-sistema dinâmico. O* **Produto Cruzado** *de* A *por* G*, pela ação* α*, denotado por* $\mathrm{A}\rtimes_\alpha \mathrm{G}$*, é a* C^**-algebra envolvente de* $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$.

Observação 2.24. *Provaremos mais adiante que* $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ *possui uma representação injetora, o que implica que* N *da definição de* C^**-algebra envolvente é* $\{0\}$ *e portanto,* $\mathrm{A}\rtimes_\alpha \mathrm{G}$ *nada mais é do que o completamento de* $l_1(\mathrm{G},\mathrm{A})$ *munido com a norma* $|||\cdot|||$.

Capítulo 3

Representações do Produto Cruzado e Exemplos

Neste capítulo estaremos preocupados em conhecer melhor os produtos cruzados definidos no capítulo anterior. Em particular, dado um C*-sistema dinâmico $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$, queremos representar o produto cruzado $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$, em algum espaço de operadores limitados de um espaço de Hilbert, B(H). Para obtermos uma melhor compreensão dos produtos cruzados, incluimos alguns exemplos na segunda parte do capítulo.

Vamos começar com um pouco de teoria de representação.

Definição 3.1. *Dado* $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$ *um C*-sistema dinâmico, uma* **Representação Covariante** *de* $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$ *é um par* $\begin{cases} \pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)} \\ u : \mathrm{G} \to U(\mathrm{H}) \end{cases}$ *onde* π *é uma *-representação e* u *é um homomorfismo do grupo* G *no espaço dos operadores unitários* $U(\mathrm{H})$*, tais que* $u_t \pi(a)(u_t)^{-1} = \pi(\alpha_t(a))$ $\forall a \in \mathrm{A}$, $\forall t \in \mathrm{G}$.

Denotaremos uma representação covariante por (π, u).

É interessante notar que para toda representação covariante de (A, G, α) existe uma representação de $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$ associada, e vice-versa. É o que nos diz a proposição:

Proposição 3.2. *Existe correspondência biunivuca entre*

1) *Representações Covariantes de* (A, G, α)

2) *Representações de* $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$

Demonstração:
1) $\Rightarrow$ 2)

Seja (π, v) uma representação covariante de (A, G, α).

Queremos definir uma representação ϕ de $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$.

Como $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$ é a C*-algebra envolvente de l_1, pela proposição 1.11 é suficiente definir uma representação em l_1.

Definamos então

$$\phi : l_1 \xrightarrow{\phi} \mathrm{B(H)}$$

$$\sum_{t\in G} a_t u_t \longmapsto \sum_{t\in G} \pi(a_t) v_t$$

Note que ϕ esta bem definida, pois
$\|\phi(a)\| = \|\sum \pi(a_t)v_t\| \leq \sum \|\pi(a_t)\|\|v_t\|$
$\leq \sum \|a_t\|$ pois π é *-representação contrativa e v_t é operador unitário.
$= \|a\|$
E portanto $\phi(a) \in \mathrm{B(H)}$.
Agora, vamos mostrar que ϕ é *-representação.
Sejam $a = \sum_{t\in G} a_t u_t$ e $b = \sum_{k\in G} b_k u_k$ pertencentes a l_1.

i) ϕ é claramente linear.

ii) ϕ é multiplicativa pois

$\phi(a)\phi(b) = \phi(\sum_t a_t u_t)\phi(\sum_k b_k u_k) = \sum_t \pi(a_t)v_t \sum_k \pi(b_k)v_k$
$= \sum_{t,k} \pi(a_t)v_t\pi(b_k)v_k = \sum_{t,k} \pi(a_t)v_t\pi(b_k)(v_t)^{-1}v_t v_k$
$= \sum_{t,k} \pi(a_t)\pi(\alpha_t(b_k))v_{tk}$ pois (π, v) é representação covariante
$= \sum_k \sum_t \pi(a_t\alpha_t(b_k))v_{tk} = \sum_k \sum_t \phi(a_t\alpha_t(b_k)u_{tk}) = \phi(\sum_k \sum_t a_t\alpha_t(b_k)u_t u_k)$
$= \phi(\sum_k \sum_t a_t u_t b_k u_k) = \phi(\sum_t a_t u_t \sum_k b_k u_k) = \phi(a)\phi(b)$

iii) ϕ é satisfaz a propriedade da involução

Primeiro, lembre que $(a^*)_t = \alpha_t(a^*_{t^{-1}})$.

Assim, $\phi(a^*) = \phi(\sum \alpha_t(a^*_{t^{-1}})u_t)$

Por outro lado,

$\phi(a)^* = (\sum_t \pi(a_t)v_t)^* = \sum_t(\pi(a_t)v_t)^* = \sum_t v_t^*\pi(a_t^*) = \sum_t v_{t^{-1}}\pi(a_t^*)$
$= \sum_t \pi(\alpha_{t^{-1}}(a_t^*))v_{t^{-1}}$ pois (π, v) é representação covariante
$= \sum_t \pi(\alpha_t(a^*_{t^{-1}}))v_t = \phi(\sum_t \alpha_t(a^*_{t^{-1}})u_t) = \phi(a^*)$

2) $\Rightarrow$ 1)

Seja $\phi : \mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G} \to \mathrm{B(H)}$ uma *-representação de $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$.
Queremos definir uma representação covariante de (A, G, α).
Sejam então, $\begin{array}{rcl} \pi : \mathrm{A} & \to & \mathrm{B(H)} \\ a & \mapsto & \phi(\tilde{a}) \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} v : \mathrm{G} & \to & \mathrm{B(H)} \\ t & \mapsto & \phi(u_t) \end{array}$
onde $\tilde{a}$ é a inclusão de a em $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$.
Vamos mostrar que (π, v) é representação covariante.

i) Claramente π é *-representação.

ii v_t é unitário, pois

$$v_t v_t^* = \phi(u_t)\phi(u_t)^* = \phi(u_t(u_t)^*) = \phi(\tilde{1}) = I$$
$$v_t^* v_t = \phi(u_t)^*\phi(u_t) = \phi((u_t)^* u_t) = \phi(\tilde{1}) = I$$

iii) π e v satisfazem a relação de covariança.

$$v_t\pi(a)(v_t)^{-1} = \phi(u_t)\phi(\tilde{a})\phi(u_t)^{-1} = \phi(u_t)\phi(\tilde{a})\phi(u_t^*) = \phi(u_t\tilde{a}u_t^{-1})$$
$= \phi(\widetilde{\alpha_t(a)})$ pela proposição 2.19
$= \pi(\alpha_t(a))$

Falta mostrar que a relação entre 1) e 2) é biunívuca.

Dada $\phi : \mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G} \to \mathrm{B(H)}$ uma *-representação de $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$, construa a representação covariante (π, v) como na demonstração de 2) $\Rightarrow$ 1)

Quem é a representação proveniente de (π, v) se procedermos como em 1) $\Rightarrow$ 2)?

Chame de $\pi \times v$ a representação proveniente de (π, v).

Temos que
$$\begin{array}{rcl} \pi \times v : l_1 & \to & \mathrm{B(H)} \\ \sum_{t\in \mathrm{G}} a_t u_t & \mapsto & \sum_{t\in \mathrm{G}} \pi(a_t)v_t \end{array}$$

Seja $a = \sum_{t\in\mathrm{G}} a_t u_t \in l_1$.

Note que

$\pi \rtimes v(a) = \sum_{t\in\mathrm{G}} \pi(a_t)v_t = \sum_{t\in\mathrm{G}} \phi(\tilde{a_t})\phi(u_t) = \sum \phi(\tilde{a}_t u_t)$
$= \phi(\sum \tilde{a}_t u_t) = \phi(a)$

Por último, seja (π, v) uma representação covariante de $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$.

Construa a representação ϕ de $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$ conforme 1) $\Rightarrow$ 2).

Quem é a representação covariante $(\tilde{\pi}, \tilde{v})$ obtida de ϕ, se procedermos como em 2) $\Rightarrow$ 1)?

Note que

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\pi} : \mathrm{A} & \to & \mathrm{B(H)} \\ a & \mapsto & \phi(\tilde{a}) = \pi(a) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \tilde{v} : \mathrm{G} & \to & \mathrm{B(H)} \\ t & \mapsto & \phi(u_t) = v_t \end{array}$$

Logo, $\tilde{\pi} = \pi$ e $\tilde{v} = v$.

■

Observação 3.3. *De agora em diante, a representação ϕ proveniente de uma representação covariante (π, u) será chamada de $\pi \times u$.*

Utilizando a proposição acima, podemos representar $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ em um B(H) de maneira 1-1. É o que nos diz o resultado abaixo.

Proposição 3.4. *$l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ possui uma representação injetora, que é chamada* **Representação Regular** *de $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$.*

Demonstração:

Seja $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)}$ uma representação injetora de A. (existe conforme [12], página 338, cap. 12). Podemos então considerar $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B(H)}$.

Seja $\bigoplus \mathrm{H} = \bigoplus_{g \in \mathrm{G}} \mathrm{H}_g$, onde $\mathrm{H}_g \equiv \mathrm{H}$.

Note que $(\xi)_{g\in \mathrm{G}} \in \bigoplus \mathrm{H}$ se e somente se $\sum_{g \in \mathrm{G}} \|\xi_g\|^2 \langle \infty$.

Defina $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$ e $v : \mathrm{G} \to \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$ por:

$$\pi(a) = \begin{array}{c} \\ -e- \\ -g- \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad & e & \quad\quad g & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \pi(a) & & \\ & & \pi(\alpha_{g^{-1}}(a)) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

$(v_h(\xi))_g = \xi_{h^{-1}g}$ para $\xi \in \bigoplus \mathrm{H}$ e $h \in \mathrm{G}$.

Observe que para $\xi \in \bigoplus \mathrm{H}$ temos que $(\pi(a)\xi)_g = \alpha_{g^{-1}}(a)\xi_g$.

Vamos mostrar que (π, v) é uma representação covariante de $(\mathrm{A}, \mathrm{G}, \alpha)$.

i) Primeiro vamos mostrar que π é uma *-representação

$\pi(a) \in \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$ pois

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \sum_{g\in \mathrm{G}} \|(\pi(a)\xi)_g\|^2 = \sum_{g\in \mathrm{G}} \|\alpha_{g^{-1}}(a)\xi_g\|^2 \leq \sum_{g\in \mathrm{G}} \|a\|^2\|\xi_g\|^2$$
$$= \|a\|^2 \sum_{g\in \mathrm{G}} \|\xi_g\|^2 = \|a\|^2\|\xi\|^2$$

π é um *-homomorfismo, pois

$$[\pi(a+b)\xi]_g = \alpha_{g^{-1}}(a+b)\xi_g = (\alpha_{g^{-1}}(a) + \alpha_{g^{-1}}(b))\xi_g = [\pi(a)\xi]_g + [\pi(b)\xi]_g$$
$$= [\pi(a)\xi + \pi(b)\xi]_g = [(\pi(a) + \pi(b))\xi]_g$$

$$[(\pi(a)\pi(b))\xi]_g = [\pi(a)(\pi(b)\xi)]_g = \alpha_{g^{-1}}(a)([\pi(b)\xi]_g) = \alpha_{g^{-1}}(a)(\alpha_{g^{-1}}(b)\xi_g)$$
$$= \alpha_{g^{-1}}(ab)\xi_g = [\pi(ab)\xi]_g$$

$$\langle \pi(a)\xi, \gamma\rangle_{\bigoplus \mathrm{H}} = \sum_{g\in \mathrm{G}} \langle \alpha_{g^{-1}}(a)\xi_g, \gamma_g\rangle_{\mathrm{H}} = \sum_{g\in \mathrm{G}} \langle \xi_g, \alpha_{g^{-1}}(a)^*\gamma_g\rangle$$
$$= \sum_{g\in \mathrm{G}} \langle \xi_g, \alpha_{g^{-1}}(a^*)\gamma_g\rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\gamma\rangle_{\bigoplus \mathrm{H}}$$

Logo $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ e portanto π é uma *-representação.

ii) v é homomorfismo de grupo no espaço dos operadores unitários em $\mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$

$v_h \in \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$ pois

$$\|u_h(\xi)\|^2 = \sum_{g\in \mathrm{G}} \|[u_h(\xi)]_g\| = \sum_{g\in \mathrm{G}} \|\xi_{h^{-1}g}\| = \sum_{j\in \mathrm{G}} \|\xi_j\| = \|\xi\|$$

v é um homomorfismo de grupo, pois

$$[v_t v_s(\xi)]_g = [v_t(v_s(\xi))]_g = [v_s(\xi)]_{t^{-1}g} = \xi_{s^{-1}t^{-1}g} = \xi_{(ts)^{-1}g} = [v_{ts}(\xi)]_g$$

Para mostrarmos que v_t é unitário para todo t, precisamos encontrar v_t^*.

Temos que $v_t^* = v_{t^{-1}}$, pois

$$\langle v_t(\xi), \gamma\rangle = \sum_{g \in G} \langle \xi_{t^{-1}g}, \gamma\rangle \overset{t^{-1}g=s}{=} \sum_{s\in G}\langle \xi_s, \gamma_{ts}\rangle = \langle \xi, v_{t^{-1}}(\gamma)\rangle$$

Portanto v_t é unitário, uma vez que

$$[v_t^* v_t(\xi)]_g = [v_{t^{-1}}(v_t(\xi))]_g = [v_t(\xi)]_{tg} = \xi_{t^{-1}tg} = \xi_g \text{ e}$$

$$[v_t v_t^*(\xi)]_g = [v_t(v_{t^{-1}}(\xi))]_g = [v_{t^{-1}}(\xi)]_{t^{-1}g} = \xi_{tt^{-1}g} = \xi_g$$

iii) Falta verificar a relação de covariança

Primeiro note que $[\pi(a)(v_{t^{-1}}(\xi))]_g = \alpha_{g^{-1}}(a)[v_{t^{-1}}(\xi)]_g = \alpha_{g^{-1}}(a)\xi_{tg}$.

E portanto,

$$[v_t\{\pi(a)(v_{t^{-1}}(\xi))\}]_g = [\pi(a)(v_{t^{-1}}(\xi))]_{t^{-1}g} = \alpha_{g^{-1}t}(a)\xi_{tt^{-1}g}$$

$$= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_t(a))\xi_g \; [\pi(\alpha_t(a))\xi]_g$$

Logo, (π, v) é representação covariante.

Quem é a representação de l_1 associada a (π, v) dada pela proposição 3.2?

Lembre que $\pi \times v$ é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \pi \times v : l_1 & \overset{\pi\times v}{\rightarrow} & B(H) \\ \sum_{t\in G} a_t u_t & \mapsto & \sum_{t\in G}\pi(a_t)v_t \end{array}$$

Qual a matriz de $(\pi \times v)(a)$, onde $a = \sum_{t\in G} a_t u_t$?

Vejamos como é a coordenada g de $(\pi \times v)(a)(\xi)$ onde ξ é um vetor de $B(\bigoplus H)$.

$$[(\sum_{t\in G}\pi(a_t)v_t)(\xi)]_g = [\sum_{t\in G}\pi(a_t)(v_t(\xi))]_g = \sum_{t\in G}[\pi(a_t)(v_t(\xi))]_g$$

$$= \sum_{t\in G}\alpha_{g^{-1}}(a_t)\xi_{t^{-1}g} \overset{t^{-1}g=s}{=} \sum_{s\in G}\alpha_{g^{-1}}(a_{gs^{-1}})\xi_s$$

Agora, podemos montar a matriz de $\pi \times v(a)$

$$\begin{array}{c} \\ -g^{-1}- \\ -e- \\ -g- \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & s^{-1} & e & s & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \alpha_g(a_{g^{-1}s}) & \alpha_g(a_{g^{-1}}) & \alpha_{g^{-1}}(a_{g^{-1}s^{-1}}) & \cdots \\ \cdots & a_s & a_e & a_{s^{-1}} & \cdots \\ \cdots & \alpha_{g^{-1}}(a_{gs}) & \alpha_{g^{-1}}(a_g) & \alpha_{g^{-1}}(a_{gs^{-1}}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Finalmente, vamos mostrar que $\pi \times v$ é injetora.
Suponha que $(\pi \times v)(a) = 0$.
Então, $[(\pi \times v)(a)(\xi)] = 0 \quad \forall \xi \in \bigoplus \mathrm{H}_g$.
$\Rightarrow [(\pi \times v)(a)(\xi)]_e = 0 \quad \forall \xi \in \bigoplus \mathrm{H}_g$.
$\Rightarrow \sum_{s \in \mathrm{G}} a_s \xi_{s^{-1}} \quad \forall \xi \in \bigoplus \mathrm{H}_g$.
$\Rightarrow a_s = 0 \quad \forall s$
$\Rightarrow a = 0$

■

Observação 3.5. *Como* $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$ *é a* C^**-algebra envolvente de* $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$*, pela proposição 1.11, podemos estender a representação regular de* $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ *para* $\mathrm{A} \rtimes_\alpha \mathrm{G}$*, porém, esta extensão não é necessariamente injetora.*

3.1 Exemplos de Produto Cruzado

Para entender melhor a teoria desenvolvida até aqui, nesta seção veremos alguns exemplos de produto cruzado e suas respectivas representações.

Exemplo 3.6. *Seja* α_k *o automorfismo em* $\mathbb{C}^n$ *dado por:*

$$\alpha_k[(\lambda_i)] = (\mu_i), \ \ onde \quad \mu_i = \lambda_{(i+k) mod\, n}$$

Por exemplo, $\alpha_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_2, \ldots, \lambda_1)$
Seja α *a ação dada por*

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{Z}_n & \rightarrow & Aut(\mathbb{C}^n) \\ k & \mapsto & \alpha_k \end{array}$$

Então,

$$\mathbb{C}^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

Demonstração:

Vamos definir uma representação covariante (ϕ, v) de $\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n, \alpha$ em $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Sejam

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{C}^n & \rightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} v : \mathbb{Z}_n &\to M_n(\mathbb{C}) \\ \bar{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que $v(\bar{k}) = v(1)^k = v_k$.

É claro que ϕ é uma *-representação, e como $v(1)^n = I$, pela proposição 1.27 segue que v é um homomorfismo de grupo.

Falta verificar a relação de covariança, ou seja, temos que verificar que $v_k\phi(a)v_k^* = \phi(\alpha_k(a))$.

Observe que se a relação de covariança vale para $k = 1$, então ela é válida, pois:

$$\begin{aligned} &v_k\phi(a)v_k^* = v_1^k\phi(a)(v_1^k)^* = v_1^{k-1}v_1\phi(a)v_1^*(v_1^{k-1})^* \\ &= v_1^{k-1}\phi(\alpha_1(a))(v_1^{k-1})^* = \ldots = v_1^{k-2}\phi(\alpha_1(\alpha_1(a)))(v_1^{k-2})^* \\ &= v_1^{k-2}\phi(\alpha_2(a))(v_1^{k-2})^* = \ldots = v_0\phi(\alpha_k(a))(v_0)^* = \phi(\alpha_k(a)) \end{aligned}$$

Então, vamos mostrar a relação de covariança para $k = 1$.

Primeiro note que

$$v_1^* = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \phi(\alpha_1(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$v_1\phi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & & & \\ & 0 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ \lambda_1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

E então,

$$v_1\phi(a)v_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & & & \\ & 0 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda_n \\ \lambda_1 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix} = \phi(\alpha_1(a))$$

Portanto, (ϕ, v) é uma representação covariante de $(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}^n, \alpha)$, e pela proposição 3.2, existe uma representação $\phi \times v$ de $l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}^n)$ associada.

Quem é esta representação?

Pela prova da proposição, 3.2, sabemos que $\phi \times v$ é dada por:

$$
\begin{array}{ccc}
l_1 & \overset{\phi \times v}{\rightarrow} & M_n(\mathbb{C}) \\
\sum\limits_{t \in \mathbb{Z}_n} a_t u_t & \mapsto & \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}_n} \phi(a_t) v_t
\end{array}
$$

Seja $a = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}_n} a_t u_t \ \in l_1$. Sabemos que cada $a_t \in \mathbb{C}^n$.

Vamos denotar a_t por $(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)$.

Então,

$$
\phi(a_1)v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1^1 & & & \\ & 0 & \lambda_2^1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \lambda_{n-1}^1 \\ \lambda_n^1 & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\phi(a_2)v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1^2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & & \lambda_{n-2}^2 \\ \lambda_{n-1}^2 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_n^2 & & & 0 \end{pmatrix}
$$

E portanto,

$$
\sum_{t \in \mathbb{Z}_n} \phi(a_t) v_t = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^n & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \lambda_{n-1}^2 & & & & \lambda_{n-1}^1 \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \cdots & & \lambda_n^n \end{pmatrix}
$$

Agora que a matriz de $\phi \times v$ é conhecida, é fácil ver que esta representação é injetora, pois, se

$\sum\limits_{t \in \mathbb{Z}_n} \phi(a_t) v_t = 0$ então, $\lambda_i^t = 0 \ \forall i, \forall t \Rightarrow a_t = 0 \ \forall t$.

Ainda, como as dimensões de $l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n)$ e $M_n(\mathbb{C})$ são as mesmas, temos que $\phi \times v$ é uma bijeção entre $l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n)$ e $M_n(\mathbb{C})$.

Por último, lembre que o produto cruzado de $(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n, \alpha)$ é a C*-algebra envolvente de $l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n)$, ou seja, é o completamento de $(l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n), |||\cdot|||)$.

Porém, a dimensão de $l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n)$ e $(l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n), |||\cdot|||)$ é a mesma, ou seja, n^2; e como todo espaço de dimensão finita é completo, segue que não é necessário fazer o completamento de $(l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n), |||\cdot|||)$ para se encontrar a C*-algebra envolvente de $l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n)$.

Assim, $\mathbb{C}^n \rtimes \mathbb{Z}_n \cong l_1(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_n) \cong M_n(\mathbb{C})$.

■

Exemplo 3.7. *Seja $\mathbb{Z}$ o grupo dos inteiros, $\mathbb{C}$ a C^*-algebra dos complexos, e α a ação dada por*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{Z} &\to Aut(\mathbb{C}) \\ n &\mapsto I \end{aligned}$$

Então, $\mathbb{C} \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \cong \mathrm{C}(\mathrm{S}^1)$

Demonstração:

Primeiro observe que se $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $b = (b_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ pertencem a $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$ então $(ab)_k = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{k-n}$, pois $\alpha_n = I\ \forall n$.

Para demonstrar este exemplo, precisaremos de dois lemas. Vejamos:

Lema 3.8. *Para todo homomorfismo $\varphi : l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, existe único $z_0 \in S^1$ tal que $\varphi(a) = \sum a_n z_0^n$*

Demonstração:

Seja Δ_{l_1} o conjunto de todos os homomorfismo complexos de $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$.

Seja u o elemento de $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$ que é sempre 0, menos a direita da coordenada 0, onde u vale 1. Ou seja, $u = (\ldots, \underbrace{0}_{0^a}, 1, 0, \ldots)$

Note que $u^2 = (\ldots, \underbrace{0}_{0^a}, 0, 1, 0, \ldots)$ e $u^* = (\ldots, 1, \underbrace{0}_{0^a}, 0, \ldots)$

Assim, os polinômios em u e u^* são densos em $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$. Já sabemos que $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$ é uma *-algebra de Banach. Se provarmos que $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$ é comutativa, segue pela primeira parte do teorema 11.19 de [12] que Δ_{l_1} é homeomorfo ao espectro de u, que denotaremos por $\sigma(u)$.

Porém, note que $(ab)_k = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{k-n} \overset{k-n=s}{=} \sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} b_s a_{k-s} = (ba)_k$ e então $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$ é comutativa e $\Delta_{l_1} \cong \sigma(u)$

Quem é $\sigma(u)$?

Observe que $uu^* = 1 = u^*u$ e portanto $\sigma(u) \subseteq S^1$.

Queremos mostrar que $\sigma(u) = S^1$.

Seja $z \in S^1$.

Defina $\varphi \in \Delta_{l_1}$ por

$$\begin{aligned} l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z}) &\overset{\varphi}{\to} \mathbb{C} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} &\mapsto \sum a_n z^n \end{aligned}$$

Note que φ é um homomorfismo, pois para $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $b = (b_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ em $l_1(\mathbb{C},\mathbb{Z})$ temos que:

i) $\varphi(a)$ esta bem definido, uma vez que

$\sum \|a_n z^n\| \leq \sum \|a_n\| |z|^n = \sum \|a_n\| = \|a\|$.

E portanto, $\sum a_n z^n$ converge, já que converge absolutamente.

ii) Claramente, φ é linear.

iii) φ é multiplicativa, pois

$$\varphi(a)\varphi(b) = \sum_n a_n z^n \sum_m b_m z^m = \sum_{n,m} a_n b_m z^{n+m}$$
$$= \sum_k \Big(\sum_{\substack{n,m \\ n+m=k}} a_n b_m \Big) z^k = \sum_k \Big(\sum_n a_n b_{k-n}\Big) z^k = \varphi(ab)$$

iv) φ satisfaz a propriedade da involução, já que

$$\varphi(a)^* = \overline{\sum_n a_n z^n} = \sum_n \overline{a_n} z^{-n} = \sum_n \overline{a_{-n}} z^n = \sum_n a^*_{-n} z^n = \varphi(a^*)$$

Agora, observe que $\varphi(u) = z$.

Logo, z pertence a imagem da transformada de Gelfand de u, ou seja, $z \in \mathrm{Im}(\hat{u})$.

Mas, pelo teorema 11.9 de [12], sabemos que $\mathrm{Im}(\hat{u}) = \sigma(u)$, e assim $z \in \sigma(u)$.

Então, $\sigma(u) = S^1$ e portanto $\Delta_{l_1} \cong S^1$.

Por último, observe que para todo $z \in S^1$, $\begin{array}{cccc} \varphi : l_1(\mathbb{C}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \sum a_n z^n \end{array}$ é um homomorfismo complexo.

■

Lema 3.9. *A correspondência $\varphi \in \Delta_{l_1} \longleftrightarrow z_0 \in S^1$ é um homeomorfismo.*

Demonstração:

Pelo lema 3.8 sabemos que para todo $\varphi \in \Delta_{l_1}$, existe $z \in S^1$ tal que $\varphi\big((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big) = \sum a_n z^n$. Também do lema 3.8, temos que para todo $z \in S^1$, $\varphi_z : (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum a_n z^n$ é um homomorfismo complexo.

Queremos mostrar que $\begin{array}{ccc} \varphi : S^1 & \xrightarrow{\varphi} & \Delta_{l_1} \\ z & \mapsto & \varphi_z \end{array}$ é contínua. Como Δ_{l_1} possui uma topologia inicial, denotando por $\hat{a}$ a transformada de Gelfand de um elemento $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$, é suficiente mostrar que $\hat{a} \circ \varphi$ é contínua para todo $a \in l_1$.

Estamos na seguinte situação:

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \xrightarrow{\varphi} & \Delta_{l_1} & \xrightarrow{\hat{a}} & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \varphi_z & \mapsto & \hat{a}(\varphi_z) \end{array}$$

Agora, note que $\hat{a}(\varphi_z) = \varphi_z(a) = \sum a_n z^n$ e portanto $\hat{a} \circ \varphi$ é contínua para todo $a \in l_1$.

Logo φ é contínua, e como Δ_{l_1} é compacto e Hausdorff segue que φ^{-1} também é contínua.

■

Voltando ao nosso exemplo, lembre que $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}$ é a C*-algebra envolvente de l_1, $C^*(l_1)$, que, pela proposição 1.13 é isometricamente isomorfa a $C(\Delta_{l_1})$. Como, pelo lema 3.9 Δ_{l_1} é homeomorfo a S^1, segue que $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z} \cong C(S^1)$

■

Exemplo 3.10. *Sejam U e V operadores em* $\mathrm{B}(L_2(S^1))$ *definidos por:*

$$U\xi\mid_z = z\xi(z)$$
$$V\xi\mid_z = \xi(e^{-i\theta}z), \text{ onde } \theta \in I\!R \text{ é fixo}$$

Então a C^*-algebra gerada por U e V, $C^*(U,V)$, é isometricamente isomorfa a um quociente de $\mathrm{C}(\mathrm{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, *onde α é a ação dada por $\alpha_n(f)\mid_z = f(e^{-in\theta}z)$.*

Observação 3.11. *Chamamos o operador U de operador de multiplicação por z.*

Demonstração:

Precisamos de algumas propriedades dos operadores U e V antes de seguirmos com a demonstração. Vejamos:

i) U é unitário

Quem é U^*?

Sejam $\xi,\ \gamma \in L_2(S^1)$. Então,

$$\langle U\xi,\gamma\rangle = \int_{S^1}\left((U\xi)z\right)\overline{\gamma(z)}dz = \int_{S^1}\left(z\xi(z)\right)\overline{\gamma(z)}dz = \int_{S^1}\xi(z)\overline{\overline{z}\gamma(z)}dz = \langle \xi, M_{\overline{z}}\gamma\rangle$$

Assim, $U^* = M_{\overline{z}}$, onde $M_{\overline{z}}\xi\mid_z = \overline{z}\xi(z)$.

Conhecendo U^* podemos provar que U é unitário. Vejamos:

$(UU^*)(\xi)\mid_z = U(U^*\xi)\mid_z = z(U^*\xi\mid_z) = z\overline{z}\xi(z) = |z|^2\xi(z) = \xi(z)$

Note que a última igualdade segue do fato de z pertencer a S^1.

Analogamente verifica-se que $(U^*U)(\xi)\mid_z = \xi(z)$.

Portanto, U é unitário.

ii) V é unitário.

Quem é V^*?

Sejam $\xi,\ \gamma \in L_2(S^1)$. Então,

$$\langle V\xi,\gamma\rangle = \int_{S^1}\left((V\xi)z\right)\overline{\gamma(z)}dz = \int_{S^1}\xi(e^{-i\theta}z)\overline{\gamma(z)}dz = \int_0^{2\pi}\xi(e^{-i\theta}e^{i\lambda})\overline{\gamma(e^{i\lambda})}d\lambda$$
$$= \int_0^{2\pi}\xi(e^{i(\lambda-\theta)})\overline{\gamma(e^{i\lambda})}d\lambda \overset{\lambda-\theta=\lambda'}{=} \int_0^{2\pi}\xi(e^{i\lambda'})\overline{\gamma(e^{i(\lambda'+\theta)})}d\lambda'$$
$$= \int_0^{2\pi}\xi(e^{i\lambda'})\overline{\gamma(e^{i\theta}e^{i\lambda'})}d\lambda' = \int_{S^1}\xi(z)\overline{\gamma(e^{i\theta}z)}dz = \langle\xi, V^*\gamma\rangle$$

Portanto, $V^*\xi\mid_z = \xi(e^{i\theta}z)$

Agora que conhecemos V^*, podemos provar que V é unitário. Vejamos:

$(VV^*)(\xi)\mid_z = V(V^*\xi)\mid_z = V^*\xi(e^{-i\theta}z) = \xi(e^{i\theta}e^{-i\theta}z) = \xi(z)$

Analogamente verifica-se que $(V^*V)(\xi)\mid_z = \xi(z)$.

Portanto, V é unitário.

iii) Espectro de U é igual a S^1

Lembre que U é o operador de multiplicação por z, M_z. Assim, podemos usar o exercício 20, da página 343 de [12], e portanto $\sigma(U)$ é a imagem essencial de z.

Sem muito rigor, podemos dizer que a imagem essencial de uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{C}$ tais que, para todo $r > 0$, a imagem inversa por f da bola de centro x e raio r não tem medida nula. Mais detalhes sobre a imagem essencial podem ser obtidos em [12], página 318.

Então, com a definição acima, podemos ver que a imagem essencial de z é S^1. Logo, $\sigma(U) = S^1$

iv) A C*-algebra gerada por U, $C^*(U)$, é isomorfa a $C(S^1)$

Pela construção de $C^*(U)$, segue que os polinômios em U e U^* são densos nesta C*-algebra e portanto, pelo teorema 11.19 da página 290 de [12], temos que $C^*(U) \cong C(\sigma(U)) = C(S^1)$.

v) U e V são tais que $UV = e^{i\theta}VU$

$(UV)(\xi)\mid_z = U(V\xi)\mid_z = z(V\xi(z)) = z\xi(e^{-i\theta}z)$

$(VU)(\xi)\mid_z = V(U\xi)\mid_z = U\xi(e^{-i\theta}z) = e^{-i\theta}z\xi(e^{-i\theta}z)$

Logo, $UV = e^{i\theta}VU$

Tendo em mãos estes resultados, vamos provar que existe uma representação $\pi \times v$ de $C(S^1) \rtimes \mathbb{Z}$ em $B(L^2(S^1))$, que é proveniente de uma representação covariante (π, v) tal que:

$$\begin{array}{ccc} z & \overset{\pi}{\mapsto} & U \\ 1 & \overset{v}{\mapsto} & V \end{array}$$

Quem é esta representação (π, v)?

Por iv), sabemos que existe um isomorfismo de $C(S^1)$ em $C^*(U) \subseteq B(L^2(S^1))$. Chamaremos este isomorfismo de π.

Pelo teorema 11.19, página 290 de [12], temos que o isomorfismo dado em iv), ou seja, π, é tal que, se $f(\lambda) = \lambda \quad \forall \lambda \in \sigma(U)$ então $\pi(f) = U$. Logo, como $\sigma(U) = S^1$, temos que $\pi(z) = U$.

Como V é unitário, pela proposição 1.26, segue que v definido por $\begin{array}{ccc} v : \mathbb{Z} & \to & B(L^2(S^1)) \\ n & \mapsto & V^n \end{array}$ é um homomorfismo de grupo.

Falta apenas mostrar a relação de covariança para provarmos que (π, v) é uma representação covariante de $(C(S^1), \mathbb{Z}, \alpha)$.

Pelo já feito no exemplo 3.6, basta verificar a relação de covariança para o caso $n = 1$, ou seja, basta verificar que $V\pi(f)V^* = \pi(\alpha_1(f))$. Primeiro, vamos demonstrar para polinômios da forma $p_n = \sum_{z\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ e depois para uma $f \in C(S^1)$ qualquer.

Vejamos:

$V\pi(p_n)V^* = V\pi(\sum a_n z^n)V^* = \sum a_n V\pi(z)^n V^* = \sum a_n V U^n V^* \overset{v)}{=}$
$\sum a_n e^{-in\theta} U^n V V^* = \sum a_n e^{-in\theta} U^n$

Por outro lado,

$\alpha_1(p_n)\mid_z = \alpha_1(\sum a_n z^n)\mid_z = \sum a_n (e^{-i\theta} z)^n = \sum a_n e^{-in\theta} z^n$ e portanto
$\pi(\alpha_1(z)) = \pi(\sum a_n e^{-in\theta} z^n) = \sum a_n e^{-in\theta} \pi(z^n) = \sum a_n e^{-in\theta} U^n = V\pi(p_n)V^*$

Agora, seja $f \in C(S^1)$. Então $f = \lim p_n$ onde p_n é um polinômio da forma $\sum\limits_{z \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ e a relação de covariança vale, pois:

$V\pi(f)V^* = V\pi(\lim p_n)V^* = \lim V\pi(p_n)V^* = \lim \pi(\alpha_1(p_n)) = \pi(\alpha_1(f))$

Portanto, (π, v) é uma representação covariante de $(C(S^1), \mathbb{Z}, \alpha)$ e pela proposição 3.2, existe uma representação $\pi \times v$ de $C(S^1) \rtimes \mathbb{Z}$ associada. Sabemos que $\pi \times v$ é tal que:

$$\begin{array}{ccc} C(S^1) \rtimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi \times v} & \mathrm{B}(L^2(S^1)) \\ \sum f_t u_t & \mapsto & \sum \pi(f_t) V_t = \sum \pi(f_t) V^t \end{array}$$

Note que $U, V \in \mathrm{Im}(\pi \times v)$ e que $\mathrm{Im}(\pi \times v) \subseteq C^*(U, V) \subseteq \mathrm{B}(L^2(S^1))$

Então, como $C^*(U, V)$ é a menor C*-algebra que contém U e V, se mostrarmos que $\mathrm{Im}(\pi \times v)$ é uma C*-algebra, segue que $\mathrm{Im}(\pi \times v) = C^*(U, V)$.

Mas, pelo corolário 1.16 temos que $\mathrm{Im}(\pi \times v)$ é uma C*-algebra isometricamente isomorfa a $\frac{C(S^1) \rtimes \mathbb{Z}}{\ker(\pi \times v)}$.

Logo $\mathrm{Im}(\pi \times v) = C^*(U, V)$.

■

Capítulo 4

O Produto Cruzado por Ações Parciais de um Grupo Discreto G e Exemplos

As noções de um sistema dinâmico e de um C*-sistema dinâmico, dadas no capítulo 2 podem ser generalizadas pela definição de Ação Parcial. Neste contexto mais geral, ainda é possível construir o produto cruzado de uma C*-algebra A por um grupo discreto G. Vejamos como:

Definição 4.1. *Uma* **Ação Parcial** *de um Grupo* G *em um conjunto* Ω *é um par* $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$, *onde para cada* $t \in G$, Δ_t *é um subconjunto de* Ω *e* $h_t : \Delta_{t^{-1}} \to \Delta_t$ *é uma bijeção satisfazendo para todo t,s pertencentes ao grupo* G*:*

i $\Delta_e = \Omega$ *e* h_e *é a identidade em* Ω

ii $h_t(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) = \Delta_t \cap \Delta_{ts}$

iii $h_t(h_s(x)) = h_{ts}(x)$, $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$

Se Ω *é um espaço topológico, precisamos que:*

- *cada* Δ_t *seja um subconjunto aberto de* Ω
- h_t *seja um homeomorfismo de* $\Delta_{t^{-1}}$ *em* Δ_t

Se $\theta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ *é uma ação parcial de* G *em uma* C^**-algebra* A *é necessário que:*

- *Cada* D_t *seja um ideal bilateral fechado de* A
- α_t *seja um* **-isomorfismo de* $D_{t^{-1}}$ *em* D_t

Proposição 4.2. *Seja* $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ *uma ação parcial. Então* $h_{t^{-1}} = (h_t)^{-1}$ $\forall t \in G$.

Demonstração:

Como $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ é ação parcial, temos que:

$h_{t^{-1}}(h_t(x)) = h_{t^{-1}t}(x) = h_e(x) = x \quad \forall x \in \Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_{t^{-1}t}$, ou seja, para todo $x \in \Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_e = \Delta_{t^{-1}}$

E

$h_t(h_{t^{-1}}(x)) = h_{tt^{-1}}(x) = h_e(x) = x \quad \forall x \in \Delta_t \cap \Delta_{tt^{-1}}$, ou seja, para todo $x \in \Delta_t \cap \Delta_e = \Delta_t$

■

Existe outra definição possível de ação parcial, e que em alguns casos é mais fácil de ser verificada. É o que nos diz a

Proposição 4.3. $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ *é ação parcial se e somente se valem:*

i) $\Delta_e = \Omega$ *e* h_e *é a identidade em* Ω

ii) $h_t \circ h_s \subseteq h_{ts}$ *(com os respectivos domínios)*

Demonstração:

Suponha que i) e ii) valem. Vamos mostrar que $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ é ação parcial.

Note que neste caso, a conclusão da proposição 4.2 vale.

i) Temos que o domínio de $h_t \circ h_s = \{x \in \Delta_{s^{-1}} : h_s(x) \in \Delta_{t^{-1}}\}$

Mas, se $h_s(x) \in \Delta_{t^{-1}}$ então $x \in h_s^{-1}(\Delta_{t^{-1}})$ e portanto,

$\mathrm{dom}(h_t \circ h_s) = \Delta_{s^{-1}} \cap h_s^{-1}(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) = h_s^{-1}(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s)$.

Por hipótese, $\mathrm{dom}(h_t \circ h_s) \subseteq \mathrm{dom}(h_{ts})$ e então, $h_s^{-1}(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) \subseteq \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$.

Assim,

$$h_s^{-1}(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) \subseteq \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}} \tag{4.1}$$

Fazendo a mudança de variáveis $s^{-1} = i$ e $t^{-1} = j$ temos que

$$h_i(\Delta_j \cap \Delta_{i^{-1}}) \subseteq \Delta_i \cap \Delta_{ij}$$

Falta mostrar que $h_s(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_t) \supseteq \Delta_s \cap \Delta_{st}$

Por 4.1 temos que $(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) \subseteq h_s(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}})$.

Fazendo $s^{-1}t^{-1} = t'$ temos:

$$(\Delta_{st'} \cap \Delta_s) \subseteq h_s(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{t'})$$

Portanto $h_s(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_t) = \Delta_s \cap \Delta_{st}$

ii) Se $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$ então $x \in \text{dom}(h_t \circ h_s)$ pois

$h_s(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}) = \Delta_s \cap \Delta_{t^{-1}}$ e portanto $h_s(x) \in \Delta_{t^{-1}} = \text{dom}(h_t)$

Como $h_t \circ h_s \subseteq h_{ts}$ temos que $h_t(h_s(x)) = h_{ts}(x)$, $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$

Logo $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ é ação parcial.

A volta é bem mais curta. Vejamos:

Suponha que $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ é ação parcial.

Basta mostra que $h_t \circ h_s \subseteq h_{ts}$

Já sabemos que se $x \in \text{dom}(h_t \circ h_s)$ então $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap h_s^{-1}(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s)$.
Como $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ é ação parcial isto implica que

$x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}} \subseteq \Delta_{s^{-1}t^{-1}} = \text{dom}(h_{ts})$.

Finalmente, se $x \in \text{dom}(h_t \circ h_s)$ então $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$ e portanto $h_t(h_s(x)) = h_{ts}(x)$ pois $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ é ação parcial.

■

É interessante notar que a proposição 2.7 ainda vale quando falamos em ações parciais, ou seja, dada uma ação parcial em X, existe ação parcial em $C_0(X)$ associada e reciprocamente, toda ação em $C_0(X)$ é proveniente de uma ação parcial em X. No restante desta dissertação só usaremos a primeira parte desta afirmação, e por isto só provaremos esta parte.

Exemplo 4.4. *Dado uma ação parcial $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ de G em um espaço topológico localmente compacto Ω, seja $D_t = \{f \in C_0(\Omega) : f|_{\Delta_t^c} \equiv 0\} \trianglelefteq C_0(\Omega)$ ou seja, $D_t = C_0(\Delta_t)$ Agora, defina α_t por:* $\begin{array}{rcl} \alpha_t : D_{t^{-1}} & \to & D_t \\ f & \mapsto & f \circ h_t^{-1} \end{array}$ *Temos que α_t é ação parcial na C^*-algebra $C_0(\Omega)$.*

Demonstração:

Aqui vamos usar a definição 1.41 de D_t.

Primeiro precisamos verificar se α_t esta bem definida para todo t. Ou seja, vamos mostrar que $f \circ h_t^{-1} \in D_t \quad \forall t$.

$f \circ h_t^{-1}$ é contínua em Δ_t pois é a composição de duas funções contínuas.

Então falta mostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} f \circ h_t^{-1} = 0$.

De $\epsilon > 0$

Como $f \in C_0(\Delta_{t^{-1}}) = D_{t^{-1}}$ existe compacto $K_\epsilon \subseteq \Delta_{t^{-1}}$ tal que

$$\forall x \in \Delta_{t^{-1}} \setminus K_\epsilon, \quad |f(x)| < \epsilon$$

Como h_t é homeomorfismo, $h_t(K_\epsilon)$ é compacto em Δ_t.

Se $y \in \Delta_t \setminus h_t(K_\epsilon)$ então existe $x \in \Delta_{t^{-1}} \setminus K_\epsilon$ tal que $h_t(x) = y$.

Assim $|f \circ h_t^{-1}(y)| = |f \circ h_t^{-1}(h_t(x))| = |f(x)| < \epsilon$

Então, $\lim\limits_{x \to \infty} f \circ h_t^{-1} = 0$ (em Δ_t) e $f \circ h_t^{-1} \in D_t$

Agora vamos mostrar que α_t é ação parcial na C*-algebra $C_0(\Omega)$

i) α_t é isomorfismo.

Sejam $f, g \in D_{t^{-1}}$. Então,

- $\alpha_t(f \cdot g)\mid_x = (f \cdot g) \circ h_t^{-1}\mid_x = (f \cdot g)(h_t^{-1}(x)) = f(h_t^{-1}(x)) \cdot g(h_t^{-1}(x)) = \alpha_t(f)\mid_x \cdot \alpha_t(g)\mid_x = \alpha_t(f) \cdot \alpha_t(g)\mid_x$
- $\alpha_t(f^*)\mid_x = f^* \circ h_t^{-1}\mid_x = f^*(h_t^{-1}(x)) = \overline{f(h_t^{-1}(x))} = \overline{\alpha_t(f)\mid_x} = \alpha_t(f)^*\mid_x$
- α_t é claramente linear
- α_t é injetor.
  Seja $f \in Ker(\alpha_t)$ Então $\alpha_t(f)\mid_x = 0 \quad \forall x \in \Delta_t$
  $\Rightarrow f \circ h_t^{-1}\mid_x = 0 \quad \forall x \in \Delta_t$
  $\Rightarrow f(h_t^{-1}(x)) = 0 \quad \forall x \in \Delta_t$
  $\Rightarrow f(y) = 0 \quad \forall y \in \Delta_{t^{-1}}$ pois h_t^{-1} é um homeomorfismo de Δ_t em $\Delta_{t^{-1}}$
  Então $f = 0$.
- α_t é sobrejetor.
  Seja $g \in D_t$
  Defina f por $\begin{array}{rcl} f : \Delta_{t^{-1}} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g \circ h_t(x) \end{array}$
  Procedendo analogamente ao feito quando demonstramos que α_t esta bem definido, temos que $f \in D_{t^{-1}}$.
  Como $\alpha_t(f) = g \circ h_t \circ h_t^{-1} = g$ temos que α_t é sobrejetor.

ii) Cada D_t é um ideal, pois pelo exercício 3 cap. 11 de [12] os ideais fechados de $C(\Omega)$ são da forma $I_F = \{f \in C(\Omega) : f\mid_F = 0\} = C_0(X \setminus F)$ onde F é fechado.

iii) $D_e = C_0(\Omega)$ e $\alpha_e = Id.$ em $C_0(\Omega)$

Como $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ é ação parcial, temos que $\Delta_e = \Omega$ e $h_e = Id.$ em Ω.

Assim, $D_e = \{f \in C_0(\Omega) : f\mid_{\Delta_e^c} = 0\} = \{f \in C_0(\Omega) : f\mid_{\emptyset} = 0\} = C_0(\Omega)$ e

$$\begin{array}{rcl} \alpha_e : C_0(\Omega) & \to & C_0(\Omega) \\ f & \mapsto & f \circ h_e^{-1} = f \end{array}$$

Logo $\alpha_e = Id.$ em $C_0(\Omega)$

iv) $\alpha_t(D_{t^{-1}} \cap D_s) = D_t \cap D_{ts}$

Pela proposição 1.49 temos que:

$$\alpha_t(C_0(\Delta_{t^{-1}}) \cap C_0(\Delta_s)) = \alpha_t(C_0(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_{ts})) \tag{4.2}$$

Agora, note que estamos na seguinte situação: $\begin{array}{l} \Delta_t \overset{h_{t^{-1}}}{\to} \Delta_{t^{-1}} \supseteq \Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s \\ D_{t^{-1}} \overset{\alpha_t}{\to} D_t \\ f \mapsto f \circ h_t^{-1} \end{array}$

Então, podemos aplicar a proposição 1.50 e portanto, a expressão 4.2 é igual a:

$C_0((h_{t^{-1}})^{-1}(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s)) = C_0(h_t(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s)) =$

$= C_0(\Delta_t \cap \Delta_{ts})$ pois $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ é ação parcial.

$= C_0(\Delta_t) \cap C_0(\Delta_{ts})$ pela proposição 1.49

$= D_t \cap D_{ts}$

v) $\alpha_t(\alpha_s(f)) = \alpha_{ts}(f) \quad \forall f \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}t^{-1}}$

Sabemos que $D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}t^{-1}} = C_0(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}})$ conforme definição 1.41 e a proposição 1.49.

Assim, para $f \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}t^{-1}}$ basta verificar a igualdade para $x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$. Temos que:

$\alpha_t(\alpha_s(f)) \mid_x = \alpha_t f \circ h_s^{-1} \mid_x = f \circ h_{s^{-1}} h_{t^{-1}} \mid_x = f(h_{s^{-1}}(h_{t^{-1}}(x))) =$

$= f(h_{s^{-1}t^{-1}}(x))$ pois $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ é ação parcial

$= \alpha_{ts}(f) \mid_x$

■

Como construir o produto cruzado neste ambiente mais geral? Começamos definindo uma espécie de $l_1(G)$:

Definição 4.5. *Dado $\alpha_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ uma ação parcial, onde D_t é ideal fechado de A, seja $\mathcal{L} = \{\sum_{t\in G} a_g\delta_g : a_g \in D_g \text{ e } \sum_{t\in G} \|a_g\| < \infty\} \subseteq l_1(G, A)$. Para $a = (a_t)_{t\in G} \in \mathcal{L}$ e $b = (b_t)_{t\in G} \in \mathcal{L}$ defina as operações de multiplicação e convolução por:*

$$(a * b)_\gamma = \sum_{t\in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma})$$
$$(a^*)_\gamma = \alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}})$$

Estas operações estão bem definidas??
$a * b$ esta bem definida?

i A série $\sum_{t\in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma})$ converge $\forall\gamma$?

Vejamos:

$\sum_{t\in G} \|\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma})\|$

$= \sum_{t\in G} \|\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma}\|$ pois como α_t é *-isomorfismo podemos utilizar 1.14.

$\leq \sum_{t\in G} \|\alpha_{t^{-1}}(a_t)\|\|b_{t^{-1}\gamma}\|$

$= \sum_{t\in G} \|a_t\|\|b_{t^{-1}\gamma}\|$ utilizando 1.14 novamente.

$\leq \sum_{t\in G} \|a_t\|\|b\| \leq \|a\|\|b\| \leq \infty$

ii $(a*b)_\gamma \in D_\gamma$?

Note que $\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma} \in D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}\gamma}$ pois D_t é ideal para todo t.

Como α_t é ação parcial, $\alpha_t(D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}\gamma}) = D_t \cap D_\gamma$

Logo $\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma}) \in D_\gamma \quad \forall t$. Ou seja, $(a*b)_\gamma \in D_\gamma$

iii $(a*b) \in \mathcal{L}$?

$\sum_{\gamma \in G} \|(a*b)_\gamma\| = \sum_{\gamma \in G} \|\sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma})\|$

$\leq \sum_\gamma \sum_t \|\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma}\| \leq \sum_\gamma \sum_t \|a_t\|\|b_{t^{-1}\gamma}\|$

$= \sum_t \sum_\gamma \|a_t\|\|b_{t^{-1}\gamma}\| = \sum_t \|a_t\| \sum_\gamma \|b_{t^{-1}\gamma}\| = \sum_t \|a_t\|\|b\|$

$= \|a\|\|b\|$

a^* esta bem definida?

ii' $(a^*)_\gamma \in D_\gamma$? Sim, pois $(a^*)_\gamma = \alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}})$ e α_γ é um isomorfismo de $D_{\gamma^{-1}}$ em D_γ.

iii' $a^* \in \mathcal{L}$??

$\sum_{\gamma \in G} \|\alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}})\| = \sum_{\gamma \in G} \|(a^*_{\gamma^{-1}})\| = \sum_{\gamma \in G} \|(a_{\gamma^{-1}})\| = \|a\| \leq \infty$

Observação 4.6. *De iii e iii' temos que* $\|a*b\| \leq \|a\|\|b\|$ *e* $\|a^*\| = \|a\|$

Proposição 4.7. *$\mathcal{L}$ é uma *-algebra de Banach normada.*

Demonstração:

Pela observação acima, basta mostrar as propriedades algébricas:

i) Distributividade

$(a+b)*c = a*c+b*c$

$(a*c+b*c)_\gamma = \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_{t^{-1}\gamma}) + \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(b_t)c_{t^{-1}\gamma})$

$= \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t+b_t)c_{t^{-1}\gamma}) = ((a+b)*c)_\gamma$

$a*(b+c) = a*b+a*c$

$(a*b+a*c)_\gamma = \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma}) + \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)c_{t^{-1}\gamma})$

$= \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)(b_{t^{-1}\gamma} + c_{t^{-1}\gamma})) = (a*(b+c))_\gamma$

ii) Associatividade do escalar κ

$\kappa(a*b) = (\kappa a)*b$

$(\kappa(a*b))_\gamma = \kappa \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma}) = \sum_{t \in G} \alpha_t[\kappa(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma})]$

$= \sum_{t \in G} \alpha_t[(\kappa\alpha_{t^{-1}}(a_t))b_{t^{-1}\gamma})] = \sum_{t \in G} \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(\kappa a_t))b_{t^{-1}\gamma})] = ((\kappa a)*b)_\gamma$

Analogamente temos que $(\kappa(a*b))_\gamma = (a*(\kappa b))_\gamma$

iii) Associatividade.

$(a * b) * c = a * (b * c)$

Note que é suficiente demonstrarmos a associatividade para elementos da forma $a_k\delta_k$. Para isto, precisamos do seguinte lema:

Lema 4.8. *Se $\{u_i\}$ é uma aproximação da unidade para $D_{r^{-1}}$ e se a_r e b_s são elementos de D_r e D_s respectivamente, então*

$$(a_r\delta_r) * (b_s\delta_s) = \lim_i a_r\alpha_r(u_ib_s)\delta_{rs}$$

Demonstração:

Observe que

$$(a_r\delta_r)*(b_s\delta_s) = \alpha_r\big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)b_s\big)\delta_{rs} = \lim_i \alpha_r\big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)u_ib_s\big)\delta_{rs} = \lim_i a_r\alpha_r(u_ib_s)\delta_{rs}$$

∎

Agora, sejam a_r, b_s e c_t elementos de D_r, D_s e D_t respectivamente e seja $\{u_i\}$ é uma aproximação da unidade para $D_{r^{-1}}$. Então

$$(a_r\delta_r * b_s\delta_s) * c_t\delta_t = \big(\lim_i a_r\alpha_r(u_ib_s)\delta_{rs}\big) * c_t\delta_t = \lim_i \alpha_{rs}\Big(\alpha_{rs}^{-1}\big(a_r\alpha_r(u_ib_s)\big)c_t\Big)\delta_{rst}$$

Observe que $a_r\alpha_r(u_ib_s) \in D_r \cap D_{rs}$ e portanto $\alpha_{rs}^{-1}\big(a_r\alpha_r(u_ib_s)\big) \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$. Se $\{v_j\}$ é uma aproximação da unidade para $D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$ então o lado direito da equação acima é igual a

$$\lim_i\lim_j \alpha_{rs}\Big(\alpha_{rs}^{-1}\big(a_r\alpha_r(u_ib_s)\big)v_jc_t\Big)\delta_{rst} = \lim_i\lim_j a_r\alpha_r(u_ib_s)\alpha_{rs}(v_jc_t)\delta_{rst} =$$

$$= \lim_i\lim_j a_r\alpha_r(u_ib_s)\alpha_r\big(\alpha_s(v_jc_t)\big)\delta_{rst} = \lim_i\lim_j a_r\alpha_r\big(u_ib_s\alpha_s(v_jc_t)\big)\delta_{rst}$$

$$= \lim_i\lim_j a_r\alpha_r\Big(\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(u_ib_s)v_jc_t\big)\Big)\delta_{rst}$$

note que $u_ib_s \in D_{r^{-1}} \cap D_s$ e portanto $\alpha_{s^{-1}}(u_ib_s) \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$. Assim o lado direito da equação acima é igual a

$$\lim_i a_r\alpha_r\Big(\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(u_ib_s)c_t\big)\Big)\delta_{rst}$$

Agora, suponha que $b_s = b_s'b_s''$ onde b_s' e b_s'' pertencem a D_s. Com isto, a expressão acima é igual a

$$\lim_i \alpha_r\Big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(u_ib_s')\alpha_{s^{-1}}(b_s'')c_t\big)\Big)\delta_{rst}$$

$$= \lim_i \alpha_r\Big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)u_ib_s'\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(b_s'')c_t\big)\Big)\delta_{rst}$$

$$= \alpha_r\Big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)b_s'\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(b_s'')c_t\big)\Big)\delta_{rst} = \alpha_r\Big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(b_s)c_t\big)\Big)\delta_{rst}$$

Por outro lado,

$a_r\delta_r * (b_s\delta_s * c_t\delta_t) = a_r\delta_r * \alpha_s(\alpha_s^{-1}(b_s)c_t)\delta_{st} = \alpha_r\Big(\alpha_{r^{-1}}(a_r)\alpha_s\big(\alpha_{s^{-1}}(b_s)c_t\big)\Big)\delta_{rst}$

Logo, mostramos que $(a_r\delta_r * b_s\delta_s) * c_t\delta_t = a_r\delta_r * (b_s\delta_s * c_t\delta_t)$ sempre que $b_s = b'_s b''_s$, onde b'_s e b''_s pertencem a D_s.

Mas, pela proposição 1.21, o conjunto $B = \{b \in D_s : b = b'b''\}$ é denso em D_s e portanto todo $b_s \in D_s$ se escreve como $b_s = \lim b_i$ onde $b_i \in B$.

Portanto $(a_r\delta_r * b_s\delta_s) * c_t\delta_t = (a_r\delta_r * \lim b_i\delta_s) * c_t\delta_t = \lim(a_r\delta_r * b_i\delta_s) * c_t = \lim a_r\delta_r * (b_i\delta_s * c_t) = a_r\delta_r * (b_s\delta_s * c_t\delta_t)$

iv) $(\kappa a)^* = \overline{\kappa}a^*$

$(\overline{\kappa}a^*)_\gamma = \overline{\kappa}(a^*)_\gamma = \overline{\kappa}\alpha_\gamma(a^*_{\gamma^{-1}}) = \alpha_\gamma(\overline{\kappa}a^*_{\gamma^{-1}}) = \alpha_\gamma(\kappa a_{\gamma^{-1}})^* = (\kappa a)^*_\gamma$

v) $a^{**} = a$

$(a^*)^*_t = \alpha_t((a^*)^*_{t^{-1}}) = \alpha_t[(\alpha_{t^{-1}}(a^*_t))^*] = \alpha_t[\alpha_{t^{-1}}((a^*_t)^*)] = a_t$

vi) $(a+b)^* = a^* + b^*$

$(a^* + b^*)_t = (a^*)_t + (b^*)_t = \alpha_t(a^*_{t^{-1}}) + \alpha_t(b^*_{t^{-1}}) = \alpha_t(a^*_{t^{-1}} + b^*_{t^{-1}})$

$= \alpha_t((a_{t^{-1}} + b_{t^{-1}})^*) = \alpha_t((a+b)^*_{t^{-1}}) = (a+b)^*_t$

vii) $(a*b)^* = b^* * a^*$

$(a*b)^*_\gamma = \alpha_\gamma((a*b)_{\gamma^{-1}}{}^*) = \alpha_\gamma[\{\sum_{t\in G}\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma^{-1}})\}^*]$

$= \alpha_\gamma[\sum_{t\in G}\alpha^*_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t)b_{t^{-1}\gamma^{-1}})] = \alpha_\gamma[\sum_{t\in G}\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma^{-1}}{}^*\alpha_{t^{-1}}(a_t{}^*))]$

$= \sum_{t\in G}\alpha_\gamma[\alpha_t(b_{t^{-1}\gamma^{-1}}{}^*\alpha_{t^{-1}}(a_t{}^*))]$

$= \sum_{t\in G}\alpha_{\gamma t}(b_{t^{-1}\gamma^{-1}}{}^*\alpha_{t^{-1}}(a_t{}^*))]$ pois $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ é ação parcial e $b_{t^{-1}\gamma^{-1}}{}^*\alpha_{t^{-1}}(a_t{}^*) \in D_{t^{-1}} \cap D_{(\gamma t)^{-1}}$

Por outro lado,

$(b^* * a^*)_\gamma = \sum_{t\in G}\alpha_t[\alpha_{t^{-1}}((b^*)_t)(a^*)_{t^{-1}\gamma}]$

$= \sum_{t\in G}\alpha_t\{\alpha_{t^{-1}}[\alpha_t(b_{t^{-1}}{}^*)]\alpha_{t^{-1}\gamma}(a_{\gamma^{-1}t}{}^*)\}$ (1)

Fazendo $\gamma^{-1}t = s$ temos que

(1)$= \sum_{s\in G}\alpha_{\gamma s}(b_{s^{-1}\gamma^{-1}}{}^*\alpha_{s^{-1}}(a_s{}^*))] = (a*b)^*_\gamma$

■

Ainda, $\mathcal{L}$ é completo, e a demonstração se faz de modo análogo ao feito na proposição 2.13.

Definição 4.9. *O* **Produto Cruzado** *de* A *por* G *pela ação* α, *denotado por* $A \rtimes_\alpha G$ *é a* C^**-algebra envolvente de* $\mathcal{L}$.

Como sempre, estamos interessados em representar o produto cruzado em algum B(H). Para isto definiremos uma representação em $\mathcal{L}$ e depois a estenderemos para o produto cruzado pela propriedade universal 1.11.

Vamos então demonstrar a:

Proposição 4.10. *$\mathcal{L}$ tem uma representação injetora (regular).*

Demonstração:

Seja $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B(H)}$ uma representação injetora de A. (existe conforme [12], página 338, cap. 12). Podemos então considerar $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B(H)}$

Queremos achar uma representação para $\mathcal{L}$.

Procedendo analogamente ao feito no capítulo 2 teríamos, para $a \in \mathrm{A}$:

$$\tilde{\pi}(a) = \begin{array}{c} \\ \\ -e- \\ -g- \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad & e & \qquad g & \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \pi(a) & & \\ & & \pi(\alpha_{g^{-1}}(a)) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

e $\lambda : \mathrm{G} \to \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$ definido por $(\lambda_h(\xi))_g = \xi_{h^{-1}g}$ para $h \in \mathrm{G}$

Lembre do capítulo 2, que $\bigoplus \mathrm{H}$ é uma notação para $\bigoplus\limits_{g\in \mathrm{G}} \mathrm{H}_g$ onde $\mathrm{H}_g \equiv$ H.

Assim para $x = \sum a_k \delta_k \in \mathcal{L}$ gostaríamos de definir $(\tilde{\pi} \times \lambda)(x)$ por $\sum \tilde{\pi}(a_k)\lambda_k$

Porém, $a_k \in D_k$ e na definição de $\tilde{\pi}(a_k)$ temos $\pi(\alpha_{g^{-1}}(a_k))$ que não esta bem definido.

Como proceder??

Uma vez que $\pi \circ \alpha_{g^{-1}}$ é representação de D_g, pela prop. 1.34, existe π_g uma representação da C*-algebra A em B(H) que estende $\pi \circ \alpha_{g^{-1}}$, ou seja, que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} D_g \arrow[r, "\alpha_{g^{-1}}"] \arrow[d] & D_{g^{-1}} \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{B(H)} \\ \mathrm{A} \arrow[urr, dotted, "\pi_g"] & & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Definamos então, $[\tilde{\pi}(a)(\xi)]_g$ por $\pi_g(a)\xi_g$, onde $\xi \in \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$.

Portanto a matriz de $\tilde{\pi}(a)$ é dada por:

$$\begin{array}{r} \\ -e- \\ -g- \\ -k- \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e & g & k \end{array} \\ \tilde{\pi}(a) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \pi(a) & & & \\ & & \pi_g(a) & & \\ & & & \pi_k(a) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Observe que D_e = A e $\alpha_e = Id$, logo $\pi_e(a) = \pi(a)$. Ainda, para $a_g \in D_g$ temos que $\pi_g(a_g) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(a_g))$.

Utilizando o mesmo λ do capítulo 2, ou seja, λ : G $\to$ B($\bigoplus$H) definido por $[\lambda_h(\xi)]_g = \xi_{h^{-1}g}$ para $h \in$ G, podemos definir $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)$, onde $a \in \mathcal{L}$.

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\pi} \times \lambda : \mathcal{L} & \to & \mathrm{B(H)} \\ \sum a_g \delta_g & \mapsto & \sum \tilde{\pi}(a_g)\lambda_g \end{array}$$

Qual a matriz de $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)$, onde $a = \sum a_g \delta_g$??

Vejamos como é a coordenada g de $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)(\xi)$ onde ξ é um vetor de B($\bigoplus$H).

$[(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)(\xi)]_g = [(\sum_{t \in \mathrm{G}} \tilde{\pi}(a_t)\lambda_t)(\xi)]_g = [\sum_t \tilde{\pi}(a_t)\lambda_t(\xi)]_g$
$= \sum_t [\tilde{\pi}(a_t)\lambda_t(\xi)]_g = \sum_t \pi_g(a_t)[\lambda_t(\xi)]_g$
$= \sum_t \pi_g(a_t)\xi_{t^{-1}g}$ fazendo $t^{-1}g = s$ temos:
$= \sum_s \pi_g(a_{gs^{-1}})\xi_s$

Assim a coordenada g, s de $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)$ é $\pi_g(a_{gs^{-1}})$ e a matriz de $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)$ é dada por:

$$\begin{array}{r} \\ -g^{-1}- \\ -e- \\ -g- \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s^{-1} & e & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \pi_{g^{-1}}(a_{g^{-1}s}) & \pi_{g^{-1}}(a_{g^{-1}}) & \pi_{g^{-1}}(a_{g^{-1}s^{-1}}) & \cdots \\ \cdots & \pi(a_s) & \pi(a_e) & \pi(a_{s^{-1}}) & \cdots \\ \cdots & \pi_g(a_{gs}) & \pi_g(a_g) & \pi_g(a_{gs^{-1}}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Agora vamos mostrar que $(\tilde{\pi} \times \lambda)$ é uma representação injetora de $\mathcal{L}$.

i) $(\tilde{\pi} \times \lambda)$ esta bem definida? Ou seja, $(\tilde{\pi} \times \lambda) \in$ B($\bigoplus$H)?

Para $a = \sum a_g \delta_g$ temos que

$\|\tilde{\pi} \times \lambda(\sum a_g \delta_g)\| = \|\sum \tilde{\pi}(a_g)\lambda_g\| \leq \sum \|\tilde{\pi}(a_g)\|\|\lambda_g\|$

$\leq \sum \|a_g\|$ pois $\tilde{\pi}$ é representação e λ é unitário.

$= \|a\| \leq \infty$

ii) É claramente linear.

iii) é multiplicativa?

Como $(\tilde{\pi}\times\lambda)$ é linear, basta mostrar que $(\tilde{\pi}\times\lambda)$ é multiplicativa para elementos da forma $a_k\delta_k$

Assim, é interessante notar que

$$\tilde{\pi}\times\lambda(a_k\delta_k) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k^{-1} & \quad k^{-1}g \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ -e- \\ -g- \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \pi(a_k) & & \\ & & \pi_g(a_k) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Queremos mostrar que $\big((\tilde{\pi}\times\lambda)(a_j\delta_j)\big)\big((\tilde{\pi}\times\lambda)(a_k\delta_k)\big)\mid_{\xi}= \tilde{\pi}\times\lambda(a_j\delta_j a_k\delta_k)\mid_{\xi}$

Sabemos que $(\alpha_j\delta_j)(\alpha_k\delta_k) = \alpha_j(\alpha_{j^{-1}}(a_j)a_k)\delta_{jk}$. Chamando a segunda parte desta igualdade de d, $a_j\delta_j$ de b e $a_k\delta_k$ de c, temos que mostrar que:

$(\tilde{\pi}\times\lambda)(b)(\tilde{\pi}\times\lambda)(c)\mid_{\xi}= (\tilde{\pi}\times\lambda)(d)\mid_{\xi}$

Assim, temos:

$\big((\tilde{\pi}\times\lambda)(b)\big)\big((\tilde{\pi}\times\lambda)(c)\big)(\xi) = \big((\tilde{\pi}\times\lambda)(b)\big)[(\tilde{\pi}\times\lambda)(c)(\xi)] =$

$$\big((\tilde{\pi}\times\lambda)(b)\big)\begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_s \pi_g(c_{gs^{-1}})\xi_s \\ \vdots \end{pmatrix}\!-g- \tag{4.4}$$

Agora, $c_{gs^{-1}} \neq 0 \iff gs^{-1} = k \iff s = k^{-1}g$ e portanto o vetor em 4.4 é igual a

$$\big((\tilde{\pi}\times\lambda)(b)\big)\begin{pmatrix} \vdots \\ \pi_g(a_k)\xi_{k^{-1}g} \\ \vdots \end{pmatrix}\!-g- \tag{4.5}$$

Chamando $\begin{pmatrix} \vdots \\ \pi_g(ak)\xi_{k^{-1}g} \\ \vdots \end{pmatrix}$ de $\tilde{\xi}$ temos que o vetor em 4.5 é igual a

$$(\tilde{\pi}\times\lambda)(b)(\tilde{\xi}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_s \pi_g(b_{gs^{-1}})\tilde{\xi}_s \\ \vdots \end{pmatrix}\!-g- \tag{4.6}$$

Agora, como $b_{gs^{-1}} \neq 0 \iff gs^{-1} = j \iff s = j^{-1}g$ temos que a equação em 4.6 é igual a

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ \pi_g(a_j)\tilde{\xi}_{j^{-1}g} \\ \vdots \end{pmatrix}\!-g- \;=\; \begin{pmatrix} \vdots \\ \pi_g(a_j)\pi_{j^{-1}g}(a_k)\xi_{k^{-1}j^{-1}g} \\ \vdots \end{pmatrix}\!-g-$$

Por outro lado,

$$(\tilde{\pi} \times \lambda)(d) \mid_{\xi} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_s \pi_g(d_{gs^{-1}})\xi_s \\ \vdots \end{pmatrix} \!\!-g- \tag{4.7}$$

Mas, $d_{gs^{-1}} \neq 0 \Longleftrightarrow gs^{-1} = jk \Longleftrightarrow s = k^{-1}j^{-1}g$, e então a equação em 4.7 é igual a

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \pi_g(d_{jk})\xi_{k^{-1}j^{-1}g} \\ \vdots \end{pmatrix} \!\!-g- \; = \begin{pmatrix} \vdots \\ \pi_g[\alpha_j(\alpha_{j^{-1}}(a_j)a_k)]\xi_{k^{-1}j^{-1}g} \\ \vdots \end{pmatrix} \!\!-g-$$

Assim, obtemos o resultado desejado se provarmos o seguinte lema:

Lema 4.11. $\pi_g(a_j)\pi_{j^{-1}g}(a_k) = \pi_g[\alpha_j(\alpha_{j^{-1}}(a_j)a_k)]$ *ou*
$\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \pi_g(d_{jk})$

Demonstração:

Lembre que π_g é extensão de $\pi \circ \alpha_{g^{-1}}$ tal que o diagrama 4.3 comuta. Ainda, se $\pi : D_{g^{-1}} \to \mathrm{B(H)}$ é degenerada, então, na linguagem do prop 1.34 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \bigoplus \mathrm{H}_0$ e $\pi_g(a)(\xi_0) = 0 \quad \forall \xi \in \mathrm{H}_0$.

Seja $\mathrm{H}_1^g = \overline{span}\{\pi(a)v : a \in D_{g^{-1}}, v \in \mathrm{H}\}$

Note que não é necessário considerar $\mathrm{H}_1^{g'} = \overline{span}\{\pi\alpha_{g^{-1}}(a)v : a \in D_g, v \in \mathrm{H}\}$ pois $\alpha_{g^{-1}}$ é um isomorfismo de D_g em $D_{g^{-1}}$, o que implica que $\mathrm{H}_1^{g'} \simeq \mathrm{H}_1^g$.

Seja P_g a projeção em H_1^g. Pelo lema 1.32 sabemos que $\pi(u_i^g) \to P_g$ fortemente, onde $\{u_i^g\}$ é uma aproximação da unidade para $D_{g^{-1}}$. Então

Lema 4.12. $\pi_g(a)P_g = \pi_g(a) = P_g\pi_g(a) \quad \forall a \in \mathrm{A}.$

Demonstração:

Note que

$\pi_g(a)P_g(v) = \pi_g(a)(\lim\limits_{i\to\infty} \pi(u_i^g)v)$

$= \lim\limits_{j\to\infty} \pi(au_j^g) \lim\limits_{i\to\infty} \pi(u_i^g)v$ conforme a definição de π_g no prop 1.34

$= \lim\limits_{j\to\infty} \lim\limits_{i\to\infty} \pi(au_j^g u_i^g)v$

$= \lim\limits_{j\to\infty} \pi(au_j^g)v$ pois $au_j^g \in D_{g^{-1}}$

$= \pi_g(a)v$

e por outro lado,

$\pi_g(a^*)P_g = \pi_g(a^*) \Rightarrow (\pi_g(a^*)P_g)^* = (\pi_g(a^*))^* \Rightarrow P_g^*(\pi_g(a^*))^* = (\pi_g(a^*))^*$

$\Rightarrow P_g\pi_g(a) = \pi_g(a)$

$\blacksquare$

Precisamos de mais um lema:

Lema 4.13. $\pi(u)\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \pi(u)\pi_g(d_{jk})$ *para* $u \in D_{g^{-1}}$

Seja $f \in$ A. Então,

$\pi(u)\pi_g(f) = \pi[\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(u))]\pi_g(f) = \pi_g(\alpha_g(u))\pi_g(f) = \pi_g(\alpha_g(u)f)$

$= \pi(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(u)f))$ pois $\alpha_g(u)f \in D_g$

Logo,

$$\pi(u)\pi_g(f) = \pi(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(u)f)) \quad \forall f \in \mathrm{A} \tag{4.8}$$

Assim, usando a igualdade acima, temos que

$\pi(u)\pi(d_{jk}) = \pi(u)\pi(\alpha_j[\alpha_{j^{-1}}(a_j)a_k]) = \pi(\alpha_{g^{-1}}[\alpha_g(u)\alpha_j(\alpha_{j^{-1}}(a_j)a_k)])$

Por outro lado,

$\pi(u)\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \pi(u)\pi_g(a_j)\pi_{j^{-1}g}(a_k) = \pi(\alpha_{g^{-1}}[\alpha_g(u)a_j])\pi_{j^{-1}g}(a_k)$

Note que $\alpha_g(u)a_j \in D_g \cap D_j$. Logo, como $\alpha_{g^{-1}}$ é ação parcial, $\alpha_{g^{-1}}[\alpha_g(u)a_j] \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}j} \subseteq D_{g^{-1}}$. Assim, usando 4.8 com $\alpha_{g^{-1}}[\alpha_g(u)a_j]$ no lugar de u e $j^{-1}g$ no lugar de g temos que o lado direito da equação acima é igual a

$\pi(\alpha_{g^{-1}j}\{\alpha_{j^{-1}g}[\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(u)a_j)]a_k\})$

e, como o produto é associativo, temos que $\pi(\alpha_{g^{-1}}[\alpha_g(u)\alpha_j(\alpha_{j^{-1}}(a_j)a_k)]) = \pi(\alpha_{g^{-1}j}\{\alpha_{j^{-1}g}[\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(u)a_j)]a_k\})$

$\blacksquare$

Finalmente, podemos demonstrar que $\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \pi_g(d_{jk})$

Seja $\{u_i\}$ uma aproximação da unidade para $D_{g^{-1}}$.

Então, por 4.13

$\pi(u_i)\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \pi(u_i)\pi_g(d_{jk})$

$\Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} \pi(u_i)\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \lim\limits_{i\to\infty} \pi(u_i)\pi_g(d_{jk})$

$\Rightarrow P_g\pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = P_g\pi_g(d_{jk})$ por 1.32

$\Rightarrow \pi_g(b_j)\pi_{j^{-1}g}(c_k) = \pi_g(d_{jk})$ utilizando 4.12

$\blacksquare$

iv) Satisfaz a propriedade da involução, ou seja, $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a^*) = ((\tilde{\pi} \times \lambda)(a))^*$

Basta mostrar para elementos da forma $a_k\delta_k$ pois:

$(\tilde{\pi} \times \lambda)[(\sum a_k\delta_k)^*] = \tilde{\pi} \times \lambda[\sum(a_k\delta_k)^*] = \sum \tilde{\pi} \times \lambda[(a_k\delta_k)^*]$

$= \sum[\tilde{\pi} \times \lambda(a_k\delta_k)]^* = [\sum \tilde{\pi} \times \lambda(a_k\delta_k)]^* = [\tilde{\pi} \times \lambda(\sum a_k\delta_k)]^*$

Lembre que $(a_k\delta_k)^* = \alpha_{k^{-1}}(a_k^*)\delta_{k^{-1}}$

Agora,

$[\tilde{\pi} \times \lambda(a_k\delta_k)]^* = (\tilde{\pi}(a_k)\lambda_k)^* = \lambda_{k^{-1}}\tilde{\pi}(a_k)^* = \lambda_{k^{-1}}\tilde{\pi}(a_k^*)$

Por outro lado,

$\tilde{\pi} \times \lambda[(a_k\delta_k)^*] = \tilde{\pi} \times \lambda(\alpha_{k^{-1}}(a_k^*)\delta_{k^{-1}}) = \tilde{\pi}(\alpha_{k^{-1}}(a_k^*))\lambda_{k^{-1}}$

Assim, para obtermos o resultado desejado, basta mostrar que

$$\tilde{\pi}(\alpha_{k^{-1}}(a_k)) = \lambda_{k^{-1}}\tilde{\pi}(a_k)\lambda_k \quad \forall a_k \in D_k \tag{4.9}$$

Denotaremos os vetores $\xi \in \bigoplus \mathrm{H}$ que são zero em todas as coordenadas, exceto na coordenada g, onde valem x, por $x\delta_g$.

Como o span$\{x\delta_g : x \in \mathrm{H}\}$ é denso em $\bigoplus \mathrm{H}$, é suficiente mostrar a igualdade 4.9 para os vetores da forma $x\delta_g$.

Vejamos,

$\tilde{\pi}(\alpha_{k^{-1}}(a_k))x\delta_g = [\pi_g(\alpha_{k^{-1}}(a_k))x]\delta_g$

Agora, note que $(\lambda_k(x\delta_g))_j = (x\delta_g)_{k^{-1}j}$, e como $(x\delta_g)_{k^{-1}j} \neq 0 \Leftrightarrow k^{-1}j = g \Leftrightarrow j = kg$, temos que $\lambda_k(x\delta_g) = x\delta_{kg}$.

Portanto,

$\lambda_{k^{-1}}\tilde{\pi}(a_k)\lambda_k(x\delta_g) = \lambda_{k^{-1}}\tilde{\pi}(a_k)(x\delta_{kg}) = \lambda_{k^{-1}}[\pi_{kg}(a_k)x]\delta_{kg} = (\pi_{kg}(a_k)x)\delta_g$

Então, para obtermos a igualdade 4.9 é suficiente mostrar que:

$$\pi_{kg}(a_k) = \pi_g(\alpha_{k^{-1}}(a_k)); \quad a_k \in D_k \tag{4.10}$$

Seja $\{v_i\}$ aproximação da unidade para $D_k \cap D_{kg}$

$\pi_{kg}(a_k) = \lim\limits_{i\to\infty} \pi_{kg}(v_i a_k)$

$= \lim\limits_{i\to\infty} \pi(\alpha_{g^{-1}k^{-1}}(v_i a_k))$ pela proposição 1.36.

$= \lim\limits_{i\to\infty} \pi(\alpha_{g^{-1}}\alpha_{k^{-1}}(v_i a_k))$ pois α é ação parcial.

$= \lim\limits_{i\to\infty} \pi_g(\alpha_{k^{-1}}(v_i a_k))$ pois $v_i a_k \in D_k \cap D_{kg} \Rightarrow \alpha_{k^{-1}}(v_i a_k) \in D_{k^{-1}} \cap D_g$

$= \lim\limits_{i\to\infty} \pi_g(\alpha_{k^{-1}}(v_i)\alpha_{k^{-1}}(a_k))$

$= \pi_g(\alpha_{k^{-1}}(a_k))$ pois $\alpha_{k^{-1}}(v_i)$ é aproximação da unidade para $D_{k^{-1}}$, $D_k \cap D_{kg} \overset{\alpha_{k^{-1}}}{\to} D_{k^{-1}} \cap D_g$

v) é injetora. Análogo ao feito na proposição 3.4.

∎

4.1 Exemplos de Produtos Cruzados por Ações Parciais

Depois de demonstrações como a da seção anterior, nada como alguns exemplos:

Exemplo 4.14. *Seja* X *um espaço topológico consistindo de* n *pontos, digamos* $\mathrm{X} = \{1, 2, .., n\}$*, seja* G *o grupo dos inteiros e* A *a* C^**-algebra* $C(\mathrm{X})$*. Se* $\Delta_{-j} = \{i \in \mathrm{X} : i + j \in \mathrm{X}\}$ *e* $h_j(i) = i + j$ *então* $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in \mathrm{G}}, \{h_t\}_{t\in \mathrm{G}})$ *é ação parcial. Quem é* $\mathrm{A}\rtimes_\alpha \mathrm{G}$ *onde* α *é a ação parcial proveniente da ação* θ*?*

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar que $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in \mathrm{G}}, \{h_t\}_{t\in \mathrm{G}})$ é ação parcial.

- É claro que Δ_j é aberto e h_j é homeomorfismo de Δ_{j-1} em Δ_j. Também é fácil ver que $\Delta_0 = \mathrm{X}$ e $h_0 = Id$.

- $h_j(\Delta_{-j} \cap \Delta_l) = \Delta_j \cap \Delta_{j+l}$
  Seja $y \in h_j(\Delta_{-j} \cap \Delta_l)$.
  Então $y = h_j(x) = x + j$ onde $x \in \Delta_{-j} \cap \Delta_l$. Agora, $y - j = x + j - j = x \in \mathrm{X}$ logo $y \in \Delta_j$ e $y - (j + l) = x + j - j - l = x - l \in X$ pois $x \in \Delta_l$. Assim, $y \in \Delta_{j+l}$

  Por outro lado, seja $x \in \Delta_j \cap \Delta_{j+l}$.
  Tome $y = x - j$. Então $x = h_j(x)$ e $y \in \Delta_{-j} \cap \Delta_l$ pois $y + j = x \in \mathrm{X}$ e $y - l = x - j - l \in \mathrm{X}$ pois $x \in \Delta_{j+l}$.

- $h_l(h_j(x)) = h_{l+j}(x), \quad x \in \Delta_{-j} \cap \Delta_{-j-l}$
  É claro.

Assim, mostramos que $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in \mathrm{G}}, \{h_t\}_{t\in \mathrm{G}})$ é ação parcial.

Quem são os Δ_j?

$$\begin{array}{cc}
\Delta_0 = \mathrm{X} & \\
\Delta_1 = \{i \in \mathrm{X} : i - 1 \in \mathrm{X}\} = \{2, \dots, n\} & \Delta_{-1} = \{i \in \mathrm{X} : i + 1 \in \mathrm{X}\} = \{1, \dots, n - 1\} \\
\Delta_2 = \{3, \dots, n\} & \Delta_{-2} = \{1, \dots, n - 2\} \\
\vdots & \vdots \\
\Delta_{n-1} = \{n\} & \Delta_{-(n-1)} = \{1\}
\end{array}$$

Ainda, $D_j = C_0(\Delta_j) \cong \mathbb{C}^{|\Delta_j|}$ e $\mathcal{L} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C_0(\Delta_j)$. Note que $\Delta_j = \emptyset$ se $|j| > n-1$.

Temos então, que a dimensão de $\mathcal{L}$ é $n+(n-1)+\ldots+1+(n-1)+\ldots+1$ $= (1+n)\frac{n}{2} + (1+n)\frac{n}{2} - n = (1+n)n - n = n^2$.

Logo, $C(\mathrm{X}) \rtimes \mathbb{Z} \cong \mathcal{L}$, pois para encontrarmos o produto cruzado, que nada mais é do que a C*-algebra envolvente de $\mathcal{L}$, não será necessário completar $\mathcal{L}$ com a norma $|||\cdot|||$, uma vez que todo espaço de dimensão finita é completo.

Um elemento $a \in \mathcal{L}$ é da forma $a_{-(n-1)}\delta_{-(n-1)} + \ldots + a_{-1}\delta_{-1} + a_0\delta_0 + a_1\delta_1 + \ldots + a_{n-1}\delta_{n-1}$ onde $a_i \in C(\Delta_i)$.

Temos o seguinte isomorfismo:

$$
\begin{array}{rcl}
g : \mathcal{L} & \rightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\
a_{-(n-1)}\delta_{-(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\delta_{n-1} & \mapsto & \begin{pmatrix}
a_0^1 & & a_{-1}^1 & & & & a_{-(n-1)}^1 \\
& \ddots & & \ddots & & & \\
a_1^2 & & \ddots & & a_{-1}^y & & \\
& \ddots & & a_0^z & & \ddots & \\
& & a_1^x & & \ddots & & a_{-1}^{n-1} \\
& \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
a_{n-1}^n & & & & a_1^n & & a_0^n
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

onde, por exemplo, a_1^x é o valor da função a_1 no ponto $x \in \Delta_1$.

A única propriedade de isomorfismo que necessita de demonstração é a multiplicação.

Como g é linear, basta mostrar que g é multiplicativa para elementos da forma $a_k\delta_k$.

Note que $\forall a \in D_k \quad a = \sum_{i \in \Delta_k} a(i)1_i$ onde $a(i) \in \mathbb{C}$ e 1_i é a função característica do ponto i, e assim, se mostrarmos que

$$g(1_x\delta_k 1_y\delta_l) = g(1_x\delta_k)g(1_y\delta_l), \quad x \in \Delta_k,\ y \in \Delta_l \tag{4.11}$$

temos o resultado desejado, pois:

$$
\begin{aligned}
g(a\delta_k b\delta_l) &= g(\sum_{i \in \Delta_k} a(i)1_i\delta_k \sum_{j \in \Delta_l} b(j)1_j\delta_l) \\
&= g(\sum_{i \in \Delta_k}\sum_{j \in \Delta_l} a(i)1_i\delta_k b(j)1_j\delta_l) \\
&= \sum_{i \in \Delta_k}\sum_{j \in \Delta_l} a(i)b(j)g(1_i\delta_k 1_j\delta_l) \\
&= \sum_{i \in \Delta_k}\sum_{j \in \Delta_l} a(i)b(j)g(1_i\delta_k)g(1_j\delta_l) \\
&= \sum_{i \in \Delta_k}\sum_{j \in \Delta_l} g(a(i)1_i\delta_k)g(b(j)1_j\delta_l)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i\in\Delta_k} g(a(i)1_i\delta_k) \sum_{j\in\Delta_l} g(b(j)1_j\delta_l)$$
$$= g(a\delta_k)g(b\delta_l)$$

Então, vamos mostrar 4.11.

Primeiro vamos calcular $1_x\delta_k 1_y\delta_y$.

Aqui, o símbolo $[x = y]$ se refere a função boleana que é 1 quando $x = y$ e 0 se $x \neq y$

$$1_x\delta_k 1_y\delta_l = \alpha_k(\alpha_k^{-1}(1_x)1_y)\delta_{k+l}$$

Porém,$\alpha_k^{-1}(1_x)\mid_{z\in\Delta_{k-1}} = 1_x \circ h_k \mid_z = 1_x(h_k(z)) = 1_x(k+z)$
$= [x = k+z] = [x-k = z] = 1_{x-k}(z)$

Assim,

$$\alpha_k^{-1}(1_x) = 1_{x-k} \tag{4.12}$$

E portanto $1_x\delta_k 1_y\delta_y = \alpha_k(1_{x-k}1_y)\delta_{k+l} = [x-k = y]\alpha_k(1_y)\delta_{k+l}$
$= [x-k = y]1_{y+k}\delta_{k+l}$ usando 4.12
$= [x = y+k]1_{y+k}\delta_{k+l} = [x = y+k]1_x\delta_{k+l}$

Por outro lado,

$g(1_x\delta_k) = e_{ij}$ ou seja a matriz que tem o 1 como única coordenada não nula, na posição ij. Note que este 1 tem que estar na diagonal k, logo $i - j = k$. Ainda, 1 é o x-ésimo elemento da diagonal, logo $i = x$.

Também, $g(1_y\delta_l) = e_{i'j'}$, onde $i' - j' = l$ e $i' = y$.

Sabemos que

$$e_{ij}e_{i'j'} = [j = i']e_{ij'} \tag{4.13}$$

Aonde esta o 1 de $e_{ij'}$?

Temos que $i - j = k$ e $i' - j' = l$. Somando estas duas equações e lembrando que neste caso $j = i'$, temos que $i - j' = k + l$. Ainda, como $i = x$ temos que 1 é o x-ésimo elemento da diagonal $k+l$ de $e_{ij'}$. Assim, o lado direito da equação 4.13 é igual a

$$g([i-k = y]1_x\delta_{k+l}) = g([x-k = y]1_x\delta_{k+l}) = g([x = y+k]1_x\delta_{k+l})$$

E portanto 4.11 esta demonstrado.

Finalmente, temos $C(\mathrm{X}) \rtimes \mathrm{G} \cong \mathcal{L} \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

■

Exemplo 4.15. *O Hodômetro.*

Sejam $\mathrm{X}_i = \{0,1\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Considere $\mathrm{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{X}_i = \prod_{\mathbb{N}} \{0,1\}$, com a topologia produto.

Note que os elementos de X são da forma $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ onde $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.

Lembre que a topologia produto é a topologia inicial tal que as projeções $P_j : X \xrightarrow{P_j} X_j$ são contínuas.

Definamos $h : X \to X$,onde $h((x_1, x_2, \ldots))$ é definida de forma que na primeira coordenada que aparece um zero é colocado 1 no seu lugar e 0 a esquerda desta coordenada. O resto é mantido. De forma mais precisa, dado $x \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, seja $i = \min\{i : x_i = 0\}$. Então,

$$h(x)_j = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j = i \\ x_j & j > i \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad h(x) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots)$$

Por exemplo:

$$h(0,0,1,0,0,1,\ldots) = (1,0,1,0,0,1,\ldots)$$
$$h(1,1,1,0,0,\ldots) = (0,0,0,1,0,\ldots)$$

Note que h age como um hodômetro de carro. Porém não como um hodômetro usual, e sim um hodômetro binário e infinito. Observe que cada iteração de h significa uma unidade de distância percorrida.

Agora, note que não podemos aplicar h para o ponto $(1,1,1,1,\ldots)$ onde todas as coordenadas são 1. Então, h é definida em

$$h : X \setminus \{(1,1,1,\ldots)\} \to X \setminus \{(0,0,0,\ldots)\}$$

Definamos então $h_n = h^n = h \circ h \circ \ldots h$ e Δ_{-n} como o domínio de h_n. Note que

$$\begin{array}{rl} \Delta_{-1} = X \setminus \{(1,1,1,\ldots)\} & \Delta_1 = X \setminus \{(0,0,0,\ldots)\} \\ \Delta_{-2} = X \setminus \{(1,1,1,\ldots),(0,1,1,1,\ldots)\} & \Delta_2 = X \setminus \{(0,0,0,\ldots),(1,0,0,\ldots)\} \\ \Delta_{-3} = X \setminus \{(1,\ldots),(0,1,1,\ldots),(1,0,1,1,\ldots)\} & \Delta_3 = X \setminus \{(0,\ldots),(1,0,\ldots),(0,1,0,0,\ldots)\} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Será que h é um homeomorfismo? Será uma ação parcial?

Sim, e a provas destes fatos são casos particulares das seguintes proposições:

Proposição 4.16. *Sejam $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i = \prod_{\mathbb{N}} \{0,1\}$, com a topologia produto e $f : U \subseteq X \to X$ uma função tal que $\forall x \in U$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, existe m tal que a enésima coordenada de $f(x)$ só depende das m primeiras coordenadas de x, ou seja, $\forall x' \in X$ tal que $x'_i = x_i$ $\forall i = 1, \ldots, m$ vale que $f(x)_n = f(x')_n$. Então f é contínua.*

Demonstração:

Queremos mostrar que dada uma vizinhança V de $f(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $f(x) \in V$ $\forall x \in U$.

Seja V um aberto que contem $f(x)$.

Se p_k são as projeções em X_k, então, por [15], pág. 243 sabemos que os abertos em X são da forma $\bigcup_{i\in I} B_i$, onde $B_i = \cap_{j=1\ldots l} p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$, ou ainda, $B_i = U_{i_1} \times \ldots U_{i_l} \times \prod_{j\neq i_k} X_j$, onde U_{i_k} são abertos em X_k

Em particular, V é da forma acima e como $f(x) \in V$, existe i_0 tal que $f(x) \in B_{i_0}$. Sem perda de generalidade, a partir de agora, vamos supor que $V = \cap_{j=1\ldots l} p_j^{-1}(U_j)$.

Agora, note que os abertos em X_k são o espaço todo, o vazio, e os conjuntos $\{0\}$ e $\{1\}$. Assim, se algum U_j for o espaço todo ou o vazio, a parcela $p_j^{-1}(U_j)$ pode ser descartada de V.

Portanto, V consiste na $\cap_{j=1\ldots g} p_j^{-1}(U_j) = U_1 \times \ldots U_g \times \prod_{k\neq j} X_k$, onde $U_j = \{0\}$ ou $U_j = \{1\}$.

Mas $f(x) \in V$, portanto $p_i(f(x)) \in U_i$ para $i = 1\ldots g$.

Assim, $U_i = \begin{cases} \{0\} & \text{se} f(x)_i = 0 \\ \{1\} & \text{se} f(x)_i = 1 \end{cases}$

Finalmente, podemos dizer que $V = \{y \in X : y_i = f(x)_i$, para $i = 1\ldots g\}$.

Agora, para cada $i = 1\ldots g$, escolha m_i satisfazendo a hipótese, ou seja, $\forall x' \in X$ tal que $x'_n = x_n\ \forall n = 1, \ldots, m_i$ vale que $f(x)_i = f(x')_i$.

Seja $M = \max\{m_1, \ldots, m_g\}$.

Considere $Q = \{x' : x'_n = x_n\ \forall n = 1\ldots M\}$.

Pelo que já foi feito, é fácil ver que Q é aberto, e Q contem x.

Ainda, se $x' \in Q$ então $f(x')_i = f(x)_i\ \forall i = 1\ldots g$.

Portanto $f(x') \in V$ e f é contínua.

■

Dados X um espaço localmente compacto, U e V abertos contidos em X e $h : U \to V$, um homeomorfismo, a proposição abaixo nos da uma forma de encontrar uma ação parcial proveniente de h. Com isto, podemos encontrar muitos exemplos de ações parciais. Em particular, a demonstração de que $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in\mathbb{Z}}, \{h_t\}_{t\in\mathbb{Z}})$ é ação parcial no exemplo 4.14 segue facilmente desta proposição.

Proposição 4.17. *Sejam X um espaço localmente compacto, U e V subconjuntos abertos de X e $h : U \to V$, um homeomorfismo. Defina $\Delta_{-n} = dom(h^n)$ e $h_n : \Delta_{-n} \xrightarrow{h^n} \Delta_n$ por h^n. Então $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in\mathbb{Z}}, \{h_t\}_{t\in\mathbb{Z}})$ é ação parcial.*

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar que Δ_n é aberto para todo n por indução.

Para $n = 0$, $\Delta_0 = \text{dom(Id.)} = X$ que é aberto.

Suponha que Δ_{-n} é aberto (hipótese de indução).

Temos que $\Delta_{-(n+1)} = \{x \in \Delta_{-n} : h^n(x) \in U\}$, pois $h^{n+1} = h(h^n)$.

Como $h^n : \Delta_{-n} \to X$ é fácil ver que $\Delta_{-(n+1)} = (h^n)^{-1}(U)$.

Portanto $\Delta_{-(n+1)}$ é aberto relativo a Δ_{-n}. Mas por hipótese, Δ_{-n} é aberto em X, logo $\Delta_{-(n+1)}$ também é aberto em X.

É claro que h_n é homeomorfismo de Δ_{-n} em Δ_n.

Para mostrar que $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in\mathbb{Z}}, \{h_t\}_{t\in\mathbb{Z}})$ é ação parcial, vamos usar a proposição 4.3 e mostrar que $h_n \circ h_m \subseteq h_{n+m}$.

Seja $x \in \text{dom}(h_n \circ h_m)$. Então, $h_n \circ h_m(x)$ esta bem definida.

Vamos dividir a demonstração em vários casos:

i) $n, m > 0$

Note que $h_n \circ h_m(x) = h^n \circ h^m(x) = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{n\times} \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{m\times}(x) = h^{n+m}(x)$

ii) $n, m < 0$

Note que $h^n \circ h^m(x) = \underbrace{h^{-1} \circ \ldots \circ h^{-1}}_{-n\times} \underbrace{h^{-1} \circ \ldots \circ h^{-1}}_{-m\times}(x) = (h^{-1})^{-(n+m)}(x)$

$= h^{n+m}(x)$

iii) $n > 0, m < 0$

Note que $h^n \circ h^m(x) = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{n\times} \underbrace{h^{-1} \circ \ldots \circ h^{-1}}_{-m\times}(x) = h^{n+m}(x)$

iv) $n < 0, m > 0$

Análogo ao caso anterior.

Assim, em todos os casos, $h^{n+m}(x)$ esta bem definido, e portanto $h_n \circ h_m \subseteq h_{n+m}$.

■

Capítulo 5

Propriedades de $C_0(\mathrm{X}) \rtimes_\alpha \mathrm{G}$, onde α é proveniente de uma ação parcial em X

Dada uma ação parcial em X, pelo exemplo 4.4, sabemos que existe uma ação parcial α em $C_0(\mathrm{X})$ associada. Gostaríamos de encontrar alguns resultados sobre o produto cruzado de $C_0(\mathrm{X})$ por α. Porém, só conseguimos encontrar resultados para uma espécie de produto cruzado reduzido, que vamos definir agora.

Se $\theta = (\{D_t\}_{t\in \mathrm{G}}, \{\alpha_t\}_{t\in\mathrm{G}})$ é uma ação parcial de G em uma C*-algebra A, então pela proposição 4.10 temos uma representação $\tilde{\pi}\times\lambda$ de $\mathcal{L}$ em $\mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$. Logo, pela propriedade universal 1.11 existe único homomorfismo $\varphi : \mathrm{A} \rtimes \mathrm{G} \to \mathrm{B}(\bigoplus \mathrm{H})$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[r, "(\tilde{\pi}\times\lambda)"] \arrow[d, hook] & \mathrm{B}(\oplus\mathrm{H}) \\
\mathrm{A} \rtimes \mathrm{G} \arrow[ur, dotted, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Observação 5.1. *Apesar de $(\tilde{\pi} \times \lambda)$ ser injetor, não é necessário que φ seja injetor.*

Observação 5.2. *Na demonstração da proposição 4.10 utilizamos o fato de* A *ter uma representação injetora π. Neste capítulo, consideraremos* A *como uma subalgebra de* B(H), *e não faremos distinção entre um elemento $a \in \mathrm{A}$ e $\pi(a) \in \mathrm{B(H)}$.*

Definição 5.3. *O* **Produto Cruzado Reduzido**, *denotado por* $\mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$, *é:*

$$\mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G} = \overline{(\tilde{\pi} \times \lambda)(\mathcal{L})}$$

Para a demonstração dos resultados obtidos no final deste capítulo, é essencial definirmos uma "esperança condicional". Vejamos:

Definição 5.4. *A* **Esperança Condicional** E

Na verdade, vamos definir uma esperança condicional E no produto cruzado $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{G}$ e outra, E_r, no produto cruzado reduzido $\mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$. Para isto, considere

$$\mathrm{A} \rtimes \mathrm{G} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{B}(\oplus \mathrm{H}_g) \xrightarrow{\delta_{ee}} \mathrm{B}(\mathrm{H}_e)$$

$$a \longmapsto \varphi(a) \longmapsto \delta_{ee}(\varphi(a))$$

onde $\delta_{ee}(\varphi(a))$ é a coordenada ee da matriz de $\varphi(a)$.

Definimos E_r em $\mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$ por $\delta_{ee}\,|_{\mathrm{A}\rtimes_r\mathrm{G}}$ e E em $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{G}$ por $E_r \circ \varphi$.

Note que $\varphi(a) \in \mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$ para todo a em $\mathrm{A} \rtimes \mathrm{G}$.

Observando a matriz de $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a)$ na proposição 4.10, temos que E_r age da seguinte forma em $(\tilde{\pi} \times \lambda)(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G} & \to & \mathrm{A} \cong \mathrm{B}(\mathrm{H}) \\ \tilde{\pi} \rtimes \lambda(\sum a_g \delta_g) & \overset{E_r}{\mapsto} & \pi(a_e) \cong a_e \end{array}$$

Note também que E age da seguinte forma em $\mathcal{L}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} \rtimes \mathrm{G} & \to & \mathrm{A} \cong \mathrm{B}(\mathrm{H}) \\ \sum a_g \delta_g & \overset{E}{\mapsto} & \pi(a_e) \cong a_e \end{array}$$

∎

Observação 5.5. *Note que E e E_r são contrativos.*

Observação 5.6. *Para grupos abelianos discretos, E também pode ser construído a partir de uma forma integral. Isto será feito no apêndice.*

É interessante saber se E_r é fiel, ou seja, se $E_r(x^*x) = 0$ implica que $x = 0$. A resposta é sim, mas para demonstrarmos isto precisamos do seguinte lema:

Lema 5.7. *Seja $T \in \mathrm{B}(\oplus \mathrm{H})$ tal que $T \geq 0$ e $T_{gg} = 0\ \forall g \in \mathrm{G}$. Então $T = 0$.*

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso 2x2. O caso geral é análogo.

Note que

$$\left\langle \begin{pmatrix} T_{gg} & T_{gh} \\ T_{hg} & T_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_g \\ \xi_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_g \\ \xi_h \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} T_{gg}(\xi_g) + T_{gh}(\xi_h) \\ T_{hg}(\xi_g) + T_{hh}(\xi_h) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_g \\ \xi_h \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$= \langle T_{gh}(\xi_h), \xi_g \rangle + \langle T_{hg}(\xi_g), \xi_h \rangle \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \xi_g \\ \xi_h \end{pmatrix}$ pois $T \geq 0$ e $T_{gg} = 0\ \forall g \in \mathrm{G}$.

Chame $\langle T_{gh}(\xi_h), \xi_g \rangle$ de a, e $\langle T_{hg}(\xi_g), \xi_h \rangle$ de b.

Assim, para $\xi_h := i\xi_h$ temos que $ia - ib \geq 0$ e para $\xi_g := i\xi_g$ temos que $-ia + ib \geq 0$.

Portanto, $ia \geq ib \geq ia$, logo, $ia = ib \Rightarrow a = b$.

Então, como $a + b \geq 0 \ \forall \xi_h, \ \xi_g$ e $a = b$ temos que $a \geq 0 \ \forall \xi_h, \ \xi_g$, ou seja,

$$\langle T_{gh}(\xi_h), \xi_g \rangle \geq 0 \quad \forall \xi_h, \ \xi_g \tag{5.1}$$

Porém, 5.1 também vale para $-\xi_h$ e portanto $\langle T_{gh}(\xi_h), \xi_g \rangle \geq 0 \quad \forall \xi_h, \ \xi_g$, o que implica que $T_{gh} = 0$.

Analogamente se prova que $T_{hg} = 0$.

■

Proposição 5.8. *E_r é fiel em* $A \rtimes_r G$, *ou seja,* $E_r(x^*x) = 0$ *implica que* $x = 0$.

Demonstração:

Primeiro vamos mostrar que $T_{gg} = \pi_g(T_{ee}) \ \forall T \in A \rtimes_r G$.

Se $T \in (\tilde{\pi} \times \lambda)(\mathcal{L})$, lembrando da matriz de T dada em 4.10, o resultado acima segue.

Se $T \in A \rtimes_r G$ então $T = \lim T_i$ onde $T_i \in \tilde{\pi} \times \lambda(\mathcal{L})$ e portanto

$$T_{gg} = \lim (T_i)_{gg} = \lim \pi_g((T_i)_{ee}) = \pi_g(\lim (T_i)_{ee}) = \pi_g(T_{ee})$$

Agora, podemos demonstrar que E_r é fiel.

Seja $T \in A \rtimes_r G$, $T \geq 0$. (lembre que $x^*x \geq 0$)

Se $E_r(T) = 0$, então $T_{ee} = E_r(T) = 0$ e pelo provado acima $T_{gg} = \pi_g(T_{ee}) = 0 \ \forall g$. Logo, pelo lema 5.7, segue que $T = 0$, e E_r é fiel.

■

Observação 5.9. *Em* $A \rtimes G$, *E não precisa ser fiel. Na verdade, E é fiel se e somente se φ é injetora.*

Demonstração:

Observe que $E(x^*x) = E_r(\varphi(x^*x)) = E_r(\varphi(x)^*\varphi(x))$ e como E_r é fiel temos que $E(x^*x) = 0$ se e somente se $\varphi(x) = 0$

■

Proposição 5.10. $||a_g\delta_g||_{A \rtimes_r G} = ||a_g\delta_g||_{A \rtimes G} = ||a_g||$

Primeiro vamos mostrar a proposição para o caso em que $g = e$, ou seja, vamos mostrar que

$$||(\tilde{\pi} \times \lambda)(a_e\delta_e)||_{A \rtimes_r G} = ||a_e|| = ||a_e\delta_e||_{A \rtimes G}$$

Lembre que a matriz de $(\tilde{\pi} \times \lambda)(a_e\delta_e)$ é dada por

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad e & \quad g \end{array} \\ \begin{array}{c} -e- \\ -g- \end{array} & \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \pi(a_e) & & \\ & & \pi_g(a_e) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Pela proposição 1.23, $\|(\tilde{\pi} \times \lambda)(a_e\delta_e)\| = \sup \|((\tilde{\pi} \times \lambda)(a_e\delta_e))_{gg}\|$ $= \sup \|\pi_g(a_e)\| \leq \|a_e\|$ $\forall g$ e como $\|\pi(a_e)\| = \|a_e\|$, temos que $\|(\tilde{\pi} \times \lambda)(a_e\delta_e)\| = \|a_e\|$.

Agora, $\|a_e\delta_e\|_{A \rtimes G} = \sup\{\|\pi(a_e\delta_e)\| : \pi$ é representação de $\mathcal{L}\} \leq$
$\leq \|a_e\delta_e\| = \|a_e\|$.
Mas, $(\tilde{\pi} \times \lambda)$ é representação de $\mathcal{L}$, e $\|\tilde{\pi} \times \lambda(a_e\delta_e)\| = \|a_e\|$.
Logo, $\|a_e\delta_e\|_{A \rtimes G} = \|a_e\|$

Agora estamos em condições de demonstrar a proposição. Note que:
$\|a_g\delta_g\|^2 = \|(a_g\delta_g)(a_g\delta_g)^*\| = \|(a_g\delta_g)(\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)\delta_{g^{-1}}\|$
$= \|\alpha_g[\alpha_{g^{-1}}(a_g)\alpha_{g^{-1}}(a_g^*)]\delta_e\| = \|a_g a_g^*\delta_e\|$
$= \|a_g a_g^*\|$ pelo feito acima para o caso $g = e$
$= \|a_g\|^2$

■

Seja α a ação proveniente de uma ação parcial $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$ em um espaço localmente compacto de Hausdorff conforme o exemplo 4.4, ou seja, $D_t = C_0(\Delta_t)$ e $\begin{array}{rcl} \alpha_t : D_{t^{-1}} & \to & D_t \\ f & \mapsto & f \circ h_t^{-1} \end{array}$

Queremos encontrar propriedades de $C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G}$ a partir de propriedades da ação parcial $\theta = (\{\Delta_t\}_{t\in G}, \{h_t\}_{t\in G})$. Uma das propriedades de θ em que estamos interessados é quando ela é topologicamente livre ou não.

Definição 5.11. *A ação parcial θ é* **Topologicamente livre** *se, $\forall t \in \mathrm{G} \setminus \{e\}$ o conjunto $F_t := \{x \in \Delta_{t^{-1}} : h_t(x) = x\}$ tem interior vazio.*

Observação 5.12. *F_t pode não ser fechado em relação a X, porém é fechado relativo a $\Delta_{t^{-1}}$. Ainda, $F_t = F_{t^{-1}}$*

Demonstração:

Por exemplo, se $h_t = Id.$ então $F_t = \Delta_{t^{-1}}$ que não precisa ser fechado.

Agora, seja $x_i \in F_t$ tal que $x_i \to x \in \Delta_{t^{-1}}$. Então $h_t(x_i) \to h_t(x)$ e $h_t(x_i) = x_i \to x$. Logo $h_t(x) = x$.

Claramente $F_t = F_{t^{-1}}$.

■

Proposição 5.13. *A ação parcial θ em X é topológicamente livre se e somente se para todo subconjunto finito $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ de $\mathrm{G}\setminus\{e\}$, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} F_{t_i}$ tem interior vazio.*

Demonstração:

Conforme a definição 1.37, é suficiente mostrar que $\forall t \in \mathrm{G} \setminus \{e\}$ o conjunto F_t é raro. Depois, basta usar a proposição 1.38 que nos diz que a união finita de conjuntos raros é um conjunto raro.

Como F_t é fechado relativo a $\Delta_{t^{-1}}$, podemos escrever $F_t = C \cap \Delta_t$, com C um fechado em X

Suponha que $\exists V \subset \overline{F_t}$ aberto.

Então,

$V \subset \overline{F_t} = \overline{C \cap \Delta_t} \subset \overline{C} \cap \overline{\Delta_t} = C \cap \overline{\Delta_t}$

Assim,

$V \cap \Delta_t \subset C \cap \Delta_t = F_t$

Portanto, como $V \cap \Delta_t$ é aberto contido em F_t e θ é topologicamente livre, temos que $V \cap \Delta_t = \emptyset$

Agora, já que V e Δ_t são abertos disjuntos, cada um é disjunto do fecho do outro, ou seja, $V \cap \overline{\Delta_t} = \emptyset$ e $\overline{V} \cap \Delta_t = \emptyset$.

Mas,$V \subset \overline{F_t} \subset C \cap \overline{\Delta_t} \subset \overline{\Delta_t}$.

Então $V = \emptyset$

Logo, F_t é raro.

■

Para obtermos o teorema principal desta dissertação, precisamos primeiro de alguns resultados:

Proposição 5.14. *Seja $t \in$ G $\setminus \{e\}$, $f \in D_t$ e $x_0 \notin F_t$. Então, $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, g \in C_0$(X) tal que:*

i) $g(x_0) = 1$,

ii) $\|g(f\delta_t)g\| \leq \epsilon$,

iii) $0 \leq g \leq 1$

Demonstração:

Dividiremos a prova em dois casos, dependendo se $x_0 \in dom(h_{t^{-1}}) = \Delta_t$ ou não:

i $x_0 \notin \Delta_t$ Seja $K := \{x \in \Delta_t : |f(x)| \geq \epsilon\}$

Estamos na situação da proposição 1.51. Logo K é um subconjunto compacto de Δ_t e $x_0 \notin K$. Ainda, pela proposição 1.43,

$\exists\, g \in C_0(\mathrm{X})$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(x_0) = 1$ e $g(K) = 0$

Ainda,

$\|g\delta_0(f\delta_t)g\delta_0\| \leq \|g\delta_0 f\delta_t\|\ \|g\delta_0\| \leq \|g\delta_0 f\delta_t\| = \|\alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(g)f)\delta_{et}\| = \|gf\delta_t\|$

$= \|gf\| \leq \epsilon$ pois, $gf = \begin{cases} 0 & x \in K \\ 0 & x \notin K \\ \leq \epsilon & x \in \Delta_t \setminus K \end{cases}$

ii $x_0 \in \Delta_t$

Então $h_{t^{-1}}(x_0)$ esta bem definido e é diferente de x_0 ($x_0 \notin F_t$).

Como X é Hausdorff, existem abertos V_1 e V_2 tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $x_0 \in V_1$ e $h_{t^{-1}}(x_0) \in V_2$.

Podemos assumir que $V_1 \subset \Delta_t$ e $V_2 \subset \Delta_{t^{-1}}$

Seja $V := V_1 \cap h_t(V_2)$.

Como $x_0 \in V \subset V_1$ e $h_{t^{-1}}(V) \subset V_2$, segue que

$$h_{t^{-1}}(V) \cap V = \emptyset \tag{5.2}$$

Usando a proposição 1.43 para x_0 e $X \setminus V$ temos que existe $g \in C_0(X)$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g(x_0) = 1$ e $g(X \setminus V) = 0$.

Falta mostrar que $\|g\delta_e(f\delta_t)g\delta_e\| \leq \epsilon$.

Note que $g\delta_e(f\delta_t)g\delta_e = (\alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(g)f)\delta_{et}) \cdot (g\delta_e) = gf\delta_t \cdot g\delta_e = \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(gf)g)\delta_t$

Então, como suporte de $\alpha_{t^{-1}}(gf) \subseteq h_{t^{-1}}(V)$ (faremos a demonstração logo abaixo) e suporte de $g \subseteq V$, 5.2 implica que $g\delta_e(f\delta_t)g\delta_e = 0$.

Suporte de $\alpha_{t^{-1}}(gf) \subseteq h_{t^{-1}}(V)$ pois, se $x \in supp(\alpha_{t^{-1}}(gf))$, então $\alpha_{t^{-1}}(gf)\mid_x \neq 0$

Mas, $0 \neq \alpha_{t^{-1}}(gf)\mid_x = gf(h_t(x)) = g(h_t(x)) \cdot f(h_t(x))$.

Logo $g(h_t(x)) \neq 0$, o que implica em $h_t(x) \in V \Rightarrow x \in h_{t^{-1}}(V)$.

■

Lema 5.15. *Se $(C_0(X), G, \alpha)$ é uma ação parcial topologicamente livre, então $\forall c \in C_0 \rtimes_r G$ e $\forall \epsilon > 0$, existe $h \in C_0(X)$ tal que*

i $\|hE(c)h\| \geq \|E(c)\| - \epsilon$

ii $\|hE(c)h - hch\| \leq \epsilon$

iii $0 \leq h \leq 1$

Demonstração:

Suponha que c é uma combinação linear finita da forma $c = \sum_{t \in \Gamma} a_t\delta_t$, onde Γ é um subconjunto finito de G

Neste caso, $E_r(c) = a_e$ e definimos $a_e = 0$ se $e \notin \Gamma$.

Seja $V = \{x \in X : |a_e(x) > \|a_e\| - \epsilon\}$.

Note que V é diferente de vazio pela definição de norma e aberto.

Então, $\exists\ x_0 \in V$ tal que $x_0 \notin F_t$ $\forall t \in \Gamma \setminus \{e\}$ pois, se supormos por absurdo que $\forall x \in V$, $x \in F_t$ para algum $t \in \Gamma$ temos que $V \subset \bigcup_{t \in \Gamma} F_t$. Porém V é aberto e isto contraria a proposição 5.13 pois α é topologicamente livre.

Assim, com a_t no lugar de f na proposição 5.14, segue que $\forall \epsilon > 0$ e $\forall t \in \Gamma$ existem funções h_t satisfazendo:

$$h_t(x_0) = 1, \quad \|h_t(a_t\delta_t)h_t\| \leq \frac{\epsilon}{|\Gamma|} \quad \text{e} \quad 0 \leq h_t \leq 1$$

Seja $h = \prod_{t \in \Gamma \setminus \{e\}} h_t$

Então

i $\|ha_eh\| = sup|ha_eh(x)| \geq |h(x_0)a_e(x_0)h(x_0)| = |a_e(x_0)| > \|a_e\| - \epsilon$

ii $\|ha_eh - hch\| = \|ha_eh - h\sum_{t\in\Gamma} a_t\delta_t\ h\| = \| \sum_{t\in\Gamma\setminus\{e\}} ha_t\delta_t h\|$

$\leq \sum_{t\in\Gamma\setminus\{e\}} \|ha_t\delta_t h\| = \sum_{t\in\Gamma\setminus\{e\}} \|(\prod_{t\in\Gamma\setminus\{e\}} h_t)a_t\delta_t \prod_{t\in\Gamma\setminus\{e\}} h_t\|$

$\leq \sum_{t\in\Gamma\setminus\{e\}} \|h_t a_t\delta_t h_t\|$ pois $0 \leq h_t \leq 1 \forall t$

$< \epsilon$

iii Ok.

Assim a proposição esta provada para todo elemento da forma $\sum_{t\in\Gamma} a_t\delta_t$, onde Γ é um subconjunto finito de G. Usando o fato de que estes elementos formam um conjunto denso em A $\rtimes_r$ G vamos provar a proposição para todo elemento $d \in$ A $\rtimes_r$ G.

Seja $d \in$ A $\rtimes_r$ G.

Então, existe $c = \sum_{t\in\Gamma} a_t\delta_t$ tal que $\|d - c\| < \frac{\epsilon}{3}$

Pare este c, a proposição vale, e portanto para $\frac{\epsilon}{3}$ existe h satisfazendo i, ii, iii. Vamos mostrar que h satisfaz i, ii, iii, para d.

i Análogo ao feito anteriormente para c. Apenas note que $E_r(d) \in C_0(\mathrm{X})$.

ii $\|hE_r(d)h \ - hdh| = \|hE_r(d-c)h + hE_r(c)h - hdh + hch - hch\|$

$= \|hE_r(d-c)h + hE_r(c)h - hch + h(c-d)h\|$

$\leq \|hE_r(d-\mathrm{c})\| + \|h + hE_r(c)h - hch\| + \|c - d\|$

$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

iii ok

■

Com estes resultados, estamos em condições de provar o teorema principal deste trabalho, que vai nos dar algumas propriedades de $C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r$ G.

Teorema 5.16. *[1] Suponha $(C_0(\mathrm{X}), \mathrm{G}, \alpha)$ é uma ação parcial topologicamente livre. Se I é um ideal de $\mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$ com $\mathrm{I} \cap C_0(\mathrm{X}) = \{0\}$, então $\mathrm{I} = \{0\}$. Uma representação do produto cruzado reduzido $C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G}$ é fiel se e somente se é fiel em $C_0(\mathrm{X})$.*

Demonstração:

Sejam $q : C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G} \xrightarrow{q} \frac{C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G}}{I}$ a aplicação quociente e $a \in I$ um elemento positivo ($a \geq 0$). É claro que $q(a) = 0$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, escolha $h \in C_0(\mathrm{X})$ satisfazendo as condições i, ii, iii, do lema 5.15.

Então,

$\|q(hE_r(a)h)\| = \|q(hE_r(a)h) - q(hah)\|$ pois $hah \in I$

$= \|q(h(E_r(a) - a)h)\| \leq \epsilon$ pela proposição 5.15.

Como $I \cap C_0(\mathrm{X}) = 0$, q é injetor em $C_0(\mathrm{X})$ e pela proposição 1.14, q é isometrico em $C_0(\mathrm{X})$.

Logo,

$$\|hE_r(a)h\| = \|q(hE_r(a)h)\| \leq \epsilon$$

e pelo lema 5.15,

$$\|hE_r(a)h\| \geq \|E_r(a)\| - \epsilon$$

Assim, $\|E_r(a)\| \leq 2\epsilon\ \forall \epsilon$ e então $E_r(a) = 0$.

Como E_r é fiel no produto cruzado reduzido, $E_r(a) = 0$ implica que $a = 0$ e portanto $I = \{0\}$.

Agora, seja $\pi : C_0 \rtimes_r \mathrm{G} \to \mathrm{B(H)}$ um representação de $C_0 \rtimes_r \mathrm{G}$.

i Se π é injetora então π é injetora em $C_0(\mathrm{X})$.

ii Se π é injetora em $C_0(\mathrm{X})$

Sabemos que $\ker(\pi)$ é um ideal e $\ker(\pi) \cap C_0(\mathrm{X}) = \{0\}$. Então, pelo provado acima, temos que $\ker(\pi) = \{0\}$ e π é injetora.

■

Nosso objetivo final é poder dizer quando o produto cruzado reduzido $C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G}$ é simples, ou seja, não possui ideais bilaterais fechados. Para isto vamos precisar da definição de uma ação parcial minimal.

Definição 5.17. *Um subconjunto V de X é* **invariante** *pela ação parcial θ em X se $h_s(V \cap \Delta_{s^{-1}}) \subset V\ \forall s \in \mathrm{G}$. Um ideal J em $C_0(\mathrm{X})$ é* **invariante** *pela ação parcial correspondente α em $C_0(\mathrm{X})$ se $\alpha_t(J \cap D_{t^{-1}}) \subset J\ \forall t \in \mathrm{G}$*

Proposição 5.18. *Se U é um conjunto aberto invariante, então o ideal associado $C_0(U)$ é invariante, e reciprocamente, para todo ideal invariante, existe um conjunto aberto invariante associado.*

Demonstração:

Primeiro suponha U invariante.

Devemos mostrar que $\alpha_t(C_0(U) \cap D_{t^{-1}}) \subseteq C_0(U)$ $\forall t \in G$.

Mas $C_0(U) \cap D_{t^{-1}} = C_0(U) \cap C_0(\Delta_{t^{-1}}) = C_0(U \cap \Delta_{t^{-1}})$ pela proposição 1.49.

Assim, vamos mostrar que $\alpha_t(C_0(U \cap \Delta_{t^{-1}})) \subseteq C_0(U)$

Seja $f \in C_0(U \cap \Delta_{t^{-1}})$.

Então $\alpha_t(f) = f \circ h_{t^{-1}} \in C_0(U)$, pois

- É contínua já que α_t é a composição de duas funções contínuas.

- Dado $\epsilon > 0$, como $f \in C_0(U \cap \Delta_{t^{-1}})$, existe um compacto K contido em $U \cap \Delta_{t^{-1}}$ tal que para todo $x \in (U \cap \Delta_{t^{-1}}) \setminus K$, $|f(x)| < \epsilon$.

Assim, $h_t(K)$ é compacto e $h_t(K) \subset U$ pois U é invariante.

Ainda, se $x \in U \setminus h_t(K)$ então $|\alpha_t(f)(x)| = |f(h_{t^{-1}}(x)| < \epsilon$ pois $h_{t^{-1}}(x) \notin K$.

Portanto $C_0(U)$ é invariante.

Agora, suponha que I é um ideal invariante.

Pelo Exercício 3 capítulo 11 de [12], sabemos que $I = C_0(U)$, onde U é aberto.

Vamos mostrar que U é invariante, ou seja $h_t(U \cap \Delta_{t^{-1}}) \subset U$ $\forall t \in$ G.

Seja $x \in U \cap \Delta_{t^{-1}}$. Suponha que $h_t(x) \notin U$.

Como X é localmente compacto, por [15], página 198, existe uma vizinhança compacta K de x, tal que $K \subseteq U$. Vamos chamar o interior de K por $\text{int}(K)$

Pelo teorema de Urysohn, existe $f \in C(\mathrm{X})$ tal que $f|_x = 1$ e $f|_{\text{int}(K)^c} = 0$.

Note que $f \in C_0(U)$.

Como I é invariante, $\alpha_t(f) \in I$, ou seja, $f \circ h_t \in C_0(U)$ $\forall t \in$ G.

Em particular, $f \circ h_{t^{-1}} \in C_0(U)$. Mas, note que

$$0 = f \circ h_{t^{-1}}(h_t(x)) = f(x) = 1$$

o que é um absurdo, proveniente da hipótese de que $h_t(x) \notin U$.

∎

Proposição 5.19. *Se V é um subconjunto invariante de* X *então $\overline{V}$ também é invariante.*

Demonstração:

Queremos mostrar que $h_s(\overline{V} \cap \Delta_{s^{-1}}) \subset \overline{V}$ $\forall s \in$ G.

Seja $v \in \overline{V} \cap \Delta_{s^{-1}}$. Então $v \in \Delta_{s^{-1}}$ e $v = \lim v_i$, onde $v_i \in V$.

Como $\Delta_{s^{-1}}$ é aberto, a partir de algum índice os v_i tem que pertencer a $\Delta_{s^{-1}}$. Vamos então supor, sem perda de generalidade, que $v_i \in \Delta_{s^{-1}}$.

Agora notemos que $h_s(v) = h_s(\lim v_i) = \lim h_s(v_i)$. Como V é invariante, temos que $h_s(v_i) \in V \; \forall i$ e portanto $h_s(v) \in \overline{V}$.

■

Proposição 5.20. *Um subconjunto $V \subseteq$ X é invariante se e somente se seu complementar também é.*

Demonstração:

Seja V um subconjunto invariante de X. Então $h_s(V \cap \Delta_{s^{-1}}) \subset V \; \forall s \in$ G.

Suponha que V^c não é invariante. Então existem $t \in$ G e $x \in V^c \cap \Delta_{t^{-1}}$ tais que $h_t(x) \in V$.

Note que $h_t(x) \in V \cap \Delta_t$ e como V é invariante temos que $h_{t^{-1}}(h_t(x)) \in V$. Mas $h_{t^{-1}}(h_t(x)) = x$ e portanto $x \in V$ o que é uma contradição.

■

Definição 5.21. *A ação parcial θ em* X *é* **minimal** *se não existem subconjuntos abertos de* X*, θ invariantes; a não ser $\emptyset$ e* X*, ou equivalentemente se a ação parcial α em C_0(X) não tem ideais próprios invariantes não triviais.*

Observação 5.22. *Na definição acima, podemos substituir subconjuntos abertos de* X *por subconjuntos fechados de* X.

No próximo capítulo estaremos interessados em mostrar que a ação parcial proveniente do Hodômetro, 4.15, é minimal. Para isto vamos precisar de uma equivalência para o conceito de minimalidade através de órbitas. Vejamos:

Definição 5.23. *Seja $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in \mathrm{G}}, \{h_t\}_{t \in \mathrm{G}})$ uma ação parcial em* X*. A* **Órbita** *de um elemento $x \in$ X é definida como o conjunto*

$$O(x) = \{h_s(x) : s \in \mathrm{G} \text{ e } \Delta_{s^{-1}} \ni x\}$$

Proposição 5.24. *Uma ação parcial θ em* X *é minimal se e somente se $O(x)$ é densa em* X *para todo $x \in$ X.*

Demonstração:

Suponhamos que θ é minimal.

Seja $x \in$ X. Vamos mostrar $O(x)$ é invariante, isto é, $h_s(O(x) \cap \Delta_{s^{-1}}) \subseteq O(x) \; \forall s \in$ G.

Seja $h_t(x) \in O(x) \cap \Delta_{s^{-1}}$. Então $h_t(x) \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_t$ e $x \in \Delta_{t^{-1}}$. Portanto

$$x \in h_{t^{-1}}(\Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_t) = \Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_{t^{-1}s^{-1}}$$

Logo $h_s(h_t(x)) = h_{st}(x)$ e portanto pertence a órbita de x.

Mostramos então que $O(x)$ é invariante. Pela proposição 5.19, $\overline{O(x)}$ também é invariante. Como θ é minimal segue que $\overline{O(x)} = \mathrm{X}$.

Suponhamos agora que $O(x)$ é densa em X para todo x.

Seja V um subconjunto fechado invariante de X. Se $V \neq \emptyset$ então existe $x \in V$.

Como V é invariante, $O(x) \subseteq V$ e portanto $\overline{O(x)} \subseteq \overline{V} = V$.

Mas, por hipótese, $\overline{O(x)} = \mathrm{X}$ e então $\mathrm{X} \subseteq V$. Assim,

$$\mathrm{X} = V$$

e θ é minimal.

■

Lema 5.25. *Seja* I *ideal fechado de* $\mathrm{A} \rtimes_r \mathrm{G}$. *Então* $A \cap \mathrm{I} \trianglelefteq \mathrm{A}$ *é invariante.*

Demonstração:

Queremos mostrar que $\alpha_g(\mathrm{A} \cap I \cap D_{g^{-1}}) \subseteq \mathrm{A} \cap I \quad \forall g \in \mathrm{G}$

Seja $a \in \mathrm{A} \cap I$. $(a \cong a\delta_e)$

Vamos mostrar que se $a \in D_{g^{-1}}$ então $\alpha_g(a) \in \mathrm{A} \cap I$.

Sejam u_i uma aproximação da unidade em D_g e v_j uma aproximação da unidade em $D_{g^{-1}}$.

Note que $(u_i\delta_g)(a\delta_e)(v_j\delta_{g^{-1}}) \in A \cap I$.

Ainda, $(u_i\delta_g)(a\delta_e)(v_j\delta_{g^{-1}}) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u_i)a)\delta_g v_j \delta_{g^{-1}}$

$= (u_i\alpha_g(a)\delta_g)v_j\delta_{g^{-1}} = \alpha_g[\alpha_{g^{-1}}(u_i\alpha_g(a))v_j]\delta_e$

$= u_i\alpha_g(a)\alpha_g(v_j)\delta_e \in \mathrm{A} \cap I$

Assim, $\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty} u_i\alpha_g(a)\alpha_g(v_j)\delta_e \in \mathrm{A} \cap I$.

Mas $\lim_{j\to\infty}\lim_{i\to\infty} u_i\alpha_g(a)\alpha_g(v_j)\delta_e = \lim_{j\to\infty}\alpha_g(av_j)\delta_e$

$= \alpha_g(a)\delta_e$.

Portanto, $\alpha_g(a) \in \mathrm{A} \cap I$.

■

Observação 5.26. *No lema acima, quando falamos de* A, *usamos a indentificação* $\mathrm{A} \cong \mathrm{A}\delta_e$.

Corolário 5.27. *Se uma ação parcial é topologicamente livre e minimal então o produto cruzado reduzido associado é simples.*

Demonstração:

Seja I um ideal fechado de $C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G}$.

Pelo lema 5.25, $I \cap C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G}$ é invariante e como a ação é minimal, $I \cap C_0(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathrm{G} = \{0\}$.

Logo, pelo teorema 5.16, temos que $I = \{0\}$.

■

Capítulo 6

Aplicações dos Resultados do Capítulo Anterior para alguns casos particulares

Sejam X um espaço de Hausdorff compacto, σ um homeomorfismo em X, $\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ e β um automorfismo em $C(\mathrm{X})$ definido por $\begin{array}{rcl} \beta : C(\mathrm{X}) & \to & C(\mathrm{X}) \\ f & \mapsto & f \circ \sigma^{-1} \end{array}$

Vamos definir uma ação do grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$ em $C(\mathrm{X})$ por

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{Z} & \to & Aut(C(\mathrm{X})) \\ n & \mapsto & \beta^n \end{array}$$

Agora podemos construir $C(\mathrm{X}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Nosso objetivo é mostrar que se (X, σ) é topologicamente livre e minimal, então $C(\mathrm{X}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ é simples.

Definição 6.1. (X, σ) *é topologicamente livre se o conjunto* $F_n = \{x \in \mathrm{X} : \sigma^n x = x\}$ *não contem ponto interior para todo* n.

Definição 6.2. (X, σ) *é minimal se e somente se* $\forall F \subseteq \mathrm{X}$*,* F *fechado, invariante por* σ *(isto é,* $\sigma(F) = F$*), então* $F = \emptyset$ *ou* $F = \mathrm{X}$.

Vamos agora, considerar σ como uma ação parcial θ de $\mathbb{Z}$ em X onde $\Delta_n = \mathrm{X}\ \forall n$ e $h_n = \sigma^n\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 6.3. *Suponhamos que* (X, σ) *seja topologicamente livre e minimal. Então* θ *é topologicamente livre e minimal conforme as definições 5.13 e 5.21 do capítulo anterior.*

Demonstração:

É claro que se (X, σ) é topologicamente livre então θ é topologicamente livre.

Agora suponha que (X, σ) é minimal.

Seja U um aberto invariante de X conforme a definição 5.17.

Observe que $h_n(U \cap \Delta_{-n}) = h_n(U \cap \mathrm{X}) = h_n(U)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Então, como U é invariante, temos que $h_n(U) \subset U\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $h_{-n}(U) \subset U$, o que implica que $U \subset h_n(U)$. Logo $h_n(U) = U\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, note que $h_n(\mathrm{X} \setminus U) = \mathrm{X} \setminus h_n(U) = \mathrm{X} \setminus U$. Logo, $\mathrm{X} \setminus U$ é invariante por h_n para todo $n \in \mathbb{Z}$ e como (X, σ) é minimal, temos que $\mathrm{X} \setminus U = \emptyset$ ou $\mathrm{X} \setminus U = \mathrm{X}$.

Assim, $U = \emptyset$ ou $U = \mathrm{X}$.

■

Podemos agora utilizar os resultados do capítulo anterior, para a ação parcial proveniente da ação θ como no exemplo 4.4. Observe porém, que nossos resultados são para o produto cruzado reduzido e para $C_0(\mathrm{X})$.

Como estamos interessados no caso em que X é compacto, temos que $C_0(\mathrm{X}) = C(\mathrm{X})$. Vamos mostrar que o produto cruzado reduzido $C(\mathrm{X}) \rtimes_r \mathbb{Z}$ é isomorfo ao produto cruzado $C(\mathrm{X}) \rtimes \mathbb{Z}$ e portanto os resultados do capítulo anterior podem realmente ser aplicados para $C(\mathrm{X}) \rtimes \mathbb{Z}$. Para fazer esta demonstração, precisamos primeiro da seguinte proposição:

Proposição 6.4. *A esperança condicional E é fiel em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, onde A é uma C^*-algebra.*

Demonstração:

Seja $a \in \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ tal que $E(a^*a) = 0$ e seja ψ um funcional positivo em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$.

Utilizando as notações do apêndice e lembrando a definição 7.12, temos que $E(a^*a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(a^*a)\, d\theta$ e portanto,

$$0 = \psi\Big(\int_0^{2\pi} \widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(a^*a)\ d\theta \Big) = \int_0^{2\pi} \psi\big(\widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(a)^* \widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(a)\big)\ d\theta$$

o que implica que $\psi\big(\widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(a^*a)\big) = 0\ \forall \theta$, pois ψ é um funcional positivo ($\psi(a^*a) \geq 0\ \forall a$).

Para $\theta = 0$ temos que $\psi(a^*a) = 0$ para todo funcional positivo. Pelo teorema 12.39 da página 336 de [12], existe um funcional positivo Ψ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ tal que $\Psi(a^*a) = \|a\|^2$. Como $\Psi(a^*a) = 0$ segue que $a = 0$.

■

Proposição 6.5. *Se A é uma C^*-algebra então existe um isomorfismo entre $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ e $\mathrm{A} \rtimes_r \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

Do capítulo anterior, temos um homomorfismo sobrejetor

$$\varphi : \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{A} \rtimes_r \mathbb{Z}$$

Vamos mostrar que φ é injetor e portanto φ é um isomorfismo. Lembre que E é definido como $E = E_r \circ \varphi$.

Seja $b \in A \rtimes \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(b) = 0$. Então

$$0 = E_r(\varphi(b)^*\varphi(b)) = E_r(\varphi(b^*b)) = E(b^*b)$$

e pela proposição anterior $b = 0$.

■

Podemos agora enunciar a

Proposição 6.6. *Se* (X, σ) *é topologicamente livre e minimal e* α *é a ação proveniente de* σ *como no início do capítulo, então o produto cruzado* $C(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ *associado é simples.*

Demonstração:

Segue diretamente dos resultados acima e do corolário 5.27.

■

Voltando ao exemplo 4.14, onde $X = \{1, 2, .., n\}$, $\Delta_{-j} = \{i \in X : i + j \in X\}$ e $h_j(i) = i + j$, se mostrarmos que a ação parcial $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ é topologicamente livre e minimal, conforme as definições 5.13 e 5.21, então pelo corolário 5.27, $C(X) \rtimes_r \mathbb{Z}$ é simples e pela proposição 6.5 $C(X) \rtimes_r \mathbb{Z} \cong C(X) \rtimes \mathbb{Z} \cong M_n(\mathbb{C})$. Vejamos:

Proposição 6.7. *Nas notações do exemplo 4.14 a ação parcial* $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ *é topologicamente livre e minimal.*

Demonstração:

Note que $F_t := \{x \in \Delta_{t^{-1}} : h_t(x) = x\} = \emptyset \quad \forall t \in \mathbb{Z} \setminus \{e\}$ e portanto θ é topologicamente livre.

Agora, seja $U = \{i, \ldots, j\}$ um subconjunto de X tal que $U \neq X$. Seja $k \notin U$. Então $h_{k-j}(j) = k$ e portanto U não é invariante. Observe que $\Delta_{j-k} = \{i \in X : i - j + k \in X\}$ e portanto $j \in \Delta_{j-k}$.

Logo não existem subconjuntos invariantes de X e θ é topologicamente livre.

■

Proposição 6.8. *A ação parcial* $\theta = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ *no exemplo do Hodômetro, 4.15, é topologicamente livre e minimal. Portanto o produto cruzado associado é simples.*

Demonstração:

É claro que θ é topologicamente livre.

Para mostrarmos que θ é minimal vamos usar a proposição 5.24, ou seja, vamos mostrar que $O(x)$ é densa em X para todo $x \in X$.

Lembre que os elementos de X são da forma $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ onde $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ e pelo feito na proposição 4.16, sabemos que uma vizinhança V de x é da forma

$$V = \{y \in \mathrm{X} : y_i = x_i \; ; \; i = 1..n\}$$

Seja $x \in \mathrm{X}$. Vamos então mostrar que sua órbita é densa.

Seja $z \in \mathrm{X}$ outro ponto qualquer de X e seja $U = \{y \in \mathrm{X} : y_i = z_i \; ; \; i = 1..n\}$ uma vizinhança qualquer de z.

Queremos mostrar que existe um elemento da órbita de x que pertence a U.

Aplicando h^{-1} sucessivamente em x (fazendo o hodômetro voltar ao passado), podemos voltar ao ponto $x_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, \ldots)$, ou seja,

$$(x_0)_j = \begin{cases} 0 & j \leqq n \\ x_j & j > n \end{cases}$$

Agora, fazendo o hodômetro andar para frente, ou seja, aplicando h sucessivamente em x_0 um número finito de vezes, conseguimos um ponto da órbita de x que pertence a U.

■

Conclusões

O resultado central da nossa dissertação de mestrado nos diz que se uma ação parcial é topologicamente livre e minimal, então o produto cruzado reduzido associado é simples. Agora, sabendo que o produto cruzado reduzido associado é simples, o que podemos dizer sobre a ação parcial? É fácil mostrar que ela é minimal, veja por exemplo [8], porém, mesmo no caso particular de uma ação global, não podemos afirmar se ela é topologicamente livre ou não. Este é apenas um exemplo da dificuldade que temos para afirmarmos alguma coisa de interesse sobre a ação parcial que originou o produto cruzado reduzido. Portanto, a tarefa de obtermos resultados sobre o produto cruzado reduzido associado a uma ação parcial, que possam ser "traduzidos"em resultados sobre a ação parcial é um problema em aberto e muito interessante.

Também é interessante sabermos quando o produto cruzado reduzido de uma C*-algebra A por um grupo G é isomorfo ao produto cruzado. Como vimos no capítulo 6, isto está diretamente ligado ao fato da esperança condicional E ser fiel ou não, o que conforme visto no apêndice, depende do grupo G. A propriedade do grupo G de induzir uma esperança condicional fiel ou não chamamos de amenabilidade. As questões sobre amenabilidade de grupos surgiram naturalmente, porém estas não foram o objeto do presente trabalho, ficando seu estudo adiado para o futuro...

Finalmente, concluímos que não é fácil utilizarmos a relação entre a teoria de sistemas dinâmicos e C*-algebras, mas quando obtemos resultados, eles são recompensadores. Ainda, como esta é uma área relativamente nova, ainda temos muito o que estudar...

Apêndice - A Construção de E na forma integral

No capítulo 6 foi necessário utilizarmos uma construção de E que não havia sido introduzida antes. Neste apêndice, faremos esta construção de E em $A \rtimes \mathbb{Z}$, onde A é uma C*-algebra e $\mathbb{Z}$ é o grupo dos inteiros.

Seja $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1$. Defina

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha_z} : l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A}) &\rightarrow l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A}) \\ \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_n &\mapsto \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} z^n a_n \delta_n \end{aligned}$$

Proposição 7.9. *$\widehat{\alpha_z}$ é um automorfismo para todo $z \in S^1$.*

Demonstração:

Sejam $a = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_n$ e $b = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \delta_n$. Vamos denotar $[\widehat{\alpha_z}(a)]_k$ como a coordenada k de $\widehat{\alpha_z}(a)$.

- $\widehat{\alpha_z}(a)\widehat{\alpha_z}(b) = \widehat{\alpha_z}(ab)$

  Note que

  $$[\widehat{\alpha_z}(a)\widehat{\alpha_z}(b)]_k = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} [\widehat{\alpha_z}(a)]_n \alpha_n([\widehat{\alpha_z}(b)]_{k-n}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n a_n \alpha_n(z^{k-n} b_{k-n})$$
  $$= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n z^{k-n} a_n \alpha_n(b_{k-n}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^k a_n \alpha_n(b_{k-n})$$

  Por outro lado

  $$[\widehat{\alpha_z}(ab)]_k = z^k (ab)_k = z^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \alpha_n(b_{k-n})$$

- $\widehat{\alpha_z}(a)^* = \widehat{\alpha_z}(a^*)$

  Observe que

  $$[\widehat{\alpha_z}(a)^*]_k = \alpha_k([\widehat{\alpha_z}(a)]^*_{-k}) = \alpha_k((z^{-k} a_{-k})^*) = \alpha_k(\overline{z^{-k}}(a_{-k})^*) = \alpha_k(z^k (a_{-k})^*)$$

  Por outro lado,

  $$[\widehat{\alpha_z}(a^*)]_k = z^k [a^*]_k = z^k \alpha_k(a^*_{-k}) = \alpha_k(z^k (a_{-k})^*)$$

- $\|\widehat{\alpha_z}(a)\| = \|a\|$

  $$\|\widehat{\alpha_z}(a)\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|z^n a_n\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z|^n \|a_n\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| = \|a\|$$

- $\widehat{\alpha_z}$ é sobrejetora

  Seja $b = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n\delta_n \in l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$.

  Tome $a = \sum_{-\infty}^{\infty} z^{-n}b_n\delta_n$. Note que $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$, pois

$$\|a\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|z^{-n}b_n\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z|^n\|b_n\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|b_n\| = \|b\| < \infty$$

  É claro que $\widehat{\alpha_z}(a) = b$

■

Queremos estender $\widehat{\alpha_z}$ para $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$. Se i é a inclusão de $l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, então $i \circ \widehat{\alpha_z}$ é um homomorfismo contrativo e pela proposição 1.11 existe único *-homomorfismo $\widetilde{\alpha_z}$ tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A}) \arrow[r, "\widehat{\alpha_z}"] \arrow[d] & l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A}) \arrow[r, hook, "i"] & \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z} \\
\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z} \arrow[urr, dotted, "\widetilde{\alpha_z}"] & &
\end{tikzcd}$$

Nosso próximo passo é mostrar que $\widetilde{\alpha_z}$ é um automorfismo em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ e que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} S^1 & \rightarrow & \mathrm{aut}(\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}) \\ z & \mapsto & \widetilde{\alpha_z} \end{array}$$

é um homomorfismo. Vejamos:

Proposição 7.10. $\widetilde{\alpha_z} \circ \widetilde{\alpha_w} = \widetilde{\alpha_{zw}}$ *e* $\widetilde{\alpha_1} = I_{\mathrm{A}\rtimes\mathbb{Z}}$

Demonstração:

Seja $a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_n$ pertencente a $l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$. Então

$$\widetilde{\alpha_z} \circ \widetilde{\alpha_w}(a) = \widetilde{\alpha_z}\big(i \circ \widehat{\alpha_w}(\textstyle\sum a_n\delta_n)\big) = \widetilde{\alpha_z}\big(i(\textstyle\sum w^n a_n\delta_n)\big)$$
$$= i \circ \widehat{\alpha_z}(\textstyle\sum w^n a_n\delta_n) = i(\textstyle\sum z^n w^n a_n\delta_n) = i(\textstyle\sum (zw)^n a_n\delta_n)$$
$$= i \circ \widehat{\alpha_{zw}}(a) = \widetilde{\alpha_{zw}}(a)$$

Portanto, $\widetilde{\alpha_z} \circ \widetilde{\alpha_w}(a) = \widetilde{\alpha_{zw}}(a)$ para todo $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$ e como $l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$ é denso em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, temos que $\widetilde{\alpha_z} \circ \widetilde{\alpha_w}(a) = \widetilde{\alpha_{zw}}(a)$ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$.

Agora, note que $\widetilde{\alpha_1}(a) = i \circ \widehat{\alpha_1}(a) = i(a)$ para todo $a \in l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$. Logo, como $l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$ é denso em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, temos que $\widetilde{\alpha_1} = I$ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$.

Finalmente, observe que $\widetilde{\alpha_z} \circ \widetilde{\alpha_{z^{-1}}} = \widetilde{\alpha_1} = I$ e analogamente $\widetilde{\alpha_{z^{-1}}} \circ \widetilde{\alpha_z} = I$. Assim, $\widetilde{\alpha_z}$ é bijetora e portanto é um automorfismo.

■

Estamos prestes a definir E na sua forma integral, mas antes precisamos de mais uma proposição,

Proposição 7.11. *Para todo $x \in \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, a função* $\begin{array}{ccc} S^1 & \to & \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z} \\ z & \mapsto & \widetilde{\alpha_z}(x) \end{array}$ *é contínua.*

Demonstração:

Seja $a \in \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ um elemento da forma $\sum_{-N}^{N} a_n \delta_n$. Observe que a é um somatório finito e $\widetilde{\alpha_z}(a) = \sum_{-N}^{N} z^n a_n \delta_n$.

Portanto, a aplicação $z \to \widetilde{\alpha_z}(a)$ é contínua para todo a pertencente a $\mathrm{A}\mathbb{Z}$, o conjunto das somas finitas da forma $\sum_{-N}^{N} a_n \delta_n$, que é denso em $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$. Como $l_1(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ é denso em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, temos que $\mathrm{A}\mathbb{Z}$ também é denso em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ e pela proposição 1.24 segue que a aplicação $z \to \widetilde{\alpha_z}(x)$ é contínua para todo $x \in \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$.

■

Vejamos a definição de E na forma integral:

Definição 7.12. *Seja* A *uma C^*-algebra. Defina F de $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ no elemento $x \in \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ por*

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(x) \, d\theta$$

Falta apenas verificar que F coincide com o E definido em 5.4. Vejamos:

Proposição 7.13. *Se* A *é uma C^*-algebra então a aplicação F de $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$ definida acima, é igual a esperança condicional E definida em 5.4.*

Demonstração:

Primeiro note que F é contínuo, pois

$$\|F(x)\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(x)\| \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x\| \, d\theta = \|x\|$$

Observe que nos elementos da forma $a_n \delta_n \in \mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, F age da seguinte forma:

$$F(a_n\delta_n) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{\alpha_{e^{i\theta}}}(a_n\delta_n) \, d\theta = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{\alpha_{e^{i\theta}}}(a_n\delta_n) \, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} a_n \delta_n \, d\theta = \big(\tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \, d\theta\big) a_n \delta_n = \begin{cases} a_e \delta_e & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Logo, $F\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta_n\right) = a_e\delta_e$ e portanto $F = E$ em $l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$. Como $l_1(\mathbb{Z}, \mathrm{A})$ é denso em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$, segue que $F = E$ em $\mathrm{A} \rtimes \mathbb{Z}$.

■

Observação 7.14. *A construção de E descrita acima pode ser generalizada para um grupo discreto abeliano* G.

Referências Bibliográficas

[1] R. EXEL, M. LACA, J. QUIGG, *Partial Dynamical Systems and C^*-Algebras Generated By Partial Isometries*, 1997, revised 1999.

[2] R. EXEL, *Twisted Partial Actions, A Classification or Regular C^*-Algebraic Bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) 74, no. 2, pp. 417-443, 1997.

[3] R. EXEL, *Circle Actions on C^*-Algebras, Partial Automorphisms, and a Generalized Pimsner-Voiculescu Exact Sequence*, J. Functional Analysis 122, pp. 361-401, 1994.

[4] R. EXEL, *Aproximately Finite C^*-Algebras and Partial Automorphisms*, Mathematica Scandinavica 77, pp. 281-288, 1995.

[5] R. EXEL, *Amenability for Fell Bundles*, J. reine angew. Math. 492, pp. 41-73, 1997.

[6] R. EXEL, *Cuntz-Krieger Algebras for Infinite Matrices*, J. reine angew. Math. 512, pp. 119-172, 1999.

[7] K. MCCLANAHAN, *K-Theory for Partial Crossed Products by Discret Groups*, J. Functional Analysis 130, pp. 77-117, 1995.

[8] J. TOMIYAMA, *The Interplay Between Topological Dynamics and Theory Of C^*-Algebras*, Lecture Notes Series, number 2, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, Korea, 1992.

[9] M. I. M. OLIVEIRA, *C^*-Algebras Assocadas a Homeormorfismos de Espaços Topológicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1997.

[10] J. DIXMIER, *C^*algebras*, segunda edição, North-Holland, 1982.

[11] N. BOURBAKI, *General Topology, part 2.* Elements of Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[12] W. RUDIN, *Functional Analysis - Second Edition.* International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1991.

[13] G. K. PEDERSEN, *Analysis Now.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[14] G. J. MURPHY, *C^*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[15] E. L. LIMA, *Elementos de Topologia Geral.* Ao Livro Técnico S. A., 1970.

[16] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis With Applications.* John Wiley & Sons, 1989.