Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

# Álgebras Aproximadamente Finitas

Jorge Paulino da Silva Filho
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Florianópolis
Março de 1999

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática e
Computação Científica

# Álgebras Aproximadamente Finitas

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Jorge Paulino da Silva Filho
Florianópolis
Março de 1999

# Álgebras Aproximadamente Finitas

**por**

**Jorge Paulino da Silva Filho**

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica.

Celso Melchíades Dória
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ruy Exel Filho (UFSC-Orientador)

Prof. Dr. Antônio Roberto da Silva (UFRJ)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger (UFSC)

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa (UFSC)

**Florianópolis, 31 de março de 1999.**

À Deus
À minha mãe

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus por toda a proteção que tenho recebido.

Agradeço à minha família, mas sou grato, sobretudo, à minha mãe, cuja vida tem se resumido na dedicação aos filhos, entre os quais eu me incluo com muita alegria.

Sou grato às professoras Carmem Suzane Comitre Gimenez e Mirian Buss Gonçalves e ao professor Ailton João da Silva (Bana), que conseguem executar a difícil tarefa de entusiasmar o aluno no aprendizado da matemática.

Agradeço aos meus colegas Alexandre, Sandro e Cláudio pela fiel e humorada companhia durante as intermináveis noites do nosso curso de graduação.

Também agradeço aos meus colegas de pós graduação, Oswaldo, Edson, Maria Inez, Andreza, Ana Paula, Claiton, Fábio e Dirceu, pela amizade e pelo apoio nunca negado ao longo desses dois anos.

Agradeço à Fernando Abadie e Ayumi Kato por estarem sempre dispostos a me ajudar em diversas questões matemáticas pertinentes a este trabalho.

Agradeço às colegas Yara e Sílvia pelas inúmeras vezes que me prestaram algum auxílio e pela forma carinhosa com que sempre fui recebido na coodenadoria do curso de graduação em Matemática.

Agradeço ao CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo suporte financeiro recebido durante este mestrado.

Finalmente agradeço ao meu orientador Ruy Exel Filho pelo enorme e essencial apoio a mim dispensado. Seguramente, uma pessoa cuja postura de professor, orientador e pesquisador deve servir de exemplo.

# Conteúdo

# Introdução

No ano de 1972, Ola Bratteli publicou o artigo *Inductive Limits of Finite-Dimensional $C^*$-álgebras* pela Trans. Amer. Math. Soc.. Este foi o primeiro momento em que o assunto AF-álgebras foi introduzido e, a partir daí, ele tem ganhado espaço em alguns livros de $C^*$-álgebras e de geometria não comutativa.

O objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo de Álgebras Aproximadamente Finitas (AF-álgebras) e, para isso, usamos essencialmente o artigo de Ola Bratteli, além de outros livros de $C^*$-álgebras como [Murphy] e [Davidson].

No Capítulo 1 procuramos apresentar os resultados básicos sobre $C^*$-Álgebras que estão mais ligados com o objetivo deste trabalho, tais como a Construção GNS e Limites Indutivos.

No Capítulo 2 mostramos quais são os morfismos de $M_n(\mathbb{C})$ em $M_m(\mathbb{C})$, já que esta é uma questão vital para os capítulos seguintes e, além disso, tem sido tratada muito resumidamente nos livros correntes de $C^*$-Álgebras .

A definição de AF-álgebras é dada na primeira Seção do Capítulo 3. Porém, os exemplos de AF-álgebras são deixados para a Seção 3.3, pois eles ficam muito mais interessantes quando são vistos com o auxílio dos diagramas de Bratteli, assunto discutido na seção 3.2. Na última Seção do Capítulo 3 mostramos que $K(H)$ é uma AF-álgebra .

O Capítulo 4 foi reservado para a demonstração de um teorema de caracterização de AF-álgebras, além de discutir questões de isomorfismos entre AF-álgebras.

No Capítulo 5 mostramos como utilizar os diagramas de Bratteli para reconhecer os ideais de uma AF-álgebra , os ideais Primitivos de uma AF-álgebra e também como reconhecer uma AF-álgebra Simples.

Finalizamos este trabalho com o Capítulo 6, apresentando uma construção das AF-álgebras CAR (Canonical Commutation Relations) e GICAR (Gauge Invariant CAR).

# Capítulo 1

# Pré-Requisitos

## 1.1 Conceitos Preliminares

O objetivo desta seção é listar alguns conceitos e resultados da teoria básica de $C^*$-Álgebras que serão utilizados ao longo desse trabalho.

Uma *Álgebra* é um espaço vetorial $A$, sobre um corpo $K$, (que sempre consideraremos como sendo $\mathbb{C}$) no qual está definida uma multiplicação que satisfaz

i. $x(yz) = (xy)z$

ii. $(x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz$

iii. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ para todo $x, y, z \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Se, além disso, $A$ é um espaço de Banach com uma norma que satisfaz a desigualdade multiplicativa $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in A$, então $A$ é chamada de *Álgebra de Banach.*

Dada uma Álgebra $A$, dizemos que $B \subseteq A$ é uma *Sub-Álgebra* de $A$ se $B$ for um sub-espaço vetorial de $A$ fechado para a multiplicação.

Dizemos também que um subconjunto $I \subseteq A$ é um *Ideal à esquerda (respectivamente, à direita)* se $I$ é uma subálgebra satisfazendo: Se $a \in A$ e $b \in I$, então $ab \in I$ (respectivamente, $ba \in I$). Um *Ideal* em $A$ é uma sub-álgebra que é simultaneamente um ideal à direita e à esquerda.

Uma *Involução* em uma Álgebra $A$ é uma aplicação $* : A \to A$ satisfazendo:

i. $(x+y)^* = x^* + y^*$

ii. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

iii. $(xy)^* = y^* x^*$

iv. $x^{**} = x$ para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Um Álgebra $A$ munida de uma involução é chamada de $*$-*Álgebra*.

Uma $C^*$-*Álgebra* $A$ é uma $*$-Álgebra de Banach na qual verifica-se a igualdade

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \textit{para todo } a \in A.$$

É fácil ver que se $A$ é uma $C^*$-Álgebra e se $x \in A$ então $\|x\| = \|x^*\|$. De fato, note que $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, implicando em $\|x\| \leq \|x^*\|$. Analogamente, $\|x^*\|^2 = \|(x^*)^*x^*\| \leq \|(x^*)^*\|\|x^*\|$ e daí $\|x^*\| \leq \|(x^*)^*\| = \|x\|$.

Além disso, se $A$ for uma $C^*$-Álgebra com unidade (isto é contiver uma unidade $\mathbb{1}$), então $\|\mathbb{1}\| = 1$, pois $\|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}^*\| = \|\mathbb{1}^*\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}\|^2$.

Como exemplos de $C^*$-Álgebras podemos citar:

**Exemplo 1.1.1.** *O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos com a involução dada pela conjugação $\lambda \to \overline{\lambda}$ e com a norma dada pelo módulo é uma $C^*$-Álgebra .*

**Exemplo 1.1.2.** *Seja $H$ um Espaço de Hilbert. Temos que o conjunto $B(H)$ dos operadores limitados de $H$ é uma $C^*$-Álgebra , com o produto dado pela composição de operadores, a norma dada por $\|T\| = sup\{\|Tx\|; x \in H, \|x\| \leq 1\}$ e a involução dada por $T^*$=adjunto de $T$;*

**Exemplo 1.1.3.** *Seja $\Omega$ um Espaço Topológico Localmente Compacto Hausdorff. Seja $C_0(\Omega) = \{\ f : \Omega \to \mathbb{C}\ ;\ \ f$ é contínua e $\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ K \subseteq \Omega$ compacto tal que $\|f(x)\| < \varepsilon\ \forall\ x \in \Omega \setminus K\ \}$. $C_0(\Omega)$ é uma $C^*$-Álgebra com a involução $f^*(x) = \overline{f(x)}$, as operações definidas pontualmente e com a norma $\|.\|_\infty$. Uma espécie de recíproca para este exemplo é o importante Teorema de Gelfand (ver Seção 2.1 de [Murphy]), que afirma que toda $C^*$-Álgebra abeliana é da forma $C_0(\Omega)$, onde $\Omega$ é algum espaço de Hausdorff localmente compacto. Vamos assumir este teorema sem demonstração, apesar de utilizá-lo em alguns momentos nesse trabalho.*

**Exemplo 1.1.4.** *Dada uma família de $C^*$-Álgebras $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, sejam $\Pi_\lambda A_\lambda$ o produto cartesiano das álgebras e $\oplus_\lambda A_\lambda$ o subconjunto de $\Pi_\lambda A_\lambda$ dado por*

$$\oplus_\lambda A_\lambda = \{(a_\lambda)_\lambda \in \Pi_\lambda A_\lambda : \|(a_\lambda)_\lambda\| = \sup_\lambda \|a_\lambda\| < \infty\}.$$

*Temos que $\oplus_\lambda A_\lambda$ é uma $C^*$-Álgebra com as operações definidas pontualmente.*

É fácil ver que toda $*$-subálgebra fechada de uma $C^*$-Álgebra é também uma $C^*$-Álgebra . Desse modo, iremos chamar uma $*$-subálgebra fechada de uma $C^*$-Álgebra de $C^*$-*Subálgebra.*

Seja $A$ uma $*$-álgebra e $a \in A$. Dizemos que $a$ é $Auto-Adjunto$ ou $Hermitiano$ se $a^* = a$. Observe que se $A$ tem uma unidade $\mathbb{1}$ , então $\mathbb{1}$ é hermitiano, pois $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}\mathbb{1}^* = (\mathbb{1}\mathbb{1}^*)^* = (\mathbb{1}^*)^* = \mathbb{1}$.

Dizemos também que um elemento $a \in A$ é *Normal* se $a^*a = aa^*$. Neste caso, a $*$-álgebra gerada por $a$, isto é, o conjunto de todos os polinômios em $a$ e $a^*$ com coeficientes complexos, é abeliana.

Um elemento $p \in A$ é uma *Projeção* se $p = p^* = p^2$.

Se $A$ tem unidade, então $u \in A$ é chamado de *Unitário* se $u^* = u^{-1}$. Note que elementos unitários em uma $C^*$-Álgebra com unidade têm norma 1, pois $\|u\|^2 = \|uu^*\| = \|\mathbb{1}\| = 1$.

Ao longo desse texto, sempre mencionaremos se a $C^*$-Álgebra com que se vai trabalhar tem ou não unidade. Sobre este assunto vale a pena relembrar o conceito de unitização de uma $C^*$-Álgebra .

Seja $A$ uma $*$-álgebra (não necessariamente com unidade). Definamos $\widetilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$, com multiplicação e involução dadas por:

$$(a, \lambda).(b, \mu) = (ab + \lambda b + a\mu, \lambda\mu)$$

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$$

É fácil ver que $\widetilde{A}$ é uma $*$-álgebra que tem o elemento $(0, 1)$ como unidade. Dizemos que $\widetilde{A}$ é uma *Unitização* de $A$. Se $A$ é uma $*$-álgebra de Banach, então $\widetilde{A}$ também o é, com a norma $\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$.

No entanto, mesmo que $A$ seja uma $C^*$-Álgebra , esta norma não torna $\widetilde{A}$ uma $C^*$-Álgebra . Como exemplo, façamos $A = \mathbb{C}$ e $(a, \lambda) = (-4, 2)$. Daí, $\|(a, \lambda)\|^2 = \|(-4, 2)\|^2 = 36$, mas $\|(a, \lambda)^*.(a, \lambda)\| = \|(0, 4)\| = 4$. Na verdade, se $A$ é uma $C^*$-Álgebra , então existe uma única norma sobre $\widetilde{A}$ tornando-a uma $C^*$-Álgebra e extendendo a norma de $A$. Esta norma é dada por

$$\|(a, \lambda)\| = \sup\{ \ \|ab + \lambda b\|; \ b \in A, \ \|b\| \leq 1 \ \}.$$

Este resultado pode ser encontrado na seção 2 de [Murphy].

Seja $a \in A$, onde $A$ é uma $*$-álgebra com unidade. Definimos o *Espectro* de $a$ como sendo o conjunto

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda\mathbb{1} - a \text{ não é inversível em } A\}$$

Definimos o *Resolvente* de $a$ como sendo $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Se $A$ não tem unidade, então o espectro de $a \in A$ é o conjunto $\sigma_{\widetilde{A}}(a)$, isto é, é o espectro de $a$, onde $a$ é visto como elemento de $\widetilde{A}$.

Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra . $a \in A$ é dito ser *Positivo* se $a = a^*$ e $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$.

Definimos ainda o *Raio Espectral* de um elemento $a \in A$ como sendo

$$r(a) := \sup\{|\lambda|; \ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Vamos mencionar a seguir, sem demonstração, dois importantes resultados da teoria básica de $C^*$-Álgebras que podem ser encontrados em [Murphy] ou [Rudin].

O primeiro deles é que se $a$ é um elemento normal de uma $C^*$-Álgebra $A$, então $r(a) = \|a\|$. O segundo resultado, também conhecido como Teorema da Aplicação Espectral [Murphy], diz que se $a$ é um elemento normal de uma $C^*$-Álgebra com unidade e se $f \in C(\sigma(a))$, então $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Uma *Unidade Aproximada* para uma $C^*$-Álgebra $A$ é um net crescente $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos positivos de norma menor ou igual a 1 tal que

$$a = \lim_\lambda au_\lambda = \lim_\lambda u_\lambda a \quad \text{para todo} \quad a \in A.$$

Um importante fato, que pode ser encontrado na seção 3.1 de [Murphy] é que toda $C^*$-Álgebra admite uma unidade aproximada.

Sejam $A$ e $B$ duas $C^*$-Álgebras . Uma aplicação linear $\pi : A \to B$ é um *Homomorfismo* se satisfizer

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \text{ para todo } x, y \in A \ .$$

Além disso, se $\pi$ satisfizer $\pi(x^*) = \pi(x)^*$, então $\pi$ é chamado de $*-Homomorfismo$. Um $*$-homomorfismo bijetivo é chamado de $* - Isomorfismo$.

Para encerrar esta seção vamos demonstrar um resultado importante sobre homomorfismos.

**Teorema 1.1.5.** *Seja $\pi : A \to B$ um $*$-homomorfismo entre duas $C^*$-Álgebras $A$ e $B$. Então:*

*i. $\pi$ é norma decrescente, i.e., $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, $\forall\ a \in A$*

*ii. Se $\pi$ é injetivo, então $\pi$ é uma isometria.*

Demonstração:

Vamos supor que $A$ e $B$ têm unidade e $\pi(1) = 1$ (se não for este o caso, podemos estender $\pi$ a um único $*$-homomorfismo $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{A}$ em $\widetilde{B}$ ).

(i) Seja $a \in A$. Se $a = a^*$, então é fácil ver (usando o resolvente) que $\sigma_B(\pi(a)) \subset \sigma_A(a)$. Daí,

$$\begin{aligned} \|\pi(a)\| &= r(\pi(a)) \\ &\leq r(a) \\ &= \|a\|. \end{aligned}$$

Para um elemento $a$ qualquer,

$$\begin{aligned} \|\pi(a)\|^2 &= \|\pi(a)\pi(a)^*\| \\ &= \|\pi(aa^*)\| \\ &\leq \|aa^*\| \\ &= \|a\|^2. \end{aligned}$$

Logo, $\|\pi(a)\| \leq \|a\| \; \forall \; a \in A$.

(ii) Já sabemos por (i) que $\|\pi(a)\| \leq \|a\| \; \forall \; a \in A$. Vamos supor então que $\pi$ não é isometria, isto é, que existe $a \in A$ tal que $\|\pi(a)\| < \|a\|$. Seja

$$r := \|\pi(a^*a)\| < \|a^*a\| =: s.$$

Considere $f \in C([0,s])$ tal que $f(t) = 0$ para $0 \leq t \leq r$ e $f(s) = 1$. Pelo teorema da aplicação espectral, temos que

$$0 = f(\pi(a^*a)) = \pi(f(a^*a)) \tag{1}$$

Por outro lado, como $f$ não é identicamente nula sobre o espectro de $a^*a$, então $\exists \; \lambda \neq 0$ com $\lambda \in f(\sigma(a^*a)) = \sigma(f(a^*a))$. Daí,

$$f(a^*a) \neq 0 \tag{2}$$

Por (1) e (2) segue que $\pi$ não é injetivo, contradizendo a hipótese. Logo, $\pi$ é isometria. $\square$

## 1.2 Funcionais Lineares

Existem muitos resultados interessantes sobre funcionais lineares. No entanto, nesta Seção procuramos apresentar apenas aqueles que estão mais ligados com o assunto desse trabalho.

**Definição 1.2.1.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra . Um Funcional Linear $f$ sobre $A$ é uma aplicação linear de $A$ em $\mathbb{C}$. Dizemos também que $f$ é Positivo se valer $f(a^*a) \geq 0$ para todo $a \in A$. Além disso, se o funcional positivo $f$ for contínuo e de norma 1, dizemos que $f$ é Estado, e denotaremos por $S(A)$ o conjunto de todos os estados de $A$.*

Dado um funcional linear positivo $f : A \to \mathbb{C}$, onde $A$ é uma $C^*$-Álgebra , podemos associar a $f$ uma forma sesquilinear positiva sobre $A$ dada por:

$$(a,b) := f(b^*a)$$

Assim, $(.,.)$ satisfaz a desigualdade de Cauchy $|(a,b)|^2 \leq (a,a)(b,b)$. Isto implica em

$$|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b) \tag{1}$$

**Teorema 1.2.2.** *Seja $f$ um funcional linear contínuo sobre uma $C^*$-Álgebra com unidade $A$ tal que $\|f\| = 1 = f(\mathbb{1})$. Então $f$ é estado.*

Demonstração:

Seja $a \in A$ hermitiano e $\|a\| \leq 1$. Vamos provar que $f(a) \in [-1,1]$. Note que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|a \pm in\mathbb{1}\|^2 &= \|(a \pm in\mathbb{1})(a \pm in\mathbb{1})^*\| \\ &= \|(a \pm in\mathbb{1})(a \mp in\mathbb{1})\| \\ &= \|a^2 + n^2\mathbb{1}\| \\ &\leq \|a^2\| + \|n^2\mathbb{1}\| \\ &\leq 1 + n^2.\end{aligned}$$

Daí

$$\|a \pm in\mathbb{1}\| \leq \sqrt{1+n^2},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Qualquer funcional linear limitado satisfaz $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Assim, usando (2) e a hipótese, obtemos

$$\begin{aligned}|f(a) \pm in| &= |f(a \pm in\mathbb{1})| \\ &\leq \|f\|\|a \pm in\mathbb{1}\| \\ &\leq \sqrt{n^2+1}\ \ \forall\ n\ \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Isto significa que $f(a)$ está na intersecção de todos os discos centrados em $\pm in$ e de raio $\sqrt{n^2+1}$. Esta intersecção é o intervalo $[-1,1]$.

Agora, se $0 \leq x \leq \mathbb{1}$, então $\|2x - \mathbb{1}\| \leq 1$. Logo $f(2x - \mathbb{1}) \in [-1,1]$, isto é,

$$\begin{aligned}&-1 \leq f(2x - \mathbb{1}) \leq 1 \\ \Rightarrow\ &-1 \leq 2f(x) - 1 \leq 1 \\ \Rightarrow\ &\ \ 0 \leq f(x) \leq 1.\end{aligned}$$

Assim, $f$ é positivo. □

**Teorema 1.2.3.** *Se $a$ é um elemento normal e não nulo de uma $C^*$-Álgebra $A$, então existe um estado $f$ tal que $\|a\| = |f(a)|$.*

Demonstração:

Seja $B \subset \widetilde{A}$ a $C^*$-subálgebra gerada por $\mathbb{1}$ e $a$, onde $\mathbb{1}$ é a unidade de $\widetilde{A}$. Como $a$ é normal, $B$ é comutativa. Pelo Teorema de Gelfand (conforme [Rudin]), existe um funcional linear $f_2 : B \to \mathbb{C}$, com $\|f_2\| = 1$, $f_2(\mathbb{1}) = 1$ e tal que $\|a\| = |f_2(a)|$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear contínuo $f_1$ sobre $\widetilde{A}$ que extende $f_2$ e, além disso, preserva a norma de $f_2$, isto é, $\|f_1\| = 1$. Daí, como $f_1(\mathbb{1}) = f_2(\mathbb{1}) = 1$, concluímos, pelo Teorema 1.2.2 que $f_1$ é positivo. Agora, seja $f$ a restrição de $f_1$ sobre $A$. É fácil ver que $f$ é funcional linear positivo satisfazendo $\|a\| = \|f(a)\|$ e $\|f\| = 1$. Logo, $f$ é estado sobre $A$ e $\|a\| = \|f(a)\|$. □

**Lema 1.2.4.** *Se $f$ é um funcional linear positivo sobre uma $C^*$-Álgebra $A$, então para cada unidade aproximada $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $A$, $\|f\| = \lim_\lambda f(u_\lambda)$.*

Demonstração:

Por hipótese temos que $f$ é positivo e $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é unidade aproximada de $A$. Com isso, $(f(u_\lambda)_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é um net crescente em $\mathbb{R}$, convergindo para o seu supremo que evidentemente é menor ou igual a $\|f\|$, isto é, $\lim_\lambda f(u_\lambda) \leq \|f\|$. Agora, seja $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$. Daí,

$$\begin{aligned}
&|f(u_\lambda a)|^2 \leq f(u_\lambda)^2 \leq f(u_\lambda)\|f\| \\
\Rightarrow\ &\lim_\lambda |f(u_\lambda a)|^2 \leq \lim_\lambda f(u_\lambda)\|f\| \\
\Rightarrow\ &|f(a)|^2 \leq \lim_\lambda f(u_\lambda)\|f\| \text{ para todo } a \in A, \text{ com } \|a\| \leq 1 \\
\Rightarrow\ &\|f\|^2 \leq \lim_\lambda f(u_\lambda)\|f\| \\
\Rightarrow\ &\|f\| \leq \lim_\lambda f(u_\lambda).
\end{aligned}$$

Logo, $\|f\| = \lim_\lambda f(u_\lambda)$. □

**Teorema 1.2.5.** *Seja $f$ um funcional linear positivo sobre uma $C^*$-Álgebra $A$. Então:*

*i. Para cada $a \in A$, $f(a^*a) = 0$ se e somente se $f(ba) = 0$, para todo $b \in A$*

*ii. $f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|f(b^*b)$, para todo $a, b \in A$*

Demonstração:

(i) Basta usar a desigualdade (1) (desigualdade de Cauchy).

(ii) Podemos supor que $f(b^*b) > 0$, pois se for nulo basta usar o item (i). Considere então o funcional

$$\begin{aligned}
\rho : A &\to \mathbb{C} \\
c &\mapsto \frac{f(b^*cb)}{f(b^*b)}
\end{aligned}$$

É fácil ver que $\rho$ é positivo e linear. Seja $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma unidade aproximada de $A$. Então pelo Lema 1.2.4, temos que

$$\begin{aligned}
\|\rho\| &= \lim_\lambda \rho(u_\lambda) \\
&= \lim_\lambda \frac{f(b^*u_\lambda b)}{f(b^*b)} \\
&= \frac{f(b^*b)}{f(b^*b)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como sabemos que $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, decorre que

$$\begin{aligned}
\rho(a^*a) &= |\rho(a^*a)| \\
&\leq \|\rho\|\|a^*a\| \\
&\Rightarrow \rho(a^*a) \leq \|a^*a\| \\
&\Rightarrow \frac{f(b^*a^*ab)}{f(b^*b)} \leq \|a^*a\| \\
&\Rightarrow f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| f(b^*b).
\end{aligned}$$

□

**Definição 1.2.6.** *Um estado $f$ sobre uma $C^*$-Álgebra $A$ é Puro se satisfaz a seguinte propriedade: "Se $\rho$ é funcional positivo sobre $A$ com $\rho \leq f$, então existe $t \in [0,1]$ tal que $\rho = tf$".*

**Definição 1.2.7.** *Um ponto $x$ de um conjunto convexo $C$ em um espaço vetorial $X$ é um Ponto Extremo de $C$ se a condição $x = ty + (1-t)z$, onde $y, z \in C$ e $t \in (0,1)$ implicar que $x = y = z$.*

**Proposição 1.2.8.** *Seja $X$ um espaço vetorial , $C \subset X$ convexo e $x \in C$. Então $x$ é ponto extremo de $C$ se e somente se quando tivermos $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, onde $y_i \in C$ , $\lambda_i > 0$ para todo $i$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ implicar que $x = y_i$ para todo $i$.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Trivial.

($\Rightarrow$) Suponha que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, $y_i \in C$ , $\lambda_i > 0$ para todo $i$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Então

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \lambda_{i_0} y_{i_0} + (1 - \lambda_{i_0} \sum_{i \neq i_0}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i_0}} y_i) \, . \tag{3}$$

Observe que $\sum_{i \neq i_0}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_0}} y_i \in C$, pois $y_i \in C$ para todo $i$ e $\sum_{i \neq i_0}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i_0}} = \frac{1-\lambda_{i_0}}{1-\lambda_{i_0}} = 1$.

Usando a hipótese, decorre da equação (3) que $x = y_{i_0}$ e, analisando o modo como obtemos isto, fica claro que podemos obter $x = y_i$ para todo $i$. □

**Observação 1.2.9.** *A proposição anterior nada mais é do que uma definição equivalente para ponto extremo e será utilizada num resultado importante do Capítulo 2.*

**Observação 1.2.10.** *Do Lema 1.2.4 podemos obter o seguinte resultado: se $f$ e $g$ são funcionais lineares positivos sobre uma $C^*$-Álgebra $A$, então $\|f+g\| = \|f\|+\|g\|$.*

Com isso vamos provar a seguinte proposição.

**Proposição 1.2.11.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e $f$ um estado sobre $A$. Então $f$ é puro se e somente se $f$ é ponto extremo de $B$, onde $B :=\{$ funcionais positivos de norma menor ou igual a 1$\}$ .*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $f = tf_1 + (1-t)f_2$, com $f_1, f_2 \in B$ e $t \in (0,1)$. É claro que $tf_1 \leq f$. Daí, usando a hipótese, existe $\mu \in [0,1]$ tal que

$$tf_1 = \mu f. \tag{4}$$

Além disso $1 = \|f\| = \|tf_1 + (1-t)f_2\| = t\|f_1\| + (1-t)\|f_2\|$. Como $t\|f_1\| + (1-t)\|f_2\| = 1$ e $\|f_1\|$ e $\|f_2\| \leq 1$ decorre que $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. Então, tomando o módulo em ambos os lados da equação (4), obtemos $t = \mu$ e assim $f_1 = f$. Com um raciocínio análogo obtemos $f_2 = f$.

($\Leftarrow$) Suponha que existe $f_1 \in B$ tal que $f_1 \leq f$. Seja $f_2 := f - f_1$ e $\|f_1\| = \lambda$. Daí $f = f_1 + f_2$ e como $1 = \|f\| = \|f_1\| + \|f_2\|$, decorre que $\|f_2\| = 1 - \lambda$. Seja $g_1 = \lambda^{-1} f_1$ e $g_2 = (1-\lambda)^{-1} f_2$. Então $f = \lambda g_1 + (1-\lambda) g_2$, com $g_1, g_2 \in B$. Usando a hipótese de $f$ ser extremo vem que $f = g_1 = g_2$ e assim $f_1 = \lambda f$. □

## 1.3 Representação GNS

O Objetivo principal desta seção é apresentar o famoso teorema de Gelfand-Naimark (conforme [Gelfand 48]), que afirma que toda $C^*$-Álgebra pode ser vista como uma $C^*$-subálgebra de $B(H)$, para algum espaço de hilbert $H$.

**Definição 1.3.1.** *Uma Representação de uma $C^*$-Álgebra é um par $(H, \pi)$, onde $H$ é um espaço de Hilbert e $\pi : A \to B(H)$ é um $*$-homomorfismo. Diz-se que $(H, \pi)$ é uma Representação Fiel se $\pi$ é injetivo.*

Vamos rever a seguir o conceito de soma direta de uma coleção qualquer de espaços de Hilbert, começando com a

**Definição 1.3.2.** *Seja $X$ um espaço de Banach e $(x_i)_{i\in I}$ uma sequência em $X$, onde $I$ é um conjunto qualquer de índices. Então dizemos que a série $\sum\limits_{i\in I} x_i$ converge para $x \in X$ e denotamos isso por $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \subseteq I$ finito tal que para todo $G$ finito com $F \subseteq G \subseteq I$, tivermos $\|\sum\limits_{i\in G} x_i - x\| < \varepsilon$.*

Desse modo, dada uma coleção de espaços de Hilbert $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ onde $\Lambda$ é um conjunto qualquer de índices, não é difícil verificar que o conjunto

$$H := \{x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\ x_\lambda \in H_\lambda,\ \text{tal que} \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x_\lambda, x_\lambda\rangle_{H_\lambda} < \infty\}$$

também é um espaço de Hilbert, onde a convergência da série $\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x_\lambda, x_\lambda\rangle_{H_\lambda}$ está baseada na Definição 1.3.2 e o produto interno dado por

$$\langle x,y\rangle_H = \sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x_\lambda, y_\lambda\rangle_{H_\lambda}, \text{ para } x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ e } y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Com isso podemos definir a soma direta dos espaços de Hilbert $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ como sendo o conjunto $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda := H$, com o produto interno dado acima.

**Observação 1.3.3.** *Se $(H_\lambda, \pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de representações de $A$, então a soma direta dessas representações é a representação $(H,\pi)$, com $H = \oplus_\lambda H_\lambda$ e $\pi(a)((x_\lambda)_\lambda) = (\pi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda$ $\forall a \in A$ e $(x_\lambda)_\lambda \in H$. É fácil ver que $(H,\pi)$ é uma representação de $A$. Além disso, se para cada $a \neq 0$, $a \in A$, existe $\lambda$ tal que $\pi_\lambda(a) \neq 0$, então $(H,\pi)$ é fiel.*

Agora, seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e $\rho$ um funcional linear positivo sobre $A$. A construção que faremos abaixo é costumeiramente chamada de *Construção GNS* (conforme [Gelfand 48]) e consiste em criar um espaço de Hilbert $H_\varphi$ e um homomorfismo $\pi_\varphi$ ambos associados ao funcional $\varphi$, de modo que $(H_\varphi, \pi_\varphi)$ seja uma representação de $A$.

Seja $N_\varphi = \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$. Decorre do Teorema 1.2.5 que $N_\varphi$ é um ideal fechado à esquerda de $A$ e que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} (A/N_\varphi \times A/N_\varphi) & \to & \mathbb{C} \\ (a + N_\varphi, b + N_\varphi) & \mapsto & \varphi(b^*a) \end{array}$$

é um produto interno sobre $A/N_\varphi$.

Seja $H_\varphi$ o completamento de $A/N_\varphi$. Seja $a, b \in A$. Note que, usando novamente o Teorema 1.2.5, obtemos

$$\begin{aligned} \|ab + N_\varphi\|^2 &= (ab + N_\varphi, ab + N_\varphi) \\ &= \varphi((ab)^*ab) \\ &= \varphi(b^*a^*ab) \\ &\leq \|a^*a\|\varphi(b^*b) \\ &= \|a\|^2\|b + N_\varphi\|. \end{aligned}$$

Daí

$$\|ab + N_\varphi\|^2 \leq \|a\|^2\|b + N_\varphi\| \tag{1}$$

Com isso, se $a \in A$, por (1) fica bem definido o operador $\pi(a) \in B(A/N_\varphi)$ dado por $\pi(a)(b + N_\varphi) = ab + N_\varphi$. Além disso, por (1) também obtemos $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$.

Assim, o operador $\pi(a)$ tem uma única extensão contínua a um operador $\pi_\varphi(a)$ sobre $H_\varphi$. Além disso, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi_\varphi : & A & \to & B(H_\varphi) \\ & a & \mapsto & \pi_\varphi(a) \end{array}$$

é um $*$-homomorfismo.

**Definição 1.3.4.** *A representação $(H_\varphi, \pi_\varphi)$ de $A$ é chamada de Representação de Gelfand-Naimark-Segal (ou GNS) (ver [Gelfand 48]) associada ao funcional $\varphi$.*

**Definição 1.3.5.** *Se $A \neq 0$, definimos a sua Representação Universal como sendo a soma direta de todas as representações GNS $(H_\varphi, \pi_\varphi)$, com $\varphi \in S(A)$.*

**Teorema 1.3.6.** (Gelfand-Naimark) *Toda $C^*$-Álgebra tem uma representação fiel, a saber, a sua representação universal.*

Demonstração:

Seja $(H, \pi)$ a representação universal de $A$, isto é, $H = \bigoplus_{\lambda \in S(A)} H_\lambda$ e $\pi(a)((x_\lambda)_\lambda) = (\pi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda$, $\lambda \in S(A)$. Seja $a \in A$ tal que $\pi(a) = 0$. Pelo Teorema 1.2.3 existe $\gamma \in S(A)$ tal $||a^*a|| = \gamma(aa^*)$. Como $\pi(a) = 0$, decorre que $\pi_\gamma(a) = 0$ e daí $\pi_\gamma(a^*a) = \pi_\gamma(a^*)\pi_\gamma(a) = 0$. Tome $b \in A$ tal que $b = (a^*a)^{\frac{1}{4}}$. Temos que $\pi_\gamma(b^4) = \pi_\gamma(a^*a) = 0$ e então $\pi_\gamma(b) = 0$.

Agora,

$$\begin{aligned} ||a||^2 &= ||a^*a|| \\ &= \gamma(aa^*) \\ &= \gamma(b^4) \\ &= \gamma((b^2)^*b^2) \\ &= (b^2 + N_\gamma, b^2 + N_\gamma) \\ &= (\pi_\gamma(b)(b + N_\gamma), \pi_\gamma(b)(b + N_\gamma)) \\ &= ||\pi_\gamma(b)(b + N_\gamma)||^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $\pi_\gamma(b) = 0$.

Logo, $a = 0$ e $\pi$ é injetivo.

□

**Definição 1.3.7.** *Se $(H, \pi)$ é uma representação de uma $C^*$-Álgebra , dizemos que $x \in H$ é um vetor cíclico para $(H, \pi)$ se $span\{\pi(a)x,\ a \in A\}$ é denso em $H$. Se $(H, \pi)$ admite um vetor cíclico, então dizemos que $(H, \pi)$ é uma representação cíclica.*

O último teorema desta seção vai mostrar que toda representação GNS associada a um estado é cíclica. Antes disso, precisamos relembrar mais alguns fatos.

**Definição 1.3.8.** *Seja $H$ um espaço de Hilbert, $A$ uma $C^*$-subálgebra de $B(H)$ e $S$ um subconjunto de $H$. Denotaremos por $[AS]$ o conjunto*

$$[AS] = span\{\ u(x) :\ u \in A,\ x \in S\ \}.$$

*Diremos que $A$ age não degeneradamente sobre $H$ se $[AS]$ for denso em $H$.*

Na proposição a seguir veremos uma maneira alternativa (e equivalente) de caracterizar a não degenerabilidade.

**Proposição 1.3.9.** *Com os ingredientes da definição anterior, temos que $A$ age não degeneradamente sobre $H$ se e somente se para todo $x$ não nulo em $H$ existe $u \in A$ tal que $u(x)$ é não nulo.*

Demonstração:

$\Rightarrow$ Seja $x \in H$, $x \neq 0$. Se $u(x) = 0$ para todo $u \in A$, então

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle = 0, \quad \forall\ y \in S, \quad \forall\ u \in A.$$

Segue daí que $x \in \overline{[AS]}^{\perp}$ e portanto $\overline{[AS]} \neq H$, o que é uma contradição.

$\Leftarrow$ Suponha que $\overline{[AS]} \neq H$. Então existe $H_1 = \overline{[AS]}^{\perp} \neq \{0\}$ tal que $\overline{[AS]} \oplus H_1 = H$. Daí, para $x \in H_1$, $x \neq 0$ temos que

$$\langle u(x), u(x)\rangle = \langle \underbrace{u^*u(x)}_{\in[AS]^{\perp}}, \underbrace{x}_{\in H_1}\rangle = 0, \quad \forall\ u \in A.$$

Portanto, devemos ter $\overline{[AS]} = H$. □

**Proposição 1.3.10.** *Seja $H$ um espaço de hilbert e $A \subset B(H)$ atuando não degeneradamente sobre $H$. Então, se $(u_\lambda)_\lambda$ é uma unidade aproximada em $A$, $(u_\lambda)_\lambda$ converge fortemente para $Id_H$.*

Demonstração:

Seja $(u_\lambda)_\lambda$ unidade aproximada em $A$, $a \in A$ e $x \in H$. Segue daí que $\lim_\lambda u_\lambda a(x) = a(x)$. Logo, para qualquer $y \in [AH]$, temos $\lim_\lambda u_\lambda(y) = y$.

Agora, seja $y \in H$. Como $\overline{[AH]} = H$, existe $(y_n) \in [AH]$ com $y = \lim_n y_n$. Seja $\varepsilon > 0$. Existe $N$ tal que $\|y_N - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Como $\lim_\lambda u_\lambda(x) = x$ para todo $x \in [AH]$ e $y_N \in [AH]$, decorre que existe $\lambda_0$ tal que $\|u_\lambda(y_N) - y_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $\lambda > \lambda_0$. Daí para $\lambda > \lambda_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(y) - y\| &\leq \|u_\lambda(y) - u_\lambda(y_N)\| + \|u_\lambda(y_N) - y_N\| + \|y_N - y\| \\
&< \|u_\lambda\|\|y - y_N\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, $(u_\lambda)_\lambda \to Id_H$. $\square$

**Definição 1.3.11.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e $(H, \pi)$ uma representação de $A$. Dizemos que a representação $(H, \pi)$ é Não Degenerada se a $C^*$-Álgebra $\pi(A)$ age não degeneradamente sobre $H$.*

**Teorema 1.3.12.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e $\gamma \in S(A)$. Então existe um vetor $x_\gamma \in H_\gamma$ tal que*

$$\gamma(a) = < \pi_\gamma(a)x_\gamma, x_\gamma > \text{ para todo } a \in A.$$

*Além disso, $\|x_\gamma\| = \|\gamma\| = 1$ e $x_\gamma$ é um vetor cíclico para $(H_\gamma, \pi_\gamma)$.*

Demonstração:

Inicialmente, note que, usando a igualdade (1) da seção 1.2,

$$\begin{aligned} |\gamma(a)| &= \lim_\lambda |\gamma(u_\lambda a)| \\ &\leq \lim_\lambda (\gamma(a^*a))^{\frac{1}{2}} (\gamma(u_\lambda^* u_\lambda))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|a + N_\gamma\| \|\gamma\|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí

$$|\gamma(a)| \leq \|a + N_\gamma\| \|\gamma\|^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Definamos o funcional $f : A/N_\gamma \to \mathbb{C}$ dado por $f(a + N_\gamma) = \gamma(a)$. É claro que $f$ é linear e por (2), $f$ está bem definido e é contínuo. Assim, $f$ pode ser estendido a um funcional linear $\widetilde{f}$ sobre $H_\gamma$ tal que $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$. Daí, pelo teorema de Riesz, existe um vetor $x_\gamma \in H_\gamma$ tal que $\gamma(a) = \widetilde{f}(a + N_\gamma) = < a + N_\gamma, x_\gamma >$, para todo $a \in A$.

Agora, para $a, b \in A$ temos que

$$\begin{aligned} < b + N_\gamma, \pi_\gamma(a)x_\gamma > &= < \pi_\gamma(a^*)(b + N_\gamma), x_\gamma > \\ &= < a^*b + N_\gamma, x_\gamma > \\ &= \gamma(a^*b) \\ &= < b + N_\gamma, a + N_\gamma > . \end{aligned}$$

Como isto ocorre para todo $b \in A$, temos que

$$\pi_\gamma(a)x_\gamma = a + N_\gamma, \text{ para todo } a \in A.$$

Assim, $[\pi_\gamma(A)x_\gamma]$ é denso em $H_\gamma$, já que $\overline{\{a + N_\gamma : a \in A\}} = H_\gamma$. Mostramos portanto que $x_\gamma$ é cíclico e que vale

$$\gamma(a) = < \pi_\gamma(a)x_\gamma, x_\gamma > \tag{3}.$$

Falta mostrar que $||x_\gamma|| = ||\gamma|| = 1$.

Como $[\pi_\gamma(A)x_\gamma]$ é denso em $H_\gamma$, concluímos que $\pi_\gamma(A)$ atua não degeneradamente sobre $H_\gamma$. Se $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma unidade aproximada em $A$, então $(\pi_\gamma(u_\lambda))_\lambda$ é unidade aproximada em $\pi_\gamma(A)$. Usando a Proposição 1.3.10, temos que $(\pi_\gamma(u_\lambda))_\lambda$ converge fortemente para $Id_{H_\gamma}$.

Daí, pela equação (3) temos que

$$\begin{aligned} ||x_\gamma||^2 &= < x_\gamma, x_\gamma > \\ &= \lim_\lambda < \pi_\gamma(u_\lambda)x_\gamma, x_\gamma > \\ &= \lim_\lambda \gamma(u_\lambda) \leq ||\gamma||. \end{aligned}$$

Mas, usando (3) novamente, vem que

$$\begin{aligned} |\gamma(a)| &= | < \pi_\gamma(a)x_\gamma, x_\gamma > | \\ &\leq ||\pi_\gamma(a)|| ||x_\gamma||^2 \quad \forall\ a \in A. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\pi_\gamma$ é contração, decorre que

$$\begin{aligned} ||\gamma|| &= \sup_{||a||\leq 1} |\gamma(a)| \\ &\leq \sup_{||a||\leq 1} ||\pi_\gamma(a)|| ||x_\gamma||^2 \\ &\leq ||x_\gamma||^2. \end{aligned}$$

Logo, $||x_\gamma||^2 = ||\gamma|| = 1$ e assim $||x_\gamma|| = 1$. □

## 1.4 $C^*$-álgebras de Dimensão Finita

O objetivo desta seção é provar que toda $C^*$-Álgebra de dimensão finita é isomorfa à uma soma direta de álgebra de matrizes.

**Definição 1.4.1.** *Uma $C^*$-Álgebra $A$ é Simples se $A$ e $\{0\}$ são os únicos ideais fechados de $A$.*

**Definição 1.4.2.** *Um subespaço vetorial fechado $V$ de $H$ é Invariante por um subconjunto $A \subseteq B(H)$ se é invariante por todo operador de $A$, isto é, $T(V) \subset V$ para todo $T \in A$.*

**Definição 1.4.3.** *Seja $A \subset B(H)$ uma $C^*$-subálgebra. $A$ é dita ser Irredutível ou age irredutivelmente sobre $H$ se os únicos subespaços vetoriais fechados de $H$ que são invariantes por $A$ são $H$ e $\{0\}$.*

**Definição 1.4.4.** *Uma representação $(H, \pi)$ de uma $C^*$-Álgebra $A$ é dita ser Irredutível se $\pi$ é não nula e se a álgebra $\pi(A)$ age irredutivelmente sobre $H$.*

**Definição 1.4.5.** *Uma $C^*$-Álgebra $A$ é Liminal se para toda representação irredutível $(H, \pi)$ de $A$, tem-se $\pi(A) = K(H)$, onde $K(H)$ é o conjunto dos operadores compactos de $B(H)$.*

**Proposição 1.4.6.** *Suponha que $(H, \pi)$ é uma representação irredutível de uma $C^*$-Álgebra $A$ e seja $x \in H$, $x \neq 0$. Então $\overline{[\pi(A)x]} = H$.*

Demonstração:

Seja $x \in H$, $x \neq 0$. É óbvio que $[\pi(A)x]$ é invariante por $\pi(A)$. Daí, como $(H, \pi)$ é irredutível, vem que $\overline{[\pi(A)x]} = 0$ ou $\overline{[\pi(A)x]} = H$. Como $\pi$ é não nulo, existe algum $y \in H$ e algum elemento $a \in A$ tal que $\pi(a)y \neq 0$. Daí, $\overline{[\pi(A)y]} = H$ e assim, $\pi$ é não degenerado. Desse modo, $\overline{[\pi(A)x]} \neq 0$ e, portanto, $\overline{[\pi(A)x]} = H$. □

**Observação 1.4.7.** *Vamos usar neste seção o fato de que se $A$ é uma $C^*$-Álgebra que age irredutivelmente sobre $H$ e $A \cap K(H) \neq \emptyset$, então $K(H) \subseteq A$ (conforme teorema 2.4.9 de [Murphy]).*

**Proposição 1.4.8.** *Toda $C^*$-Álgebra de dimensão finita é liminal.*

Demonstração:

Se $(H, \pi)$ é uma representação irredutível de $A$, pela Proposição 1.4.6, $H =[\pi(A)x]$, para todo $x$ não nulo em $H$. Daí, $dim(H) < \infty$. Com isso, $\pi(A) \subseteq B(H) = K(H)$. Usando a Observação 1.4.7, decorre que $\pi(A) = K(H)$. □

**Lema 1.4.9.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra de dimensão finita. Então $A$ é simples se e somente se $A = M_n(\mathbb{C})$, para algum $n$.*

Demonstração:

Vamos provar apenas a ida, pois a recíproca é trivial. Pela Proposição anterior, $A$ é liminal, isto é, $\pi(A) = K(H)$ para toda representação irredutível $\pi$, onde $H$ é de dimensão finita. Como $\pi$ é não nulo e $Ker(\pi)$ é um ideal próprio fechado de $A$, podemos usar a hipótese para obter $Ker(\pi) = \{0\}$. Assim, $\pi$ é fiel. Fazendo $n = dim(H)$, temos que $A \simeq \pi(A) = K(H) = B(H) = M_n(\mathbb{C})$. □

**Teorema 1.4.10.** *Se $A$ é uma $C^*$-Álgebra de dimensão finita não nula, então $A$ é $*$-isomorfa à soma direta $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$.*

Demonstração:

Se $A$ é simples, basta usar o lema anterior. Para o caso geral, vamos fazer por indução sobre $m = dim(A)$.

Já temos uma base para a indução, pois se $m = 1$, então $A \simeq \mathbb{C}$. Suponha então que vale para todas as dimensões menores que $m$. Podemos supor que $A$ não é simples, contendo assim um ideal próprio fechado $I$. Podemos supor além disso que $I$ é o ideal nestas condições que tem dimensão mínima. Neste caso, $I$ não contém ideais não triviais e, pelo Lema 1.4.9, $I \simeq M_{n_1}(\mathbb{C})$ para algum inteiro $n_1$.

Então $I$ tem uma unidade $p$ e além disso é fácil ver que $I = Ap$, com $p$ comutando com todos os elementos de $A$. Usando isso fica fácil ver que $A(1-p)$ também é $C^*$-subálgebra de $A$, e que a aplicação

$$A \to Ap \oplus A(1-p)$$

$$a \mapsto (ap, a(1-p))$$

é um $*$-homomorfismo.

Agora, como $A(1-p)$ tem dimensão menor que $m$, usamos a hipótese de indução para obter $A(1-p) \simeq M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$, para $n_2, \cdots, n_k$ inteiros.

Logo, $A \simeq Ap \oplus A(1-p) \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$. □

## 1.5 Limites Indutivos de $C^*$-álgebras

**Definição 1.5.1.** (a) *Uma Seminorma sobre um espaço vetorial $X$ é uma função $p$ sobre $X$ tal que*

*i.* $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

*ii.* $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ $\forall$ $x, y \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(b) *Uma $C^*$-Seminorma $p$ sobre uma $*$-álgebra $A$ é uma seminorma que satisfaz $\forall$ $x, y \in A$,*

*i.* $p(xy) \leq p(x)p(y)$

*ii.* $p(x^*) = p(x)$

*iii.* $p(x^*x) = p(x)^2$.

**Observação 1.5.2.** *Note que uma seminorma será uma norma se satisfizer $p(x) \neq 0$ quando $x \neq 0$. Na Definição 1.5.1 item (b), se $p$ for uma norma, então $p$ é chamada de $C^* - norma$.*

Como exemplo, seja $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo, onde $A$ é uma $*$-álgebra e $B$ é uma $C^*$-Álgebra . Então é fácil ver que a função

$$\begin{array}{rccc} p: & A & \to & \mathbb{R}_+ \\ & a & \mapsto & \|\varphi(a)\| \end{array}$$

é uma $C^*$-seminorma sobre $A$. Se $\varphi$ for 1-1, então $p$ é $C^*$-norma.

Agora seja $p$ uma $C^*$-seminorma sobre uma $*$-álgebra $A$. Então

$$N = \{a \in A \ : \ p(a) = 0\}$$

é um ideal auto-adjunto de $A$ e podemos obter uma $C^*$-norma sobre o quociente $A/N$ fazendo $\|a + N\| = p(a)$. Seja $B$ o completamento de $A/N$ nesta norma. Então a $C^*$-Álgebra $B$ será chamada de *$C^*$-Álgebra Envolvente* do par $(A, p)$ e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} i: & A & \rightarrow & B \\ & a & \mapsto & a+N \end{array}$$

é a aplicação canônica de $A$ em $B$.

**Definição 1.5.3.** *Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de $C^*$-Álgebras e suponha que para cada $n$ temos um $*$-homomorfismo $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$. Então diremos que a sequência $(A_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$ é uma Sequência Indutiva ou Sequência Direta de $C^*$-Álgebras .*

É fácil verificar que o produto cartesiano infinito $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ é uma $*$-álgebra com as operações definidas pontualmente e que o conjunto

$$A' = \{a = (a_k)_k \in \prod_{k=1}^{\infty} A_k \ : \ \text{existe } N \text{ com } a_{k+1} = \varphi_k(a_k) \text{ para todo } k \geq N\}$$

é uma $*$-subálgebra de $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$.

Vamos definir uma $C^*$-seminorma sobre $A'$. Veja que

$$\|a_{k+1}\| = \|\varphi_k(a_k)\| \leq \|a_k\| \ \forall \ k \geq N.$$

Assim, a sequência de números reais $(\|a_k\|)_k$ é eventualmente decrescente e limitada inferiormente. Seja então,

$$p(a) = \lim_k \|a_k\|$$

e definamos

$$\begin{array}{rccc} p: & A' & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & a & \mapsto & p(a) \end{array}$$

Uma rápida verificação mostra que $p$ é $C^*$-seminorma sobre $A'$.

**Definição 1.5.4.** *Seja $A$ a $C^*$-Álgebra envolvente de $(A', p)$. Dizemos que $A$ é o Limite Direto ou Limite Indutivo da sequência $(A_n, \varphi_n)$.*

Se $a \in A_n$, denotaremos por $\widehat{\varphi}_n(a) \in A'$ a sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ tal que

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0, \ a_n = a \text{ e } a_{n+k} = \varphi_{n,n+k}(a), \ k \geq 1,$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{n,n+k}: & A_n & \rightarrow & A_{n+k} \\ & a & \mapsto & \varphi_{n,n+k}(a), \end{array}$$

é dado por

$$\varphi_{n,n+k}(a) = (\varphi_{n+k-1} \circ \cdots \circ \varphi_{n+1} \circ \varphi_n)(a).$$

Escrevendo mais explicitamente, temos

$$\begin{array}{rccl} \widehat{\varphi}_n: & A_n & \to & A' \\ & a & \mapsto & \widehat{\varphi}_n(a), \end{array}$$

onde

$$\widehat{\varphi}_n(a) = (0, 0, \cdots, \underset{\text{posição n-1}}{0}, a, \varphi_n(a), \varphi_{n+1}(\varphi_n(a)), \cdots, \varphi_{n,n+k}(a), \cdots)$$

Seja $i : A' \to A$ a aplicação canônica. Considere agora a aplicação (geralmente chamada de *Aplicação natural*)

$$\begin{array}{rccl} \varphi^n: & A_n & \to & A \\ & a & \mapsto & i(\widehat{\varphi}_n(a)). \end{array}$$

É fácil ver que $\varphi^n$ é um $*$-homomorfismo. Além disso o diagrama abaixo comuta para todo $n$

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\varphi^n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

e a união $\bigcup\limits_{n\geq 1} (\varphi^n(A_n))$ é crescente e densa em $A$.

Na verdade, muito mais do que a densidade, nós temos que

$$\bigcup_{n\geq 1} (\varphi^n(A_n)) = A'/N,$$

onde $N = \{a \in A' \text{ tal que } p(a) = 0\}$. De fato, é fácil ver que $\bigcup\limits_{n\geq 1} (\varphi^n(A_n)) \subset A'/N$, pela própria definição de $\varphi^n$. Por outro lado, tomemos $a + N \in A'/N$. Lembremos que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que existe $n_0$ com $a_{n+1} = \varphi_n(a_n)$ para todo $n \geq n_0$. Note que

$$\widehat{\varphi}_{n_0}(a_{n_0}) = (0, 0, \cdots, 0, a_{n_0}, \varphi_{n_0}(a_{n_0}), \varphi_{n_0+1}(\varphi_{n_0}(a_{n_0})), \cdots, \varphi_{n_0,n_0+k}(a_{n_0}), \cdots).$$

Daí, $p(a - \widehat{\varphi}_{n_0}(a_{n_0})) = 0$ e assim

$$\begin{aligned} & \|a - \widehat{\varphi}_{n_0}(a_{n_0}) + N\| = 0 \\ \Rightarrow\ & \|a + N - \widehat{\varphi}_{n_0}(a_{n_0})\| = 0 \\ \Rightarrow\ & a + N = \widehat{\varphi}_{n_0}(a_{n_0}). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos $\bigcup\limits_{n\geq 1} (\varphi^n(A_n)) = A'/N$.

Veja também que para $a \in A_n$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\varphi^n(a)\| &= \|i(\widehat{\varphi}_n(a)\| \\
&= \|\widehat{\varphi}_n(a) + N\| \\
&= p(\widehat{\varphi}_n(a)) \\
&= p((0,0,\cdots,0,a,\varphi_n(a),\varphi_{n+1}\varphi_n(a),\cdots)) \\
&= \lim_{k\to\infty} \|\varphi_{n,n+k}(a)\|.
\end{aligned}
$$

**Teorema 1.5.5.** *Seja $A$ o limite indutivo da sequência indutiva de $C^*$-Álgebras $(A_n,\varphi_n)_{n\geq 1}$ e $\varphi^n : A_n \to A$ a aplicação natural. Temos que*

*i. Se $a \in A_n$, $b \in A_m$, $\varepsilon > 0$ e $\varphi^n(a) = \varphi^m(b)$, então existe $k \geq n, m$ tal que $\|\varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b)\| < \varepsilon$.*

*ii. Se $B$ é uma $C^*$-Álgebra e existe um $*$-homomorfismo $\psi^n : A_n \to B$ para cada $n$ tal que o diagrama abaixo*

$$
\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\psi^{n+1}"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

*comuta, então existe um único $*$-homomorfismo $\psi : A \to B$ tal que para cada $n$ o diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A \arrow[d, "\psi"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

*comuta*

Demonstração:

(i) Já vimos que $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_{n,n+j}(a)\| = \|\varphi^n(a)\|$, $a \in A_n$. Sejam $n, m$ e $p$ naturais fixos. Daí, $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_{n,p+j}(a) - \varphi_{m,p+j}(b)\| = \|\varphi^n(a) - \varphi^m(b)\| = 0$. Desse modo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $j_0$ tal que $\|\varphi_{n,p+j_0}(a) - \varphi_{m,p+j_0}(b)\| < \varepsilon$. Chamando $k = p + j_0$ obtemos o resultado desejado.

(ii) Antes de definirmos a aplicação $\psi$, vamos verificar alguns fatos que farão com que $\psi$ fique bem definida.

Seja $a \in A_n$ e $b \in A_m$ tal que $\varphi^n(a) = \varphi^m(b)$. Usando a hipótese e o item (i), temos que para todo $k \geq n, m$ e para todo $\varepsilon > 0$

$$\|\psi^n(a) - \psi^m(b)\| = \|\psi^k(\varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b))\| \leq \|\varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b)\| < \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\psi^n(a) = \psi^m(b)$.

Definamos

$$\psi_0 : C = \bigcup_{n\geq 1} \varphi^n(A_n) \subset A \to B$$

$$\psi_0(\varphi^n(a)) = \psi^n(a)$$

Note que $\psi_0$ está bem definida, pois se $x \in C$, podemos ter $x = \varphi^n(a)$ e $x = \varphi^m(b)$. Mas já vimos que se $\varphi^n(a) = \varphi^m(b)$, então $\psi^n(a) = \psi^m(b)$.

Agora, para qualquer $k$ inteiro, temos

$$\begin{aligned}\|\psi^n(a)\| &= \|\psi^{n+k}(\varphi_{n,n+k}(a))\| \\ &\leq \|\varphi_{n,n+k}(a)\|.\end{aligned}$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned}\|\psi_0(\varphi^n(a))\| &= \|\psi^n(a)\| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \|\varphi_{n,n+k}(a)\| \\ &= \|\varphi^n(a)\|.\end{aligned}$$

Portanto, $\psi_0$ é norma decrescente.

$\psi_0$ é um $*$-homomorfismo. De fato, note primeiro que

$$\begin{aligned}\psi_0(\varphi^n(a)^*) &= \psi_0(\varphi^n(a^*)) \\ &= \psi^n(a^*) \\ &= \psi^n(a)^* \\ &= [\psi_0(\varphi^n(a))]^*.\end{aligned}$$

Além disso, para verificar que $\psi_0$ é linear e multiplicativo, tome $x, y \in \cup\varphi^n(A_n)$. Como essa união é crescente, existe $k$ tal que $x, y \in \varphi^k(A_k)$. Daí, como $\varphi^k$ é homomorfismo, segue o resultado.

Finalmente, como $C = \bigcup_{n\geq 1} \varphi^n(A_n)$ é denso em $A$, podemos estender $\psi_0$ a um $*$-homomorfismo $\psi : A \to B$ satisfazendo $\psi(\varphi^n) = \psi^n$. A unicidade de $\psi$ decorre da densidade de $C$ em $A$.

□

**Corolário 1.5.6.** *Seja $B$ uma $C^*$-Álgebra , $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência crescente de $C^*$-subálgebras de $B$ tal que $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ é densa em $B$ e seja $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ a aplicação de inclusão. Então $B$ é $*$-isomorfa ao limite indutivo da sequência $(A_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$.*

Demonstração:

Definamos $\psi^n : A_n \to B$ a aplicação de inclusão. Então, pelo item (ii) do Teorema 1.5.5, existe um único $*$-homomorfismo $\psi : A \to B$ tal que para cada $n$ o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A \arrow[d, "\psi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

onde A é o limite indutivo da sequência $(A_n.\varphi_n)_{n\geq 1}$ e $\varphi^n$ é a aplicação natural.

Vamos mostrar que $\psi$ é bijetor. Inicialmente, note que $\psi$ é isometria, pois se $a_n \in A_n$, então

$$\begin{aligned} \|a_n\| &= \|\psi^n(a_n)\| \\ &= \|\psi(\varphi^n(a_n))\| \\ &\leq \|\varphi^n(a_n)\| \\ &\leq \|a_n\| \\ &\Rightarrow \|\psi(\varphi^n(a_n))\| = \|\varphi^n(a_n)\| \\ &\Rightarrow \|\psi(x)\| = \|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in \bigcup_{n\geq 1} \varphi^n(A_n) \\ &\Rightarrow \|\psi(x)\| = \|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in A. \end{aligned}$$

Assim $\psi$ é injetor.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \psi(A) \supseteq \psi(\varphi^n(A_n)) &= \psi^n(A_n) \\ &= A_n \quad \text{para todo} \quad n \\ &\Rightarrow \psi(A) \supseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n \\ &\Rightarrow \overline{\psi(A)} \supseteq \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = B. \end{aligned}$$

Mas, como $\psi(A)$ é fechado (conforme o Teorema 3.1.6 de [Murphy]), $\psi(A) = B$. Daí, $\psi$ é sobrejetora.

Logo, $\psi$ é um $*$-isomorfismo. $\square$

# Capítulo 2

# Quais são os morfismos de $\bigoplus_{j=1}^{s} M_{p_j}(\mathbb{C})$ em $\bigoplus_{k=1}^{r} M_{q_k}(\mathbb{C})$?

## 2.1 Os Estados Puros de $M_n(\mathbb{C})$

Já vimos a definição de estado puro na Seção 1.2. No entanto, existe uma caracterização interessante para um estado puro sobre uma $C^*$-Álgebra , que é a seguinte:

*Um estado $f$ sobre uma $C^*$-Álgebra $A$ é puro se e somente se a representação $(H_f, \pi_f)$ é irredutível.*

O leitor interessado poderá obter a demonstração desse fato na seção 5.1 de [Murphy].

Vamos então encontrar os estados puros de $M_n(\mathbb{C})$, ou seja, aqueles que geram as representações irredutíveis de $M_n(\mathbb{C})$.

**Observação 2.1.1.** *A fim de simplificar a notação, daqui em diante denotaremos a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ apenas por $M_n$ e não mais $M_n(\mathbb{C})$.*

Agora vamos relembrar um importante fato da álgebra linear.

**Proposição 2.1.2.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $f$ um funcional linear sobre $V$. Então existe um único vetor $y$ em $V$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in V$.*

Demonstração:

Seja $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ uma base ortonormal de $V$. Coloquemos

$$y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(\alpha_i)}\alpha_i$$

e seja $f_y$ o funcional linear definido por

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle.$$

Daí, $f_y(\alpha_k) = \langle \alpha_k, y\rangle = \langle \alpha_k, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(\alpha_i)}\alpha_i\rangle = f(\alpha_k)$.

Como isto é válido para todo $\alpha_k$, decorre que $f(x) = f_y(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in V$.

Vamos demonstrar a unicidade de $y$. Suponha que exista $z \in V$ tal que $\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in V$. Isto é equivalente a $\langle x, z-y\rangle = 0$ para todo $x \in V$. Daí, em particular tomando $x = z - y$, obtemos $\langle z-y, z-y\rangle = 0$ e assim $z = y$.

□

Agora considere $M_n$ com o produto interno $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(Y^*X)$, e seja $\varphi$ um funcional linear sobre $M_n$. Pela Proposição 2.1.2 existe $B \in M_n$ tal que

$$\varphi_B(A) = \mathrm{tr}(B^*A), \text{ para todo } A \in M_n.$$

Sem perda de generalidade, vamos prosseguir nossa discussão com o funcional $\varphi_B(A) = \mathrm{tr}(BA)$.

**Proposição 2.1.3.** *$\varphi_B(A) = tr(BA)$ é funcional positivo se e somente se $B$ é matriz positiva.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se $B$ é positiva, então existe $C \in M_n$ tal que $B = C^*C$. Daí,

$$\varphi_B(A^*A) = \mathrm{tr}(C^*CA^*A) = \mathrm{tr}(CA^*AC^*) = \mathrm{tr}(CA^*(CA^*)^*) \geq 0.$$

($\Rightarrow$) Primeiro vamos provar que $B = B^*$. Note que

$$\mathrm{tr}(B^*A) = \mathrm{tr}((A^*B)^*) = \overline{\mathrm{tr}(A^*B)}.$$

Tomando $A \geq 0$, $A^* = A$, e usando a hipótese, vem que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi_B(A) := \mathrm{tr}(BA) \\ &= \mathrm{tr}(AB) \\ &= \mathrm{tr}(A^*B) \\ &= \overline{tr(A^*B)} \\ &= \mathrm{tr}(B^*A) \\ &= \varphi_{B^*}(A). \end{aligned}$$

Daí, $\varphi_B = \varphi_{B^*}$ sobre $M_n^+$.

Assim, se $A \in M_n$, existem $U$ e $V$ positivas tais que $A = U + iV$, onde $U = U^+ - U_-$ e $V = V^+ - V_-$. Logo, $\varphi_B(A) = \varphi_B{}^*(A)$ para todo $A \in M_n$ e assim $B = B^*$, pela Proposição 2.1.2.

Agora vamos provar que $\sigma(B) \subset \mathbb{R}_+$. Como $B = B^*$, pelo teorema espectral $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, onde os $\lambda_i$'s são os autovalores de $B$ e $P_i$'s são as projeções ortogonais sobre os autoespaços, para todo $1 \leq i \leq n$.

Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(P_i^* P_i) \\ &= \varphi(P_i) \\ &= \text{tr}(BP_i) \\ &= \text{tr}([\sum_j \lambda_j P_j] P_i) \\ &= \lambda_i \text{tr}(P_i) > 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\sigma(B) \subset \mathbb{R}_+$. $\square$

**Proposição 2.1.4.** *Seja $\varphi_B(A) = tr(BA)$ onde $B \geq 0$. Então $\|\varphi_B\| = tr(B)$.*

Demonstração:

Sendo $B \geq 0$, segue da Proposição 2.1.3 que $\varphi_B$ é positivo. Usando o Lema 1.2.4, decorre que $\|\varphi_B\| = \varphi_B(I) = \text{tr}(B)$.

**Observação 2.1.5.** *Uma consequência imediata da proposição anterior é que $\varphi_B$ é estado se e somente se $tr(B) = 1$.*

**Lema 2.1.6.** *Seja $P \in M_n$ tal que $P^2 = P^* = P$ e $tr(P) = 1$. Então $P$ é ponto extremo do conjunto $\mathcal{C} = \{B \in M_n,$ tal que $B \geq 0$ e $tr(B) = 1\}$.*

Demonstração:

Suponha que existam $B, C \in \mathcal{C}$ tal que $P = \lambda B + (1 - \lambda)C$, com $\lambda \in (0, 1)$. Então $0 \leq \lambda B \leq P$. Sendo $\lambda B$ matriz positiva, pelo teorema espectral temos que $\lambda B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i$.

Para todo $1 \leq k \leq n$, temos que $0 \leq \lambda_k Q_k \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i \leq P$. Tomando $\xi \in \text{Ker}(P)$ temos que

$$\begin{aligned} & 0 \leq \langle \lambda_k Q_k \xi, \xi \rangle \leq \langle P\xi, \xi \rangle = 0 \\ \Rightarrow\ & 0 \leq \lambda_k \langle Q_k \xi, Q_k \xi \rangle = 0 \\ \Rightarrow\ & \xi \in \text{Ker}(Q_k)\ \ \forall\, k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Assim, $\text{Ker}(P) \subseteq \text{Ker}(Q_k)$. Além disso, como $P$ é projeção e tem posto 1, implica que $\text{Ker}(P) = \text{Ker}(Q_k)$, pois se não fosse $Q_k$ seria nulo.

Logo, $P = Q_k$ para todo $k = 1, ..., n$ e assim $\lambda B = \mu P$, onde $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. De forma análoga existe $\gamma$ tal que $(1-\lambda)C = \gamma P$. Daí

$$B = \frac{\mu}{\lambda} P \quad \text{e} \quad C = \frac{\gamma}{1-\lambda} P.$$

Como $\text{tr}(B) = \text{tr}(C) = \text{tr}(P) = 1$, decorre que $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\gamma}{1-\lambda} = 1$ e assim $P = B = C$. □

**Teorema 2.1.7.** *Seja $\varphi$ um estado sobre $M_n$. Então $\varphi$ é puro se e somente se para todo $A \in M_n$ tem-se $\varphi(A) = \varphi_P(A) = tr(PA)$, onde $P$ é projeção de posto 1.*

Demonstração:

$\Rightarrow$ Seja $\varphi$ um estado sobre $M_n$. Com base nos resultados já obtidos até o momento nesta Seção, temos que existe $B \in M_n$, $B \geq 0$ e $\text{tr}(B) = 1$ tal que

$$\varphi(A) = \varphi_B(A) = \text{tr}(BA).$$

Além disso, sabemos que $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, com $\text{posto}(P_i) = 1$, $i = 1, ..., n$. Temos assim

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i = \sum_i \lambda_i \text{posto}(P_i) = \sum_i \lambda_i \text{tr}(P_i) = \text{tr}(\sum_i \lambda_i P_i) = \text{tr}(B) = 1 \\ \text{e} \\ \varphi_B(A) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(\sum_i \lambda_i P_i A) = \sum_i \lambda_i \text{tr}(P_i A) = \sum_i \lambda_i \varphi_{P_i}(A) \end{cases}$$

Como $\varphi_B = \varphi$ é puro, usamos a Proposição 1.2.11 e a Proposição 1.2.8 para obter $\varphi = \varphi_{P_i}$ para todo $i$ e assim $\varphi(A) = \varphi_P(A) = \text{tr}(PA)$, onde $P$ é projeção de posto 1.

$\Rightarrow$ Seja $\varphi_P(A) = \text{tr}(PA)$, onde $P$ é projeção de posto 1. Vamos mostrar que $\varphi_P(A)$ é puro.

Suponha que $\varphi_P(A) = \text{tr}(PA) = \lambda\psi_1(A) + (1-\lambda)\psi_2(A)$, $\lambda \in (0,1)$. Daí, pela Proposição 2.1.2 existem $B, C \in M_n$ tais que

$$\text{tr}(PA) = \lambda \text{tr}(BA) + (1-\lambda)\text{tr}(CA).$$

Isso implica em

$$\text{tr}(PA) = \text{tr}([\lambda B + (1-\lambda)C]A).$$

Novamente pela Proposição 2.1.2 temos que

$$P = \lambda B + (1-\lambda)C.$$

Usando o Lema anterior, vem que $P = B = C$ e assim $\varphi_P = \psi_1 = \psi_2$. Portanto, $\varphi_P$ é puro. □

## 2.2 As Representações Irredutíveis de $M_n(\mathbb{C})$

Concluímos na seção anterior que os estados puros de $M_n$ são da forma

$$\varphi_P(A) = tr(PA), \quad \text{onde} \quad P = P^* = P^2 \ \text{ e posto}(P) = 1.$$

Vamos tentar identificar a matriz que representa $P$.

Como $P = P^*P = P^2$ e posto$(P) = 1$, a imagem de $P$ tem dimensão 1, isto é, existe um vetor $v$, $\|v\| = 1$, tal que $\text{Im}(P) =< v >$ e $P(x) = \langle x, v\rangle v$.

Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a matriz de $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ com bases canônicas. Então

$$a_{ij} = \langle Pe_j, e_i\rangle = \langle\langle e_j, v\rangle v, e_i\rangle = \langle e_j, v\rangle\langle v, e_i\rangle = \langle v, e_i\rangle\overline{\langle v, e_j\rangle} = v_i\overline{v_j}.$$

Vamos usar isto para provar a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.1.** *Se $P \in M_n$ é tal que $P = P^*P = P^2$ e posto$(P) = 1$, então $P$ é unitariamente equivalente a*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração:

Temos que $P(x) = \langle x, v\rangle v$. Sabemos que existe um unitário $U \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $U(e_1) = v$. Daí, $U^*PU(e_1) = U^*P(v) = U^*(v) = e_1$. Chame $Q = U^*PU$.

Temos que

$$Q^2 = U^*PUU^*PU = U^*P^2U = U^*PU = Q \text{ e}$$

$$Q^* = (U^*PU)^* = U^*P^*U = U^*PU = Q$$

Além disso, é fácil ver que *posto*$(Q)$ = *posto*$(P) = 1$. Agora sabemos que $Q$ é um operador idempotente e de posto 1. Logo, $Q(x) = \langle x, w\rangle w$, para algum $w \in M_n$. Desse modo, a matriz de $Q(x)$ é da forma

$$b_{ij} = w_i\overline{w_j}.$$

Combinando a isto o fato de que $Q(e_1) = e_1$, vem que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Agora vamos estudar a representação GNS associada a

$$\varphi_Q(A) = tr(QA).$$

Seja $N_{\varphi_Q} = \{A \in M_n$ tal que $\varphi_Q(A^*A) = tr(QA^*A) = 0\}$. Vamos fixar $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Seja também $(d_{ij})_{n\times n} = D = QA^*A$.

É fácil ver que $d_{11} = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2$ e $d_{ii} = 0$ para $2 \leq i \leq n$. Daí, $tr(QA^*A) = 0$ se e somente se $\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2 = 0$, pois $\text{tr}(QA^*A) = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|^2$. Com isso $a_{i1} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Logo, $N_{\varphi_Q} = \{A \in M_n$ tal que a primeira coluna de $A$ é nula$\}$. Agora temos que $M_n/N_{\varphi_Q} = \{S + N_{\varphi_Q} : s \in M_n\}$, com dimensão igual a $n^2 - (n^2 - n) = n$.

Não é difícil ver que dois elementos $S + N_{\varphi_Q}$ e $S' + N_{\varphi_Q}$ em $M_n/N_{\varphi_Q}$ são distintos se e somente se as matrizes $S$ e $S'$ diferem na primeira coluna. Desse modo o espaço $M_n/N_{\varphi_Q}$ é identificado com um espaço vetorial de dimensão $n$ da seguinte forma:

$$M_n/N_{\varphi_Q} \ni S + N_{\varphi_Q} \mapsto (s_{11}, s_{21}, ..., s_{n1}),$$

onde $s_{11}, s_{21}, ..., s_{n1}$ são os elementos da primeira coluna de $S$.

Seja $\beta$ uma base ortonormal para $M_n/N_{\varphi_Q}$ e seja $\beta'$ uma base ortonormal para $\mathbb{C}^n$. Então existe um isomorfismo entre $M_n/N_{\varphi_Q}$ e $\mathbb{C}^n$, que é dado pela matriz mudança de base $V$ de $\beta$ para $\beta'$. Assim, $[x]_\beta = V_{[x]'_\beta}$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Naturalmente, $V$ é unitária. Além disso $B(M_n/N_{\varphi_Q})$ e $B(\mathbb{C}^n)$ são isomorfos como segue:

$$B(M_n/N_{\varphi_Q}) \ni [T]_\beta \mapsto [T]_{\beta'} = V^{-1}[T]_\beta V \in B(\mathbb{C}^n).$$

Agora, continuando com a construção GNS, se $A \in M_n(\mathbb{C})$, definimos o operador $\pi(A) \in B(M_n/N_{\varphi_Q})$ por

$$M_n \ni A \mapsto \pi(A)(S + N_{\varphi_Q}) = AS + N_{\varphi_Q}.$$

Mas, se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $S = (s_{ij})_{n\times n}$, então a classe $AS + N_{\varphi_Q}$ é o vetor

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}s_{i1}, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}s_{i1}, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{ni}s_{i1}) = A. \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{2n} \end{bmatrix}_\beta .$$

Finalmente, como $B(M_n/N_{\varphi_Q}) \simeq B(\mathbb{C}^n)$, podemos obter a representação

$$\pi_{\varphi_Q} : M_n \mapsto B(\mathbb{C}^n), \quad \text{dada por}$$

$$M_n(\mathbb{C}) \ni A \mapsto [A]_\beta \in B(M_n/N_{\varphi_Q}) \mapsto [A]_{\beta'} = V^{-1}[A]_\beta V,$$

isto é

$$\pi_{\varphi_Q}(A) = V^{-1}AV, \quad \text{onde } V \text{ é unitária.}$$

Agora voltemos ao caso geral do funcional $\varphi_P(A) = tr(PA)$. Note que $\varphi_P(A) = \mathrm{tr}(PA) = \mathrm{tr}(AUQU^*) = \mathrm{tr}(U^*AUQ) = \varphi_Q(U^*AU)$. Definamos o automorfismo

$$\begin{aligned} \alpha : M_n(\mathbb{C}) &\mapsto M_n(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto U^*AU \end{aligned}$$

Daí, $\varphi_P = \varphi_Q \circ \alpha$. Temos assim as representações:

$$M_n \overset{\pi_{\varphi_Q}}{\to} B(H_{\varphi_Q}) \text{ e } M_n \overset{\pi_{\varphi_P}}{\to} B(H_{\varphi_P}), \text{ com } H_{\varphi_Q} \simeq H_{\varphi_P}.$$

Podemos então considerar $H_{\varphi_Q} = H_{\varphi_P} =: H$. Vamos provar que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "\pi_{\varphi_Q}"] & B(H) \\ M_n \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "\pi_{\varphi_P}"'] & \end{tikzcd}$$

isto é, vamos provar que $H_{\varphi_P} = H_{\varphi_Q} \circ \alpha$.

Temos que $\varphi_P(A) = \langle \pi_{\varphi_P}(A)h, h\rangle$, para todo $h \in H$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_P(A) &= \varphi_Q \circ \alpha(A) \\ &= \varphi_Q(\alpha(A)) \\ &= \langle \pi_{\varphi_Q}(\alpha(A))h, h\rangle \\ &= \langle (\pi_{\varphi} \circ \alpha)(A)h, h\rangle, \end{aligned}$$

para todo $h \in H$.

Logo, $\pi_{\varphi_P} = \pi_{\varphi_Q} \circ \alpha$.

<u>Conclusão</u>: as representações irredutíveis de $M_n$ são da forma

$$\pi_{\varphi_P} : M_n(\mathbb{C}) \to B(H),$$

onde $H = \mathbb{C}^n$ e $\pi_{\varphi_P}(A) = (\pi_{\varphi_Q} \circ \alpha)(A) = \pi_{\varphi_Q}(U^*AU) = V^*U^*AUV$. Chamando $UV = W$, temos que $\pi_{\varphi_P}(A) = W^*AW$, com $W$ unitário.

## 2.3 Quais são os Morfismos de $M_n(\mathbb{C})$ em $M_m(\mathbb{C})$?

**Teorema 2.3.1.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e $\pi : A \to B(H)$ um $*$-homomorfismo. Então existem subespaços invariantes $H_1$ e $H_0$ tais que $H = H_0 \oplus H_1$, e $*$-homomorfismos $\pi_1 : A \to B(H_1)$ e $\pi_0 : A \to B(H_0)$ dados por $\pi_1 = \pi_{|H_1}$ e $\pi_0 = \pi_{|H_0}$, tais que $\pi_0 \equiv 0$ e $\pi_1$ é não degenerado. Consequentemente $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$.*

Demonstração:

Seja $H_1 = \overline{span}\{\ \pi(a)x :\ a \in A \text{ e } x \in H\}$ e $H_0 = H_1^{\perp}$. Seja $y \in H_0$. Então $\langle \pi(a)y, x\rangle = \langle y, \pi(a^*)x\rangle = 0$ para todo $x \in H$ e $a \in A$, já que $y \in H_0$ e $\pi(a^*x) \in H_1$. Assim, $\pi_0 = \pi_{|H_0} \equiv 0$ e $H_0$ é invariante por $\pi$.

Agora, seja $y \in H_1$. Então $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} \pi(a_i^n)x_i^n$, com $a_i^n \in A$, $x_i^n \in H$, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \le i \le k_n$. Daí, $\pi(a)y = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} \pi(aa_i^n)x_i^n \in H_1$.

Logo, $H_1$ é invariante. Além disso, note que

$$\begin{aligned} H_1 &= \overline{\text{span}}\{\pi(a)x,\ a \in A,\ x \in H\} \\ &= \overline{\text{span}}\{\pi(a)(x_0 + x_1),\ a \in A,\ x_0 + x_1 \in H_0 \oplus H_1\} \\ &= \overline{\text{span}}\{\pi_0(a)x_0 + \pi_1(a)x_1,\ a \in A,\ x_0 + x_1 \in H_0 \oplus H_1\} \\ &= \overline{\text{span}}\{\pi_1(a)x_1,\ a \in A,\ x_1 \in H_1\}, \end{aligned}$$

provando assim que $\pi_1$ é não degenerado. $\square$

**Lema 2.3.2.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra , $\pi : A \to B(H)$ um $*$-homomorfismo e $H_1$ um subespaço de $H$. Então se $H_1$ é invariante por $\pi(A)$, $H_1^{\perp}$ também o é.*

Demonstração:

Temos por hipótese que $\pi(a)x \in H_1$ para todo $x \in H_1$ e $a \in A$. Seja $y \in H_1^{\perp}$. Note que

$$\langle \pi(a)y, x\rangle = \langle y, \pi(a)^*x\rangle = \langle y, \pi(a^*)x\rangle = 0, \quad \forall\ x \in H_1,\ a \in A.$$

Logo, $\pi(a)y \in H_1^{\perp}$ e assim $H_1^{\perp}$ é invariante por $\pi(A)$. $\square$

**Teorema 2.3.3.** *Seja $\pi : A \to B(H)$ uma representação não degenerada com $dim(H) < \infty$. Então $\pi$ é soma direta de representações irredutíveis.*

Demonstração:

Vamos fazer por indução sobre a dimensão de $H$. Se $dim(H) = 1$, então é verdade, pois $H$ só tem subespaços triviais.

Suponhamos que vale para $k < n$ e seja $n = dim(H)$. Se $\pi$ for irredutível, não há o que fazer. Podemos então supor que $\pi$ não é irredutível. Então existe um subespaço não trivial $H_1$ invariante por $\pi(A)$. Pelo Lema anterior, $H_1^{\perp}$

também é invariante por $\pi(A)$ e assim $\pi$ se decompõe na forma $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$, onde $\pi_1 = \pi(a)_{|H_1}$ e $\pi_2 = \pi(a)_{|H_1^\perp}$. Vamos mostrar que $\pi_1$ e $\pi_2$ são não degeneradas.

Suponha, por exemplo, que $\pi_1$ é degenerada. Pela Proposição 1.3.9 existe $x_1$ não nulo em $H_1$ tal que $\pi_1(a)x_1 = 0$ para todo $a \in A$. Desse modo, $\pi(a)x_1 = \pi_1(a)x_1 = 0$ para todo $a \in A$ e portanto $\pi$ é degenerada, contradizendo a hipótese. Assim, $\pi_1$ e $\pi_2$ são não degeneradas.

Além disso, como $dim(H_1), dim(H_1^\perp) < n$, usamos a hipótese de indução para concluir que $\pi_1$ e $\pi_2$ são soma direta de representações irredutíveis. Assim, $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ também será, como desejávamos. □

**Corolário 2.3.4.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e seja $\pi : A \to B(H)$ uma representação com $dim(H) < \infty$. Então $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$, onde $\pi_0$ é nula e $\pi_1$ é soma direta de representações irredutíveis.*

Demonstração:

Decorre trivialmente dos dois teoremas anteriores. □

Finalmente, podemos enunciar o

**Teorema 2.3.5.** *Seja $\varphi : M_k \to M_n$ $(k \leq n)$ um morfismo. Então $\varphi$ tem a forma*

$$\varphi(a) = U \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1 a V_1^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j a V_j^* \end{pmatrix} U^*,$$

*onde $U \in M_n$ e $V_1, ..., V_j \in M_k$ são matrizes unitárias.*

Demonstração:

Inicialmente, lembremos que existe um isomorfismo entre $M_n$ e $B(\mathbb{C}^n)$ dado por

$$\begin{array}{rccl} \psi : & B(\mathbb{C}^n) & \to & M_n \\ & T & \overset{\psi}{\mapsto} & A = [T]_\alpha, \end{array}$$

onde $\alpha$ é base ortonormal de $\mathbb{C}^n$.

Agora, seja $\pi : M_k \to B(\mathbb{C}^n)$ uma representação. Pelo Corolário 2.3.4, $\mathbb{C}^n$ se decompõe em subespaços $H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_j = \mathbb{C}^n$ e $\pi$ se decompõe em $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_j$ de tal modo que $\pi_0(a) = \pi(a)_{|H_0} \equiv 0$ e $\pi_i(a) = \pi(a)_{|H_i}$ é irredutível, para $1 \leq i \leq j$.

Como $\pi_i$, $1 \leq i \leq j$, é irredutível, usamos o resultado da Seção 2.2 para obter

$$\pi_i(a) = V_i a V_i^* \text{ com } V_i \in M_k \text{ unitário.}$$

Assim,

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1 a V_1^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j a V_j^* \end{pmatrix}.$$

Agora, sejam $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_j$ bases ortonormais para $H_0, H_1, ..., H_j$, respectivamente. Então $\beta = \bigoplus_{i=0}^{j} \beta_i$ é uma outra base ortonormal para $H$.

Sabemos também como relacionar $B(\mathbb{C}^n)$ na base $\beta$ com $B(\mathbb{C}^n)$ na base $\alpha$. Este isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{rccc} \psi': & B(\mathbb{C}^n)_\beta & \to & B(\mathbb{C}^n)_\alpha \\ & A & \overset{\psi'}{\mapsto} & UAU^*, \end{array}$$

onde $U \in M_n(\mathbb{C})$ é matriz unitária.

Resumindo o que fizemos até agora através do diagrama

$$M_k(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} B(\mathbb{C}^n)_\beta \xrightarrow{\psi'} B(\mathbb{C}^n)_\alpha \xrightarrow{\psi} M_n(\mathbb{C}),$$

temos que $\varphi(a) = (\psi \circ \psi' \circ \pi)(a)$, isto é,

$$\varphi(a) = U \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1 a V_1^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j a V_J^* \end{pmatrix} U^*.$$

□

**Corolário 2.3.6.** *Todo morfismo $\varphi : M_k \to M_n$, $k \leq n$ é da forma*

$$\varphi(a) = W \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} W^*,$$

*onde $W \in M_n$ é matriz unitária.*

Demonstração:

Usando o Teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= U\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1 a V_1^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j a V_j^* \end{pmatrix} U^* \\ &= U\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j^* \end{pmatrix} U^*.\end{aligned}$$

Fazendo

$$W = U\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & V_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_j \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\varphi(a) = W\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} W^*.$$

□

Finalmente, vamos mostrar com são os morfismos de $\bigoplus_{j=1}^{s} M_{p_j}(\mathbb{C})$ em $\bigoplus_{k=1}^{r} M_{q_k}(\mathbb{C})$, já que este é o objetivo principal deste Capítulo.

**Teorema 2.3.7.** *Todo morfismo $\varphi$ de $A = \bigoplus_{j=1}^{s} M_{p_j}(\mathbb{C})$ em $B = \bigoplus_{k=1}^{r} M_{q_k}(\mathbb{C})$ é unitariamente equivalente à aplicação*

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_s) \longmapsto \Big(&(\underbrace{a_1 \oplus \ldots \oplus a_1}_{\lambda_{11}} \oplus \underbrace{a_2 \oplus \ldots \oplus a_2}_{\lambda_{12}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{a_s \oplus \ldots \oplus a_s}_{\lambda_{1s}} \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{h_1}) \\ &, \ldots, \\ &(\underbrace{a_1 \oplus \ldots \oplus a_1}_{\lambda_{r1}} \oplus \underbrace{a_2 \oplus \ldots \oplus a_2}_{\lambda_{r2}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{a_s \oplus \ldots \oplus a_s}_{\lambda_{rs}} \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{h_r})\Big),\end{aligned}$$

*onde os números $\lambda_{kj}$ e $h_k$ satisfazem*

$$\sum_{j=1}^{s} \lambda_{kj} + h_k = q_k, \quad \forall \quad k = 1, \ldots, r.$$

Demonstração:

Note inicialmente que se $a \in A$, então $\varphi(a) = (\varphi_1(a), \varphi_2(a), ..., \varphi_r(a))$, onde $\varphi_k(a) : A \to M_{q_k}(\mathbb{C})$. Então basta estudar o caso

$$\varphi : A \to M_q(\mathbb{C}) \simeq B(H), \quad \text{onde} \quad H = \mathbb{C}^q.$$

Definamos $H_j = \overline{[\varphi(M_{p_j}(\mathbb{C}))H]}$. É fácil ver que $H_1, ..., H_s$ são subespaços ortogonais de $H$ e que $H = H_1 \oplus, ..., \oplus H_s$.

Dessa forma, $\varphi_{|M_{p_j}} \subseteq B(H)$ age apenas no subespaço $H_j$. Podemos assim usar o Corolário 2.3.6 para obter

$$\varphi\Big((0, ..., 0, a_j, 0, ..., 0)\Big) = \Big(0 \oplus ... \oplus 0 \oplus W_j(a_j \oplus ... \oplus a_j \oplus 0)W_j^* \oplus 0 ... \oplus 0\Big),$$

onde $W_j$ é um unitário em $B(H_j)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi\Big((a_1, ..., a_s)\Big) &= \varphi\Big((a_1, 0, ..., 0)\Big) + \varphi\Big((0, a_2, ..., 0)\Big) + ... + \varphi\Big((0, 0, ..., a_s)\Big) \\
&= \Big(W_1(a_1 \oplus ... \oplus a_1 \oplus 0)W_1^* \bigoplus W_2(a_2 \oplus ... \oplus a_2 \oplus 0)W_2^* \\
&\quad \bigoplus ... \bigoplus W_s(a_s \oplus ... \oplus a_s \oplus 0)W_s^*\Big) \\
&= W \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a_1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & a_s & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_s & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} W^*,
\end{aligned}$$

onde

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_s \end{pmatrix}$$

É fácil ver que basta compor a matriz de $\varphi(a)$ obtida acima por um outro operador unitário para "levar" a quantidade $h_j$ de zeros para o último bloco.

Portanto, obtemos o resultado desejado notanto que este procedimento pode ser feito para todos os fatores $M_{p_j}$, $j = 1, ..., r$. □

# Capítulo 3

# AF-Álgebras

## 3.1 Definições

Nesta seção vamos nos deter apenas na definição de AF-álgebra e nas observações em torno dessa definição. Os exemplos serão deixados para a seção 3.3, já que eles se tornam muito mais interessantes com o auxílio dos diagramas de Bratteli, assunto da seção 3.2.

**Definição 3.1.1.** *Dizemos que uma $C^*$-Álgebra $A$ é Aproximadamente Finita (AF-álgebra ) se existe uma sequência crescente $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ de subálgebras de dimensão finita tal que $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$.*

**Observação 3.1.2.** *Esta definição, alternativamente, poderia ser feita através do conceito de limite indutivo, estudado na seção 1.5. Isto porque se $A$ é uma AF-álgebra, então pelo Corolário 1.5.6 $A$ é $*$-isomorfa ao limite indutivo da sequência de $C^*$-Álgebras de dimensão finita que produzem a AF-álgebra .*

*Por outro lado, se $A$ é o limite indutivo de uma sequência indutiva $(A_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$, onde os $A_n'$s têm dimensão finita, então $A$ é uma AF-álgebra , pois a sequência de $C^*$-Álgebras $(\varphi^n(A_n))_{n\geq 1}$ é crescente, sua união é densa em $A$ e cada $\varphi^n(A_n)$ é de dimensão finita.*

**Observação 3.1.3.** *Na nossa definição de AF-álgebra não exigimos a presença de uma unidade $\mathbb{1}$ para a AF. Isto porque existem importantes exemplos de AF-álgebras com unidade e também sem unidade, como pode ser constatado na seção 3.3.*

Vamos nos deter um pouco mais nesta questão da unidade de uma AF-álgebra na observação e proposição abaixo.

**Observação 3.1.4.** *Se uma AF-álgebra $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ contém uma unidade $\mathbb{1}$, então é fácil ver que $A_n \oplus \mathbb{C}\mathbb{1} \subset A$ é $C^*$-subálgebra de $A$. Além disso, $A_n \subseteq A_n \oplus \mathbb{C}\mathbb{1} \subseteq A_{n+1} \oplus \mathbb{C}\mathbb{1}$. Podemos assumir então que quando $A$ tiver uma unidade $\mathbb{1}$, todos os $A_n'$s também conterão a mesma unidade $\mathbb{1}$.*

**Proposição 3.1.5.** *$A$ é uma AF-álgebra se e somente se $\widetilde{A}$ é AF-álgebra .*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ e $\mathbb{1}$ é a unidade de $\widetilde{A}$, então $A_n \oplus \mathbb{C}\mathbb{1} \subset \widetilde{A}$ para todo $n \geq 1$. Daí, $\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n \oplus \mathbb{C}\mathbb{1}} = \widetilde{A}$. Logo $\widetilde{A}$ é AF.

($\Leftarrow$) Temos que $\widetilde{A} = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}$ com $\mathbb{1} \in B_n$ para todo $n$. Vamos provar que $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n \cap A}$.

É fácil ver que $\overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n \cap A} \subseteq A$. Por outro lado, tome $x \in A$. Então $x \in \widetilde{A}$ e daí $x = \lim_{i\to\infty} x_i$, com $x_i \in \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Seja

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \widetilde{A} & \to & \mathbb{C} \\ & a + \lambda\mathbb{1} & \mapsto & \lambda. \end{array}$$

Temos que $\varphi(x) = 0$ e $\lim_{i\to\infty} \varphi(x_i) = 0$.

Seja $y_i = x_i - \varphi(x_i)\mathbb{1}$. É claro que $y_i \in B_{n_i}$, para algum $n_i$. Além disso, $\varphi(y_i) = \varphi(x_i) - \varphi(x_i) = 0$. Daí $y_i \in A$.

Logo, $y_i \in B_{n_i} \cap A$ e $x = \lim_{i\to\infty} y_i$. Portanto, $x \in \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n \cap A}$. □

Para encerrar esta seção vamos citar um dos mais importantes exemplos de AF-álgebra , a saber, $A = K(H)$ a $C^*$-Álgebra dos operadores compactos sobre um espaço de hilbert $H$. Veremos na Seção 3.4 que $K(H) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} M_n}$.

## 3.2 Diagrama de Bratteli

O objetivo desta seção é associar a cada AF-álgebra $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ um correspondente diagrama. Diagrama este, cuja construção está diretamente ligada à maneira como são feitas as imersões de $A_n$ em $A_{n+1}$.

Considere $A_n$ e $A_m$ duas álgebras de dimensão finita com unidade e tais que $A_n \subset A_m$. Sabemos que $A_n = \bigoplus_{j=1}^{j_n} M_{d_{n,j}}$ e $A_m = \bigoplus_{k=1}^{k_m} M_{d_{m,k}}$.

Usando o Teorema 2.3.7, dado um homomorfismo $\varphi : A_n \to A_m$, podemos, a menos de equivalência unitária, identificar $A_n$ com uma subálgebra de $A_m$ da seguinte forma:

$$A_n \simeq \bigoplus_{k=1}^{k_m} \Big[ \bigoplus_{j=1}^{j_n} \lambda_{kj} M_{d_{n,j}} \Big],$$

onde identificamos $\bigoplus\limits_{j=1}^{j_n} \lambda_{kj} M_{d_{n,j}}$ com uma subálgebra de $M_{d_{m,k}}$, da maneira canônica exibida no Teorema 2.3.5, com os inteiros não negativos $\lambda_{kj}$ satisfazendo $\sum\limits_{j=1}^{j_n} \lambda_{kj} d_{n,j} = d_{m,k}$, se $\varphi$ preservar a unidade, ou então $\sum\limits_{j=1}^{j_n} \lambda_{kj} d_{n,j} \leq d_{m,k}$, se não preservar a unidade.

Dizemos assim que a álgebra $M_{d_{n,j}}$ está parcialmente imersa em $M_{d_{m,k}}$ com multiplicidade $\lambda_{kj}$, e denotamos isso por $(n,j) \overset{\lambda_{kj}}{\searrow} (m,k)$.

Por exemplo

$$M_2 \oplus M_3 \simeq [1.M_2 \oplus 2.M_3] \oplus [0.M_2 \oplus 3.M_3] \subset M_8 \oplus M_9.$$

Aqui, $M_2$ está parcialmente imersa em $M_8$ com multiplicidade 1 e em $M_9$ com multiplicidade zero. Já $M_3$ está parcialmente imersa em $M_8$ com multiplicidade 2 e em $M_9$ com multiplicidade 3.

A representação gráfica das imersões de $A_n$ em $A_{n+1}$, $n \geq 1$, onde $A = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}$, recebe o nome de *Diagrama de Bratteli* (conforme [Bratteli]), cuja construção vamos enunciar abaixo.

Seja $A = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}$ uma AF-álgebra . Temos que

$$A_1 = \bigoplus_{j=1}^{j_1} M_{d_{1,j}}, \quad A_2 = \bigoplus_{k=1}^{k_2} M_{d_{2,k}}, \cdots, A_n = \bigoplus_{l=1}^{l_n} M_{d_{n,l}}, \cdots.$$

A primeira linha do diagrama, associada à álgebra $A_1$, conterá $j_1$ vértices, um para cada fator de $A_1$.

Na segunda linha existirão $k_2$ vértices representando os $k_2$ fatores de $A_2$ e assim por diante. Como já vimos anteriormente, podemos identificar $A_1$ com uma subálgebra de $A_2$ da forma $A_1 \simeq \bigoplus\limits_{k=1}^{k_2} \Big[ \bigoplus\limits_{j=1}^{j_1} \lambda_{kj} M_{d_{1,j}} \Big]$.

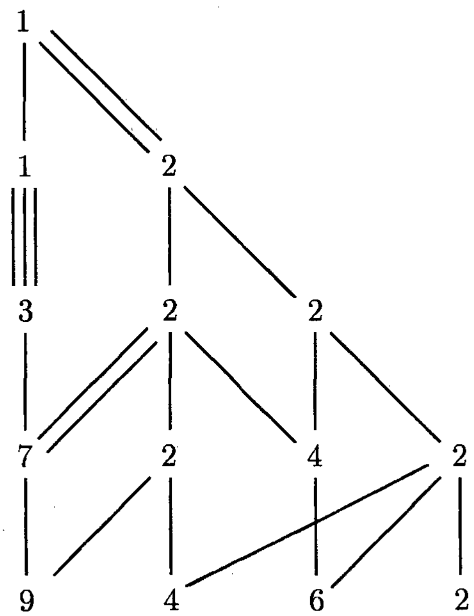
Voltando ao diagrama, o número $\lambda_{kj}$ irá determinar a quantidade de arestas que ligarão o vértice que representa $M_{d_{1,j}}$ ao vértice que representa $M_{d_{2,k}}$, pois $\lambda_{kj}$ representa a multiplicidade da imersão parcial de $M_{d_{1,j}}$ em $M_{d_{2,k}}$.

Continuando com esse processo nas demais imersões de $A_n$ em $A_{n+1}$, obtemos um diagrama chamado de Diagrama de Bratteli, cuja definição rigorosa apresentamos a seguir.

**Definição 3.2.1.** *Seja* $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ *uma AF-álgebra . O Diagrama de Bratteli de* $A$ *é o conjunto* $\mathcal{D}(A)$, *de todos os pares ordenados* $(n,k)$, $1 \leq k \leq k_n$, $n \geq 1$, *junto com a sequência* $\{\overset{p}{\searrow}\}_{p=0,1,\dots}$ *de relações definidas por* $(n,j) \overset{p}{\searrow} (m,k)$ *se e somente se* $m = n+1$ *e* $M_{d_{n,j}}$ *está imerso parcialmente em* $M_{d_{m,k}}$ *com multiplicidade* $p$.

**Observação 3.2.2.** *Daqui em diante vamos assumir que em todas as AF-álgebras* $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ *que estivermos trabalhando,* $A_1 = \mathbb{C}$, *pois se isto ocorrer o diagrama de Bratteli fornecerá uma descrição completa da álgebra, nos casos em que a unidade for preservada.*

Uma AF-álgebra pode ter, por exemplo, o seguinte Diagrama de Bratteli:




onde

$A_1 \simeq M_1$
$A_2 \simeq M_1 \oplus M_2,$
$A_3 \simeq M_3 \oplus M_2 \oplus M_2,$
$A_4 \simeq M_7 \oplus M_2 \oplus M_4 \oplus M_2,$
$A_5 \simeq M_9 \oplus M_4 \oplus M_6 \oplus M_2$, etc.

A quantidade de arestas ligando os números indica a multiplicidade da imersão parcial do fator de cima no de baixo.

Como já dissemos, na próxima seção veremos uma série de exemplos de AF-álgebras com seus respectivos diagramas de Bratteli. No momento, precisamos fazer algumas observações.

**Observação 3.2.3.** *Daqui para frente, nos próximos exemplos de diagramas que apresentarmos, no lugar dos vértices ($\bullet$) que representam as álgebras $M_{d_{n,k}}$ colocaremos o número $d_{n,k}$ que é a raiz quadrada da dimensão do fator $M_{d_{n,k}}$.*

**Observação 3.2.4.** *Dado um conjunto $\mathcal{D}$ de pares ordenados $(n,k)$, $1 \leq k \leq k_n$, $n \geq 1$, e uma sequência $\{\overset{p}{\searrow}\}_{p=0,1...}$ de relações sobre $\mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ é o diagrama $\mathcal{D}(A)$ de uma AF-álgebra $A$ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

*i. Se $(n,k),(m,q) \in \mathcal{D}$ e $m = n+1$, então existe um e somente um inteiro não negativo $p$ tal que $(n,k) \overset{p}{\searrow} (n+1,q)$;*

*ii. Se $m \neq n+1$ não existe tal inteiro;*

*iii. Se $(n,k) \in \mathcal{D}$, então existe $q \in \{1,...,q_{n+1}\}$ e um inteiro positivo $p$ tal que $(n,k) \overset{p}{\searrow} (n+1,q)$;*

*iv. Se $(n,k) \in \mathcal{D}$ e $n > 1$, então existe $q \in \{1,...,q_{n-1}\}$ e um inteiro positivo $p$ tal que $(n-1,q) \overset{p}{\searrow} (n,k)$.*

É fácil ver que o diagrama de uma AF-álgebra $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ satisfaz essas condições, desde que as inclusões $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ preservem a unidade.

Por outro lado, se um conjunto $\mathcal{D}$ de pares ordenados satisfaz essas propriedades, então podemos construir, por indução, uma sequência de $C^*$-Álgebras de dimensão finita $\{A_n\}_{n\geq 1}$ e de morfismos injetivos $I_n : A_n \to A_{n+1}$ tal que o limite indutivo $\{A_n, I_n\}$ terá o diagrama $\mathcal{D}$. Explicitamente,

Dados $(n,k)$, $1 \leq k \leq k_n$, $n \geq 1$ e $\{\overset{p}{\searrow}\}_{p=0,1...}$ satisfazendo i, ii, iii e iv, fazemos:

$$A_n = \bigoplus_{j=1}^{j_n} M_{d_{n,j}}$$

$$I_n : \bigoplus_{j=1}^{j_n} M_{d_{n,j}} \to \bigoplus_{k=1}^{k_{n+1}} M_{d_{n+1,k}}$$

$$M_{d_{n,1}} \oplus M_{d_{n,2}} \oplus \cdots \oplus M_{d_{n,j_n}} \mapsto \Big(\bigoplus_{j=1}^{j_n} \lambda_{1j} M_{d_{n,j}}\Big) \bigoplus \cdots \bigoplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{j_n} \lambda_{k_{n+1}j} M_{d_{n,j}}\Big),$$

onde $\lambda_{kj}$ são tais que $(n,j) \overset{\lambda_{kj}}{\searrow} (n+1,k)$. Note que as dimensões $d_{n+1,k}$ dos fatores $M_{d_{n+1,k}}$ não são arbitrárias, mas sim determinadas pela relação de recorrência

$$\begin{aligned} d_{1,k} &= 1 \\ d_{n+1,k} &= \sum_{j=1}^{j_n} \lambda_{kj} d_{n,j}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

**Observação 3.2.5.** *Na Definição 3.2.1 não foi muito adequado usar a expressão "O diagrama de Bratteli... ". O correto seria usar a expressão " Um diagrama de Bratteli...", isto porque uma AF-álgebra pode ter mais de um diagrama, como será visto no Exemplo 3.3.1 da Seção 3.3.*

Isto nos leva a questionar sobre que condições dois diagramas distintos geram a mesma AF. A resposta para isso será dada no próximo capítulo (Teorema 4.2.3). Uma outra questão que merece destaque é a de saber se duas AF's que têm o mesmo diagrama são isomorfas ou não. A resposta é sim, conforme a

**Proposição 3.2.6.** *Se $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ e $B = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}$ tem o mesmo diagrama de Bratteli, então $A$ e $B$ são isomorfas.*

Demonstração:

Considere as imersões $\alpha_n : A_n \to A_{n+1}$ e $\beta_n : B_n \to B_{n+1}$. Como os diagramas são iguais, existe, para cada $n$, um isomorfismo $\varphi_n$ de $A_n$ em $B_n$. Além disso, como a multiplicidade da imersão parcial de $A_n$ em $A_{n+1}$ através de $\alpha_n$ e de $B_n$ em $B_{n+1}$ através de $\beta_n$ é a mesma, segue que $\varphi_{n+1}\alpha_n$ e $\beta_n\varphi_n$ são imersões de $A_n$ em $B_{n+1}$ com a mesma multiplicidade. O diagrama abaixo ajuda a visualizar a situação

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\varphi_n} & B_n \\ {\scriptstyle \alpha_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} \\ A_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & B_{n+1} \end{array}$$

Daí, existe um unitário $U_{n+1} \in B_{n+1}$ tal que

$$[\beta_n\varphi_n](x) = U_{n_1}[\varphi_{n+1}\alpha_n](x)U_{n+1}^*$$

para todo $x \in A_n$, isto é

$$\beta_n\varphi_n = Ad(U_{n+1})\varphi_{n+1}\alpha_n, \text{ onde } Ad(R)S = RSR^*.$$

Agora seja $\psi_1 = \varphi_1$ e seja $V_1 = I$. Definimos recursivamente

$$V_{n+1} = \beta_n(V_n)U_{n+1} \quad \text{e} \quad \psi_{n+1} = Ad(V_{n+1})\varphi_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Então, para $x \in A_n$ temos que

$$\begin{aligned}
(\beta_n\psi_n)(x) &= \beta_n(Ad(V_n)\varphi_n(x)) \\
&= \beta_n(V_n\varphi_n(x)V_n^*) \\
&= \beta_n(V_n)\beta_n(\varphi_n(x))\beta_n(V_n^*) \\
&= \beta_n(V_n)\beta_n(\varphi_n(x))[\beta_n(V_n)]^* \\
&= Ad(\beta_n(V_n))\beta_n(\varphi_n(x)) \\
&= Ad(\beta_n(V_n))Ad(U_{n+1})\varphi_{n+1}\alpha_n(x) \\
&= \beta_n(V_n)U_{n+1}[(\varphi_{n+1}\alpha_n)(x)]U_{n+1}^*[\beta_n(V_n)]^* \\
&= Ad(\beta_n(V_n)U_{n+1})\varphi_{n+1}(x)\alpha_n(x) \\
&= Ad(V_{n+1}\varphi_{n+1}\alpha_n(x)) \\
&= \psi_{n+1}\alpha_n(x)
\end{aligned}$$

Logo, $\beta_n\psi_n = \psi_{n+1}\alpha_n$ e com isso o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_1 \\
{\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta_1} \\
A_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_2 \\
{\scriptstyle\alpha_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta_2} \\
A_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_3 \\
{\scriptstyle\alpha_3}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta_3} \\
A_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_4 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Decorre daí que $\psi := \bigcup_{n\geq 1} \psi_n$ é um $*$-isomorfismo de $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ em $\bigcup_{n\geq 1} B_n$. Como $\psi$ é isometria, podemos estendê-la continuamente a um $*$-isomorfismo de $A$ para $B$.

□

## 3.3 Exemplos de AF-álgebras

**Exemplo 3.3.1.** *A álgebra CAR (Canonical Anticommutacion Relations)*

$$A = \overline{\bigcup_{k \geq 0} M_{2^k}},$$

onde os morfismos são dados por:

$$\begin{aligned} A_k = M_{2^k} &\xrightarrow{\varphi_k} M_{2^{k+1}} = A_{k+1} \\ a &\longmapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O diagrama de Bratteli é:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \| \\ 2 \\ \| \\ 4 \\ \| \\ 8 \\ \vdots \end{array}$$

(estudaremos esta álgebra com todos os detalhes no último capítulo).

Note que, chamando $B_k = M_{2^k} \oplus M_{2^k}$, temos

$$M_{2^k} \subset \varphi_k(M_{2^k}) \subset M_{2^k} \oplus M_{2^k} \subset M_{2^k+1},$$

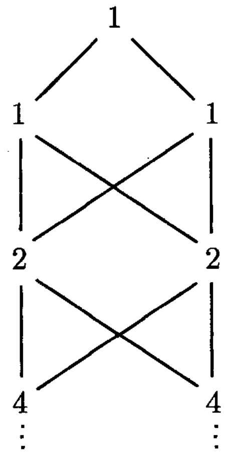
isto é,

$$A_1 \subset B_1 \subset A_2 \subset B_2 \subset A_3 \subset B_3 \subset \cdots .$$

Assim, $A$ também é a união dos $B_k$'s, e como $B_k$ é subálgebra de $A_{k+1}$, a ação de $\varphi_{k+1}$ sobre $B_k$ e:

$$\varphi_{k+1}\left(\left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a_2 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right].$$

Dessa forma, o correspondente diagrama de Bratteli também pode ser dado por:

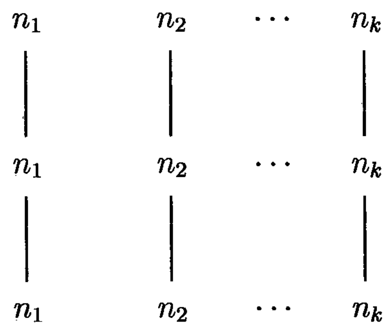



Este exemplo mostra que uma mesma AF pode ter diagramas distintos.

**Exemplo 3.3.2.** *A é uma álgebra de dimensão finita, isto é,*

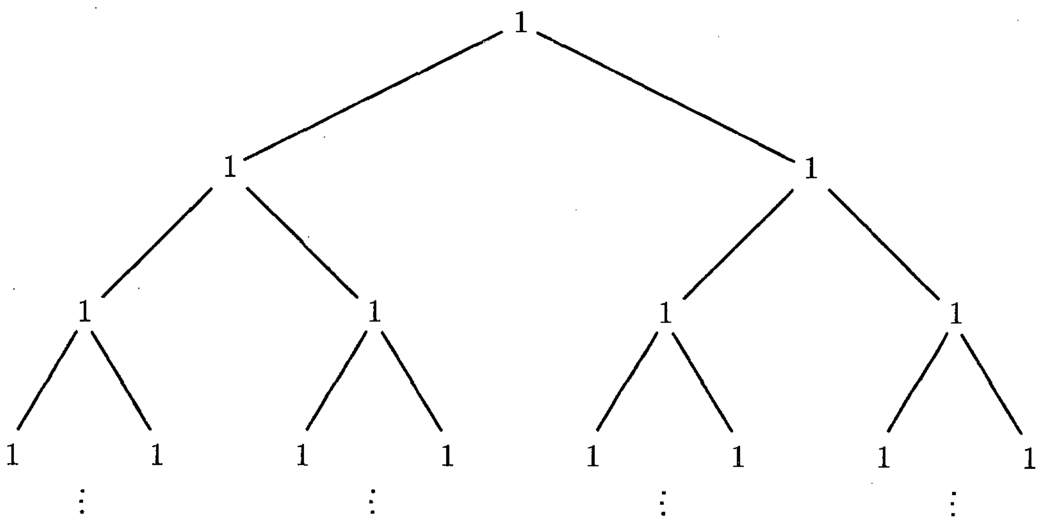
$$A \simeq M_{n_1} \oplus M_{n_2} \oplus \cdots \oplus M_{n_k}.$$

Daí,



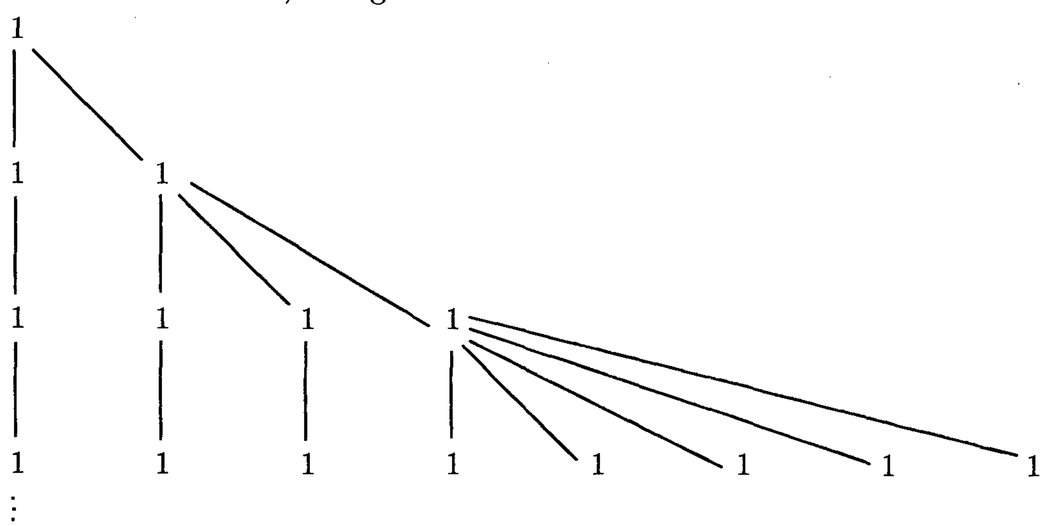

**Exemplo 3.3.3.** $A = C(X)$, *onde* $X$ *é o conjunto de Cantor.*

Veremos com detalhes na seção 4.2 que $A = \overline{\bigcup_{n\geq 0} A_n}$, onde $A_n = \mathbb{C}^{2^n}$. O diagrama de Bratteli é:




**Exemplo 3.3.4.** $A = C(X) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} A_n}$, *onde* $X = \{0\} \cup \{1/n, n \geq 1\}$ *e* $A_n = \mathbb{C}^{2^n}$.

Neste caso, o diagrama tem a forma




Este exemplo também será estudado detalhadamente na seção 4.2.

## 3.4 Um exemplo especial $A = K(H) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} M_n(\mathbb{C})}$

Temos como objetivo aqui provar que $K(H) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} M_n}$ (note que esta álgebra não tem unidade).

Façamos $H = \ell_2(\mathbb{N})$. Seja $\{e_j\}_{j\geq 1}$ base de $H$. Seja $H_n = \langle e_1, ..., e_n\rangle \subseteq H$. É claro que $H_n \simeq \mathbb{C}^n$ e $B(H_n) \simeq B(\mathbb{C}^n) \simeq M_n$.

Seja $Q_n : H \to H_n$ a projeção ortogonal, isto é, $Q_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$. Daí, $Q_n(H) = H_n$.

Afirmação: $M_n \simeq B(H_n) \simeq Q_n B(H) Q_n^*$. De fato,
Se $T \in Q_n B(H) Q_n^*$, então, pelo esquema abaixo

$$H_n \xrightarrow{Q_n^*} H \xrightarrow{S\in B(H)} H \xrightarrow{Q_n} H_n,$$

temos que $T = Q_n S Q_n^* : H_n \to H_n$, isto é, $T \in B(H_n)$.

Agora vamos provar que $B(H_n) \subset Q_n B(H) Q_n^*$.

Se $x \in H$, então $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in H_n$ e $x_2 \in H_n^{\perp}$. Daí

$Tx = Tx_1 + Tx_2$, onde

$Tx_1 = T_{11}x_1 + T_{21}x_1 \quad$ e $\quad Tx_2 = T_{12}x_2 + T_{22}x_2$, com

$T_{11}x_1, T_{12}x_2 \in H_n \quad$ e $\quad T_{21}x_1, T_{22}x_2 \in H_n^{\perp}$

Assim,

$$T_x = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{T_{11}x_1 + T_{12}x_2}_{\in H_n} + \underbrace{T_{21}x_1 + T_{22}x_2}_{\in H_n^{\perp}}.$$

Note que

$$T_{11} : H_n \to H_n$$
$$T_{11} = Q_n T Q_n^*,$$

com

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Portanto, se $S \in B(H_n)$, tome $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(H)$.
Daí, $S = Q_n T Q_n^*$ e assim, $S \in Q_n B(H) Q_n^*$.

Agora vamos verificar como ficam as imersões de $M_n \to M_{n+1}$ através das imersões de $B(H_n) \to B(H_{n+1})$. O diagrama abaixo esclarece isso:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "\varphi_n'"'] & B(H_n) \arrow[d] \arrow[r, "Id"] & M_n \arrow[d, "{[S]_\alpha}"'] & a \arrow[d, "\varphi_n"] \\
S' & B(H_{n+1}) \arrow[r, "Id"] & M_{n+1} & \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)
\end{tikzcd}$$

onde $\alpha = \{e_j\}$ é base de $H_n$ e identificamos

$$\begin{array}{ccc} H_n & \simeq & \mathbb{C}^n \\ e_j & \mapsto & e_j \end{array}$$

Além disso

$$S'(e_j) = \begin{cases} S(e_j) & , \ 1 \le j \le n \\ 0 & , \ j = n+1 \end{cases}$$

Assim, $\{B(H_n), \varphi_n'\}_{n \ge 1} \simeq \{M_n, \varphi_n\}_{n \ge 1}$, implicando em

$$\overline{\bigcup_{n \ge 1} M_n} = \lim_{n \to \infty} \{M_n, \varphi_n\} = \lim_{n \to \infty} \{B(H_n), \varphi_n'\} = \overline{\bigcup_{n \ge 1} B(H_n)}.$$

Gostaríamos de finalizar a linha acima com a inclusão $\overline{\bigcup_{n \ge 1} B(H_n)} \subset K(H)$, mas isto ainda não pode ser feito, já que esta inclusão pressupõe $B(H_n) \subset B(H)$. Da maneira como identificamos $B(H_n) = Q_n B(H) Q_n^*$, isto não ocorre. Um modo de contornar isto consiste em definir:

$$\begin{array}{rcl} P_n & : & H \to H \\ P_n & = & I_{H_n} \circ Q_n \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "P_n"] \arrow[dr, "Q_n"'] & & H \\
& H_n \arrow[ur, "I_{H_n}"'] &
\end{tikzcd}$$

Daí,

$$B(H_n) \simeq I_{H_n} \circ Q_n B(H) Q_n^* \circ I_{H_n} = P_n B(H) P_n^*.$$

Desse modo, $B(H_n) \subseteq B(H)$ e obtemos, como desejávamos

$$\overline{\bigcup_{n\geq 1} M_n} \simeq \overline{\bigcup_{n\geq 1} B(H_n)} \subseteq K(H).$$

Falta apenas provar que $K(H) \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq 1} B(H_n)}$. Para isso, usaremos o

**Lema 3.4.1.** *Se $T \in B(H)$ é compacto e $P_n \in B(H)$ é tal que $P_n \to I_H$ pontualmente, então $\|P_nT - T\| \to 0$, $n \to \infty$.*

Demonstração:

Inicialmente, como $P_n \to I_H$ pontualmente, $(\|P_nx\|)_{n\geq 1}$ é limitada para cada $x \in H$. Daí, pelo Teorema da Limitação Uniforme (ver teorema 4.7.3 de [Kreyszig]), existe $c$ tal que $\|P_n\| \leq c$ para todo $n \geq 1$.

Agora, seja $\varepsilon > 0$ e tome $\varepsilon' = \min\{\frac{\varepsilon}{3c}, \frac{\varepsilon}{3}\}$. Como $T$ é compacto, $T(B(0,1))$ é relativamente compacto e então $T(B(0,1))$ é totalmente limitado. Daí, existem $T(x_1), ..., T(x_N)$ tais que

$$T(B(0,1)) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(T(x_i), \varepsilon').$$

Com isso, para todo $x \in B(0,1)$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T(x) - T(x_i)\| < \varepsilon'.$$

Como $P_n \to I_H$ pontualmente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ temos

$$\|P_n(T(x_i)) - T(x_i)\| < \varepsilon', \quad 1 \leq i \leq N.$$

Agora, para $n \geq n_0$ e $\|x\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|P_n(T(x)) - T(x)\| &\leq \|P_n(T(x) - T(x_i))\| + \|P_n(T(x_i)) - T(x_i)\| + \|T(x_i) - T(x)\| \\
&\leq \|P_n\|\|T(x)) - T(x_i)\| + \varepsilon' + \varepsilon' \\
&< c\varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' \\
&< c\frac{\varepsilon}{3c} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daí $\|P_nT - T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|P_nT(x) - T(x)\| < \varepsilon.$ □

Agora, seja $T \in K(H)$. Vamos provar que $T$ pode ser aproximado por $P_nTP_n^*$.

Note que

$$\begin{aligned}
\|P_nTP_n^* - T\| &\leq \|P_nTP_n^* - P_nT\| + \|P_nT - T\| \\
&\leq \|P_n\|\|TP_n^* - T\| + \|P_nT - T\| \\
&\leq \|P_nT^* - T^*\| + \|P_nT - T\| \to 0, \text{ quando } n \to \infty,
\end{aligned}$$

pelo Lema 3.4.1.

O diagrama de Bratteli dessa AF é

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \\ | \\ 3 \\ | \\ 4 \\ \vdots \end{array}$$

# Capítulo 4

# Generalidades sobre AF-álgebras

## 4.1 Uma caracterização para AF-álgebras

É fácil ver que toda AF-álgebra é separável. Por outro lado, também é verdade que toda $C^*$-Álgebra separável é AF? Se não for, é possível acrescentar algumas condições de modo que seja? Vamos discutir essas questões nesta seção.

**Teorema 4.1.1.** *Toda AF-álgebra é separável.*

Demonstração:

Seja $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ uma AF-álgebra . É claro que $A_n \subset A$ para todo $n \geq 1$. Como $A_n$ é espaço vetorial de dimensão finita, então $A_n$ é homeomorfo a $\mathbb{C}^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{C}^k$ é separável, decorre que $A_n$ é separável, isto é, existe $B_n \subset A_n$ enumerável e denso em $A_n$. É evidente que $\bigcup_{n\geq 1} B_n$ é enumerável. Vamos provar que $\bigcup_{n\geq 1} B_n$ é densa em $A$.

Seja $x \in \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ e tome $\varepsilon > 0$. Então existe $y \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$ (decorrendo daí que $y \in A_{n_0}$, para algum $n_0$) tal que $\|y - x\| < \varepsilon/2$. Além disso, como $y \in A_{n_0}$, existe $z \in B_{n_0}$ tal que $\|z - y\| < \varepsilon/2$, já que $B_{n_0}$ é denso em $A_{n_0}$.

Logo, $\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon$ e assim $\overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n} = A$. $\square$

**Observação 4.1.2.** *Nem toda $C^*$-Álgebra separável é AF. Senão vejamos: tome $A = C[0,1]$. Como $[0,1]$ é conexo, a álgebra $A = C[0,1]$ admite apenas as projeções triviais 0 e 1. Desse modo $A$ não contém nenhuma $C^*$-subálgebra de dimensão finita, pois se contivesse, essa $C^*$-subálgebra seria isomorfa a alguma soma direta do tipo $\bigoplus_{k=1}^{l} M_{n_k}$, que evidentemente contém projeções diferentes de 0 e 1. Logo, $A = C[0,1]$ não é AF.*

No último teorema desta seção mostraremos que condições devem ser acrescentadas a uma $C^*$-Álgebra separável de modo que ela se torne uma AF. Para chegarmos nesse teorema, precisamos dos seguintes lemas:

**Lema 4.1.3.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra . Dado $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um $\delta > 0$ que depende de $\varepsilon$ e $n$, tal que se $p_1, ..., p_n$ são projeções duas a duas ortogonais em $A$ e $B$ é um $C^*$-subálgebra de $A$ tal que $dist(p_i, B) < \delta$ para $1 \leq i \leq n$, então existem projeções $q_1, ...q_n \in B$, duas a duas ortogonais tal que $\|p_i - q_i\| < \varepsilon$ para $1 \leq i \leq n$. Além disso, se $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, então pode-se obter também $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.*

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ e $n = 1$. Tome $\delta = min\{\varepsilon/2, 1/3\}$. Suponha que $p_1$ é uma projeção em $A$ tal que $dist(p_1, B) < \delta$. Tome $x \in B$ tal que $\|p_1 - x\| < \delta$ (isto pode ser feito pelo fato de que $\inf_{x \in B} \|p_1 - x\| = dist(p_1, B) < \delta$). Como $p_1 = p_1^*$, podemos fazer $b = \frac{x+x^*}{2}$ e obter $\|p_1 - b\| = \|\frac{p_1+p_1^*}{2} - \frac{x+x^*}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|p_1 - x\| + \frac{1}{2}\|(p_1 - x^*)\| < \delta$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos tomar $b \in B$ auto-adjunto.

Agora lembremos que se $p$ é uma projeção diferente de 0 e $\mathbb{1}$, então $\sigma(p) = \{0, 1\}$. Daí a função $f(x) = (x - \lambda)^{-1}$, com $\lambda \neq 0$ e 1, é contínua sobre $\sigma(p)$. Podemos dessa forma aplicar o teorema da aplicação espectral para obter $\sigma([p - \lambda]^{-1}) = \sigma(f(p)) = f(\sigma(p)) = f(\{0, 1\}) = \{(0 - \lambda)^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}\}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|(p - \lambda\mathbb{1})^{-1}\| &= r([p - \lambda\mathbb{1}]^{-1}) \\ &= \max\{|(0 - \lambda)^{-1}|, |(1 - \lambda)^{-1}|\} \\ &= (\min\{|\lambda|, |1 - \lambda|\})^{-1} \\ &= \operatorname{dist}(\lambda, \{0, 1\})^{-1}. \end{aligned}$$

Lembremos também que se $a$ é um elemento inversível de uma $C^*$-Álgebra e se $\|a - s\| \leq \|a^{-1}\|^{-1}$, então $s$ é inversível.

Vontando à demonstração do lema, temos que se $\lambda \neq 0$ e 1, então $p_1 - \lambda\mathbb{1}$ é inversível. Daí,

$$\|(p_1 - \lambda\mathbb{1}) - (b - \lambda\mathbb{1})\| = \|p_1 - b\| < \delta.$$

Mas, como $\delta < dist(\lambda, \{0, 1\})$, se tomarmos $|\lambda| > \delta$ e $|\lambda - 1| > \delta$, então

$$\|(p_1 - \lambda\mathbb{1}) - (b - \lambda\mathbb{1})\| < dist(\lambda, \{0, 1\}) = \|(p_1 - \lambda\mathbb{1})^{-1}\|^{-1}.$$

Assim, $b - \lambda\mathbb{1}$ é inversível para $|\lambda| > \delta$ e $|\lambda - 1| > \delta$. Daí decorre que

$$\sigma(b) \subset [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Note que esses intervalos são disjuntos porque $\delta \leq 1/3$.

Um outro resultado geral de $C^*$-Álgebra que precisamos usar é o seguinte: se $a = a^*$ e $\sigma(a) = \{0, 1\}$, então $a = a^2$ (isto pode ser facilmente obtido se utilizarmos o teorema espectral para operadores auto-adjuntos de $B(H)$, já que $a$ pode ser visto como um operador $\pi(a)$ de $B(H)$).

Definamos agora a função contínua

$$f : [-\delta, \delta] \cup [1-\delta, 1+\delta]$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\delta, \delta] \\ 1, & x \in [1-\delta, 1+\delta] \end{cases}$$

Novamente pelo teorema da aplicação espectral vem que

$$\sigma(f(b)) = f(\sigma(b)) = \{0, 1\}.$$

Além disso, como $b = b^*$, decorre que $f(b) = f(b)^*$. Logo, $f(b) = f(b)^2$, isto é, $f(b)$ é projeção.

Podemos definir então a projeção

$$q_1 := \mathcal{X}_{[1-\delta,1+\delta]}(b) = f(b) \in B.$$

Além disso, note que $C^*(b)$ é abeliana, pois $b = b^*$. Daí

$$\begin{array}{rcl} C^*(b) & \simeq & C(\sigma(b)) \\ b & \mapsto & f(z) = z. \end{array}$$

Dessa forma,

$$\|b - f(b)\| = \|z - \mathcal{X}_{[1-\delta,1+\delta]}\|_{\sigma(b)} \leq \delta$$

e

$$\begin{aligned} \|p_1 - q_1\| &\leq \|p_1 - b\| + \|b - q_1\| \\ &< \delta + \delta \\ &= 2\delta \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, no caso geral, usaremos indução. Suponha que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \min\{1/4, \varepsilon\}$ tal que tenhamos obtido projeções $q_1, q_2, ..., q_{n-1} \in B$ tal que $\|p_i - q_i\| < \frac{\delta}{12(n-1)}$, $n \geq 2$. Seja $p = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$ e $q = \sum_{i=1}^{n-1} q_i$. Escolha $b = b^*$ em $B$ (como no caso $n = 1$) tal que $\|p_n - b\| < \frac{\delta}{4}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|p_n - (\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-q)\| &= \|(\mathbb{1}-p)p_n(\mathbb{1}-p) - (\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-q)\| \\
&= \|p_n(\mathbb{1}-p) - pp_n(\mathbb{1}-p) - (\mathbb{1}-q)b + (\mathbb{1}-q)bq\| \\
&= \|p_n(\mathbb{1}-p) - pp_n(\mathbb{1}-p) + qp_n(\mathbb{1}-p) - qp_n(\mathbb{1}-p) - \\
&- (\mathbb{1}-q)b + (\mathbb{1}-q)bq - (\mathbb{1}-q)bp + (\mathbb{1}-q)bp\| \\
&= \|(q-p)p_n(\mathbb{1}-p) + (\mathbb{1}-q)p_n(\mathbb{1}-p) - (\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-p) + \\
&+ (\mathbb{1}-q)b(q-p)\| \\
&= \|(q-p)p_n(\mathbb{1}-p) + (\mathbb{1}-q)(p_n-b)(\mathbb{1}-p) \\
&+ (\mathbb{1}-q)b(q-p)\| \leq \\
&\leq \|q-p\| + \|p_n-b\| + \|b\|\|q-p\| \\
&= (1+\|b\|)\|q-p\| + \|p_n-b\| \\
&\leq (1+\|b-p_n+p_n\|)\sum_{i=1}^{n-1}\|q_i-p_i\| + \frac{\delta}{4} \\
&\leq (2+\frac{\delta}{4})\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}
$$

Agora, como no caso $n = 1$, e olhando para $(\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-q)$ como o elemento $b$ daquele caso, obtemos $(\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-q) - \lambda\mathbb{1}$ inversível se $|\lambda| > \delta$ e $|\lambda - 1| > \delta$. Além disso, obtemos uma projeção $q_n$ em $(\mathbb{1}-q)B(\mathbb{1}-q)$ tal que

$$
\|p_n - q_n\| \leq \|p_n - (\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-q)\| + \|(\mathbb{1}-q)b(\mathbb{1}-q) - q_n\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} < \delta < \varepsilon.
$$

Ainda mais, se $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathbb{1}$, então

$$
\begin{aligned}
\|\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} q_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\|p_i - q_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\|p_i - q_i\| + \|p_n - q_n\| \\
&< (n-1)\frac{\delta}{12(n-1)} + \delta \\
&= \frac{\delta}{12} + \delta \\
&< \frac{1}{48} + \frac{1}{4} \\
&< 1.
\end{aligned}
$$

Mas como $\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} q_i$ é projeção, então

$$\|\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} q_i\| = 1 \quad \text{ou} \quad \|\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} q_i\| = 0.$$

Logo, juntando isto ao fato de que $\|\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} q_i\| < 1$, obtemos

$$\|\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} q_i\| = 0,$$

implicando em $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{n} q_i$. □

**Lema 4.1.4.** *Dado $0 < \varepsilon < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ dependendo de $\varepsilon$ e $n$ tal que se $A$ e $B$ são $C^*$-subálgebras de uma $C^*$-Álgebra $D$ unitária (denotemos por $\mathbb{1}$ a unidade de $D$) com $dim(A) \leq n$, $\mathbb{1} \in A$ e $\mathbb{1} \in B$, e tal que $A$ tem um sistema de unidades matriciais $\{E_{ij}^{(s)}\}$ satisfazendo $dist(E_{ij}^{(k)}, B) < \delta$, então existe um elemento unitário $U \in C^*(A, B)$ com $\|U - \mathbb{1}\| < \varepsilon$ tal que $UAU^* \subset B$.*

Demonstração:

Primeiro vamos supor que $A \simeq \ell_n^\infty$. Neste caso, as unidades matriciais de $A$ são as $n$ projeções minimais $p_1, ...p_n$ duas a duas ortogonais. Seja $\eta = (n+1)^{-1}\varepsilon$. Usando $\delta = \delta(n, \eta)$, obtemos, pelo Lema 4.1.3, projeções $q_1, ..., q_n \in B$, duas a duas ortogonais tais que $\|p_i - q_i\| < \eta$, para $1 \leq i \leq n$.

Definamos $x = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i$. Lembremos que se $a = a^*$, então $a \leq \|a\|$. Daí

$$\begin{aligned}
& p_i - q_i \leq \|p_i - q_i\| \leq \eta \\
& \Rightarrow p_i - p_i q_i p_i \leq p_i \eta p_i = \eta p_i \\
& \Rightarrow p_i q_i p_i \geq (1 - \eta) p_i \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i q_i p_i \geq (1 - \eta) \sum_{i=1}^{n} p_i = (1 - \eta)\mathbb{1}
\end{aligned}$$

Assim,

$$x^* x = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i p_i \geq (1 - \eta)\mathbb{1}.$$

Similarmente obtemos $xx^* \geq (1 - \eta)\mathbb{1}$ e com isso concluímos que $x$ é inversível (de fato, se $a = a^*$ e $a \geq \lambda\mathbb{1}$, então $a - \lambda\mathbb{1} \geq 0$, implicando em $\sigma(a - \lambda\mathbb{1}) \subseteq [0, +\infty)$ e assim $\sigma(a) \subseteq [\lambda, +\infty)$).

Agora, seja $U$ o unitário da decomposição polar de $x = U|x|$. Como $x$ é invertível, $U = x|x|^{-1}$ e daí $U \in C^*(x) \subset C^*(A, B)$. Claramente $p_i$ comuta com $x^*x$. Daí $p_i$ comuta com $|x| = \sqrt{x^*x}$. Além disso, é fácil ver que $q_i x = x p_i$, para $1 \leq i \leq n$. Assim,

$$U p_i = x|x|^{-1} p_i = x p_i |x|^{-1} = q_i x |x|^{-1} = q_i U$$

$$\Rightarrow Up_iU^* = q_i, \quad 1 \leq i \leq n$$
$$\Rightarrow UAU^* \subset B.$$

Além disso precisamos mostrar também que $\|U - \mathbb{1}\| < \varepsilon$. Para tanto, precisamos de alguns resultados preliminares. Se $a = b + c$, onde $a, b, c$ são auto-adjuntos e $bc = 0$, então $\|a\| = \max\{\|b\|, \|c\|\}$. Temos que $x^*x = \sum_{i=1}^{n} p_iq_ip_i$. Daí, $\|x^*x\| \leq \max_i \|p_iq_ip_i\| \leq 1$ e assim $\|x\| \leq 1$.

Já sabíamos que $\sigma(x^*x) \subset [1 - \eta, +\infty)$. Agora, pela desigualdade $\|x^*x\| \leq 1$, vem que $\sigma(x^*x) \subset [1 - \eta, 1]$. Pelo teorema de Gelfand,

$$C^*(x^*x) \simeq C(\sigma(x^*x))$$

e

$$\||x|^{-1} - \mathbb{1}\| = \sup_{\lambda \in \sigma(x^*x)} |\lambda^{-1/2} - 1| = (1 - \eta)^{-1/2} - 1.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\|U - \mathbb{1}\| &\leq \|U - x\| + \|x - \mathbb{1}\| \\
&= \|x|x|^{-1} - x\| + \|\sum_{i=1}^{n} q_ip_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\| \\
&\leq \|x\|\| \, |x|^{-1} - \mathbb{1}\| + \sum_{i=1}^{n} \|(q_i - p_i)p_i\| \\
&\leq (1 - \eta)^{-1/2} - 1 + n\eta \\
&< \eta + n\eta \\
&= (1 + n)\eta \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Observe que na última desigualdade usamos os seguintes fatos: Como $\eta = (n + 1)^{-1}\varepsilon$ e $\varepsilon < 1$, então $\eta < 1/2$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\eta^2 + \eta - 1 < 0 \\
&\Rightarrow \eta^3 + \eta^2 - \eta < 0 \\
&\Rightarrow 1 < (1 + \eta)(1 - \eta^2) \\
&\Rightarrow 1 < (1 + \eta)(1 + \eta)(1 - \eta) \\
&\Rightarrow 1 < (1 + \eta)\sqrt{1 - \eta} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \eta}} < \eta.
\end{aligned}$$

Agora vamos ao caso geral.

Seja $\{E_{ij}^{(s)},\ \ 1 \leq s \leq k,\ \ 1 \leq i,j \leq n_s\}$ um sistema de unidades matriciais para $A$. Seja $\mathcal{M}$ a $C^*$-Álgebra gerada pelas unidades matriciais diagonais $\{E_{ii}^{(s)}\}$. Seja também $\delta = \delta(\eta', n)$, onde $\eta' = (6n+6)^{-1}\varepsilon$.

Como $\mathcal{M}$ é isomorfa a $\ell_n^\infty$, utilizamos os resultados anteriores para obter um unitário $U \in C^*(\mathcal{M}, B)$ tal que $U\mathcal{M}U^* \subset B$ e $\|U - \mathbb{1}\| < \varepsilon/6$.

Sejam $F_{ij}^{(s)} := UE_{ij}^{(s)}U^*$ unidades matriciais para $UAU^*$. Note que

$$\begin{aligned}
dist(F_{ij}^{(s)}, B) &= \inf_{b\in B} \|F_{ij}^{(s)} - b\| \\
&\leq \inf_{b\in B}(\|F_{ij}^{(s)} - E_{ij}^{(s)}\| + \|E_{ij}^{(s)} - b\|) \\
&\leq \|F_{ij}^{(s)} - UE_{ij}^{(s)}\| + \|UE_{ij}^{(s)} - E_{ij}^{(s)}\| + dist(E_{ij}^{(s)}, B) \\
&< \|UE_{ij}^{(s)}U^* - UE_{ij}^{(s)}\| + \|U - \mathbb{1}\| + \delta \\
&\leq \|U^* - \mathbb{1}\| + \|U - \mathbb{1}\| + \delta \\
&< \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 \\
&= \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Segue daí que dado $F_{1j}^{(s)} \in UAU^*$, obtemos $X_{1j}^{(s)} \in B$ tal que

$$\|F_{1j}^{(s)} - X_{1j}^{(s)}\| < \varepsilon/2.$$

Como $F_{jj}^{(s)} \in B$, podemos substituir $X_{1j}^{(s)}$ por $F_{11}^{(s)}X_{1j}^{(s)}F_{jj}^{(s)}$ sem aumentar a norma já estimada. De fato, note que $F_{1j}^{(s)} = F_{11}^{(s)}F_{1j}^{(s)}F_{jj}^{(s)}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|F_{1j}^{(s)} - F_{11}^{(s)}X_{1j}^{(s)}F_{jj}^{(s)}\| &= \|F_{11}^{(s)}F_{1j}^{(s)}F_{jj}^{(s)} - F_{11}^{(s)}X_{1j}^{(s)}F_{jj}^{(s)}\| \\
&\leq \|F_{1j}^{(s)} - X_{1j}^{(s)}\| \\
&< \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Agora vamos verificar alguns fatos sobre $X_{1j}^{(s)}$.

i. $X_{1j}^{(s)}$ é limitado inferiormente por $1 - \varepsilon/2$ sobre a imagem de $F_{jj}^{(s)}$ (aqui, evidentemente, estamos olhando para $X_{1j}^{(s)}$ e $F_{jj}^{(s)}$ como operadores em $B(H)$, já que pelo teorema de Gelfand-Naimark existe um espaço de Hilbert $H$ tal que $B$ está representada (existe um isomorfismo) por alguma subálgebra de $B(H)$). De fato, seja $\xi \in ImF_{jj}^{(s)}$. Inicialmente note que

$$\begin{aligned}
\|F_{1j}^{(s)}(\xi)\|^2 &= \langle F_{1j}^{(s)}(\xi), F_{1j}^{(s)}(\xi)\rangle \\
&= \langle F_{j1}^{(s)}F_{1j}^{(s)}(\xi), \xi\rangle \\
&= \langle \xi, \xi\rangle \\
&= \|\xi\|^2,
\end{aligned}$$

isto é $\|F_{1j}^{(s)}(\xi)\| = \|\xi\|$.

Agora

$$\begin{aligned}
\|X_{1j}^{(s)}(\xi)\| &\geq \|F_{1j}^{(s)}(\xi)\| - \|X_{1j}^{(s)}(\xi) - F_{1j}^{(s)}(\xi)\| \\
&\geq \|\xi\| - \|X_{1j}^{(s)} - F_{1j}^{(s)}\|\|\xi\| \\
&> \|\xi\| - \varepsilon/2\|\xi\| \\
&= (1-\varepsilon/2)\|\xi\|
\end{aligned}$$

para todo $\xi \in ImF_{jj}^{(s)}$.

ii. A imagem de $X_{1j}^{(s)}$ é igual a imagem de $F_{11}^{(s)}$.
É fácil ver que $ImX_{1j}^{(s)} \subseteq ImF_{11}^{(s)}$, já que $F_{11}^{(s)}X_{1j}^{(s)}F_{jj}^{(s)} = X_{1j}^{(s)}$.
Consideremos por outro lado a aplicação

$$X_{1j}^{(s)} : H = ImF_{jj}^{(s)} \oplus ImF_{jj}^{(s)\perp} \to ImF_{11}^{(s)} \oplus ImF_{11}^{(s)\perp} = H, \text{ com } X_{1j}^{(s)}{}_{|ImF_{jj}^{(s)\perp}} = 0$$

Note que $F_{jj}^{(s)}$ é a unidade em $B(ImF_{jj}^{(s)})$ e $F_{1j}^{(s)}$ é inversível, pois $F_{1j}^{(s)}F_{j1}^{(s)} = F_{11}^{(s)}$, que é a unidade em $B(ImF_{11}^{(s)})$.
Agora

$$\begin{aligned}
\|F_{j1}^{(s)}X_{1j}^{(s)} - F_{jj}^{(s)}\| &= \|F_{j1}^{(s)}X_{1j}^{(s)} - F_{j1}^{(s)}F_{1j}^{(s)}\| \\
&\leq \|X_{1j}^{(s)} - F_{1j}^{(s)}\| \\
&< \varepsilon/2 \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Daí, $F_{j1}^{(s)}X_{1j}^{(s)}$ é inversível em $B(ImF_{jj}^{(s)})$. Como já tínhamos $F_{j1}^{(s)}$ inversível, segue que $X_{1j}^{(s)}$ é inversível (como aplicação de $ImF_{jj}^{(s)}$ em $ImF_{11}^{(s)}$), e assim $ImX_{1j}^{(s)} = ImF_{11}^{(s)}$.

Considere agora a decomposição polar de $X_{1j}^{(s)}$:

$$X_{1j}^{(s)} = G_{1j}^{(s)}|X_{1j}^{(s)}| = G_{1j}^{(s)}(X_{1j}^{(s)*}X_{1j}^{(s)})^{1/2}.$$

O unitário $G_{1j}^{(s)}$ é uma isometria parcial em $B$ que tem o mesmo domínio e imagem de $X_{1j}^{(s)}$. Vamos mostrar que $X_{1j}^{(s)}$ está "próximo" de $G_{1j}^{(s)}$. Veja que

$$\|X_{1j}^{(s)}\| \leq \|F_{1j}^{(s)}\| + \|X_{1j}^{(s)} - F_{1j}^{(s)}\| < 1 + \varepsilon/2.$$

Além disso, para $\xi \in ImF_{jj}^{(s)}$, temos que

$$\langle X_{1j}^{(s)*} X_{1j}^{(s)}(\xi), \xi\rangle = \langle X_{1j}^{(s)}(\xi), X_{1j}^{(s)}(\xi)\rangle = \|X_{1j}^{(s)}(\xi)\|^2 \leq (1+\varepsilon/2)^2\|\xi\|^2$$

e

$$\langle X_{1j}^{(s)*} X_{1j}^{(s)}(\xi), \xi\rangle = \|X_{1j}^{(s)}(\xi)\|^2 \geq (1-\varepsilon/2)^2\|\xi\|^2.$$

Assim,

$$(1-\varepsilon/2)^2\mathbb{1} \leq X_{1j}^{(s)*} X_{1j}^{(s)} \leq (1+\varepsilon/2)^2\mathbb{1},$$

Implicando em

$$\sigma(X_{1j}^{(s)*} X_{1j}^{(s)}) \subset [(1-\varepsilon/2)^2, (1+\varepsilon/2)^2].$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{1} - |X_{1j}^{(s)}|^{-1}\| &= \|\mathbb{1} - (X_{1j}^{(s)*} X_{1j}^{(s)})^{-1/2}\| \\
&= \sup_{\lambda \in \sigma(X_{1j}^{(s)*} X_{1j}^{(s)})} |1 - \lambda^{-1/2}| \\
&= 1 - \frac{1}{1+\varepsilon/2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
\|X_{1j}^{(s)} - G_{1j}^{(s)}\| &= \|X_{1j}^{(s)} - X_{1j}^{(s)}|X_{1j}^{(s)}|^{-1}\| \\
&\leq \|X_{1j}^{(s)}\|\|\mathbb{1} - |X_{1j}^{(s)}|^{-1}\| \\
&< (1+\frac{\varepsilon}{2})\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \\
&= \frac{2+\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Podemos agora obter um novo sistema de unidades matriciais em $B$, fazendo

$$G_{ij}^{(s)} = G_{1i}^{(s)*} G_{1j}^{(s)}.$$

É fácil ver que o operador

$$W := \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_s} G_{1j}^{(s)*} F_{1j}^{(s)}$$

é unitário e que $G_{ij}^{(s)} W = W F_{ij}^{(s)}$. Daí,

$$W F_{ij}^{(s)} W^* = G_{ij}^{(s)} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq s \leq k, \quad 1 \leq i, j \leq n_s.$$

Agora, usando o fato de que a soma de termos com domínios e imagens ortogonais tem norma igual ao máximo da norma de cada termo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|W-\mathbb{1}\| &= \|\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_s} G_{1j}^{(s)^*}F_{1j}^{(s)} - \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_s} F_{1j}^{(s)^*}F_{1j}^{(s)}\| \\
&= \|\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_s}(G_{1j}^{(s)^*} - F_{1j}^{(s)^*})F_{1j}^{(s)}\| \\
&= \max \|(G_{1j}^{(s)^*} - F_{1j}^{(s)^*})F_{1j}^{(s)}\| \\
&\leq \max \|G_{1j}^{(s)} - F_{1j}^{(s)}\| \\
&\leq \max(\|G_{1j}^{(s)} - X_{1j}^{(s)}\| + \|X_{1j}^{(s)} - F_{1j}^{(s)}\|) \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente, o unitário desejado é $V := WU$, que satisfaz

$$\begin{aligned}
\|V-\mathbb{1}\| &= \|WU-\mathbb{1}\| \\
&\leq \|WU-U\| + \|U-\mathbb{1}\| \\
&\leq \|W-\mathbb{1}\| + \|U-\mathbb{1}\| \\
&< \varepsilon + \varepsilon/6 \\
&= 7\varepsilon/6.
\end{aligned}$$

Além disso note que $V \in C^*(A,B)$ e que $VAV^* \subset B$, pois

$$VE_{ij}^{(s)}V = WUE_{ij}^{(s)}U^*W^* = WF_{ij}^{(s)}W^* = G_{ij}^{(s)} \in B.$$

□

**Teorema 4.1.5.** *Se, em adição às hipóteses do lema anterior, tivermos uma álgebra $A_1 \subset A \cap B$, então podemos escolher o unitário $U$ no comutante de $A_1$.*

Demonstração:

Seja $\delta = \delta(\varepsilon/3, dim(A))$ como no Lema 4.1.4. Daí existe um unitário $U \in C^*(A,B)$ tal que $UAU^* \subset B$ e $\|U-\mathbb{1}\| < \varepsilon/3$. Vamos fixar um conjunto$\{F_{ij}^{(s)}\}$ de unidades matriciais para $A_1$. Definamos também $G_{ij}^{(s)} := UF_{ij}^{(s)}U^*$ unidades matriciais para $UA_1U^*$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $A_1$ tem um único fator, isto é, $A_1 \simeq M_{n_k}(\mathbb{C})$.

Seja $X = G_{11}F_{11}$. Note que

$$\begin{aligned}
\|XX^* - G_{11}\| &= \|G_{11}F_{11}G_{11} - G_{11}G_{11}G_{11}\| \\
&\leq \|F_{11} - UF_{11}U^*\| \\
&\leq \|F_{11} - UF_{11}\| + \|UF_{11} - UF_{11}U^*\| \\
&\leq 2\|\mathbb{1} - U\| \\
&< 2\varepsilon/3 < 1.
\end{aligned}$$

Analogamente provamos que $\|X^*X - F_{11}\| \leq 2\varepsilon/3 < 1$ e daí $XX^*$ e $X^*X$ são inversíveis. Com isso, $X$ também será inversível.

Seja $\varphi$ a isometria parcial da decomposição polar de $X$, isto é,

$$\varphi = X|X|^{-1} = G_{11}F_{11}(F_{11}G_{11}F_{11})_{-1/2}.$$

É claro que $\varphi^*\varphi = F_{11}$ e $\varphi\varphi^* = G_{11}$. fator, isto é, $A_1 \simeq M_{n_k}(\mathbb{C})$.

Seja $X = G_{11}F_{11}$. Note que

$$\begin{aligned}
\|XX^* - G_{11}\| &= \|G_{11}F_{11}G_{11} - G_{11}G_{11}G_{11}\| \\
&\leq \|F_{11} - UF_{11}U^*\| \\
&\leq \|F_{11} - UF_{11}\| + \|UF_{11} - UF_{11}U^*\| \\
&\leq 2\|\mathbb{1} - U\| \\
&< 2\varepsilon/3 \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Analogamente provamos que $\|X^*X - F_{11}\| \leq 2\varepsilon/3 < 1$ e daí $XX^*$ e $X^*X$ são inversíveis. Com isso, $X$ também será inversível.

Seja $\varphi$ a isometria parcial da decomposição polar de $X$, isto é,

$$\varphi = X|X|^{-1} = G_{11}F_{11}(F_{11}G_{11}F_{11})^{-1/2}.$$

É claro que $\varphi^*\varphi = F_{11}$ e $\varphi\varphi^* = G_{11}$.

Seja $W := \sum_j G_{j1}\varphi F_{1j}$. É fácil ver que $W$ é unitário, $W$ pertence a $B$ e

$$WF_{ij}W^* = G_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|W - \mathbb{1}\| &= \|\sum_j G_{j1}\varphi F_{1j} - \sum_j F_{j1}F_{1j}\| \\
&= \|\sum_j (G_{j1}\varphi - F_{j1}F_{11})F_{1j}\| \\
&\leq \sum_j \|G_{j1}\varphi - F_{j1}F_{11}\| \\
&= \sum_j \|G_{j1}\varphi - F_{j1}\varphi + F_{j1}\varphi - F_{j1}F_{11}\| \\
&\leq \sum_j \|G_{j1} - F_{j1}\| + \sum_j \|\varphi - F_{11}\|.
\end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$\|W - \mathbb{1}\| \leq \sum_j \|G_{j1} - F_{j1}\| + \sum_j \|\varphi - F_{11}\|. \tag{1}$$

Mas como

$$\|G_{j1} - F_{j1}\| = \|UF_{j1}U^* - F_{j1}\| < 2\varepsilon/3, \tag{2}$$

decorre que $\sum_j \|G_{j1} - F_{j1}\| < \sum_j 2\varepsilon/3 \leq (2n\varepsilon)/3$, onde $n = \dim(A)$.

Por outro lado, já sabemos que

$$\begin{aligned} \|X^*X - F_{11}\| &= \|F_{11}G_{11}F_{11} - F_{11}\| \\ &< 2\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|X^*X\| &\leq \|X^*X - F_{11}\| + \|F_{11}\| \\ &< 1 + 2\varepsilon/3 \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} r(X^*X) &= \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(X^*X)\} \\ &< 1 + 2\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Com isso

$$\begin{aligned} \|F_{11} - (X^*X)^{-1/2}\| &= \sup_{\lambda\in\sigma(X^*X)} |1 - \lambda^{-1/2}| \\ &< 1 - (1/\sqrt{1 + 2\varepsilon/3}). \end{aligned}$$

É fácil ver também que

$$\begin{aligned} \|G_{11} - F_{11}\| &= \|UF_{11}U^* - F_{11}\| \\ &< 2\varepsilon/3. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi - F_{11}\| &= \|X|X|^{-1} - F_{11}\| \\ &= \|G_{11}F_{11}|X|^{-1} - F_{11}\| \\ &= \|G_{11}F_{11}|X|^{-1} - F_{11}F_{11}|X|^{-1} + F_{11}|X|^{-1} - F_{11}F_{11}\| \\ &\leq \|G_{11} - F_{11}\|\|F_{11}|X|^{-1}\| + \|F_{11}\|\|\,|X|^{-1} - F_{11}\| \\ &< 2\varepsilon/3\|\,|X|^{-1}\| + \|F_{11} - (X^*X)^{-1/2}\| \\ &< 2\varepsilon/3\|\|X|^{-1}\| + 1 - (1/\sqrt{1 + 2\varepsilon/3}. \end{aligned}$$

Resumindo, temos a expressão

$$\|\varphi - F_{11}\| < 2\varepsilon/3\| \, |X|^{-1}\| + 1 - (1/\sqrt{1+2\varepsilon/3}. \qquad (3)$$

É claro que este último número tende a zero quando $\varepsilon$ tende a zero. Vamos então chamá-lo de $N(\varepsilon)$. Agora, usando (2) e (3), retornamos em (1) para obter:

$$\|W - \mathbb{1}\| \leq \sum_j \|G_{j1} - F_{j1}\| + \sum_j \|\varphi - F_{11}\| < 2n\varepsilon/3 + \sum_j N(\varepsilon) = 2n\varepsilon/3 + nN(\varepsilon).$$

Finalmente, o unitário procurado será

$$V = W^*U.$$

$V$ comuta com $A_1$. De fato, $VF_{ij} = W^*UF_{ij} = W^*G_{ij}U = F_{ij}W^*U = F_{ij}V$.
$VAV^* \subset B$. De fato, $VAV^* = W^*UAU^*W$. Como $UAU^* \subset B$ e $W \in B$, obtém-se $VAV^* \subset B$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\|V - \mathbb{1}\| &= \|W^*U - \mathbb{1}\| \leq \\ &\leq \|W^*U - U\| + \|U - \mathbb{1}\| \leq \\ &\leq \|W^* - \mathbb{1}\| + \|U - \mathbb{1}\| < \\ &< 2n\varepsilon/3 + nN(\varepsilon) + \varepsilon/3.\end{aligned}$$

□

Chegamos enfim ao teorema de caracterização de uma AF-álgebra . Na verdade, este teorema é quase uma recíproca para o Teorema 4.1.1. Nele veremos que condições devem ser acrescentadas a uma $C^*$-Álgebra de modo que ela seja uma AF.

**Teorema 4.1.6.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra . Então $A$ é AF-álgebra se e somente se $A$ é separável e para todo $\varepsilon > 0$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, existe uma $C^*$-subálgebra $B \subseteq A$ de dimensão finita tal que $dist(a_i, B) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Já vimos no Teorema 4.1.1 que se $A$ é AF, então $A$ é separável. Seja $\varepsilon > 0$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Como $\bigcup_{k\geq 1} A_k$ é densa em $A$, existem $a_{k_1} \in A_{k_1}, a_{k_2} \in A_{k_2}, ..., a_{k_n} \in A_{k_n}$, tais que $\|a_1 - a_{k_1}\| < \varepsilon, \|a_2 - a_{k_2}\| < \varepsilon, ..., \|a_n - a_{k_n}\| < \varepsilon$. Como a união $\bigcup_{k\geq 1} A_k$ é crescente, existe $A_{k_0}$ que contém todos os elementos $a_{k_1}, ..., a_{k_n}$. É claro que $A_{k_0}$ tem dimensão finita e, além disso, $\text{dist}(a_i, A_{k_0}) = \inf_{a \in A_{k_0}} \|a_i - a\| < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq n$.

($\Leftarrow$) Como $A$ é separável, fixe um subconjunto enumerável denso

$$D = \{a_i, i \geq 1\}$$

na bola unitária de $A$. Seja também $\varepsilon_i, i \geq 1$, uma sequência decrescendo monotonamente para zero.

Para $k = 1$ existe $A_1 \subseteq A$, com $\dim(A) < \infty$ e tal que $\text{dist}(a_1, A_1) < \varepsilon_1$. Seja $\delta_1 = \delta_1(\frac{\varepsilon_2}{3}, \dim(A_1))$. Fixemos um conjunto de unidades matriciais

$$\{E_{ij}^{(s_1)},\ 1 \leq s_1 \leq n,\ 1 \leq i,j \leq m_{s_1}\}$$

para $A_1$. Dado o conjunto

$$X_1 = \{a_1, a_2, E_{11}^{(1)}, E_{12}^{(1)}, ..., E_{m_{s_1}m_{s_1}}^{(n)}\}$$

e dado $\delta_1' = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon_2}{3}\}$, existe $B_1 \subset A$ de dimensão finita tal que $\text{dist}(x, B_1) < \delta_1'$ para todo $x \in X_1$. Segue daí que $\text{dist}(a_i, B_1) < \frac{\varepsilon_2}{3}$ para $i = 1, 2$ e $\text{dist}(E_{ij}^{(s_1)}, B_1) < \delta_1$ para todas as unidades matriciais de $A_1$.

Pelo Lema 4.1.4, existe um unitário $U_1$ em $A$ tal que

$$U_1 A_1 U_1^* \subset B_1 \ \text{ e } \ \|U_1 - \mathbb{1}\| < \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Definamos $A_2 := U_1^* B_1 U_1$. É claro que $A_2$ é de dimensão finita e $A_1 \subseteq A_2$, pois $A_1 \subset U_1^* B_1 U_1$. Além disso, veja que

$$\begin{aligned}
\text{dist}(a_i, A_2) &= \inf_{y \in A_2} \|a_i - y\| \\
&= \inf_{b \in B_1} \|a_i - U_1^* b U_1\| \\
&= \inf_{b \in B_1} \|U_1^*(U_1 a_i U_1^* - b) U_1\| \\
&\leq \inf_{b \in B_1} \|U_1 a_i U_1^* - b\| \\
&\leq \inf_{b \in B_1} (\|U_1 a_i U_1^* - a_i\| + \|a_i - b\|) \\
&< \|U_1 a_i U_1^* - U_1 U_1^* a_i\| + \frac{\varepsilon_2}{3} \\
&\leq (\|a_i U_1^* - a_i\| + \|a_i - U_1^* a_i\|) + \frac{\varepsilon_2}{3} \\
&\leq (2\|a_i\| \|U_1 - \mathbb{1}\| + \frac{\varepsilon_2}{3} \\
&< 2\frac{\varepsilon_2}{3} + \frac{\varepsilon_2}{3} \\
&= \varepsilon_2, \quad \text{para } i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Agora, existindo uma $k$-ésima álgebra nestas condições (como $A_2$), tome $\delta_k = \delta_k(\frac{\varepsilon_k + 1}{3}, \dim(A_k))$, fixe um conjunto de unidades matriciais

$$\{E_{ij}^{(s_k)},\ 1 \leq s_k \leq n,\ 1 \leq i,j \leq m_s\}$$

para $A_k$, considere o conjunto

$$X_k = \{a_1, a_2, ...a_k, a_{k+1}, E_{11}^{(1)}, E_{12}^{(1)}, ..., E_{m_{s_k} m_{s_k}}^{(n)}\}$$

e seja $\delta'_k = \min\{\delta_k, \frac{\varepsilon_k+1}{3}\}$.

Então existe $B_k \subset A$ de dimensão finita tal que $\text{dist}(x, B_k) < \delta'_k$ para todo $x \in X_k$. Segue daí que $\text{dist}(a_i, B_k) < \frac{\varepsilon_k+1}{3}$ para todo $1 \leq i \leq k+1$ e $\text{dist}(E_{ij}^{(s_k)}, B_k) < \delta_k$ para todas as unidades matriciais de $A_k$.

Novamente pelo Lema 4.1.4, existe um unitário $U_k$ em $A$ tal que

$$U_k A_k U_k^* \subset B_k \quad \text{e} \quad \|U_k - \mathbb{1}\| < \frac{\varepsilon_k + 1}{3}.$$

Definimos $A_{k+1} := U_k^* B_k U_k$. De modo análogo ao caso $k = 1$, $A_{k+1}$ é de dimensão finita e $A_k \subseteq A_{k+1}$. Além disso, é fácil ver que também podemos obter

$$\text{dist}(a_i, A_{k+1}) < \varepsilon_k + 1, \quad \text{para } 1 \leq i \leq k+1.$$

Isto fornece, portanto, a relação de recorrência pela qual podemos obter uma sequência crescente de $C^*$-Álgebras de dimensão finita cuja união é densa em $A$, já que a desigualdade $\text{dist}(a_i, A_{k+1}) < \varepsilon_k + 1, \quad 1 \leq i \leq k+1$, nos leva a concluir que $D = \{a_i, i \geq 1\} \subset \overline{\bigcup_{n \geq k} A_n}$. Daí, $\overline{\bigcup_{n \geq k} A_n} \supset \overline{D}$ =Bola Unitária de $A$. Portanto, $\bigcup_{n \geq k} A_n$ é densa em $A$.
(É fácil ver que se $Y' \subset Y \subset Z$, onde $Z$ é uma álgebra de Banach, $Y$ é subespaço vetorial de $Z$ e $Y'$ é denso na bola unitária de $Z$, então $Y$ é denso em $Z$). □

## 4.2 Isomorfismos de AF's

**Lema 4.2.1.** *Seja $A$ uma AF-álgebra tal que $A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} B_n}$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe um operador unitário $W \in \widetilde{A}$ com $\|W - \mathbb{1}\| < \varepsilon$ tal que*

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = W \bigcup_{n \geq 1} B_n W^*.$$

*Em particular, existem subsequências $m_i$ e $n_i$ tal que*

$$A_{m_i} \subset W B_{n_i} W^* \subset A_{m_{i+1}} \quad \textit{para todo} \quad i \geq 1.$$

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$. Escolha $\{\varepsilon_i > 0\}_{i \geq 1}$ tal que $2 \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$. Seja $m_1 = 1$ e $\delta_1 := \delta_1(\varepsilon_1, \dim(A_{m_1}))$, como no Lema 4.1.4.

Seja também $\{E_{ij}^{s_1}\}$, onde $1 \leq s_1 \leq k_1, \quad 1 \leq i,j \leq l_1$ as unidades matriciais de $A_{m_1}$.

Usando a hipótese temos que

$$\{E_{ij}^{s_1}\} \subset A_{m_1} \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}.$$

Daí, para cada $ij$, existe $T_{ij} \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ que aproxima $E_{ij}$. Como $T_{ij} \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ , vem que $T_{ij} \subset B_{n_{ij}}$ para algum $n_{ij}$. Como a coleção $\{ij\}$ é finita, seja $n_1 = \max\{n_{ij}\}$. Assim, existe $n_1$ tal que $\mathrm{dist}(E_{ij}^{s_1}, B_{n_1}) < \delta_1$. Pelo Lema 4.1.4, existe um unitário $U_1$ tal que

$$U_1 A_{m_1} U_1^* \subset B_{n_1} \quad \text{e} \quad \|U_1 - \mathbb{1}\| < \varepsilon_1. \tag{1}$$

Agora, seja $\eta_1 := \delta(\varepsilon_1, \dim(B_{n_1}))$. Temos que $U_1 B_{n_1} U_1^* \subset \overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n} = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}$. Daí, pelos mesmos argumentos anteriores, existe $m_2$ tal que as unidades matriciais de $U_1 B_{n_1} U_1^*$ estão próximas de $A_{m_2}$ a menos de $\eta_1$.

Por (1) temos que $A_{m_1} \subset U_1^* B_{n_1} U_1$. Além disso, como $m_2 > m_1$, $A_{m_1} \subset A_{m_2}$. Assim, $A_{m_1} \subset [U_1^* B_{n_1} U_1] \cap A_{m_2}$. Pelo Teorema 4.1.5, existe um unitário $V_1 \subset A$, comutando com $A_{m_1}$, tal que

$$V_1 [U_1^* B_{n_1} U_1] V_1^* \subset A_{m_2} \quad \text{e} \quad \|V_1 - \mathbb{1}\| < \varepsilon_1.$$

Além disso, temos que $A_{m_1} = V_1 V_1^* A_{m_1} = V_1 A_{m_1} V_1^* \subset V_1 U_1^* B_{n_1} U_1 V_1^* \subset A_{m_2}$.

Façamos mais uma etapa:

Para $\varepsilon_2$ e $m_2$, tome $\delta_2 := \delta(\varepsilon_2, \dim(A_{m_2}))$. Seja

$$\{E_{ij}^{s_2},\ 1 \leq s_2 \leq k_2 \ \ 1 \leq i,j \leq l_2\},$$

unidades matriciais de $A_{m_2}$. Usando a hipótese, é possível obter $B_{n_2}$ tal que

$$\mathrm{dist}(E_{ij}^{s_2}, V_1 U_1^* B_{n_2} U_1 V_1^*) < \delta_2.$$

Pelo Teorema 4.1.5, existe $U_2$ comutando com $V_1 U_1^* B_{n_1} U_1 V_1^*$ (pois claramente $V_1 U_1^* B_{n_1} U_1 V_1^* \subset V_1 U_1^* B_{n_2} U_1 V_1^* \cap A_{m_2}$) tal que

$$U_2 A_{m_2} U_2^* \subset V_1 U_1^* B_{n_2} U_1 V_1^* \quad \text{e} \quad \|U_2 - \mathbb{1}\| < \varepsilon_2.$$

Continuando, obtemos $V_2$ comutando com $A_{m_2}$ tal que

$$A_{m_2} \subset V_2 U_2^* V_1 U_1^* B_{n_2} U_1 V_1^* U_2 V_2^* \subset A_{m_3}.$$

Suponha agora que no $k$-ésimo estágio tenhamos encontrado $m_1 < m_2 < \cdots < m_{k+1}$ e $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e operadores unitários $U_i$ e $V_i$, com $1 \leq i \leq k$, satisfazendo $\|U_i - \mathbb{1}\| < \varepsilon_i$ e $\|V_i - \mathbb{1}\| < \varepsilon_i$, tal que

$$\left.\begin{array}{c} A_{m_i} \subset \widetilde{B}_{n_i} := V_i U_i^* \cdots V_1 U_1^* B_{n_i} U_1 V_1^* \cdots U_i V_i^* \subset A_{m_{i+1}}, \\ \text{com } V_i \text{ comutando com } A_{m_1} \text{ e } U_{i+1} \text{ comutando com } \widetilde{B}_{n_i}, \quad 1 \leq i \leq k. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Definamos $W := \lim\limits_{i\to\infty} V_i U_i^* ... V_1 U_1^*$. Este limite realmente existe, pois a sequência $(x_n) = (V_n U_n^* ... V_1 U_1^*)$ é de Cauchy. De fato: para $n \geq m$, temos

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \|v_n U_n^* ... V_m U_m^* ... V_1 U_1^* - V_m U_m^* ... V_1 U_1^*\| \\
&\leq \|(V_n U_n^* ... V_{m+1} U_{m+1}^* - \mathbb{1}\| \|V_m U_m^* ... V_1 U_1^*\| \\
&= \|V_n U_n^* ... V_{m+1} U_{m+1}^* - \mathbb{1}\| \\
&\leq \|V_n U_n^* ... V_{m+1} U_{m+1}^* - V_n\| + \|V_n - \mathbb{1}\| \\
&\leq \|U_n^* ... V_{m+1} U_{m+1}^* - \mathbb{1}\| + \varepsilon_n \\
&\leq \|U_n^* ... V_{m+1} U_{m+1}^* - U_n^*\| + \|U_n^* - \mathbb{1}\| + \varepsilon_n \\
&\leq \|V_{n-1} U_{n-1}^* ... V_{m+1} U_{m+1}^* - \mathbb{1}\| + 2\varepsilon_n \\
&\leq ... \\
&\leq 2 \sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i,
\end{aligned}$$

que vai ser tão pequeno quanto desejarmos, bastando tomar $m, n > n_0$, para $n_0$ suficientemente grande, já que $2 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$.

Pelos mesmos argumentos obtemos $\|W - \mathbb{1}\| < \varepsilon$.

Agora seja $W_k := V_k U_k^* ... V_1 U_1^*$ e $W^{(k)} := \lim\limits_{i\to\infty} V_i U_i^* ... V_{k+1} U_{k+1}^*$.

Afirmação: $W_{(k)}$ comuta com $\widetilde{B}_{n_k}$. De fato, por (2) temos que

$$A_{m_1} \subset \widetilde{B}_{n_1} \subset A_{m_2} \subset \widetilde{B}_{n_2} \subset A_{m_3} \subset \cdots \subset A_{m_i} \subset \widetilde{B}_{n_i} \subset A_{m_{i+1}},$$

$V_i$ comuta com $A_{m_i}$ e $U_{i+1}$ comuta com $\widetilde{B}_{n_i}$. Daí decorre $\widetilde{B}_{n_k}$ comuta com $V_i$ e $\widetilde{B}_{n_k}$ comuta com $U_i$, para $i > k$. Assim:

$$W^{(k)} \widetilde{B}_{n_k} = \lim_{i\to\infty} V_i U_i^* ... V_{k+1} U_{k+1}^* \widetilde{B}_{n_k}) = \lim_{i\to\infty} (\widetilde{B}_{n_k} V_i U_i^* ... V_{k+1} U_{k+1}^*) = \widetilde{B}_{n_k} W^{(k)}.$$

Agora, como $W = W^{(k)} W_k$, vem que

$$\begin{aligned}
W B_{n_k} W^* &= W^{(k)} W_k B_{n_k} W_k^* W^{(k)*} \\
&= W^{(k)} \widetilde{B}_{n_k} W^{(k)*} \\
&= \widetilde{B}_{n_k}.
\end{aligned}$$

Daí, $\bigcup_{n\geq 1} WB_nW^* = \bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, implicando em

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = W(\bigcup_{n\geq 1} B_n)W^*.$$

Em particular, temos que $A_{m_i} \subset \widetilde{B}_{n_i} = WB_{n_i}W^* \subset A_{m_{i+1}}$, para $i \leq 1$. □

**Teorema 4.2.2.** *Se $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ e $B = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}$ são $*$-isomorfas, então $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ e $\bigcup_{n\geq 1} B_n$ também são.*

Demonstração:

Seja $\alpha : A \to B$ um $*$-isomorfismo. Temos que $\bigcup_{n\geq 1} \alpha(A_n) \subset B$ é denso em $B$. Daí, $\overline{\bigcup_{n\geq 1} \alpha(A_n)} = B = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}$. Pelo Lema 4.2.1, $\bigcup_{n\geq 1} \alpha(A_n) \simeq \bigcup_{n\geq 1} B_n$, implicando em $\bigcup_{n\geq 1} A_n \simeq \bigcup_{n\geq 1} B_n$. □

Continuando nesta questão de isomorfismos, mostraremos agora duas AF-álgebras $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ e $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ tais que $A_n$ é isomorfa $B_n$ para todo $n$, mas $A$ não é isomorfa a $B$.

Estes exemplos vão reforçar a fundamental importância dos indutores (inclusões $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$) na obtenção de AF-álgebras $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$.

Seja $X$ o conjunto de Cantor. Então $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$, onde

$X_0 = [0,1]$

$X_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$

$X_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$

$\vdots$

Note que a família $X_n$ é decrescente, consistindo de $2^n$ intervalos disjuntos, e cada intervalo de $X_n$ contém exatamente 2 intervalos de $X_{n+1}$.

Seja $A_n$ a subálgebra de funções em $C(X)$ que são constantes sobre os intervalos de $X_n$. Daí:

$A_0 \simeq \mathbb{C}$

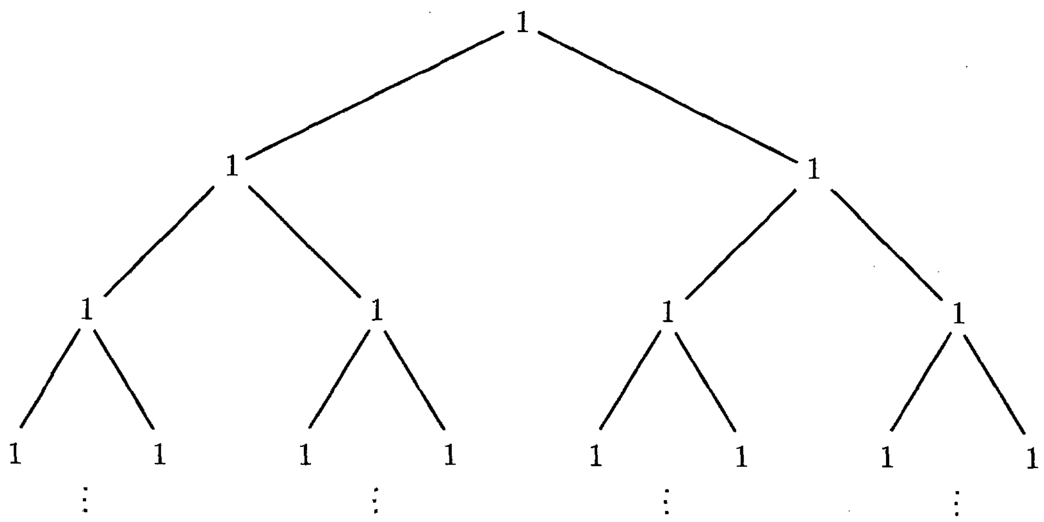
$A_1 \simeq \mathbb{C}^2$

$A_2 \simeq \mathbb{C}^4$

$\vdots$

$A_n \simeq \mathbb{C}^{2^n}$.

Além disso, é fácil ver que imersão de $A_n$ em $A_{m+1}$ é dada por:




Temos então que $\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = A = C(X)$.

Considere agora $B = C(Y)$, onde $Y = \{0\} \cup \{1/n, n \geq 1\}$. Seja $B_n$ a subálgebra das funções em $C(Y)$ que são constantes sobre os conjuntos $[0, 2^{-n}] \cap Y$. Daí:

$B_0 \simeq \mathbb{C}$
$B_1 \simeq \mathbb{C}^2$
$B_2 \simeq \mathbb{C}^4$
$\vdots$
$B_n \simeq \mathbb{C}^{2^n}$.

Como são as imersões de $\mathbb{C}^{2^n}$ em $\mathbb{C}^{2^{n+1}}$?

Note que se $f \in B_n$, então podemos fazer a identificação

$$f \simeq (f(1), f(1/2), ..., f(1/2^n)) \in \mathbb{C}^{2^n}$$

e se $f \in B_{n+1}$, então

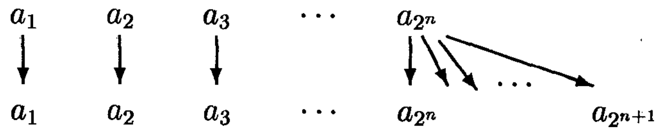
$$f \simeq (f(1), f(1/2), ..., f(1/2^n), ..., f(1/2^{n+1})) \in \mathbb{C}^{2^{n+1}}.$$

Isto define as aplicações $I_n : B_n \to \mathbb{C}^{2^n}$ e $I_{n+1} : B_{n+1} \to \mathbb{C}^{2^{n+1}}$.

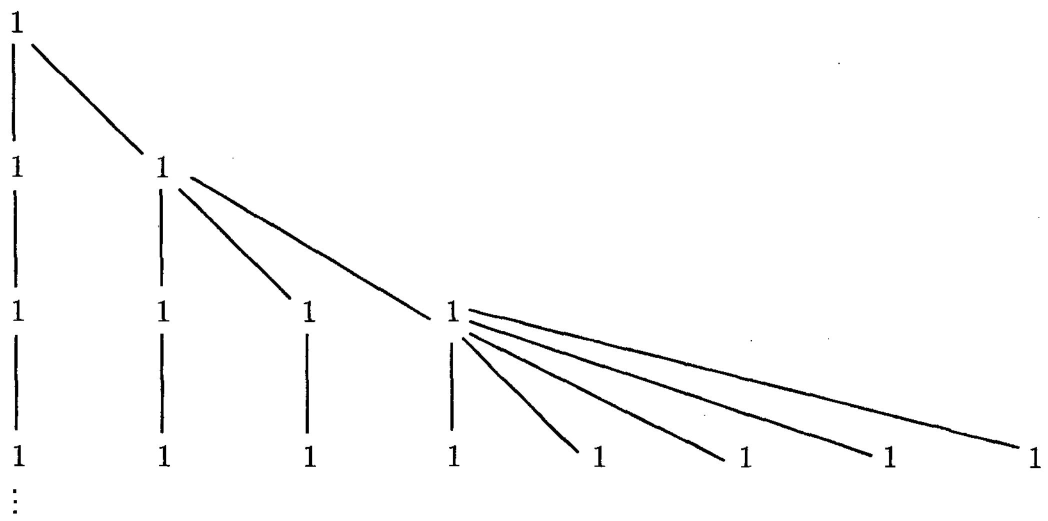
Uma função $f \in B_n$ é levada na álgebra $B_{n+1}$ através da aplicação de inclusão $i : B_n \to B_{n+1}$.

Assim, a inclusão $\varphi : \mathbb{C}^{2^n} \to \mathbb{C}^{2^{n+1}}$ é dada por $\varphi = I_{n+1} \circ i \circ I_n^{-1}$, isto é

$$\varphi(a_1, a_2, ..., a_{2^n}) = (a_1, a_2, ..., a_{2^n}, a_{2^n}, .., a_{2^n})$$




O diagrama de Bratteli de $B = \overline{\bigcup_{n \geq 1} B_n} = C(Y)$ é o seguinte:



Temos assim que $B_n \simeq A_n$ para todo $n$, mas $A$ não é isomorfa a $B$, pois se fosse, seus espectros seriam homeomorfos, implicando no homeomorfismo entre conjuntos $X$ e $\{0\} \cup \{1/n, n \geq 1\}$, o que é um absurdo.

Para encerrar esta seção vamos discutir uma questão que ficou pendente na Observação 3.2.5: sobre que circunstâncias dois diagramas distintos produzem a mesma AF. Finalmente, isto é respondido no

**Teorema 4.2.3.** *Sejam $A$ e $B$ AF-álgebras, com $A = \overline{\bigcup_{m \geq 1} A_m}$ e $B = \overline{\bigcup_{n \geq 1} B_n}$. Sejam também as imersões $\alpha_m : A_m \to A_{m+1}$ e $\beta_n : B_n \to B_{n+1}$ (além disso, lembremos que de acordo com a notação utilizada na seção 1.5, $\alpha_{m,m+k}$ é a imersão de $A_m$ em $A_{m+k}$. O mesmo valendo para $\beta_{n,n+k}$). Então $A$ e $B$ são isomorfas se e somente se existirem subsequências $m_i$ e $n_i \in \mathbb{N}$ e homomorfismos $\theta_i$ e $\phi_i$, com $\theta_i : A_{m_i} \to B_{n_i}$ e $\phi_i : B_{n_i} \to A_{m_{i+1}}$, tais que*

$$\phi_i \circ \theta_i = \alpha_{m_i, m_{i+1}} \quad e$$

$$\theta_{i+1} \circ \phi_i = \beta_{n_i, n_{i+1}}.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $A = \overline{\bigcup_{m\geq 1} A_m}$ e $B = \overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}$ sejam isomorfas. Sem trazer prejuízo no que segue, vamos cometer o abuso de chamar $A = B$. Dessa forma, pelo Lema 4.2.1, dado $\varepsilon > 0$, existe um unitário $W$ tal que $\|W - \mathbb{1}\| < \varepsilon$ e $\bigcup_{m\geq 1} A_m = W \bigcup_{n\geq 1} B_n W^*$. Em particular, existem subsequências $m_i$ e $n_i$ tais que

$$A_{m_i} \subset WB_{n_i}W^* \subset A_{m_{i+1}}, \quad \text{para todo } \ i \geq 1.$$

Seja $\theta_i'$ a inclusão de $A_{m_i}$ em $WB_{n_i}W^*$ e $\phi_i'$ a inclusão de $WB_{n_i}W^*$ em $A_{m_{i+1}}$. Definamos os automorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \ & B \to B \\ & x \mapsto W^*xW \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \varphi_2 : \ & B \to B \\ & x \mapsto WxW^* \end{aligned}$$

Daí, $\theta_i = \varphi_1 \circ \theta_i' : A_{m_i} \to B_{n_i}$ é a inclusão de $A_{m_i}$ em $B_{n_i}$ e $\phi_i = \phi_i' \circ \varphi_2 : B_{n_i} \to A_{m_{i+1}}$ é a inclusão de $B_{n_i}$ em $A_{m_{i+1}}$. Assim, finalmente obtemos

$$\phi_i \circ \theta_i = \phi_i'\varphi_2\varphi_1\theta_i' = \phi_i'\theta_i' = \text{inclusão de } \ A_{m_i} \ \text{ em } \ A_{m_{i+1}},$$

e

$$\theta_{i+1} \circ \phi_i = \varphi_1\theta_{i+1}'\phi_i\varphi_2 = \text{inclusão de } \ B_{n_i} \ \text{ em } \ B_{n_{i+1}}.$$

($\Leftarrow$) Com os dados da hipótese, podemos montar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_{m_1} \arrow[r, "\alpha_{m_1,m_2}"] \arrow[d, "\theta_1"'] & A_{m_2} \arrow[r, "\alpha_{m_2,m_3}"] \arrow[d, "\theta_2"'] & A_{m_3} \arrow[r, "\alpha_{m_3,m_4}"] \arrow[d, "\theta_3"'] & A_{m_4} \arrow[d, "\theta_4"'] & \cdots & A \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
B_{n_1} \arrow[r, "\beta_{n_1,n_2}"'] \arrow[ur, "\phi_1"] & B_{n_2} \arrow[r, "\beta_{n_2,n_3}"'] \arrow[ur, "\phi_2"] & B_{n_3} \arrow[r, "\beta_{n_3,n_4}"'] \arrow[ur, "\phi_3"] & B_{n_4} & \cdots & B
\end{tikzcd}$$

Observe também que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{tikzcd}
A_{m_i} \arrow[r, "\alpha_{m_i,m_{i+1}}"] \arrow[d, "\theta_i"'] & A_{m_{i+1}} \arrow[d, "\theta_{i+1}"'] \\
B_{n_i} \arrow[r, "\beta_{n_i,n_{i+1}}"'] \arrow[ur, "\phi_i"] & B_{n_{i+1}}
\end{tikzcd}$$

Em outras palavras, $\theta_{i+1}\alpha_{m_i,m_{i+1}} = \beta_{n_i,n_{i+1}}\theta_i, \ \forall i$ .

De fato, usando a hipótese, temos que

$$\theta_{i+1}\alpha_{m_i,m_{i+1}} = \phi_{i+1}(\phi_i\theta_i)$$

e

$$\beta_{n_i,n_{i+1}}\theta_i = (\theta_{i+1}\phi_i)\theta_i.$$

Agora considere as imersões naturais $f_{m_i} : A_{m_i} \to A$ e $g_{n_i} : B_{n_i} \to B$. Considere também a aplição $\gamma_i := g_{n_i}\theta_i : A_{m_i} \to B$. Segue, da comutação do diagrama anterior, que o diagrama abaixo também comuta.

$$\begin{tikzcd}
A_{m_i} \arrow[r, "\alpha_{m_i,m_{i+1}}"] \arrow[dr, "\gamma_i"'] & A_{m_{i+1}} \arrow[d, "\gamma_{i+1}"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Daí, pelo Teorema 1.5.5, existe um $*$-homomorfismo $\theta : A \to B$. Utilizando argumentos análogos, obtemos pelo Teorema 1.5.5 um $*$-homomorfismo $\phi : B \to A$. Vamos mostrar que $\theta \circ \phi = Id = \phi \circ \theta$.

Basta verificar isto sobre os subconjuntos densos $\bigcup\limits_{m\geq 1} A_m$ e $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$.

Seja $a_{m_i} \in A_{m_i}$. Note que

$$\phi(\theta(a_{m_i})) = \phi(\theta_i(a_{m_i})) = \phi_i(\theta_i(a_{m_i})) = \alpha_{m_i,m_{i+1}}(a_{m_i}) = a_{m_i}.$$

seja $b_{n_i} \in B_{n_i}$. Note também que

$$\theta(\phi(b_{n_i})) = \theta(\phi_i(b_{n_i})) = \theta_{i+1}(\phi_i(b_{n_i})) = \beta_{n_i,n_{i+1}}(b_{n_i}) = b_{n_i}.$$

Logo, $A$ é isomorfa a $B$. $\square$

# Capítulo 5

# Os ideais de uma AF-álgebra

## 5.1 Uma caracterização dos Ideais de uma AF-álgebra - como reconhecer os Ideais de uma AF-álgebra pelo seu Diagrama de Bratteli

Vamos começar esta seção com um teorema que mostra que todo ideal de uma AF-álgebra também é uma AF-álgebra e que, além disso, exibe a cadeia crescente de álgebras cujo limite é o ideal.

**Observação 5.1.1.** *Nesta seção todos os ideais citados serão considerados bilaterais e fechados na álgebra em que estiverem contidos.*

**Teorema 5.1.2.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e seja $\{A_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência crescente de subálgebras de $A$ tal que $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$. Seja $J$ um ideal de $A$. Então*

$$J = \overline{J \cap \bigcup_{n\geq 1} A_n} = \overline{\bigcup_{n\geq 1} (J \cap A_n)}.$$

Demonstração:

Seja $J_n = J \cap A_n$. Como $J$ é um ideal fechado em $A$, decorre que $J_n$ é ideal fechado em $A_n$. Devemos provar que $J = \overline{\bigcup_{n\geq 1} J_n}$.

Trivialmente temos $\overline{\bigcup_{n\geq 1} J_n} \subseteq J$. Por outro lado, suponha que $x \notin \overline{\bigcup_{n\geq 1} J_n}$. Vamos provar que $x \notin J$.

Seja $\{x_k\}_{k\geq 1}$ uma sequência em $A_n$ tal que $x_k \to x$. Como $x \notin \overline{\bigcup_{n\geq 1} J_n}$, temos que $\inf_{y \in \bigcup_{n\geq 1} J_n} \|x - y\| = \varepsilon > 0$. Já que $x_k \to x$, existe $k_0$ tal que $\|x - x_k\| < \varepsilon/2$ para $k \geq k_0$.

Agora, para $y \in J_n$ e $k \geq k_0$, temos que $\|x-y\| \leq \|x_k-y\|+\|x_k-x\|$. Daí, $\|x_k-y\| \geq \|x-y\| - \|x_k-x\| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$.

Agora, seja $\rho : A \to A/J$ a aplicação quociente. Como $\mathrm{Ker}(\rho) = J$, decorre que $\mathrm{Ker}(\rho|_{A_n}) = J \cap A_n = J_n$. Como a norma na $C^*$-Álgebra $\rho(A_n)$ é a mesma se $\rho(A_n)$ é vista como uma subálgebra de $\rho(A)$ ou como imagem da aplicação quociente $A_n \to A_n/J_n$, temos que

$$\|\rho(x_k)\| = \|x_k - J_n\| = \inf_{y\in J_n} \|x_k - y\| \geq \varepsilon/2, \quad k \geq k_0.$$

Agora, como $x_k \to x$ e $\rho$ é contínua, vem que $\rho(x_k) \to \rho(x)$ e assim

$$\|\rho(x)\| = \lim_{k\to\infty} \|\rho(x_k)\| > \varepsilon/2.$$

Logo, $x \notin J$. □

**Definição 5.1.3.** *Seja $\mathcal{D}(A)$ o diagrama de Bratteli de uma AF-álgebra $A$ e seja $\Lambda$ um subconjunto de $\mathcal{D}(A)$. Com o intuito de simplificar a notação, vamos dizer que $(n,k) \searrow (n+1,q)$ se e somente se existe um inteiro não negativo $p$ tal que $(n,k) \overset{p}{\searrow} (n+1,q)$. Então dizemos que:*

*i. $\Lambda$ é Dirigido se $(n,k) \in \Lambda$ e $(n,k) \searrow (n+1,q)$, então $(n+1,q) \in \Lambda$;*

*ii. $\Lambda$ é Hereditário se, dado $(n,k) \in \mathcal{D}(A)$, tivermos que $(n+1,q) \in \Lambda$ sempre que existe imersão $(n,k) \searrow (n+1,q)$, então $(n,k) \in \Lambda$, isto é, $\Lambda$ é Hereditário se todos os vértices nos quais $(n,k)$ estiver parcialmente imerso pertencem a $\Lambda$, então o vértice $(n,k)$ também pertence a $\Lambda$.*

**Lema 5.1.4.** *Seja $A = \bigoplus_{k=1}^{p} M_{n_k}$, $J$ um ideal em $A$ e seja $\Gamma = \{1, 2, ..., p\}$. Então $J$ é da forma $J = \bigoplus_{k\in\Gamma_0} M_{n_k}$, onde $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, isto é, $J$ é alguma subsoma de $A$.*

Demonstração:

É fácil ver que toda subsoma é um ideal. Por outro lado, seja $J$ um ideal de $A$ e definamos

$$\Gamma_0 = \{\ k :\ J \cap M_{nk} \neq \{0\}\ \}.$$

Vamos provar que $J = \bigoplus_{k\in\Gamma_0} M_{nk}$.

Seja $x \in J$. Chamemos de $e_k$ a unidade de $M_{n_k}$. Assim, a unidade de $A$ é o elemento $\mathbb{1} = (e_1, e_2, ..., e_p)$. Daí,

$$x = x.\mathbb{1} == \underbrace{x(e_1, 0, ..., 0)}_{x\in J\cap M_{n_1}} + \underbrace{x(0, e_2, ..., 0)}_{x\in J\cap M_{n_2}} + \cdots + \underbrace{x(0, ..., e_p)}_{x\in J\cap M_{n_p}}.$$

Estes produtos de $x$ pelas unidades matriciais de $M_{n_k}$, $k = 1, ..., p$, ou são zero ou então algum outro elemento de $M_{n_k}$. Desse modo, $x \in \bigoplus_{k \in \Gamma_0} M_{nk}$.

Agora, note que se $k \in \Gamma_0$, então $J \cap M_{nk} \neq \{0\}$. Como $J$ é ideal de $A$, temos que $J \cap M_{nk}$ é ideal de $M_{nk}$. Daí, como $M_{nk}$ é Simples, $J \cap M_{nk} = M_{nk}$ e assim $M_{nk} \subseteq J$. Como isto vale para todo $k \in \Gamma_0$, temos que $\bigoplus_{k \in \Gamma_0} M_{nk} \subseteq J$. □

**Teorema 5.1.5.** *Seja $I$ um ideal em $\bigcup_{n \geq 1} A_n$. Então $I$ tem a forma*

$$I = \bigcup_{n \geq 1} \bigoplus_{k;(n,k) \in \Lambda} M_{d_{n,k}},$$

*onde $\Lambda$ é um subconjunto de $\mathcal{D}(A)$ dirigido e hereditário. Reciprocamente, se $\Lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$ é dirigido e hereditário, então o subconjunto $I = \bigcup_{n \geq 1} \bigoplus_{k;(n,k) \in \Lambda} M_{d_{n,k}}$ é um ideal em $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ tal que*

$$I \cap A_n = \bigoplus_{k;(n,k) \in \Lambda} M_{d_{n,k}}.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $I$ um ideal em $\bigcup_{n \geq 1} A_n$. Defina $I_n = I \cap A_n$. Daí,

$$\bigcup_{n \geq 1} I_n = \bigcup_{n \geq 1} [I \cap A_n] = I \cap [\bigcup_{n \geq 1} A_n] = I.$$

Além disso, pelo Teorema 5.1.2, $I_n$ é um ideal de $A_n$. Como já sabemos, pelo Lema 5.1.4, que os ideais de $A_n = \bigoplus_{k=1}^{l_n} M_{d_{n,k}}$ são as subsomas destes finitos fatores de soma direta, temos que $I_n = \bigoplus_{k;(n,k) \in \Lambda} M_{d_{n,k}}$, onde $\Lambda$ é algum subconjunto de $\mathcal{D}(A)$. Assim, $I = \bigcup_{n \geq 1} \bigoplus_{k;(n,k) \in \Lambda} M_{d_{n,k}}$.

Agora falta mostrar que $\Lambda$ é dirigido e hereditário.

Dirigido: Chamemos de $e^{(n,k)}$ a unidade do fator $M_{d_{n,k}}$. Se $(n, k) \in \Lambda$, então $M_{d_{n,k}} \subseteq I_n \subset I$. Em particular, $e^{(n,k)} \in I$. Daí, se $(n, k) \searrow (n + 1, q)$, então $e^{(n,k)}.e^{(n+1,q)} \neq 0$, e como $e^{(n+1,q)} \in M_{d_{n+1,q}}$, temos que $e^{(n,k)}.e^{(n+1,q)} \in M_{d_{n+1,q}}$. Já que $I$ é ideal, $e^{(n,k)}.e^{(n+1,q)} \in I$. Assim, $M_{d_{n+1,q}} \cap I \neq \{0\}$. Portanto, como $I$ é ideal e $M_{d_{n+1,q}}$ é um fator de dimensão finita, então $M_{d_{n+1,q}} \subseteq I$, isto é, $(n+1, q) \in \Lambda$.

Hereditário: Fixe $(n, k)$ e seja $\Gamma := \{q;\ (n, k) \searrow (n + 1, q)\}$. Suponha que $(n+1, q) \in \Lambda$ para todo $q \in \Gamma$, isto é, $M_{d_{n+1,q}} \subseteq I$, para todo $q \in \Gamma$. Como $M_{d_{n,k}}$ está contido na soma dos fatores $M_{d_{n+1,q}}$ nos quais está parcialmente imerso, decorre que $M_{d_{n,k}} \subseteq I$, ou seja, $(n, k) \in \Lambda$.

($\Rightarrow$) Seja $\Lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$ dirigido e hereditário e seja $I = \bigcup\limits_{n\geq 1} \bigoplus\limits_{k;(n,k)\in\Lambda} M_{d_{n,k}}$. Vamos supor que $I$ é ideal em $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ e que $I \cap A_n = \bigoplus\limits_{k;(n,k)\in\Lambda} M_{d_{n,k}}$. Fixe $n$ e defina $I_n = \bigoplus\limits_{k;(n,k)\in\Lambda} M_{d_{n,k}}$. Como $\Lambda$ é dirigido, se $M_{d_{n,k}} \subseteq I_n$ e $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em $M_{d_{n+1,q}}$, então $M_{d_{n+1,q}} \in I_{n+1}$. Daí, $M_{d_{n,k}} \subseteq I_{n+1}$ e $I_n \subseteq I_{n+1}$. Então, se $x \in \bigcup\limits_{k\geq 1} A_k$ e $y \in I = \bigcup\limits_{k\geq 1} I_k$, existe $n$ tal que $x \in A_n$ e $y \in I_n$. Como $I_n$ é ideal de $A_n$ (Lema 5.1.4), segue que $xy$ e $yx \in I_n \subseteq I$. Logo $I$ é ideal em $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$.

Agora resta mostrar que $I \cap A_n = I_n$.

É claro que $I_n \subseteq I \cap A_n$. Para mostrar a inclusão contrária, basta mostrar que se $M_{d_{n,k}} \subseteq I \cap A_n$, então $M_{d_{n,k}} \subseteq I_n$. Suponha então que $M_{d_{n,k}} \subseteq I \cap A_n$. Como $M_{d_{n,k}}$ tem uma base finita e os $I_m's$ são subespaços vetoriais finitos e crescentes em $I$, existe $m$ tal que $M_{d_{n,k}} \subseteq I_m$. Se $m \leq n$, nada a fazer, pois $M_{d_{n,k}} \subseteq I_m \subseteq I_n$.

Analisemos então o caso $m > n$. Suponha, por absurdo, que $M_{d_{n,k}} \nsubseteq I_n$, isto é, que $(n,k) \notin \Lambda$. Como $\Lambda$ é hereditário, dizer que $(n,k) \notin \Lambda$ implica em dizer que existe $k_1$, $1 \leq k_1 \leq n_{n+1}$, tal que $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em $M_{d_{n+1,k_1}}$, mas $M_{d_{n+1,k_1}} \nsubseteq I_{n+1}$.

Novamente, como $\Lambda$ é hereditário, existe $k_2$ tal que $M_{d_{n+1,k_1}}$ está parcialmente imerso em $M_{d_{n+2,k_2}}$ mas $M_{d_{n+1,k_1}} \nsubseteq I_{n+2}$ (note que pela transitividade da imersão parcial temos que $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em $M_{d_{n+2,k_2}}$).

Continuando nesse processo, obtemos um fator $M_{d_{m,q}}$ (lembre que $m > n$) tal que $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em $M_{d_{m,q}}$, mas $(m,q) \notin \Lambda$, isto é, $M_{d_{m,q}} \nsubseteq I_m$. Daí, $M_{d_{m,q}} \cap I_m = \{0\}$ (Lema 5.1.4) e assim $M_{d_{n,k}} \nsubseteq I_m$, o que é uma contradição.

Logo, $I \cap A_n = I_n$. $\square$

**Teorema 5.1.6.** *Seja $A = \overline{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}$. Definamos:*
*$\mathcal{A}_1 :=$ conjunto dos ideais em $A$*
*$\mathcal{A}_2 :=$ conjunto dos ideais em $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$*
*$\mathcal{A}_3 :=$ conjunto dos subconjuntos $\Lambda$ de $\mathcal{D}(A)$ dirigidos e hereditários.*

*Então existe uma correspondência biunívoca entre , $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ dadas* *por*

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{32}: & \mathcal{A}_3 & \to & \mathcal{A}_2 \\ & \Lambda & \mapsto & \bigcup_{n\geq 1} \bigoplus_{k;(n,k)\in\Lambda} M_{d_{n,k}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{21}: & \mathcal{A}_2 & \to & \mathcal{A}_1 \\ & I & \mapsto & \overline{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{31}: & \mathcal{A}_3 & \to & \mathcal{A}_1 \\ & \Phi_{31} & = & \Phi_{21}\circ\Phi_{32} \end{array}$$

Demonstração:

Do Teorema 5.1.5 segue que $\Phi_{32}$ é bijetiva.

Do Teorema 5.1.2 segue que $\Phi_{21}$ é sobrejetiva. Vamos provar então que $\Phi_{21}$ é injetiva.

Sejam $I_1$ e $I_2$ ideais em $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ tal que $I_1 \neq I_2$. Pelo Teorema 5.1.5, existe um fator $M_{d_{n,k}}$ que está contido em apenas um deles ($I_1$ ou $I_2$). Vamos supor que $M_{d_{n,k}} \subseteq I_1$, exclusivamente. Daí $e^{(n,k)} \notin I_2 \cap A_m$ para $m \geq n$. De fato, se $e^{(n,k)} \in I_2 \cap A_m$ para algum $m$, então $e^{(n,k)} \in I_2$ e, como $I_2$ é ideal, $M_{d_{n,k}} = e^{(n,k)}.M_{d_{n,k}} \in I_2$. Assim, $e^{(n,k)}$ é levada em um projeção não nula pela aplicação quociente

$$A_m \xrightarrow{\rho} A_m/(I_2 \cap A_m), \quad m \geq n.$$

Com isso,

$$1 = \|\rho(e^{(n,k)})\| = \inf_{y\in I_2\cap A_m} \|e^{(n,k)} - y\|, \quad \text{para} \quad m \geq n.$$

Daí,

$$1 = \|\rho(e^{(n,k)})\| = \inf_{y\in \bigcup_{m\geq n}} (I_2\cap A_m)\|e^{(n,k)} - y\|$$

e assim

$$1 = \inf_{y\in I_2} \|e^{(n,k)} - y\|,$$

implicando em $e^{(n,k)} \notin \overline{I}_2$. Como já tínhamos $e^{(n,k)} \in I_1 \subseteq \overline{I}_1$, decorre que $\overline{I}_1 \neq \overline{I}_2$. Logo, $\Phi_{21}$ é injetiva.

A bijetividade de $\Phi_{21}$ é imediata. □

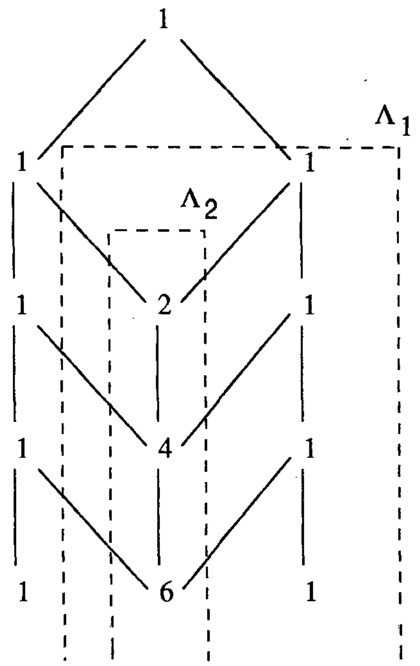
Podemos concluir desse teorema que para cada ideal $I$ de $A$ existe um subconjunto $\Lambda \subset \mathcal{D}(A)$ tal que $I$ é gerado pelos fatores cujas posições são dadas pelos elementos de $\Lambda$ e vice-versa. Na seção seguinte apresentaremos vários exemplos que esclarecem esse comentário.

## 5.2 Exemplos

Nos exemplos que se seguem vamos mostrar como identificar os ideais de uma AF-álgebra através dos subconjuntos do diagrama de Bratteli que são dirigidos e hereditários.

**Exemplo 5.2.1.** *Seja* $A = \mathbb{C}P_1 \oplus K(H) \oplus \mathbb{C}P_2$, *onde* $H$ *é separável,* $dim(H_1), dim(H_2) = \infty$, $H = H_1 \oplus H_2$ *e* $P_1$ *e* $P_2$ *são projeções sobre* $H_1$ *e* $H_2$.

O diagrama de Bratteli dessa álgebra (cuja construção pode ser obtida no exemplo 3.3 de [Landi]) é dado abaixo.

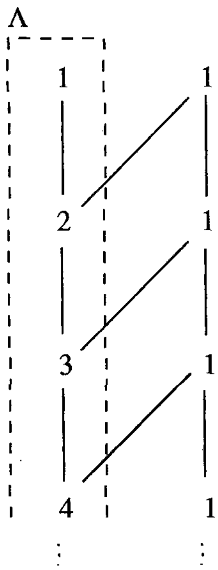



Considere os subconjuntos de $\mathcal{D}(A)$:
$\Lambda_1 = \{(2,2); (3,2); (3,3); (4,2); (4,3); (5,2); (5,3); ...\}$ e
$\Lambda_2 = \{(3,2); (4,2); (5,2); (6,2); ...\}$

É fácil ver que $\Lambda_1$ e $\Lambda_2$ são dirigidos e hereditários. Logo, pelo Teorema 5.1.6, as álgebras geradas pelos fatores cujas posições são dadas por $\Lambda_1$ e $\Lambda_2$ são ideais de $A$. Note que $\Lambda_1$ produz o ideal $I_1 = K(H) \oplus \mathbb{C}P_2$ e $\Lambda_2$ produz o ideal $I_2 = K(H)$. O outro ideal não trivial desta álgebra é $\mathbb{C}P_1 \oplus K(H)$.

**Exemplo 5.2.2.** $A = K(H) \oplus \mathbb{C}I_H$

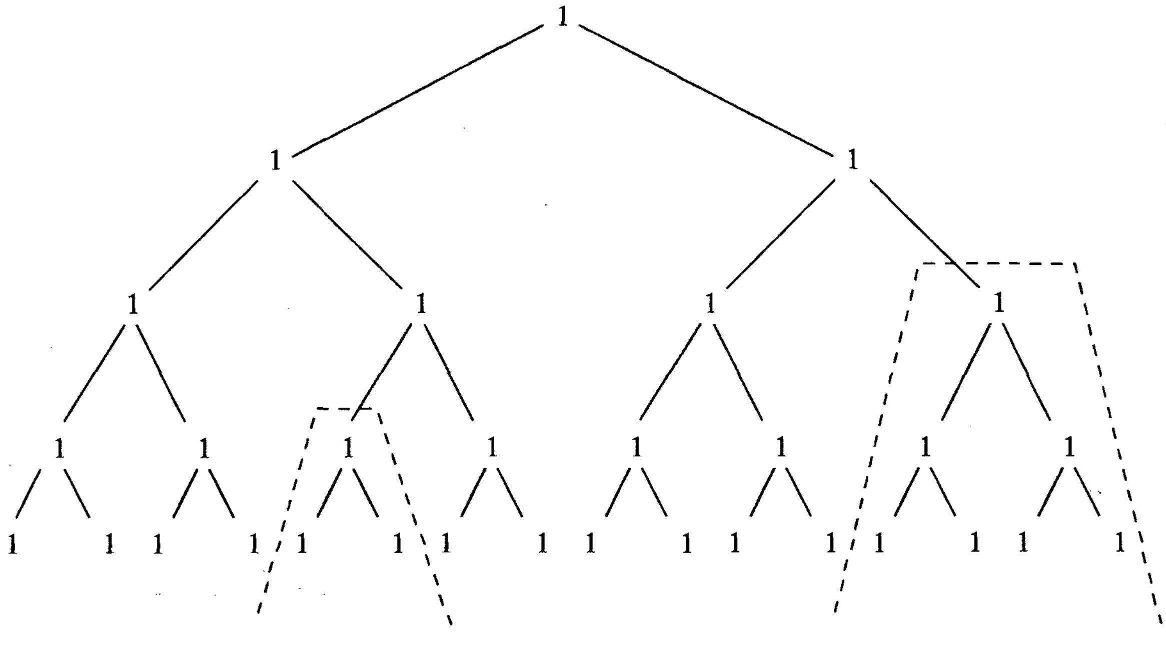
A construção do diagrama dessa álgebra obedece a procedimentos análogos àqueles utilizados na Seção 3.4, quando da construção do diagrama de $K(H)$ (o leitor interessado pode observar o exemplo 3.1 de [Landi]).




Aqui, $\Lambda_{=}\{(1,1);(2,1);(3,1);(4,1);...\}$ é o único subconjunto dirigido e hereditário. Assim, o único ideal não trivial é $K(H)$.

**Exemplo 5.2.3.** *$A = C(K)$, onde $K$ é o Conjunto de Cantor.*

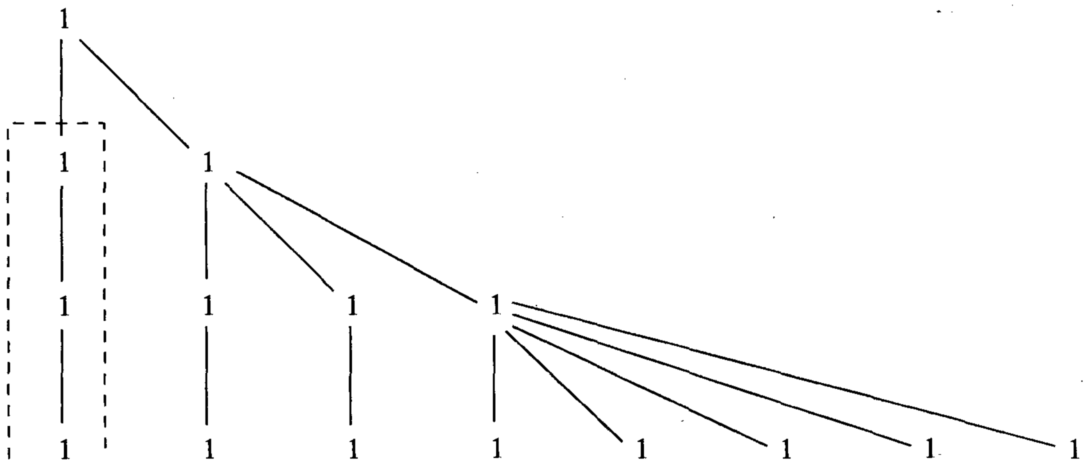
O diagrama vem dado a seguir e sua construção já foi feita na Seção 4.2..



Neste exemplo existem infinitos ideais não triviais, basta notar que a partir de cada vértice podemos obter um subconjunto dirigido e hereditário, como esses indicados no diagrama.

**Exemplo 5.2.4.** $A = C_0(\mathbb{Z}) = C(Y)$, *onde* $Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\ n \geq 1\}$.

Também já apresentaremos a construção desse diagrama na Seção 4.2.




De modo análogo ao exemplo anterior, a partir de cada vértice podemos obter um subconjunto dirigido e hereditário que produz um ideal.

**Observação 5.2.5.** *Naturalmente, já era de se esperar que no Exemplo 5.2.3 e no Exemplo 5.2.4 obtivéssemos infinitos ideais, já que as $C^*$-Álgebras em questão são comutativas.*

**Exemplo 5.2.6.** $A =$*Álgebra CAR*

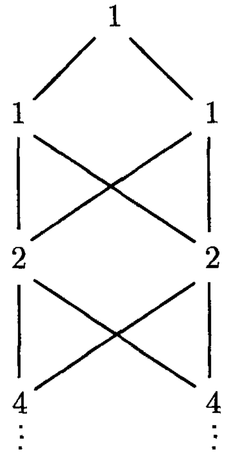
Estudaremos esta álgebra detalhadamente na Seção 6.1. O seu diagrama pode ser dado por

$$B \longmapsto \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \| \\ 2 \\ \| \\ 4 \\ \| \\ 8 \\ \vdots \end{array}$$

ou então por

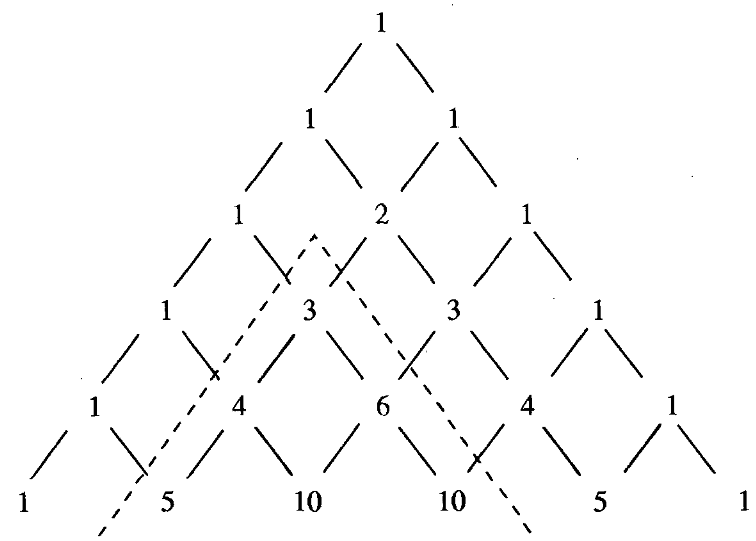
$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{array}\right]$$



É fácil ver que esta álgebra só admite ideais triviais, já que os únicos subconjuntos que são dirigidos e hereditários são $\mathcal{D}(A)$ e $\emptyset$.

**Exemplo 5.2.7.** *A=Álgebra GICAR*

Esta álgebra também será estudada na Seção 6.2. O seu diagrama é



De modo análogo ao Exemplo 5.2.3, aqui existem infinitos ideais. Um deles está em destaque.

Vamos encerrar esta seção discutindo um assunto, sobre o qual, nesta altura, o leitor já deve ter se questionado: Dada uma AF-álgebra $A$ e $I$ um ideal de $A$, é verdade que o quociente de $A$ por $I$ também é AF-álgebra ? Se for, qual a relação entre o diagrama de $A$ e o diagrama de $A/I$? A resposta é dada no

**Teorema 5.2.8.** *Seja* $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$, *I ideal de A e suponha que* $A_n = \bigoplus_{k=1}^{s_n} M_{d_{n,k}}$. *Vamos reindexar os fatores da decomposição de* $A_n$ *de tal forma que aqueles que pertençam a I fiquem todos "à direita" na decomposição, isto é, o subconjunto* $\Lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$ *associado a I vai ter a forma*

$$\Lambda = \{(n,k): \quad m_n + 1 \leq k \leq s_n, \quad n = 1,2,...\}.$$

*Seja* $\rho : A \to A/I$ *a aplicação quociente. Então*

*i.* $A/I = \overline{\bigcup_{n\geq 1} \rho(A_n)}$;

*ii.* $\rho(A_n) = \bigoplus_{k=1}^{m_n} \rho(M_{d_{n,k}})$, *onde* $\rho(M_{d_{n,k}}) \simeq M_{d_{n,k}}$ *para* $(n,k) \notin \Lambda$;

*iii. O diagrama de* $A/I$ *consiste de pares* $(n,k)$, $k = 1, ..., m_n$, *com as imersões parciais herdadas de* $\mathcal{D}(A)$, *isto é,* $(n,k) \overset{p}{\searrow} (m,q)$ *em* $\mathcal{D}(A/I)$ *se e somente se* $(n,k) \overset{p}{\searrow} (m,q)$ *em* $\mathcal{D}(A)$.

Demonstração:

(i) Como $\rho : A \to A/I$ é um morfismo sobrejetor e $\|\rho(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in A$, decorre que $A/I = \overline{\bigcup_{n\geq} \rho(A_n)}$.

(ii) Pelo Teorema 5.1.6,

$$I \cap (\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \bigcup_{n\geq 1} \bigoplus_{k=m_n+1}^{s_n} M_{d_{n,k}}.$$

Pelo Teorema 5.1.5,

$$I \cap A_n = \bigoplus_{k=m_n+1}^{s_n} M_{d_{n,k}}.$$

Então, $\rho_{|A_n}$ tem núcleo $\bigoplus_{k=m_n+1}^{s_n} M_{d_{n,k}}$ e como

$$A_n = [\bigoplus_{k=1}^{m_n} M_{d_{n,k}}] \bigoplus [\bigoplus_{k=m_n+1}^{s_n} M_{d_{n,k}}],$$

decorre que $\rho(A_n) = \bigoplus_{k=1}^{m_n} \rho(M_{d_{n,k}})$, onde $\rho(M_{d_{n,k}}) \simeq M_{d_{n,k}}$, $k = 1, ..., m_n$ (pois estes estão no núcleo).

Além disso, se indexarmos os fatores $\rho(M_{d_{n,k}})$ por $(n,k)$, é claro que a decomposição de $\rho(A_n)$ consistirá de pares $(n,k)$ com $k = 1, ..., m_n$ e $n = 1, 2, ...$ no diagrama $\mathcal{D}(A/I)$.

(iii) Suponha que $(n,k)$ e $(m,q) \notin \Lambda$ com $m \geq n$. Seja $f$ uma projeção minimal em $M_{d_{n,k}}$ e seja $f_1, ..., f_p$ um conjunto maximal de projeções minimais mutuamente ortogonais de $M_{d_{m,q}}$ tal que $\sum_{i=1}^{p} f_i \leq f$, ou seja, $\sum_{i=1}^{p} f_i = e^{(n,k)}f$. Desse modo fica claro que $p$ é a multiplicidade da imersão parcial de $M_{d_{n,k}}$ em $M_{d_{m,q}}$.

Agora, como $\rho_{|M_{d_{n,k}}}$ e $\rho_{|M_{d_{m,q}}}$ são injetivas, $\rho(f)$ é uma projeção minimal em $\rho(M_{d_{n,k}})$, $\rho(f_i)$ são projeções minimais em $\rho(M_{d_{m,q}})$ e $\sum_{i=1}^{p} \rho(f_i) = \rho(e^{(n,k)})\rho(f)$.

Logo, a multiplicidade da imersão parcial de $\rho(M_{d_{n,k}})$ em $\rho(M_{d_{m,q}})$ também é $p$. $\square$

## 5.3 AF-álgebras Simples - reconhecimento através do Diagrama de Bratteli

O próximo teorema fará uma caracterização de uma AF-álgebra Simples através do seu diagrama de Bratteli.

**Teorema 5.3.1.** *Seja $A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n}$, onde os $A_n$'s têm dimensão finita. Então as seguintes condições são equivalentes:*

*i. $A$ é simples;*

*ii. $A$ é algebricamente simples (isto é, os únicos ideais bilaterais, fechados ou não, de $A$ são $\{0\}$ e $A$);*

*iii. Se $M_{d_{n,k}}$ é um fator da decomposição central de $A_n$, então existe $m \geq n$ tal que $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em todos os fatores da decomposição de $A_m$;*

*iv. Para todo $e^{(n,k)}$ existe $m \geq n$ tal que $e^{(n,k)}.e^{(m,q)} \neq 0, \quad 1 \leq q \leq p_m$.*

Demonstração:

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) é imediato.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $I \neq 0$ ideal de $A$. Pelo Teorema 5.1.6, $I$ contém algum $M_{d_{n,k}}$. Usando a hipótese, existe $m \geq n$ tal que $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em todos os fatores da decomposição central de $A_m$. Como $I$ é gerado pelos fatores cujas posições foram um subconjunto $\Lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$ que é dirigido, temos que n

$(m,q) \in \Lambda \quad 1 \leq 1 \leq p_m$, isto é, $A_m \subseteq I$. Daí $\mathbb{1} \in I$ e portanto $I = A$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Definamos $I_m = \bigoplus_{q; e^{(m,q)}.e^{(n,k)} \neq 0} M_{d_{m,q}}$, $m \geq n$, isto é, $I_m$ é a soma direta dos fatores de $A_m$ nos quais $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso.

É claro que $I_m$ é ideal de $A_m$ e é o menor ideal que contém $e^{(n,k)}$. Desse modo, é o menor ideal que contém $M_{d_{n,k}}$.

Note que se $(n,k) \searrow (m,q)$ e $(m,q) \searrow (m+1,p)$, então $(n,k) \searrow (m+1,p)$. Daí, $I_m \subseteq I_{m+1}$ e segue que $\bigcup_{m \geq n} I_m$ é um ideal de $\bigcup_{m \geq n} A_m$ e é o menor ideal que contém $M_{d_{n,k}}$. Vamos provar esta última afirmação.

Seja $L$ ideal de $\bigcup_{m \geq n} A_n$ e seja $M_{d_{n,k}} \subseteq L$. Então $L = \bigcup_{m \geq n} L_m$, onde $L_m = L \bigcap_{m \geq n} A_m$. Temos que $M_{d_{n,k}} \subseteq L$ e $M_{d_{n,k}} \subseteq A_m$, $m \geq n$. Daí, $M_{d_{n,k}} \subseteq L \cap A_m = L_m$, $m \geq n$. Mas, como $I_m$ é o menor ideal em $A_m$ que contém $M_{d_{n,k}}$, $m \geq n$, decorre que $I_m \subseteq L_m \quad m \geq n$. Assim, $\bigcup_{m \geq n} I_m \subseteq \bigcup_{m \geq n} L_m = L$ e portanto $\bigcup_{m \geq n} I_m$ é o menor ideal em $\bigcup_{m \geq n} A_m$ que contém $M_{d_{n,k}}$,

Agora, $I = \overline{\bigcup_{m \geq n} I_m}$ é o menor ideal de $A$ que contém $M_{d_{n,k}}$. De fato, seja $L$ ideal de $A$ com $M_{d_{n,k}} \subseteq L$. Sabemos que $L = \overline{L \cap (\bigcup_{m \geq 1} A_m)}$. É claro que $M_{d_{n,k}} \subseteq L \cap (\bigcup_{m \geq 1} A_m)$. Como $\bigcup_{m \geq n} I_m$ é o menor ideal de $\bigcup_{m \geq n} A_m$ que contém $M_{d_{n,k}}$, segue que $\bigcup_{m \geq n} I_m \subseteq L \cap (\bigcup_{m \geq 1} A_m)$. Daí, $I = \overline{\bigcup_{m \geq n} I_m} \subseteq \overline{L \cap (\bigcup_{m \geq 1} A_m)} = L$. Usando a hipótese de $A$ ser simples, segue que $I = A$.

Suponha agora, por absurdo, que para todo $m \geq n$ existe $q$ tal que $e^{(m,q)}.e^{(n,k)} = 0$. Daí, para cada $m \geq n$, $I_m \neq A_m$ e assim, $\mathbb{1}$ é levado em uma projeção não nula pela aplicação quociente

$$\begin{array}{rcl} \rho: \quad A_m & \rightarrow & A_m/I_m \\ \rho(\mathbb{1}) & = & \mathbb{1} - I_m \end{array}$$

Temos assim

$$\inf_{x\in I_m, m\geq n} \|\mathbb{1}-x\| = 1$$

$$\Rightarrow \inf_{x\in \bigcup\limits_{m\geq n}} I_m\|\mathbb{1}-x\| = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{1} \notin \overline{\bigcup_{m\geq n} I_m} = I = A,$$

o que é uma contradição. Logo, (i) $\Rightarrow$ (iv).

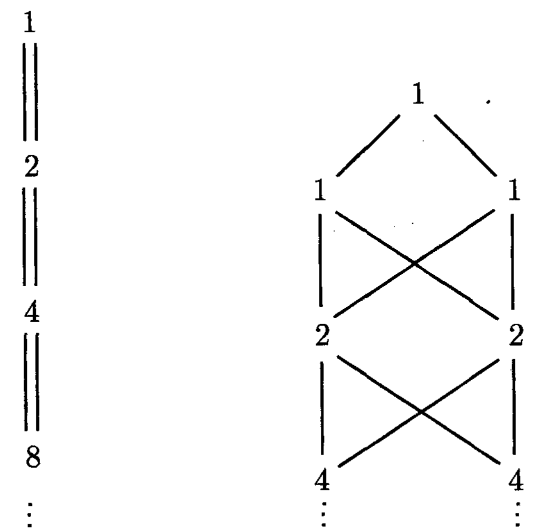
Agora vamos provar que ocorre (i) $\Leftrightarrow$ (ii) em qualquer $C^*$-Álgebra com unidade.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Trivial.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha, por contradição, que $A$ não é algebricamente simples, isto é, que existe um ideal $I$ de $A$ próprio. Logo, $\mathbb{1} \notin I$. Como $\overline{I}$ também é ideal de $A$ e como o conjunto dos elementos inversíveis é aberto em $A$, decorre que $\mathbb{1} \notin \overline{I}$. Mas isto nega a hipótese de $A$ ser simples. Logo, $A$ é algebricamente simples. □

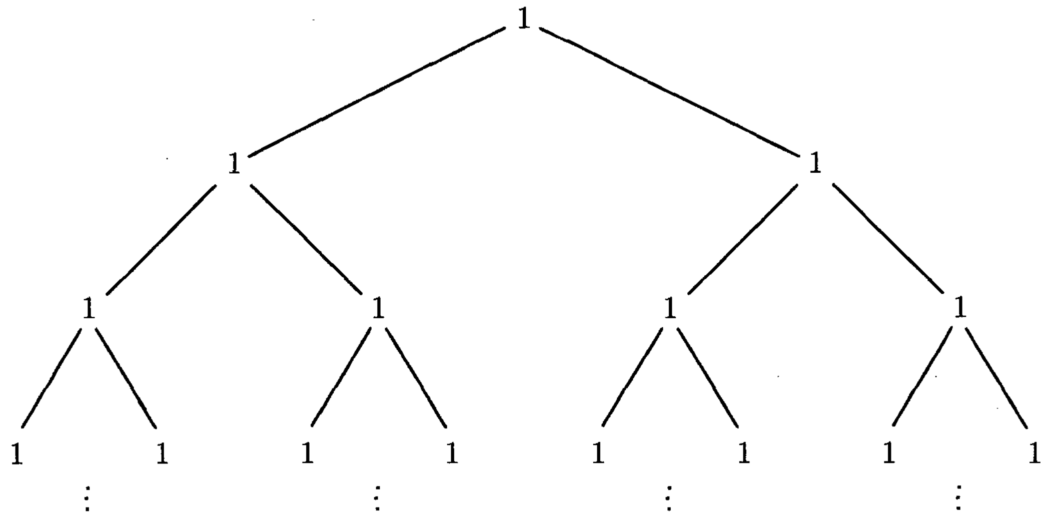
Como aplicação do teorema anterior, vamos ver alguns exemplos de AF-álgebras simples e não simples cuja identificação é feita através dos diagramas de Bratteli.

**Exemplo 5.3.2.** *A=Álgebra CAR*




Esta álgebra é Simples, pois para todo fator $M_{d_{n,k}}$ existe $m > n$ tal que $M_{d_{n,k}}$ está parcialmente imerso em todos os fatores de $A_m$.

**Exemplo 5.3.3.** *$A = C(K)$, onde $K$ é o conjuto de Cantor.*



Esta álgebra não é Simples, pois, por exemplo, para o fator $M_{d_{2,1}}$ não existe $m > 2$ tal que $M_{d_{2,1}}$ esteja parcialmente imerso em todos os fatores de $A_m$.

Vamos discutir mais uma questão dentro desse estudo de AF-álgebras simples.

**Definição 5.3.4.** *Dizemos que uma $C^*$-Álgebra unitária $A$ é $UHF$ (Uniformemente Hiperfinita) se $A$ contém uma sequência crescente $(A_n)_{n\geq 1}$ de $C^*$-subálgebras de dimensão finita, cada uma delas sendo simples e contendo a unidade de $A$, e tal que $\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ é densa em $A$.*

Pelo Lema 1.4.9, decorre que os $A_n$'s da definição anterior são todos da forma $M_{n_k}$. Assim, é fácil ver que toda $UHF$-álgebra é simples. Por outro lado, será que toda AF-álgebra simples é $UHF$? A resposta é não. Mas antes de verificar isto vamos precisar da seguinte proposição.

**Proposição 5.3.5.** *Seja $D = \overline{\bigcup_{n\geq 1} D_n}$ uma $AF$-álgebra e seja $A$ uma $C^*$-subálgebra de dimensão finita de $D$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe um unitário $U$ e um inteiro positivo $n$ tal que $UAU^* \subseteq D_n$ e $\|U - \mathbb{1}\| < \varepsilon$.*

Demonstração:

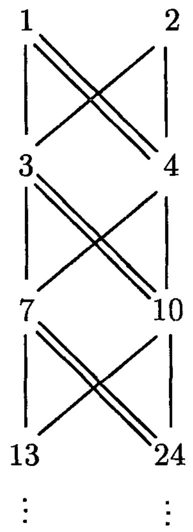
Seja $\{E_{ij}^{(s)}\}$ $1 \leq s \leq l$, $1 \leq i,j \leq k_s$ um conjunto de unidades matriciais para $A$. Como $E_{ij}^{(s)} \in D$ para todo $s,i,j$, e como $\bigcup_{n\geq 1} D_n$ é densa em $D$, então dado $\delta > 0$ e uma unidade matricial $E_{ij}^{(s)}$, existe $d_{n_s,i,j} \in D_{n_s,i,j}$ tal que $\|E_{ij}^{(s)} - d_{n_s,i,j}\| < \delta$. Como a quantidade de unidades matriciais é finita, existe $D_n$ tal que $\mathrm{dist}(E_{ij}^{(s)}, D_n) < \delta$.

Agora, usando o Lema 4.1.4, existe um unitário $U$ tal que

$$UAU^* \subseteq D_n \text{ e } \|U - \mathbb{1}\| < \varepsilon.$$

□

Considere agora a AF-álgebra cujo diagrama é dado abaixo:




Usando Teorema 5.3.1 concluímos que $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ é simples. Além disso, temos que $A_n = M_{d_{n,1}} \oplus M_{d_{n,2}}$, onde $d_{n,1}$ e $d_{n,2}$ são definidos recursivamente como

$$\begin{aligned}
d_{n,1} &= 1 \\
d_{1,2} &= 2 \\
d_{n,1} &= d_{n-1,1} + d_{n-1,2} \\
d_{n,2} &= 2d_{n-1,1} + d_{n-1,2}
\end{aligned}$$

É fácil ver, por indução, que $d_{n,1}$ e $d_{n,2}$ são primos entre si, já que 1 e 2 são primos entre si.

Suponha então que exista $M \subseteq A_n$, com $M \simeq M_p(\mathbb{C})$ e $\mathbb{1} \in M$, onde $\mathbb{1}$ é a unidade de $A$. Podemos assim definir homomorfismos $\varphi_i$, $i = 1, 2$ dados por

$$\begin{array}{ccl} M & \xrightarrow{\varphi_i} & A_n \\ a & \mapsto & ae^{(n,i)} \in Me^{(n,i)}. \end{array}$$

Além disso, como $\mathbb{1} \in M$, $\varphi_i(\mathbb{1}) = \mathbb{1}e^{(n,i)} = e^{(n,i)}$. Daí, $e^{(n,i)} \in Me^{(n,i)}$ e assim $Me^{(n,i)} \subseteq M_{d_{n,i}}$.

Com isso, $p$ divide $d_{n,1}$ e $d_{n,2}$. Mas como $MDC(d_{n,1}, d_{n,2}) = 1$ decorre que $p = 1$, isto é, $M = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Agora, se $M \subseteq A$ com $M \simeq M_p$ e $\mathbb{1} \in M$, então, pela Proposição 5.3.5, existe um fator de $A_n$ para algum $n$, com a mesma unidade $\mathbb{1}$, tal que $M$ é isomorfa a esse fator. Como já vimos que qualquer fator de $A_n$ com unidade $\mathbb{1}$ é da fora $\mathbb{C}\mathbb{1}$, vem que $M = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Portanto $A$ não contém nenhum fator do tipo $M_p$, $p < \infty$, com unidade $\mathbb{1}$, exceto $\mathbb{C}\mathbb{1}$. Logo, $A$ não é UHF.

## 5.4 Os Ideais Primitivos de uma AF-álgebra

Nesta seção (a exemplo das anteriores) tentaremos caracterizar os ideais primitivos de uma AF-álgebra $A$ através do seu diagrama de Bratteli.

**Definição 5.4.1.** *Dizemos que um ideal $I$ de uma $C^*$-Álgebra $A$ é primitivo se ele é o núcleo de alguma representação irredutível.*

**Lema 5.4.2.** *Seja $A$ uma $C^*$-Álgebra e $\pi$ uma representação irredutível de $A$ em $B(H)$. Então:*

*i. Se $I$ é ideal de $A$ e $\pi(I) \neq 0$, então $\pi_{|_I}$ é irredutível;*

*ii. Se $I_1$, $I_2$ são ideais de $A$ com $\pi(I_1) \neq 0$ e $\pi(I_2) \neq 0$, então $\pi(I_1.I_2) \neq 0$.*

Demonstração:

(i) Seja $H_1 = \{\xi \in H : \pi(I)\xi = 0\}$. Note que $H_1$ é invariante por $\pi(A)$. De fato, seja $\xi \in H_1$. Vamos mostrar que $\pi(A)\xi \in H_1$. r

Veja que

$$\pi(I)[\pi(A)\xi] = \pi(I.A)\xi = \pi(I)\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi(A)\xi \in H_1.$$

Como $\pi$ é irredutível e $H_1 \neq H$ (por hipótese $\pi(I) \neq 0$), então $H_1 = \{0\}$.

Portanto, se $\xi \in H$ e $\xi \neq 0$, então $\pi(I)\xi \neq 0$. É claro que $\pi(I)\xi$ é invariante por $\pi(A)$. Daí, como $\pi$ é irredutível, $\pi(I)\xi = H$. Portanto $\pi_{|_I}$ é irredutível.

(ii) Tomando-se $I_1$ e $I_2$ ideais de $A$ com $\pi(I_1) \neq 0$ e $\pi(I_2) \neq 0$, seque por (i) que $\pi(I_1)H = H$ e $\pi(I_2)H = H$. Daí,

$$\pi(I_1.I_2)H = \pi(I_1).\pi(I_2)H = \pi(I_1)H = H.$$

Logo, $\pi(I_1.I_2) \neq 0$. □

**Lema 5.4.3.** *Sejam $I_1$ e $I_2$ ideais de uma $C^*$-Álgebra $A$ e $I$ um ideal primitivo de $A$. Se $I \supseteq I_1.I_2$, então $I \supseteq I_1$ ou $I \supseteq I_2$.*

Demonstração:

Considere a representação irredutível $\pi$ cujo núcleo é $I$. Suponha que $I \not\supseteq I_1$ e $I \not\supseteq I_2$. Daí, $\pi(I_1) \neq 0$ e $\pi(I_2) \neq 0$. Usando (ii) do lema anterior decorre que $\pi(I_1.I_2) \neq 0$. Logo $I \not\supseteq I_1.I_2$. □

**Teorema 5.4.4.** *Seja $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$, $I$ ideal de $A$ e $\Lambda \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ associado a $I$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

*i. $I$ é primitivo;*

*ii. Não existem dois ideais $I_1$, $I_2$ em $A$ distintos de $I$ tais que $I = I_1 \cap I_2$;*

*iii. Se $(n,k)$, $(m,q) \notin \Lambda$, então existe $p \geq m,n$ e um elemento $(p,r) \notin \Lambda$ tal que $M_{d_{n,k}}$ e $M_{d_{m,q}}$ estão parcialmente imersos em $M_{d_{p,r}}$.*

Demonstração:

Vamos inicialmente verificar que basta provar o teorema com $I = \{0\}$, isto é, vamos provar que (i)⇔(i)', (ii)⇔(ii)' e (iii)⇔(iii)', onde as condições (i)', (ii)' e (iii)' são as seguintes:

i.' $\{0\}$ é ideal primitivo em $A/I$;

ii.' $\{0\}$ não é a intersecção de dois ideais ambos não nulos em $A/I$;

iii.' Se $(n,k)$, $(m,q) \notin \Lambda \subseteq \mathcal{D}(A/I)$, então existe $p \geq m,n$ e um elemento $(p,r) \notin \Lambda$ tal que $\rho(M_{d_{n,k}})$ e $\rho(M_{d_{m,q}})$ estão parcialmente imersos em $\rho(M_{d_{p,r}})$, onde $\rho$ é a aplicação quociente.

Vamos às demonstrações:

(i)⇔(i)' Trivial.

(ii)⇔(ii)' Note que existe uma correspondência 1-1 entre os ideais de $A$ que contêm $I$ e os ideais de $A/I$, dada por:

$$\begin{array}{rccc} \rho: & A & \to & A/I \\ & J & \mapsto & \rho(J), \end{array}$$

onde $A \supseteq J \supseteq I$, $J$ ideal de $A$. De fato, se $J \supseteq I$, então $J = I \cup (J/I)$. Daí, $\rho(J) = \rho(I \cup (J/I)) = \rho(I) \cup \rho(J/I) = \{0\} \cup \rho(J/I)$.

Usando esta última igualdade e o fato de que $\rho$ é injetiva fora de $I$ segue que se $J \supseteq I$ e $L \supseteq I$, com $J \neq L$, então $\rho(J) \neq \rho(L)$. Essa aplicação (e sua inversa) preserva inclusão. Assim, (ii) ocorre se e somente se $\{0\}$ não é a intersecção de dois ideais ambos diferentes de $\{0\}$ em $A/I$.

(iii)$\Leftrightarrow$(iii)' Basta usar o item (iii) do Teorema 5.2.8.

Agora podemos demonstrar o Teorema 5.4.4 com $I = \{0\}$.

(i)' $\Rightarrow$ (ii)' Suponha que existe $I_1, I_2$, ambos diferentes de $\{0\}$ tais que $I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Note que $I_1.I_2 = \{ab,\ a \in I_1,\ b \in I_2\} \subseteq I_1 \cap I_2 = \{0\}$. Usando o Lema 5.4.3 segue que $\{0\} \supseteq I_1$ ou $\{0\} \supseteq I_2$. Daí, $I_1 = \{0\}$ ou $I_2 = \{0\}$, o que é uma contradição.

(ii)' $\Rightarrow$ (iii)' Seja $(n, k)$ e $(m, q) \in \mathcal{D}(A)$. Usando o Teorema 5.3.1, temos que os ideais em $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n$ gerados algebricamente por $M_{d_{n,k}}$ e $M_{d_{m,q}}$ são

$$I_1 = \bigcup_{p \geq n} [\bigoplus_{r; e^{(n,k)}.e^{(p,r)} \neq 0} M_{d_{p,r}}]$$

e

$$I_2 = \bigcup_{p \geq m} [\bigoplus_{r; e^{(m,q)}.e^{(p,r)} \neq 0} M_{d_{p,r}}].$$

Usando a hipótese, $\overline{I}_1 \cap \overline{I}_2 \neq \{0\}$. Usando 5.1.2 e 5.1.6 temos que

$$\{0\} \neq \overline{I}_1 \cap \overline{I}_2 \cap (\bigcup_{n \geq 1} A_n) = [\overline{I}_1 \cap (\bigcup_{n \geq 1} A_n)] \cap [\overline{I}_2 \cap (\bigcup_{n \geq 1} A_n)] = I_1 \cap I_2.$$

Sabemos que $I_1$ e $I_2$ são uniões de subespaços indexados por $p$. No Teorema 5.3.1 vimos que esses subespaços são crescentes com $p$. Como $I_1 \cap I_2 \neq \{0\}$, existe $p$ tal que a intersecção dos correspondentes subespaços em $I_1$ e $I_2$ é não nula, isto é, existe $(p, r) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $e^{(m,q)}.e^{(p,r)} \neq 0$ e $e^{(n,k)}.e^{(p,r)} \neq 0$. Daí, $M_{d_{n,k}}$ e $M_{d_{m,q}}$ estão parcialmente imersos em $M_{d_{p,r}}$.

(iii)' $\Rightarrow$ (ii)' Seja $I_1$ e $I_2$ dois ideais de $A$ não nulos. Então existem $(n, k)$ e $(m, q) \in \mathcal{D}(A)$ tal que $M_{d_{n,k}} \subseteq I_1$ e $M_{d_{m,q}} \subseteq I_2$. Daí, os ideais gerados por $M_{d_{n,k}}$ e $M_{d_{m,q}}$ estão contidos em $I_1$ e $I_2$, respectivamente, isto é,

$$J_1 = \bigcup_{p \geq n} [\bigoplus_{r; e^{(n,k)}.e^{(p,r)} \neq 0} M_{d_{p,r}}] \subseteq I_1$$

e

$$J_2 = \bigcup_{p \geq m} [ \bigoplus_{r; e^{(m,q)}.e^{(p,r)} \neq 0} M_{d_{p,r}} ] \subseteq I_2.$$

Usando a hipótese, existe $p \geq m, n$ e $r$ tal que $e^{(m,q)}.e^{(p,r)} \neq 0$ e $e^{(n,k)}.e^{(p,r)} \neq 0$. Daí, $M_{d_{p,r}} \subseteq J_1 \cap J_2 \subseteq I_1 \cap I_2$, implicando em $I_1 \cap I_2 \neq 0$.

(ii)' $\Rightarrow$ (i)' Este fato é uma consequência imediata do Corolário 1 do Teorema 2 de [Dixmier]. □

**Corolário 5.4.5.** *Seja* $A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n}$. *As seguintes condições são equivalentes:*

*i. A é Primitiva;*

*ii. Não existem dois ideais de A não nulos cuja intersecção é nula;*

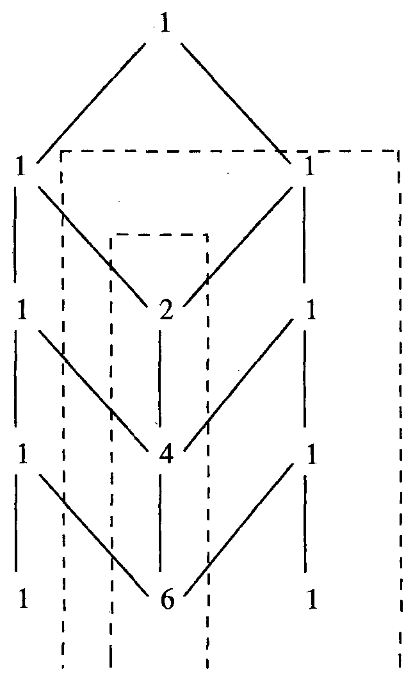
*iii. Se* $(n,k)$ *e* $(m,q) \in \mathcal{D}(A)$, *então existe* $p \geq m, n$ *e* $(p,r) \in \mathcal{D}(A)$ *tal que* $M_{d_{n,k}}$ *e* $M_{d_{m,q}}$ *estão parcialmente imersos em* $M_{d_{p,r}}$.

Demonstração:

Basta usar a definição de álgebra Primitiva e aplicar o Teorema 5.4.4 ($A$ é primitiva se $\{0\}$ é ideal primitivo). □

Nas AF-álgebras a seguir vamos verificar se seus ideais são primitivos ou não usando o item (iii) do Teorema 5.4.4.

**Exemplo 5.4.6.** $A = \mathbb{C}P_1 \oplus K(H) \oplus \mathbb{C}P_2$

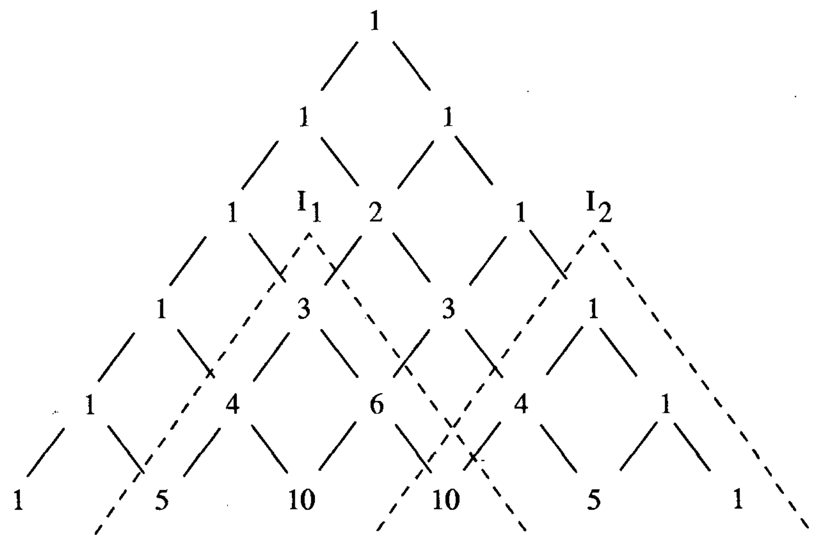


Já vimos que seus ideais não triviais são

$$\mathbb{C}P_1 \oplus K(H), \quad K(H) \quad \text{e} \quad K(H) \oplus \mathbb{C}P_2.$$

É fácil ver que $\mathbb{C}P_1 \oplus K(H)$ e $K(H) \oplus \mathbb{C}P_2$ são ideais primitivos, usando (iii) do Teorema 5.4.4. Mas $K(H)$ não é primitivo, pois tomando-se, por exemplo, os vértices $(3,1)$ e $(3,3)$ é impossível obter um vértice $(p,r)$ que não faça parte do ideal $K(H)$ e tal que $(3,1)$ e $(3,3)$ esteja parcialmente imersos em $(p,r)$.

**Exemplo 5.4.7.** *A=Álgebra GICAR*




Já vimos que nesta álgebra existem infinitos ideais. Cada vértice "gera" um ideal.

Aqui, todos os ideais que "começam" nos vértices situados no extremo direito ou esquerdo dos níveis são primitivos (veja $I_2$) no diagrama. Por outro lado, todo ideal que "começa" em algum vértice que não esteja na extremidade do nível não é primitivo. Por exemplo, $I_1$ no diagrama não é primitivo. Para ver isto basta tomar os vértices $(4,1)$ e $(3,3)$. É fácil ver que não existe vértice $(p,r)$ fora de $I_1$ tal que $(4,1)$ e $(3,3)$ estejam parcialmente imersos.

# Capítulo 6

# Um exemplo especial: a álgebra CAR e a sua subálgebra GICAR

## 6.1 A álgebra CAR (Canonical Anticommutation Relations)

Esta sigla (CAR) está ligada a uma noção oriunda da física quântica para Férmions, onde certos operadores, chamados de operadores de Aniquilação e Criação de Férmions, satisfazem certas relações de anticomutação.

Sejam $H$ e $K$ espaços de Hilbert não nulos tais que $\dim(H) = n \leq \infty$ e seja $\alpha : H \to B(K)$ uma aplicação linear satisfazendo, para todo $f, g \in H$, as relações de anticomutação:

i. $\alpha(f)\alpha(g) + \alpha(g)\alpha(f) = 0$

ii. $\alpha(f)^*\alpha(g) + \alpha(g)\alpha(f)^* = \langle g, f\rangle I$

**Teorema 6.1.1.** *Com as notações anteriores, seja $A = \overline{span}\{\alpha(f) : f \in H\}$. Então,*

*(a) Se $\dim(H) = n < \infty$, temos que $A \simeq M_{2^n}$;*

*(b) Se $\dim(H) = \infty$, temos que $A = \overline{\bigcup_{n\geq 1} M_{2^n}}$.*

*Além disso, se $\alpha : H \to B(K_1)$ e $\beta : H \to B(K_2)$ satisfazem (a) e (b), então existe um $*$-isomorfismo $\psi : C^*(\alpha(f)) \to C^*(\beta(f))$ tal que $\psi(\alpha(f)) = \beta(f)$, para todo $f \in H$, isto é, a álgebra $A$ independe da escolha de $\alpha$.*

Demonstração:

Tome $f \in H$ com $\|f\| = 1$ e faça $g = f$. Daí, decorre de (i) e (ii) que

$$\alpha(f)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha(f)^*\alpha(f) + \alpha(f)\alpha(f)^* = I.$$

Multiplicando a equação (ii) por $\alpha(f)^*\alpha(f)$, obtemos

$$[\alpha(f)^*\alpha(f)]^2 = \alpha(f)^*\alpha(f).$$

Assim, $E(f) := \alpha(f)^*\alpha(f)$ é projeção e

$$E(f)^{\perp} = I - E(f) = I - \alpha(f)^*\alpha(f) = \alpha(f)\alpha(f)^*.$$

Agora é fácil ver que

$$C^*(\alpha(f)) = \text{span}\{\alpha(f), \alpha(f)^*, E(f), E(f)^{\perp}\} \simeq M_2$$

com a seguinte identificação das bases:

$$\begin{array}{rcl} E_{21}^{(1)} & = & \alpha(f) \\ E_{12}^{(1)} & = & \alpha(f)^* \\ E_{11}^{(1)} & = & E(f) \\ E_{22}^{(1)} & = & E(f)^{\perp} \end{array}$$

Tomando, agora, $f$ e $g$ ortonormais e usando (i) e (ii), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(g)E(f) - E(f)\alpha(g) &= \alpha(g)\alpha(f)^*\alpha(f) - \alpha(f)^*\alpha(f)\alpha(g) \\ &= \alpha(g)\alpha(f)^*\alpha(f) + \alpha(f)^*\alpha(g)\alpha(f) \\ &= [\alpha(g)\alpha(f)^* + \alpha(f)^*\alpha(g)]\alpha(f) \\ &= \langle g, f\rangle\alpha(f) = 0. \end{aligned}$$

Isto implica em

$$\alpha(g)\Diamond E(f) \quad \text{e} \quad E(g)\Diamond E(f) \tag{1}$$

(onde o símbolo $\Diamond$ tem o significado de comutação).
Agora, seja $V_1 := I - 2E(f) = E(f)^{\perp} - E(f)$. Usando (i) e o fato de que $\alpha(f)^2 = 0$, decorre que

$$\begin{aligned} V_1\alpha(g)\alpha(f) &= -\,V_1\alpha(f)\alpha(g) \\ &= -\,(E(f)^{\perp} - E(f))\alpha(f)\alpha(g) \\ &= -\,E(f)^{\perp}\alpha(f)\alpha(g) + E(f)\alpha(f)\alpha(g) \\ &= -\,\alpha(f)\alpha(f)^*\alpha(f)\alpha(g) + \alpha(f)^*\alpha(f)^2\alpha(g) \\ &= -\,\alpha(f)\alpha(f)^*\alpha(f)\alpha(g) \\ &= \alpha(f)^2\alpha(f)^*\alpha(g) - \alpha(f)\alpha(f)^*\alpha(f)\alpha(g) \\ &= \alpha(f)[E(f)^{\perp} - E(f)]\alpha(g) \\ &= \alpha(f)V_1\alpha(g). \end{aligned}$$

Logo,

$$V_1\alpha(g)\Diamond\alpha(f) \text{ e } V_1\alpha(g)\Diamond\alpha(f)^*. \tag{2}$$

Agora, por (1),

$$C^*(V_1\alpha(g)) = \text{span}\{V_1\alpha(g), V_1\alpha(g)^*, E(g), E(g)^\perp\}.$$

É claro que $C^*(V_1\alpha(g)) \simeq M_2$ e, por (2), comuta com $C^*(\alpha(f))$.
Sejam

$$\begin{aligned} E_{21}^{(2)} &= V_1\alpha(g) \\ E_{12}^{(2)} &= V_1\alpha(g)^* \\ E_{11}^{(2)} &= E(g) \\ E_{22}^{(2)} &= E(g)^\perp. \end{aligned}$$

Assim, a $C^*(\alpha(f), \alpha(g))$ é isomorfa a $M_4$ com o sistema de unidades matriciais $E_{ij}^{(1)}E_{kl}^{(2)}$, $1 \leq i,j,k,l \leq 2$. De fato, provemos que

$$E_{(i,k)(j,l)} := E_{ij}^{(1)}E_{kl}^{(2)}, \quad i,j,k,l \in \{1,2\} \tag{3}$$

definem unidades matriciais para $M_4$.

Como $C^*(V_1\alpha(g))\Diamond C^*(\alpha(f))$, vem que

$$\begin{aligned} E_{(i,k)(j,l)}E_{(m,n)(p,q)} &= E_{ij}^{(1)}E_{kl}^{(2)}E_{mp}^{(1)}E_{nq}^{(2)} \\ &= E_{ij}^{(1)}E_{mp}^{(1)}E_{kl}^{(2)}E_{nq}^{(2)} \\ &= \delta_{jm}E_{ip}^{(1)}\delta_{ln}E_{kq}^{(2)} \\ &= \delta_{(j,l)(m,n)}E_{(i,k)(p,q)}. \end{aligned}$$

Portanto, (3) define unidades matriciais para $M_4$.

Neste momento cabem duas perguntas. A primeira delas é: de que forma os 16 vetores da base de $M_4$ $(F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}, ..., F_{43}, F_{44})$ são levados (já que existe um isomorfismo) na base $E_{ij}^{(1)}E_{kl}^{(2)}$ de $C^*(\alpha(f), \alpha(g))$?
Resposta: os elementos $E_{kl}^{(2)}$ indicam os 4 blocos $2 \times 2$ da matriz e os elementos $E_{ij}^{(1)}$ indicam a posição do número 1 dentro de cada um dos 4 blocos $2 \times 2$. Como exemplo:

$$\begin{aligned} F_{13} &\mapsto E_{11}^{(1)}E_{12}^{(2)} \\ F_{21} &\mapsto E_{21}^{(1)}E_{11}^{(2)} \\ F_{43} &\mapsto E_{21}^{(1)}E_{22}^{(2)} \end{aligned}$$

A segunda pergunta é: de que modo é feita a imersão da subálgebra $C^*(\alpha(f)) \simeq M_2$ na álgebra $C^*(\alpha(f), \alpha(g)) \simeq M_4$?

Resposta: Usando as identificações dos elementos $E_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2$, podemos notar, algebricamente, que os elementos $E_{ij}^{(1)}$ são levados em $M_4$ ao longo da diagonal principal. Por exemplo:

$$E_{12}^{(1)} = \alpha(f)^* = E_{12}^{(1)} E_{11}^{(2)} + E_{12}^{(1)} E_{22}^{(2)} = F_{12} + F_{34}.$$

Na verdade, esta conclusão já poderia ser obtida do fato de que estas imersões preservam a identidade.

Agora, fixe uma base ortonormal $\{f_n,\ n \geq 1\}$ para $H$. Seja

$$V_1 = I \quad \text{e} \quad V_n = \prod_{i=1}^{n-1} (I - 2E(f_i)), \quad n \geq 2.$$

Podemos então definir unidades matriciais para uma cópia de $M_2$ por

$$\begin{aligned} E_{21}^{(n)} &= V_n \alpha(f_n) \\ E_{12}^{(n)} &= V_n \alpha(n)^* \\ E_{11}^{(n)} &= E(f_n) \\ E_{22}^{(n)} &= E(f_n)^{\perp}. \end{aligned}$$

Estendendo a análise feita anteriormente, segue que essas cópias de $M_2$ comutam entre si. Logo

$$A_n := C^*(\alpha(f_i),\ 1 \leq i \leq n)$$

é isomorfa a $M_{2^n}$ com a base consistindo de unidades matriciais:

$$E_{\varphi\psi} := \prod_{k=1}^{n} E_{\varphi(k)\psi(k)}^{(k)} \quad \forall\ \varphi, \psi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2\}.$$

Isto finalmente prova (a).

Agora, considere $\dim(H) = \infty$. Vamos provar que $\overline{\bigcup_n A_{2^n}} = A = \overline{\bigcup_n A_n}$. É fácil ver que se $a \in \overline{\bigcup_n A_n}$, então $a \in \overline{\text{span}}\{\alpha(f),\ f \in H\}$.

Por outro lado, note que se $\alpha$ satisfaz (i) e (ii), então $\alpha$ é contínua. De fato:

$$\begin{aligned} \|\alpha(f)\|^2 &= \|\alpha(f)\alpha(f)^*\| \\ &\leq \|\alpha(f)\alpha(f)^* + \alpha(f)\alpha(f)^*\| \\ &= \|\langle f, f\rangle I\| \\ &= \|f\|^2, \end{aligned}$$

implicando em $\|\alpha(f)\| \leq \|f\|$.

Daí, para $f \in H$, $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha(f_i) \ \in \overline{\bigcup_n A_n}$. Assim, (b) está provado.

Na questão da unicidade não há o que fazer, pois ficou claro ao longo da demonstração que a escolha de $\alpha$ é irrelevante. Assim, existe um $*$-isomorfismo natural $\psi : C^*(\alpha(f)) \to C^*(\beta(f))$ tal que $\psi(\alpha(f)) = \beta(f)$ para todo $f \in H$. □

Finalmente podemos definir

**Definição 6.1.2.** *A álgebra $A = C^*(\alpha(f),\ f \in H)$ é chamada de Álgebra CAR.*

## 6.2 A álgebra GICAR (Gauge Invariant CAR)

Seja $U$ um operador unitário sobre $H$. Vamos definir um automorfismo da álgebra CAR, começando da seguinte forma:

$$\varphi_U(\alpha(f)) = \alpha(Uf) \quad \forall\ f \in H.$$

Verifiquemos que $\varphi_U$ preserva as relações (i) e (ii) da Seção anterior:

(i): $\varphi_U(\alpha(f))\varphi_U(\alpha(g)) + \varphi_U(\alpha(g))\varphi_U(\alpha(f)) = \alpha(Uf)\alpha(Ug) + \alpha(Ug)\alpha(Uf) = 0.$

(ii):
$$\begin{aligned} \varphi_U^*(\alpha(f))\varphi_U(\alpha(g)) + \varphi_U(\alpha(g))\varphi_U^*(\alpha(f)) &= \alpha(Uf)^*\alpha(Ug) + \alpha(Ug)\alpha(Uf)^* \\ &= \langle Ug, Uf\rangle I \\ &= \langle g, U^*Uf\rangle I \\ &= \langle g, f\rangle I \end{aligned}$$

Disso decorre que $\varphi_U \circ \alpha : H \to B(K)$ satisfaz (i) e (ii). Usando o Teorema 6.1.1 temos que existe um isomorfismo $\psi$ entre $C^*((\varphi_U \circ \alpha)(f))$ e $C^*(\alpha(f))$ tal que

$$\psi(\alpha(f)) = (\varphi_U \circ \alpha)(f) = \varphi_U(\alpha(f)).$$

Isto mostra que $\varphi_U$ estende-se a uma $*$-isomorfismo de $A$ (álgebra CAR).

Considere agora os operadores unitários da forma $\lambda I$, com $\lambda \in S^1$.

**Definição 6.2.1.** *Os automorfismos da forma $G_\lambda := \varphi_{\lambda I}$, onde*

$$\begin{aligned} G_\lambda(\alpha(f)) &= \alpha(\lambda f) = \lambda\alpha(f) \ e \\ G_\lambda(\alpha(f)^*) &= \overline{\lambda}\alpha(f)^*, \quad \forall\ f \in H,\ \lambda \in S^1 \end{aligned}$$

*são chamados de Automorfismos de Gauge.*

**Definição 6.2.2.** *A álgebra GICAR, denotada por $A^0$, é a subálgebra de $A$ que é invariante por todos os automorfismos de Gauge, isto é,*

$$A^0 := \{a \in A : \; G_\lambda(a) = a \;\; \forall\, \lambda \in S^1\}.$$

**Proposição 6.2.3.** $A_n^0 \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} M_{\binom{n}{k}}$, *onde* $A_n^0 := A^0 \cap A_n$.

Demonstração:

Primeiro note que se $f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m \in H$, então

$$a := \alpha(f_1)^* ... \alpha(f_n)^* \alpha(g_1) ... \alpha(g_m) \in A$$

e

$$\begin{aligned} G_\lambda(a) &= \overline{\lambda}\alpha(f_1)^* ... \overline{\lambda}\alpha(f_n)^* \lambda\alpha(g_1) ... \lambda\alpha(g_m) \\ &= \overline{\lambda}^n \lambda^m a \\ &= \lambda^{m-n} a \\ &\Rightarrow a \in A^0 \text{ quando } m = n. \end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned} G_\lambda(E(f)) &= G_\lambda(\alpha(f)^*\alpha(f)) \\ &= \overline{\lambda}\alpha(f)^*\lambda\alpha(f) \\ &= E(f) \;\; \forall\, f \in H \\ &\Rightarrow G_\lambda(V_n) = V_n, \text{ onde } \; V_n = \prod_{i=1}^{n-1}(I - 2E(f_i)), \; n \geq 2 \end{aligned}$$

Assim, as unidades matriciais $E_{ij}^{(n)}$, $1 \leq i, j \leq 2$ satisfazem

$$G_\lambda(E_{ij}^{(n)}) = \lambda^{i-j} E_{ij}^{(n)},$$

pois

$$\begin{aligned} E_{11}^{(n)} &= E(f_n) \\ E_{21}^{(n)} &= V_n\alpha(f_n) \\ E_{12}^{(n)} &= V_n\alpha(f_n)^* \\ E_{22}^{(n)} &= E(f_n)^\perp \end{aligned}$$

Com isso, $G_\lambda$ age sobre um elemento da base de $A_n$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
G_\lambda(\prod_{k=1}^{n} E^{(k)}_{i_k j_k}) &= \prod_{k=1}^{n} G_\lambda(E^{(k)}_{i_k j_k}) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \lambda^{i_k - j_k} E^{(k)}_{i_k j_k} \\
&= \lambda^{\sum_{k=1}^{n} i_k - j_k} \prod_{k=1}^{n} E^{(k)}_{i_k j_k}
\end{aligned}
$$

Isto quer dizer que $A_n^0$ contém a álgebra gerada pelas unidades matriciais satisfazendo $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k$.

Por outro lado, note que se $a \in A_n^0$, então $a \in A_n$, isto é, $a$ tem a forma

$$
a = \sum_{s=1}^{2^{2n}} a_s \prod_{k=1}^{n} E^{(k)}_{i_k(s) j_k(s)}, \quad \text{onde} \quad i_k(s), j_k(s) \in \{1,2\}.
$$

Além disso, como $G_\lambda(a) = a$, decorre que

$$
\sum_{s=1}^{2^{2n}} a_s \lambda^{\sum_{k=1}^{n} i_k(s) - j_k(s)} \prod_{k=1}^{n} E^{(k)}_{i_k(s) j_k(s)} = \sum_{s=1}^{2^{2n}} a_s \prod_{k=1}^{n} E^{(k)}_{i_k(s) j_k(s)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a_s \lambda^{\sum_{k=1}^{n} i_k(s) - j_k(s)} = a_s \quad \forall\, s, \ \ \forall\, \lambda \\
&\Rightarrow \quad \lambda^{\sum_{k=1}^{n} i_k(s) - j_k(s)} = 1 \quad \forall\, \lambda \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} i_k(s) = \sum_{k=1}^{n} j_k(s).
\end{aligned}
$$

Concluímos portanto que $A_n^0$ é a álgebra gerada pelas unidades matriciais satisfazendo $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k$.

Como $i_k$ e $j_k$ só assumem os valores 1 e 2, decorre que os possíveis valores para $\sum_{k=1}^{n} i_k$ ou $\sum_{k=1}^{n} j_k$ são $n, n+1, n+2, ..., 2n$.

Agora, para cada natural $s$ tal que $0 \leq s \leq n$, o conjunto

$$
F_s^n := \text{span}\{E_{\varphi\psi};\ \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} \psi(k)\}
$$

é uma álgebra. De fato, se $E_{\varphi\psi},\ E_{\varphi'\psi'} \in F_s^n$, então

$$
E_{\varphi\psi} E_{\varphi'\psi'} = \delta_{\psi\varphi'} E_{\varphi\psi'}
$$

e é não nulo se e somente se $\psi = \varphi'$. Daí, $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(k) = n + s = \sum\limits_{k=1}^{n} \psi'(k)$.

Além disso, a igualdade $E_{\varphi\psi}E_{\varphi'\psi'} = \delta_{\psi\varphi'}E_{\varphi\psi'}$ mostra que $F_s^n F_t^n = 0$ para $s \neq t$. Isto significa que esta decomposição de $A_n^0$ é uma soma direta, isto é $A_n^0 = \bigoplus\limits_{s=0}^{n} F_s^n$.

A dimensão de $F_s^n$ é calculada com base no fato de que existem exatamente $s$ números 2 e $n-s$ números 1 em cada um dos termos $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(k)$ e $\sum\limits_{k=1}^{n} \psi(k)$ de $E_{\varphi\psi} = \prod\limits_{k=1}^{n} E^{(k)}_{\varphi(k)\psi(k)}$.

Desse modo, existem $\binom{n}{s}$ funções de $\{1, 2, ..., n\}$ em $\{1, 2\}$ satisfazendo $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(k) = n + s$ e assim, $F_s^n \simeq M_{\binom{n}{s}}$.

Portanto, $A_n^0 \simeq \bigoplus\limits_{k=0}^{n} M_{\binom{n}{k}}$. $\square$

Agora vamos estudar a imersão de $A_n^0$ em $A_{n+1}^0$.

Se $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2\}$, então $\varphi$ pode ser extendida de duas formas, de $\{1, ..., n, n+1\}$ em $\{1, 2\}$, do seguinte modo:

$$\varphi_1 : \{1, ..., n, n+1\} \to \{1, 2\}$$

$$\varphi_1(k) = \begin{cases} \varphi(k) & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 1 & , \quad k = n+1 \end{cases}$$

e

$$\varphi_2 : \{1, ..., n, n+1\} \to \{1, 2\}$$

$$\varphi_2(k) = \begin{cases} \varphi(k) & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 2 & , \quad k = n+1 \end{cases}$$

Na imersão de $A_n$ em $A_{n+1}$ é fácil ver que $E_{\varphi\psi}$ é levada em $E_{\varphi_1\psi_1} + E_{\varphi_2\psi_2}$.

Daí, se $E_{\varphi\psi} \in F_s^n$, então,

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} \psi(k) = n + s,$$

implicando em

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_1(k) = \sum_{k=1}^{n+1} \psi_1(k) = (n+1) + s \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_2(k) = \sum_{k=1}^{n+1} \psi_2(k) = (n+1) + (s+1),$$

que por sua vez implica em

$$E_{\varphi_1\psi_1} \in F_s^{n+1} \quad \text{e} \quad E_{\varphi_2\psi_2} \in F_{s+1}^{n+1}.$$

Portanto, o diagrama abaixo (também conhecido como Triângulo de Pascal) é o diagrama de Bratteli para a seqüência $A_n^0$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & / & & \backslash & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & \\
 & / & & \backslash & & / & & \backslash & \\
 & 1 & & & 2 & & & 1 & \\
/ & & \backslash & / & & \backslash & / & & \backslash \\
1 & & 3 & & & 3 & & & 1 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
/ & & \backslash\ / & & \backslash\ / & & \backslash\ / & & \backslash \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

**Lema 6.2.4.** *A aplicação $\lambda \mapsto G_\lambda(a)$ é contínua para cada $a \in A$.*

Demonstração:

Já sabemos que $G_\lambda(\prod_{k=1}^{n} E_{i_k j_k}^{(k)}) = \lambda^{\sum_{k=1}^{n}(i_k - j_k)} \prod_{i=1}^{n} E_{i_k j_k}^{(k)}$. Disso decorre que $G_\lambda$ é contínua para as matrizes $E_{\varphi\psi}$. Como $A_n$ é de dimensão finita, segue que $G_\lambda$ é contínua para $a \in A_n$.

Agora, seja $a \in A$ e $\varepsilon > 0$. Tome $b \in A_n$, $n$ suficientemente grande, tal que $\|a - b\| < \varepsilon$. Escolha $\delta > 0$ tal que se $|\lambda - \lambda'| < \delta$, então $\|G_\lambda(b) - G'_\lambda(a)\| < \varepsilon$. Assim, para $|\lambda - \lambda'| < \delta$, temos

$$\begin{aligned}
\|G_\lambda(a) - G'_\lambda(a)\| &\leq \|G_\lambda(a) - G_\lambda(b)\| + \|G_\lambda(b) - G'_\lambda(b)\| + \|G'_\lambda(b) - G'_\lambda(a)\| \\
&\leq \|a - b\| + \varepsilon + \|b - a\| \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \quad \forall\, a \in A.
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda \mapsto G_\lambda(a)$ é contínua para todo $a \in A$. □

**Proposição 6.2.5.** $A^0 = \{a \in A : \ G_\lambda(a) = a, \ \ \forall\, \lambda \in S^1\} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n^0}$.

Demonstração:

Basta mostrar que $\bigcup_{n\geq 1} A_n^0$ é denso em $A^0$.

Seja $a \in A^0$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $b \in A_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|a - b\| < \varepsilon$. Definamos $b_0 = \int_{S^1} G_\lambda(b)\, d\lambda$, onde $d\lambda$ é a medida normalizada de Lebesgue sobre o círculo (esta integral faz sentido já que $G_\lambda(b)$ é contínua, pelo Lema 6.2.4).

Vamos provar que $b_0 \in A_n^0$. É claro que $b_0 \in A_n$, pois como $G_\lambda(A_n) = A_n$, decorre que $G_\lambda(b) \in A_n$. Assim, $b_0 = \int_{S^1} G_\lambda(b)\, d\lambda \in A_n$.

Por outro lado, usando o Lema 6.2.4 e o Teorema de Haar, vem que

$$\begin{aligned} G_\mu(b_0) &= G_\mu\Big(\int_{s^1} G_\lambda(b)\, d\lambda\Big) \\ &= \int_{s^1} G_\mu(G_\lambda(b))\, d\lambda \\ &= \int_{s^1} G_{\mu\lambda}(b)\, d\lambda \\ &= \int_{s^1} G_\rho(b)\, d\rho \\ &= b_0, \quad \forall\, \mu \in S^1 \\ &\Rightarrow b_0 \in A^0 \end{aligned}$$

Portanto, $b_0 \in A_n \cap A^0 = A_n^0$.

Agora,

$$\begin{aligned} \|a - b\| &= \Big\|\int_{s^1} G_\lambda(a)\, d\lambda - \int_{s^1} G_\lambda(b)\, d\lambda\Big\| \\ &\leq \int_{s^1} \|G_\lambda(a-b)\|\, d\lambda \\ &\leq \int_{s^1} \|a-b\|\, d\lambda \\ &= \|a-b\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\bigcup_{n\geq 1} A_n^0$ é densa em $A^0$, isto é $A^0 = \overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n^0}$. □

# Bibliografia


[Bratteli] Ola Bratteli. *Inductive Limits of Finite-Dimensional $C^*$-álgebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1972) 195-234.

[Dixmier] Jacques Dixmier. *Sur Les $C^*$-álgebras.* Bull. Soc. Math. France 88 (1960), 95-112

[Davidson] Davidson,Kenneth R. *$C^*$-álgebras by Example.* Fields Institute Monographs, 1996, AMS.

[Gelfand 43] I.M. Gelfand and M.A. Naimark. *On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators in the Hilbert Space.* Mat. Sb. 12 (1943) 197-213 (in Russian).

[Gelfand 48] I.M. Gelfand and M.A. Naimark. *Normed Rings with Involution and their Representations.* Izv. Akad. Nauk SSR 12 (1948) 445-480 (in Russian).

[Kreyszig] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library, 1989.

[Landi] Giovani Landi. *Noncommutative Spaces and their Geometry.* 1997.

[Murphy] G.J. Murphy. *$C*$-álgebras and Operator Theory.* Academic Press, Inc., 1990.

[Rudin] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1976.